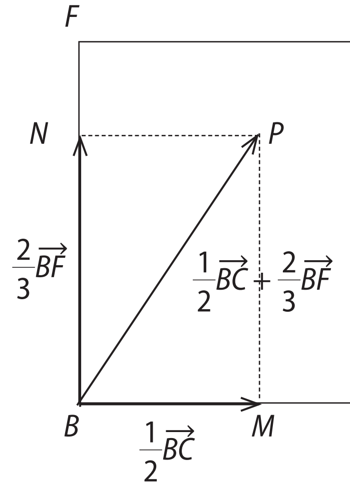
6 Vecteurs et produit scalaire dans l'espace

Manuel pages 89 à 106

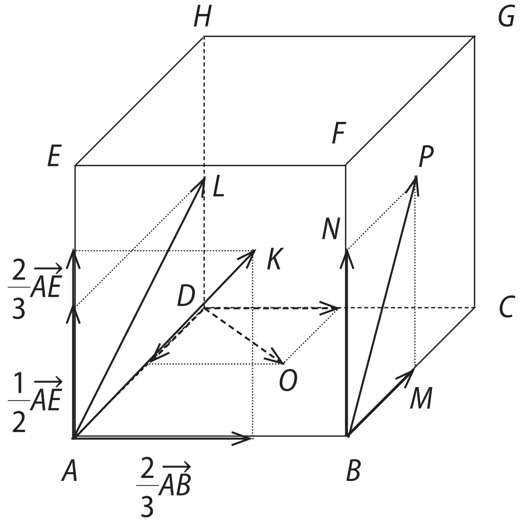
Activités d'introduction

1 Vecteurs de l'espace

1. a. et **b.**



2. a., **b.** et **c.**



d. Le point K appartient à la face $ABFE$.

Le point L appartient à l'arête $[DH]$.

3. a. $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LH} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{LH}$
$= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{LH}$.

Ainsi $\overrightarrow{DH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{LH}$ soit $\frac{1}{2}\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{LH}$ soit $\overrightarrow{DH} = 2\overrightarrow{LH}$.

b. C'est le sommet H.
$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BH}$.

2 Vecteurs colinéaires, coplanaires

1. a. $\vec{w} = \overrightarrow{IO}$, $2\vec{w} = \overrightarrow{AB}$ et $-2\vec{w} = \overrightarrow{CD}$.

b. Dans le plan (ABC) : (AB) // (DC) donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ colinéaires.

Dans le triangle ABD, I et O sont des milieux de deux côtés donc (IO) // (AB) donc $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Ainsi $\overrightarrow{IO}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et donc $\vec{w}$, $2\vec{w}$ et $-2\vec{w}$ sont aussi colinéaires.

2. a. $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{DB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{IO}$.

b. Dans le plan (ABC)
- $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{IO} + (-\overrightarrow{BC})$ et ainsi $\vec{v} = 2\vec{w} - \vec{u}$.
- $\overrightarrow{BC} = BD + \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{IO}$ et ainsi $\vec{u} = -\vec{v} + 2\vec{w}$.

3 Se repérer

1. a. A se trouve à 300 m vers l'est et 100 m au nord de O et à la même altitude de 0, c'est-à-dire au bord de la mer.

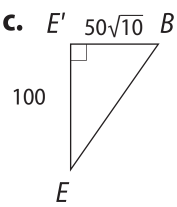
b. $P(100 ; 350 ; 100)$

c. $B(-50 ; -50 ; 0)$ et $E(-200 ; 0 ; -100)$.

2. b. Dans ce plan, $E'(-200 ; 0)$ et $B(-50 ; -50)$

donc $E'B = \sqrt{[-50 - (-200)]^2 + (-50 - 0)^2}$
$= \sqrt{150^2 + (-50)^2}$
$= \sqrt{25\,000} = 50\sqrt{10}$.

c.

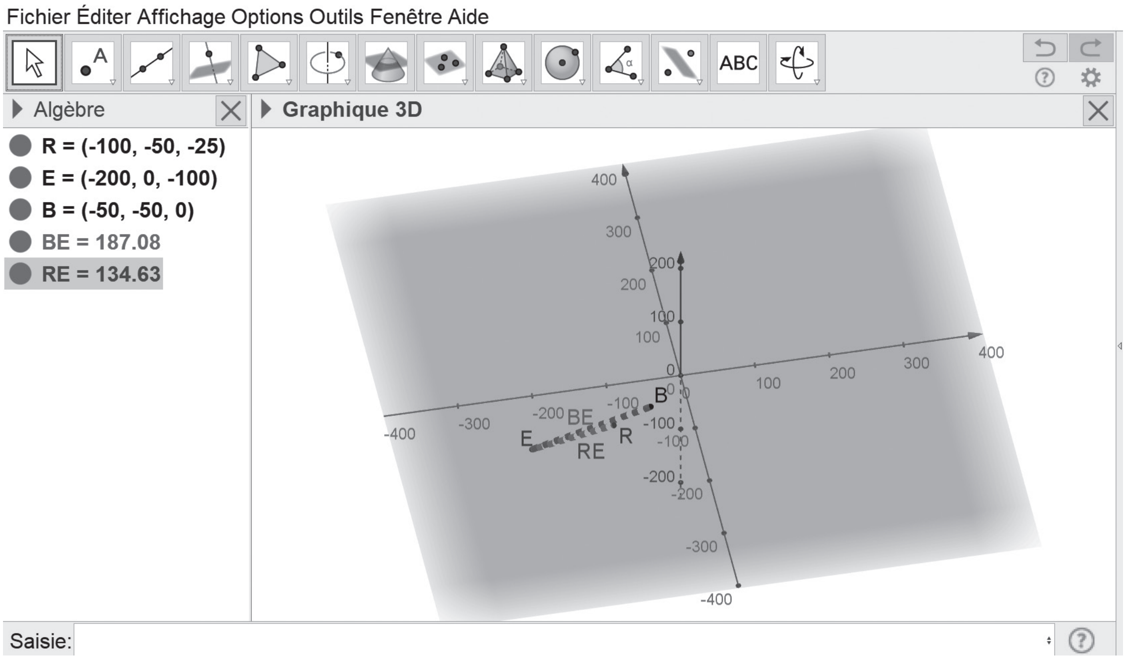


donc $EB = \sqrt{100^2 + (50\sqrt{10})^2}$
$= \sqrt{35\,000}$.

La distance entre le bateau et l'épave est d'environ 187 m.

3. Non, car sur le graphique, la distance observée entre les deux points ne tient pas compte de la profondeur.

4.



4 Produits scalaires dans les plans de l'espace

1. *ABCD* est un tétraèdre régulier donc toutes les faces sont des triangles équilatéraux.

Ainsi (*HD*) hauteur du triangle *BCD* donc (*HD*) est aussi une médiane et donc *H* est le milieu de [*BC*].

Dans le triangle *ABC*, *H* milieu de [*BC*] donc (*AH*) médiane du triangle *ABC* mais aussi hauteur.

Ainsi $(AH) \perp (BC)$.

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overline{HC} \times \overline{BC} = 2 \times 4 = 8$.

2. a. • Dans le plan (*BCD*) ;

• Dans le plan (*BCD*) ;

• Dans le plan (*ABK*).

b. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overline{CD} \times \overline{KC} = 4 \times (-2) = -8$.

$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{OD} = \overline{HD} \times \overline{OD}$.

Or $HD = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ et $OD = \dfrac{2}{3}HD$.

Ainsi $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{OD} = 2\sqrt{5} \times \dfrac{2}{3} \times 2\sqrt{5} = \dfrac{40}{3}$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK} = \overline{AB} \times \overline{AK}$.

Or $AK = BK = HD = 2\sqrt{5}$. Cela signifie que *ABK* est un triangle isocèle en *K* donc *K'* est le milieu de [*AB*].

Ainsi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK} = \overline{AK'} \cdot \overline{AK} = 4 \times \dfrac{4}{2} = 8$.

3. a. Dans le plan (*BCD*), $(BC) \perp (HD)$ donc $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{HD} = 0$.

Dans le plan (*ABC*), $(BC) \perp (AH)$ donc $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.

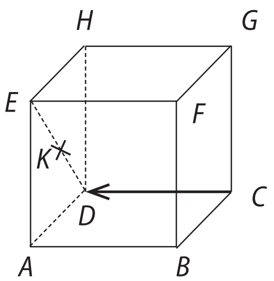
b. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{HD}$

$= 0 + 0 = 0$.

c. Les droites (*BC*) et (*AD*) sont orthogonales.

Savoir-faire

3



$$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}\right)$$
$$= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}.$$

K est le centre de la face *ADHE*.

4 $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$. Ainsi $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EG}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires.

5 $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HD} = -\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HD}$.

Ainsi $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont non colinéaires.

8 **a.** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB}$

$= -(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}) + (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JB}) + 2\overrightarrow{IJ}$

$= -(\overrightarrow{EA}) + \overrightarrow{FB} + 2\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IJ}$.

b. $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HF}$ donc $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont coplanaires.

9 **a.** Dans le triangle *HKG*, *J* et *K* milieux de deux côtés donc $2\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{BH}$ soit $\overrightarrow{JK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BH}$.

b. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH}$ donc *B*, *C*, *E* et *H* sont coplanaires donc $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont coplanaires. Or $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont coplanaires.

10 *O* est le centre du cube donc *O* est aussi le centre du rectangle *ABGH*. Autrement dit *O* isobarycentre de *A*, *B*, *G* et *H*.

De plus *K* milieu de [*HG*] donc *K* isobarycentre de *H* et *G* et de même *L* isobarycentre de *A* et *B*.

Ainsi {(*H*, 1), (*G*, 1)} = (*K*, 2) et {(*A*, 1), (*B*, 1)} = (*L*, 2) et donc {(*K*, 2), (*L*, 2)}= (*O*, 4) donc *O*, *L* et *K* alignés.

13 • $\vec{u} - \vec{v}\,(5\,;0\,;-5)$; • $2\vec{u} + \vec{v}\,(1\,;3\,;2)$;
• $-3\vec{u} - \vec{v}\,(-3\,;-4\,;-1)$.

14 $\overrightarrow{AB}\,(-6\,;2\,;-3)$ donc $\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}\left(-\dfrac{12}{5}\,;\dfrac{4}{5}\,;-\dfrac{6}{5}\right)$.

On note $C(x\,;y\,;z)$ donc $\overrightarrow{BC}\,(x+4\,;y-5\,;z-1)$.

$$\text{Ainsi}\begin{cases} x+4 = -\dfrac{12}{5} \\ y-5 = \dfrac{4}{5} \\ z-1 = -\dfrac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{32}{5} \\ y = \dfrac{29}{5} \\ z = -\dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Finalement $C\,(-6{,}4\,;5{,}8\,;-0{,}2)$.

15 **a.** G_1 isobarycentre de *A*, *B* et *C*
donc $G_1 = \text{bary}\{(A, l), (B, l,), (C, l)\}$.

Ainsi $x_{G_1} = \dfrac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) = \dfrac{1}{3} \times 12 = 4$.

De même $y_{G_1} = \dfrac{1}{3} \times -11 = -\dfrac{11}{3}$ et $z_{G_1} = \dfrac{1}{3} \times 5 = \dfrac{5}{3}$.

$G_1\left(4\,;-\dfrac{11}{3}\,;\dfrac{5}{3}\right)$.

b. $x_{G_2} = \dfrac{1}{-1+2+4}(-x_A + 2x_B + 4x_C) = \dfrac{1}{5} \times 35 = 7$.

De même $y_{G_2} = \dfrac{1}{5} \times (-40) = -8$ et $z_{G_2} = \dfrac{1}{5} \times 17 = \dfrac{17}{5}$.

$G_2\left(7\,;-8\,;\dfrac{17}{5}\right)$.

18 **a.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FH}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FH}$
$= 0 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 + \overline{AB} \times \overline{BA} = -a^2$.

b. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH}$
$= 0 + \overline{AD} \times \overline{AD} = a^2$.

c. $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BH} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}) \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BH}$
$= -a^2 + \overline{BJ} \times \overline{BG} = -a^2 + \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \times a\sqrt{2}$
$= -a^2 + a^2 = 0$.

d. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BH}$
$= -a^2 + (a\sqrt{2})^2 = a^2$.

19 $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$
$= a \times \dfrac{1}{a}\overrightarrow{DA} + a \times \dfrac{1}{a}\overrightarrow{DC} + a \times \dfrac{1}{a}\overrightarrow{DH}$.

Ainsi $\overrightarrow{DF}\,(a\,;a\,;a)$.

$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EK} = -1/2\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{HE} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EB}$
$= -\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DA} + \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DC})$
$= \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA} + 0\overrightarrow{DC} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HD}$.

Ainsi $\overrightarrow{IK}\left(\dfrac{a}{2}\,;0\,;-\dfrac{a}{2}\right)$.

$\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FK} = \overrightarrow{DA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DA} + \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{HD})$
$= \overrightarrow{DA} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DH}$.

Ainsi $\overrightarrow{GK}\left(a\,;-\dfrac{a}{2}\,;-\dfrac{a}{2}\right)$.

b. $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{IK} = a \times \dfrac{a}{2} + a \times 0 + a \times (-\dfrac{a}{2}) = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{2} = 0$.

$\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{GK} = a \times a + a \times \left(-\dfrac{a}{2}\right) + a \times \left(-\dfrac{a}{2}\right)$
$= a^2 + 2 \times \left(-\dfrac{a^2}{2}\right) = 0$.

Ainsi (*DF*) ⊥ (*IK*), (*DF*) ⊥ (*GK*) et (*IK*) et (*GK*) sont deux droites sécantes du plan (*IGK*) donc (*DF*) ⊥ (*IGK*).

Exercices d'entraînement

Vecteurs de l'espace

20 **a.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$;
$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$;
$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IL}$;
$\overrightarrow{HC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{EB}$.

b. $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG}$;
$\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF}$;
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$;
$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BK}$.

21 **a.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$.
b. $\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BE}$.
c. $\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}$.
d. $\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{DE}$.

22 **a.** $\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$; **b.** $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{DH}$;
c. $\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DH}$. **d.** $\overrightarrow{JK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

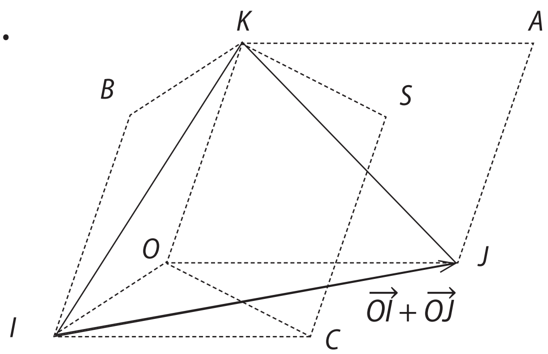
23 **a.** $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CH}=\vec{0}$;
b. $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$;
c. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}$;
d. $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$.

24 **a.** $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{GI}+\vec{0}=2\overrightarrow{GI}$.
b. G centre de gravité de BCD, cela signifie que
$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GI}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GI}$.
c. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}$
$=3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=3\overrightarrow{AG}$.

25 **a.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.
b. Démonstration de l'implication directe
$M\in\mathscr{E}$, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}$
$=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$.
Or $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
Ainsi $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.
Démonstration de la réciproque
Avec $M=D$, on a $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DD}$
donc $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\vec{0}+\overrightarrow{AD}$
donc $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ donc $ABCD$ est un parallélogramme.

26 **a.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}+\vec{0}$. ($I$ milieu de $[AB]$).
$\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=2\overrightarrow{MJ}$.
b. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}=2\overrightarrow{MJ}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MJ}\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}=\overrightarrow{JM}\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}=\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{IM}\Leftrightarrow \vec{0}=\overrightarrow{JI}$.
Or $ABCD$ non coplanaire donc $I\neq J$ donc $\overrightarrow{IJ}\neq\vec{0}$.
Ainsi, il n'existe pas de M de l'espace tel que
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.
L'ensemble cherché est donc l'ensemble vide.

27 **a.**



b. • $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}\Leftrightarrow(\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JC})=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}\Leftrightarrow\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{OI}$
$\Leftrightarrow$ $OICJ$ parallélogramme.
• De même, $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}\Leftrightarrow\overrightarrow{JA}=\overrightarrow{OK}$
$\Leftrightarrow$ $OKAJ$ parallélogramme.
• $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OI}\Leftrightarrow\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{OK}\Leftrightarrow$ $OKBI$ parallélogramme.
• $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}\Leftrightarrow\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OK}$
$\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI}\Leftrightarrow\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IO}$
$\Leftrightarrow\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow$ $IBSC$ parallélogramme.
• $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{OC}+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OJ})$
$\Leftrightarrow\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{JO}\Leftrightarrow\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{JA}$
$\Leftrightarrow$ $JASC$ parallélogramme.
c. $OICJKBSA$ forment un parallélépipède.

Vecteurs colinéaires, coplanaires

28 • Oui ; • Non ; • Non ; • Non.

29 • Oui ; • Non ; • Oui ; • Non.

30 • $\overrightarrow{EA}$; • $\overrightarrow{HD}$; • $\overrightarrow{DK}$; • $\overrightarrow{FB}$.

31 • (EH) ; • (EHG) ; • (EF) ; • (JL) ;
• (KIJ) ; • (AEC).

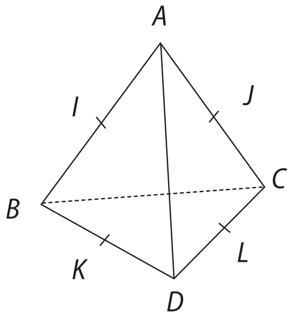
32 $\vec{u}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CB}$
$=3\overrightarrow{CB}=-3\overrightarrow{BC}$.
Il existe $k=-3$ tel que $\vec{u}=k\overrightarrow{BC}$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

33 $2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{EB}-5\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{ED}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{EA}-5\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}$.
Ainsi il existe un couple k et k' tel que $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}+k'\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires. Cela signifie que A, B, C et D sont coplanaires.

34 **a.** • $\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{JI}=-2\vec{\imath}$; $\vec{\imath}$ vecteur directeur de (CB).
• $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\vec{k}-\vec{\jmath}$; $\vec{k}-\vec{\jmath}$ est un vecteur directeur de (AB).
• $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}=-\vec{\jmath}+2\vec{\imath}$; $2\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ est un vecteur directeur de (DC).
• $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{k}-\vec{\jmath}+2\vec{\imath}$; $2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}$ est un vecteur directeur de (AC).
b. • $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont un couple de vecteurs directeurs du plan (ABC) donc $\vec{k}-\vec{\jmath}$ et $2\vec{\imath}$ forment un couple de vecteurs directeurs de (ABC).
• De même, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ soit $2\vec{\imath}$ et $-2\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ forment un couple de vecteurs directeurs du plan (BCD).
• De même, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ soit $\vec{k}-\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ forment un couple de vecteurs directeurs du plan (ABD).

• De même, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AC}$ soit $2\vec{i}-\vec{j}$ et $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ forment un couple de vecteurs directeurs du plan (*ADC*).

35 **a.**



b. $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.

Ainsi il existe $k = \frac{1}{2}$ tel que $\overrightarrow{IL} = k(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$ donc $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$ sont colinéaires.

c. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{KL}$.

Ainsi $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{AL}$ sont coplanaires.

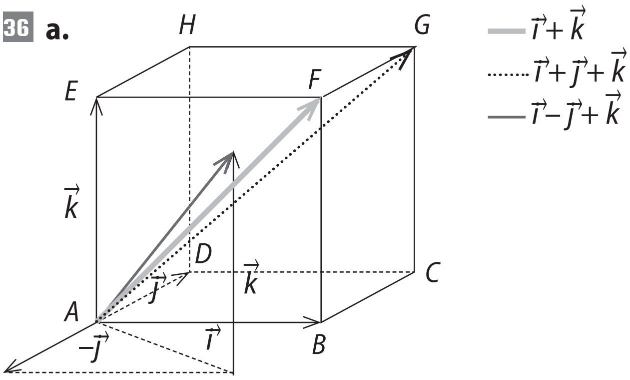
d. *K* et *L* sont les milieux de [*BD*] et [*DC*] donc $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Donc $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont des vecteurs directeurs de (*ABC*).

Par contre, $A \in (ABC)$ et $K \notin (ABC)$ donc $\overrightarrow{AK}$ non directeur de (*ABC*).

Ainsi $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ ne sont pas coplanaires.

36 **a.**



b. $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires puisque $(A\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ forme le plan (*ABC*) et (*AE*) est une droite orthogonale au plan (*ABC*) donc $\vec{k}$ ne peut pas être une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

c. Non puisque $\vec{k}$ ne peut pas s'exprimer en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

d. Les vecteurs $\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ sont des vecteurs directeurs du plan (*ACG*). Or $\vec{i}$ n'est pas un vecteur directeur de ce plan, donc ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

37 **1. a.** $\overrightarrow{SE}$ est un combinaison linéaire de $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{SE}$, $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SC}$ sont colinéaires et ainsi *S*, *E*, *B* et *C* sont coplanaires.

b. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SE} = \overrightarrow{BS} + \frac{3}{4}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{SC} = \left(\frac{3}{4} - 1\right)\overrightarrow{SB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{SC}$

$= -\frac{1}{4}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{SC} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

Ainsi $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont alignés.

2. a. Comme au **1. a.** *S*, *F*, *B* et *C* sont des points coplanaires.

b. On conjecture que quelle que soit la valeur de *p*, les points *B*, *F* et *C* sont alignés.

c. Pour un réel *p* non nul,

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SF} = \overrightarrow{BS} + \frac{p-1}{p}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{p}\overrightarrow{SC}$

$= -\frac{p}{p}\overrightarrow{SB} + \frac{p-1}{p}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{p}\overrightarrow{SC} = \frac{p-1-p}{p}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{p}SC$

$= -\frac{1}{p}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{p}\overrightarrow{SC}$

$= \frac{1}{p}(\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SC}) = \frac{1}{p}\overrightarrow{BC}$.

Ainsi $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et donc *B*, *F* et *C* sont alignés.

Repérage

38 $C(1\,;1\,;0)$; $\overrightarrow{AH}(0\,;1\,;1)$; $G(1\,;1\,;1)$; $\overrightarrow{DG}(1\,;0\,;1)$.

39 **a.** $\overrightarrow{AB}(-3\,;2\,;2)$; $\overrightarrow{AC}(1{,}5\,;-1\,;-1)$.

b. $-2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$.

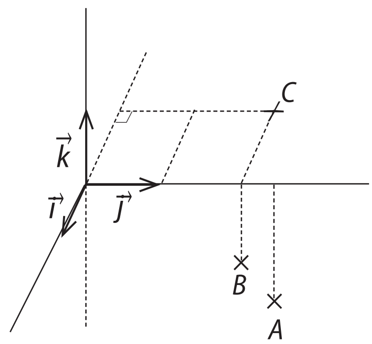
40 • $\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}(-6\,;2\,;0)$;

• $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}(-4\,;2\,;-1)$;

• $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}(0\,;0\,;1)$;

• $\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{4}\vec{v} + \vec{w}(-1{,}5\,;1{,}5\,;-1{,}75)$.

41 **a.**



b. $\overrightarrow{AB}(1\,;0\,;2)$; $\overrightarrow{BC}(-1\,;-1\,;)$; $\overrightarrow{CA}(0\,;1\,;-3)$.

c. $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = 1^2 + 0^2 + 2^2 = 5$;

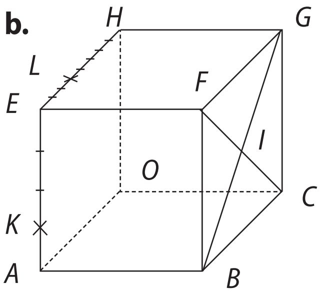
$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = 3$ et $\|\overrightarrow{CA}\|^2 = 10$.

ABC n'est pas rectangle puisque $CA^2 \neq AB^2 + BC^2$.

d. $I\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$, $J\left(-1\,;\frac{3}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$ et $K\left(-\frac{1}{2}\,;2\,;-2\right)$.

42 **a.** $(OA) \perp (OC)$ donc $\vec{i} \perp \vec{j}$. De même $\vec{i} \perp \vec{k}$ et $\vec{j} \perp \vec{k}$.
De plus $\|\vec{i}\| = \left\|\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}\right\| = \left|\frac{1}{4}\right| \|\overrightarrow{OA}\| = \frac{1}{4} \times OA = 1$.
De même $\|\vec{j}\| = 1$ et $\|\vec{k}\| = 1$.
$(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé.

b.



$O\,(0 ; 0 ; 0)$; $A\,(4 ; 0 ; 0)$; $B\,(4 ; 4 ; 0)$; $C\,(0 ; 4 ; 0)$; $E\,(4 ; 0 ; 4)$; $F\,(4 ; 4 ; 4)$; $G\,(0 ; 4 ; 4)$; $H\,(0 ; 0 ; 4)$. $I\,(2 ; 4 ; 2)$; $K\,(4 ; 0 ; 1)$ et $L\,(2{,}5 ; 0 ; 4)$.

c. $\|\overrightarrow{IK}\|^2 = (4-2)^2 + (0-4)^2 + (1-2)^2 = 21$.
$\|\overrightarrow{IL}\|^2 = (2{,}5-2)^2 + (0-4)^2 + (0-4)^2 + (4-2)^2 = 20{,}25$.
$\|\overrightarrow{LK}\|^2 = (4-2{,}5)^2 + (0-0)^2 + (1-4)^2 = 11{,}25$.
IKL est quelconque car il n'a pas deux côtés de même longueur et $\|\overrightarrow{IK}\| \neq \|\overrightarrow{IL}\|^2 + \|\overrightarrow{LK}\|^2$ donc il n'est pas rectangle.

43 $\overrightarrow{AB}\,(-3 ; 1 ; 2)$ et $\overrightarrow{CD}\,(-3 ; 1 ; 2)$.
Ainsi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donc $ABDC$ est un parallélogramme.

44 $\overrightarrow{AB}\,(1 ; 3 ; -9)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-13 ; -39 ; 117)$.
Ainsi $\overrightarrow{AC} = -13\overrightarrow{AB}$ donc A, B et C sont alignés.

45 **a.** $\overrightarrow{OC}\,(1 ; 2 ; 7)$, $2\overrightarrow{OA}\,(-2 ; 2 ; 4)$ et $3\overrightarrow{OB}\,(3 ; 0 ; 3)$. Ainsi $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}\,(1 ; 2 ; 7)$ et donc $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.
b. $\overrightarrow{OC}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ donc $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$, et $\overrightarrow{OB}$ sont des vecteurs coplanaires et alors O, A, B et C sont des points coplanaires.

46 **a.** $\overrightarrow{AB}\,(-1 ; 0 ; 5)$, $\overrightarrow{AC}\,(-2 ; -2 ; -2)$ et $\overrightarrow{DE}\,(-4 ; -2 ; 8)$.

b. $\overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -x - 2y \\ -2 = -2y \\ 8 = 5x - 2y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -x - 2 \\ y = 1 \\ 8 = 5x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ x = 2. \end{cases}$

Ce système admet un unique couple solution $(2 ; 1)$ donc $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
c. Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires donc (DE) est incluse dans le plan (ABC).

47 **a.** Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$:
$I\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 0\right)$ et $L\left(0 ; 0 ; \frac{2}{3}\right)$ donc $\overrightarrow{IL}\left(-\frac{1}{2} ; 0 ; \frac{2}{3}\right)$.
$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + 2/3\overrightarrow{BC}$.
Or $\overrightarrow{AB}(1 ; 0 ; 0)$ et $\overrightarrow{BC}(-1 ; 1 ; 0)$ donc $\overrightarrow{AJ}\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; 0\right)$.
Ainsi $J\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; 0\right)$ et $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{6} ; \frac{2}{3} ; 0\right)$.
Puis $D(0 ; 0 ; 1)$, $C(0 ; 1 ; 0)$ et K milieu de $[DC]$ donc $K\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$. Ainsi $\overrightarrow{IK}\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.
b. Voyons si il existe un triplet de réels non tous nuls tels que $x\overrightarrow{IL} + y\overrightarrow{IK} + z\overrightarrow{IJ} = \vec{0}$.
Cherchons à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z = 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z = 0 \\ z = -\frac{1}{2}y \times \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2}y \times \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4}y \\ z = -\frac{3}{4}y \\ -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}y\right) - \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}\left(-\frac{3}{4}y\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4}y \\ z = -\frac{3}{4}y \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Avec $y = 4$, $x = -3$ et $z = -3$. Donc $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont coplanaires.

Barycentre

48 **a.** $G = \text{bary}\{(A, 3), (D, 3)\}$.
b. G milieu de $[AD]$.

49 **a.** $G\left(\frac{1 + 2(-1) + 3(2)}{1 + 2 + 3} ; \frac{1 + 2(1) + 3(0)}{1 + 2 + 3} ; \frac{1 + 2(0) + 3(3)}{1 + 2 + 3}\right)$
soit $G\left(\frac{5}{6} ; \frac{1}{2} ; \frac{5}{3}\right)$.
b. $G'\left(\frac{-2(1) + 3(-1) - 2(2)}{-2 + 3 - 2} ; \frac{-2(1) + 3(1) - 2(0)}{-2 + 3 - 2} ; \frac{-2(1) + 3(0) - 2(3)}{-2 + 3 - 2}\right)$
soit $G'(9 ; -1 ; 8)$.
c. $I\left(\frac{3}{2} ; \frac{1}{2} ; 2\right)$. **d.** $H\left(\frac{2}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right)$.

50 **a.** $I = \text{bary}\,\{(A, 1), (B, 1)\}$ et $J = \text{bary}\,\{(B, 1), (C, 1)\}$
b. $K = \text{bary}\{(A, 1), (B, 1), (B, 1), (C, 1), (H, 1)\}$
$= \text{bary}\,\{(I, 2), (J, 2), (H, 1)\}$.
Et ainsi, pour tout point M de l'espace,
$5\overrightarrow{MK} = 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MJ} + 1\overrightarrow{MH}$
et pour $M = I$, $5\overrightarrow{IK} = 2\overrightarrow{IJ} + 1\overrightarrow{IH}$.
Ainsi I, J, K et H sont coplanaires.

51 **a.** $G = \text{bary}\,\{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$
$= \text{bary}\,\{(A, 1), (H, 3)\}$.
b. $G = \text{bary}\,\{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$
$= \text{bary}\,\{(I, 2), (J, 2)\}$.

52 **a.** I milieu de $[SO]$ donc $I = \text{bary}\{(S, 4), (O, 4)\}$.
Or O centre du carré $ABCD$
donc $O = \text{bary}\{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$
donc $I = \text{bary}\{(S, 4), (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$.

b. $A\,(0\,;0\,;0)$, $B\,(1\,;0\,;0)$, $D\,(0\,;1\,;0)$, $S\,(0\,;0\,;1)$
et $C\,(1\,;1\,;0)$ donc $I\left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}\right)$.

53 **1. a.** $\overrightarrow{AE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{5}{2}\overrightarrow{EB}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{5}{2}\overrightarrow{EB}=\vec{0}$.

$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}\overrightarrow{EA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{EB}=\vec{0}$.

Ainsi $E=\text{bary}\left\{\left(A,-\frac{3}{2}\right),\left(B,\frac{5}{2}\right)\right\}$.

b. $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AF}-\frac{2}{5}(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AF}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AF}-\frac{2}{5}\overrightarrow{FC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{5}\overrightarrow{AF}-\frac{2}{5}\overrightarrow{FC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{5}\overrightarrow{FA}-\frac{2}{5}\overrightarrow{FC}=\vec{0}$.

Ainsi $F=\text{bary}\left\{\left(A,-\frac{3}{5}\right),\left(B,-\frac{2}{5}\right)\right\}$.

$\overrightarrow{FG}=\frac{2}{7}\overrightarrow{FE} \Leftrightarrow \overrightarrow{FG}-\frac{2}{7}(\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GE})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{7}\overrightarrow{GF}-\frac{2}{7}\overrightarrow{GE}=\vec{0}$.

Ainsi $G=\text{bary}\left\{\left(F,-\frac{5}{7}\right),\left(E,-\frac{2}{7}\right)\right\}$.

2. a. $\vec{v}=3\overrightarrow{MA}-5(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})+2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})$
$=-5\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

b. $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE})$.

Ainsi $\overrightarrow{FB}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CE}$.

$\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont donc colinéaires et les droites (FB) et (CE) sont parallèles.

Produit scalaire

54 • $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$;
• $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AB}=a^2$;
• $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EA}=0$;
• $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=a^2$;
• $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\overline{AB}\times\overline{AB}=a^2$;
• $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}=\overline{AB}\times\overline{BA}=a\times(-a)=-a^2$.

55 • $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\times2+1\times(-1)+(-5)\times0=5$.
• $2\vec{u}\cdot3\vec{v}=(2\times3)\times\vec{u}\cdot\vec{v}=6\times5=30$.
• $-\vec{u}\cdot\frac{1}{2}\vec{v}=(-1\times\frac{1}{2})\times\vec{u}\cdot\vec{v}=-\frac{5}{2}$.
• $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})=3\times(3+2)+1\times0+(-5)\times(-5+0)=40$.

56 **a.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AB=(AB)^2=16$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

$AB^2+0=AB^2=16$.

b. $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{KL}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{JL})$
$=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{JL}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{JL}$
$=0+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AE}$
$=AE^2=1$.

$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EJ}=\overrightarrow{EF}\cdot(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IL}+\overrightarrow{LJ})$
$=\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{IL}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{LJ}$
$=EF\times\frac{1}{2}EF+0+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EA}$
$=\frac{1}{2}EF^2=8$.

57 **a.** • $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=AB\times AI=\frac{1}{2}AB^2=\frac{1}{2}$.

Puisque le triangle ABD est équilatéral et ainsi $[ID]$ est une médiane mais aussi une hauteur.

• $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$. Même démonstration.

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$.

c. Ainsi $(AB)\perp(CD)$.

d. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{BC}\|\times\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}})$

$=1\times1\times\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ})\cdot\overrightarrow{AB}$
$=\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CJ}\cdot\overrightarrow{AB}$
$=\overrightarrow{IB}\times\overrightarrow{AB}+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}$
$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times0=0$.

Ainsi $(IJ)\perp(AB)$.

58 **a.** $AB=\sqrt{(5-(-3))^2+(3-2)^2+(2-(-2))^2}=\sqrt{81}=9$.

$AC=\sqrt{(1-(-3))^2+(-5-2)^2+(-6-(-2))^2}=\sqrt{81}=9$.

b. $\overrightarrow{AB}(8\,;1\,;4)$ et $\overrightarrow{AC}(4\,;-7\,;-4)$:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=32-7-16=9$.

c. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$

$\Leftrightarrow 9=9\times9\times\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$

$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{1}{9}$.

Ainsi mes $(\widehat{AB,AC})\approx1{,}5$ rad.

59 $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ base orthonormée de l'espace donc il existe un unique triplet de réels (a,b,c)
tel que $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$.

Puis $\vec{u}\cdot\vec{i}=(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})\cdot\vec{i}=a\vec{i}-\vec{i}+0+0=a$.

De même $\vec{u}\cdot\vec{j}=0+b\vec{j}\cdot\vec{j}+0=b$ et $\vec{u}\cdot\vec{k}=c\,\vec{k}\cdot\vec{k}=c$.

Finalement $\vec{u}=(\vec{u}\cdot\vec{i})\,\vec{i}+(\vec{u}\cdot\vec{j})\,\vec{j}+(\vec{u}\cdot\vec{k})\,\vec{k}$.

60 **a.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 3 + 4 \times 0 + (-5) \times (-3) = 24$;
$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$;
$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$;
$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{(3+3)^2 + (4+0)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{116}$.
b. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
$\Leftrightarrow 24 = \sqrt{50} \times \sqrt{18} \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{24}{\sqrt{50} \times \sqrt{18}}$
$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{24}{30} \Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{4}{5}$.
mes $(\widehat{u, v}) \approx 0{,}6$ rad.

61 **a.** • $\overrightarrow{SG} \cdot \overrightarrow{AH} = (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AG}) \cdot \overrightarrow{AH}$

$$\begin{aligned}
&= \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH}\\
&= \overrightarrow{SA} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\
&= \overrightarrow{HA} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}) \cdot \overrightarrow{AB}\\
&= -\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} + \frac{1}{3}AB^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AB}\\
&= -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3} + \frac{1}{3}BK \times AB \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\
&= -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3} + \frac{a}{3} \times \frac{a}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)\\
&= -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{12} = 0.
\end{aligned}$$

• $\overrightarrow{SG} \cdot \overrightarrow{AJ} = (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AG}) \cdot \overrightarrow{AJ}$
$= \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AJ} = 0$. (De même).
b. D'après **a.**, $(SG) \perp (AH)$ et $(SG) \perp (AJ)$
donc (SG) est orthogonale à deux droites sécantes (AH) et (AJ) incluses dans le plan (ABC). Ainsi (SG) est orthogonale au plan (ABC).

62 $\overrightarrow{AB}(1 ; 2 ; -1)$, $\overrightarrow{AC}(-2 ; 1 ; 0)$, $\overrightarrow{AD}(1 ; 2 ; 5)$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) + 2 \times 1 + (-1) \times 0 = 0$;
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \times 1 + 2 \times 2 + (-1) \times 5 = 0$;
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = -2 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 5 = 0$.
Ainsi $(AB) \perp (AC)$, $(AB) \perp (AD)$ et $(AC) \perp (AD)$.
Cela signifie que le tétraèdre $ABCD$ est trirectangle en A.

$$\begin{aligned}
\mathscr{V} &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{AB \times AC}{2}\right) \times AD\\
&= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2} \times \sqrt{(-2)^2+1^2+0^2}}{2} \times \sqrt{1^2+2^2+5^2}\\
&= 5.
\end{aligned}$$

63 **1. a.** $\vec{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}} ; 0\right)$, $\vec{v}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; -\frac{1}{\sqrt{2}} ; 0\right)$.
b. $\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$
et $\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = 1$.
c. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 \times 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.
$\vec{v} \cdot \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 + 0 \times 1 = 0$.
$\vec{u} \cdot \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 + 0 \times 0 = 0$.
d. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée.
2. $r\left(\frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $s\left(\frac{1}{\sqrt{6}} ; -\frac{2}{\sqrt{6}} ; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ et $t\left(0 ; \frac{1}{\sqrt{2}} ; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
$\|\vec{r}\| = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1$; $\|\vec{s}\| = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6}} = 1$
et $\|\vec{t}\| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$.
$\vec{r} \cdot \vec{s} = \frac{1}{\sqrt{18}} - \frac{2}{\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{18}} = 0$; $\vec{r} \cdot \vec{t} = 0 + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0$
et $\vec{s} \cdot \vec{t} = 0 - \frac{2}{\sqrt{12}} - \frac{1}{\sqrt{12}} = -\frac{3}{\sqrt{12}}$.
$(\vec{r} ; \vec{s} ; \vec{t})$ n'est pas orthonormée.

64 **a.** $C(1 ; 1 ; 0)$; $N(b ; b ; 0)$ donc $\overrightarrow{CN}(b-1 ; b-1 ; 0)$.
$B(1 ; 0 ; 0)$; $S(0 ; b ; b)$ donc $\overrightarrow{BS}(-1 ; b ; b)$.
b. (CN) et (BS) sont orthogonales
$\Leftrightarrow \overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{BS} = 0$
$\Leftrightarrow (b-1) \times (-1) + (b-1) \times b + 0 \times b = 0$
$\Leftrightarrow -b + 1 + b^2 - b = 0$
$\Leftrightarrow b^2 - 2b + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (b-1)^2 = 0 \Leftrightarrow b = 1$.
Mais dans le cas où $b = 1$, les deux cubes sont confondus et $N = C$. Donc il n'y a pas de droite (CN).
Ainsi, cela n'est pas possible.

Se tester

65 **1.** Vrai ; **2.** Vrai ; **3.** Vrai ; **4.** Faux ; **5.** Faux.

66 **1.** Faux. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AB = a^2$.
2. Vrai. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FG}$
$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$.
3. Vrai. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$.
4. Faux. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{HF} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG}) \cdot \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{HF}$
$= 0 + 0 = 0$. Ainsi $(AG) \perp (HF)$.
$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{DH} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG}) \cdot \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{DH}$
$= AE^2 + 0 = a^2$. Ainsi $(AC) \perp (DH)$.
5. Faux. $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BH} = BD \times BD = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2$.

Or $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BH} = BD \times BH \times \cos(\widehat{\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{BH}})$

$\Leftrightarrow 2a^2 = \sqrt{2}a \times \sqrt{a^2+(\sqrt{2}a)^2} \times \cos(\widehat{\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{BH}})$

$\Leftrightarrow \dfrac{2a^2}{\sqrt{2}a\sqrt{3}a} = \cos(\widehat{\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{BH}})$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \cos(\widehat{\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{BH}})$. Ainsi mes$(\widehat{BD\,;BH}) \neq \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

6. Faux.

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{HB} = (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG})\cdot(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DB})$

$= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{DB}$

$= 0+0+(-a^2)+0$

$= -a^2$.

67 **1. b** ; **2. a** ; **3. c** ; **4. b** ; **5. c.**

68 **1. b.** $\overrightarrow{AB}\,(2\,;0\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-3\,;-2\,;2)$.

Ainsi • $\overrightarrow{AB}$ non colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ puisque $\overrightarrow{AB} \neq k\overrightarrow{AC}$;

• $\overrightarrow{AB}$ non orthogonal à $\overrightarrow{AC}$ puisque $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \neq 0$.

2. c. $\overrightarrow{AD}\,(7\,;2\,;0)$ donc $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\,(0\,;0\,;0)$.

3. c. • A, B et C sont non alignés puisque $\overrightarrow{AB}$ non colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ (**1.**).

• D'après **2.**, il existe un triplet de nombres réels $(2\,;-1\,;-1)$ tel que $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

soit $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

Ainsi A, B, C et D sont coplanaires.

4. b. $\overrightarrow{AE}(-2\,;0\,;0)$. On cherche x, y et z tels que $x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AE}=\vec{0}$.

On résout $\begin{cases} 2x-3y-2z=0 \\ 0x-2y+0z=0 \\ 1x+2y+9z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2z \\ y=0 \\ x=-9z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=0 \\ x=0. \end{cases}$

Ce système admet une unique solution $(0\,;0\,;0)$.

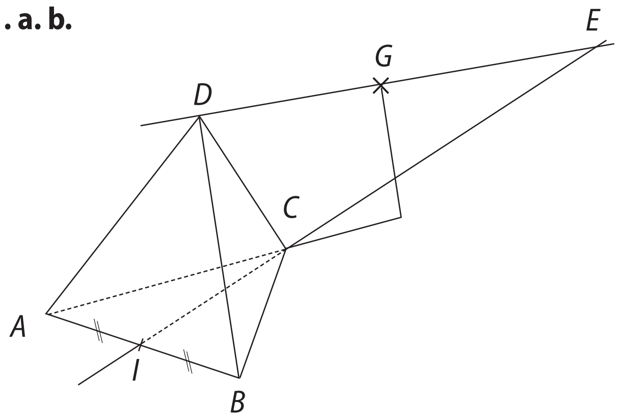
Les points sont non coplanaires.

5. a. $\overrightarrow{FK}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont des représentants de vecteurs qui n'utilisent que 3 points donc ils sont coplanaires.

Exercices d'approfondissement

69 Calcul vectoriel

1. a. b.



2. a. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC})+(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{ID})$

$= \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}$

$= \vec{0}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}$

$= \overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}$

b. $\overrightarrow{AG} = 1{,}5\overrightarrow{AC}+0{,}5\overrightarrow{BD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AC}+0{,}5(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+0{,}5(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IC}+0{,}5\overrightarrow{IC}+0{,}5\overrightarrow{ID}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IG} = 1{,}5\overrightarrow{IC}+0{,}5\overrightarrow{ID}$.

On peut en déduire que $G \in (ICD)$ ou que les points I, C, D et G sont coplanaires.

3. L'intersection entre les plans (ABC) et (ICD) est la droite (IC). Donc la droite (DG) incluse dans le plan (ICD) coupe le plan (ABC) là où elle coupe (IC).

Ainsi l'intersection de la droite (DG) et de la droite (IC) est le point E cherché.

70 Une droite et un plan

1. $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{HK}+\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{KG}+\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{GC}$

$= \overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{KC}$.

2. D'après **1.**, $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{KC}$ sont coplanaires. Or les points H et I n'appartient pas au plan (KJC) donc (HI) est parallèle au plan (KJC).

71 Ensemble des barycentres de trois points

1. a. $M = \text{bary}\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$ tels que $a+b+c \neq 0$.

Ainsi $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow a\overrightarrow{MA}+b(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})+c(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow (a+b+c)\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$.

b. D'après **a.**, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ de même origine A sont coplanaires, et donc A, M, B et C sont coplanaires (A même origine).

c. Tous les barycentres de trois points appartiennent au plan défini par ses trois points.

2. a. $N \in (ABC)$ donc à l'aide de la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ du plan (ABC) il existe un unique couple de réels $(x\,;y)$ tels que $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

b. $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = x(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NB})+y(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NC})$

$\Leftrightarrow (1-x-y)\overrightarrow{NA}+x\overrightarrow{NB}+y\overrightarrow{NC}=\vec{0}$.

Or $1 - x - y + x + y = 1$ ($\neq 0$) donc N est le barycentre du système $\{(A, 1 - x - y), (B, 1), (C, 1)\}$.

c. Tout point appartenant à un plan défini à l'aide de trois points non alignés peut être considéré comme barycentre de ces trois points.

3. A, B et C sont trois points non alignés.

Il existe trois nombres a, b et c tels que $a + b + c \neq 0$ et M barycentre de $\{(A, a), (B, b), (C, c)\} \Leftrightarrow M \in (ABC)$.

72 Colinéarité et base

1. $ABCD$ tétraèdre donc A, B, C et D sont non coplanaires et donc $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont non coplanaires.

2. a. $\overrightarrow{JL} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + k\overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AD}.$

b. $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$

c. $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JL}$ colinéaires

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t non nul tel que $\overrightarrow{IK} = t\overrightarrow{JL}$.

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t non nul tel que :

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AD}\right)t$

$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2}t\right)\overrightarrow{AB} + \left(-1 + \frac{1}{2}t\right)\overrightarrow{AC} + \left(-\frac{1}{2} - kt\right)\overrightarrow{AD} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}t = 0 \\ -1 + \frac{1}{2}t = 0 \quad \text{puisque } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AD} \text{ non coplanaires} \\ -\frac{1}{2} - kt = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = -\frac{1}{2}k. \text{ Ainsi } k = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

73 Avec un logiciel

1. $1 + (1 - m) + (2m - 1) + (1 - m) = 2$.
Pour tout $m \in \mathbb{R}$, la somme des coefficients est non nulle donc G_m existe.

2. c. On peut conjecturer que le lieu décrit par G_m quand m décrit $\mathbb{R}$ est une droite.

3. a. $G_0 = \text{bary}\{(E, 1), (B, 1), (G, -1), (D, 1)\}$

$= \text{bary}\{(E, 1), (B, 1), (D, 1), (G, -1)\}$

$= \text{bary}\{(I, 3), (G, -1)\}$.

Ainsi $3\overrightarrow{G_0I} - \overrightarrow{G_0A} - \overrightarrow{AG} = 0$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{G_0A} + 3\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{G_0A} - \overrightarrow{AG} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{G_0A} + 3\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AG} = \vec{0}$

Or $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{O_2I} = \overrightarrow{AO_2} + \frac{1}{3}\overrightarrow{O_2E}$ donc $3\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{O_2E}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{O_2A} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$.

Ainsi $2\overrightarrow{G_0A} + 3\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{G_0A}$ et $2\overrightarrow{G_0A} = \vec{0}$.

G_0 et A sont confondus.

b. $G_0 = \text{bary}\{(I, 3), (G, -1)\}$ donc $G_0 = A$, I et G sont alignés.

4. $G_1 = \text{bary}\{(E, 1), (B, 0), (G, 1), (D, 0)\}$

$= \text{bary}\{(E, 1), (G, 1)\}$

$= \text{bary}\{(O_1, 2)\} = O_1$.

5. a. $G_m = \text{bary}\{(E, 1), (B, 1 - m), (G, 2m - 1), (D, 1 - m)\}$

$= \text{bary}\{(E, 1), (G, 2m - 1), (O_2, 2 - 2m)\}$

$G_m = \text{bary}\ \{(E, 1), (G, 1), (G, 2m - 2), (O_2, 2 - 2m)\}$

$G_m = \text{bary}\ \{(O_1, 2), (G, 2m - 2), (O_2, 2 - 2m)\}$.

Ainsi, pour tout point M de l'espace,

$2\overrightarrow{MG_m} = 2\overrightarrow{MO_1} + (2m - 2)\overrightarrow{MG} + (2 - 2m)\overrightarrow{MO_2}$.

Avec $M = A$, $2\overrightarrow{AG_m} = 2\overrightarrow{AO_1} + (2m - 2)\overrightarrow{AG} + (2 - 2m)\overrightarrow{AO_2}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_m} = \overrightarrow{AO_1} + (m - 1)\overrightarrow{AG} + (1 - m)\overrightarrow{AO_2}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_m} = \overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{O_2O_1} + (m - 1)\overrightarrow{AO_2} + (m - 1)\overrightarrow{O_2G}$
$+ (1 - m)\overrightarrow{AO_2}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_m} = (1 + m - 1 + 1 - m)\overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{O_2O_1} + (m - 1)\overrightarrow{O_2G}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_m} = \overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{O_2O_1} + (m - 1)\overrightarrow{O_2G}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_m} = \overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{O_2O_1} + (m - 1)(\overrightarrow{O_2C} + \overrightarrow{CG})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_m} = \overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{O_2O_1} + (m - 1)\overrightarrow{AO_2} + (m - 1)\overrightarrow{CG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{O_2O_1} + (m - 1)\overrightarrow{CG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2} + m\overrightarrow{O_2O_1}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_1}$.

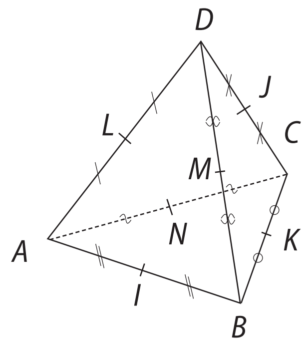
b. D'après **5. a.** A, G_m et O_1 sont alignés donc lorsque m décrit $\mathbb{R}$, G_m décrit (AO_1). Ainsi l'ensemble des points G_m est la droite (AO_1).

6. a. A, G_m et O_1 sont alignés donc E, A, G_m et O sont coplanaires.

b. Dans ce cas $G_m \in (EI)$ et $G_m \in (AO_1)$. Ainsi G_m est le point d'intersection de (AO_1) et (EI).
Or $(EI) = (EO_2)$ donc G_m est le point d'intersection de (AO_1) et (EO_2). Or AO_2O_1E est un rectangle donc G_m est le milieu des diagonales donc $m = \frac{1}{2}$.

74 Repère fondamental

1. a.



b. $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

De même $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Ainsi $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{KJ}$ donc $ILJK$ parallélogramme donc $[IJ]$ et $[LK]$ ont le même milieu.

Puis $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

De même $\overrightarrow{NJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Ainsi $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{NJ}$ donc $IMJN$ est un parallélogramme et $[IJ]$ et $[MN]$ ont le même milieu.

Finalement $[IJ]$, $[KL]$ et $[MN]$ ont le même milieu, O.

c. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

$$= \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JD}$$
$$= 2\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ} = 2(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}).$$

Or O milieu de $[IJ]$ donc $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$.

Ainsi $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

2. D'après **1. c.**, O isobarycentre des points A, B, C et D donc $4\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

soit $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

Ainsi $O\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right)$.

3. a. • I milieu de $[AB]$ donc $I = \text{bary}\{(A, 1), (B, 1)\}$.

Ainsi $2\overrightarrow{OI} = 1\overrightarrow{OA} + 1\overrightarrow{OB}$ donc $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

• K milieu de $[BC]$ donc $K = \text{bary}\{(B, 1), (C, 1)\}$.

Ainsi $2\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

Ainsi $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

• M milieu de $[BD]$ donc $M = \text{bary}\{(B, 1), (D, 1)\}$.

Ainsi $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

Ainsi $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

b. O milieu de $[MN]$ et $N \notin (MIK)$ donc $O \notin (MIK)$.

O, M, I, et K sont des points non coplanaires.

Ainsi $(O ; \overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OK} ; \overrightarrow{OM})$ est un repère de l'espace.

c. $4\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ (1)

$4\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ (2)

$4\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ (3)

Donc ((2) – (1)) $2\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{OI} + 4\overrightarrow{OK}$

((3) – (1)) $2\overrightarrow{AD} = -4\overrightarrow{OI} + 4\overrightarrow{OM}$

((2) + (3)) $2\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{OK} + 4\overrightarrow{MK}$

d'où $\overrightarrow{AC}\,(-2 ; 2 ; 0)$, $\overrightarrow{AD}\,(-2 ; 0 ; 2)$ et $\overrightarrow{AB}\,(0 ; 2 ; 2)$.

Donc $\begin{cases} x_C - x_A = -2 \\ x_D - x_A = -2 \\ x_B - x_A = 0 \\ x_A + x_B + x_C + x_D = 0 \text{ d'après le } \textbf{1. c.} \end{cases}$ ainsi $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 1 \\ x_B = 1 \\ x_C = -1 \\ x_D = -1 \end{cases}$

De plus, $\begin{cases} y_C - y_A = 2 \\ y_D - y_A = 0 \\ y_B - y_A = 2 \\ y_A + y_B + y_C + y_D = 0 \end{cases}$ ainsi $\Leftrightarrow \begin{cases} y_A = -1 \\ y_B = 1 \\ y_C = 1 \\ y_D = -1 \end{cases}$

Enfin, $\begin{cases} z_C - z_A = 0 \\ z_D - z_A = 2 \\ z_B - z_A = 2 \\ z_A + z_B + z_C + z_D = 0 \end{cases}$ ainsi $\Leftrightarrow \begin{cases} z_A = -1 \\ z_B = 1 \\ z_C = -1 \\ z_D = 1 \end{cases}$

Finalement, dans le repère $(O ; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OM})$, $A(1 ; -1 ; -1)$, $B(1 ; 1 ; 1)$, $C(-1 ; 1 ; -1)$ et $D(-1 ; -1 ; 1)$.

75 Analytique ou vectoriel

1. a. $A(1 ; 1 ; 1)$, $B(1 ; 1 ; 0)$, $E(0 ; 1 ; 1)$, $D(1 ; 0 ; 1)$.

I isobarycentre de G, C et B

donc $I\left(\frac{0+1+1}{3} ; \frac{0+0+1}{3} ; \frac{0+0+0}{3}\right)$; $I\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; 0\right)$.

J isobarycentre de G, C et H

donc $J\left(\frac{0+1+0}{3} ; \frac{0+0+0}{3} ; \frac{0+0+1}{3}\right)$; $J\left(\frac{1}{3} ; 0 ; \frac{1}{3}\right)$.

b. $\overrightarrow{IJ}(-\frac{1}{3} ; -\frac{1}{3} ; \frac{1}{3})$ et $\overrightarrow{DG}(-1 ; 0 ; -1)$

donc $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{DG} = -\frac{1}{3} \times (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 0 + \frac{1}{3} \times (-1)$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

Puis $\overrightarrow{FC}(1 ; -1 ; 0)$

donc $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{FC} = 1 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \times 0 = 0.$

Finalement (IJ) est perpendiculaire à (DG) et à (FC).

2. a. D'une part, $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{3}\right) ; -\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\Big)$; d'autre part

$\overrightarrow{GC}\,(1 ; 0 ; 0)$, $\overrightarrow{GF}(0 ; 1 ; 0)$ et $\overrightarrow{GH}(0 ; 0 ; 1)$,

donc $-\frac{1}{3}(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GH})\left(-\frac{1}{3}\right) ; -\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\Big)$; d'où l'égalité.

b. $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{GD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GH}) \cdot \overrightarrow{GD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{GD}$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GD} = \frac{1}{3}GC \times GC + \frac{1}{3} \times 0 - \frac{1}{3}GH \times GH$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

$\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{FC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GH}) \cdot \overrightarrow{FC}$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{FC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{FC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{FC}$$
$$= \frac{1}{3}GC \times GC + \frac{1}{3}GF \times FG - \frac{1}{3} \times 0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

On en conclut que (IJ) est perpendiculaire à (DG) et à (FC).

76 Surfaces de niveau

Partie A

1. $f(M) = MA^2 + MB^2$

a. $MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$
$= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2$
$= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$
$= 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} + 2\overrightarrow{MI} \cdot \vec{0} = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.

b. • $MA^2 + MB^2 = 44{,}5$

$MA^2 + MB^2 = 90 \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 44{,}5$
$\Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{5^2}{2} = 44{,}5 \Leftrightarrow MI^2 = 16 \Leftrightarrow MI = 4$ $(MI > 0)$
$\Leftrightarrow M$ appartient à la sphère de centre I et de rayon 4.

• $MA^2 + MB^2 = 12{,}5$

$MA^2 + MB^2 = 12{,}5 \Leftrightarrow 2MI^2 = 12{,}5 - \frac{5^2}{2} \Leftrightarrow MI^2 = 0$
$\Leftrightarrow M = I$.

• $MA^2 + MB^2 = 2{,}5$

$MA^2 + MB^2 = 2{,}5 \Leftrightarrow MI^2 = -5 \Leftrightarrow M$ n'existe pas.
Donc cet ensemble est vide.

c. $MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{k - 12{,}5}{2}$.

Si $k \geqslant 12{,}5$ alors $\frac{k - 12{,}5}{2} \geqslant 0$ donc $MI = \sqrt{\frac{k - 12{,}5}{2}}$.
Ainsi si $k \geqslant 12{,}5$ alors M appartient à la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{k - 12{,}5}{2}}$.

2. $f(M) = 2MA^2 + 3MB^2$:

a. $2MA^2 + 3MB^2 = 2\overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2$
$= 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$
$= 2[\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA}] + 3[\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB}]$
$= 5MG^2 + 2GA^2 + 3GB^2 + 2\overrightarrow{MG}(2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB})$.
Or $G = \text{bary}\{(A, 2), (B, 3)\}$ cela signifie $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
Ainsi $2MA^2 + 3MB^2 = 5MG^2 + 2GA^2 + 3GB^2$.

b. $G = \text{bary}\{(A, 2), (B, 3)\}$donc $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
soit $5\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB}$ et donc $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.
Comme $AB = 5$, $AG = 3$ et $GB = 2$.
• D'après **2. a.**, $2MA^2 + 3MB^2 = 75$
$\Leftrightarrow 5MG^2 + 2GA^2 + 3GB^2 = 75$
$\Leftrightarrow 5MG^2 + 18 + 12 = 75$
$\Leftrightarrow MG^2 = 9$
$\Leftrightarrow MG = 3$ $(MG > 0)$.
Ainsi M appartient à la sphère de centre G de rayon 3.
• D'après **2. a.**, $2MA^2 + 3MB^2 = 30$
$\Leftrightarrow 5MG^2 + 2GA^2 + 3GB^2 = 30$
$\Leftrightarrow 5MG^2 = 0$
$\Leftrightarrow MG = 0$.
Ainsi $M = G$.
• D'après **2. a.**, $2MA^2 + 3MB^2 = 10 \Leftrightarrow 5MG^2 = -20$.
Ainsi M n'existe pas et cet ensemble est vide.

Partie B

1. $a + b \neq 0$.

a. $aMA^2 + bMB^2 = a(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + b(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$
$= a\overrightarrow{MG}^2 + 2a\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + a\overrightarrow{GA}^2 + b\overrightarrow{MG}^2 + 2b\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + b\overrightarrow{GB}^2$
$= (a + b)\overrightarrow{MG}^2 + a\overrightarrow{GA}^2 + b\overrightarrow{GB}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB})$
$= (a + b)\overrightarrow{MG}^2 + a\overrightarrow{GA}^2 + b\overrightarrow{GB}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \vec{0}$
$= (a + b)MG^2 + aGA^2 + bGB^2$.

b. $aMA^2 + bMB^2 = k$
$\Leftrightarrow (a + b)\, MG^2 + aGA^2 + bGB^2 = k$
$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{k - aGA^2 - bGB^2}{a + b}$.
Ainsi si $k \geqslant aGA^2 + bGB^2$ alors $(\mathscr{M}_k)$ est une sphère de centre G et de rayon $\sqrt{\frac{k - aGA^2 - bGB^2}{a + b}}$ et sinon $(\mathscr{M}_K)$ est vide.

2. $a + b = 0$

a. $aMA^2 + bMB^2 = k$
$\Leftrightarrow aMA^2 - aMB^2 = k$ (car $a + b = 0 \Leftrightarrow -a = b$)
$\Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = \frac{k}{a}$ (a non nul).

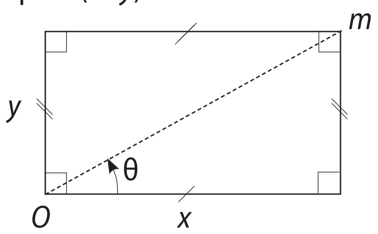
b. $MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})$
$= 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$.
En effet, I milieu de $[AB]$ donc $I = \text{bary}\{(A, 1), (B, 1)\}$ et donc pour tout point M de l'espace $2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.

c. $M \in (\mathscr{M}_K) \Leftrightarrow aMA^2 + bMB^2 = k$ avec $a + b = 0$
$\Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = \frac{k}{a}$ avec $a \neq 0$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{k}{a}$ avec $a \neq 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{k}{2a}$ avec $a \neq 0$.
$\Leftrightarrow IH \times AB = \frac{k}{2a}$ avec $a \neq 0$ où H est le projeté orthogonal de M sur (AB)
$\Leftrightarrow IH = \frac{k}{2a}AB$ avec $a \neq 0$.
Si $H \in [IB)$: $IH = \frac{k}{10a}$; Si $H \in [IA)$: $IH = -\frac{k}{10a}$.
Ainsi M appartient au plan perpendiculaire à (AB) passant par le point $H \in (AB)$ et défini comme ci-dessus.

77 Coordonnées sphériques

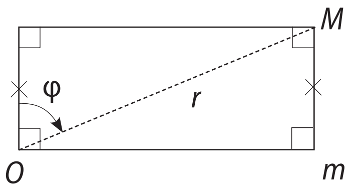
Partie A

1. a. Dans le plan (xOy) :



En utilisant la trigonométrie, on obtient $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$.

Dans le plan(OmM) :



En utilisant la trigonométrie, on obtient $\cos\varphi = \dfrac{z}{r}$.

b. D'après les figures précédentes, $r^2 = Om^2 + mM^2$
$\Leftrightarrow r^2 = Om^2 + z^2$ et $Om^2 = x^2 + y^2$.

Ainsi $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. ($r > 0$).

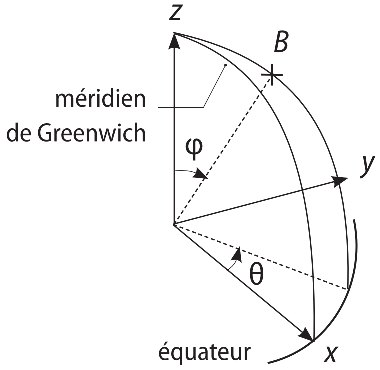
On a bien :si $M(x\,;y\,;z)$ alors $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ \varphi = \cos^{-1}\left(\dfrac{z}{r}\right) \end{cases}$

2. Si $M(r\,;\theta\,;\varphi)$ alors dans le plan (OMz), en utilisant la trigonométrie : $\cos\varphi = \dfrac{z}{r} \Leftrightarrow z = r\cos\varphi$ et $\sin\varphi = \dfrac{Om}{r}$
$\Leftrightarrow Om = r\sin\varphi$. Puis dans le plan ($Oxy$), en utilisant la trigonométrie : $\cos\theta = \dfrac{x}{Om} \Leftrightarrow x = \cos\theta \times Om$
$\Leftrightarrow x = r\cos\theta\sin\theta$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{Om} \Leftrightarrow y = Om \times \sin\theta$
$\Leftrightarrow y = r\sin\theta\sin\varphi$.

Partie B

1. r est le rayon de la terre donc $r = 6\,000$.

2. θ et φ correspondent à la latitude et à la longitude.



3. $r = 6\,000$, $\theta = 9°$ et $\varphi = 13°$ donc, d'après **A. 2.**,

$\begin{cases} x = 6\,000 \times \sin 13 \times \cos 9 \\ y = 6\,000 \times \sin 13 \times \sin 9 \\ z = 6\,000 \times \cos 13 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x \approx 1\,333 \\ y \approx 211 \\ z \approx 5\,846 \end{cases}$

Conakry a pour coordonnées cartésiennes :
(1 333 ; 211 ; 5 846).

7 Géométrie analytique de l'espace

Manuel pages 107 à 122

Activités d'introduction

1 Des plans particuliers

1. a. $A(0\ ;0\ ;0)$, $B(1\ ;0\ ;0)$, $C(1\ ;1\ ;0)$, $I\left(\frac{1}{2}\ ;0\ ;0\right)$ et $J\left(\frac{1}{2}\ ;\frac{1}{2}\ ;0\right)$.

b. La cote de ces cinq points est nulle ainsi (ABC) : $z = 0$.

c. $(ABE) : y = 0$; $(ADE) : x = 0$; $(EFG) : z = 1$.

2. a. Dans $(A\ ;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, $(AC) : y = x$

b. $E(0\ ;0\ ;1)$ donc $y_E = x_E$.

$G(1\ ;1\ ;1)$ donc $y_G = x_G$.

O milieu de $[AG]$ donc $O\left(\frac{1}{2}\ ;\frac{1}{2}\ ;\frac{1}{2}\right)$ et $y_0 = x_0$.

Ainsi E, G, O ont des coordonnées qui vérifient la relation du **2. a.**

Cette relation ne peut pas caractériser une droite car ces trois points ne sont pas alignés.

c. A, E, G et C forment un rectangle donc ils sont coplanaires et O est le milieu de $[AG]$ donc O est coplanaire avec A, E, G et C.

Pour $A : y_A = x_A$ et pour $C : y_C = x_C$ donc ces cinq points ont des coordonnées qui vérifient la relation du **2. a.**

2 Une sphère dans un repère orthonormé de l'espace

1. a. $M \in (\mathscr{S}) \Leftrightarrow \Omega M = 5$.

b. $\Omega M = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}$

donc $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = 5$.

2. a. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + (z+3)^2 - 9 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4^2$

Par identification, $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = -3$ et $R = 4$.

b. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-(-2))^2 + (z-(-3))^2} = 4$

$\Leftrightarrow \Omega' M = 4$.

$\Leftrightarrow M$ appartient à la sphère de centre M de rayon 4.

c. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + (y+1)^2 - 1 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+1)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{2}{4}$.

Or une somme de carrés ne peut pas être négative donc il n'existe pas de triplet $(x\ ;y\ ;z)$ vérifiant la dernière égalité. Ce n'est donc pas l'équation cartésienne d'une sphère.

3 Une droite dans un repère de l'espace

1. a. $M_0(1\ ;-2\ ;0)$; $M_1(-1\ ;-1\ ;-1)$; $M_2(-3\ ;0\ ;-2)$; $M_{1/2}\left(0\ ;-\frac{3}{2}\ ;-\frac{1}{2}\right)$ et $M_{-2}(5\ ;-4\ ;2)$.

b. $\overrightarrow{M_0M_1}(-2\ ;1\ ;-1)$; $\overrightarrow{M_0M_2}(-4\ ;2\ ;-2)$;

$\overrightarrow{M_0M_{1/2}}\left(-1\ ;\frac{1}{2}\ ;-\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{M_0M_{-2}}(4\ ;-2\ ;2)$.

Ainsi $\overrightarrow{M_0M_2} = 2\overrightarrow{M_0M_1}$ donc les points M_0, M_1 et M_2 sont alignés.

$\overrightarrow{M_0M_{1/2}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_0M_1}$ donc les points M_0, M_1 et $M_{0,5}$ sont alignés.

$\overrightarrow{M_0M_{-2}} = -2\overrightarrow{M_0M_1}$ donc les points M_0, M_1 et M_{-2} sont alignés.

Finalement M_0, M_1, M_2, $M_{0,5}$ et M_{-2} sont alignés.

c. $(\mathscr{E})$ semble être la droite de l'espace qui passe par M_0 et M_1.

d. • $\overrightarrow{M_0C}(-4\ ;2\ ;-2)$ et $\overrightarrow{M_0C} = 2\overrightarrow{M_0M_1}$ donc M_0, M_1 et C sont alignés.

• Résolution du système

$$\begin{cases} 1 - 2t = -3 \\ -2 + t = 0 \\ -t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases}$$

Il existe un réel t égal à 2 tel que $C(1 - 2t\ ;-2 + t\ ;-t)$ donc $C \in (\mathscr{E})$. (Remarque : $C = M_2$.)

e. L'ensemble des points de la droite (M_0M_1) ont des coordonnées qui peuvent s'écrire $(1 - 2t\ ;-2 + t\ ;-t)$.

2. a. Pour $t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{M_0M_t}(1 - 2t - 1\ ;-2 + t + 2\ ;-t)$ soit $\overrightarrow{M_0M_t}(-2t\ ;t\ ;-t)$ et $\overrightarrow{M_0M_1}(-2\ ;1\ ;-1)$.

Ainsi $t\overrightarrow{M_0M_1} = \overrightarrow{M_0M_t}$.

b. Les points M_t sont alignés avec M_0 et M_1 donc $M_t \in (M_0M_1)$.

c. $M(t)$ dans le repère $(M_0\ ;\overrightarrow{M_0M_1})$ donc $\overrightarrow{M_0M} = t\overrightarrow{M_0M_1}$

donc $\begin{cases} x_M - 1 = t(-2) \\ y_M - (-2) = t(1) \\ z_M - 0 = t(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 - 2t \\ y_M = -2 + t \\ z_M = -t \end{cases}$

d. • Lorsque $t \in [0\,;1]$:

$$\begin{array}{ccc} 0 \leqslant t \leqslant 1 & 0 \leqslant t \leqslant 1 & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \text{donc} & \text{donc} & \text{donc} \\ -1 \leqslant x_M \leqslant 1 & 2 \leqslant y_M \leqslant 3 & -1 \leqslant z_M \leqslant 0. \end{array}$$

Ainsi $(\mathscr{F}_1)$ semble être un segment.

• Lorsque $t \in [0\,;+\infty[$:
$t \geqslant 0$ donc $x_M \leqslant 1$, $y_M \geqslant 2$ et $z_M \leqslant 0$.
Ainsi $(\mathscr{F}_2)$ semble être une demi-droite.

4 Projeté orthogonal sur un plan

1. a. $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P})$ donc un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ est aussi directeur de $(\mathscr{D})$.
$\vec{n}'(1\,;2\,;-1)$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ et directeur de $(\mathscr{D})$.

Ainsi $(\mathscr{D}) : \begin{cases} x = 1t + 2 \\ y = 2t + 2 \\ z = -1t + 3 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

b. $H \in (\mathscr{D})$ donc $(AH) = (\mathscr{D})$ donc $\overrightarrow{AH}$ vecteur directeur de $(\mathscr{D})$ et donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ colinéaires.

c. $\begin{cases} H \in (\mathscr{D}) \\ H \in (\mathscr{P}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 1t + 2 \\ y_H = 2t + 2 \\ z_H = -t + 3 \\ x_H + 2y_H - z_H + 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = t + 2 \\ y_H = 2t + 2 \\ z_H = -t + 3 \\ (t + 2) + 2(2t + 2) - (-t + 3) + 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 1t + 2 \\ y_H = 2t + 2 \\ z_H = -t + 3 \\ 6t + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{7}{6} \\ x_H = \dfrac{5}{6} \\ y_H = -\dfrac{2}{6} \\ z_H = \dfrac{25}{6} \end{cases} \Leftrightarrow H\left(\dfrac{5}{6}\,;-\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{25}{6}\right).$

2. a. $(AH) \perp (\mathscr{P})$ donc (AH) orthogonale à toute droite contenue dans $(\mathscr{P})$, en particulier $(AH) \perp (HM)$. Ainsi AHM triangle rectangle en H.

b. D'après Pythagore $AM^2 = AH^2 + HM^2$.
Donc si $M \neq H$, $HM^2 > 0$ et donc $AM^2 > AH^2$
Ainsi AH est la plus petite longueur entre le point A et tous les points du plan $(\mathscr{P})$.

3. a. $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ est un vecteur directeur de (AH) donc

$\begin{cases} x_H = at + x_A \\ y_H = bt + y_A \\ z_H = ct + z_A \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Ainsi $a(at + x_A) + b(bt + y_A) + c(ct + z_A) + d = 0$
$\Leftrightarrow t(a^2 + b^2 + c^2) + ax_A + by_A + cz_A + d = 0$
$\Leftrightarrow t = \dfrac{-ax_A - by_A - cz_A - d}{a^2 + b^2 + c^2}$ $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ car $\vec{n} \neq \vec{0})$.

Et donc $x_H = \dfrac{-a^2x_A - bay_A - caz_A - ad + (a^2 + b^2 + c^2)x_A}{a^2 + b^2 + c^2}$

de même :

• pour $y_H = \dfrac{-abx_A - b^2y_A - cbz_A - bd + (a^2 + b^2 + c^2)y_A}{a^2 + b^2 + c^2}$

• et $z_H = \dfrac{-acx_A - bcy_A - c^2z_A - cd + (a^2 + b^2 + c^2)z_A}{a^2 + b^2 + c^2}$.

b. Dans le repère orthonormé,
$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2}$
$= \sqrt{\dfrac{(-a^2x_A - aby_A - acz_A - ad)^2 + (-abx_A - b^2y_A - bcz_A - bd)^2 + (-acx_A - bcy_A - c^2z_A - cd)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}}.$

En développant et en réduisant on a bien :

$AH = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$

Savoir-faire

3 a. $\overrightarrow{AB}(2\,;3\,;0)$ et $\overrightarrow{AC}(2\,;0\,;4)$.

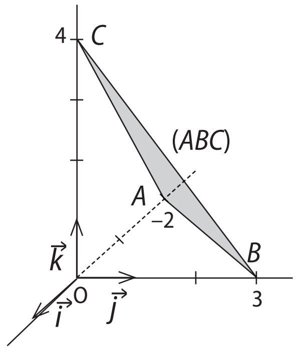
$x_{\overrightarrow{AB}} \times 1 = x_{\overrightarrow{AC}}$ mais $y_{\overrightarrow{AB}} \times 1 \neq y_{\overrightarrow{AC}}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires donc A, B, C non alignés, ils forment un plan.

$\vec{n}(a\,;b\,;c)$ vecteur normal de (ABC) donc

$\begin{cases} \vec{n}\,.\,\overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 0 \\ a + 4c = 0. \end{cases}$

Prenons $a = 6$, dans ce cas $b = -4$ et $c = -3$.
$\vec{n}(6\,;-4\,;-3)$ vecteur normal de (ABC)
donc $(ABC) : 6x - 4y - 3z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.
De plus $A \in (ABC)$ donc $6x - 2 + d = 0$ donc $d = 12$.
Finalement $(ABC) : 6x - 4y - 3z + 12 = 0$.

b.



4 a. $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ tel que $\vec{n}\,.\,\vec{u} = 0$ et $\vec{n}\,.\,\vec{v} = 0$.

Ainsi $\begin{cases} 2a - 5b + 2c = 0 \\ -3a + 5b + 2c = 0 \end{cases}$.

On choisit $c = -1$ et donc $a = -4$ et $b = -2$.
$\vec{n}(-4\,;-2\,;-1)$
b. $M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\,.\,\vec{n} = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)(-4) + (y-3)\times(-2) + (z+5)\times(-1) = 0$
$\Leftrightarrow -4x - 2y - z - 3 = 0.$

7 **a.** $M \in (A, \vec{u}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. $M \in (A\,; \vec{v}, \vec{w}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t + 0t' \\ y = -3 - t + 1t' \\ z = 2 + 0t + 2t' \end{cases}$
avec $t \in \mathbb{R}$, $t' \in \mathbb{R}$.

8 **a.** $3x_A + 2y_A + 6z_A - 6 = 6 + 0 + 0 - 6 = 0.$
$3x_B + 2y_B + 6z_B - 6 = 0 + 6 + 0 - 6 = 0.$
$3x_C + 2y_C + 6z_C - 6 = 0 + 0 + 6 + 6 = 0.$
Ainsi (ABC) a pour équation cartésienne
$3x + 2y + 6z - 6 = 0.$
b. La hauteur issue de O du tétraèdre $OABC$ est la distance de O au plan (ABC).
Or $d(O\,;(ABC)) = \dfrac{|3\times 0 + 2\times 0 + 6\times 0 - 6|}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}} = \dfrac{|-6|}{\sqrt{49}} = \dfrac{6}{7}$.
Ainsi la hauteur issue de O est égale à $\dfrac{6}{7}$ d'unité.

11 • Un vecteur directeur de ($) est $\vec{u}(-2\,;1\,;-3)$ et un vecteur directeur de ($´) est $\vec{v}(4\,;-1\,;3)$.
$x_{\vec{u}} \times (-2) = x_{\vec{v}}$ mais $y_{\vec{u}} \times (-2) \neq y_{\vec{v}}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ne sont pas parallèles.
• $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes lorsqu'il existe t et t' tels que :
$\begin{cases} 1 - 2t = 4t' + 6 \\ 2 + t = -t' - \dfrac{13}{3} \\ -1 - 3t = 3t' \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} t = -2t' - \dfrac{5}{2} \\ t = -t' - \dfrac{19}{3} \\ t = -t' - \dfrac{1}{3} \end{cases}$
ce qui est impossible.
Donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ne sont pas sécantes.

12 Un vecteur normal de $(\mathcal{P})$ est $\vec{n}(1\,;3\,;2)$ et un vecteur normal de $(\mathcal{P}')$ est $\vec{n}'(3\,;1\,;-3)$.
Or $\vec{n}\,.\,\vec{n}' = 1\times 3 + 3\times 1 + 2\times(-3) = 6 - 6 = 0.$
Ainsi $\vec{n} \perp \vec{n}'$ et donc $(\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}')$.

13 Un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ est $\vec{u}(-2\,;2\,;-3)$ et un vecteur normal de $(\mathcal{P})$ est $\vec{n}(2\,;1\,;2)$.
Or $\vec{n}\,.\,\vec{u} = -2\times 2 + 2\times 1 + (-3)\times 2 = -4 + 2 - 6 = -8.$
Ainsi $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ ne sont pas parallèles et donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants.

Exercices d'entraînement

Équation cartésienne

14 **a.** $\vec{n}(2\,;-6\,;2)$; **b.** $\vec{n}(-1\,;3\,;2)$; **c.** $\vec{n}(0\,;0\,;1)$.

15 Un vecteur normal est $\overrightarrow{BC}(-5\,;-4\,;-5)$ donc le plan a une équation cartésienne du type :
$-5x - 4y - 5z + d = 0.$
Or A appartient à ce plan donc $-5 - 8 - 15 + d = 0$ soit $d = 28$. Une équation cartésienne de ce plan est :
$-5x - 4y - 5z + 28 = 0.$

16 **a.** Centre $O_1(1\,;3\,;-2)$; $r_1 = \sqrt{16} = 4$.
b. Centre $O_2(-1\,;-5\,;3)$; $r_2 = \sqrt{2}$.
c. Centre $O_3(0\,;0\,;0)$; $r_3 = \sqrt{1} = 1$.

17 $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 3^2$.

18 **a.** $-2x_{\vec{v}} = x_{\vec{u}}$ mais $-2y_{\vec{v}} \neq y_{\vec{u}}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
b. $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ est tel que $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}\,.\,\vec{u} = 0 \\ \vec{n}\,.\,\vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 3b + 6c = 0 \\ a + 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5c \\ b = -\dfrac{16}{3}c. \end{cases}$
Avec $c = 3$ on a $a = -15$ et $b = -16$; $\vec{n}(-15\,;-16\,;3)$.
c. $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ a une équation cartésienne du type :
$-15x - 16y + 3z + d = 0$ avec d un réel.
Or $O \in (O\,;\vec{u}, \vec{v})$ donc $0 - 0 + 0 + d = 0$ donc $d = 0$.
Ainsi $(O\,;\vec{u}, \vec{v}) : -15x - 16y + 3z = 0.$

19 $\overrightarrow{AB}(3\,;1\,;2)$ est un vecteur normal de ce plan donc une équation cartésienne est du type :
$3x + y + 2z + d = 0.$
De plus I milieu de $[AB]$ est tel que $I\left(-\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{7}{2}\,;4\right)$
et il appartient à ce plan donc $-\dfrac{3}{2} - \dfrac{7}{2} + 8 + d = 0$
$\Leftrightarrow d = -3.$
Ainsi le plan médiateur de $[AB]$ a pour équation cartésienne $3x + y + 2y - 3 = 0$.

20 Comme $(\mathcal{P}) \,//\, (\mathcal{P}')$, ces deux plans ont les mêmes vecteurs normaux donc $\vec{n}(2\,;-3\,;-7)$ vecteur normal de $(\mathcal{P}')$ est aussi un vecteur normal de $(\mathcal{P})$.
Ainsi une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ est du type
$2x - 3y + 7z + d = 0.$

Or $A(-2\ ;-4\ ;3)$ appartient à $(\mathcal{P})$ donc :
$-4+12+21+d=0 \Leftrightarrow d=-29$.
Ainsi $(\mathcal{P}) : 2x-3y+7z-29=0$.

21 $\vec{n}(1\ ;-3\ ;2)$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P})$ mais il est de norme $\sqrt{(1)^2+(-3)^2+(2)^2}=\sqrt{14}$.

Le vecteur $\dfrac{1}{\sqrt{14}}\vec{n}$ a pour norme 1 puisque

$\left\|\dfrac{1}{\sqrt{14}}\vec{n}\right\|=\dfrac{1}{\sqrt{14}}\|\vec{n}\|=1$.

Ainsi $\dfrac{1}{\sqrt{14}}x-\dfrac{3}{\sqrt{14}}y+\dfrac{2}{\sqrt{14}}z-\dfrac{5}{\sqrt{14}}=0$ est l'équation normale du plan $(\mathcal{P})$.

22 **a.** $\|\overrightarrow{MA}\|^2=\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\|^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})$
$=\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}^2$
$=MI^2+IA^2+2MI\times IA\times\cos(\overrightarrow{MI}\ ;\overrightarrow{IA})$.

De même $\|\overrightarrow{MB}\|^2=\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\|^2=\|\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\|^2$
$=(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})=MI^2-2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+IA^2$
$=MI^2+IA^2-2MI\times IA\times\cos(\overrightarrow{MI}\ ;\overrightarrow{IA})$.

b. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|^2-\|\overrightarrow{MA}\|^2-\|\overrightarrow{MB}\|^2)=0$

$\Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MI}\|^2-MI^2-IA^2-2MI\times IA\times\cos(\overrightarrow{MI}\ ;\overrightarrow{IA})-MI^2$
$-IA^2+2MI\times IA\times\cos(\overrightarrow{MI}\ ;\overrightarrow{IA})=0$

$\Leftrightarrow 2MI^2-2IA^2=0$

$\Leftrightarrow MI^2=IA^2$ donc $IM=\dfrac{1}{2}AB$.

Ainsi $(\mathcal{S})$ est la sphère de centre I de rayon $\dfrac{AB}{2}$ soit celle de diamètre $[AB]$.

c. D'après **a.** et **b.**, cet ensemble de points est aussi la sphère de centre I milieu de $[AB]$ et de rayon $\dfrac{AB}{2}$.
Or $I(-1\ ;1\ ;1)$
et $AB=\sqrt{(1+3)^2+(0-2)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$.
Ainsi cet ensemble a pour équation cartésienne
$(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=(\sqrt{21})^2$.

23 **a.** $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2-(2)^2-\dfrac{5}{2}=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2=(3)^2$

C'est donc une équation cartésienne de la sphère de rayon 3 et de centre $\Omega(-\dfrac{1}{2}\ ;\dfrac{3}{2}\ ;2)$.

b. $(x+1)^2-1+(y-2)^2-4+(z+3)^2-9+14=0$
$\Leftrightarrow (x-(-1))^2+(y-2)^2+(z-(-3))^2=0$
C'est donc le point $\Omega'(-1\ ;2\ ;-3)$.

c. $(x-3)^2-9+(y-\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{4}+(z+\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{4}+10=0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-\dfrac{1}{2})^2+(z-\dfrac{1}{2})^2=-\dfrac{1}{2}$

C'est l'ensemble vide.

24 **a.** C'est le plan passant par $O(0\ ;0\ ;0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2\ ;1\ ;0)$.

b. $(x-4)^2-16+\left(y+\dfrac{7}{2}\right)^2-\dfrac{49}{4}+(z-3)^2-9=0$

$\Leftrightarrow (x-4)^2+\left(y-\left(-\dfrac{7}{2}\right)\right)^2+(z-3)^2=\dfrac{149}{4}$.

C'est la sphère de centre $\Omega(4\ ;-\dfrac{7}{2}\ ;3)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{149}}{2}$.

c. $9x^2=4z^2 \Leftrightarrow (3x)^2=(2z)^2 \Leftrightarrow \begin{cases}3x=2z\\ \text{ou}\\ 3x=-2z\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3x-2z=0\\ \text{ou}\\ 3x+2z=0.\end{cases}$

C'est la réunion du plan passant par $O(0\ ;0\ ;0)$ et de vecteur normal $\vec{n}_1(3\ ;0\ ;-2)$ et du plan passant par $O(0\ ;0\ ;0)$ et de vecteur normal $\vec{n}_2(3\ ;0\ ;2)$.

d. $(x+1)^2-1+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+(z+3)^2-9=K$

$\Leftrightarrow (x-(-1))^2+\left(y-\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right)^2+(z-(-3))^2=K+\dfrac{49}{4}$.

Si $K<-\dfrac{49}{4}$: ensemble vide.

Si $K=-\dfrac{49}{4}$: l'unique point $A\left(-1\ ;-\dfrac{3}{2}\ ;-3\right)$.

Si $K>-\dfrac{49}{4}$: la sphère de centre A et de rayon $\sqrt{K+\dfrac{49}{4}}$.

25 **a.** $AB=\sqrt{(1-3)^2+(-3+5)^2+(7-1)^2}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$.
I milieu de $[AB]$ alors $I(2\ ;-4\ ;4)$.
Ainsi $(\mathcal{S})$ a pour équation cartésienne
$(x-2)^2+(y+4)^2+(z-4)^2=(\sqrt{11})^2$.

b. $(\mathcal{P})$ tangent à $(\mathcal{S})$ en A donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P})$. Or $\overrightarrow{AB}(-2\ ;2\ ;6)$
donc $(\mathcal{P}) : -2x+2y+6z+d=0$.
De plus $A\in(\mathcal{P})$
donc $-2\times3+2\times(-5)+6\times(1)+d=0$ soit $d=10$.
Finalement $(\mathcal{P}) : -2x+2y+6z+10=0$.

26 Un rayon de cette sphère est :

$AI=\sqrt{(1-3)^2+(2-4)^2+(3-5)^2}=\sqrt{12}$.

Ainsi $\mathcal{V}=\dfrac{4}{3}\times\pi\times\sqrt{12}^3=16\sqrt{12}\,\pi$.

Représentations paramétriques

27 **a.** $(A\,;\vec{u})$ avec $A(0\,;1\,;3)$ et $\vec{u}(2\,;-2\,;4)$.
b. $(A\,;\vec{u})$ avec $A(2\,;0\,;4)$ et $\vec{u}(1\,;-3\,;1)$.
c. $(A\,;\vec{u})$ avec $A(3\,;-1\,;0)$ et $\vec{u}(-1\,;1\,;2)$.
d. $(A\,;\vec{u})$ avec $A(-2\,;0\,;3)$ et $\vec{u}(1\,;5\,;0)$.

28 **a.** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 5 \\ z = 2 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

c. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

29 $\overrightarrow{IJ}(-1\,;1\,;0)$ et $\overrightarrow{IK}(-1\,;0\,;1)$ sont deux vecteurs non coplanaires et directeurs du plan (IJK).

Ainsi $\begin{cases} x = 1 - t - t' \\ y = t \\ z = t' \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$

est une représentation paramétrique du plan (IJK).

30 $d(B\,;(\mathcal{P})) = \dfrac{|3 + 2 \times 1 + 2 \times (-3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \dfrac{|-1|}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$.

31 **a.** $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. Si $x = 0$ alors $t = 1$. Puis avec $t = 1$, $y = 1$ et $z = -1$. Ainsi $B \in (d)$.

c. Cette représentation indique que cette droite a pour repère $(B\,;\vec{v})$ avec $\vec{v}(2\,;-2\,;-4)$.
On remarque que $\vec{v} = 2\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Nous pouvons donc dire que (d) admet aussi cette représentation paramétrique.

32 **a.** Par lecture $A(1\,;1\,;1)$ et $B(2\,;3\,;2)$. Ainsi :

$(OA) : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, $(OB) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

et $(AB) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. $(OAB) : \begin{cases} x = t + 2t' \\ y = t + 3t' \\ z = t + 2t' \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$.

33 **a.** $\vec{n}(1\,;2\,;2)$ et $\vec{n}'(1\,;-1\,;2)$.

b. $x_{\vec{n}} = x_{\vec{n}'}$ mais $y_{\vec{n}} \neq y_{\vec{n}'}$ donc $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires.

c. $x_A + 2y_A + 2z_A - 4 = 2 + 2 - 4 = 0$, donc $A \in (\mathcal{P})$.
$x_A - y_A + 2z_A - 1 = -1 + 2 - 1 = 0$, donc $A \in (\mathcal{P}')$.

d. $\vec{u}\,.\,\vec{n} = 2 \times 1 + 0 \times 2 - 1 \times 2 = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{n}$.
$\vec{u}\,.\,\vec{n}' = 2 \times 1 + 0 \times (-1) - 1 \times 2 = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{n}'$.

e. $\vec{u} \perp \vec{n}$ donc $\vec{u}$ vecteur directeur de $(\mathcal{P})$ et de même $\vec{u}$ vecteur directeur de $(\mathcal{P}')$. Puis A est un point commun à ces deux plans. Ainsi $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ se coupent en une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
Donc si $M(x\,;y\,;z) \in (A\,;\vec{u})$ alors

$\begin{cases} M(x\,;y\,;z) \in (\mathcal{P}) \\ M(x\,;y\,;z) \in (\mathcal{P}') \end{cases}$ soit $\begin{cases} x + 2y + 2z - 4 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$

f. $(A\,;\vec{u}) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

34 • Par lecture $A_1(2\,;3\,;0)$, $B_1(0\,;1\,;2)$ donc

$(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

• Par lecture $A_2(2\,;0\,;3)$ et $B_2(0\,;1\,;3)$ donc

$(\mathcal{D}_2) : \begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

35 **a.** $\vec{u}(1\,;-1\,;0)$ et $\vec{v}(1\,;0\,;-1)$ sont deux vecteurs directeurs de $(\mathcal{P})$. Donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $(\mathcal{P})$.

b. $A(0\,;1\,;1)$ est un point de $(\mathcal{P})$. (Avec $t = t' = 0$)

c. Avec $t = 1$ et $t' = 1$ on obtient $x = 2$, $y = 0$ et $z = 0$.
Ainsi $B(2\,;0\,;0)$ est un autre point de $(\mathcal{P})$.
Puis $\vec{u} + \vec{v}(2\,;-1\,;-1)$ et $\vec{u} - \vec{v}(0\,;-1\,;1)$ sont des vecteurs directeurs de $(\mathcal{P})$ et ils ne sont pas colinéaires.
Ainsi $(B\,;\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$ est un repère de $(\mathcal{P})$.

$(\mathcal{P}) : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t - t' \\ z = -t + t' \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$.

36 **1. a.** $y = 4 - 2x - 2z$. Ainsi $y = 4 - 2t - 2t'$.

b. $(\mathcal{P}) : \begin{cases} x = t \\ y = 4 - 2t - 2t' \\ z = t' \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$.

2. a. Si $x = 1$, $y = 0$ et $z = 1$ alors $2x + y - 2z - 4 = 0$.
Donc $A(1\,;0\,;1)$ est un point de $(\mathcal{P})$.

b. $\vec{n}(2\,;1\,;2)$ vecteur normal de $(\mathcal{P})$
Si $\vec{u}(a\,;b\,;c)$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{P})$ alors $\vec{u}\,.\,\vec{n} = 0$ soit $2a + b + 2c = 0$. Si $a = 2$, $b = 2$ alors $c = -3$.
Ainsi $\vec{u}(2\,;2\,;-3)$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{P})$.
De même avec $\vec{v}(d\,;e\,;f)$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{P})$.
Si $a = 5$, $b = 0$ alors $c = -5$. Ainsi $\vec{v}(5\,;0\,;-5)$ vecteur directeur de $(\mathcal{P})$.

c. Puis $\vec{v}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires donc $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère de $(\mathcal{P})$ et

$$(\mathcal{P}):\begin{cases}x=1+2t+5t'\\y=2t\\z=1-3t-5t'\end{cases}\quad \text{avec } t\in\mathbb{R} \text{ et } t'\in\mathbb{R}.$$

3. a. On a déjà $A(1\,;0\,;1)$ puis $B(2\,;0\,;0)$ et $C(-1\,;4\,;1)$ sont des points appartenant à $(\mathcal{P})$.

b. $\overrightarrow{AB}(1\,;0\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-2\,;4\,;0)$ sont des vecteurs non colinéaires et directeurs de $(\mathcal{P})$.

Ainsi $(\mathcal{P}):\begin{cases}x=1+t-2t'\\y=4t'\\z=1-t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$ et $t'\in\mathbb{R}$.

37 **a.** $A(3\,;0\,;2)$, $\vec{u}(1\,;2\,;-2)$ et $\vec{v}(-3\,;3\,;0)$.

b. $(\mathcal{P}):\begin{cases}x=3+t-3t'\\y=2t+3t'\\z=2-2t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$ et $t'\in\mathbb{R}$.

c. $z=2-2t \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}z+1=t.$

$$\begin{aligned}y=2t+3t' &\Leftrightarrow y=2(-\tfrac{1}{2}z+1)+3t'\\&\Leftrightarrow y+z-2=3t'\\&\Leftrightarrow t'=\tfrac{1}{3}y+\tfrac{1}{3}z-\tfrac{2}{3}.\end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned}x=3+t-3t' &\Leftrightarrow x=3+\left(1-\tfrac{1}{2}z\right)-3\left(\tfrac{1}{3}y+\tfrac{1}{3}z-\tfrac{2}{3}\right)\\&\Leftrightarrow x=3+1-\tfrac{1}{2}z-y-z+2\\&\Leftrightarrow x+y+\tfrac{3}{2}z-6=0.\end{aligned}$$

Ainsi $(\mathcal{P}): x+y+\dfrac{3}{2}z-6=0.$

Position relative

38 **a.** Le vecteur $\vec{u}(1\,;-1\,;2)$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ et le vecteur $\vec{v}(-2\,;-1\,;1)$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D}')$.

$x_{\vec{v}}=-2\times x_{\vec{u}}$ mais $y_{\vec{v}}\neq -2\times y_{\vec{u}}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ne sont pas parallèles.

b. Si $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes, alors il existe t et λ tels que :

$$\begin{cases}t+3=-2\lambda+1\\-t+2=-\lambda\\2t=\lambda-1\end{cases}\quad\text{c'est-à-dire}\quad\begin{cases}\lambda=-\dfrac{1}{2}t-1\\\lambda=t-2\\\lambda=2t+1\end{cases}$$

ce qui est impossible.

Donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ne sont pas sécantes.

39 **a.** $\vec{u}(-2\,;1\,;3)$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ et $\vec{n}(2\,;-1\,;-3)$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P})$.

$\vec{u}\cdot\vec{n}=-2\times2+1\times(-1)+3\times(-3)=-14.$ $-14\neq0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux et donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ ne sont pas parallèles.

b. Est-ce que $I\in(\mathcal{D})$?

$-1=1-2t \Leftrightarrow t=1$. Et ainsi $y=-1$ et $z=3$.

Donc $I\in(\mathcal{D})$.

Est-ce que $I\in(\mathcal{P})$?

$2\times(-1)-(-1)-3\times3+10=-2+1-9+10=0.$

Donc $I\in(\mathcal{P})$.

Finalement $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants en I.

40 $\vec{n}(1\,;-3\,;2)$ et $\vec{n}'(2\,;1\,;7)$ sont, respectivement des vecteurs normaux de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

Or $x_{\vec{n}'}=2\times x_{\vec{n}}$ mais $y_{\vec{n}'}\neq 2\times y_{\vec{n}}$ donc $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires donc $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ ne sont pas parallèles.

41 **a.** $\vec{u}(-1\,;2\,;3)$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ et $\vec{n}(3\,;-1\,;2)$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P})$.

$x_{\vec{n}}=-3\times x_{\vec{u}}$ mais $y_{\vec{n}}\neq -3\times y_{\vec{u}}$ donc $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires et donc $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$ ne sont pas perpendiculaires.

Puis $-1\times3+2\times(-1)+3\times2=-3-2+6=1.$

$1\neq0$ donc $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux donc $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$ ne sont pas parallèles.

Finalement $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants.

b. $M(x\,;y\,;z)\in(\mathcal{D}) \Leftrightarrow \begin{cases}x=-t+2\\y=2t\\z=3t-1\end{cases}$

et $M(x\,;y\,;z)\in(\mathcal{P}) \Leftrightarrow 3x-y+2z-1=0.$

Ainsi $M(x\,;y\,;z)$ appartient à $(\mathcal{D})$ et à $(\mathcal{P})$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-t+2\\y=2t\\z=3t-1\\3x-y+2z-1=0.\end{cases}$$

c. $$\begin{aligned}&3(-t+2)-(2t)+2(3t-1)-1=0\\&\Leftrightarrow -3t+6-2t+6t-2-1=0\\&\Leftrightarrow t=-3.\end{aligned}$$

Et ainsi $x=-(-3)+2=5$, $y=2\times(-3)=-6$ et $z=3\times(-3)-1=-10$.

$M(5\,;-6\,;-10)$ est le point d'intersection de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$.

42 **a.** $\vec{n}(4\,;-2\,;2)$ et $\vec{n}'\left(\dfrac{1}{3}\,;-\dfrac{1}{3}\,;-1\right)$ sont, respectivement, des vecteurs normaux de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

$z_{\vec{n}}=-2\times z_{\vec{n}'}$ mais $x_{\vec{n}}\neq -2\times x_{\vec{n}'}$ donc $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires donc $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ ne sont pas parallèles, donc ils sont sécants.

Puis $4\times\dfrac{1}{3}-2\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)+2\times(-1)=\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}-2=0$

donc $(\mathcal{P})\perp(\mathcal{P}')$.

b. $M(x\,;y\,;z)$ appartient à $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x-2y+2z-6=0\\\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}y-z=0\end{cases}$$

c. En posant $z = t$ où $t \in \mathbb{R}$.

$M(x\,;y\,;z)$ est solution du système $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 6 - 2t \\ \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}y = t \\ z = t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + t - 3 \\ x - (2x + t - 3) = 3t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4t + 3 \\ y = -7t + 3 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

d. La droite (Δ) est l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $\begin{cases} x = -4t + 3 \\ y = -7t + 3 \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

43 **a.** $\vec{u}(2\,;4\,;-3)$ et $\vec{u}'(1\,;3\,;-2)$ sont, respectivement, des vecteurs directeurs de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

$x_{\vec{u}} = 2 \times x_{\vec{u}'}$ mais $y_{\vec{u}} \neq 2 \times y_{\vec{u}'}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ne sont pas parallèles.

$\vec{u}\,.\,\vec{u}' = 2 \times 1 + 4 \times 3 - 3 \times (-2) = 2 + 12 + 6 = 20.$

$20 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas orthogonaux donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ non plus.

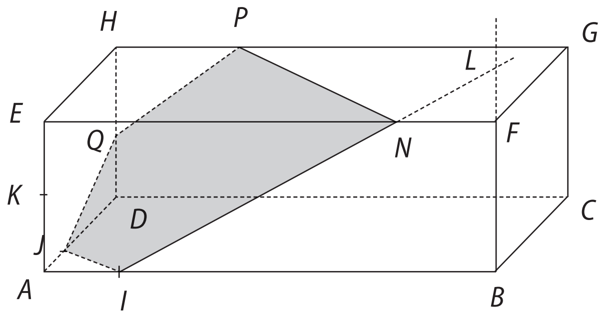
b. c. Si $M(x\,;y\,;z)$ appartient à $(\mathcal{D})$ et à $(\mathcal{D}')$ alors

$\begin{cases} 2t - 1 = \lambda + 6 \\ 4t = 3\lambda - 1 \\ -3t + 5 = -2\lambda + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 7 = \lambda \\ 4t = 3(2t - 7) - 1 \\ -3t + 5 = -2(2t - 7)) + 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2t - 7 \\ -2t = -22 \\ t = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 15 \\ t = 11. \end{cases}$

d. Avec $t = 11$, on obtient $M(21\,;44\,;-28)$. Ce point M est le point d'intersection de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

44 **a.** et **e.**



b. $ABCDEFGH$ est un pavé droit donc $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AJ} \perp \overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AK} \perp \overrightarrow{AI}$.

Puis, $\|\overrightarrow{AI}\| = \|\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}\| = \dfrac{1}{6} \times 6 = 1$ de même $\|\overrightarrow{AJ}\| = 1$ et $\|\overrightarrow{AK}\| = 1$.

Ainsi $(A\,;\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$ est un repère orthonormé.

c. • $I(1\,;0\,;0)$ et $J(0\,;1\,;0)$ donc $\overrightarrow{IJ}(-1\,;1\,;0)$.

Ainsi $\overrightarrow{IJ}\,.\,\vec{n} = -1 \times 2 + 1 \times 2 + 0 \times 9 = 0$

$G(6\,;4\,;2)$ donc $\overrightarrow{IG}(5\,;4\,;2)$.

Ainsi $\overrightarrow{IG}\,.\,\vec{n} = 5 \times 2 + 4 \times 2 + 2 \times (-9) = 18 - 18 = 0.$

$\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJG) donc $\vec{n}$ est un vecteur normal de (IJG).

• Une équation du type $2x + 2y - 9z + d = 0$ est une équation cartésienne de (IJG).

Puis $I \in (IJG)$ donc :

$2 \times 1 + 2 \times 0 - 9 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2.$

Ainsi $(IJG) : 2x + 2y - 9z - 2 = 0.$

d. $B(6\,;0\,;0)$ et $F(6\,;0\,;2)$ donc $\overrightarrow{BF}(0\,;0\,;2)$ donc (BF) a pour représentation paramétrique

$\begin{cases} x = 6 + 0t \\ y = 0 + 0t \\ z = 0 + 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

$M(x\,;y\,;z)$ est l'intersection de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D}) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x + 2y - 9z - 2 = 0 \\ x = 6 \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \\ 2 \times 6 + 2 \times 0 - 9 \times 2t - 2 = 0 \\ z = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \\ t = \dfrac{10}{18} \\ z = \dfrac{20}{18} \end{cases}$

$M\left(6\,;0\,;\dfrac{10}{9}\right)$ est le point d'intersection de (BF) et (IJG).

e. On trace (1) $[IJ]$; (2) $[IN]$ tel que N intersection de (IL) et (EF) ; (3) la parallèle à $[IJ]$ passant par N avec P intersection de cette parallèle avec (HG) ; (4) la parallèle à $[IN]$ passant par P avec Q intersection de (HD) et cette parallèle.

La section est le polygone $IJQPN$.

45 **1. a.** $\begin{cases} 2 \times 0 + 0 + 2 \times 2 = 4 \\ 2 \times 0 + 4 + 2 \times 0 = 4 \\ 2 \times 2 + 0 + 2 \times 0 = 4 \end{cases}$

donc $(ABC) : 2x + y + 2z = 4.$

b. $d(0\,;(ABC)) = \dfrac{|2 \times 0 + 0 + 2 \times 0 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{9}} = \dfrac{4}{3}.$

2. a. $\overrightarrow{BC}(2\,;-4\,;0)$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P})$ donc $(\mathcal{P}) : 2x - 4y + 0z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

De plus $A \in (\mathcal{P})$ donc $2 \times 0 - 4 \times 0 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0.$

Ainsi $(\mathcal{P}) : 2x - 4y = 0.$

b. $M(x\,;y\,;z)$ appartient à $(\mathcal{P})$ et à (ABC) si et seulement si

$\begin{cases} 2x + y + 2z = 4 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = t \\ x = 2t \\ 2 \times (2t) + t + 2z = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -\dfrac{5}{2}t + 2 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

(Δ) a pour représentation paramétrique :

$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -2{,}5t + 2 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

A étant un point commun à ces deux plans, $A \in (\Delta)$ et (Δ) étant incluse dans $(\mathscr{P})$, elle est orthogonale à (AB). Ainsi (Δ) est la hauteur issue de A dans ABC.

3. a. I milieu de $[AC]$ donc $I\left(\frac{0+2}{2}\ ;\ \frac{0+0}{2}\ ;\ \frac{2+0}{2}\right)$ soit $I(1\ ;0\ ;1)$.

Est-ce que $I \in (\Delta')$?

$1 = t$ donc $y = 4 - 4 \times 1 = 0$ et $z = 1$. Ainsi $I \in (\Delta')$.

Est-ce que $B \in (\Delta')$?

$0 = t$ donc $y = 4 - 4 \times 0 = 4$ et $z = 0$. Ainsi $B \in (\Delta')$.

Donc (Δ') est bien la médiane issue de B dans ABC.

b. $AB = \sqrt{(0-0)^2 + (4-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$AC = \sqrt{(2-0)^2 + (0-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (0-4)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Ainsi ABC est isocèle en B.

4. H appartient à (Δ) et à (Δ) donc

$$\begin{cases} t = 2t' \\ 4 - 4t = t' \\ t = -2{,}5t' + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2t' \\ 4 - 8t' = t' \\ 2t' = -2{,}5t' + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2t' \\ 4 = 9t' \\ 4{,}5t' = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{9}{4} \\ t = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Ainsi $H(4{,}5\ ;-14\ ;4{,}5)$.
H est le centre de gravité de ABC.

46 **a.** • $G\left(\frac{1+0+0}{3} ; \frac{0+1+0}{3} ; \frac{0+0+1}{3}\right)$ soit $G(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3})$.

• $\overrightarrow{OG}(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3})$, $\overrightarrow{AB}(-1\ ;1\ ;0)$ et $\overrightarrow{AC}(-1\ ;0\ ;1)$.

$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 0 = 0$ et $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} = 0$.

Ainsi $\overrightarrow{OG}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (ABC) donc $(OG) \perp (ABC)$.

b. $\overrightarrow{A'B'}(-2\ ;2\ ;0)$ et $\overrightarrow{A'C'}(-2\ ;0\ ;3)$ sont deux vecteurs non colinéaires et directeurs du plan $(A'B'C')$.

Puis $\vec{n} \cdot \overrightarrow{A'B'} = 3 \times (-2) + 3 \times 2 + 2 \times 0 = 0$

et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{A'C'} = 3 \times (-2) + 3 \times 0 + 2 \times 3 = 0$.

Ainsi $\vec{n}$ est bien un vecteur normal de $(A'B'C')$ donc $(A'B'C') : 3x + 3y + 2z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

Or $A' \in (A'B'C')$ donc $3 \times 2 + 3 \times 0 + 2 \times 0 + d = 0$

$\Leftrightarrow d = -6$. Ainsi $(A'B'C') : 3x + 3y + 2z - 6 = 0$.

c. • $\overrightarrow{AC}(-1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ donc une représentation paramétrique de la droite (AC) est :

$$\begin{cases} x = -1t + 1 \\ y = 0t + 0 \\ z = 1t + 0 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

• $K(x\ ;y\ ;z)$ appartient à (AC) et à $(A'B'C') \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \\ 3x + 3y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \\ -3t + 0 + 2t - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -6 \\ x = 6 \\ y = 0 \\ z = -6 \end{cases}$$

Donc $K(6\ ;0\ ;-6)$.

d. • $3 \times 0 + 3 \times 4 + 2 \times (-3) - 6 = 0 + 12 - 6 - 6 = 0$ donc $L \in (A'B'C')$.

• Puis $\overrightarrow{BL}(0\ ;3\ ;-3)$ et $\overrightarrow{BC}(0\ ;-1\ ;1)$. Ainsi $-3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BL}$. Cela signifie que $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BL}$ sont colinéaires donc que B, C et L sont alignés et donc $L \in (BC)$.

• (ABC) et $(A'B'C')$ sont deux plans sécants suivant la droite (LK). De plus, $\overrightarrow{AB}(-1\ ;1\ ;0)$ et $\overrightarrow{A'B'}(-2\ ;2\ ;0)$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires.

$(AB) \subset (ABC)$; $(A'B') \subset (A'B'C')$ $(AB) // (A'B')$; (LK) intersection de (ABC) et $(A'B'C')$, donc, d'après le théorème du toit $(AB) // (A'B') // (LK)$.

Se Tester

47 **1.** Vrai ; **2.** Faux ; **3.** Faux ; **4.** Vrai ; **5.** Faux.

48 **1.** Faux. $1 + 2 - (-1) - 1 = 3$. Or $3 \neq 0$ donc l'équation $x + y - z - 1 = 0$ n'est pas celle du plan (ABC) puisque les coordonnées de A ne vérifient pas cette équation.

2. Faux. Si $\vec{n}(1\ ;\ 1\ ;\ -1)$ était un vecteur normal de ce plan, alors il serait colinéaire à tout vecteur normal de ce plan. Mais il n'est pas colinéaire au vecteur normal $\vec{n}'(1\ ;-2\ ;0)$ du plan d'équation donc $x + y - z + d = 0$.

3. Faux. $-1 = 1 + 2t \Leftrightarrow -2 = 2t \Leftrightarrow -1 = t$.

Et si $t = -1$ alors $y = 3$ et $z = 3$. Or $y_M = 3$ et $z_M = 2$ donc $M \notin (\mathscr{D})$.

4. Faux. $x^2 + x + y^2 + y + z^2 + z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$.

5. Vrai. La sphère de centre $I(1\ ;0\ ;-2)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$ a pour équation cartésienne :

$(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \sqrt{5}^2$,

c'est-à-dire $x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 + 4z + 4 = 5$

soit $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z = 0$.

6. Faux. $\overrightarrow{BB'}(2\,;-5\,;5)$ et $\vec{n}(-1\,;3\,;-1)$.
$x_{\overrightarrow{BB'}} = -2 \times x_{\vec{n}}$ mais $y_{\overrightarrow{BB'}} \neq -2 \times y_{\vec{n}}$ donc $\overrightarrow{BB'}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires et donc (BB') n'est pas orthogonal au plan d'équation donnée.

49 **1. c.** ; **2. a.** ; **3. b.**

50 **1. b.** : $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P})$ donc $\vec{n}(1\,;1\,;-3)$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ mais aussi directeur de $(\mathscr{D})$. Or seul le vecteur directeur de la droite proposée en réponse **b.** est colinéaire à $\vec{n}$.

2. c. : $d(A\,;(\mathscr{P})) = \dfrac{|1+(-2)-3\times 0+4|}{\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$.

3. c. : $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-0)^2 = 3^2$
$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4+z^2 = 9$
$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+4y = 4.$

Exercices d'approfondissement

51 Droites coplanaires

• Un repère de la droite $(\mathscr{D})$ peut être $(A\,;\vec{u})$ où $A(4\,;5\,;-3)$ et $\vec{u}(1\,;-2\,;3)$. Un repère de $(\mathscr{D}')$ est $(B\,;\vec{v})$ avec $B(1\,;11\,;-4)$ et $\vec{v}(3\,;-6\,;1)$.

$x_{\vec{v}} = 3 \times x_{\vec{u}}$, $y_{\vec{v}} = 3 \times y_{\vec{u}}$ mais $z_{\vec{v}} \neq 3 \times z_{\vec{u}}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ ne sont pas parallèles.

• Si $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes en $M(x\,;y\,;z)$ alors

$$\begin{cases} 4+t = 3t'+1 \\ 5-2t = -6t'+11 \\ -3+3t = t'-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3t'-3 \\ 5-2(3t'-3) = -6t'+11 \\ -3+3(3t'-3) = t'-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3t'-4 \\ 11-6t' = -6t'+11 \\ -12+9t' = t'-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3t'-3 \\ 8t' = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 \\ t = 0. \end{cases}$$

Ainsi $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes en $M(4\,;5\,;-3)$ donc il existe un unique plan contenant $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

• Ce plan contient le point $M(4\,;5\,;-3)$ et a pour couple de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Recherche d'un vecteur $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ tels que $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$.

$$\begin{cases} \vec{n}\,.\,\vec{u} = 0 \\ \vec{n}\,.\,\vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\times a - 2\times b + 3\times c = 0 \\ 3\times a - 6\times b + 1\times c = 0 \end{cases}$$

Avec $b = 1$ on a :

$$\begin{cases} a-2+3c = 0 \\ 3a-6+c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2-3c \\ 3(2-3c)-6+c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = 2. \end{cases}$$

Ainsi $\vec{n}(2\,;1\,;0)$ et une équation cartésienne du plan cherché est du type $2x+y+0z+d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Et $M(4\,;5\,;-3)$ appartient à ce plan donc :
$2\times 4+5+0\times(-3)+d = 0$ soit $d = -13$.

Finalement le plan d'équation cartésienne $2x+y-13 = 0$ contient les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

52 Droites et barycentre

a. G bary$\{(A, 1), (M, 2)\}$ donc

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{1+2}(x_A+x_M) \\ y_G = \dfrac{1}{1+2}(y_A+y_M) \\ z_G = \dfrac{1}{1+2}(z_A+z_M) \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_G = \dfrac{1}{3}(1+2t-1) \\ y_G = \dfrac{1}{3}(-1+t+1) \\ z_G = \dfrac{1}{3}(2-t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{2}{3}t \\ y_G = \dfrac{1}{3}t \\ z_G = -\dfrac{1}{3}t+\dfrac{2}{3} \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

b. Lorsque M décrit la droite $(\mathscr{D})$, t décrit l'ensemble $\mathbb{R}$ et donc G décrit la droite $(\mathscr{D}')$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}t \\ y = \dfrac{1}{3}t \\ z = -\dfrac{1}{3}t+\dfrac{2}{3} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$. $(\mathscr{E}) = (\mathscr{D}')$.

53 Positions relatives de droites

a. Les points $A(1\,;0\,;1)$ et $B\left(1\,;\dfrac{1}{2}\,;0\right)$ appartiennent à $(\mathscr{D}'')$ donc $\overrightarrow{AB}\left(0\,;\dfrac{1}{2}\,;-1\right)$ est un vecteur directeur de $(\mathscr{D}'')$.

Les points $C(3\,;0\,;2)$ et $D(3\,;1\,;0)$ appartiennent à $(\mathscr{D})$ donc $\overrightarrow{CD}(0\,;1\,;-2)$ est un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$.

Or $\overrightarrow{AB} \times 2 = \overrightarrow{CD}$ cela signifie que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et donc $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}'')$ sont parallèles.

b. Les points $A(1\,;0\,;1)$ et $E(0\,;2\,;2)$ appartiennent à $(\mathscr{D}')$ donc $\overrightarrow{AE}(-1\,;2\,;1)$ est un vecteur directeur de $(\mathscr{D}')$.

Ainsi $(\mathscr{D}')$: $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 0+2t \\ z = 1+t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

et $(\mathscr{D}'')$: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0+\dfrac{1}{2}t' \\ z = 1-t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires donc $(\mathscr{D}')$ et $(\mathscr{D}'')$ ne sont pas parallèles et A est un point commun à $(\mathscr{D}')$ et $(\mathscr{D}'')$ donc $(\mathscr{D}')$ et $(\mathscr{D}'')$ sont sécantes en $A(1~;0~;1)$.

c. • $(\mathscr{D})$ // $(\mathscr{D}'')$ et $(\mathscr{D}'')$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes donc $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ ne sont pas parallèles.

• Sont elles sécantes ?
Si elles sont sécantes en $M(x~;y~;z)$ alors

$$\begin{cases}3=1-t\\0+t'=2t\\2-2t'=1+t\end{cases}\quad \text{soit}\begin{cases}t=-2\\t'=-4\\2-2\times(-4)=1+(-2)\end{cases}$$

soit $\begin{cases}t=-2\\t'=-4\\10=-1.\end{cases}$

Ce système n'a pas de solution. Ainsi $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ ne sont pas sécantes.
Finalement $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont non parallèles et non sécantes donc elles sont non coplanaires.
Comme de plus $\overrightarrow{CD}\,.\,\overrightarrow{AE}=0$, elles sont orthogonales.

54 Distance d'un point à une droite

1. • $\overrightarrow{AB}(2~;0~;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(0~;1~;1)$. Puis $z_{\overrightarrow{AC}}=-z_{\overrightarrow{AB}}$ mais $y_{\overrightarrow{AC}}\neq -y_{\overrightarrow{AB}}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc (ABC) est un plan.

• $\vec{n}(a~;b~;c)$ est un vecteur normal du plan (ABC) donc

$$\begin{cases}2\times a+0\times b-1\times c=0\\0\times a+1\times b+1\times c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=c\\-b=c\end{cases}$$

Avec $c=4$, $a=2$ et $b=-4$. Ainsi $\vec{n}(2~;-4~;4)$ est un vecteur normal de (ABC) et il existe un réel d tel que $(ABC):2x-4y+4z+d=0$.

Or $A(1~;2~;2)$ appartient à (ABC) donc

$2\times1-4\times2+4\times2+d=0$ soit $d=-2$.

Ainsi $(ABC):2x-4y+4z-2=0$ ou $x-2y+2z-1=0$.

2. a. $\vec{n}_1(1~;-2~;2)$ et $\vec{n}_2(1~;-3~;2)$ sont, respectivement, des vecteurs normaux de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$.

Or $x_{\vec{n}_1}=1\times x_{\vec{n}_2}$ mais $y_{\vec{n}_1}\neq 1\times y_{\vec{n}_2}$ donc $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires donc $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ ne sont pas parallèles et sont donc sécants.

b. $(\mathscr{P})$ et (ABC) ont une équation cartésienne identique donc ils sont égaux. Ainsi $C\in(\mathscr{P})$.

Puis $1-3\times3+2\times3+2=1-9+6+2=0$ donc $C\in(\mathscr{P}')$.

C est un point appartenant aux deux plans, il appartient à leur droite d'intersection (Δ).

c. $\vec{u}\,.\,\vec{n}_1=2\times1+0\times(-2)+(-1)\times2=0$ donc $\vec{u}\perp\vec{n}_1$ donc $\vec{u}$ vecteur directeur de $(\mathscr{P})$.

$\vec{u}\,.\,\vec{n}_2=2\times1+0\times(-3)+(-1)\times2=0$ donc $\vec{u}$ vecteur directeur de $(\mathscr{P}')$.

Ainsi $\vec{u}$ vecteur directeur de (Δ).

d. $(\Delta):\begin{cases}x=1+2t\\y=3\\z=3-t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

3. a. $\overrightarrow{CM}=k\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=2k+1\\y_M=0k+3\\z_M=-1k+3.\end{cases}$

$\overrightarrow{AM}(2k~;1~;-k+1)$.

$\overrightarrow{AM}\,.\,\vec{u}=0\Leftrightarrow 2k\times2+1\times0+(-k+1)\times(-1)=0$

$$\Leftrightarrow 4k+k-1=0\Leftrightarrow k=\frac{1}{5}.$$

Ainsi $\overrightarrow{AM}\perp\vec{u}$ si et seulement si $k=\dfrac{1}{5}$.

b. Si $k=\dfrac{1}{5}$ alors $M\left(\dfrac{7}{5}~;3~;\dfrac{14}{5}\right)$

et $AM=\sqrt{\left(\dfrac{7}{5}-1\right)^2+(3-2)^2+\left(\dfrac{14}{5}-2\right)^2}$

$$=\sqrt{\frac{4}{25}+1+\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{45}{25}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

4. a. $AH=\dfrac{|1-2\times2+2\times2-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{0}{\sqrt{9}}=0.$

$AH'=\dfrac{|1-3\times2+2\times2+2|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}.$

b. $(AH')\perp(\mathscr{P}')$ donc $(AH')\perp(H'M)$ donc $AH'M$ triangle rectangle en H' donc H' appartient au cercle de diamètre $[AM]$.

De même, $(AH)\perp(\mathscr{P})$ donc $(AH)\perp(HM)$ donc AHM triangle rectangle en H donc H appartient au cercle de diamètre $[AM]$.

Dans l'espace, si I est le milieu de $[AM]$, $IA=IM=IH=IH'$ donc H, H', M et A sont sur la sphère de centre I ou de rayon $[AM]$ que l'on note $(\mathscr{S})$.

c. $(AH)\perp(\mathscr{P})$ donc $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}_1$ sont colinéaires

donc $\overrightarrow{AH}=k\,\vec{n}_1\Leftrightarrow\begin{cases}x_H-1=1\times k\\y_H-2=-2\times k\\z_H-2=2\times k\end{cases}$ où $k\in\mathbb{R}$

soit $\begin{cases}x_H=k+1\\y_H=-2k+2\\z_H=2k+2\end{cases}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

De plus $H\in(\mathscr{P})$ donc $k+1-2(-2k+2)+2(2k+2)-1=0$ donc $9k=0$ donc $k=0$.

Ainsi $H(1~;2~;2)$. On remarque que $H=A$.

De même $(AH')\perp(\mathscr{P}')$ donc $\overrightarrow{AH'}=k'\vec{n}_2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_{H'}-1=1\times k'\\y_{H'}-2=-3\times k'\\z_{H'}-2=2\times k'\end{cases}$ avec $k'\in\mathbb{R}$.

Puis $H'\in(\mathscr{P}')$

donc $(k'+1)-3(-3k'+2)+2(2k'+2)+2=0$ donc $14k'=-1$ donc $k'=-\dfrac{1}{14}$.

Ainsi $H'\left(\dfrac{13}{14}~;\dfrac{31}{14}~;\dfrac{26}{14}\right)$.

d. Puisque $A=H$, les points A, M, H' (et donc H) sont nécessairement coplanaires.

55 Plans perpendiculaires et fonction

1. a. $\vec{n}'(1\,;2\,;0)$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P}')$.
$\vec{n}\cdot\vec{n}' = -2\times 1 + 1\times 2 + 5\times 0 = 0$ donc $\vec{n}\perp\vec{n}'$
et $(\mathcal{P})\perp(\mathcal{P}')$.

b. • Montrons que B appartient aux deux plans.
$-1+2\times 4-7=-1+8-7=0$ donc $B\in(\mathcal{P}')$.
Puis $\overrightarrow{BA}(2\,;-6\,;2)$ et tels que :
$\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n} = 2\times(-2)+(-6)\times 1+2\times 5=-4-6+10=0$.
Donc $\overrightarrow{BA}\perp\vec{n}$ donc $\overrightarrow{BA}$ vecteur directeur de $(\mathcal{P})$ et comme $A\in(\mathcal{P})$, B aussi.

• Montrons que $\vec{u}$ est un vecteur directeur des deux plans.
$\vec{u}\cdot\vec{n} = 2\times(-2)+(-1)\times 1+1\times 5=-4-1+5=0$ donc $\vec{u}\perp\vec{n}$ et ainsi $\vec{u}$ est directeur de $(\mathcal{P})$.
$2\times 1+(-1)\times 2+1\times 0=2-2=0$ donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{P}')$.
Ainsi $\vec{u}'$ est un vecteur directeur de la droite d'intersection de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ et donc de $(\mathcal{D})$.

c. Équation cartésienne de $(\mathcal{P})$:
Elle est du type $-2x+y+5z+d=0$ où $d\in\mathbb{R}$.
$A\in(\mathcal{P})$ donc $-2\times 1+(-2)+5\times 1+d=0 \Leftrightarrow d=-1$.
Ainsi $(\mathcal{P}) : -2x+y+5z-1=0$ et alors

$$d(C\,;(\mathcal{P})) = \frac{|-2\times 5+(-2)+5\times(-1)-1|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+5^2}} = \frac{18}{\sqrt{30}} = \frac{18\sqrt{30}}{30} = \frac{3\sqrt{30}}{5}.$$

$$d(C\,;(\mathcal{P}')) = \frac{|5+2\times(-2)-7|}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

2. a. $CM = \sqrt{(1+2t-5)^2+(3-t+2)^2+(t+1)^2}$
$= \sqrt{4t^2-16t+16+25-10t+t^2+t^2+2t+1}$
$= \sqrt{6t^2-24t+42}$

b. $f : t \longmapsto \sqrt{6t^2-24t+42}$.
f est définie lorsque $6t^2-24t+42 \geqslant 0$.
Or $6t^2-24t+42$ est une expression du second degré dont $\Delta=-432$, négatif, donc $6t^2-24t+42$ est du signe de 6, positif, sur $\mathbb{R}$.
Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}$.

Cette fonction étant une fonction racine carrée, elle est dérivable où $6t^2-24t+42>0$, c'est-à-dire pour $t\in\mathbb{R}$ et

$$f'(t) = \frac{(6t^2-24t+42)}{2\sqrt{6t^2-24t+42}} = \frac{12t-24}{2\sqrt{6t^2-24t+42}} = \frac{6t-12}{f(t)}.$$

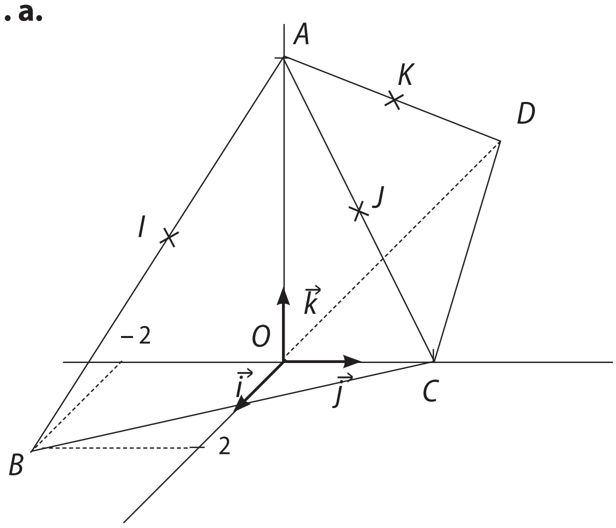
De plus $6t-12>0 \Leftrightarrow 6t>12 \Leftrightarrow t>2$.

Ainsi sur $]-\infty\,;2]$, $f'(t)\leqslant 0$ et donc f décroissante sur $[2\,;+\infty[$, $f'(t)\geqslant 0$ et donc f croissante ; f admet donc un minimum en 2 qui vaut $3\sqrt{2}$.

c. Ce minimum est la plus petite valeur de CM lorsque M se déplace sur la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \\ z=t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

56 Sphère circonscrite à un tétraèdre

1. a.



b. B, C et D appartiennent au plan $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ alors que A n'appartient pas à ce plan donc les quatre points sont non coplanaires et $ABCD$ est un tétraèdre.

c. I milieu de $[AB]$ donc $I\left(\frac{0+2}{2}\,;\frac{0-2}{2}\,;\frac{4+0}{2}\right)$ soit $I(1\,;-1\,;2)$.
De même $J(0\,;1\,;2)$ et $K(-2\,;0\,;2)$.

d. $(\mathcal{P}_1)$ est médiateur de $[AB]$ donc $I\in(\mathcal{P}_1)$ et $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P}_1)$.
$\overrightarrow{AB}(2\,;-2\,;-4)$ donc $(\mathcal{P}_1) : 2x-2y-4z+d=0$ où $d\in\mathbb{R}$.
$I(1\,;-1\,;2)$ donc $2\times 1-2\times(-1)-4\times 2+d=0 \Leftrightarrow d=4$.
$(\mathcal{P}_1) : 2x-2y-4z+4=0$.
De même $(\mathcal{P}_2) : 2y-4z+6=0$ et $(\mathcal{P}_3) : -4x-4z=0$.

e. $\Omega(x\,;y\,;z)$ appartient aux trois plans lorsque
$\begin{cases} 2x-2y-4z+4=0 \\ 2y-4z+6=0 \\ -4x-4z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-z)-2(2z-3)-4z+4=0 \\ y=2z-3 \\ x=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ y=-1 \\ x=-1 \end{cases}$

Les trois plans n'ont qu'un seul point commun $\Omega(-1\,;-1\,;1)$.

2. a. $\Omega\in(\mathcal{P}_1)$ donc $A\Omega=\Omega B$; $\Omega\in(\mathcal{P}_2)$ donc $A\Omega=\Omega C$; $\Omega\in(\mathcal{P}_3)$ donc $A\Omega=\Omega D$; donc $A\Omega=\Omega B=\Omega C=\Omega D$.

Ainsi la sphère de centre Ω et de rayon ΩA passe par A, B, C et D.

b. $\Omega A = \sqrt{(0-(-1))^2 + (0-(-1))^2 + (4-1)^2} = \sqrt{11}$.
Ainsi $(\mathcal{S}) : (x-(-1))^2 + (y-(-1))^2 + (z-1)^2 = \sqrt{11}^2$
soit $(\mathcal{S}) : (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 11$.

57 Intersection de deux sphères

1. $x^2 - 4x + y^2 - 4y + z^2 + 2z = 7$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y-2)^2 - 4 + (z+1)^2 - 1 = 7$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-(-1))^2 = 16$.

$(\mathcal{S})$ est la sphère de centre $\Omega(2 ; 2 ; -1)$ et de rayon $\sqrt{16} = 4$.

$x^2 - 8x + y^2 - 6y + z^2 + 2z = -13$
$\Leftrightarrow (x-4)^2 - 16 + (y-3)^2 - 9 + (z+1)^2 - 1 = -10$
$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-(-1))^2 = 16$.

$(\mathcal{S}')$ est la sphère de centre $\Omega'(4 ; 3 ; -1)$
et de rayon $\sqrt{16} = 4$.

2. $\Omega\Omega' = \sqrt{(4-2)^2 + (3-2)^2 + (-1-(-1))^2}$
$= \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$.

$R + R' = 8$ donc $R + R' > \Omega\Omega'$ donc $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}')$ sont sécantes.

3. a. $M \in (\mathcal{S})$ donc $\Omega M = 4$ et $M \in (\mathcal{S}')$ donc $\Omega' M = 4$.
Ainsi, $\Omega M = \Omega' M$ et M appartient au plan médiateur de MM'.

b. Le point $M(x ; y ; z)$ vérifie :

$$\begin{cases}(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16\\(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16\\(x-2)^2 - (x-4)^2 + (y-2)^2 - (y-3)^2 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16\\x^2 - 4x + 4 - x^2 + 8x - 16 + y^2 - 4y + 4 - y^2 + 6y - 9 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16\\4x + 2y = 17\end{cases}$$

Donc le point M est situé à l'intersection de la sphère $(\mathcal{S})$ et du plan $(\mathcal{P})$ d'équation $4x + 2y = 17$; il est donc bien situé sur un cercle.

• On note $I(x_I ; y_I ; z_I)$; il est situé à la fois dans le plan $(\mathcal{P})$ et sur la droite $(\Omega\Omega')$. Donc :

$$\begin{cases}4x_I + 2y_I = 17\\x_I = 2 + 2t\\y_I = 2 + t\\z_I = -1\end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \text{ (on a } \overrightarrow{\Omega\Omega'}(2 ; 1 ; 0)).$$

Ainsi $I\left(3 ; \dfrac{5}{2} ; -1\right)$.

(Remarque : I est le milieu de $[\Omega\Omega']$.)

• Le triangle ΩIM est rectangle en I donc, d'après le théorème de Pythagore, $\Omega M^2 = \Omega I^2 + IM^2$,

donc $IM^2 = 4^2 - \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{59}{4}$.

Ains, le rayon de ce cercle *est* IM $= \dfrac{\sqrt{59}}{2}$.

c. $\overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega I}.\overrightarrow{\Omega M'} = \Omega I \times \Omega M' = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{5} = \dfrac{5}{2}$.

4. a. Le milieu I de $[\Omega\Omega']$ a pour coordonnées $\left(3 ; \dfrac{5}{2} ; -1\right)$.

De plus, $\overrightarrow{\Omega\Omega'}(2 ; 1 ; 0)$ est un vecteur normal de ce plan médiateur $(\mathcal{Q})$. Il a donc pour équation $2x + y + d = 0$.

Or $I \in (\mathcal{Q})$ donc $2 \times 3 + \dfrac{5}{2} + d = 0$ d'où $d = -\dfrac{17}{2}$.

Ainsi, $(\mathcal{Q})$ a pour équation $2x + y - \dfrac{17}{2} = 0$.

b. $\Omega \in (\Omega\Omega')$ et $\overrightarrow{\Omega\Omega'}$ est un vecteur directeur de $(\Omega\Omega')$, donc sa représentation paramétrique est :

$$\begin{cases}x = 2 + 2t\\y = 2 + t\\z = -1\end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

58 Plans bissecteurs

a. • $\vec{n}(1 ; 2 ; -2)$ et $\vec{n}'(2 ; -1 ; 2)$ sont des vecteurs normaux de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

$x_{\vec{n}'} = 2 \times x_{\vec{n}}$ mais $y_{\vec{n}'} \neq 2 \times y_{\vec{n}}$ donc $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires et donc $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ ne sont pas parallèles donc ils sont sécants.

• $\vec{n} . \vec{n}' = 1 \times 2 + 2 \times (-1) + (-2) \times 2 = 2 - 2 - 4 = -4$.

$\vec{n} . \vec{n}' \neq 0$ donc $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ ne sont pas perpendiculaires.

b. $M \in (\mathcal{E}) \Leftrightarrow d(M ; (\mathcal{P})) = d(M ; (\mathcal{P}'))$

$$\Leftrightarrow \frac{|x + 2y - 2z - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|2x - y + 2z + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}}$$

$$\Leftrightarrow |x + 2y - 2z - 1| = |2x - y + 2z + 1|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x + 2y - 2z - 1 = 2x - y + 2z + 1\\\text{ou}\\x + 2y - 2z - 1 = -(2x - y + 2z + 1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-x + 3y - 4z - 2 = 0\\\text{ou}\\3x + 3y = 0.\end{cases}$$

c. $-x + 3y - 4z - 2 = 0$ est une équation cartésienne du plan de vecteur normal $\vec{n}''(-1 ; 3 ; -4)$ passant par $A(1 ; 1 ; 0)$.

$3x + 3y = 0$ est une équation cartésienne du plan de vecteur normal $\vec{v}(3 ; 3 ; 0)$ passant par $O(0 ; 0 ; 0)$.

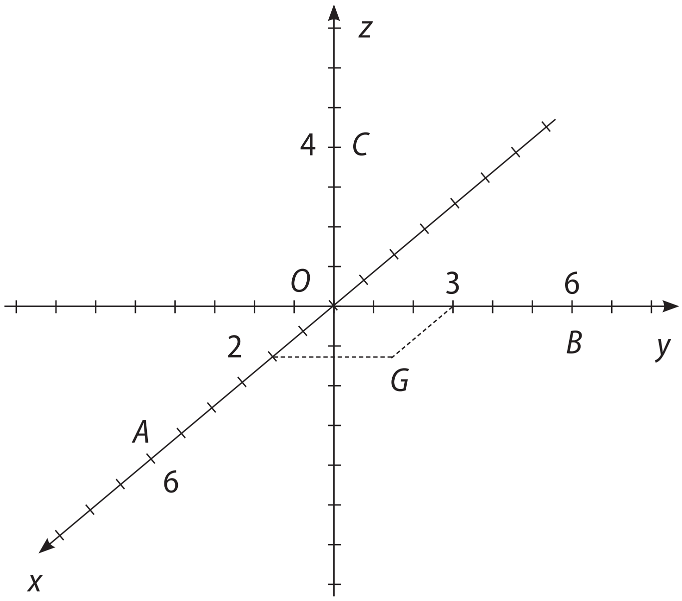
Donc $(\mathcal{E})$ est la réunion de ces deux plans.

$(\mathcal{E})$ est la réunion de ces deux plans.

De plus $\vec{u} . \vec{v} = -1 \times 3 + 3 \times 1 + (-4) \times 0 = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{v}$ et donc les deux plans sont perpendiculaires.

59 Ensembles de points

1.



2. $G = \text{bary}\{(O, 1), (A, 2), (B, 3)\}$

donc $x_G = \dfrac{1 \times 0 + 2 \times 6 + 3 \times 0}{1 + 2 + 3} = 2$ et $y_G = 3$ et $z_G = 0$.

$G(2\,;3\,;0)$.

3. $\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 6\overrightarrow{MG}$

donc $(\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MC}$.

Ainsi M est tel que $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

$\Leftrightarrow (2 - x)(0 - x) + (3 - y)(0 - y) + (0 - z)(4 - z) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 4z = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y - 4z = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 + (z - 2)^2 - 1 - \dfrac{9}{4} - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 + (z - 2)^2 = \dfrac{29}{4}$.

Cet ensemble est donc une sphère.

$(\mathscr{S})$ a pour centre $\Omega\left(1\,;\dfrac{3}{2};2\right)$ et pour rayon $\dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

4. $x = 0$ est une équation du plan (Oyz).

$d(\Omega, (Oyz)) = \dfrac{|1|}{\sqrt{1^2}} = 1$; $1 < 7$ donc le plan (Oyz) et la sphère $(\mathscr{S})$ sont sécants en un cercle.

Ce cercle a pour équation $y^2 + z^2 - 3y - 4z = 0$

$\Leftrightarrow \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 + (z - 2)^2 = \dfrac{25}{4}$.

Ce cercle a pour centre $I\left(0\,;\dfrac{3}{2}\,;2\right)$ et rayon $\dfrac{5}{2}$.

5. a. $GO^2 + 2GA^2 - 3GB^2 = (2^2 + 3^2 + 0^2) + 2((4)^2 + (-3)^2 + (0)^2) - 3((-2)^2 + (-3)^2 + (0)^2)$

$= 13 + 2(25) - 3(13) = 24$.

Donc $G \in (\mathscr{P})$.

b. • $\overrightarrow{MG}(2 - x\,;3 - y\,;-z)$

et $\overrightarrow{MG} \cdot \vec{u} = (2 - x) \times 2 + (3 - y) \times (-3) + (-z) \times 0$

$= -2x + 4 + 3y - 9 = -2x + 3y - 5$.

• $MO^2 + 2MA^2 - 3MB^2 = 24$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2((6 - x)^2 + (-y)^2 + (-z)^2) - 3((-x)^2 + (6 - y)^2 + (-z)^2) = 24$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 72 - 24x + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 3x^2 - 108 + 36y - 3y^2 - 3z^2 = 24$

$\Leftrightarrow -36 - 24x + 36y = 24$

$\Leftrightarrow -24x + 36y - 60 = 0$

$\Leftrightarrow -2x + 3y - 5 = 0$

L'équivalence est prouvée. $(\mathscr{P})$ est le plan d'équation $-2x + 3y - 5 = 0$.

60 Un tétraèdre dans un cube

1. a. $F(1\,;0\,;1)$ et $D(0\,;1\,;0)$ donc $\overrightarrow{FD}(-1\,;1\,;-1)$.

Puis $I\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;0\right)$ et $J\left(0\,;\dfrac{1}{2}\,;1\right)$ donc $\overrightarrow{IJ}\left(-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;1\right)$ et $K\left(1\,;\dfrac{1}{2}\,;0\right)$ donc $\overrightarrow{IK}\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;0\right)$.

Ainsi $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - 1 = 0$ et $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{IK} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + 0 = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{FD}$ est donc normal au plan (IJK) et donc $(FD) \perp (IJK)$.

b. $\overrightarrow{FD}$ est un vecteur normal de (IJK) donc une équation cartésienne de (IJK) est $-x + y - z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

Or $I\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;0\right)$ appartient à ce plan donc $d = \dfrac{1}{2}$.

Finalement $(IJK) : -x + y - z + \dfrac{1}{2} = 0$.

2. $(FD) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

3. Résolvons $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \\ -x + y - z + \dfrac{1}{2} = 0 \end{cases}$

On obtient $-(1 - t) + t - (1 - t) + \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}$ et $z = \dfrac{1}{2}$.

4. $\overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{IJ} = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + 0 = 0$ donc $\overrightarrow{IK} \perp \overrightarrow{IJ}$ et ainsi IJK triangle rectangle en I.

$\mathscr{A}_{IJK} = \dfrac{1}{2} \times IJ \times IK = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + 1} \times \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + 0}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

5. $\overrightarrow{FM}\left(-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$.

$\mathscr{V}_{FIJK} = \dfrac{1}{3} \times FM \times \mathscr{A}_{IJK} = \dfrac{1}{3} \times \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{8}$.

6. $(IJ) : \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

et $\overrightarrow{KL}\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ donc $(KL) : \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t' \\ z = \frac{1}{2}t' \end{cases}$

et ainsi $\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t = 1 \\ \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t' \\ t = \frac{1}{2}t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = -2 \end{cases}$

Finalement (IJ) et (KL) sont sécantes en $P\left(1 ; -\frac{1}{2} ; -1\right)$.

Problèmes

61 Programmation linéaire

Partie A

Si x, y et z représente le nombre de m^3 des marchandises M_1, M_2 et M_3 alors

- x, y et z sont des grandeurs positives ;
- la capacité maximale est 10 m^3 donc $x + y + z \leqslant 10$;
- la charge maximale est 5 t donc $x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z \leqslant 5$.

Partie B

1. a. $(\mathcal{P}_1)$ et $(0 ; \vec{i})$:

$A \in (0 ; \vec{i})$ donc $y = 0$ et $z = 0$ puis $A \in (\mathcal{P}_1)$ donc $z = 10$.
$A(10 ; 0 ; 0)$.

$(\mathcal{P}_1)$ et $(0 ; \vec{j})$:

$B \in (0 ; \vec{j})$ donc $x = 0$ et $z = 0$ puis $B \in (\mathcal{P}_1)$ donc $y = 10$.
$B(0 ; 10 ; 0)$.

$(\mathcal{P}_1)$ et $(0 ; \vec{k})$:

$C \in (0 ; \vec{k})$ donc $x = 0$ et $y = 0$ puis $C \in (\mathcal{P}_1)$ donc $z = 10$.
$C(0 ; 0 ; 10)$.

b. De même $D(5 ; 0 ; 0)$, $E(0 ; 20 ; 0)$ et $F(0 ; 0 ; 10)$.

2. Le plan (ABC) est égal au plan $(\mathcal{P}_1)$ et le plan (DEF) est égal au plan $(\mathcal{P}_2)$.

Ainsi $(\mathcal{P}_1)$ et $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ sont sécants en (AB) et $(\mathcal{P}_2)$ et $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ sont sécants en (DE).

L'intersection de ces deux droites est le point d'intersection des trois plans (ABC), (DEF) et $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

$(AB) : \begin{cases} x = 10 - 10t \\ y = 0 + 10t \\ z = 0 + 0t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

$(DE) : \begin{cases} x = 5 - 5t' \\ y = 0 + 20t' \\ z = 0 + 0t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

Résolvons $\begin{cases} 10 - 10t = 5 - 5t' \\ 10t = 20t' \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2t' \\ 10 - 20t' = 5 - 5t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2t' \\ 5 = 15t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{1}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$

Le point $G\left(\frac{10}{3} ; \frac{20}{3} ; 0\right)$ est le point d'intersection des plans (ABC), (DEF) et $(0 ; \vec{i} ; \vec{j})$.

3. Les points $M(x ; y ; z)$ sont tels que $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x + y + z \leqslant 10$ et $x + 0{,}25y + 0{,}5z \leqslant 5$ donc les coordonnées de ces points sont les triplets solutions du système de la partie A.

Partie C

e. Les points $M(x ; y ; z)$ qui appartiennent au polyèdre $ODGBC$ et au demi-espace de frontière $(\mathcal{P}_3)$ contenant 0 ont des coordonnées qui vérifient le système du A est $x + y + 2z \leqslant 14$,

soit $1\,000x + 1\,000y + 2\,000z \leqslant 14\,000$.

Les points $M(x ; y ; z)$ ont les coordonnées qui sont solutions des contraintes du transporteur.

62 Perpendiculaire commune à deux droites

Partie A

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires puisque $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont non coplanaires. Donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base d'un plan et ainsi il existe un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, il suffit de prendre un vecteur normal au plan défini précédemment.

2. Ces deux plans sont non parallèles puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas coplanaires avec $\vec{w}$ donc ils sont sécants suivant une droite de vecteur directeur $\vec{w}$.

3. (Δ) est la droite d'intersection de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ donc le vecteur $\vec{w}$ est un vecteur directeur de (Δ).

Or $\vec{w} \perp \vec{u}$ donc $(\Delta) \perp (\mathcal{D})$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$ donc $(\Delta) \perp (\mathcal{D}')$.

4. On utilise un raisonnement par l'absurde.

On suppose qu'il existe une autre droite (Δ') distincte de (Δ) de vecteur directeur $\vec{w'}$ perpendiculaire à la fois à ($\mathcal{D}$) et à $\mathcal{D}$').

On aurait alors $\vec{u}\,.\,\vec{w'} = \vec{v}\,.\,\vec{w'} = 0$

donc (Δ') serait perpendiculaire au plan ($\mathcal{P}$).

Ainsi $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ seraient colinéaires car (Δ) et (Δ') seraient parallèles.

Comme l'intersection de deux plans est une droite unique, c'est que (Δ) et (Δ') sont confondues. Donc la droite (Δ) est unique.

Partie B

1. $\overrightarrow{MM'}\,.\,\overrightarrow{HH'} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'})\,.\,\overrightarrow{HH'}$
$= \overrightarrow{MH}\,.\,\overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{HH'}^2 + \overrightarrow{H'M'}\,.\,\overrightarrow{HH'}$

H et H' appartiennent à (Δ) donc $\overrightarrow{HH'}$ vecteur directeur de (Δ).

De même $\overrightarrow{MH}$ vecteur directeur de ($\mathcal{D}$) et $\overrightarrow{M'H'}$ vecteur directeur de ($\mathcal{D}'$).

Ainsi $\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{HH'} = 0 + HH'^2 + 0 = HH'^2$.

2. $MM'^2 = \overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{MM'} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'}).(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'})$
$= HH'^2 + (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'})^2 + 2\,\overrightarrow{MH}.\,\overrightarrow{HH'} + 2\,\overrightarrow{HH'}.\,\overrightarrow{H'M'}$
$= HH'^2 + (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'})^2 + 2\times 0 + 2\times 0.$

Or $(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'})^2 \geqslant 0$ donc $MM'^2 \geqslant HH'^2$ et comme MM' et HH' sont des longueurs, $MM' \geqslant HH'$. Ainsi, HH' est la plus courte distance entre ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{D}'$).

Partie C

1. • $x_{\vec{v}} = 2 \times x_{\vec{u}}$ mais $y_{\vec{v}} \neq 2 \times y_{\vec{u}}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{D}'$) non parallèles.

• Voyons si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont coplanaires. $\overrightarrow{AB}(-5\,;-2\,;1)$.
Cherchons s'ils existe trois réels a, b et c non tous nuls tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

$$\begin{cases} a\times 1 + b\times 2 + c\times(-5) = 0 \\ a\times 2 + b\times 1 + c\times(-2) = 0 \\ a\times(-1) + b\times 0 + c\times 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b - 5c = 0 \\ 2a + b - 2c = 0 \\ -a + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ 2b - 4c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas coplanaires et donc ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{D}'$) ne sont pas coplanaires.

2. • $\vec{w}(x\,;y\,;z)$.

$$\begin{cases} \vec{w}\,.\,\vec{u} = 0 \\ \vec{w}\,.\,\vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -3x = z \end{cases}$$

En prenant $x = 1$, $y = -2$ et $z = -3$.

$\vec{w}(1\,;-2\,;-3)$ est un des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

• $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ est orthogonal à $\vec{w}$ et $\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ a - 2b - 3c = 0 \end{cases}$$

Avec $b = 1$ et $a = -4$ on obtient $\vec{n}(-4\,;1\,;-2)$.

Ainsi ($\mathcal{P}$) : $-4x + y + -2z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Or $A \in (\mathcal{P})$ donc $d = 15$.

Finalement ($\mathcal{P}$) : $-2x + y - 2z + 15 = 0$.

• De même $\vec{n}'(a'\,;b'\,;c')$ tel que :

$$\begin{cases} a' - 2b' - 3c' = 0 \\ 2a' + b' = 0 \end{cases}$$

Avec $a' = -3$ et $b' = 6$ on obtient $\vec{n'}(-3\,;6\,;-5)$.

Ainsi ($\mathcal{P}'$) : $-3x + 6y + -5z + d' = 0$ avec $d' \in \mathbb{R}$.

Or $B \in (\mathcal{P}h)$ donc $d' = 1$.

Et ($\mathcal{P}'$) : $-3x + 6y + -5z + 1 = 0$.

3. a. $M(x\,;y\,;z) \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + y - 2z + 15 = 0 \\ -3x + 6y + -5z + 1 = 0. \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 4t + 2z - 15 \\ -3t + 6(4t + 2z - 15) - 5z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 4t + 2z - 15 \\ 21t + 7z - 89 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 4t + 2z - 15 \\ z = -3t + \dfrac{89}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t + \dfrac{73}{7} \\ z = -3t + \dfrac{89}{7} \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

b. • H point d'intersection de ($\mathcal{D}$) et (Δ) donc

$$\begin{cases} t = 4 + t' \\ -2t + \dfrac{73}{7} = 3 + 2t' \\ -3t + \dfrac{89}{7} = 1 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -\dfrac{1}{7} \\ t = \dfrac{27}{7} \end{cases}$$

Ainsi $H\left(\dfrac{27}{7}\,;\dfrac{19}{7}\,;\dfrac{8}{7}\right)$.

• On procède de même avec H' point d'intersection de ($\mathcal{D}'$) et (Δ) et on trouve $H'\left(\dfrac{25}{7}\,;\dfrac{23}{7}\,;2\right)$.

• Ainsi $d((\mathcal{D})\,;(\mathcal{D}')) = HH'$

$$= \sqrt{\left(\frac{25}{7} - \frac{27}{7}\right)^2 + \left(\frac{23}{7} - \frac{19}{7}\right)^2 + \left(2 - \frac{8}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{49} + \frac{23}{49} + \frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{56}}{7}.$$

8 Équations, inéquations, systèmes

Manuel pages 123 à 140

Activités d'introduction

1 Discriminant

1. a. $f(x) = a\left(x + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left[\left(x - \frac{b}{2a}\right) - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c.$

Donc $D = \frac{-b}{2a}$ et $E = -a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

b. c. $S\left(\frac{-b}{2a} ; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

2. a. $f_1 : y_S < 0$ et $\Delta > 0$;
$f_2 : y_S > 0$ et $\Delta < 0$;
$f_3 : y_S = 0$ et $\Delta = 0$.
b. f_1 : deux solutions ; f_2 : pas de solution ;
f_3 : unesolution.
3. $\Delta > 0$: deux solutions ; : $\Delta < 0$: pas de solution ;
$\Delta = 0$: une solution.
4. La conjecture reste valable.

2 Somme et produit des racines

1. Les deux nombres sont égaux à 12 et 17.

2.a. $\begin{cases} x + y = 29 \\ xy = 204 \end{cases}$

b. Dans l'équation (1) $y = 29 - x$.
c. $x(29 - x) = 204 \Leftrightarrow x^2 - 29x + 204 = 0.$
La vérification se fait en développant le deuxième membre de l'égalité.

$$(x - 14{,}5)^2 - 6{,}25 = (x - 14{,}5 - 2{,}5)(x - 14{,}5 + 2{,}5) = (x - 17)(x - 12).$$

Ce qui valide la conjecture du 1.b.

3 Résolution de systèmes

1. a. $\begin{cases} x = 7 + 3y \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + 3y \\ 2(7+3y) - y = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 7 + 3y \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

La solution du système (S) est donc (1 ; – 2).

b. $\begin{cases} 2x - 6y = 14 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = -10 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases}.$

La solution du système (S) est donc (1 ; – 2).

2. $\begin{cases} x - y - z = -4 \\ 3y + 3z = 9 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = -4 \\ 3y + 3z = 9 \\ 9z = 9 \end{cases}$

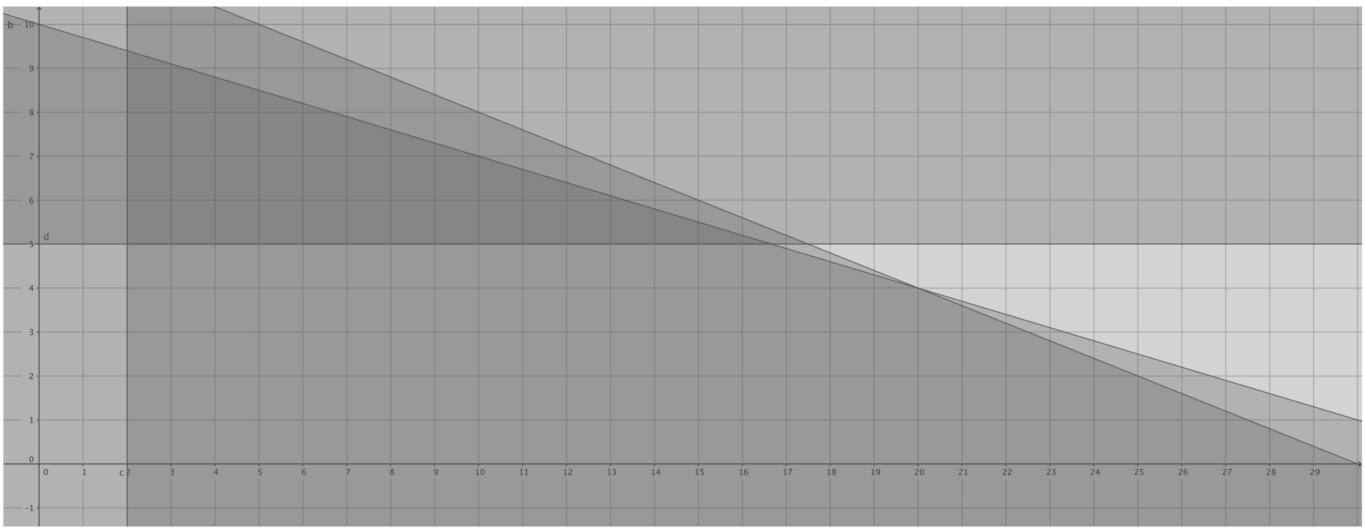
La solution du système (S') est donc (– 1 ; 2 ; 1).

4 Peinture

1. a. Cette inéquation est la traduction de la contrainte sur le chargement qui ne doit pas dépasser 300 kg.

b. x et y sont des entiers naturels. Et ona : $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ y \geqslant 5 \end{cases}$. De plus la contrainte sur la somme totale se traduit par l'inéquation : $6\,000x + 20\,000y \leqslant 200\,000$ que l'on simplifie en : $3x + 10y \leqslant 100$.

2.



3. a. On ne peut acheter que des pots entiers.

b. • L'artisan peut commander les deux quantités • maximum de pots de 10 kg : 16 ; • maximum de pots de 25 kg : 9.

Savoir-faire

3 **a.** $\Delta = 9$, $9 > 0$ deux racines $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$.
b. $\Delta = 0$, une racine $x_0 = 3$.
c. $\Delta = -55$, $-55 < 0$ pas de racine .
d. $\Delta = 25$, $9 > 0$ deux racines $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{2}{3}$.

4 **a.** $2x^2 + 3x - 2$ a deux racines $x_1 = -2$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.
Ainsi, $2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2)$.
$4x^2 + 10x - 6$ a deux racines $x_1 = -3$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.
Ainsi, $4x^2 + 10x - 6 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3)$.
b. Lorsque $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq -3$, $Q(x) = \frac{x+2}{2(x+3)}$.

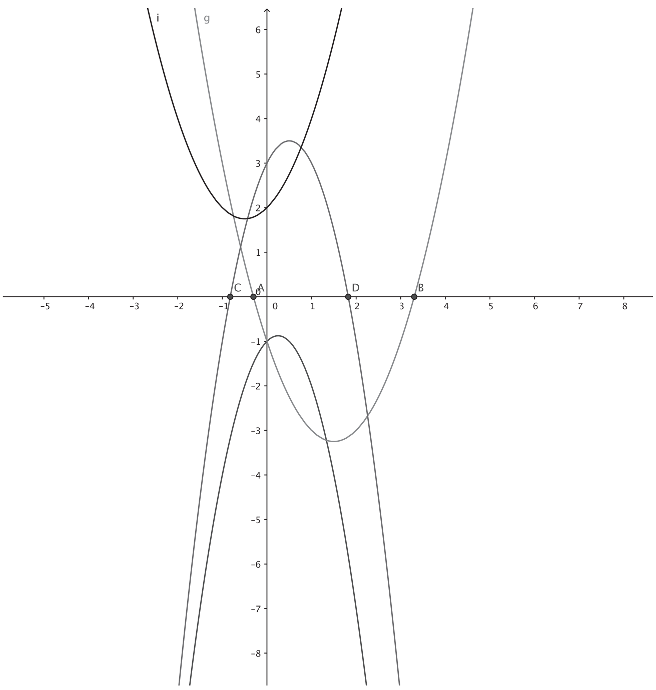
5 $P(-2) = P(3) = 0$. Ainsi -2 et 3 sont solutions de (E).
b. $P(x) = (x + 2)(x - 3)(x^2 + x + 7)$.
L'ensemble des solutions de (E) est : $\{-2 ; 3\}$ car le discriminant de $x^2 + x + 7$ est négatif.

6 **a.** $P(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$.
b. $P(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$.

10 **a.** $x = -1$; $P = \frac{-1}{3}$ donc $x = \frac{1}{3}$.
b. $x_1 = 2$; $S = -3$ donc $x_2 = -5$.

11 **a.** $S =]-\infty ; -1[\cup \left]\frac{1}{3} ; +\infty\right[$. **b.** $S = \mathbb{R}$.

12 Les résultatts sont des valeurs approchées car une lecture graphique est approximative.
a. $S = \emptyset$; **b.** $S = \{-0{,}3 ; 3{,}3\}$;
c. $S =]-0{,}82 ; 1{,}82[$; **d.** $S = \emptyset$.



13 Il faut que : $x + 1 \geqslant 0$, donc que $x \in]-1 ; +\infty[$.
$\sqrt{x+1} = x \Rightarrow x + 1 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$ (E')
$\Delta = 5$; l'équation (E') a donc deux solutions :
$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
b. $S =]-\infty ; x_1[\cup]x_2 ; +\infty[\cap]-1 ; +\infty[$
$=]-1 ; x_1[\cup]x_2 ; +\infty[$.

16 **a.** $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -2 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3. \end{cases}$
La solution du système est donc $(1 ; 3)$.
b. $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 2 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 2 \\ 3(-3y + 2) + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 2 \\ -7y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1. \end{cases}$
La solution du système est donc $(-1 ; 1)$.

17 **a.** $D = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times 2 - 2 \times (-1) = 12$.
$D \neq 0$ donc le système est bien un système de Cramer.
$D_x = \begin{vmatrix} 17 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 17 \times 2 - 2 \times (-1) = 36$ et
$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 17 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times 2 - 2 \times 17 = -24$.
Ainsi la solution du système est le couple :
$\left(\frac{36}{12} ; \frac{24}{12}\right) = (3 ; -2)$.
b. $D = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \times 2 - 3 \times 2 = -13$.
$D \neq 0$ donc le système est bien un système de Cramer.
$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 10 \times 3 = -26$ et
$D_y = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \times 10 - 3 \times 2 = -26$.
Ainsi la solution du système est le couple :
$\left(\frac{-26}{-13} ; \frac{-26}{-13}\right) = (2 ; 2)$.

18 **a.** $\begin{cases} x + y + 3z = 11 \\ 2x - y + z = 4 \\ -x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 11 \\ -3y - 5z = -18 \\ 2y + 2z = 8 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 11 \\ -3y - 5z = -18 \\ 4z = -12 \end{cases}$
Ainsi la solution du système est : $(1 ; 1 ; 3)$.

b. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=-3 \\ -x+y-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ -3y-z=-5 \\ 2y=2 \end{cases}$

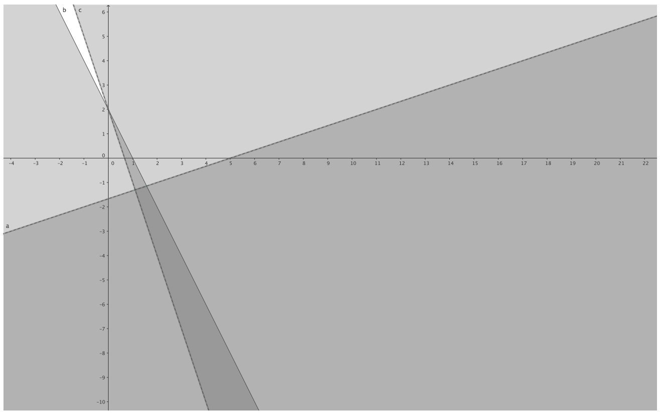
Ainsi la solution du système est : (– 2 ; 1 ; 2).

20 **a.** x et y désignent les deux nombres cherchés, $x > y$.
x et y sont solution du système (S) $\begin{cases} x+y=21 \\ x^2-y^2=105. \end{cases}$

b. $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y=21-x \\ x^2-(21-x)^2=105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=21-x \\ 42x-441=105 \end{cases}$

Les deux nombres cherchés sont donc 13 et 8.

21



Exercices d'entraînement

Équations du second degré

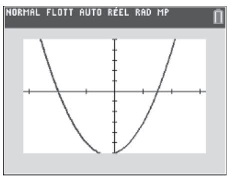
22 P_1 a deux racines –3 et –1.
Ainsi $P_1(x) = (x+1)(x+3)$.
P_2 a une racine 2.
Ainsi $P_2(x) = -(x-2)^2$.

23 $\Delta = 13$, $\Delta > 0$ donc deux solutions ;
$\Delta = 5$, $\Delta > 0$ donc deux solutions ;
$\Delta = -23$, $\Delta < 0$ donc pas de solution ;
$\Delta = 0$ donc une solution.

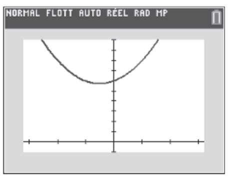
24 **a.** $P(x) = (x+1)(x+2)$; **b.** $P(x) = (2x+1)^2$.

25 **a.** $\Delta = 9, \Delta > 0$ donc $S = \{-2 ; 1\}$;
b. $\Delta = -3$, $\Delta < 0$ donc $S = \emptyset$;
c. $\Delta = 41$, $\Delta > 0$ donc $S = \left\{\dfrac{-3-\sqrt{41}}{4} ; \dfrac{-3+\sqrt{41}}{4}\right\}$;
d. $\Delta = 0$ donc $S = \{3\}$.

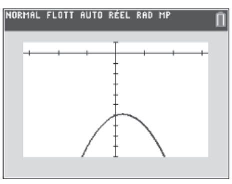
26 **a.** Deux solutions ;



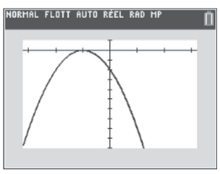
b. Pas de solution ;



c. Pas de solution ;



d. Une solution.



27
$P(x) = x^2 + x + 5$ → Pas de racine
$P(x) = 2x^2 + x - 3$ → $-\dfrac{3}{2}$ et 1
$P(x) = 5x^2 + x + 1$ → Pas de racine
$P(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x - 3$ → – 3 et 2
$P(x) = x^2 - 2x - 3$ → – 1 et 3
$P(x) = -x^2 - x + 2$ → – 2 et 1

28

	Signe de a	Signe de Δ	Nombre de racines
a.	+	+	2
b.	–	–	0
c.	+	nul	1

29 **a.** $P(2) = 0$, $P(x) = (x-2)(x+3)$ et $x_2 = -3$;
b. $P(-1) = 0$, $P(x) = (x+1)(-2x+3)$ et $x_2 = \dfrac{3}{2}$;
c. $P\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, $P(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\left(2x-2\right)$ et $x_2 = 1$;
d. $P(\sqrt{3}) = 0$, $P(x) = (x-\sqrt{3})(x-1)$ et $x_2 = 1$.

30 **a.** $P(x) = x(x+1)$; $x_1 = 0$; $x_2 = -1$;
b. $P(x) = (\sqrt{3}x-2)(\sqrt{3}x+2)$; $x_1 = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $x_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$;
c. $P(x) = -4(x-1)^2$; $x_1 = x_2 = 1$;
d. $P(x) = x(x-9)$; $x_1 = 0$; $x_2 = 9$.

31 **a.** $S = \left\{-\dfrac{2}{3} ; \dfrac{3}{5}\right\}$; **b.** $S = \{-3 ; 5\}$; **c.** $S = \emptyset$; **d.** $S = \left\{-\dfrac{1}{4} ; 2\right\}$.

32 **a.** $S = \left\{-\dfrac{1}{2} ; 1\right\}$.
b. $P_1(x) = P_2(x) \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x+1)(x-1) = 0$.
Les solutions sont donc $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = 1$.

33 A désigne l'aire totale.

$A = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 6R^2 + 90R$.

$A = 600 \Leftrightarrow 6R^2 + 90R = 600 \Leftrightarrow R^2 + 15R - 100 = 0$.

L'équation a deux solutions -20 et 5.

Les dimensions devant être positives, le rayon R est donc égal à 5 cm.

Ainsi le volume V sera égal à $V = \pi R^2H = 1\,125$ cm^3.

Somme et produit des racines

34 **a.** $x_1 = 1$, $S = \frac{3}{2}$ donc $x_2 = \frac{1}{2}$;

b. $x_1 = 2$, $P = \frac{2}{-3}$ donc $x_2 = -\frac{1}{3}$;

c. $x_1 = 2$, $S = 4$ donc $x_2 = 2$;

d. $x_1 = 1$, $P = -\frac{2}{3}$ donc $x_2 = -\frac{2}{3}$.

35 **a.** Les deux nombres cherchés sont 4 et 6 car ils sont solutions de l'équation : $x^2 - 10x + 24 = 0$;

b. Les deux nombres cherchés sont -5 et 2 car ils sont solutions de l'équation : $x^2 + 3x - 10 = 0$.

36 La largeur et la longueur du rectangle sont 4 et 5 car elles sont solutions de l'équation : $x^2 - 9x + 20 = 0$.

37 **a.** $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = \frac{25}{4} + 2 \times (-3) = \frac{1}{4}$.

b. $S_1 = -\frac{1}{2}$ ou $S_2 = \frac{1}{2}$.

x et y sont donc solutions des équations :

$x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$ ou $x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$.

Les couples solutions sont alors :

$\left(2 ; -\frac{3}{2}\right), \left(-2 ; \frac{3}{2}\right), \left(-\frac{3}{2} ; 2\right), \left(\frac{3}{2} ; -2\right)$.

Inéquations du second degré

38

a.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$P_1(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$P_2(x)$		$-$	0	$-$	

c.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$P_3(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d.

x	$-\infty$		$+\infty$
$P_4(x)$		$+$	

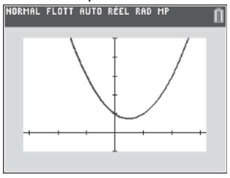
39 **a.** $S =]-\infty ; 1[\cup \left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[$;

b. $S = \emptyset$;

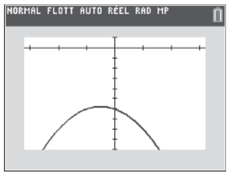
c. $S = \left[\frac{5 - \sqrt{109}}{6} ; \frac{5 + \sqrt{109}}{6}\right]$;

d. $S = \left]-\infty ; \frac{5 - \sqrt{105}}{4}\right[\cup \left]\frac{5 + \sqrt{105}}{4} ; +\infty\right[$.

40 **a.** $P_1(x) > 0$

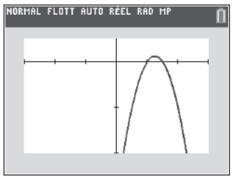


b. $P_2(x) > 0$;

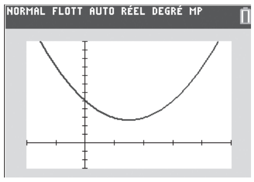


c. $P(x) > 0$ si $x \in \left]1 ; \frac{3}{2}\right[$;

$P(x) < 0$ si $x \in]-\infty ; 1[\cup \left]\frac{3}{2} + \infty\right[$



d. $P(x) > 0$.



41 **a.** $(x - 3)^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 < 0$; $S =]-1 ; 7[$;

b. $-7x^2 + x < 1 \Leftrightarrow -7x^2 + x - 1 < 0$; $S = \mathbb{R}$;

c. $12 > x^2 + 11x \Leftrightarrow x^2 + 11x - 12 < 0$; $S =]-12 ; 1[$;

d. $2x^2 + 9x - 14 \geqslant x - 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x - 10 \geqslant 0$;

$S =]-\infty ; -5[\cup]1 ; +\infty[$;

e. $x(x - 2) < 9 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 9 < 0$; $S =]-3 ; 3[$;

f. $(x + 1)(x - 5) \leqslant (2x + 1)(x + 2) \Leftrightarrow x^2 + 9x + 7 \geqslant 0$;

$S = \left]-\infty ; \frac{-9 - \sqrt{53}}{2}\right[\cup \left]\frac{-9 + \sqrt{53}}{2} ; +\infty\right[$.

42 **a.** $P_1(x) > P_2(x) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + \frac{3}{2} > 0$;

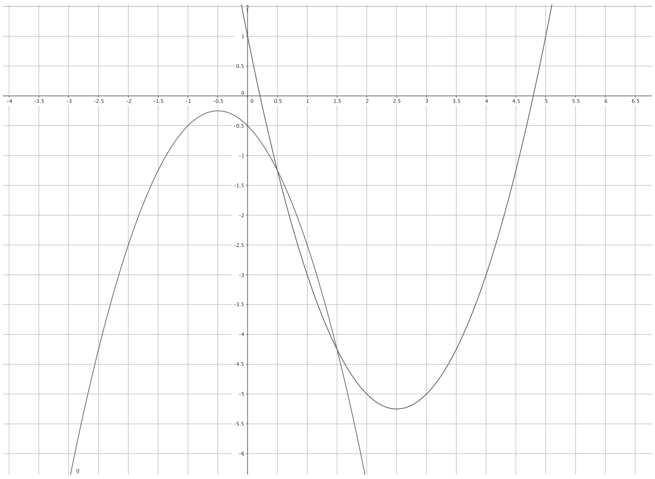
$S = \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[$.

b. Sur $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2} + \infty\right[$, $(\mathscr{C}_1)$ est au-dessus de $(\mathscr{C}_2)$;

sur $\left]\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right[$ $(\mathscr{C}_1)$ est au-dessous de $(\mathscr{C}_2)$; $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$

se coupent en deux points d'abscisses $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.

c.



43 **a.** $R(x) = 1\,250\,x$.

b. $B(x) = R(x) - C(x) = -2x^2 + 750x - 50\,000$.

c. $B(50) = -17\,500$; $B(100) = 5\,000$; $B(300) = -5\,000$.

Pour une production de 50 et 300 produits, l'artisan enregistre une perte, alors que pour une production de 100 produits, il réalise un bénéfice.

d. $B(x) > 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 750x - 50\,000 > 0$;

$S = \left]\frac{750 - 50\sqrt{65}}{4} ; \frac{750 + 50\sqrt{65}}{4}\right[$.

L'artisan doit fabriquer entre 87 et 288 objets pour réaliser un bénéfice.

44 **1. a.** $m = -2$; **b.** $m = -0{,}1$; **c.** $m = 2$.

Équations se ramenant au second degré

45 **a.** $P(-1) = 0$.

b. L'équation $x^2 - 2x + 4 = 0$ n'a pas de solution. Ainsi (E) n'a qu'une solution : -1.

46 2 est solution évidente car :

$4 \times 2^3 - 3 \times 2^2 - 5 \times 2 - 10 = 32 - 12 - 10 - 10 = 0$.

Ainsi $4x^3 - 3x^2 - 5x - 10 = (x - 2)(4x^2 + 5x + 5)$.

L'équation $4x^2 + 5x + 5 = 0$ n'a pas de solution, donc la seule solution est : 2.

47 **a.** $P(x) = (x^2 + 1)Q(x)$.

b. $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution ;

$Q(x) = 0$ n'a pas de solution.

Finalement l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution.

48 **a.** Il suffit de développer (E').

b. $(E'') \Leftrightarrow X^2 - 2X + 1 = 0$ a pour unique solution $X_0 = 1$.

c. $x^2 - x - 2 = X_0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0$.

Cette équation a deux solutions :

$x_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

49 **a.** $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 2$.

b. $x^2 = x_1$ n'a pas de solution car un carré est toujours positif.

$x^2 = x_2$ a deux solutions $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

c. On pose $X = x^2$. Ainsi

$2x^4 - 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 3X - 2 = 0$.

Les résultats du **a.** et du **b.** permettent de déterminer les solutions de l'équation qui sont donc $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

50 **a.** $x^2 - 10\,x + 9 = (x - 1)(x - 9)$.

b. $P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$.

c. $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$.

51 $x + \frac{1}{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x = 0$.

Ainsi (E) a pour solution : 1.

52 L'équation $-X^2 + 5X - 7 = 0$ n'a pas de racine, la courbe $(\mathscr{C}_3)$ correspond donc au polynôme P_2.

Les autres équations ont des racines,

et comme $P_3(0) = -6$ la courbe $(\mathscr{C}_1)$ correspond donc au polynôme P_3 et la courbe $(\mathscr{C}_2)$ correspond donc au polynôme P_1.

Équations/Inéquations irrationnelles

53 **a.** $S = \emptyset$ car $-3 < 0$; **b.** $S = \{-1\}$; **c.** $S = \{8\}$.

54 $S =]8 ; +\infty[$.

55 **a.** $D = \emptyset$ donc $S = \emptyset$;

b. $D = \left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$.

$\sqrt{x+2} = \sqrt{2x-3} \Leftrightarrow x + 2 = 2x - 3 \Leftrightarrow x = 5$.

Ainsi $S = \{5\}$.

56 **a.** Le trinôme $x^2 + x + 5$ n'a pas de racine, il est donc toujours positif. Ainsi $D = \mathbb{R}$.

$\sqrt{x^2 + x + 5} < 5 \Leftrightarrow x^2 + x + 5 < 25 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 < 0$.

$S =]-5 ; 4[$.

b. $D = \left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$.

$\sqrt{x} < \sqrt{2x-3} \Leftrightarrow x < 2x - 3 \Leftrightarrow x > 3$; $S =]3 ; +\infty[$.

57 **a.** Le trinôme $x^2 - 5x + 6$ a deux racines : 2 et 3. Il est positif si $x \in]-\infty ; 2[\cup]3 ; +\infty[$.

Le trinôme $4x^2 + 4x + 1$ a une seule racine : $-\frac{1}{2}$. Il est donc toujours positif ou nul.

Ainsi : $D =]-\infty ; 2[\cup]3 ; +\infty[$.

b. $\sqrt{x^2-5x+6}=\sqrt{4x^2+4x+1}$

$\Leftrightarrow x^2-5x+6=4x^2+4x+1 \Leftrightarrow 3x^2+9x-5=0.$

Deux racines : $x_1=\dfrac{-9-\sqrt{141}}{6}$ et $x_2=\dfrac{-9+\sqrt{141}}{6}$.

$x_1 \in$ D et $x_2 \in$ D. Ainsi S $=\{x_1\,;x_2\}$.

Systèmes linéaires

58 **a.** $D=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=7.\,;7\neq 0$ donc une seule solution.

b. $D=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0.$

c. $D=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2.\ 2\neq 0$ donc une seule solution.

59 $D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=5.\ 5\neq 0$ donc une seule solution.

$D_x=\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=10$ et $D_y=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-5.$

Ainsi la solution du système est le couple :

$\left(\dfrac{10}{5}\,;\dfrac{-5}{5}\right)=(2\,;-1).$

60 **a.** $\begin{cases}y<-2x+5\\ y<-0{,}5x+3\\ x>0\\ y>0\end{cases}$; **b.** $\begin{cases}y<-x^2+4x\\ x>3\\ y>0.\end{cases}$

61 **a.** $D=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\,;2\neq 0$ donc une seule solution.

$D_x=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=4$ et $D_y=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2.$

Ainsi la solution du système est le couple :

$\left(\dfrac{4}{2}\,;\dfrac{-2}{2}\right)=(2\,;-1).$

b. $D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{vmatrix}=0.$

On ne peut appliquer la méthode de Cramer.

62 **1. a.** Lorsque $m=3$, (S) $\Leftrightarrow \begin{cases}2x+2y=3\\ 2x+2y=1\end{cases}$

$3\neq 1$ donc le système n'a pas de solution.

b. Lorsque $m=1$, (S) $\Leftrightarrow \begin{cases}4y=3\\ 2x=3\end{cases}$

Le système a donc pour solution le couple $\left(\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{3}{4}\right)$.

2. a. $D=\begin{vmatrix}m-1 & -(m-5)\\ 2 & m-1\end{vmatrix}=(m-1)^2+2(m-5)$
$=m^2-9.$

$D\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq -3\\ m\neq 3.\end{cases}$

b. $D_x=\begin{vmatrix}m & -(m-5)\\ -m+4 & m-1\end{vmatrix}=m(m-1)+(-m+4)(m-5)$
$=8m-20.$

$D_y=\begin{vmatrix}m-1 & m\\ 2 & -m+4\end{vmatrix}=(m-1)(-m+4)-2m$
$=-m^2+3m-4.$

Ainsi la solution du système est le couple :

$\left(\dfrac{8m-20}{m^2-9}\,;\dfrac{-m^2+3m-4}{m^2-9}\right).$

c. Si $m=2$ le couple solution est $\left(\dfrac{-4}{-5}\,;\dfrac{-2}{-5}\right)=\left(\dfrac{4}{5}\,;\dfrac{2}{5}\right).$

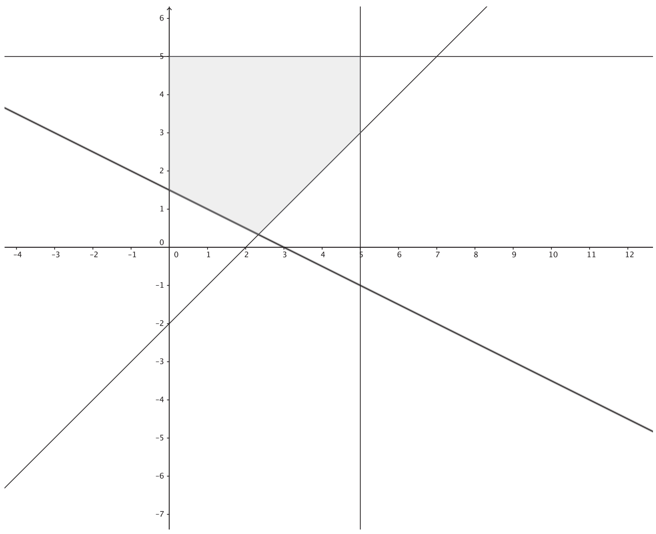
63 **a.** $\begin{cases}2x+3y-5z=-11\\ 4x+y-2z=-8\\ x-2y+z=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+3y-5z=-11\\ 5y-8z=-14\\ 7y-7z=-7\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+3y-5z=-11\\ 5y-8z=-14\\ 3z=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=2\\ z=3\end{cases}$

b. $\begin{cases}x-2y+z=-5\\ -x+y+2z=-4\\ 2x-y-z=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2y+z=-5\\ -y+3z=-9\\ 3y-3z=15\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x-2y+z=-5\\ -y+3z=-9\\ 6z=-12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\ y=\\ z=-2\end{cases}$

64



65 Les nombres a, b et c sont solution du système :

$\begin{cases}a+b+c=10\\ 100c+10b+a=100a+10b+c+297\\ 100a+10b+c=100b+10c+a-117\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a+b+c=10\\ 99a-99c=-297\\ 99a-90b-9c=-117\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b+c=10\\ a-c=-3\\ 11a-10b-c=-13\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}c-3+b+c=10\\ a=c-3\\ 11c-33-10b-c=-13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b+2c=13\\ a=c-3\\ c-b=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=3\\ c=5.\end{cases}$

Ainsi le nombre cherché est 235.

Se tester

66 **1.** Vrai ; **2.** Vrai ; **3.** Faux ; **4.** Faux ; **5.** Vrai ; **6.** Faux ; **7.** Vrai.

67 **1.** Vrai. $\Delta = 1$. Deux solutions : $x_1 = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+1}{4} = 1$.

2. Faux. $2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x-1)$.

3. Faux. $(x^2 + x - 6) = (x-2)(x+3)$.

4. Vrai. Trinôme du signe de $-a = -1$ à l'intérieur des racines.

5. Vrai. $D = \begin{vmatrix} 13 & 7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 13 \times 1 - 5 \times 7 = -22$.

6. Faux La solution est le couple : $(-2\,;3)$.

68 **1.** b. **2.** a. **3.** b. **4.** a. **5.** c. **6.** b.

69 **1. c.** car $1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 0$.

2. a. car $(x-1)(x^2 - 5x + 6) = x^3 - 5x^2 + 6x - x^2 + 5x - 6$
$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

3. b. car $x^2 - 5x + 6 = 0$ a deux racines : 2 et 3.

4. b. Trinôme du signe de $-a = -1$ à l'intérieur des racines.

5. c. car le trinôme $x^2 - 5x + 6$ change de signe en 2. (Pour détailler cette réponse, on peut dresser un tableau de signes.)

6. a. car $P(x) < 11x - 6 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 < 0$
$\Leftrightarrow x^2(x-6) < 0$.

Exercices d'approfondissement

70 **Danger : inéquation**

1. a. Le trinôme a deux racines : $x_1 = \dfrac{10-\sqrt{79}}{3}$ et $x_2 = \dfrac{10+\sqrt{79}}{3}$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$3x^2-20x+7$		+	0	−	0	+	

b. $D = \mathbb{R}\backslash\{6\}$.

c. $(I) \Leftrightarrow \dfrac{3x^2-20x+7}{x-6} \geqslant 0$.

x	$-\infty$		x_1		6		x_2		$+\infty$
$x-6$		−		−	0	+		+	
$3x^2-20x+7$		+	0	−		−	0	+	
$P(x)$		−	0	+	‖	−	0	+	

$S = [x_1\,;6[\, \cup\, [x_2\,;+\infty[$.

2. a. $D = \mathbb{R}\backslash\{-2\,;2\}$.

b.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		+	0	−	0	+	

c. $I' \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2-4} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+5}{x^2-4} \leqslant 0$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		-2		2		$\sqrt{5}$		$+\infty$
x^2-4		+		+	0	−	0	+		+	
$-x^2+5$		−	0	+		+		+	0	−	
(I')		−	0	+	‖	−	‖	+	0	−	

Ainsi, $S =]-\infty\,;-\sqrt{5}] \cup]2\,;-2[\cup [\sqrt{5}\,;+\infty[$.

71 **Somme = produit**

a. $x = 2$ et $y = 2$.

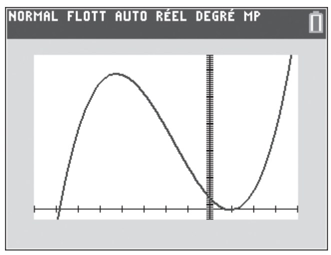
b. (E) : $x^2 - mx + m = 0$.

c. $\Delta = m^2 - 4m$.

- si $0 < m < 4$, pas de solution,
- si $m = 0$, une solution $x = y = 0$,
- si $m = 4$, une solution $x = y = 2$,
- si $m < 0$ ou $m > 4$, deux solutions $x = \dfrac{m-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $y = \dfrac{m+\sqrt{\Delta}}{2}$.

72 **Signe d'un polynôme du troisième degré**

a.



On conjecture que $P(x) < 0$ lorsque $x < 6{,}8$ (environ) ;
que $P(x) = 0$ lorsque $x \approx 6{,}8$;
que $P(x) > 0$ lorsque $x < 6{,}8$ (environ).

b. $x_0 = 1$.

c. $P(x) = (x-1)(x^2 + 6x - 6)$.

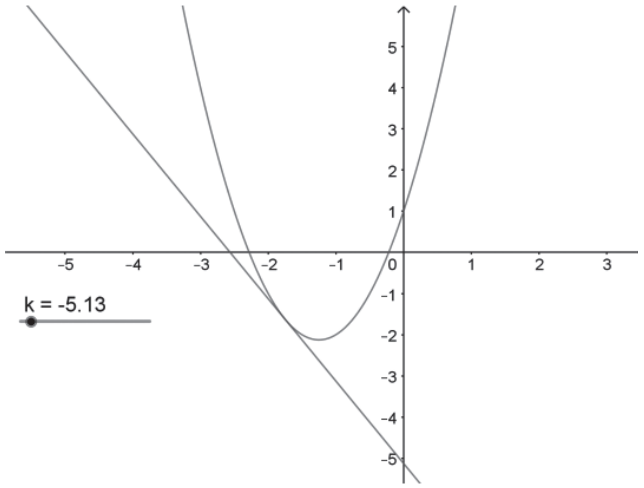
d. $x_1 = -3 - \sqrt{15}$ et $x_2 = -3 + \sqrt{15}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		1		$+\infty$
$x-1$		−		−		−	0	+	
x^2+6x-6		+	0	−	0	+		+	
$P(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

La conjecture du **a.** (lecture imprécise) est invalidée par le calcul.

73 Paramètre et intersection

a.



On conjecture que :

- lorsque $k < -5{,}1$ il n'y a pas de point d'intersection ;
- lorsque $k \approx -5{,}1$ il y a un unique point d'intersection ;
- lorsque $k > -5{,}1$ il y a deux points d'intersection ;

b. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2 + 7x + 1 - k = 0$.

$\Delta = 49 - 8(1 - k) = 41 + 8k$.

Si $k < -\frac{41}{8}$, aucun point d'intersection ;

si $k = -\frac{41}{8}$, un point d'intersection ;

si $k > -\frac{41}{8}$, deux points d'intersection.

74 Inéquation

a. Q a deux racines -3 et $-\frac{1}{2}$.

b.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$P(x)$		+	0	+	

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$Q(x)$		+	0	−	0	+	

c. $S = \left]-3\,;-\frac{1}{2}\right[$.

75 Deux nombres inconnus

x désigne l'un des nombres, l'autre est donc $\frac{1}{x}$.

L'énoncé se traduit par l'équation (E) :

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 \Leftrightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 - 5x^2 + 2 = 0.$$

On pose $X = x^2$. Ainsi $(E) \Leftrightarrow 2X^2 - 5X + 2 = 0$.

Cette équation a deux solutions : $\frac{1}{2}$ et 2.

Finalement, on obtient quatre solutions :

$x \in \left\{-\sqrt{2}\,;-\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\sqrt{2}\right\}$.

76 Équation inconnue

1. $\Delta = 5m^2 - 14m + 1$.

2. a. $\Delta = 1 \Leftrightarrow m(5m - 14) = 0$.

Or $m \neq 0$, donc $m = \frac{14}{5}$.

b. (E) a deux solutions $x_1 = -\frac{1}{7}$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$.

3. $\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in \left]\frac{7 - \sqrt{44}}{5}\,;\frac{7 + \sqrt{44}}{5}\right[$.

4. a. $x_1 = \dfrac{-m + 1 - \sqrt{5m^2 - 14m + 1}}{2m}$

et $x_2 = \dfrac{-m + 1 + \sqrt{5m^2 - 14m + 1}}{2m}$.

b. Les deux solutions sont -1 et $\frac{1}{4}$.

77 Vitesse d'un avion

a. $t_{aller} = \dfrac{630}{V - 100}$; $t_{retour} = \dfrac{630}{V + 100}$.

b. $t_{aller} + t_{retour} = 1{,}6 \Leftrightarrow 630\left(\dfrac{1}{V - 100} + \dfrac{630}{V + 100}\right) = 1{,}6$

$\Leftrightarrow \dfrac{1\,260V}{V^2 - 10\,000} = 1{,}6$

$\Leftrightarrow 1{,}6\,V^2 - 1\,260V - 16\,000 = 0$.

c. $\Delta = 1\,300^2$; (E) a donc deux solutions :

$V_1 = -12{,}5$ (non valable car la vitesse est positive) et $V_2 = 800$.

La vitesse de l'avion serait donc de 800 km/h.

78 Un carreau

$A_{colorée} = x^2 + [100 - (10 - 2x)^2] = -3x^2 + 40\,x$.

$A_{blanche} = 100 - A_{colorée} = 3x^2 - 40x + 100$.

$A_{colorée} < A_{blanche} \Leftrightarrow 6x^2 - 80x + 100 > 0$.

Le trinôme a deux racines : $x_1 = \dfrac{20 - 5\sqrt{10}}{3} \approx 1{,}4$

et $x_2 = \dfrac{20 + 5\sqrt{10}}{3} \approx 11{,}9$.

Or $0 \leqslant x \leqslant 10$, donc $x \in [0\,;x_1]$.

79 Carrés et cubes des racines

1. a. $\Delta = 29$; $\Delta > 0$.

b. $S = 3$, $P = -5$.

2. a. $(x_1 + x_2)^2 = x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + 2x_1x_2$.

b. $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = S^2 - 2P = 19$.

3. a. $(x_1 + x_2)^3 = x_1^{\ 3} + x_2^{\ 3} + 3x_1^{\ 2}x_2 + 3x_1x_2^{\ 2}$.
b. $x_1^{\ 3} + x_2^{\ 3} = S^3 - 3SP = 72$.

4. $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{29}}{2}$; $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{29}}{2}$.

Vérifier ensuite les résultats précédents avec ces valeurs.

80 Une ficelle

a. On pose $AC = x$.

Le théorème de Pythagore se traduit par :

$13^2 = x^2 + (20 - x)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 40x + 231 = 0$.

Le discriminant est négatif ($\Delta = -2\ 096$), donc cette équation n'a pas de solution. Il est donc impossible de tendre la ficelle de manière à ce que le triangle soit rectangle.

b. l désigne la longueur de la ficelle.

En procédant de manière analogue au **a.**, on obtient l'équation : $2x^2 - 2lx + l^2 - 169 = 0$.

$\Delta = 1\ 352 - 4l^2$.

$\Delta > 0 \Leftrightarrow l < \sqrt{338} \Leftrightarrow l < 13\sqrt{2}$.

La longueur de la ficelle doit donc être inférieure à $13\sqrt{2}$ cm (soit environ 18,4 cm).

81 Un pavé

1. $V = abc$; $A = 2(ab + ac + bc)$; $L = 4\ (a + b + c)$.

2. a. $P(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc$.

b. $P(x) = x^3 - \dfrac{L}{4}x^2 + \dfrac{A}{2}x - V$.

$x^3 - 39x^2 + 284x - 420 = 0 \qquad (E)$.

c. a, b et c sont les racines de P.

3. a. $x_0 = 2$.

b. $(E) \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 37x + 210) = 0$
$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 7)(x - 30) = 0$.

c. Les dimensions du pavé sont donc 2 cm, 7 cm et 30 cm.

82 Des équations irrationnelles

1. a. (E') $X^2 + X - 6 = 0$.
b. $X_1 = -3$, $X_2 = 2$.
c. $\sqrt{x} = -3$ est impossible ; $\sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$.
Finalement, $S = \{4\}$.

2. a. (F') $X^2 + X - 2 = 0$.
b. $X_1 = -2$, $X_2 = 1$.
c. $\sqrt{x - 1} = -2$ est impossible ; $\sqrt{x - 1} = 1 \Rightarrow x = 2$.
Finalement, $S = \{2\}$.

83 Point sur la courbe

a. A milieu de $[MM']$ donc

$$\begin{cases} 3 = \dfrac{x + x'}{2} \\ 3 = \dfrac{y + y'}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 6 - x \\ y' = \dfrac{5x - 5}{x - 2}. \end{cases}$$

b. $M' \in (\mathscr{C}_f) \Leftrightarrow y' = f(x') \Leftrightarrow \dfrac{5x - 5}{x - 2} = \dfrac{-x - 1}{-x + 4}$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 11 = 0$.

c. Cette équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{6 - \sqrt{14}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{6 + \sqrt{14}}{2}$.

d. $f(x_1) = \dfrac{-8 - \sqrt{14}}{2 - \sqrt{14}}$ et $f(x_2) = \dfrac{-8 + \sqrt{14}}{2 + \sqrt{14}}$.

84 Une histoire de boules

1. a. $V_{eau} = V_{interieur} - V_{boule} = 912\pi$.

b. $V_{eau} = 200\pi R - \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

2. a. $912\pi = 200\pi R - \dfrac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow R^3 - 150R + 684 = 0$.

c. $(E) \Leftrightarrow (R - 6)(R^2 + 6R - 114) = 0$.

d. Deux solutions $R_1 = -3 - \sqrt{123}$ et $R_2 = -3 + \sqrt{123}$.

$R > 0$. Donc $R = R_2 \approx 8{,}09$.

Le rayon de la deuxième boule est donc environ 8,09 cm.

85 Système 2 × 3

a. $(S')\ \begin{cases} x + 2y = 5 - z \\ -2x + y = -3 + 2z. \end{cases}$

b. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$. $5 \neq 0$ donc une seule solution.

$D_x = \begin{vmatrix} 5 - z & 1 \\ -3 + 2z & 3 \end{vmatrix} = 18 - 5z$ et $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 - z \\ -2 & -3 + 2z \end{vmatrix} = 7$.

Ainsi la solution du système (S') est le couple :

$\left(\dfrac{18 - 5z}{5} ; \dfrac{7}{5}\right)$.

c. L'ensemble des solutions de (S) est alors :

$\left\{\left(\dfrac{18 - 5z}{5} ; \dfrac{7}{5} ; z\right)\right\}$, avec $z \in \mathbb{R}$.

86 Bassin

a. d_1, d_2 et d_3 désignent les débits respectifs des trois robinets et V le volume du bassin.

Le tableau se traduit par le système : $\begin{cases} d_1 + d_2 = \dfrac{V}{20} \\ d_2 + d_3 = \dfrac{V}{15} \\ d_1 + d_3 = \dfrac{V}{12}. \end{cases}$

b. $d_1 = \dfrac{V}{30}$; $d_2 = \dfrac{V}{60}$ et $d_3 = \dfrac{V}{20}$.

c. $t_1 = \dfrac{V}{d_1} = \dfrac{V}{\dfrac{V}{30}} = 30$ min;

$t_2 = \dfrac{V}{d_2} = \dfrac{V}{\dfrac{V}{60}} = 60$ min

et $t_3 = \dfrac{V}{d_3} = \dfrac{V}{\dfrac{V}{20}} = 20$ min.

d. $t = \dfrac{V}{d_1 + d_2 + d_3} = \dfrac{V}{\dfrac{V}{30} + \dfrac{V}{60} + \dfrac{V}{20}} = \dfrac{V}{\dfrac{V}{10}} = 10$ min.

87 Un circuit électrique

Calcul de la résistance équivalente des résistances montées en parallèle :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x+3} = \frac{x+5}{2(x+3)} \Leftrightarrow R_{eq} = \frac{2(x+3)}{x+5}.$$

Il en résulte l'équation :

$$\frac{2(x+3)}{x+5} + x = 4{,}5 \Leftrightarrow 2(x+3) + x(x+5) = 4{,}5(x+5)$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2{,}5x - 16{,}5 = 0.$$

L'équation a deux solutions : $x_1 = -5{,}5$ et $x_2 = 3$.

La valeur de la résistance étant un nombre positif, elle est égale à 3 Ω.

88 Système 4 × 4

$$\begin{cases} x+y+z+t=6 \\ 2x-y+3z-t=5 \\ x-3y+z+2t=-1 \\ 3x+2y-z-t=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=6 \\ -3y+z-3t=-7 \\ -4y+t=-7 \\ -y-4z-4t=-14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=6 \\ -3y+z-3t=-7 \\ -4y+t=-7 \\ -y-4z-4t=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=6 \\ -3y+z-3t=-7 \\ -4y+t=-7 \\ -13y-16t=-42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=6 \\ -3y+z-3t=-7 \\ -4y+t=-7 \\ -77y=-154 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=6 \\ -3y+z-3t=-7 \\ -4y+t=-7 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=2 \\ t=1 \\ y=2. \end{cases} \qquad S = \{(1 ; 2 ; 2 ; 1)\}.$$

89 Réservoir

d désigne le débit du deuxième tuyau et t le temps de remplissage lorsque l'on utilise les deux tuyaux.

L'énoncé se traduit par le système :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (15+d)t = 1400 \\ d(t+30) = 1\,400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15t + dt = 1400 \\ dt + 30d = 1\,400 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2d \\ 2d^2 + 30d - 1400 = 0. \end{cases}$$

Deux solutions pour d : -35 et 20.

Le débit étant positif, il ést égal à 20 litres par minute.

Problèmes

90 Une méthode de résolution babylonienne

1. a. $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 2$ et $u_4 = \sqrt{2}$.

b. $u_1 + u_4 - \dfrac{1}{u_1 + u_4} = 1 + \sqrt{2} - \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{(1+\sqrt{2})^2 - 1}{1+\sqrt{2}}$

$= \dfrac{2 + 2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2$.

c. $(E) \Leftrightarrow x^2 - cx - 1 = 0$; $\Delta = c^2 + 4 = 8$.

(E') a deux solutions : $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2} = x_1$.

2. Pour $c = -3$: $u_1 = -\dfrac{3}{2}$, $u_2 = \dfrac{9}{4}$, $u_3 = \dfrac{13}{4}$ et $u_4 = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

(E') a deux solutions : $\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$.

Pour $c = 0$: $u_1 = -0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 1$ et $u_4 = 1$.

(E') a deux solutions : -1 et 1.

3. a. On pose $X = x^2$.

$u_1 = \dfrac{3}{2}$, $u_2 = \dfrac{9}{4}$, $u_3 = \dfrac{13}{4}$ et $u_4 = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

(E') a deux solutions : $\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Ainsi on obtient $x^2 = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ et $x^2 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

$\dfrac{3-\sqrt{13}}{2} < 0$. Finalement, l'équation a deux solutions : $-\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}}$ et $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}}$.

b. On pose $X = \sqrt{x}$.

$u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{4}$, $u_3 = \dfrac{5}{4}$ et $u_4 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (E') a deux solutions : $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ainsi on obtient $\sqrt{x}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\sqrt{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$. Finalement, l'équation a une solution :
$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

91 Un problème chinois

1. Grâce à la feuille de calcul, étirée jusqu'à la ligne 251, on conjecture que la réponse au problème est $x=250$.

2. a. Le théorème de Thalès donne l'égalité :

$$\frac{1\,775}{\frac{x}{2}}=\frac{x+34}{20}\Leftrightarrow 1\,775\times 20=\frac{x}{2}\times(x+34)$$

$$\Leftrightarrow x^2+34\,x-71\,000=0$$

b. $\Delta=34^2+4\times 71\,000=285\,156=534^2$.

L'équation a donc deux solutions : $\frac{-34-534}{2}=-284$ et $\frac{-34+534}{2}=250$.

La dimension du côté de la ville devant être positive, la seule réponse est qu'elle mesure 250 pas de côté.

92 Système avec paramètre

1. $\begin{cases} y+z=0\\ y+z=0\\ x+y+z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} z=-y\\ x=1.\end{cases}$

Donc $S=\{1\,;y\,;-y\}$ avec $y\in\mathbb{R}$.

2. $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}z=\frac{1}{4}\\ x+y+z=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x+3\,y+3\,z=\frac{1}{2}\\ x+y+z=\frac{1}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{1}{2}\\ y+z=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{1}{2}\\ z=-y\end{cases}$

Donc $S=\left\{\frac{1}{2}\,;y\,;-y\right\}$ avec $y\in\mathbb{R}$.

3. $\begin{cases} -x+2y+2z=1\\ -x=-2\\ x+y+z=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2y+2z=3\\ x=2\\ y+z=0\end{cases}$

impossible, donc S n'a pas de solution.

4. a. (1') $\Leftrightarrow 2a^2x=3a^2-a\Leftrightarrow x=\frac{3a-1}{2a}$.

b. (2') $\Leftrightarrow x=1-a$.

c. $x=\frac{3a-1}{2a}=1-a\Leftrightarrow 3a-1=2a-2a^2$

$\Leftrightarrow 2a^2+a-1=0$.

Cette équation a deux solutions : -1 et $\frac{1}{2}$.

5. Finalement, le système n'a pas de solution si $a\neq 0$ et $a\neq\frac{1}{2}$ et une infinité de solutions sinon.

93 Triangle dans un carré

1. On conjecture que l'aire du triangle CMM' est égale à 9 lorsque $x\approx 1{,}8$.

On conjecture que l'aire du triangle CMM' est supérieure au quart de l'aire du carré lorsque $1{,}8<x\leqslant 6$ (environ).

2. a. $x\in[0\ ;6]$.

b. $A(x)=\text{Aire}_{ABCD}-\text{Aire}_{AMM'}-\text{Aire}_{DCM'}-\text{Aire}_{BCM}$

$=36-\frac{x^2}{2}-\frac{6(6-x)}{2}-\frac{6(6-x)}{2}\Leftrightarrow-\frac{x^2}{2}+6\,x$.

c. $A(x)=9\Leftrightarrow -x^2+12x-18=0$.

Cette équation a deux solutions :
$x_1=6-3\sqrt{2}$ et $x_2=6+3\sqrt{2}$.

Le nombre x doit être inférieur à 6, donc la seule solution admissible est x_1.

d. $S=[6-3\sqrt{2}\,;6]$.

9 Généralités sur les applications

Manuel pages 141 à 158

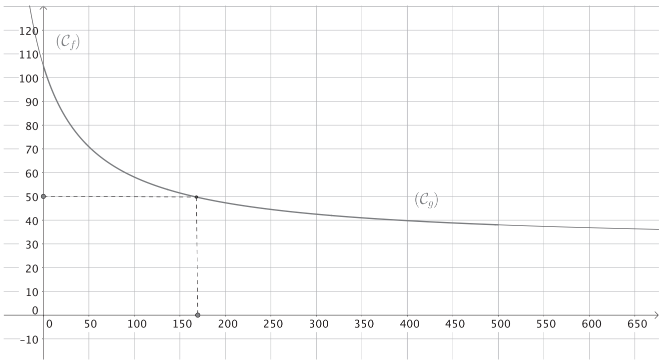
Activités d'introduction

1 Restriction d'une fonction

① **a.**

x	–35	–20	0	10	30	50	80	100	400	500
$f(x)$	210	142,5	105	94,3	80	70,9	62,1	58,1	39,8	38

b.



② **a.** On retrouve sur ce graphique quelques points du tableau précédent :

• pour une distance $x = 0$ m, la nuisance sonore est de $f(0) = 105$ dB ;

• pour une distance $x = 30$ m, la nuisance sonore est de $f(30) = 80$ dB ;

• pour une distance $x = 400$ m, ma nuisance sonore est de $f(400) = 40$ dB.

b. g est définie sur l'intervalle $[0 ; 500]$.

c. On cherche x tel que $g(x) = 50$.

$$g(x) = 50 \Leftrightarrow 30 + \frac{4\,500}{x+60} = 50 \Leftrightarrow \frac{4\,500}{x+60} = 20$$

$$\Leftrightarrow 20x + 1\,200 = 4\,500 \Leftrightarrow 20x = 3\,300 \Leftrightarrow x = 165.$$

À 165 m, la nuisance sonore d'une éolienne correspond à celle d'un micro-ondes.

2 Composition de fonctions

① $\mathscr{D}_f = [0 ; +\infty[$, $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$.

② $[0 ; +\infty[\xrightarrow{f} [0 ; +\infty[\xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \sqrt{x} \longmapsto g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 1.$

③ **a.** Car il faut que $g(x) \geqslant 0$ pour pouvoir écrire $f(g(x))$.

b. $[1 ; +\infty[\xrightarrow{g} [0 ; +\infty[\xrightarrow{f} \mathbb{R}$

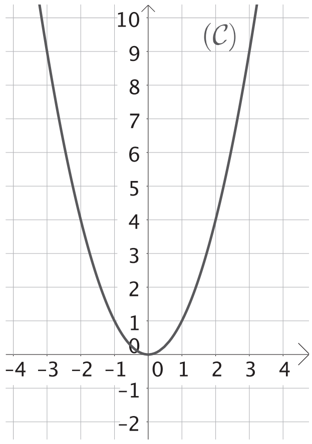
$x \longmapsto g(x) = x - 1 \longmapsto f(g(x)) = f(x-1) = \sqrt{x-1}.$

c. On constate que $g \circ f \neq f \circ g$.

3 Surjection, injection, bijection

①

a.

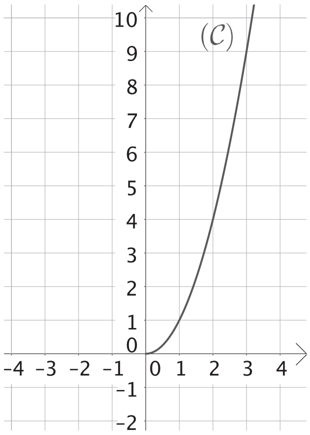


b. • Lorsque $m = 0$, m possède un seul antécédent par f : $x = 0$.

• Lorsque $m > 0$, m possède deux antécédents par f : $x = -\sqrt{m}$ et $x = \sqrt{m}$.

②

a.



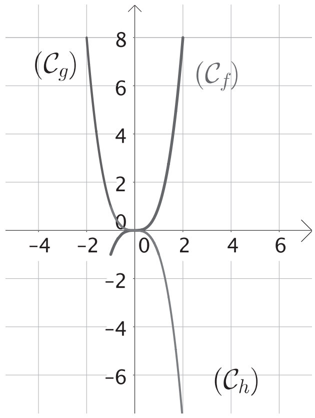
b. • Lorsque $m < 0$, m ne possède aucun antécédent par g.

• Lorsque $m = 0$, m possède un seul antécédent par g : $x = 0$.

• Lorsque $m > 0$, m possède un seul antécédent par g : $x = \sqrt{m}$.

③ Pour tout $m \geqslant 0$, m possède un unique antécédent par h : $x = \sqrt{m}$, donc h est injective et surjective. h est donc bijective.

4 Fonction associée à une fonction usuelle

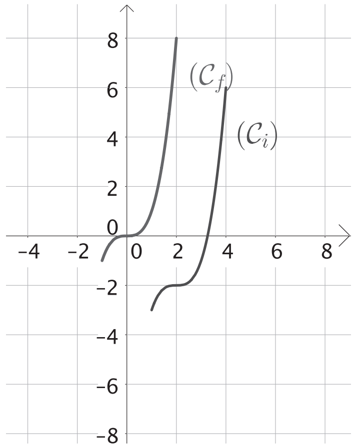


① **a.** à **c.**

• $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

d. • $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_h)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

② **a.** à **c.**



• $(\mathscr{C}_i)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{u}(a\,;b)$.

Savoir-faire

3 **a.** À chaque nombre entier naturel n, u associé le nombre entier naturel $3n$.

Donc u est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

b. En tant que fonction, u est une application. Son ensemble de départ est $\mathbb{R}$ et son ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$.

c. u est une application du plan dans lui-même qui, à tout point M du plan associe son symétrique M' par rapport à I.

4 **a.** $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$et $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$, donc f et g ne sont pas égales.

Pour tout $x \neq -1$, $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x - 1$ et,

$g(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ pour } x \geqslant 1 \\ -x + 1 \text{ pour } \leqslant 1. \end{cases}$

Ainsi, f et g sont égales sur $[1\,;+\infty[$.

b. L'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}$.

L'ensemble de définition de i est $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Donc les fonctions h et i ne sont pas égales, sauf pour $x \geqslant 0$, c'est-à-dire sur $[0\,;+\infty[$.

7 **a.** $x \in [2\,;7]\,;\, 2 \leqslant x \leqslant 7$

$\Leftrightarrow 4 \leqslant x + 2 \leqslant 9 \Leftrightarrow \dfrac{1}{9} \leqslant \dfrac{1}{x+2} \leqslant \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{9} \leqslant \dfrac{3}{x+2} \leqslant \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \dfrac{3}{9} - 5 \leqslant \dfrac{3}{x+2} - 5 \leqslant \dfrac{3}{4} - 5$

$\Leftrightarrow -\dfrac{14}{3} \leqslant f(x) \leqslant -\dfrac{17}{4} \Leftrightarrow f(x) \in \left[-\dfrac{14}{3}\,;-\dfrac{17}{4}\right]$.

b. $f(x) \in [0\,;1] \Leftrightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$

$\Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{3}{x+2} - 5 \leqslant 1 \Leftrightarrow 5 \leqslant \dfrac{3}{x+2} \leqslant 6$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{3} \leqslant \dfrac{1}{x+2} \leqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant x + 2 \leqslant \dfrac{3}{5}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} - 2 \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{5} - 2 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant -\dfrac{7}{5}$

$\Leftrightarrow x \in \left[-\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{7}{5}\right]$.

8 **a.** L'image de $]-3\,;+\infty[$ par f est $]0\,;+\infty[$.

D'où le schéma :

$g \circ f :]-3\,;+\infty[\xrightarrow{f}]0\,;+\infty[\xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{5}{x+3} \longmapsto g \circ f(x) = \sqrt{\dfrac{5}{x+3}}$.

b. L'image de $]0\,;+\infty[$ par g est $]0\,;+\infty[$.

D'où le schéma :

$f \circ g :]0\,;+\infty[\xrightarrow{g}]0\,;+\infty\,[\xrightarrow{f} \mathbb{R}$

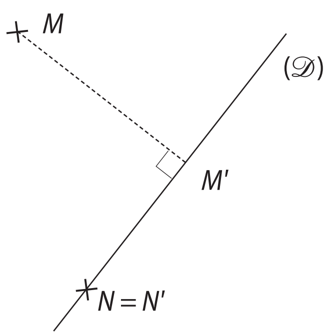
$x \longmapsto \sqrt{x} \longmapsto f \circ g(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x}+3}$.

11 **a.** Pour tout b de $[0\,;3]$, b admet au plus un antécédent par f (toute droite d'équation $y = b$ coupe $(\mathscr{C}_f)$ au plus une fois). Donc f est injective.

b. Pour tout b de $[0\,;3]$, b admet au moins un antécédent par f (toute droite d'équation $y = b$ coupe $(\mathscr{C}_f)$ au moins une fois). Donc f est surjective.

c. Pour tout b de $[0\,;3]$, b admet exactement un antécédent a de $[-2\,;7]$ par f (toute droite d'équation $y = b$ coupe $(\mathscr{C}_f)$ exactement une fois). Donc f est bijective.

12



p est une application du plan $(\mathscr{P})$ vers $(\mathscr{D})$.

a. Pour tout point M' de $(\mathscr{D})$, il existe une infinité d'antécédents de M' par p (tous les points situés sur la droite perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ passant par M').

Donc p n'est pas injective.

b. Pour tout point M' de $(\mathscr{D})$, il existe une infinité (donc au moins un) d'antécédents de M' par p.

Donc p est surjective.

c. p n'est pas injective, elle n'est donc pas bijective.

15 $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de la courbe représentative de la fonction racine carrée par la translation de vecteur $\vec{u}(4\,;3)$.

16 • Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) = f(x+1) - 2$.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$, $h(x) = f(-x)$.

Exercices d'entraînement

Notion d'application

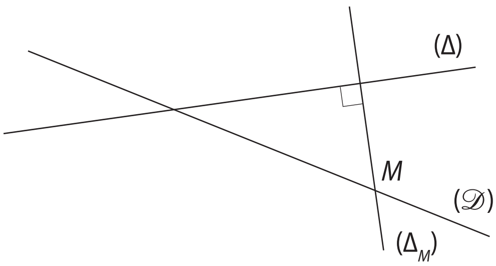
17 g n'est pas une application car à un point M du plan, elle associe deux points H et H' du plan.

18 **a.** $f([AB]) = [DC]$. **b.** $f([AB]) = [CD]$.

19 f est le prolongement de g sur $\mathbb{R}$.
f est le prolongement de h sur $\mathbb{R}$.
h est la restriction de f à $[4 ; 8]$.

20 C'est une application de l'ensemble $(\mathscr{P})$ des points du plan vers $\mathbb{R}$.

21 **a.**



b. Cette relation n'est pas une application car à un point M de $(\mathscr{P})$, elle fait correspondre une droite, c'est-à-dire une infinité de points de $(\mathscr{P})$.

22 On peut conjecturer que $f = g$ sur $[2 ; +\infty[$, $f = h$ sur $[-1 ; 1]$.

23 $g : x \longmapsto g(x) = -\dfrac{1}{2}x - 1$.

24 Si $x \in [1 ; 3]$, alors $|x - 1| = x - 1$ et $|3 - x| = -x + 3$, donc $g : [1 ; 3] \longmapsto \mathbb{R}$
$x \longmapsto -x + 5$.

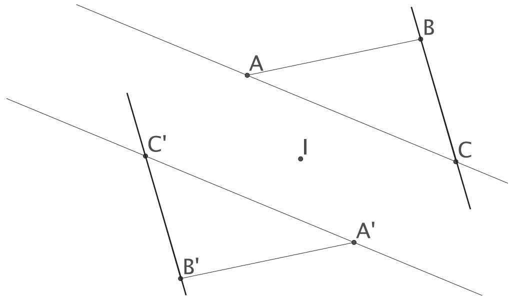
25 **a.** Pour tout x de $\mathbb{R}$,
$g(x) = 4x^2 + 12x - 7$;
$h(x) = 4x^2 + 12x - 7$.
b. Non, car elles n'ont pas le même ensemble de départ ou le même ensemble d'arrivée.

26 $f = g = \ell$.

Image, image réciproque

27 **a.** $f([0 ; 0{,}6]) = [0 ; 1]$.
$f([-1 ; 0]) = [0 ; 1]$.
$f([0 ; 1]) = [-2 ; 1]$.
b. $f^{-1}([1 ; 2]) = [-2{,}2 ; -2]$.
$f^{-1}([0 ; 1]) = [-2 ; -1{,}6] \cup [-1 ; 0{,}6]$.
$f^{-1}([-2 ; 2]) = [-2{,}2 ; 1]$.

28 **a.** $s_I([AB]) = [A'B']$;
b. $s_I^{-1}((AC)) = (A'C')$;
c. $s_I^{-1}([BC]) = [B'C']$; $s_I((BC)) = (B'C')$; où A', B', C' sont les symétriques de A, B, C par rapport au point I.



29 **a.** $-3 \leqslant x \leqslant 4 \Leftrightarrow -20 \leqslant -5x \leqslant 15$
$\Leftrightarrow -19 \leqslant f(x) \leqslant 16$.
Donc $f([-3 ; 4]) = [-19 ; 16]$.
De la même façon, on trouve que :
b. $f([-3 ; 4]) = [0 ; 32]$.
c. $f([-3 ; 4]) = \left[-2 ; -\dfrac{4}{9}\right]$.
d. $f([-3 ; 4]) = [-250 ; 16]$.

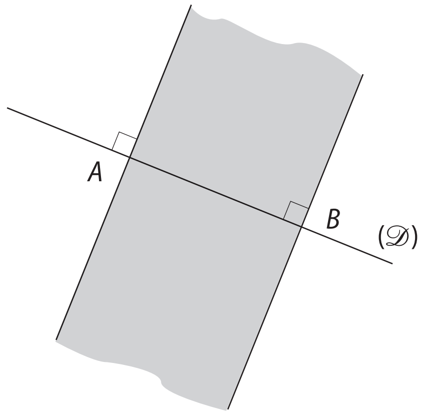
30 **a.** $1 \leqslant f(x) \leqslant 2 \Leftrightarrow 1 \leqslant 3x - 4 \leqslant 2$
$\Leftrightarrow 5 \leqslant 3x \leqslant 6 \Leftrightarrow \dfrac{5}{3} \leqslant x \leqslant 2$.
Donc $f^{-1}([1 ; 2]) = \left[\dfrac{5}{3} ; 2\right]$.
b. $1 \leqslant f(x) \leqslant 2 \Leftrightarrow 1 \leqslant 3(x + 2) \leqslant 2$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \leqslant x + 2 \leqslant \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{5}{3} \leqslant x \leqslant -\dfrac{4}{3}$.
Donc $f^{-1}([1 ; 2]) = \left[-\dfrac{5}{3} ; -\dfrac{4}{3}\right]$.
c. $1 \leqslant f(x) \leqslant 2 \Leftrightarrow 1 \leqslant \dfrac{2}{x+1} \leqslant 2$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{x+1} \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant x + 1 \leqslant 2$
$\Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1$.
Donc $f^{-1}([1 ; 2]) = [0 ; 1]$.
d. $1 \leqslant f(x) \leqslant 2 \Leftrightarrow 1 \leqslant \dfrac{5}{x-3} \leqslant 2$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{1}{x-3} \leqslant \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow \dfrac{5}{2} \leqslant x - 3 \leqslant 5$
$\Leftrightarrow \dfrac{11}{2} \leqslant x \leqslant 8$.
Donc $f^{-1}([1 ; 2]) = \left[\dfrac{11}{2} ; 8\right]$.

31 **a.** • $f([-5 ; 5]) = [1 ; 74]$.
• $f^{-1}([0 ; 4]) = \left[-\sqrt{\dfrac{5}{3}} ; -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\dfrac{1}{\sqrt{3}} ; \sqrt{\dfrac{5}{3}}\right]$.
b. • $g([2 ; +\infty[) = [0 ; +\infty[$. • $g_{-1}([0 ; 4]) = [3 ; 7]$.

32 **a.** $p((\mathscr{P})) = (\mathscr{D})$.

b. $p((\Delta)) = \{H\}$ où H est le point d'intersection de (Δ) et de $(\mathscr{D})$.

c.



$p^{-1}([AB])$ est la zone colorée en gris (bords compris).

Composition d'applications

33 **a.** $g \circ f(x) = (2x + 3)^2$.

b. $g \circ f(x) = 2x^2 + 3$.

c. $g \circ f(x) = 2 \times \left(\dfrac{1}{x-1}\right)^3 + 5$.

d. $g \circ f(x) = 5 \times (\sqrt{3x+5})^2 - 5 = 15x + 20$.

34 **a.** $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

b. $f \circ f(x) = 5(5x - 1) - 1 = 25x - 6$.

c. • $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

• $f \circ f(x) = -3(-3x + 4) + 4 = 9x - 8$.

35 **1.** $g \circ f(x) = -2ax + 3a + b$

et $f \circ g\,(x) = -2ax + -2b + 3$.

2. $g \circ f(x) = f \circ g\,(x) \Leftrightarrow 3a + b = -2b + 3 \Leftrightarrow a + b = 1$.

Le couple $(2\,;-1)$ convient.

36 **a.** • $A = [-1\,;+\infty[$.

• $f(A) = f([-1\,;+\infty[) = [0\,;+\infty[= B$.

b. $g(B) = g([0\,;+\infty[) = [-1\,;+\infty[$.

c. $g \circ f : [-1\,;+\infty[\longmapsto [0\,;+\infty[\longmapsto [1\,;+\infty[$

$x \longmapsto f(x) = \sqrt{x+1} \longmapsto g\ o\ f(x) = 3x + 2$.

37 **a.** • $A = \mathbb{R}$.

• $f(A) = f(\mathbb{R}) = [-1\,;+\infty[= B$.

b. $g(B) = g([-1\,;+\infty[) = [0\,;6]$.

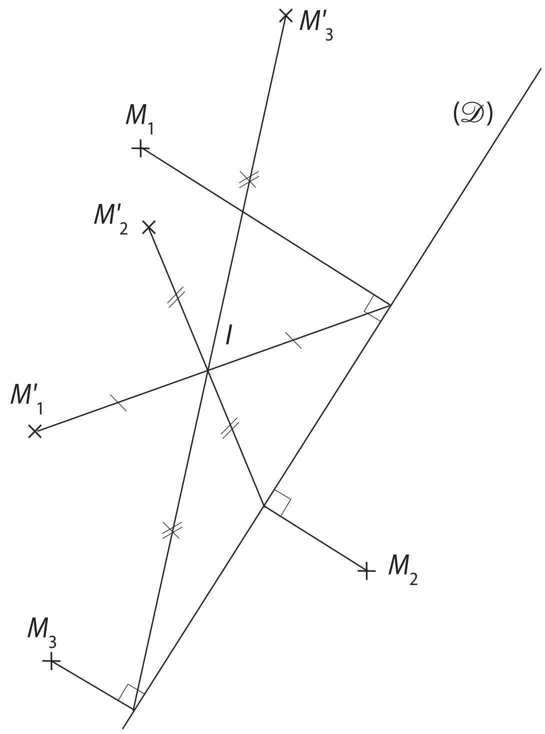
c. $g \circ f : \mathbb{R} \longmapsto [-1\,;+\infty[\longmapsto [5\,;6]$

$x \longmapsto f(x) = 2x^2 - 1 \longmapsto g\ o\ f(x) = \dfrac{1}{2x^2+1} + 5$.

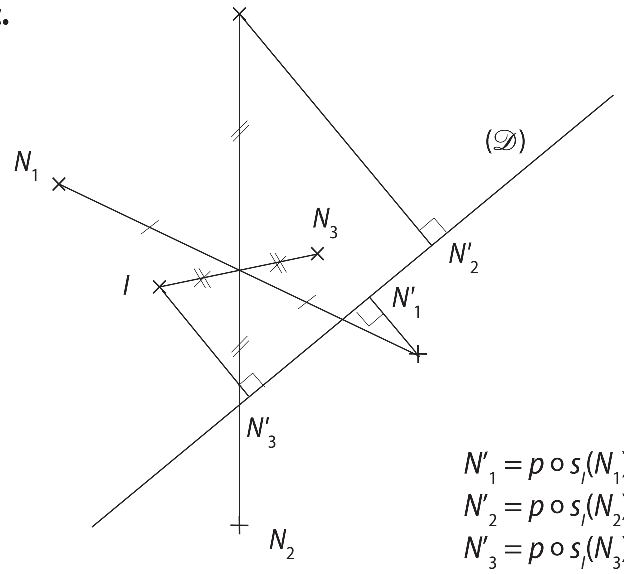
38 **a.** et **b.** $M'_1 = s_I \circ p(M_1)$

$M'_2 = s_I \circ p(M_2)$

$M'_3 = s_I \circ p(M_3)$



c.



$N'_1 = p \circ s_I(N_1)$

$N'_2 = p \circ s_I(N_2)$

$N'_3 = p \circ s_I(N_3)$

39 **a.** $s_{(AB)} \circ s_{(AB)} = \mathrm{id}_{(\mathscr{P})}$.

b. $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{2AB}}$.

c. $s_A \circ s_A = \mathrm{id}_{(\mathscr{P})}$.

40 **a.** $h \circ g(x) = \dfrac{1}{4x^2+3}$.

L'ensemble de définition de $h \circ g$ est $\mathbb{R}$.

b. $h \circ f(x) = \dfrac{1}{-2x+3}$.

L'ensemble de définition de $h \circ f$ est $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

c. $h \circ g \circ f(x) = h(1 + 4(-2x+1)^2)$

$= \dfrac{1}{1 + 4(-2x+1)^2 + 2} = \dfrac{1}{4(-2x+1)^2 + 3}$.

L'ensemble de définition de $h \circ g \circ f$ est $\mathbb{R}$.

Injection – Surjection – Bijection

41 ① Application surjective.
② Ce n'est pas une application.
③ Application bijective.
④ Application injective.

42 Cette application est injective et surjective.
C'est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{I}$.

43 f_1 est bijective car on lit que $f([-1\,;\,1]) = [-3\,;\,3]$, et que tout y de $[-3\,;\,3]$ possède un unique antécédent x dans $[-1\,;\,1]$.

44 **a.** Pour $A = [1\,;\,3]$ et $B = [0\,;\,1]$, f est une injection, mais pas une surjection.
b. Pour $A = [-2\,;\,2]$ et $B = [1\,;\,2]$, f est une surjection, mais pas une injection.
c. Pour $A = [1\,;\,2]$ et $B = [1\,;\,2]$, f est une bijection.

45 **a.** Pour $A = [0\,;\,+\infty[$ et $B = \mathbb{R}$, g est une injection mais pas une surjection.
b. Pour $A = \mathbb{R}$ et $B = [1\,;\,+\infty[$, g est une surjection mais pas une injection.
c. Pour $A = [0\,;\,+\infty[$ et $B = [1\,;\,+\infty[$, g est une bijection.

46 **a.** Pour $A = [0\,;\,1]$ et $B = [-1\,;\,2]$, h est une injection mais pas une surjection.
b. Pour $A = [-1\,;\,4]$ et $B = [0\,;\,2]$, h est une surjection mais pas une injection.
c. Pour $A = \left[\dfrac{3}{2}\,;\,5\right]$ et $B = [0\,;\,7]$, h est une bijection.

47 **1. a.** Puisque f est strictement décroissante sur $[a\,;b]$, $f([a\,;b]) = [f(b)\,;f(a)] = B$.
b. • $f([a\,;b]) = [f(b)\,;f(a)]$, et pour tout y de $[f(b)\,;f(a)]$, il existe un unique antécédent de y par f, donc f est bijective.
Pour démontrer ceci, on peut raisonner par l'absurde : supposons que y ait deux antécédents distincts x_1 et x_2 par f avec $x_1, x_2 \in [a\,;b]$ et, sans perdre de généralité, $x_1 < x_2$. Dans ce cas, $f(x_1) = f(x_2) = y$, ce qui contredit le fait que f est strictement décroissante sur $[a\,;b]$.
2. On procède de la même façon avec f strictement croissante.

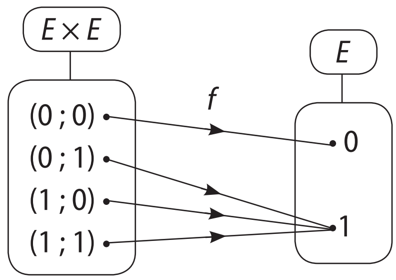
48 • $u(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*$.
• Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on cherche l' ou les antécédent(s) de k par u :

$$k = u(n) \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{n}{2} + 1 \text{ avec } n \text{ pair} \\ k = \dfrac{n+1}{2} \text{ avec } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 2(k-1) \text{ avec } n \text{ pair} \\ n = 2k - 1 \text{ avec } n \text{ impair} \end{cases}$$

donc, à tout k de $\mathbb{N}^*$, on peut associer un unique antécédent n par u.
u est donc injective et surjective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^*$.

49 **1.** On a :



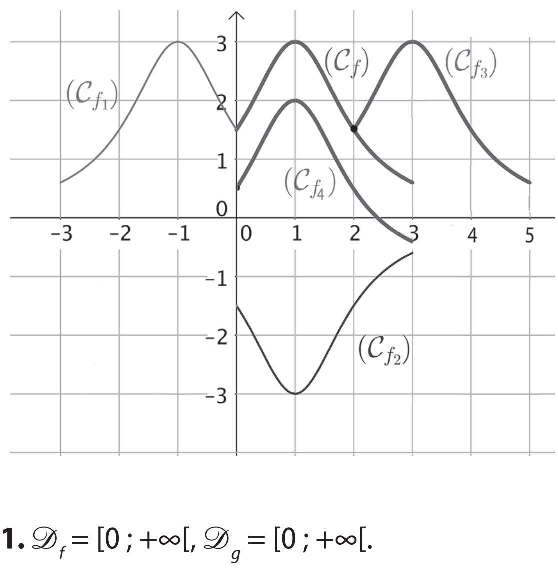
Donc, f est une application de $E \times E$ vers E.
2. f est surjective et non injective.

50 Soit f^{-1} la réciproque de la bijection f.
On a : $f \circ f = f \Longrightarrow (f \circ f) \circ f^{-1} = f \circ f^{-1}$ donc $f = \mathrm{Id}_E$.

Fonctions associées

51 **a.** $\mathcal{D}_{f+g} = \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = -3x + 13$.
b. $\mathcal{D}_{f\times g} = \mathbb{R}$, $(f \times g)(x) = -10x^2 + 5x + 30$.
c. $\mathcal{D}_{f-g} = \mathbb{R}$, $(f-g)(x) = 7x - 7$.
d. $\mathcal{D}_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{2x+3}{-5x+10}$.
e. $\mathcal{D}_{\sqrt{f}} = \left[-\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$, $(\sqrt{f})(x) = \sqrt{2x+3}$.
f. $\mathcal{D}_{\sqrt{g}} =]-\infty\,;\,2]$, $(\sqrt{g})(x) = \sqrt{-5x+10}$.

52



53 **1.** $\mathcal{D}_f = [0\,;\,+\infty[$, $\mathcal{D}_g = [0\,;\,+\infty[$.
2. a. $\mathcal{D}_{f+g} = [0\,;\,+\infty[$,
$(f+g)(x) = 3x + \sqrt{x} - \sqrt{3x} = 3x + (1 - \sqrt{3})\sqrt{x}$.
b. $\mathcal{D}_{f\times g} = [0\,;\,+\infty[$,

$$\begin{aligned}(f \times g)(x) &= (2x + \sqrt{x})(x - \sqrt{3x}) \\ &= 2x^2 - 2x\sqrt{3x} + x\sqrt{x} - x\sqrt{3} \\ &= 2x^2 + x\sqrt{x}(1 - 2\sqrt{3}) - x\sqrt{3}.\end{aligned}$$

c. $\mathscr{D}_{3f+\sqrt{3}g} = [0\,;+\infty[$,

$(f+\sqrt{3}g)(x) = 3(2x+\sqrt{x}) + \sqrt{3}(x-\sqrt{3}x)$
$= 6x + 3\sqrt{x} + x\sqrt{3} - 3\sqrt{x} = 6x + x\sqrt{3}$
$= (6+\sqrt{3})x.$

54 **a.** $\mathscr{D}_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\,;1\right\}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x^2+1}{3x^2-4x+1}$.

b. $\mathscr{D}_{\frac{f}{g}} = \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{(2x-1)\sqrt{2x-1}}$.

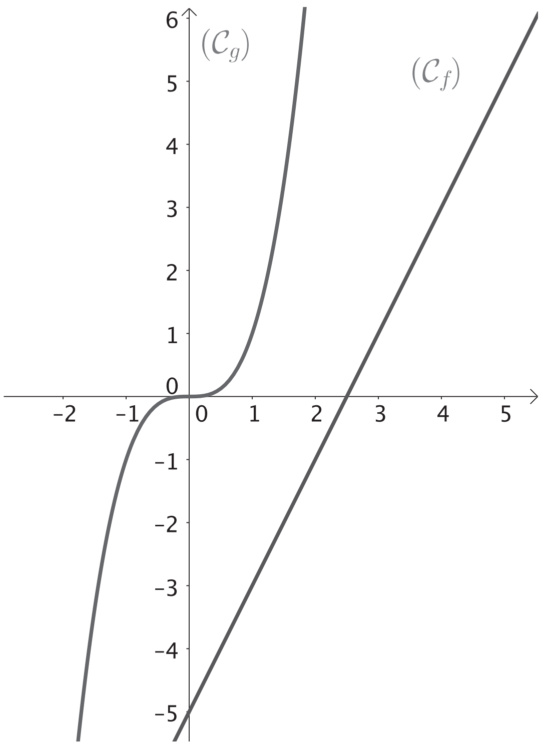
55 **a.** Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$(af+bg)(x) = a(x+1)^3 + b(x-2)^2$
$= ax^3 + (3a+b)x^2 + (3a-4b)x + (a+4b).$

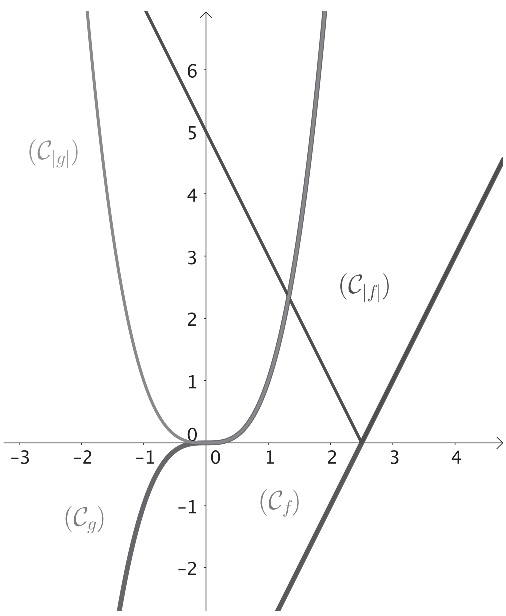
Par identification : $a = 1$ et $b = -3$.

b. $\mathscr{D}_{\frac{af}{bg}} = \mathscr{D}_{\frac{f}{-3g}} = \mathbb{R}\setminus\{2\}$. $\left(\frac{f}{-3g}\right)(x) = \frac{(x+1)^3}{-3(x-2)^2}$.

56 **a.**

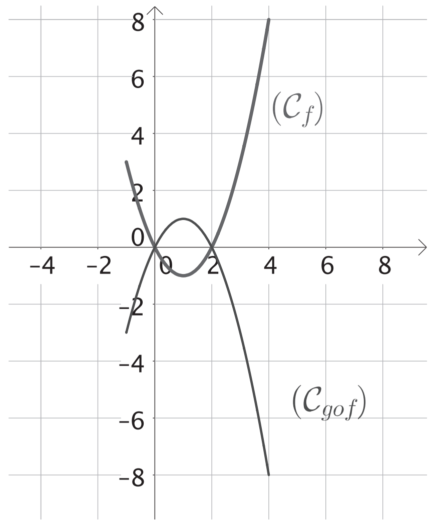


b.



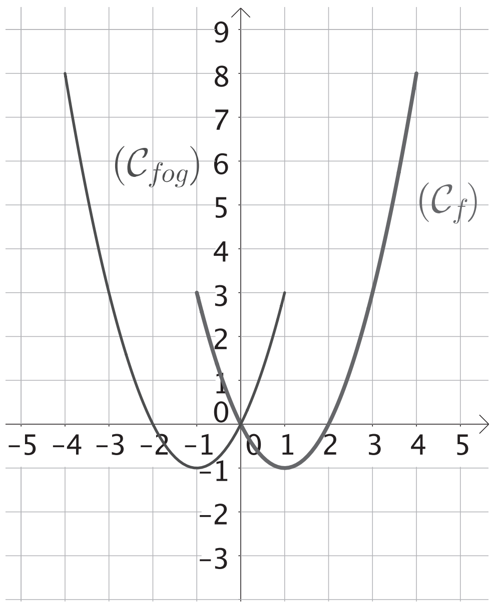
57 **1. a.** $g \circ f(x) = -f(x)$.

b.



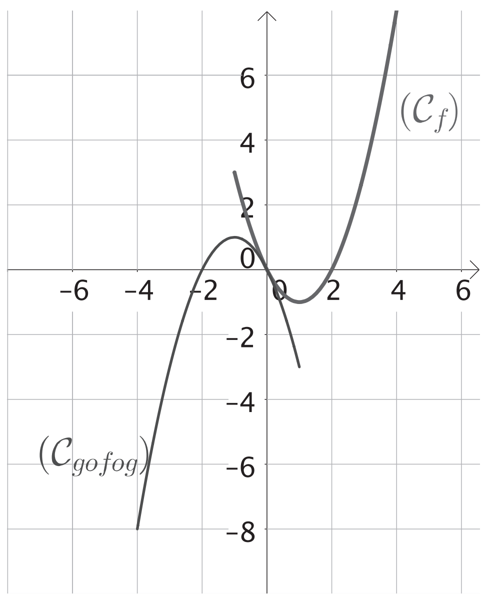
2. a. $f \circ g(x) = f(-x)$.

b.



3. a. $g \circ f \circ g(x) = -f(-x)$.

b.



58 **a.**

x	-5		-2		-1		3
$g(x)$	8	↘	-3	↗	4	↘	0

b.

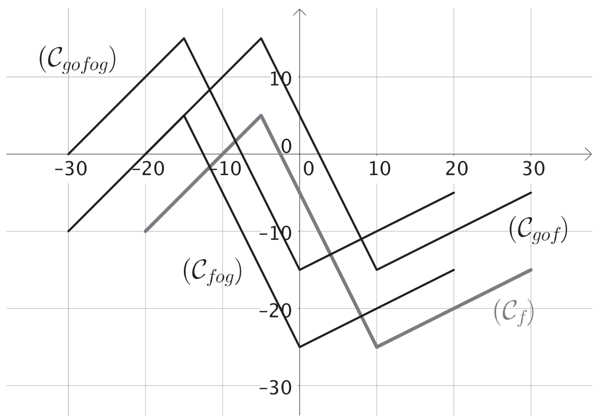
x	-3		1		2		5
$h(x)$	0	↘	-4	↗	3	↘	-8

c.

x	-5		1		2		5
$h(x)$	-8	↗	3	↘	-4	↗	0

59 **a.** $g \circ f(x) = f(x) + c$;
$f \circ g(x) = f(x + c)$; $g \circ f \circ g(x) = f(x + c) + c$.

b.



60 **a.**

x	-1		1		4		5
$g(x)$	1	↘	-1	↗	2	↘	-3

b.

x	-2		0		3		4
$h(x)$	3	↘	1	↗	4	↘	-1

c.

x	1		3		6		7
$i(x)$	5	↘	3	↗	6	↘	1

Se tester

61 **1.** Vrai ; **2.** Faux ; **3.** Vrai ; **4.** Faux ; **5.** Vrai ; **6.** Faux.

62 **1.** Vrai. En effet, pour tout x de $\mathbb{R}$, $h(x) = x^2 \geqslant 0$.

2. Faux. En effet, $-5 \leqslant h(x) \leqslant 4 \Leftrightarrow -5 \leqslant x^2 \leqslant 4$
$\Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2$.

3. Faux. En effet, pour $-1 \in \mathbb{R}$ n'admet aucun antécédent par h, donc h n'est pas une surjection, donc n'est pas une bijection de $[0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

4. Faux. En effet $\mathcal{D}_{\frac{h}{g}} = \mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_g \setminus \{x \in \mathcal{D}_g / g(x) = 0\}$
donc $\mathcal{D}_{\frac{h}{g}} = [0 + \infty[\setminus \{3\}$.

5. Vrai. En effet, $f \circ h \circ g(x) = (x - 3)^2 + 2$.

63 **1.** a ; **2.** b ; **3.** b ; **4.** b.

64 **1. b.** En effet, u n'est pas injective car, par exemple au chiffre des unités 2, correspond une infinité de nombres entiers naturels (2 ; 12 ; 22 ; ...).
2 a donc plus d'un antécédent par u.
u est surjective car à tout chiffre des unités correspondent au moins (et même une infinité) de nombres entiers naturels ayant ce chiffre pour unité.

2. b. En effet, $-1 \leqslant x < 8 \Leftrightarrow 0 \leqslant x + 1 < 9$
$\Leftrightarrow 0 \leqslant \sqrt{x+1} < 3 \Leftrightarrow 2 \leqslant 2 + \sqrt{x+1} < 5$
$\Leftrightarrow 2 \leqslant f(x) < 5 \Leftrightarrow f(x) \in [2\,;5[$.

3. c. En effet, si on pose $g : x \longmapsto \sqrt{x}$,
alors $f(x) = g(x - (-1)) + 2$.

4. b. • En effet, pour tout x de $[-1\,;+\infty[$,
$h \circ i \circ g(x) = h \circ i(x + 1) = h(\sqrt{x+1}) = \sqrt{x+1} + 2$.

Exercices d'approfondissement

65 À l'aide de fonctions usuelles

Il existe plusieurs réponses possibles

a. $f = u \circ v \circ w$ avec

$u : x \longmapsto 5x + 7$; $v : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$; $w : x \longmapsto x^2$.

b. $f = u \circ v \circ w$ avec

$u : x \longmapsto 3x - 5$; $v : x \longmapsto x^2$; $w : x \longmapsto x + 1$.

c. $f = u \circ v \circ w$ avec

$u : x \longmapsto x - 10$; $v : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$; $w : x \longmapsto x + 4$.

d. $f = u \circ v \circ w$ avec

$u : x \longmapsto 7x + 3$; $v : x \longmapsto \sqrt{x}$; $w : x \longmapsto x - 2$.

66 Retrouver une expression

a. $f(x) = 2x + 1$.

b. $h(x) = 5\sqrt{x} - 2$.

c. $\mathscr{D}h \circ f = \left[-\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$.

Pour tout x de $\mathscr{D}h \circ f$, $h \circ f(x) = 5\sqrt{2x+1} - 2$.

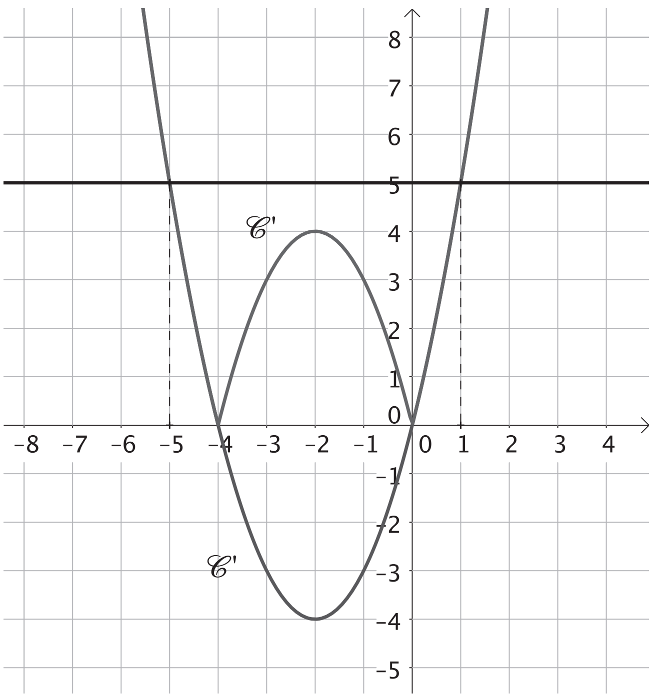
67 Résolution graphique

1. a. Pour tout x de $\mathbb{R}$,
$a(x - b)^2 + c = ax^2 - 2abx + ab^2 + c$,
par identification avec $f(x) = x^2 + 4x$,

on trouve $\begin{cases} a = 1 \\ -2ab = 4 \\ ab^2 + c = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2. \\ c = -4 \end{cases}$

b. $(\mathscr{C}_f)$ est obtenue par translation de la courbe de la fonction carré, par le vecteur $\vec{u}(-2 ; -4)$.

c. et **2. a.**



b. Graphiquement,

• $g(x) = 5$ lorsque $x = -5$ ou $x = 1$

• $g(x) > 5$ lorsque $x \in]-\infty ; -5[\cup]1 ; +\infty[$.

c. $g(x) = 5 \Leftrightarrow |(x + 2)^2 - 4| = 5$

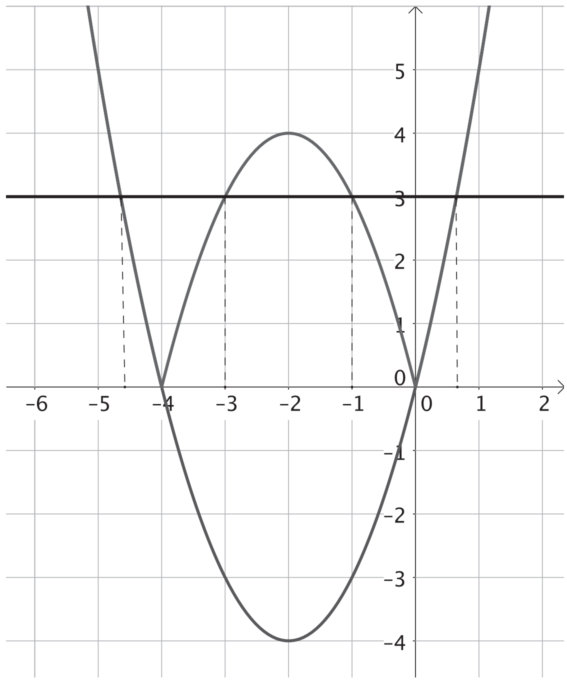
$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2)^2 - 4 = 5 \text{ pour } (x + 2)^2 - 4 \geqslant 0 \\ -(x + 2)^2 + 4 = 5 \text{ pour } (x + 2)^2 - 4 \leqslant 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2)^2 = 9 \text{ pour } (x + 2)^2 \geqslant 4 \\ (x + 2)^2 = -1 \text{ pour } (x + 2)^2 \leqslant 4 \quad \text{(impossible)} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x + 2 = 3$ ou $x + 2 = -3$ avec $x \in [-\infty ; -4] \cup [0 ; +\infty[$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -5$ avec $x \in]-\infty ; -4] \cup [0 ; +\infty[$.

3. Résolution graphique



Par le calcul, on trouve que :

a. $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = -2 - \sqrt{5}$ ou $x = -2 + \sqrt{5}$.

b. $g(x) = 1 \Leftrightarrow x = -2 - \sqrt{5}$ ou $x = -2 + \sqrt{5}$
ou $x = -3$ ou $x = -1$.

68 Composées

a. Soit $x \in \mathbb{R} - \{0 ; 1\}$,

f_1 est une bijection et $f_1^{-1} = f_1$;

f_2 est une bijection et $f_2^{-1} = f_2$;

f_3 est une bijection et $f_3^{-1} = f_3$;

f_4 est une bijection et $f_4^{-1} = f_4$;

f_5 est une bijection et $f_5^{-1} = f_6$;

f_6 est une bijection et $f_6^{-1} = f_5$.

b.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_5	f_6	f_3	f_4
f_3	f_3	f_6	f_1	f_5	f_4	f_2
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_4	f_2	f_3	f_6	f_1
f_6	f_6	f_3	f_4	f_2	f_1	f_5

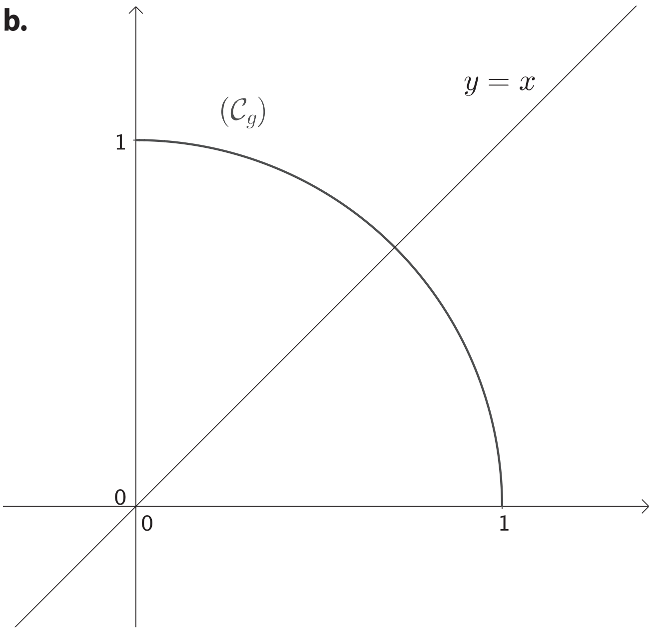
69 Involution

1. • Soient a, b dans A, si $f(a) = f(b)$, alors $f(f(a)) = f(f(b))$ et donc $a = b$.
Donc f est injective.

• Soit $y \in A$, si $f(x) = y$ alors $f(f(x)) = f(y)$ donc $x = f(y)$.
Donc il existe un antécédent (ici x) à tout nombre y de A. Donc f est surjective.
Ainsi, f est bijective et $f^{-1} = f$.

2. a. Pour tout x de $[0\,;1]$,
$g \circ g(x) = \sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2} = \sqrt{1-(1-x^2)} = \sqrt{x^2} = x$.
Donc g est involution de $[0\,;1]$ dans $[0\,;1]$.

b.



c. Pour tout point $M(x\,;y)$ du plan, son image par la symétrie orthogonale d'axe (Δ) d'équation $y = x$, est le point $M'(y\,;x)$.

Or, $M(x\,;y) \in (\mathscr{C}_g) \Leftrightarrow y = g(x)$
$\Leftrightarrow y = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2$
$\Leftrightarrow x^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{1-y^2}$

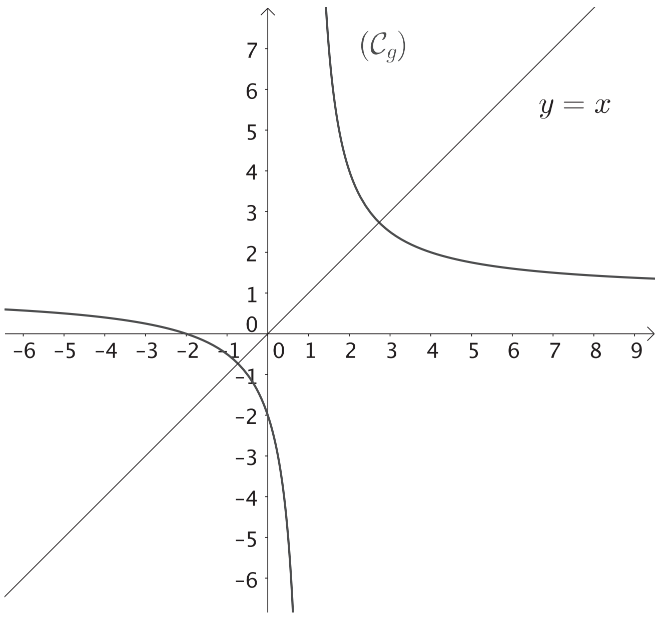
donc le point $M'(y\,;x) \in (\mathscr{C}_g)$.
Ainsi $(\mathscr{C}_g)$ est symétrique par rapport à (Δ).

3. a. Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$g \circ g(x) = \frac{\dfrac{x+2}{x-1}+2}{\dfrac{x+2}{x-1}-1} = \frac{x+2+2(x-1)}{x+2-(x-1)} = \frac{3x}{3} = x.$$

Donc g est une involution de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b.



c. $M(x\,;y) \in (\mathscr{C}_g)$
$\Leftrightarrow y(x-1) = x + 2 \Leftrightarrow xy - y = x + 2$
$\Leftrightarrow xy - x = y + 2 \Leftrightarrow x(y-1) = y + 2$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow M'(y\,;x) \in (\mathscr{C}_g)$.
Ainsi, $(\mathscr{C}_g)$ est symétrique par rapport à (Δ).

70 Opérations sur les fonctions

• Expression des fonctions $f + g$, $f \times g$ et $-2f + 3g$:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f(x)$	x^2	0	x^2	4	$-2x$
$g(x)$	$x^2 + 2x$	0	$2x$	4	$2x$
$(f+g)(x)$	$2x^2 + 2x$	0	$x^2 + 2x$	8	0
$(f \times g)(x)$	$x^4 + 2x^3$	0	$2x^3$	16	$-4x^2$
$(-2f + 3g)(x)$	$x^2 + 6x$	0	$-2x^2 + 6x$	4	$10x$

• Expression de la fonction $f \circ g$:

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{3}$		0		$1+\sqrt{3}$	$+\infty$
$g(x)$	$x^2 + 2x$	2	$x^2 + 2x$	0	$2x$	2	$-2x$
$g(x) - 2$	+	0	−	-2	−	0	+
$(f(g))(x)$	$-2g(x)$	4	$(g(x))^2$	0	$(g(x))^2$	4	$-2g(x)$
$f \circ g(x)$	$-2x^2 - 4x$	0	$x^4 + 4x^3 + 4x^2$	0	$4x^2$	4	$4x$

Problèmes

71 Un résultat surprenant

1. f est une application, donc chancun des n éléments de E a exactement une image dans F par f.

a. Si f est injective, alors les n images dans F par f sont distinctes deux à deux, donc $n \leqslant p$.

b. Si f est surjective, alors chacun des p éléments de f est l'image d'au moins un élément de E, donc $n \geqslant p$.

c. Si f est bijective, alors f est à la fois injective et surjective, donc $n \leqslant p$ et $n \geqslant p \Longrightarrow n = p$.

d. Si f est injective et $n = p$, alors les n images deux à deux distinctes dans F par f sont les n éléments de F. On en déduit que f est surjective, dont bijective.

e. Si f est surjective et $n = p$, alors chacune des p éléments de F par f a exactement un antécédent dans E par f ; donc f est injective. On en déduit que *f est* bijective.

2. a. Soient a, b dans $\mathbb{N}$,

$p(a) = p(b) \Longleftrightarrow 2a = 2b \Longleftrightarrow a = b$ donc p est une bijection de $\mathbb{N}$ sur l'ensemble $\mathscr{P}$ des nombres entiers naturels pairs.

b. Puisqu'à chaque élément de $\mathbb{N}$ correspond un unique élément de $\mathscr{P}$ et réciproquement, ces deux ensembles contiennent le même nombre d'éléments.

72 Fonction réciproque

1. Pour tout point $M(x\,;y)$, le point $M'(y\,;x)$ est le symétrique de M par rapport à (Δ).

2. a. • $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

$x \longmapsto 2x - 5$

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, de plus, soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = 2x - 5$ c'est-à-dire $x = \dfrac{y+5}{2}$, ainsi, tout y de $\mathbb{R}$ admet un unique antécédent par f.

f est donc bijective et $f^{-1} :\ \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

$x \longmapsto f^{-1}(x) = \dfrac{y+5}{2}$.

• $g : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}^+$

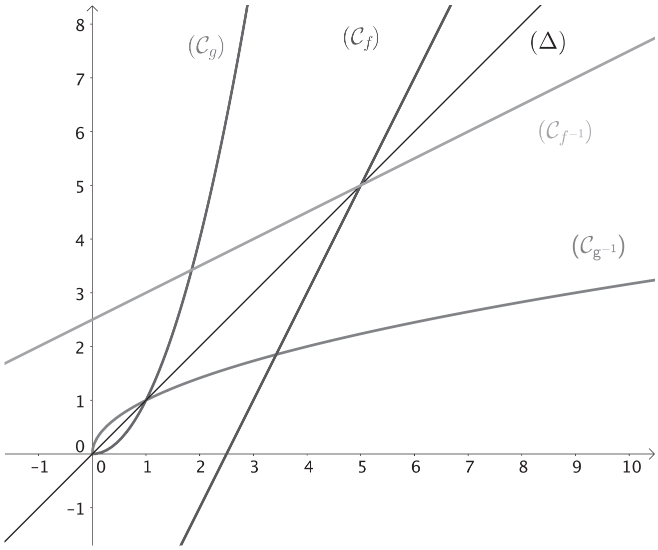
$x \longmapsto x^2$

$g(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$, de plus, soit $y \in \mathbb{R}^+$ tel que $y = x^2$, c'est-à-dire $x = \sqrt{y}$ ($x \in \mathbb{R}^+$), ainsi, tout y de $\mathbb{R}^+$ admet un unique antécédent par g.

g est donc bijective et $g^{-1} : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}^+$

$x \longmapsto g^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

b.



On constate que $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ sont symétrique par rapport à (Δ), tout comme $(\mathscr{C}_g)$ et $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$.

• $M(x\,;y) \in (\mathscr{C}_f) \Longleftrightarrow y = f(x) \Longleftrightarrow y = 2x - 5$

$\Longleftrightarrow x = \dfrac{y+5}{2} \Longleftrightarrow M(f^{-1}(y)\,;y) \in (\mathscr{C}_f)$

$\Longleftrightarrow M'(y\,;f^{-1}(y)) \in (\mathscr{C}_{f^{-1}})$

où M' est le symétrique de M par rapport à (Δ).

• $M(x\,;y) \in (\mathscr{C}_g) \Longleftrightarrow y = g(x) \Longleftrightarrow y = x^2$

$\Longleftrightarrow x = \sqrt{y} \Longleftrightarrow M(f^{-1}(y)\,;y) \in (\mathscr{C}_g)$

$\Longleftrightarrow M'(y\,;f^{-1}(y)) \in (\mathscr{C}_{g^{-1}})$

où M' est le symétrique de M par rapport à (Δ).

3. a. • $\dfrac{1}{5} \leqslant x < 5 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{x} \leqslant 5$

$\Longleftrightarrow \dfrac{-2}{5} < \dfrac{2}{x} \leqslant 10 \Longleftrightarrow -\dfrac{3}{5} < \dfrac{2}{x} - 1 \leqslant 9$

$\Longleftrightarrow h(x) \in \left]-\dfrac{3}{5}\,;9\right]$.

Donc $B = \left]-\dfrac{3}{5}\,;9\right]$.

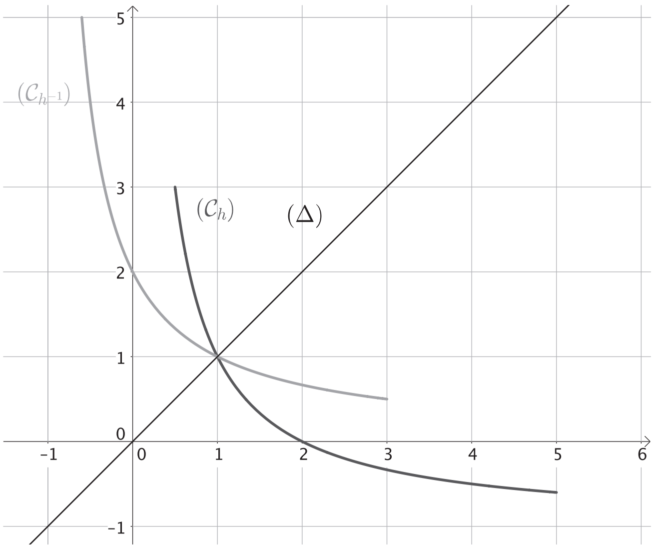
b. • De plus, soit $y \in B$ tel que $y = \dfrac{x}{2} - 1$,

c'est-à-dire $x = \dfrac{2}{y+1}$, ainsi, tout y de B admet un unique antécédent par h. h est donc bijective.

• $h^{-1} : \left]-\dfrac{3}{5}\,;9\right] \longmapsto \left[\dfrac{1}{5}\,;5\right[$

$x \longmapsto h^{-1}(x) = \dfrac{2}{y+1}$

c.



f est une fonction bijective de A vers B, de fonction réciproque f^{-1}.

$M(x\,;y) \in (\mathscr{C}_f) \Leftrightarrow M(f^{-1}(y)\,;y) \in (\mathscr{C}_f)$

$\Leftrightarrow M'(y\,;f^{-1}(y)) \in (\mathscr{C}_{f^{-1}})$ où M' est le symétrique de M par rapport à (Δ).

73 Bijection réciproque

1. $f : E \longmapsto F$

$x \longmapsto y = f(x)$ est bijective

donc $f^{-1} : F \longmapsto E$

$y \longmapsto x = f^{-1}(y)$ est bijective

car $f^{-1}(F) = E$ et tout x de E possède un unique antécédent y par f^{-1}.

2. On suppose que $f \circ g = id_F$ (l'autre cas se traite de façon similaire).

$f \circ g = id_F : F \overset{g}{\longmapsto} E \overset{f}{\longmapsto} F$

$y \longmapsto g(y) \longmapsto f \circ g(y) = f(g(y)) = y.$

Ainsi, $g(y)$ est l'antécédent de y par f, donc $g = f^{-1}$.

3. • r^{-1} est la rotation de centre A et de mesure d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ rad.

• t^{-1} est la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

• S_A^{-1} est la symétrique centrale de centre A : $S_A = S_A^{-1}$.

• $S_{(\Delta)}^{-1}$ est la symétrique orthogonale d'axe (Δ) :

$S_{(\Delta)} = S_{(\Delta)}^{-1}$.

• h^{-1} est l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{1}{k}$.

4. a. $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

b. • $g \circ f$ est une application de E vers G.

Pour tout a, b de E, $g \circ f(a) = g \circ f(b)$

$\Longrightarrow f(a) = f(b)$ (car g est injective)

$\Longrightarrow a = b$ (car f est injective).

Donc $g \circ f$ est injective.

• $f(E) = F$ (car f est surjective)

et $g(F) = G$ (car g est surjective)

donc $g \circ f(E) = g(F) = G$, donc $g \circ f$ est surjective.

• $g \circ f$ est donc bijective de E vers G.

• On vérifie (voir question **1.**) que

$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = id_G$.

Ainsi, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

c. • $h_2 \circ h_1$ est l'homothétie de centre O et de rapport $k_1 \times k_2$.

• h_1^{-1} est l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{k_1}$.

• h_2^{-1} est l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{k_2}$.

• $(h_2 \circ h_1)$–1 est l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{k_1 \times k_2}$.

d. • $-1{,}8 < x \leqslant 0 \Leftrightarrow 0{,}2 < x + 2 \leqslant 2$

$\Leftrightarrow 1 \leqslant \dfrac{2}{x+2} < 10 \Leftrightarrow 0 \leqslant f(x) < 9,$

donc $f([-1{,}8\,;0[) = [0\,;9[$.

De plus, tout y de $[0\,;9[$ possède un seul antécédent par f, donc f est bijective.

• $0 \leqslant x < 9 \Leftrightarrow 0 \leqslant \sqrt{x} < 9 \Leftrightarrow 1 \leqslant g(x) < 10,$

donc $g([0\,;9[) = [1\,;10[$.

De plus, tout y de $[1\,;10[$ possède un seul antécédent par g, donc g est bijective.

• $f^{-1} : [0\,;9[\longmapsto [-1{,}8\,;0[$

$x \longmapsto -2 + \dfrac{2}{x+1}.$

• $g^{-1} : [1\,;10[\longmapsto [0\,;9[$

$x \longmapsto \left(\dfrac{x-1}{3}\right)^2.$

• $g \circ f : [-1{,}8\,;0[\longmapsto [1\,;10[$

$x \longmapsto 1 + 3\sqrt{\dfrac{2}{x+2} - 1}.$

• $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : [1\,;10[\longmapsto [-1{,}8\,;0[$

$x \longmapsto -2 + \dfrac{2}{\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2 + 1}.$

10 Limites et continuité

Manuel pages 159 à 174

Activités d'introduction

1 Approche intuitive de la notion de limite en un point

1. a.

x	–0,001	–0,01	–0,1	0,1	0,001	0,999	0,99	1,01	1,001	1,0001
$f(x)$	–1	–1,009	–1,089	–0,891	–0,998	–0,0005	–0,005	–0,0049	–0,00049	–0,000049

b. Lorsque x tend vers 0 (respectivement vers 1), $f(x)$ tend vers –1 (respectivement 0).
On dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 (respectivement vers 1) est égale à –1 (respectivement 0).
On note $\lim\limits_{x\to 0}(x) = -1$ (respectivement $\lim\limits_{x\to 1}(x) = 0$).

2. a. • Lorsque x se rapproche de 2 par valeurs supérieures, $g(x)$ devient un grand nombre positif.
• Lorsque x se rapproche de 2 par valeurs inférieures, $g(x)$ devient un grand nombre négatif.

b. • $g(x) \geqslant A \Leftrightarrow x - 2 \leqslant \frac{1}{A}$ (car $x - 2 > 0$, $A > 0$ et la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$)
$\Leftrightarrow x \leqslant \frac{1}{A} + 2 \Leftrightarrow 0 < x - 2 \leqslant \frac{1}{A}$.
• Pour tout $A > 0$, il existe $\eta > 0$
($\eta = \frac{1}{A}$ tel que $|v - 2| \leqslant \eta \Rightarrow g(x) \geqslant A$).
Ainsi, dès que x est suffisamment proche de 2 (supérieur à 2), $g(x) \in [A\,;+\infty[$.
Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} g(x) = +\infty$.

2 Approche intuitive de la notion de limite à l'infini

1. c. Lorsque x devient de plus en plus grand, $g(x)$ se rapproche de 1.

2. a. $\left.\begin{matrix} h(x) \geqslant A \\ x \geqslant 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 \geqslant A \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geqslant A + 3 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow x \geqslant \sqrt{A+3}$ (car $A + 3 > 0$).

b. • Pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$ ($B = \sqrt{A+3}$) tel que :
($x \geqslant B \Rightarrow h(x) \geqslant A$).
• Ainsi dès que x est suffisamment grand, $h(x) \in [A\,;+\infty[$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

3 Limites et représentations graphiques

1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
c. $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ **d.** $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = +\infty$
e. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ **f.** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$
g. $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$ **i.** $\lim\limits_{x\to-\infty} i(x) = -\infty$.

2. a. • $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$

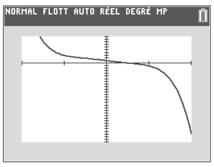
On ne peut pas donner $\lim\limits_{x\to+\infty}(f+g)(x)$ car « $+\infty - \infty$ » est une forme indéterminée.

• $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty \end{cases}$
donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}(f \times h)(x) = +\infty$.

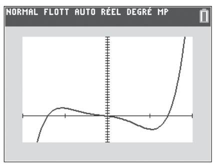
• $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty \end{cases}$
On ne peut pas donner $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f}{h}(x)$ car « $\frac{\infty}{\infty}$ »est une forme indéterminée.

• $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} i(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$
On ne peut pas donner $\lim\limits_{x\to-\infty}(i+g)(x)$ car «$-\infty+\infty$ » est une forme indéterminée.

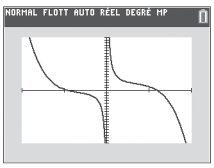
b.



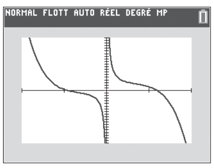
$\lim\limits_{x\to+\infty}(f+g)(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x\to+\infty}(f \times g)(x) = +\infty$



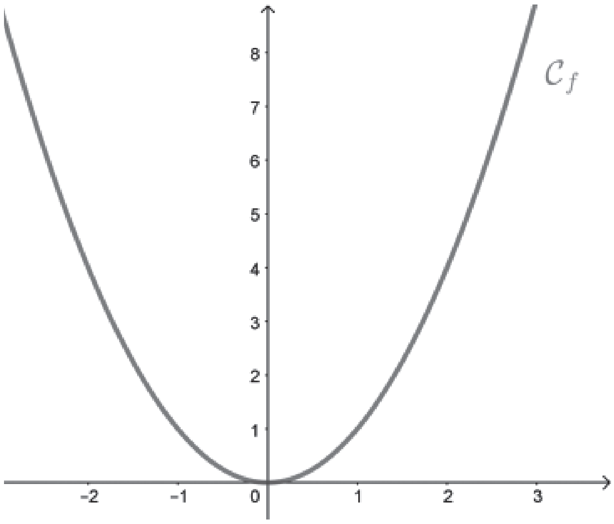
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f}{h}\right)(x) = -\infty$



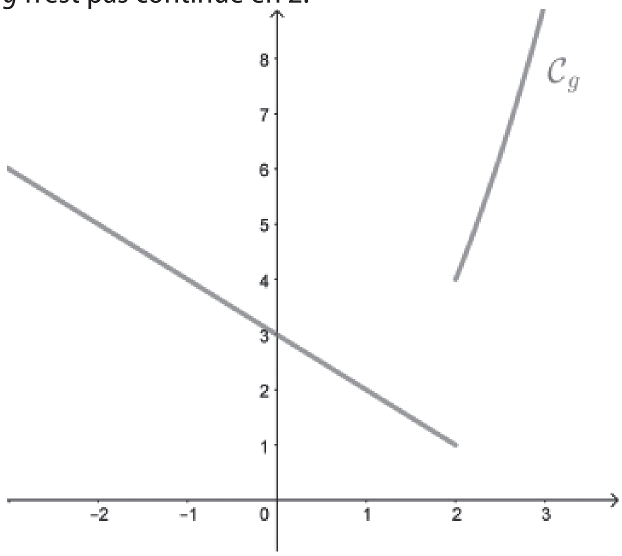
$\lim\limits_{x\to+\infty}(i+g)(x) = -\infty$

4 Notion de continuité

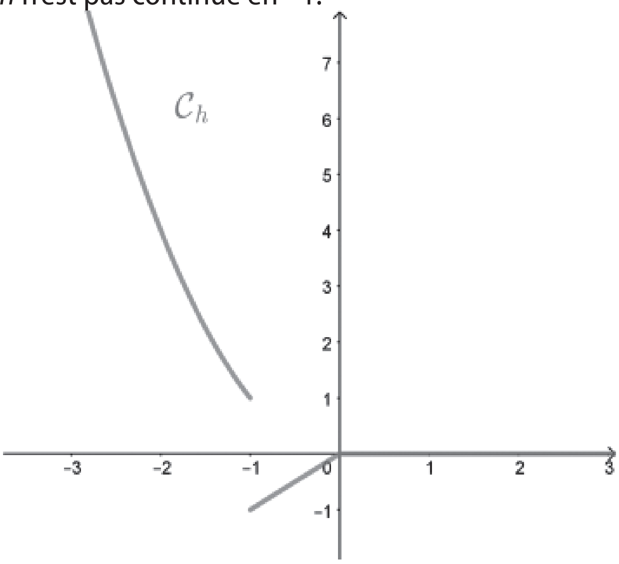
1. a. • f est continue sur $\mathbb{R}$.



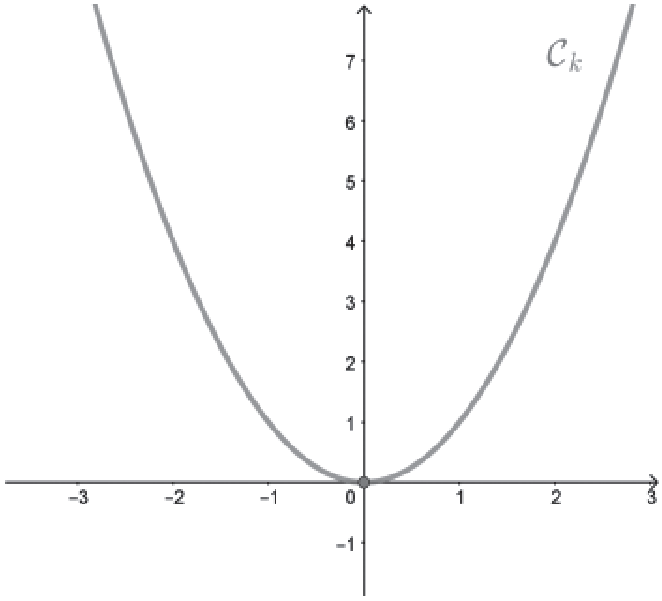
• g n'est pas continue en 2.



• h n'est pas continue en -1.



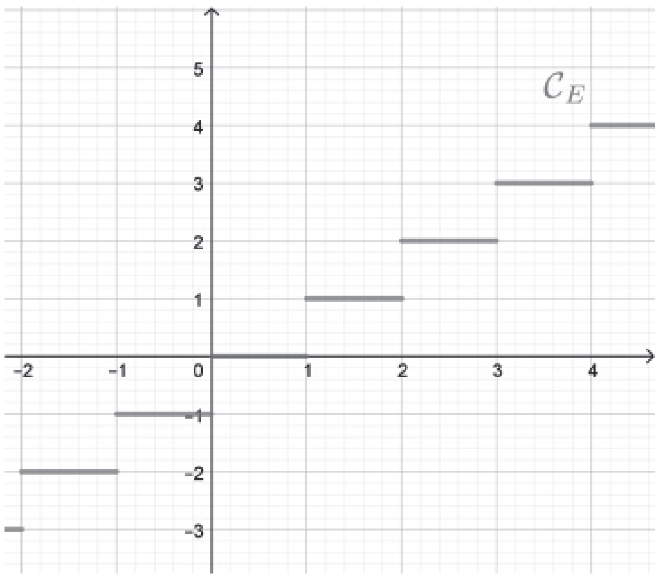
• k est continue sur $\mathbb{R}$.



b. • f est continue sur $\mathbb{R}$.
• g et h ne sont pas continues sur $\mathbb{R}$.
• k est continue sur $\mathbb{R}$.

2. a. $E(0) = 0$; $E(-1,5) = -2$; $E(1) = 1$ et $E(\sqrt{3}) = 1$.

b.



c. n désigne un nombre entier relatif.

• $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x > n}} E(x) = E(n)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x < n}} E(x) = n - 1$.

• Comme $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x < n}} E(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to n \\ x > n}} E(x)$, on ne peut définir $\lim\limits_{x \to n} E(x)$, et E n'est pas continue en n.

Savoir-faire

3 Soit $A > 0$.

$$f(x) \in]A\,;+\infty[\Leftrightarrow f(x) > A \Leftrightarrow \frac{3}{x^2-4} > A$$
$$\Leftrightarrow 3 > A(x^2-4),\ \text{car } x > 4$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{A} + 4 > x^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{3}{A}+4} > x$$

Ainsi, dès que x est suffisamment proche de 4 (supérieur à 4) $f(x) \in]A\,;+\infty[$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} f(x) = +\infty$.

4 Soit $A < 0$.

$$f(x) \in]-\infty\,;A[\Leftrightarrow f(x) < A \Leftrightarrow \frac{7}{x+2} < A$$
$$\Leftrightarrow 7 > A(x+2) \text{ car } x < -2$$
$$\Leftrightarrow \frac{7}{A} < x+2 \text{ car } A < 0.$$
$$\Leftrightarrow \frac{7}{A} - 2 < x$$

Ainsi, dès que x est suffisamment proche de -2 (inférieur à -2), $f(x) \in]-\infty\,;A[$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x) = -\infty$.

8 **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^2+1 = \lim\limits_{x\to-\infty} -4x^2[1+\frac{1}{-4x^2}] = -\infty$.

Donc par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

b. Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$f(x) = \frac{x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 1$, donc par produit :

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$.

• Puis, par passage à l'inverse : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

9 **a.** $\lim\limits_{x\to 0} 3 = 3$ et $\lim\limits_{x\to 0} 1+\sqrt{x} = 1$ donc par passage du quotient $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$.

b. Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x) = \dfrac{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}$

$$f(x) = \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x^2} = 2$ donc, par quotient, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

13 • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leqslant 1$, puis $|2\sin(x)| \leqslant 2$.

• Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $|f(x)| \leqslant \frac{2}{|x|}$.

• Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{|x|} = 0$, le théorème des gendarmes montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

14 **a.** $f(0) = 0 + \sin(0) = 0$

b. • f est continue en 0, si et seulement si :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = f(0)$. Or :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (1-\cos x) = 1-\cos 0 = 1-1 = 0 = f(0)$.

Par conséquent, f est continue en 0.

• De plus, f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

15 • $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x-1 = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} 2x-1 = 2-1 = 1$

donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x) = +\infty \notin \mathbb{R}$

Donc g n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercices d'entraînement

Limite en un point

16 **a.** 1 ; **b.** 3 ; **c.** $-\pi$; **d.** 1.

17 • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = +\infty$;

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$;

• $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = +\infty$; • $\lim\limits_{x\to 0} i(x) = -3$.

18 **a.** $(f(x) \geqslant 100 \text{ et } x > 1) \Leftrightarrow \left(\frac{5}{x-1} \geqslant 100 \text{ et } x > 1\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x-1} \geqslant 20 \text{ et } x > 1\right) \Leftrightarrow \left(x-1 \leqslant \frac{1}{20} \text{ et } x > 1\right)$$
$$\Leftrightarrow 1 < x \leqslant 1 + \frac{1}{20}.$$

Sur l'intervalle $]1\,;\infty[$, l'inéquation $f(x) \geqslant 100$ admet pour solutions $\left]1\,;1+\frac{1}{20}\right]$.

b. $(f(x) \geqslant A \text{ et } x > 1) \Leftrightarrow \left(\frac{5}{x-1} \geqslant A \text{ et } x > 1\right)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x-1} \geqslant \frac{A}{5} \text{ et } x > 1\right) \Leftrightarrow \left(x - 1 \leqslant \frac{5}{A} \text{ et } x > 1\right)$

$\Leftrightarrow 1 < x \leqslant 1 + \frac{5}{A}$.

Sur l'intervalle $]1\ ;+\infty[$, l'inéquation $f(x) \geqslant A$ admet pour solutions $\left]1\ ; 1 + \frac{5}{A}\right]$.

c. Pour tout $A > 0$, il existe $\eta > 0$ $\left(\eta = \frac{5}{A}\right)$ tel que $\forall\, x \in\ ]1\ ; 1 + \eta]$, $f(x) \geqslant A$.

Par conséquent, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$.

19 **a.** $\lim\limits_{x\to 3} (x-3)^2 = 0^+$

donc par passage au quotient, $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2}{(x-3)^2} = +\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to 1} |x-1| = 0^+$

donc par passage au quotient, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{5}{|x-1|} = +\infty$.

c. • Pour tout x de $\mathbb{R}$, $|\cos(x)| \leqslant 1$ donc $|x\cos(x)| \leqslant |x|$.

• Par le théorème de gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0} x\cos(x) = 0$.

d. • $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt{x} = \sqrt{5}$ et $\lim\limits_{x>5} (x-5) = 0$, donc par quotient,

$\lim\limits_{x\to 5} \frac{x-5}{\sqrt{x}} = 0$.

20 $\lim\limits_{x\to 1} x + 3 = 4$ et $\lim\limits_{x\to 1} x - 1 = 0$, donc par quotient,

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+3}{x-1} = \infty$.

21 **a.** $\lim\limits_{x\to 2} (x+3) = 5$ et $\lim\limits_{x\to -3} (x-2) = -5$.

b. On remarque que

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (x-2) = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-2) = 0^+$.

c. On remarque que

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x<-3}} (x+3) = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x>-3}} (x+3) = 0^+$.

d.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	

e. • $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (x-2)(x+3) = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-2)(x+3) = 0^+$.

Ainsi, par passage à l'inverse :

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x<-3}} (x-2)(x+3) = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x>-3}} (x-2)(x+3) = 0^-$.

Ainsi, par passage à l'inverse :

$\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x<-3}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x>-3}} f(x) = -\infty$.

22 **a.** $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} x^2 + 1 = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} x^2 + 1 = 2$,

donc $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \frac{3}{2}$.

b. • $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} x - 2 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} x + 2 = 4$, donc par quotient

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = -\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x - 2 = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x + 2 = 4$, donc par quotient

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = +\infty$.

c. • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{2x+1}{x+4} = \frac{1}{4}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x = 0^-$, donc par quotient

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2x+1}{x+4} = \frac{1}{4}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0^+$, donc par quotient

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

d. • $\lim\limits_{\substack{x\to 0,5\\ x<0,5}} x^2 = 0{,}25$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0,5\\ x<0,5}} x - 0{,}5 = 0^-$, donc par quotient

$\lim\limits_{\substack{x\to 0,5\\ x<0,5}} f(x) = -\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0,5\\ x>0,5}} x^2 = 0{,}25$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0,5\\ x>0,5}} x - 0{,}5 = 0^+$, donc par quotient

$\lim\limits_{\substack{x\to 0,5\\ x>0,5}} f(x) = +\infty$.

23 • $\lim\limits_{\substack{x\to 5/2\\ x<5/2}} 4x^2 - 5 = \frac{4\times 25}{4} - 5 = 20$

et $\lim\limits_{\substack{x\to 5/2\\ x>5/2}} 4x^2 - 5 = \frac{4\times 25}{4} - 5 = 20$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 5/2\\ x<5/2}} 2x - 5 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 5/2\\ x>5/2}} 2x - 5 = 0^+$

• Ainsi, par quotient :

$\lim\limits_{\substack{x\to 5/2\\ x<5/2}} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 5/2\\ x>5/2}} h(x) = +\infty$.

Limite à l'infini

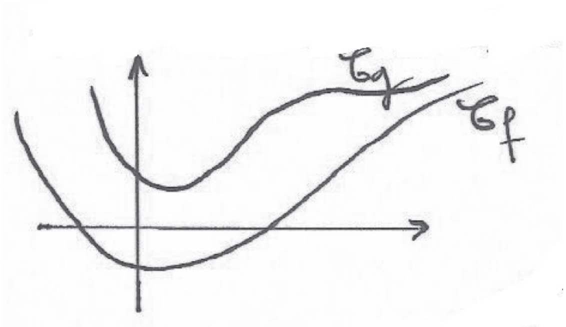
24 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} i(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to -\infty} i(x) = 0$.

25 **a. b.** (À main levée)



c. Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) \geqslant f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

26 ε désigne un réel strictement positif.

a. Si $x > \frac{1}{\varepsilon}$, alors $0 < \frac{1}{x} < \varepsilon$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Ainsi, $1 - \varepsilon < h(x) < 1 + \varepsilon$, ce qui implique que $h(x) \in I$.

b. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ $\left(A = \frac{1}{\varepsilon}\right)$ tel que $\forall x > A$, $h(x) \in]1 - \varepsilon ; 1 + \varepsilon[$.

Par conséquent, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1$.

27 **a.** $f(x) - 1 = \frac{x-1}{x+4} - \frac{x+4}{x+4} = \frac{(x-1)-(x+4)}{x+4} = \frac{-5}{x+4}$.

b. $(|f(x) - 1| < \varepsilon \text{ et } x \geqslant 0)$

$\Leftrightarrow (-\varepsilon < f(x) - 1 < \varepsilon \text{ et } x \geqslant 0)$

$\Leftrightarrow \left(-\varepsilon < \frac{-5}{x+4} < \varepsilon \text{ et } x \geqslant 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\varepsilon}{5} > \frac{-1}{x+4} > -\frac{\varepsilon}{5} \text{ et } x \geqslant 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\varepsilon}{5} > \frac{-1}{x+4} > 0 \text{ et } x \geqslant 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{\varepsilon} < x + 4 \text{ et } x \geqslant 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(x > \frac{5}{\varepsilon} - 4 \text{ et } x \geqslant 0\right)$

c. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B \in \mathbb{R}$ $\left(B = \frac{5}{\varepsilon} - 4\right)$ tel que $\forall x > B$, $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} |f(x) - 1| = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

28 **a.** $\lim_{x\to+\infty} 2x^2 - 3 = +\infty$.

b. $\lim_{x\to-\infty} 4x + 5 = -\infty$.

c. $\lim_{x\to+\infty} (x-1)^2 = +\infty$.

d. $\lim_{x\to-\infty} 7x - 1 = -\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty} |7x - 1| = +\infty$.

e. $\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} 7 + \frac{4}{x} = 7$.

f. $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x^2}$ donc $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} = 0$.

29 $\lim_{x\to-\infty} x - 5 = -\infty$ donc par quotient, $\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x-5} = 0$.

Calcul de limites et comparaisons

30 **a.** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; **b.** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

c. $\lim_{x\to0} f(x) = \cos \pi = -1$;

d. $\lim_{x\to-\infty} \frac{5-4x}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x}{x} = -4$.

31 **a.** On remarque que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Donc par somme, $\lim_{x\to+\infty} (f+g)(x) = -\infty$.

b. On remarque que $\lim_{x\to0} f(x) = 3$ et $\lim_{x\to0} g(x) = +\infty$.

Donc par produit, $\lim_{x\to0} (f \times g)(x) = +\infty$.

c. On remarque que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

Donc on ne peut pas directement calculer $\lim_{x\to-\infty} (f \times g)(x)$: c'est une forme indéterminée.

d. Comme $\lim_{x\to0} f(x) = 3$ et $\lim_{x\to0} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to0} \frac{f}{g}(x) = 0$ par quotient.

32 **a.** Pour tout x de $\mathbb{R}$, $-\cos x \geqslant -1$ et $0 < 2 + \cos x \leqslant 3$.

Ainsi, $x - \cos x \geqslant x - 1$ et $\frac{1}{2 + \cos x} \geqslant \frac{1}{3}$ (passage à l'inverse).

Par conséquent, $f(x) \geqslant \frac{x-1}{3}$ pour tout $x \geqslant 1$.

b. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{3} = +\infty$

c. Comme pour $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant x - \frac{1}{3}$ par comparaison, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

33 **a.** Pour tout x de $\mathbb{R}$, $|g(x)| = \frac{|\sin(3x)|}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{x^2+1}$

car, $\forall a \in \mathbb{R}$, $|\sin(a)| \leqslant a$.

b. • Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$, par comparaison, $\lim_{x\to+\infty} |g(x)| = 0$, soit $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

• Comme $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$, par comparaison, $\lim_{x\to-\infty} |g(x)| = 0$, soit $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

34 • $\lim_{x\to0,} 5x^3 - 1 = -1$ et $\lim_{x\to0,} x + 2 = 2$, donc par quotient $\lim_{x\to0,} \frac{5x^3-1}{x+2} = -\frac{1}{2}$.

• $\lim_{x\to-\infty} x - 2 = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, donc par produit $\lim_{x\to-\infty} (x-2)x^2 = -\infty$.

35 **1. a.** Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$f(x) = 4x^2 \times 1 + 4x^2 \times \frac{1}{4x} + 4x^2 \times \frac{3}{4x^2}$

$= 4x^2\left(1 + \frac{1}{4x} + \frac{3}{4x^2}\right)$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{4x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{4x^2} = 0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{4x} + \frac{3}{4x^2}\right) = 1$

c. Donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{4x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{4x^2} = 0$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{4x} + \frac{3}{4x^2}\right) = 1$, donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

36 **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2 + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x + 2 = +\infty$.

On ne peut donc pas déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: c'est une forme indéterminée.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$f(x) = \frac{x^2\left(5 + \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(3 + \frac{2}{x}\right)} = x\frac{5 + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{2}{x}}.$$

c. • $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 5 + \frac{1}{x^2} = 5$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 + \frac{2}{x} = 3$.

• On obtient alors par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5 + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{2}{x}} = \frac{5}{3}$.

• Comme de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, par produit :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

37 **1. a.** • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, comme $a_n \neq 0$,

$$P(x) = a_nx^n\left[1 + \frac{a_{n-1}x^{n-1}}{a_nx^n} + \ldots + \frac{a_1x}{a_nx^n} + \frac{a_0}{a_nx^n}\right]$$

$$= a_nx^n\left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + \ldots + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_0}{a_nx^n}\right].$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_{n-1}}{a_nx} = \ldots = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_0}{a_nx^n} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + \ldots + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_0}{a_nx^n}\right] = 1$.

• Ainsi, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_nx^n$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a_{n-1}}{a_nx} = \ldots = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a_0}{a_nx^n} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + \ldots + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_0}{a_nx^n}\right] = 1$.

Ainsi, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_nx^n$.

2. a. • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, comme $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_nx^n\left[1 + \frac{a_{n-1}x^{n-1}}{a_nx^n} + \ldots + \frac{a_1x}{a_nx^n} + \frac{a_0}{a_nx^n}\right]}{b_mx^m\left[1 + \frac{b_{m-1}x^{m-1}}{b_mx^m} + \ldots + \frac{b_1x}{b_mx^m} + \frac{b_0}{b_mx^m}\right]}$$

$$= \frac{a_nx^n}{b_mx^m} \times \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + \ldots + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_0}{a_nx^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_mx} + \ldots + \frac{b_1}{b_mx^{m-1}} + \frac{b_0}{b_mx^m}}.$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + \ldots + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_0}{a_nx^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_mx} + \ldots + \frac{b_1}{b_mx^{m-1}} + \frac{b_0}{b_mx^m}} = 1$

donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + \ldots + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_0}{a_nx^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_mx} + \ldots + \frac{b_1}{b_mx^{m-1}} + \frac{b_0}{b_mx^m}} = 1$

donc par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$.

38 **a.** • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$f(x) = -4x^3 + \frac{x}{2} = -4x^3\left(1 + \frac{1}{-8x^2}\right)$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \frac{1}{-8x^2} = 1$, donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} -4x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{-8x^2} = 1$, donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b. • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$f(x) = \frac{7}{2}x^4 + x^2 - x = x^4\left(\frac{7}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{7}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{7}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = \frac{7}{2}$

donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c. • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$f(x) = \frac{-x^2\left(\frac{-4}{x^2} + 1\right)}{2x^3\left(1 + \frac{1}{2x^2}\right)} = -\frac{1}{2x} \times \frac{1 - \frac{-4}{x^2}}{1 + \frac{1}{2x^2}}.$$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{-4}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{-4}{x^2}\right) = 1$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) = 1$.

Donc par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1 - \frac{-4}{x^2}}{1 + \frac{1}{2x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{-4}{x^2}}{1 + \frac{1}{2x^2}} = 1$.

• De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2x} = 0$.

• Ainsi par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

d. Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$: $f(x) = x\left(-1 + \dfrac{5x^2 - \dfrac{1}{x}}{2 - x^3}\right)$

$$= x\left[-1 + \dfrac{5x^3\left(1+\dfrac{1}{5x^4}\right)}{-x^3\left(\dfrac{2}{-x^3}+1\right)}\right] = x\left[-1 - 5\times\dfrac{1+\dfrac{1}{5x^4}}{1+\dfrac{2}{-x^3}}\right].$$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{5x^4}}{1+\dfrac{2}{-x^3}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{5x^4}}{1+\dfrac{2}{-x^3}} = 1$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-1-5\times\dfrac{1+\dfrac{1}{5x^4}}{1+\dfrac{2}{-x^3}}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-1-5\times\dfrac{1+\dfrac{1}{5x^4}}{1+\dfrac{2}{-x^3}}\right]$

$= -1 - 5\times 1 = -6.$

• Ainsi par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\times(-6) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\times(-6) = -\infty$.

39 **a.** • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$f(x) = \dfrac{5x^7\left(1-\dfrac{1}{5x^7}\right)}{x^6\left(1+\dfrac{2}{x^6}\right)} = 5x\times\dfrac{1-\dfrac{1}{5x^7}}{1+\dfrac{2}{x^6}}.$$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{5x^7}}{1+\dfrac{2}{x^6}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x = -\infty$, donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b. Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x) = -3x^5\left(1-\dfrac{7}{3x^5}+\dfrac{1}{3x^4}\right)$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{7}{3x^5}+\dfrac{1}{3x^4}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^5 = -\infty$,

donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

c. • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$f(x) = \dfrac{-x\left(\dfrac{-3}{x}+1\right)}{-x\left(\dfrac{-5}{x}+1\right)} = \dfrac{\dfrac{-3}{x}+1}{\dfrac{-5}{x}+1}.$$

• Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x) = \dfrac{1}{1} = 1$.

d. • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\dfrac{x}{3+x} = \dfrac{x\times 1}{x\times\left(\dfrac{3}{x}+1\right)} = \dfrac{1}{\dfrac{3}{x}+1}$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{3+x} = 1$.

• Comme de plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} -7x^5 = +\infty$, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

40 • Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2+4 \geqslant x^2$.

• Pour tout x de $\mathbb{R}_+$: $\sqrt{x^2+4} \geqslant x$ par croissance de la fonction racine carrée.

Ainsi, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4} = +\infty$

• Pour tout x de $\mathbb{R}_-$: $\sqrt{x^2+4} \geqslant -x$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4} = +\infty$ par comparaison.

41 **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+4) = +\infty$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4} = +\infty$.

• Nous ne pouvons pas déduire directement $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4}$ car c'est une forme indéterminée.

b. Pour tout x de $[0\,;+\infty[$,

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4} = \dfrac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}}$$

$$= \dfrac{(\sqrt{x^2+1})^2-(\sqrt{x^2+4})^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{(x^2+1)-(x^2+4)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}}$$

$$= \dfrac{-3}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}}.$$

c. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4} = +\infty$, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4} = +\infty$.

Puis par quotient,

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}} = 0.$$

42 **a.** Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$\left|\dfrac{5\cos(x)+3x}{2x^2+1}\right| \leqslant \dfrac{5|\cos(x)|+3|x|}{|2x^2+1|} \leqslant \dfrac{5+3|x|}{2x^2+1}$ (car $\forall\, a\in\mathbb{R}$, $|\cos(a)| \leqslant 1$).

b. Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5+3|x|}{2x^2+1}$.

• Pour tout x de $]0\,;+\infty[$:

$$\dfrac{5+3|x|}{2x^2+1} = \dfrac{5+3x}{2x^2+1} = \dfrac{3x\left(\dfrac{5}{3x}+1\right)}{2x^2\left(1+\dfrac{1}{2x^2}\right)} = \dfrac{3}{2x}\times\dfrac{1+\dfrac{5}{3x}}{1+\dfrac{1}{2x^2}}.$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{5}{3x}}{1+\dfrac{1}{2x^2}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{2x} = 0$, donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5+3|x|}{2x^2+1} = 0$.

Calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5+3|x|}{2x^2+1}$.

• Pour tout x de $]-\infty\,;0[$:

$$\dfrac{5+3|x|}{2x^2+1} = \dfrac{5-3x}{2x^2+1} = \dfrac{-3x\left(\dfrac{5}{-3x}+1\right)}{2x^2\left(1+\dfrac{1}{2x^2}\right)} = -\dfrac{3}{2x}\times\dfrac{1-\dfrac{5}{3x}}{1+\dfrac{1}{2x^2}}.$$

• $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1-\dfrac{5}{3x}}{1+\dfrac{1}{2x^2}} = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} -\dfrac{3}{2x} = 0$,

donc par produit $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{5+3|x|}{2x^2+1} = 0$.

c. $\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \dfrac{5+3|x|}{2x^2+1} = 0$

Or pour tout x de $\mathbb{R}$, $0 \leqslant \left|\dfrac{5\cos(x)+3x}{2x^2+1}\right| \leqslant \dfrac{5+3|x|}{2x^2+1}$.

Le théorème des gendarmes assure donc que

$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left|\dfrac{5\cos(x)+3x}{2x^2+1}\right| = 0$, soit $\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \dfrac{5\cos(x)+3x}{2x^2+1} = 0$.

43 On remarque que $\lim_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$,

donc $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$.

De plus, si $a \neq 0$, alors

$\lim_{x\to+\infty} (ax+b) = \lim_{x\to+\infty} ax\left(1+\dfrac{b}{ax}\right) = \lim_{x\to+\infty} ax = \text{signe }(a)\times\infty$.

Ainsi, pour que $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq \infty$ il faut que $a = 0$.

Puis, $\lim_{x\to+\infty} (x) = \lim_{x\to+\infty} \left(b+\dfrac{1}{x-1}\right) = b$.

Donc $b = 3$.

44 • $g(0) = -1 \Leftrightarrow b = -1$.

• De plus, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$\dfrac{cx^2}{x^2+2} = \dfrac{x^2\times c}{x^2\times\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)} = \dfrac{c}{1+\dfrac{2}{x^2}}$.

Ainsi, pour tout c de $\mathbb{R}$,

$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{cx^2}{x^2+2} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{c}{1+\dfrac{2}{x^2}} = c$.

• En outre, si $a \neq 0$,

alors $\lim_{x\to-\infty} (ax-1) = \lim_{x\to-\infty} ax\left(1-\dfrac{1}{ax}\right) = \text{signe }(a)\times(-\infty)$.

Donc $\lim_{x\to-\infty} (ax-1) \neq \infty$ si et seulement si $a = 0$.

• Par conséquent, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$g(x) = -1 + \dfrac{cx^2}{x^2+2}$ et $-1+c = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$, donc $c = 2$.

Continuité

45 **1. a.** f est continue sur I.

b. f n'est pas continue sur I.

2. a. f n'est pas continue sur I.

b. f est continue sur I.

3. a. f est continue sur I.

b. f est continue sur I.

46 • $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} (2x-3) = 2\times0-3 = -3$.

• $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} (-3) = -3$.

• Ainsi, comme $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -3 = f(0)$, f est continue en 0.

• De plus, f est continue en tout point x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

47 • $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} g(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} x^2 = 1^2 = 1$

et $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} g(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} (2-x) = 2-1 = 1$

donc $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} g(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} g(x) = 1 = g(1)$

donc g est continue en 1.

• $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} (2-x) = 2-0 = 0 = g(0)$

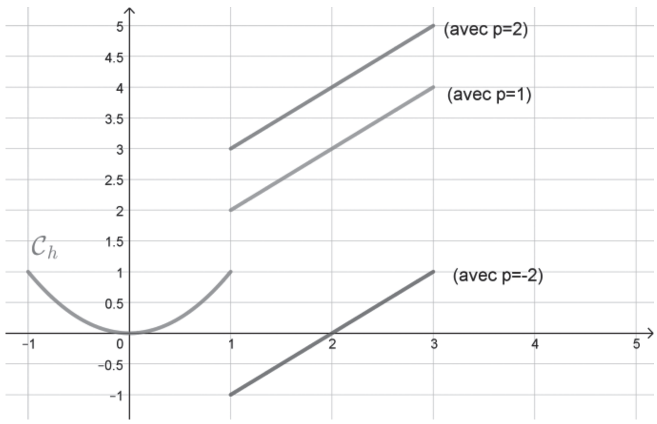
et $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Comme $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} g(x) \neq g(0)$, g n'est pas continue en 0.

• g n'étant pas continue en 0, g n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

• g est une fonction polynôme sur $[1\,;+\infty[$, donc continue sur $[1\,;+\infty[$.

48 **a.**



Pour ces trois valeurs de p, h n'est pas continue en 1.

b. $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} h(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} x^2 = 1^2 = 1$

et $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} h(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} (x+p) = 1+p = h(1)$.

Donc h est continue en 1 si et seulement si :

$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} h(x) = h(1) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} h(x)$

c'est-à-dire si $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} h(x) = h(1)$ soit si $1 = 1+p$

c'est-à-dire si et seulement si $p = 0$.

49 **a.** Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$|f(x)| = \left|x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant x^2 \times \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant x^2$$

car $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $|\sin(a)| \leqslant 1$.

b. Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\forall\, x \neq 0$, $0 \leqslant |f(x)| \leqslant x^2$, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = 0$, soit $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

c. Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ est finie, on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

50 **a.** Pour tout x de $[0\,;+\infty[\,\backslash\{1\}$,

$$g(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

b. $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{1}+1} = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, g est prolongeable par continuité en 1 en posant $g(1) = \dfrac{1}{2}$.

Se tester

51 **1.** Vrai. **2.** Faux. **3.** Faux. **4.** Faux. **5.** Faux.

52 **1.** Faux.

Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\dfrac{3x-4}{x-5} = \dfrac{3x\left(1-\frac{4}{3x}\right)}{x\left(1-\frac{5}{x}\right)} = 3 \times \dfrac{1-\frac{4}{3x}}{1-\frac{5}{x}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1-\frac{4}{3x}}{1-\frac{5}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1$, par produit, $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x-4}{x-5} = 3$.

2. Vrai.

Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$: $0 \leqslant \left|\dfrac{3\sin(x)}{x^2+3}\right| \leqslant \dfrac{3}{x^2+3} \leqslant \dfrac{3}{x^2}$.

Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3}{x^2} = 0$, par le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{x\to +\infty} \left|\dfrac{3\sin(x)}{x^2+3}\right| = 0$, puis $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3\sin(x)}{x^2+3} = 0$.

3. Vrai.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x+2) = 1+2 = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-1) = 0^+$,

donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x+2}{x-1} = +\infty$.

• De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} 3x = 3$,

donc par somme, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(3x + \dfrac{x+2}{x-1}\right) = +\infty$.

4. Faux.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 2 = f(1)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = 3 \neq f(1)$.

Donc f n'est pas continue en 1, donc f n'est pas continue sur $[1\,;3]$.

5. Faux.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} (x-1) = 3-1 = 2 \neq g(3)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} (6-x) = 6-3 = 3 = g(3)$.

Donc f n'est pas continue en 3.

Donc f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

53 **1. a.** ; **2. c.** ; **3. b.** ; **4. c.**

54 **1. a.** • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$\frac{5x+1}{x^2-1} = \frac{5x \times \left(1+\frac{1}{5x}\right)}{x^2 \times \left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{5}{x} \times \frac{1+\frac{1}{5x}}{1+\frac{1}{x^2}}.$$

• Comme $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1+\frac{1}{5x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5}{x} = 0$, par produit, $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x+1}{x^2-1} = 0$.

• Ainsi, $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$.

2. b. Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$\frac{4x^2+5-x^3}{x^2+3x^3+4} = \frac{-x^3 \times \left(\frac{4}{-x} + \frac{5}{-x^3} + 1\right)}{3x^3 \times \left(\frac{1}{3x} + 1 + \frac{4}{3x^3}\right)} = -\frac{1}{3} \times \frac{1 + \frac{5}{-x^3} + \frac{4}{-x}}{1 + \frac{4}{3x^3} + \frac{1}{3x}}$$

donc $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4x^2+5-x^3}{x^2+3x^3+4} = -\dfrac{1}{3}$.

3. c. • $\lim\limits_{\substack{x\to \pi/4\\ x>\pi/4}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to \pi/4\\ x>\pi/4}} \sin(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

et $\lim\limits_{\substack{x\to \pi/4\\ x<\pi/4}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to \pi/4\\ x<\pi/4}} \sqrt{\dfrac{2x}{\pi}} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi} \times \dfrac{\pi}{4}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to \pi/4\\ x>\pi/4}} h(x) = h\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to \pi/4\\ x<\pi/4}} h(x)$.

Donc h est continue en $\dfrac{\pi}{4}$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} h(x) = 1 = h(0)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{\frac{2}{\pi}x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}\times 0} = 0.$

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) \neq h(0)$ et h n'est pas continue en 0, donc h n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $h(x) = \sin(x)$.

h est donc continue sur $[1\,;+\infty[$.

Exercices d'approfondissement

55 Fonction polynôme et fonction inverse

• Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, comme $a \neq 0$,

$f(x) = ax^2\left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2}\right).$

Ainsi, comme $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2}\right) = 1,$

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x) = \text{signe}\,(a) \times (+\infty)$ c'est-à-dire :

$$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x) = \begin{cases} +\infty \text{ si } a > 0 \\ -\infty \text{ si } a < 0. \end{cases}$$

• Par passage à l'inverse, pour tout $a \neq 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} g(x) = 0.$

56 Formes indéterminées

1. a. • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$f(x) = 3x^2\left(1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^2}\right).$

Ainsi, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^2}\right) = 1,$ par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} + 1 = +\infty$ donc par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0.$

b. On ne peut pas déduire directement $\lim\limits_{x\to+\infty} (f \times g)(x)$ car « $+\infty \times 0$ » est une forme indéterminée.

c. • Pour tout x de $]0\,;+\infty[$,

$$(f\times g)(x) = \frac{3x^2 + x + 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}\times\left(3x\times\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\times\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{3x\times\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x\times\sqrt{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x\times\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$

Ainsi, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f\times g)(x) = +\infty.$

2. a. • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$5x^2 - 3x + 1 = 5x^2\left(1 - \frac{3}{5x} + \frac{1}{5x^2}\right).$

Ainsi, de $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{5x} + \frac{1}{5x^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2 = +\infty$, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2 - 3x + 1 = +\infty.$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} + 1 = +\infty.$

• Ainsi, on ne peut conclure directement car « $\frac{+\infty}{+\infty}$ » est une forme indéterminée.

• On écrit pour tout x de $]0\,;+\infty[$:

$$\frac{5x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}\times\left(5x\times\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\times\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{5x\times\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

• De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(5x\times\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\times(5x - 3) + \frac{1}{\sqrt{x}}$

$= +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (5x - 3) = +\infty$).

Par conséquent, par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x} + 1} = +\infty.$

b. • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$\frac{x^3 + 2}{x^2} = \frac{x^3\times\left(1 + \frac{2}{x^3}\right)}{x^2} = x\times\left(1 + \frac{2}{x^3}\right).$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{2}{x^3}\right) = 1$, par produit,

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 2}{x^2} = -\infty.$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 - 1 = +\infty.$

• On ne peut donc pas conclure directement car « $(-\infty) + (+\infty)$ » est une forme indéterminée.

• On écrit pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$\frac{x^3 + 2}{x^2} + 3x^2 - 1 = x + \frac{2}{x^2} + 3x^2 - 1$

$= 3x^2\times\left(1 + \frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^4} - \frac{1}{3x^2}\right).$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^4} - \frac{1}{3x^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 = +\infty$

donc par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 2}{x^2} + 3x^2 - 1 = +\infty.$

57 Étude d'une fonction rationnelle

a. On remarque que :

$(-2)^2 - 3\times(-2) - 10 = 4 + 6 - 10 = 0$

et $5^2 - 3\times 5 - 10 = 25 - 15 - 10 = 0.$

Ainsi, le polynôme $x^2 - 3x - 10$ a pour racines -2 et 5.
En outre, la fraction rationnelle $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x-10}$ est définie si et seulement si $x^2 - 3x - 10 \neq 0$.
Ainsi, $f(x)$ est défini si et seulement si $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2 ; 5\}$.

b. On remarque que d'après **a.**, pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-2 ; 5\}$,

$f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x-10}$.

• $(x+2)\,f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x-5}$

donc $a(x+2) + b + \dfrac{c(x+2)}{x-5} = \dfrac{x^2+x-6}{x-5}$.

Ainsi pour $x = -2$, on obtient :

$b = \dfrac{(-2)^2 + (-2) - 6}{(-2) - 5} = \dfrac{-4}{-7} = \dfrac{4}{7}$.

• $(x-5)\,f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x+2}$

donc $a(x-5) + \dfrac{b(x-5)}{x+2} + c = \dfrac{x^2+x-6}{x+2}$.

Ainsi, pour $x = 5$, on obtient

$c = \dfrac{5^2+5-6}{5+2} = \dfrac{24}{7}$.

• Enfin, $f(0) = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ et $f(0) = a + \dfrac{2}{7} - \dfrac{24}{35}$

donc $a = \dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{7} + \dfrac{24}{35} = \dfrac{21 - 10 + 24}{35} = 1$.

Et on a pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-2 ; 5\}$

$f(x) = 1 + \dfrac{\frac{4}{7}}{x+2} + \dfrac{\frac{24}{7}}{x-5}$.

c. • $\lim\limits_{x\to-2}\left(1 + \dfrac{\frac{24}{7}}{x-5}\right) = 1 + \dfrac{24}{7} \times \dfrac{1}{-7} = 1 - \dfrac{24}{49} = \dfrac{49-24}{49}$
$= \dfrac{25}{49}$.

•

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}(x-2) = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}(x-2) = 0^+$.

Par suite, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} \dfrac{\frac{4}{7}}{x+2} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \dfrac{\frac{4}{7}}{x+2} = +\infty$.

Puis par somme, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = +\infty$.

d. • $\lim\limits_{x\to5}\left(1 + \dfrac{\frac{4}{7}}{x+2}\right) = 1 + \dfrac{4}{7} \times \dfrac{1}{7} = 1 + \dfrac{4}{49} = \dfrac{53}{49}$.

•

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$x-5$		$-$	0	$+$	

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x<5}}(x-5) = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}}(x-5) = 0^+$.

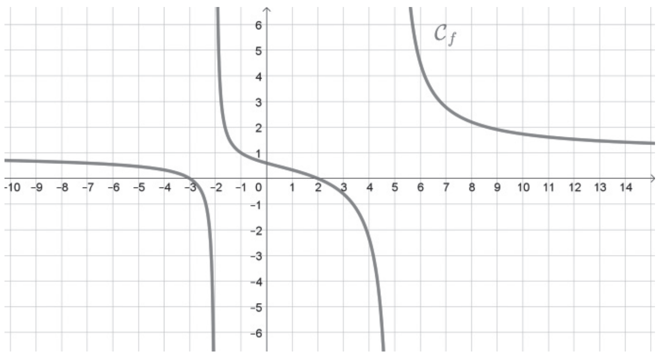
Par suite, $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x<5}} \dfrac{\frac{24}{7}}{x-5} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} \dfrac{\frac{24}{7}}{x-5} = +\infty$.

Puis par somme, $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x<5}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} f(x) = +\infty$.

e. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \dfrac{\frac{4}{7}}{x+2} = 0 = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \dfrac{\frac{24}{7}}{x-5}$.

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x) = 1$.

f.



58 Le théorème des gendarmes

a. Pour tout $x \geqslant 0$:

$-1 \leqslant \sin(4x) \leqslant 1 \Leftrightarrow -2 \leqslant 2\sin(4x) \leqslant 2$
$\Leftrightarrow -1 \leqslant 1 + 2\sin(4x) \leqslant 3$.

De plus, $\forall\, x \geqslant 0$, $1 + 2\sqrt{x} > 0$, donc :

$\dfrac{-1}{1+2\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1+2\sin(4x)}{1+2\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{3}{1+2\sqrt{x}}$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + 2\sqrt{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{x} = +\infty$ donc par quotient,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{1+2\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{1+2\sqrt{x}} = 0$.

Ainsi, l'inégalité précédente et le théorème des gendarmes impliquent que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+2\sin(4x)}{1+2\sqrt{x}} = 0$.

59 Limite ou pas de limite ?

a. • Comme $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $|\cos(a)| \leqslant 1$, on a pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $|f(x)| = 3|x| \times \left|\cos\left(\dfrac{5}{x^2}\right)\right| \leqslant 3|x|$.

• Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $0 \leqslant |\,f(x)| \leqslant 3|x|$
et $\lim\limits_{x\to0} 3|x| = 0$, donc par le théorème des gendarmes,
$\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = 0$, soit $\lim\limits_{x\to+\infty} (x) = 0$.

b. • Pour tout k de $\mathbb{Z}$: $g(2k\pi) = \cos(2k\pi) = 1$
et $g\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

• Supposons que $g(x)$ admette une limite quand x tend vers $+\infty$. Notons la ℓ.

Alors comme $\lim\limits_{\substack{k\to+\infty\\k\in\mathbb{Z}}} 2k\pi = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{k\to+\infty\\k\in\mathbb{Z}}} 2k\pi + \dfrac{\pi}{2} = +\infty$, on aurait :

$\lim\limits_{k\to+\infty} g(2k\pi) = \ell = \lim\limits_{k\to+\infty} g\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$ donc $1 = 0$!

Ce qui est impossible.

Donc $g(x)$ n'admet pas de limite quand k tend vers $+\infty$.

60 Expression conjuguée

a. Pour tout $x > 0$.

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{(\sqrt{x+1})^2 - 1^2}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}.$$

b. • $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x+1} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x+1} + 1 = 1 + 1 = 2$.

• Ainsi, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \dfrac{1}{2}$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = 0 = f(0)$.

c. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = \dfrac{1}{2} \neq f(0)$, f n'est pas continue en 0 ;

f n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$.

61 De drôles de limites

a. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = x$ si $x \geqslant 0$ et $|x| = -x$ si $x \leqslant 0$.

Ainsi : $\begin{cases} \forall\, x > 0,\ \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1 \\ \forall\, x < 0,\ \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1. \end{cases}$

Par conséquent :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (-1) = -1$.

b. Pour tout $x \geqslant 0$,

$$\sqrt{x^2+2} - x = \frac{(\sqrt{x^2+2}-x)(\sqrt{x^2+2}+x)}{\sqrt{x^2+2}+x} = \frac{(\sqrt{x^2+2})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+2}+x}$$

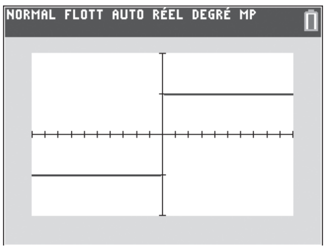
$$= \frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x} = \frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}.$$

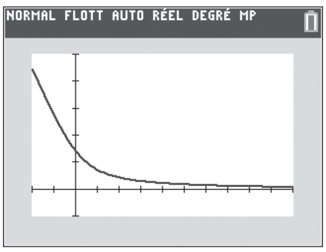
• De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

Par conséquent, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2} + x = +\infty$; puis par quotient,

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+2} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x} = 0.$$

c.





62 Vitesse instantanée

1. a. La vitesse instantanée à l'instant 2 est égale à $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x(2+h)-x(2)}{h}$.

• Pour $h \neq 0$, $\dfrac{x(2+h)-x(2)}{h} = \dfrac{(2+h)^2+(2+h)+1-7}{h}$

$$= \frac{4+4h+h^2+2+h-6}{h} = \frac{h^2+5h}{h} = h+5.$$

• Ainsi, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x(2+h)-x(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (h+5) = 5$.

b. Pour $h \neq 0$, $\dfrac{x(5+h)-x(5)}{h} = \dfrac{(5+h)^2+(5+h)+1-31}{h}$

$$= \frac{25+10h+h^2+5+h+1-31}{h} = \frac{h^2+11h}{h} = h+11.$$

Ainsi, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x(5+h)-x(5)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (h+11) = 11$.

2. a. On cherche $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} = 13$.

Pour $h \neq 0$, $\dfrac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$

$$= \frac{(h+t_0)^2+(h+t_0)+1-(t_0{}^2+t_0+1)}{h}$$

$$= \frac{h^2+2ht_0+t_0{}^2+t_0+h-1-t_0{}^2-t_0-1}{h}$$

$$= \frac{h^2+(2t_0+1)h}{h} = h+2t_0+1.$$

donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (h+2t_0+1) = 2t_0+1$.

On obtient l'équation :

$2t_0 + 1 = 13 \Leftrightarrow t_0 = \dfrac{13-1}{2} \Leftrightarrow t_0 = 6$.

b. On cherche $t_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x(t_1+h)-x(t_1)}{h} = 1{,}05$,

soit $2t_1 + 1 = 1{,}05 \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{1{,}05-1}{2} = 0{,}025$.

63 À partir de la définition

Supposons qu'il existe $a \in [0\,;+\infty[$ tel que $f(a) < 0$.

• Comme f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, $\forall\, x \geqslant a$, $f(x) \leqslant f(a)$.

• De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Donc de la relation « $\forall\, x \geqslant a$, $f(x) \leqslant f(a)$ », on déduit que $0 \leqslant f(a)$. Ce qui est absurde.

Par conséquent, $\forall\, a \in [0\,;+\infty[$, $f(a) \geqslant 0$.

64 Conjecturer, puis démontrer

a. Il semble que :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\x>\pi/2}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\x<\pi/2}} f(x) = -\infty$.

b. • Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Leftrightarrow x - 1 \leqslant x + \cos x \leqslant 1 + x$.

• On en déduit, d'une part que, pour $x > \dfrac{\pi}{2}$, comme $x-\frac{\pi}{2}>0$ on a : $\frac{x-1}{x-\frac{\pi}{2}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1+x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

Ainsi, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+x}{x-\frac{\pi}{2}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x-\frac{\pi}{2}} = 1$,

d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

• D'autre part, pour $x<\frac{\pi}{2}$, comme $x-\frac{\pi}{2}<0$, on a :

$\frac{x-1}{x-\frac{\pi}{2}} \geqslant f(x) \geqslant \frac{1+x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

Et on en déduit de la même manière que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

c. • On remarque que $\lim\limits_{x\to\pi/2} (x+\cos x) = \frac{\pi}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

• De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x>\pi/2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right) = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right) = 0^-$.

Ainsi, par quotient, on a :

$\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x>\pi/2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}} f(x) = -\infty$.

65 Encadrements

1. a. Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $-1 \leqslant -\sin(1/x) \leqslant 1$

$\Leftrightarrow 2-1 \leqslant 2-\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 2+1$

$\Leftrightarrow 1 \leqslant 2-\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 3$.

Ainsi, $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \leqslant 1$,

la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

Et finalement, pour tout $x>0$: $\frac{x}{3} \leqslant f(x) \leqslant x$.

b. De même, pour tout $x<0$: $\frac{x}{3} \geqslant f(x) \geqslant x$.

c. • En utilisant les deux encadrements précédents, comme $\lim\limits_{x\to0} x = \lim\limits_{x\to0} \frac{x}{3} = 0$, le théorème des gendarmes assure que $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$.

• Comme $f(x) \geqslant \frac{x}{3}$ pour $x>0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{3} = +\infty$, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• Comme $f(x) \leqslant \frac{x}{3}$ pour $x<0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{3} = -\infty$, par comparaison $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. • De la même manière, pour $x \neq 0$

$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2-\cos\left(\frac{1}{x}\right)} \leqslant 1$.

Ainsi, pour $x>0$, $\frac{x}{3} \leqslant g(x) \leqslant x$

et pour $x<0$, $x \leqslant g(x) \leqslant \frac{x}{3}$.

• Par conséquent :

$\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

66 Fonction partie entière

1. E n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (voir Activité 4, question 2).

2. a. • Pour $x \in]0\,;1[$, $\sqrt{x} \in]0, 1[$.

Donc $E(\sqrt{x}) = 0$ et $f(x) = 0$.

• Pour tout $x>0$: $\sqrt{x} \leqslant E(\sqrt{x})$ donc $\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{E(\sqrt{x})}{x}$.

• Comme $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, par comparaison, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

• Ainsi, f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

b. • Pour $x \geqslant 1$: $0 \leqslant E(\sqrt{x}) \leqslant \sqrt{x}+1 \leqslant x+1$

donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$.

• Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, le théorème des gendarmes assure que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

67 Prolongement par continuité

f est continue sur $]-\infty\,;0[$, sur $]0\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$.

• Continuité en 2

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2\\ x>2}} (5x-1) = 5\times2-1 = 9$

et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\ x<2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2\\ x>2}} (x^2+bx) = 4+2b$

donc f est continue en 2, si et seulement si, $4+2b=9$,

c'est-à-dire si $b = \frac{9-4}{2} = \frac{5}{2}$.

• Continuité en 0

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\ x<0}} a\sqrt{1+x^2}+x-1 = a-1$

et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}} \left(x^2+\frac{5}{2}x\right) = 0$

donc f est continue en 0, si et seulement si, $a-1=0$, c'est-à-dire si $a=1$.

• Conclusion

f définie par : $f(x) = \begin{cases} 5x-1 \text{ si } x \geqslant 2 \\ x^2+\frac{5}{2}x \text{ si } 0 \leqslant x < 2 \\ \sqrt{1+x^2}+x-1 \text{ si } x<0 \end{cases}$

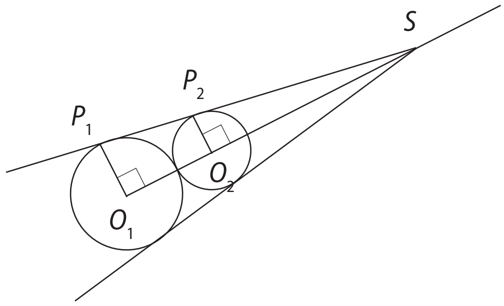
est continue sur $\mathbb{R}$.

68 Les deux cercles

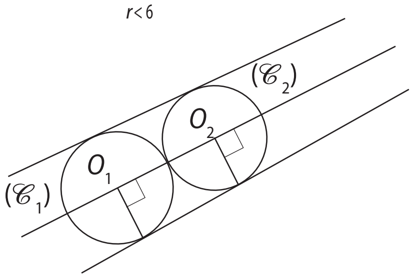
a. Les droites (P_1O_1) et (P_2O_2) sont parallèles. Les points S, P_2, P_1 d'une part et S, O_2, O_1 d'autre part sont alignés. Le théorème de Thalès permet d'écrire que :

$\frac{O_1S}{O_2S} = \frac{O_1P_1}{O_2P_2} = \frac{6}{r}$. De plus, $O_2S = O_1S-(r+6)$.

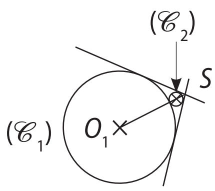
Ainsi : $\dfrac{O_1S}{O_1S - r - 6} = \dfrac{6}{r} \Leftrightarrow rO_1S = 6(O_1S - r - 6)$
$\Leftrightarrow 6O_1S - rO_1S = 6r + 36$
$\Leftrightarrow O_1S = \dfrac{6r+36}{6-r}.$



b. $\lim\limits_{\substack{r\to 6\\ r<6}} 6r + 36 = 72$ et $\lim\limits_{\substack{r\to 6\\ r<6}} 6 - r = 0^+$
ainsi, par quotient, $\lim\limits_{\substack{r\to 6\\ r<6}} O_1S = +\infty$.



c. $\lim\limits_{r\to 0} O_1S = \dfrac{36}{6} = 6.$



69 Limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ quand x tend vers 0

1. a. $\mathscr{A}_1 = \dfrac{OA \times MP}{2} = \dfrac{1 \times \sin(x)}{2}$;

$\mathscr{A}_2 = \dfrac{x}{2} \times OA^2 = \dfrac{x}{2} \times 1^2$; $\mathscr{A}_3 = \dfrac{AT \times OA}{2} = \dfrac{\tan(x) \times 1}{2}.$

Or $\mathscr{A}_1 \leqslant \mathscr{A}_2 \leqslant \mathscr{A}_3$, donc $\dfrac{\sin(x)}{2} \leqslant \dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{\tan(x)}{2}$

d'où $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$.

b. Puisque $\mathbf{x} \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) > 0$ donc, en divisant l'encadrement précédent par $\sin(x)$:

$1 \leqslant \dfrac{x}{\sin(x)} \leqslant \dfrac{\tan(x)}{\sin(x)}$ d'où $1 \leqslant \dfrac{x}{\sin(x)} \leqslant \dfrac{1}{\cos(x)}$

et $\cos(x) \leqslant \dfrac{\sin(x)}{x} \leqslant 1.$

c. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \cos(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1 = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1.$

2. a. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sin(3x)}{2x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{3}{2} \times \dfrac{\sin(3x)}{3x} = \dfrac{3}{2}.$

b. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x}{\sin(5x)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{5} \times \dfrac{5x}{\sin(5x)} = \dfrac{1}{5}.$

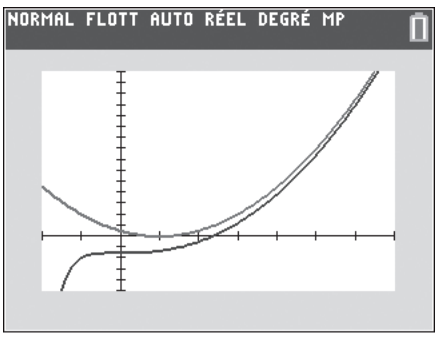
c. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\tan(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sin(x)}{x} \times \dfrac{1}{\cos(x)} = 1.$

d. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x\cos(x)}{\sin(4x)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{4} \times \dfrac{4x}{\sin(4x)} \times \cos(x) = \dfrac{1}{4}.$

Problèmes

70 Un algorithme

1.



2. a. Pour $x > 2$:

$f(x) - g(x) = \dfrac{x^3 - 3x - 6}{2(x+2)} - \dfrac{1}{2}(x-1)^2$

$= \dfrac{(x^3 - 3x - 6) - (x-1)^2(x+2)}{2(x+2)}$

$= \dfrac{(x^3 - 3x - 6) - (x^2 - 2x + 1)(x+2)}{2(x+2)}$

$= \dfrac{x^3 - 3x - 6 - [x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2]}{2(x+2)}$

$= \dfrac{-3x - 6 + 3x - 2}{2(x+2)} = \dfrac{-4}{x+2}$

donc $g(x) - f(x) = \dfrac{4}{x+2}.$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) - f(x) = 0.$

3. a. L'algorithme permet de déterminer, par un nombre réel positif a donné, la valeur entière de x à partir de laquelle $\dfrac{4}{x+2} \leqslant a.$

b. • Pour $a = -0{,}01$, il affiche -1

car $\forall\, x > \dfrac{4}{x+2} > 0 \geqslant -0{,}01.$

• Pour $a = 0{,}001$, il affiche 3 998.

En effet : $\dfrac{4}{x+2} > 0{,}001 \Leftrightarrow x + 2 < 4\,000 \Leftrightarrow x < 3\,998$.

• Pour $a = 10^{-5}$, il affiche 399 998.

En effet : $\dfrac{4}{x+2} > 10^{-5} \Leftrightarrow x + 2 < 400\,000 \Leftrightarrow x < 399\,998$.

71 Majoration et minoration

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{x}\right) = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x^2 + x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(-\dfrac{2}{x}\right) = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$.

2. a. Pour $x > 0$: $f(x) = \dfrac{(x^2+x)x-2}{x} = \dfrac{x^3+x^2-2}{x}$.

On cherche a et b réels tels que :

$x^3 + x^2 - 2 = (x - 1)(x^2 + ax + b)$.

On a :

$$\begin{aligned}(x - 1)(x^2 + ax + b) &= x^3 + ax^2 + bx - x^2 - ax - b\\ &= x^3 + x^2(a - 1) + x(b - a) - b\end{aligned}$$

Ainsi, par identification :

$$\begin{cases} a-1=1\\ b-a=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2\\ b=2.\end{cases}$$

On a donc $f(x) = \dfrac{(x-1)P(x)}{x}$ avec $P(x) = x^2 + 2x + 2$.

b. • Pour x de $\mathbb{R}$:

$(x + 1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2 + 2x + 2 = P(x)$

• Pour x de $]0 ; 1]$:

$$f(x) = \frac{(x-1)P(x)}{x} = \underbrace{\frac{(x-1)(x+1)^2}{x}}_{\leqslant 0} + \frac{(x-1)}{x}$$

donc $f(x) \leqslant \dfrac{(x-1)}{x}$, c'est-à-dire $f(x) \leqslant 1 - \dfrac{1}{x}$

• Il suffit que : $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant -10^4$

$$-\frac{1}{x} \leqslant -10\,001$$

$$\frac{1}{x} \geqslant 10\,001$$

$$x \leqslant \frac{1}{10\,001}$$

Donc $\alpha = \dfrac{1}{10\,001}$ convient.

c. • Pour tout x de $[2 ; +\infty[$:

$x - \dfrac{2}{x} - 1 = \dfrac{x^2-x-2}{x} = \dfrac{(x+1)(x-2)}{x}$

donc $x - \dfrac{2}{x} - 1 \geqslant 0$, donc $x - \dfrac{2}{x} \geqslant 1$

• Ainsi, pour tout x de $[2 ; +\infty[$, $f(x) \geqslant x^2 + 1 \geqslant x^2$.

• Il suffit que $x^2 \geqslant 10^4$, donc $x \geqslant 10^2$

Donc $\beta = 10^2$ convient.

72 Histoire d'aires

a. • Le triangle HMP est rectangle en H.

Ainsi : $S_1(x) = \dfrac{MH \times HP}{2}$.

• Dans le triangle rectangle OMH en H, on a :

$\sin(x) = \dfrac{MH}{OM} = MH$ et $\cos(x) = \dfrac{OH}{OM} = OH$

• Dans le triangle OMP rectangle en M,

$\cos(x) = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{1}{OP}$ donc $OP = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

• Ainsi, $HP = OP - OH = \dfrac{1}{\cos(x)} - \cos(x) = \dfrac{1-\cos^2(x)}{\cos(x)}$

$= \dfrac{\sin^2(x)}{\cos(x)}$ et $S_1(x) = \dfrac{\sin^3(x)}{2\cos(x)}$.

b. • Le triangle NIP est rectangle en I.

Ainsi, $S_2(x) = \dfrac{IP \times NI}{2}$.

• $IP = HP - HI = HP - (OI - OH) = HP - 1 + \cos(x)$

$= \dfrac{1}{\cos(x)} - \cos(x) - 1 + \cos(x) = \dfrac{1}{\cos(x)} - 1 = \dfrac{1-\cos(x)}{\cos(x)}$.

• Les droites (MH) et (NI) sont parallèles.

Le théorème de Thalès assure que :

$$\frac{NI}{MH} = \frac{IP}{HP} \Leftrightarrow \frac{NI}{\sin(x)} = \frac{\dfrac{1-\cos(x)}{\cos(x)}}{\dfrac{\sin^2(x)}{\cos(x)}} = \frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$\Leftrightarrow NI = \dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$.

• Ainsi, $S_2(x) = \dfrac{(1-\cos(x))^2}{2\sin(x)\cos(x)}$.

c. • $\lim\limits_{x\to 0} \sin^3(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2\cos(x) = 1$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to 0} S_1(x) = 0$. Quand x se rapproche de 0, l'aire $S_1(x)$ se rapproche de 0.

• $\lim\limits_{\substack{x\to \pi/2\\ x<\pi/2}} \sin^3(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to \pi/2\\ x<\pi/2}} 2\cos(x) = 0^+$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to\pi/2} S_1(x) = +\infty$. Quand x se rapproche de $\dfrac{\pi}{2}$, l'aire $S_1(x)$ devient infiniment grande.

d. • Pour $x \in \left]0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{S_1(x)}{S_2(x)} = \frac{\sin^3(x)}{2\cos(x)} \times \frac{2\sin(x)\cos(x)}{(1-\cos(x))^2} = \frac{(\sin^2(x))^2}{(1-\cos(x))^2}$$

$$\frac{(1-\cos^2(x))^2}{(1-\cos(x))^2} = \left(\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{1-\cos(x)}\right)^2 = (1+\cos(x))^2.$$

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{S_1(x)}{S_2(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+\cos(x))^2 = 2^2 = 4$

et $\lim\limits_{\substack{x\to \pi/2\\ x<\pi/2}} \dfrac{S_1(x)}{S_2(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to \pi/2\\ x<\pi/2}} 1^2 = 1$.

e. • Pour $x \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$:

$S_2(x) = \dfrac{S_2(x)}{S_1(x)} \times S_1(x)$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} S_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{S_2(x)}{S_1(x)} = \dfrac{1}{4}$ donc par produit $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} S_2(x) = 0$. Quand x se rapproche de 0, l'aire $S_2(x)$ se rapproche de 0.

• $\lim\limits_{\substack{x\to \pi/2\\ x<\pi/2}} S_1(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to \pi/2\\ x<\pi/2}} \dfrac{S_2(x)}{S_1(x)} = 1$ donc par produit $\lim\limits_{\substack{x\to \pi/2\\ x<\pi/2}} S_2(x) = +\infty$. Quand x se rapproche de $\dfrac{\pi}{2}$, l'aire $S_2(x)$ devient infiniment grande.

73 Position relative

1. $f(x)$ est défini, si et seulement si, $x^2 + x - 2 \neq 0$.

On remarque que : $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$.

Ainsi, $f(x)$ est défini, si et seulement si, $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\,;1\}$.

2. a. • Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\,;-2\,;0\}$:

$$f(x) = \frac{x^3\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = x\,\frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b.

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
x^2+x-2	$+$	0	$-$	0	$+$

c. • $\lim\limits_{x\to-2} x^3 - x^2 - 4x + 5 = -8 - 4 + 8 + 5 = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} x^2 + x - 2 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} x^2 + x - 2 = 0^+$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x) = -\infty$ et $\operatorname{llim}\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to 1} x^3 - x^2 - 4x + 5 = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>-1}} x^2 + x - 2 = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2 + x - 2 = 0^-$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty$.

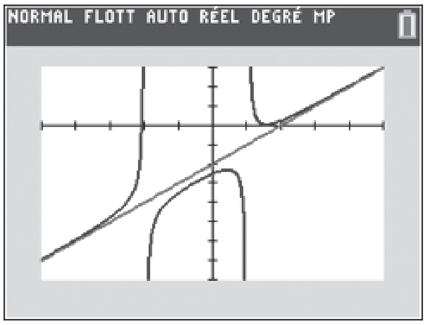
3. a.

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - x^2 - 4x + 5 & x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2}
-\,(x^3 + x^2 - 2x) & x - 2 \\ \cline{1-1}
-2x^2 - 2x + 5 & \\
-\,(-2x^2 - 2x + 4) & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}$$

Donc $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$ ($a = 1 = c$ et $b = -2$).

b. $f(x) - (x-2) = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$.

Donc $f(x) - (x-2)$ est du signe de $x^2 + x - 2$.



Ainsi, $f(x) - (x-2) > 0$ lorsque $x \in]-\infty\,;-2[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ et dans ce cas, $(\mathscr{C}_f)$ est située au-dessus de (Δ) ;

$f(x) - (x-2) = 0$ lorsque $x = -2$ ou $x = 1$, ce qui n'est pas possible car f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\,;1\}$;

$f(x) - (x-2) < 0$ lorsque $x \in]-2\,;1[$ et dans ce cas, $(\mathscr{C}_f)$ est située au-dessous de (Δ).

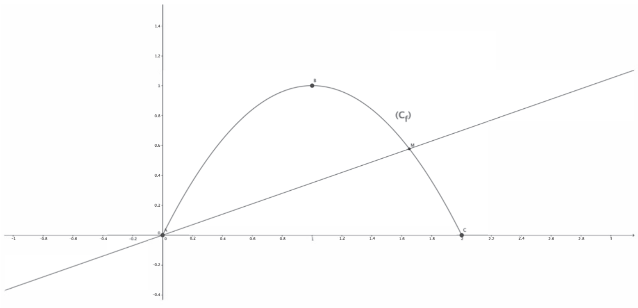
11 Dérivée d'une fonction

Manuel pages 175 à 192

Activités d'introduction

1 Nombre dérivé, définition graphique

1. a. et **b.**



c. Lorsque M se rapproche de A, (AM) se rapproche de la tangente en A à $(\mathscr{C}_f)$.

d. On conjecture que $f'(0) = 2$.

2. • On conjecture que $f'(1) = 0$.

• On conjecture que $f'(2) = -2$.

2 Nombre dérivé, définition algébrique

1. a. $m = \dfrac{-h^2 + h}{h} = -h + 1$.

b. $\lim\limits_{h \to 0} m = 1$.

La position limite de la droite (AM) est la droite de coefficient directeur 1 tangente à la courbe de f.

2. a. $m = \dfrac{[-(a + h)^2 + 2(a + h)] - (-a^2 + 2a)}{h}$

$= \dfrac{-h^2 - a^2 - 2ah + 2a + 2h + a^2 - 2a}{h}$

$= \dfrac{-h^2 - 2ah + 2h}{h} = -h - 2a + 2$.

b. $\lim\limits_{h \to 0} m = 2 - 2a$.

La position limite de la droite (AM) est la droite de coefficient directeur $2\text{-}2a$ tangente à la courbe de f.

3. a. $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h} = \dfrac{3(a + h) + 1 - (3a + 1)}{h} = 3$

Or $\lim\limits_{h \to 0} (3) = 3$. Donc f est dérivable en a et le nombre dérivé de f en a est $f'(a) = 3$.

b. $\dfrac{g(a + h) - g(a)}{h} = \dfrac{(a + h)^2 - 3 - (a^2 - 3)}{h} = \dfrac{h^2 + 2h}{h}$

$= h + 2a$

Or $\lim\limits_{h \to 0} (h + 2a) = 2a$. Donc g est dérivable en a et le nombre dérivé de g en a est $g'(a) = 2a$.

3 Vitesse moyenne, vitesse instantanée

1. $\dfrac{1}{2} \times 9{,}81 \times t^2 = 12 \Leftrightarrow t^2 = \dfrac{24}{9{,}81}$

$\Leftrightarrow t = \sqrt{\dfrac{24}{9{,}81}} \approx 1{,}56$ s.

2. $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{12}{1{,}56} \approx 7{,}67$ m/s.

3. a. $\dfrac{d(1 + h) - d(1)}{h} = \dfrac{1}{2} \times 9{,}81(h + 2)$.

b. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{2} \times 9{,}81(h + 2) = 9{,}81$ m/s.

c. En mathématiques, on parle de dérivée de d en 1.

d. $\dfrac{d(1{,}25 + h) - d(1{,}25)}{h} = \dfrac{1}{2} \times 9{,}81(h + 2{,}5)$.

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{2} \times 9{,}81(h + 2{,}5) \approx 12{,}26$ m/s.

b. $\dfrac{d(1{,}56 + h) - d(1{,}56)}{h} = \dfrac{1}{2} \times 9{,}81\,(h + 3{,}12)$.

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{2} \times 9{,}81(h + 3{,}12) \approx 15{,}30$ m/s.

4 Lien entre variation d'une fonction et signe de sa dérivée

1. $f'(-2) = 3$; $f'(0) = -0{,}5$; $f'(1) = 0$; $f'(2) = 2$

2. a.]-2;-0,75[U]1;2,5[;]-0,75;1[.

b.

x	-2		-0,75		1		2, 5
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-1,5	↗	0,2	↘	-0,4	↗	1,9

Savoir-faire

4 **a.** Calcul du taux d'accroissement de f entre 2 et $2+h$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)^3-(2)^3}{h}=\frac{h^3+6h^2+12h}{h}$$
$$=h^2+6h+12.$$

Or $\lim\limits_{h\to 0}(h^2+6h+12)=12$. Donc f est dérivable en 2 et le nombre dérivé de f en 2 est $f'(2)=12$.

b. Équation de la tangente au point d'abscisse 2.

$y=f'(2)(x-2)+f(2)=12(x-2)+8=12x-16$.

5 **a.** $f'(1)=0$; **b.** $f'(2)=2$.

8 **a.** $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{(a+h)^3-(a)^3}{h}$

$=\dfrac{h^3+3ah^2+3a^2h}{h}=h^2+3ah+3a^2$

$\lim\limits_{h\to 0}(h^2+3ah+3a^2)=3a^2$.

f est dérivable en a pour tout a de $\mathbb{R}$ et $f'(a)=3a^2$.

Ainsi la fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=3x^2$.

b. $\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h}=\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\dfrac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

g est dérivable en a pour tout a de $]0+\infty[$ et $g'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Ainsi la fonction dérivée de g est la fonction g' définie sur $]0+\infty[$ par $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

9 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{\dfrac{1}{(a+h)^2}-\dfrac{1}{a^2}}{h}=\dfrac{a^2-(a+h)^2}{ha^2(h+a)^2}$

$=\dfrac{-h-2a}{a^2(h+a)^2}$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h-2a}{a^2(h+a)^2}=\dfrac{-2a}{a^4}=\dfrac{-2}{a^3}$.

f est dérivable en a pour tout a de $\mathbb{R}^*$ et $f'(a)=\dfrac{-2}{a^3}$.

Ainsi la fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f'(x)=\dfrac{-2}{x^3}$.

10 **a.** $f'_1(x)=14x-3$; **b.** $f'_2(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$;

c. $f'_3(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$; **d.** $f'_4(x)=\dfrac{13}{(5-2x)^2}$;

e. $f'_5(x)=10(2x-1)^4$; **f.** $f'_6(x)=\dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}$.

14 **a.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.

Ainsi $f'(x)=-2x+2$.

Donc $f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,;1[$.

La fonction f est donc croissante sur $]-\infty\ 1[$ et décroissante sur $]1+\infty[$.

b. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables.

Ainsi $g'(x)=\dfrac{12x}{(2+x^2)^2}$.

Donc $g'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow x\in\,]0\,;+\infty[$.

La fonction g est donc croissante sur $]0\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;0[$.

15 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.

Ainsi $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$.

x	-3		-1		1		3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-17	↗	3	↘	-1	↗	19

f admet un minimum local égal à -1 pour $x=1$ et un maximum local égal à 3 pour $x=1$.

Sur $[-3\,;3]$, le maximum global est égal à 19 et le minimum global à -17.

16 La fonction utilisée est la fonction cube. 2,03 est proche de 2.

L'approximation affine au voisinage de 2 s'écrit :

$f(x)\approx f'(2)(x-2)+f(2)\approx 12(x-2)+8\approx 12x-16$.

Ainsi $2{,}03^3\approx 12\times 2{,}03-16\approx 8{,}36$.

Exercices d'entraînement

17 **a.** $f'(1) = -3$; **b.** $y = -3x + 1{,}5$.

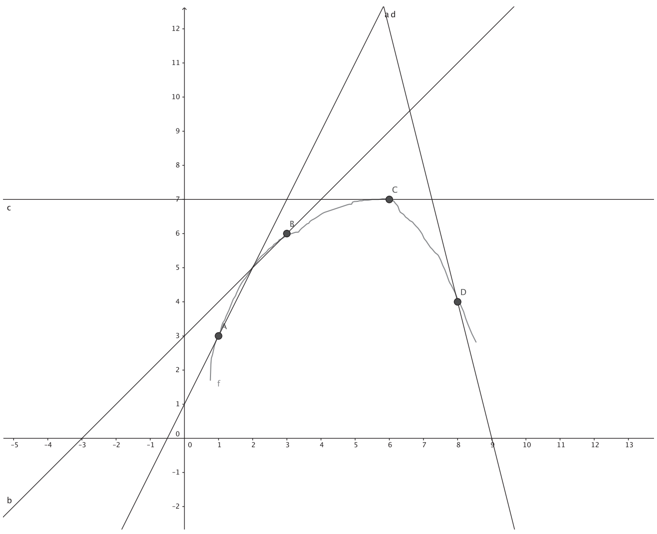
18 $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \dfrac{(-1+h)^3-(-1)^3}{h}$

$= \dfrac{h^3-3h^2+3h}{h} = h^2 + 3h + 3.$

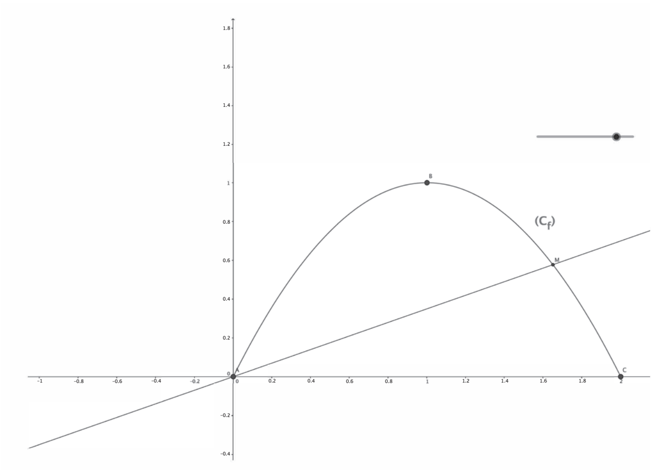
$\lim\limits_{h\to 0}(h^2 - 3h + 3) = 3.$

Ainsi f est dérivable en -1 et $f'(-1) = 3$.

19



20



21 A : $y = -4x + 3$; B : $y = 3$; C : $y = 2x$.

22 **a.**

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	5	2,5	0	5
$f'(x)$	11	0	-4	0	11

b. $f'(a) = 0$ pour $a = 1$ et $a = 3$.

$f'(a) > 0$ sur $[0\ ;\ 1[\cup\ ]3\ ;\ 4\ ]$.

23 **a.** $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{\frac{1}{1-h}-(-1)}{h} = \dfrac{-h}{h(1-h)} = \dfrac{1}{1+h}.$

$\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{1}{1+h}\right) = 1.$

Ainsi f est dérivable en 2 et $f'(2) = 1$.

b. $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}.$

$\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}.$

Ainsi f est dérivable en 1 et $f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

c. $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{(2h+1)^2-1}{h} = \dfrac{4h^2+4h}{h} = 4h+4..$

$\lim\limits_{h\to 0}(4h+4) = 4.$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 4$.

24 **a.** Sommet $S(0\ ;\ -5)$.

b. $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{2(1+h)^2-5-(-3)}{h} = \dfrac{2h^2+4h}{h}$

$= 2h + 4.$

$\lim\limits_{h\to 0}(2h+4) = 4.$

Ainsi f est dérivable en 1 et $f'(1) = 4$.

c. Équation de T_1 : $y = 4x - 7$.

d. $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{2(2+h)^2-5-3}{h} = \dfrac{2h^2+8h}{h}$

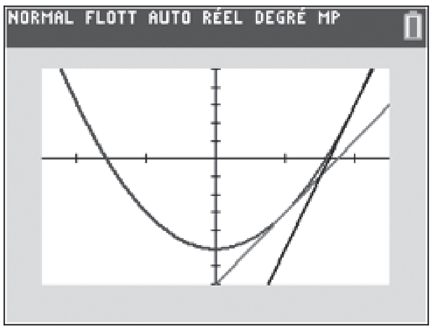
$= 2h + 8.$

$\lim\limits_{h\to 0}(2h+8) = 8.$

Ainsi f est dérivable en 2 et $f'(2) = 8$.

Équation de T_2 : $y = 8x - 13$.

e.



25 Équation de la tangente au point d'abscisse -1 :

$y = 3x + 2$.

26 Le nombre dérivé à gauche de 1 est égal à $2a$.

Le nombre dérivé à droite de 1 est égal à 3.

Ainsi, il faut que $a = \dfrac{3}{2}$ et b peut être quelconque.

27 **a.** $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\dfrac{(h-3)^3-(-27)}{h}$
$=\dfrac{h^3-9h^2+27h-27+27}{h}$
$=h^2-9h+27.$

b. $\lim\limits_{h\to 0}(h^2-9h+27)=27$
Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0)=27$.

28 • $f'(x)=3x^2-4x+3$; • $g'(x)=2x^3-\dfrac{1}{3}x$.

29 • $f'(x)=2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; • $g'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$.

30 • $f'(x)=-\sqrt{x}+\dfrac{2-x}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}}$; • $g'(x)=4x+1$.

31 • $f'(x)=\dfrac{-11}{(x-5)^2}$; • $g'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$.

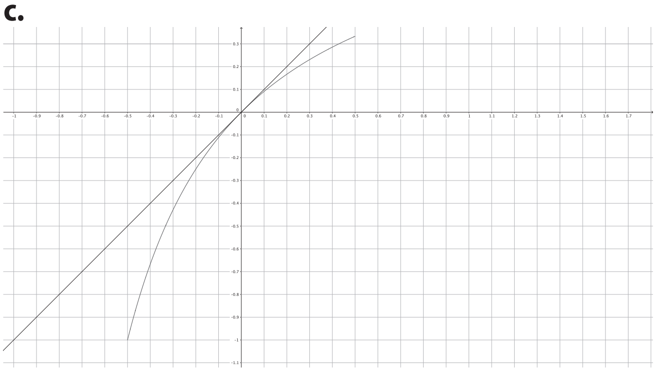
32 • $f'(x)=8(2x+1)^3$; • $g'(x)=\dfrac{-3}{2\sqrt{1-3x}}$.

33 **a.** $f'(x)=3x^2+6x-9$.
b. Équation de la tangente au point d'abscisse 1 :
$y=-3$.
c. L'équation $f'(x)=0$ a deux solutions : -3 et 1.
Les points où la tangente est horizontale sont :
$A(1\,;-3)$ et $B(-3\,;29)$.

34 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{m(a+h)+p-(ma+p)}{h}=\dfrac{mh}{h}=m$.
$\lim\limits_{h\to 0}(m)=m$.
Ainsi f est dérivable en tout nombre réel a et $f'(a)=m$.

35 Expression 1 : $f(x)=x^3-2x+3$ donc $f'(x)=3x^2-2$.
Expression 2 : $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$
donc $f'(x)=\dfrac{1(1-x)-(-1)(1+x)}{(1-x)^2}=\dfrac{2}{x^2-2x+1}$.

36 **a.** $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$.
Équation de la tangente au point d'abscisse 0 : $y=x$.
b. Étude du signe de $f(x)-x=\dfrac{x}{1+x}-x=\dfrac{-x^2}{1+x}$.
Sur $]-1\,;+\infty[$, $f(x)-x<0$.
Donc la courbe est au-dessous de sa tangente.
c.



37 **a.** $f'(x)=\dfrac{1(1+x^2)-x(2x)}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.
b. Équation de la tangente au point d'abscisse 2 :
$y=-\dfrac{3}{25}x+\dfrac{16}{25}$.
c. L'équation $f'(x)=0$ a deux solutions : -1 et 1.
Les points où la tangente est horizontale sont :
$A\left(-1\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ et $B\left(1\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

38 **1.** f_1 a pour dérivée f'_3 ;
f_2 a pour dérivée f'_1 ;
f_3 a pour dérivée f'_2.
2. a. $f'(x)=\dfrac{b(3-x)-(-1)(a+bx)}{(3-x)^2}=\dfrac{3b+a}{(3-x)^2}$.
b. $f'(x)=\dfrac{-3}{(3-x)^2}$.
c. Pour f_1, $a=1$ et $b=0$; pour f_2, $a=1$ et $b=1$; pour f_3, $a=0$ et $b=1$.

39 a désigne un nombre réel de l'intervalle I.
$T=\dfrac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}$
$=\dfrac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h}$
$=\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}+\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$.
Or u est dérivable en a,
donc $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}\right)=u'(a)$.
De même, $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}\right)=v'(a)$.
Ainsi $\lim\limits_{h\to 0}(T)=u'(a)+v'(a)$.
On en déduit que $u+v$ est dérivable en a et que $(u+v)'(a)=u'(a)+v'(a)$.

40 **a.** $T=\dfrac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}$
$=\dfrac{u(a+h)\,v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$.
b. En développant l'expression proposée, le résultat est immédiat.
c. u est dérivable en a,
donc $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}\right)=u'(a)$.
De même, $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}\right)=v'(a)$.
De plus, $\lim\limits_{h\to 0}(v(a+h))=v(a)$.
Ainsi, $\lim\limits_{h\to 0}(T)=v(a)u'(a)+u(a)v'(a)$.
On en déduit que uv est dérivable en a et que $(uv)'(a)=u'(a)v(a)+v'(a)u(a)$.

41 **1.** $f'(x) = \dfrac{-3(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} = \dfrac{-6x+3}{(x^2-x-2)^2}$.

2. a. $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)(x+1)} = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{-1}{x+1}$.

b. $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

c. $\dfrac{-1}{(x-2)^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{-(x+1)^2+(x-2)^2}{(x-2)^2(x+1)^2}$

$= \dfrac{-x^2-2x-1+x^2-4x+4}{(x-2)^2(x+1)^2} = \dfrac{-6x+3}{(x^2-x-2)^2}$.

42 **a.** $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

b. Équation de la tangente au point d'abscisse 2 :

$y = x - 3$

c. Étude du signe de $f(x) - (x-3)$.

Si $x = 2$ ou $x = -1$, la courbe et la tangente coïncident. Sur $]-1\,;2[\cup]2;+\infty[$, $f(x) - (x-3) > 0$. Donc la courbe est au-dessus de sa tangente.

Sur $]-\infty\,;-1[$, $f(x) - (x-3) < 0$. Donc la courbe est au-dessous de sa tangente.

43 **a.**

x		-1,8		0		3,2	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

b.

x		-1		3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

44 **a.** $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b. Sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante ;

sur $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right[$, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante.

45

x		-1	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	-3	↗

46

x		1	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	-1	↘

47

x		0	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗		

48

x		-1		0		1	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	1	↗	2	↘	1	↗

49 $f'(x) = 2x + 1$.

x		$-\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$-\frac{21}{4}$	↗

50 $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

x		-1	
$f'(x)$	+	‖	+
$f(x)$	↗	‖	↗

51 $f'(x) = \sqrt{x} + x\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

x	0	
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	↗

52 **a.** $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$.

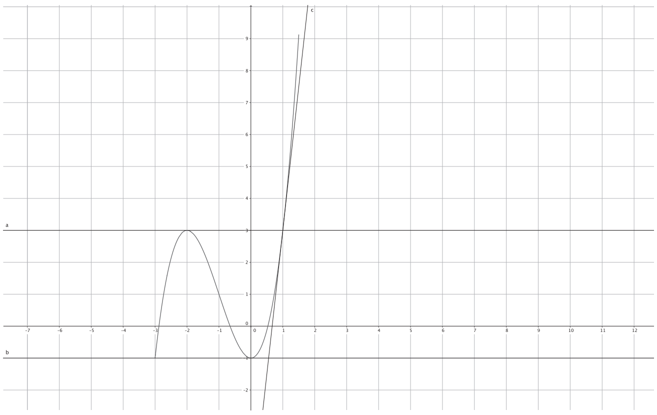
b.

x		-2		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

c. Il y a deux tangentes horizontales aux points $A(-2\,;3)$ et $B(0\,;-1)$.

d. Équation de la tangente au point d'abscisse 1 : $y = 9x - 6$.

e.



53 **a.** $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$.

b.

x		0		$\frac{3}{4}$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	$-\frac{27}{256}$	↗

54 **a.** L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution. Ainsi la fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

b. $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

55 Maximum égal à 1 atteint pour $x = 1$ ou $x = -2$ et minimum égal à -3 atteint pour $x = -1$ ou $x = 2$.

56

x	-3		-2		0		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Maximum local en 0. Minima locaux en -2 et 2.

57 Minima locaux : -14 et -3 ; minimum global : -14. Maxima locaux : 2 ; 11 et 15 ; maximum global : 15.

58 $f'(x) = 2x - 2$.

x		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	4	↗

Minimum égal à 4 atteint pour $x = 1$.

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

Maximum égal à 2 atteint pour $x = -1$ et minimum égal à -2 atteint pour $x = 1$.

59 $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-1) - x^2(2x)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$.

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	0	↘	

Donc f admet un maximum égal à 0 et atteint pour $x = 0$.

60 **a.** $B(x) = R(x) - C(x) = -2x^3 + 15x^2 + 300x - 100$.

b. $B'(x) = -6x^2 + 30x + 300 = 3(-2x^2 + 10x + 100)$.

x	0		10		50
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		↗	2400	↘	

c. Pour obtenir un bénéfice maximal, il faut que $x = 10$. Il faut donc fabriquer 10 000 chargeurs.

$B(10) = 2\,400$.

61 **1.** f semble croissante sur $[-10\ ;\ 10]$.

2. a. $f'(x) = 3x^2 - 0{,}03 = 3(x^2 - 0{,}01)$.

x	-10		$-0{,}1$		$0{,}1$		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

b. La conjecture est donc fausse.

3. Maximum égal à 0,002 atteint pour $x = -0{,}1$ et minimum égal à $-0{,}002$ atteint pour $x = 0{,}1$.

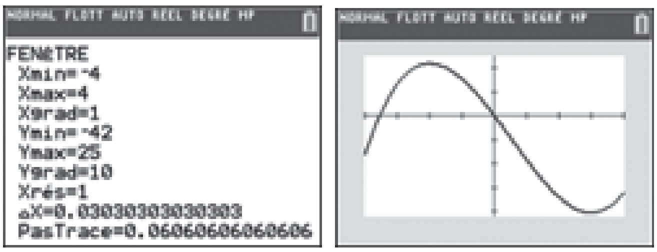
62 **a.** $f'(x) = \dfrac{4(x^2+3) - 2x(4x+1)}{(x^2+3)^2} = \dfrac{-4x^2 - 2x + 12}{(x^2+3)^2}$.

x	-4		-2		$\frac{3}{2}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{15}{19}$	↘	-1	↗	$\frac{4}{3}$	↘	$\frac{17}{19}$

b. Maximum global égal à $\dfrac{4}{3}$ atteint pour $x = \dfrac{3}{2}$.

c. Minimum global égal à -1 atteint pour $x = -2$.

63 **a.**



On conjecture que f admet un minimum égal à -40 environ et atteint pour $x = 3$.

b. $f'(x) = 3x^2 - 3x - 18$.

c.

x	-4		-2		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-16	↗	22	↘	$-40{,}5$	↗	-32

d. Minimum égal à $-40{,}5$ atteint pour $x = 3$.

64 $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x+2) - 1(x^2+x+2)}{(x+2)^2}$

$= \dfrac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} = \dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$.

x	-1		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	1	↗	$\frac{4}{3}$

Minimum local et global égal à 1 atteint pour $x = 0$. Maximum global égal à 2 atteint pour $x = -1$.

65 **a.** $i(R) = \dfrac{230}{10+R}$; $P(R) = R\left(\dfrac{230}{10+R}\right)^2 = \dfrac{52\,900R}{(10+R)^2}$.

b. $P'(R) = \dfrac{52\,900(10+R)^2 - 52\,900[2R(10+R)]}{(10+R)^4}$

$= 52\,900\dfrac{(10+R) - 2R}{(10+R)^3} = 52\,900\,\dfrac{10-R}{(10+R)^3}$.

R	0		10		
$P'(R)$		$+$	0	$-$	
$P(R)$		↗		↘	

c. La puissance P est donc maximale pour une résistance $R = 10$ et $P(10) = 1\,322{,}5$.

66 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 2$.

$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3a - 2b - 2 = 0$;

$f(-1) = 2 \Leftrightarrow -a + b - 2 - 3 = -2 \Leftrightarrow -a + b - 3 = 0$.

Le système obtenu a pour solutions : $a = 8$ et $b = 11$.

67 **a.** $f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$; $f(x) \approx f'((0)(x-0) + f(0) \approx -x + 1$.

b. $0{,}992 = 1 - 0{,}008$; ainsi $\dfrac{1}{0{,}992} = f(-0{,}008)$

et donc $\dfrac{1}{0{,}992} \approx -(-0{,}008) + 1 \approx 1{,}008$.

c. La calculatrice donne 1,008064. L'approximation est donc très bonne.

68 **a.** • $f'(x) = 2(1+x)$; $f(x) \approx 2(x-0) + 1 \approx 2x + 1$;

• $f'(x) = 3(1+x)^2$; $f(x) \approx 3(x-0) + 1 \approx 3x + 1$;

• $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$; $f(x) \approx \dfrac{1}{2}(x-0) + 1 \approx \dfrac{1}{2}x + 1$;

• $f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$; $f(x) \approx -1(x-0) + 1 \approx -x + 1$.

b. $A = (1 + 0{,}005)^2 \approx 1 + 2 \times 0{,}005 \approx 1{,}01$;

$B = (1-0{,}003)^2 \approx 1 + 3 \times (-0{,}003) \approx 0{,}991$;

$C = \sqrt{1-0{,}004} \approx 1 + \dfrac{1}{2} \times (-0{,}004) \approx 0{,}998$;

$D = \dfrac{1}{(1+0{,}007)} \approx 1 - 0{,}007 \approx 0{,}993$.

69 $f(x) = \dfrac{2+x}{(1+x)^2}$;

$f'(x) = \dfrac{(1+x)^2 - 2(1+x)(2+x)}{(1+x)^4} = \dfrac{-3-x}{(1+x)^3}$.

Or $f'(0) = -3$ et $f(0) = 2$,
donc $f(x) \approx -3(x-0) + 2 \approx -3x + 2$.
$N = f(0{,}001) \approx -3(0{,}001) + 2 \approx 1{,}997$.

70 **a.** $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{25+x}}$.

x	25
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\sqrt{50}$ ↗

b. $f'(0) = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$et $f(0) = 5$,
donc $f(x) \approx 0{,}1(x-0) + 5 \approx 0{,}1x + 5$
$\sqrt{25{,}02} = (0{,}02) \approx 0{,}1(0{,}02) + 5 \approx 5{,}002$.
À la calculatrice, on trouve $\sqrt{25{,}02} \approx 5{,}0019996$.

Se tester

71 **1.** Vrai ; **2.** Vrai; **3.** Faux; **4.** Vrai ; **5.** Faux ; **6.** Vrai; **7.** Faux.

72 **1.** Vrai car $f'(x) > 0$.

2. Faux.car $f'(x) > 0$.

3. Vrai. $f'(3) = 2$.

4. Faux car $f'(x) > 0$ et donc le coefficient directeur de la tangente ne peut être égal à -1.

4. Vrai car $f'(x)$ s'annule en 1 et change de signe.

5. Faux car $f(0) > f(3)$.

73 **1. a** ; **2. c** ; **3. b** ;**4. c** ; **5. c.**

74 **1. c.** $f'(x) = 2(3x-4) + 3(2x-5) = 12x - 23$.

2. a. $f'(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$.

3. a. $f'(x) = 2x$.

x		0	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

4. b. $f'(x) = 2(1+x)$; $f(x) \approx 2(x-0) + 1 \approx 2x + 1$.

5. a. $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

x		$-\frac{1}{3}$		1	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Donc sur $]1\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$ et f est croissante.

Exercices d'approfondissement

75 **Parabole**

a. $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Par lecture graphique, $f(-1{,}5) = f(1{,}5) = 0$ et $f(0) = 9$.
On en déduit un système d'inconnues a, b et c. Ainsi, $f(x) = -4x^2 + 9$.

b. $S(x) = f(x) + x = -4x^2 + x + 9$.

$S'(x) = -8x + 1$; $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{8}$ e,t dans ce cas,
$f\left(\dfrac{1}{8}\right) = 143$.

76 **Une inégalité**

a. $f'(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n[(1+x)^{n-1} - 1]$.
Sur $[0\,;+\infty[$, $1 + x \geqslant 1 \Rightarrow (1+x)^{n-1} \geqslant 1$. Ainsi $f'(x) \geqslant 0$.

b.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	0	↗

Ainsi $f(x) \geqslant 0$ et donc $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

c. Équation de la tangente au point d'abscisse 0 : $y = 0$.
Or $f(x) \geqslant 0$, donc la courbe de f est au-dessus de la tangente.

77 **Deux manières de dériver**

a. • $(x-1)^3(2x+3)^2 = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(4x^2 + 12x + 9)$

$= 4x^5 + 12x^4 + 9x^3 - 12x^4 - 36x^3 - 27x^2 + 12x^3 + 36x^2$
$\quad - 27x - 4x^2 - 12x - 9$
$= 4x^5 - 15x^3 + 5x^2 + 15x - 9.$

• $f'(x) = 20x^4 - 45x^2 + 10x + 15.$

b. • $5(x-1)^2(2x+1)(2x+3)$
$= (x^2 - 2x + 1)(4x^2 + 6x + 2x + 3)$
$= (5x^2 - 10x + 5)(4x^2 + 8x + 3)$
$= 20x^4 + 40x^3 + 15x^2 - 40x^3 - 80x^2 - 30x + 20x^2 + 40x + 15$
$= 20x^4 - 45x^2 + 10x + 15$
$= f'(x).$

• $3(x-1)^2(2x+3)^2 + 4(x-1)^3(2x+3)$
$= 3(x^2 - 2x + 1)(4x^2 + 12x + 9)$
$\quad + 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(2x + 3)$
$= (3x^2 - 6x + 3)(4x^2 + 12x + 9)$
$\quad + (4x^3 - 12x^2 + 12x - 4)(2x + 3)$
$= 12x^4 + 36x^3 + 27x^2 - 24x^3 - 72x^2 - 54x + 12x^2$
$\quad + 36x + 27 + 8x^4 + 12x^3 - 24x^3 - 36x^2$
$\quad + 24x^2 + 36x - 8x - 12$
$= 20x^4 - 45x^2 + 10x + 15 = f'(x).$

c. L'étape 3 peut servir à étudier le signe de $f'(x)$ et donc les variations de f.

78 Coût marginal

1. a. $C(100) = 101\,000$; $C(101) = 101\,099$.

b. $C(101) - C(100) = 99$.

2. $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$
$= [2\,000 + 100(x+1) - 0{,}001(x+1)^2]$
$\quad - [2\,000 + 100x - 0{,}001x^2]$
$= 2\,000 + 100x + 100 - 0{,}001x^2 - 0{,}002x - 0{,}001$
$\quad - 2\,000 - 100x + 0{,}001x^2$
$= 99{,}999 - 0{,}002x$

$C_m(x) = 99{,}999 - 0{,}002x$; $C'(x) = 100 - 0{,}002x$.

3. a. $C'(x) = 100 - 0{,}002x$, donc $C'(x) - C_m(x) = 0{,}001$;

b. $C'(100) - C_m(100) = 0{,}001$.

79 Rectangle ou carré ?

On note ℓ la largeur du rectangle.

$x \times \ell = 100 \Leftrightarrow \ell = \dfrac{x}{100}$.

Ainsi $P(x) = 2(x + \ell) = 2\left(x + \dfrac{100}{x}\right)$.

b. $P'(x) = 2\left(1 - \dfrac{100}{x^2}\right) = 2\left(\dfrac{x^2 - 100}{x^2}\right)$.

x		10	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

La fonction P admet donc un minimum pour $x = 10$, ce qui donne une largeur égale à 10. Le rectangle est donc carré.

80 Minimum global

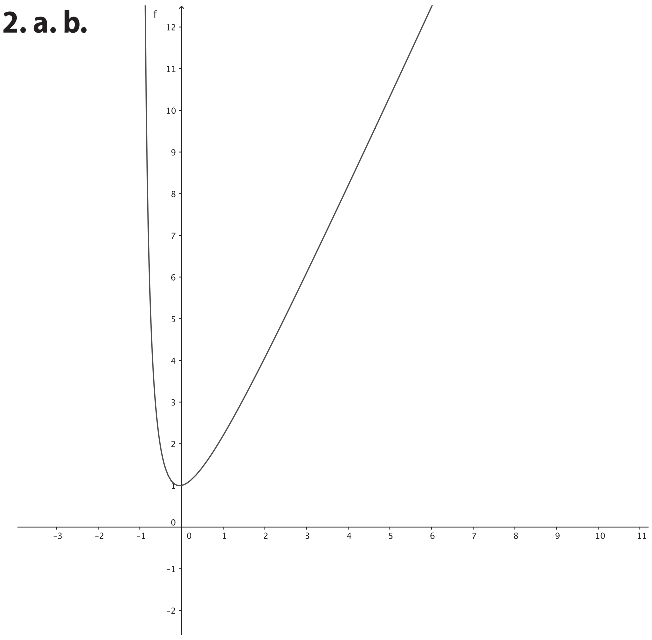
1. a. $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$.

b.

x		$-1+\sqrt{2}$	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

Donc f admet un minimum en $x = -1 + \sqrt{2}$.

2. a. b.



3. a. $f'(x) = m - \dfrac{2}{(x+1)^2} = \dfrac{mx^2 + 2mx + m - 2}{(x+1)^2}$.

L'équation $f'(x) = 0$ n'a qu'une solution positive :

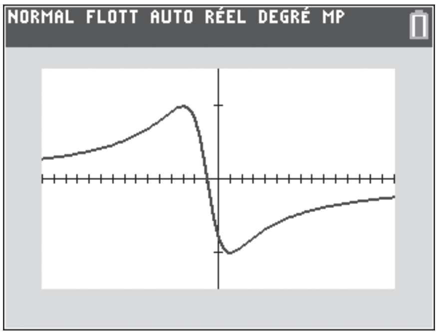
$x_1 = \dfrac{-2m + \sqrt{8m}}{2m}$;

$x_1 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{8m} = 4m \Leftrightarrow 8m = 16m^2 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$.

81 Une fonction bornée

a. $x^2 + 2x + 5$ n'a pas de racine car $\Delta < 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.



b. $f'(x) = \dfrac{4(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 + 2x + 5)^2}$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	1	↘	-1	↗	0

Minimum global égal à -1 atteint pour $x = 1$ et maximum global égal à 1 atteint pour $x = -3$.

82 Tangente de direction donnée

a. $f'(x) = \dfrac{(4x+m)(x+3) - 1(2x^2+mx-7)}{(x+3)^2}$

$= \dfrac{2x^2 + 12x + 3m + 7}{(x+3)^2}$.

b. $f'(-1) = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{3m-3}{4} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m = \dfrac{4}{3}$.

c. $f'(0) = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{3m+7}{9} = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow m = -\dfrac{10}{3}$.

83 Tangente perpendiculaire

(D_1) a pour équation $y = -x + 2$ et a donc -1 pour coefficient directeur.

$f'(x) = \dfrac{(2x+m)(x-1) - 1(x^2+mx+1)}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{x^2 - 2x - m - 1}{(x-1)^2}$.

(D_2) a pour coefficient directeur $f'(2) = -m - 1$.
(D_1) et (D_2) sont perpendiculaires si :
$(-m-1)(-1) = (-1) \Leftrightarrow m = -2$.

84 Vitesse moyenne

1. On note d la distance entre les deux villes. L'équation horaire se traduit par :

$\dfrac{d}{50} + \dfrac{d}{x} = \dfrac{2d}{v} \Leftrightarrow v = \dfrac{100x}{x+50}$.

2. a. $v'(x) = \dfrac{5\,000}{(x+50)^2}$.

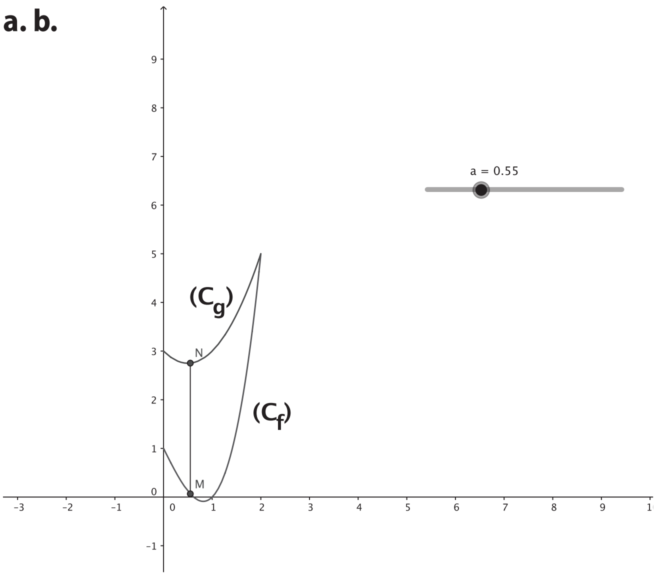
x	0		90
$v'(x)$		+	
$v(x)$	0	↗	$\dfrac{450}{7}$

b. Le maximum est d'environ 64,3 km/h. Il est donc impossible d'atteindre 75 km/h.

c. La vitesse maximale est atteinte pour $x = 90$ et elle est de $\dfrac{450}{7}$ km/h.

85 Distance entre deux courbes

a. b.



On conjecture que la longueur MN est maximale pour $x = 1$.

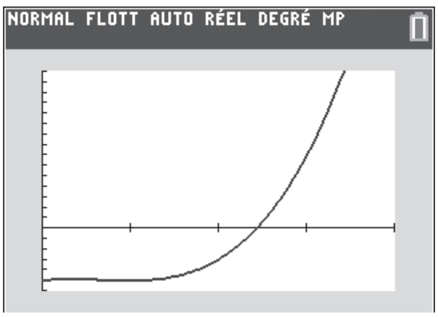
2. a. $h(x) = -x^3 + x^2 + x + 2$; $h'(x) = -3x^2 + 2x + 1$.

x	0		$-\frac{1}{3}$		1		2
$h'(x)$		-	0	+	0	-	
$h(x)$	2	↘	$\dfrac{49}{27}$	↗	3	↘	0

b. Maximum global atteint pour $x = 1$.

86 Étude d'un signe

1.



2. a. $P'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

x	0		$\frac{1}{3}$		1		4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-5	↗	$-\frac{131}{27}$	↘	-5	↗	31

P est croissante sur [1 ; 4] et $0 \in [-5 ; 31]$ donc il y a une valeur d'annulation dans cet intervalle.

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP
APP SUR + POUR ΔTbl

X	Y₁
2.3	-1.113
2.35	-0.717
2.4	-0.296
2.45	0.1511
2.5	0.625
2.55	1.1264
2.6	1.656
2.65	2.2146
2.7	2.803
2.75	3.4219
2.8	4.072

c. $2{,}4 < \alpha < 2{,}5$.

d.

x	0		α		4
$P(x)$		–	0	+	

87 Un problème d'optimisation

a. $CD = \sqrt{x^2+1}$; $t(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{4} + \dfrac{4-x}{8}$.

b. $t'(x) = \dfrac{x}{4\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{2x - \sqrt{x^2+1}}{8\sqrt{x^2+1}}$

$= \dfrac{3x^2-1}{8\sqrt{x^2+1}(2x+\sqrt{x^2+1})}$.

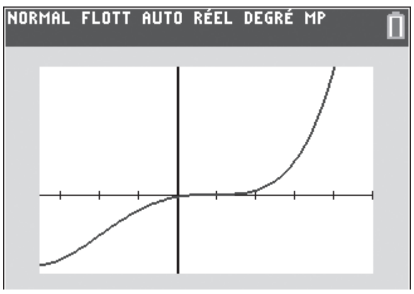
x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		4
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘		↗	

c. Le temps minimum est atteint lorsque $CD = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$ km et dans ce cas,

$t\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{3+4\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} \approx 0{,}72$ h ≈ 43 min.

88 Fonction polynôme du quatrième degré

a.



b. $P'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x + 14$.

$P''(x) = 12x^2 + 12x - 24 = 12(x^2 + x - 2)$.

c.

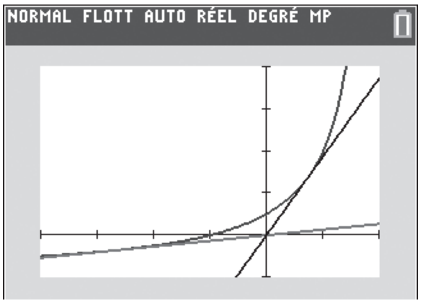
x	-5		-2		1		5
$P''(x)$		+	0	-	0	+	
$P'(x)$	-216	↗	54	↘	0	↗	544

d.

x	-3,5		5
$P'(x)$	0	+	
$P(x)$		↗	

89 Tangente passant par l'origine

a.



b. $f'(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$.

c. $y = \dfrac{3}{(m-2)^2}x + \dfrac{-m^2-2m+2}{(m-2)^2}$.

d. Pour que la tangente passe par l'origine, il faut que $\dfrac{-m^2-2m+2}{(m-2)^2} = 0$, soit $-m^2 - 2m + 2 = 0$.

Deux solutions :

$m_1 = -1 - \sqrt{3}$; $T_1 : y = \dfrac{1}{4+2\sqrt{3}}x$;

$m_2 = -1 + \sqrt{3}$; $T : y = \dfrac{1}{4-2\sqrt{3}}x$.

90 Approximation affine

a. $f'(x) = 8x$; $g(x) = 160x - 1\,597$.

b. $e(x) = 4x^2 - 160x + 1\,600 = 4(x-20)^2$.

c. $f(20{,}001) = 1\,603{,}160\,004$; $g(20{,}001) = 1\,603{,}16$; $e(20{,}001) = 0{,}000\,004$.

c. $f(20{,}000\,001) = 1\,603{,}16$; $g(20{,}000\,001) = 1\,603{,}16$; $e(20{,}000\,001) = 4 \times 10^{-12}$: erreur commise par la calculatrice.

Le problème est dû aux arrondis d'affichage.

91 Diamètre d'une bille

1. Le diamètre du verre est de 10 cm, donc $0 \leqslant d \leqslant 20$.

Volume de l'eau : 50π ; volume de la bille : $\dfrac{\pi d^3}{6}$.
Volume dans le deuxième cas :
$\dfrac{\pi d^3}{6} + 50\pi = 25\pi d \Leftrightarrow d^3 - 150d + 300 = 0$.

2. a. $f'(x) = 3x^2 - 150 = 3(x^2 - 50)$.

x	0		$\boxed{\sqrt{50}}$		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	300	$\searrow$	$\boxed{300 - 100\sqrt{50}}$	$\nearrow$	-200

f est décroissante sur $[0\,;\sqrt{50}]$. De plus $f(0) > 0$ et $f(\sqrt{50}) < 0$. Ainsi l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[0\,;10]$.

c. $a \approx 2{,}05$.

3. Le diamètre de la bille est environ égal à 2,05cm.

92 Tangentes parallèles

a. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$; $g'(x) = 4x - 6$.

$-\dfrac{1}{x^2} = 4x - 6 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$

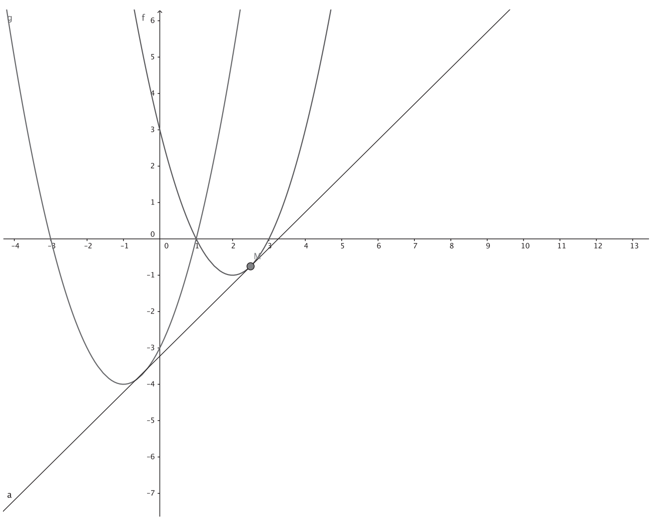
b. $4\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$.

c. $4x^3 - 6x^2 + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)(4x^2 - 4x - 2)$.

Il y a trois valeurs de x pour lesquelles les tangentes sont parallèles : $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

93 Tangentes communes à deux courbes

1.



2. a. $f'(x) = 2x - 4$; $y = (2a - 4)x - a^2 + 3$.

b. $g'(x) = 2x + 2$; $y = (2b + 2)x - b^2 - 3$.

Par identification, on obtient le système.

d. $a = \dfrac{5}{2}$; $b = -\dfrac{1}{2}$ et $y = x - \dfrac{13}{4}$.

94 Prolongement par continuité

a. $g(2) = 3 \Leftrightarrow 4a + 2b - 7 = 3 \Leftrightarrow 2a + b = 5$.

b. $f'(x) = 2x - 1$; $g'(x) = 2ax + b$.
$f'(2) = g'(2) \Leftrightarrow 3 = 4a + b$.

c. $a = -1$; $b = 7$.

d. On trace $(\mathscr{C}f)$ et $(\mathscr{C}g)$ et on observe que les deux coïncident en A et possèdent une tangente commune en ce point.

95 Deux points, une même tangente

1. $f'(x) = -4x^3 + 4x + 1$.

a. $y = x$.

b. $f'(x) = 1 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow -4x(x^2 - 1) = 0$.
Il y a trois solutions : -1 ; 0 et 1.
Mais pour $x = 1$, l'équation de la tangente est : $y = x + 1$.
Pour $x = 0$, l'équation de la tangente est celle de (T) : $y = x$.

2. a. $f'(x) - f'(m) = -4x^3 + 4x + 4m^3 - 4m$.
$= -4(x^3 - m^3 - x + m)$
$= -4(x - m)(x^2 + mx + m^2 - 1)$.

b. $f'(x) - f'(m) = 0 \Rightarrow x = m$ ou $x^2 + mx + m^2 - 1 = 0$.
Or $x \neq m$. Ainsi l'équation $x^2 + mx + m^2 - 1 = 0$ doit avoir au moins une solution.

c. $\Delta \geqslant 0 \Rightarrow -3m^2 + 4 \geqslant 0 \Rightarrow -\sqrt{\dfrac{4}{3}} \leqslant m \leqslant \sqrt{\dfrac{4}{3}}$.

96 Relativité

1. a. $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{1-h} - \dfrac{1}{\sqrt{1}}}{h} = \dfrac{\dfrac{1-\sqrt{1-h}}{\sqrt{1-h}}}{h}$

$= \dfrac{1-\sqrt{1-h}}{h\sqrt{1-h}} = \dfrac{1^2 - (1-h)}{h\sqrt{1-h}(1+\sqrt{1-h})}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-h}(1+\sqrt{1-h})}$.

Donc $\lim\limits_{h \to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+h}\,(1+\sqrt{1+h})}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

b. $f(x) \approx \dfrac{1}{2}x + 1$.

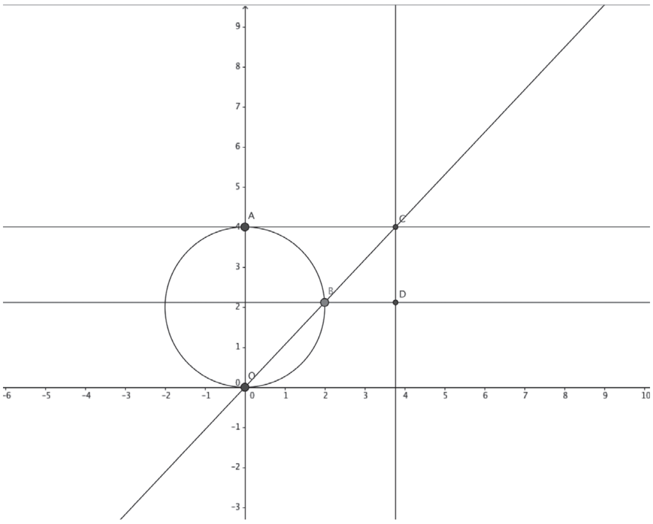
2. Pour des vitesses v très inférieures à celle de la lumière, $\dfrac{v}{c}$ est proche de 0, donc $x = \dfrac{v^2}{c^2}$ est proche de 0. Ainsi, d'après le **1. b.**,

$E_c = (f(x) - 1)mc^2 \approx \dfrac{1}{2}xmc^2 \approx \dfrac{1}{2}mv^2$.

Problèmes

97 La « sorcière d'Agnesi »

1.



2. a. Équation du cercle : $x^2 + (y - 2)^2 = 4$.

$x_B = m \Rightarrow (y_B - 2)^2 = 4 - m^2$. Ainsi, on a deux solutions :

$y_B = 2 - \sqrt{4 - m^2}$ et $y_B = 2 + \sqrt{4 - m^2}$.

b. Équation de la droite (OB) : $y = \dfrac{2 + \sqrt{4 - m^2}}{m}x$.

$y_C = 4 \Rightarrow x_C = \dfrac{4m}{2 + \sqrt{4 - m^2}}$.

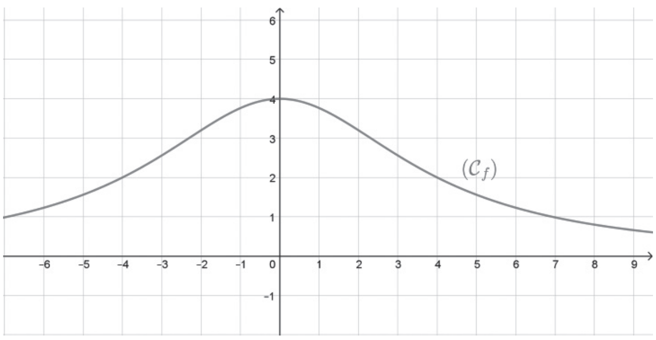
c. $y_D = y_B = 2 + \sqrt{4 - m^2}$; $x_D = x_C = \dfrac{4m}{2 + \sqrt{4 - m^2}}$.

3. a. $f'(x) = \dfrac{-128x}{(x^2 + 16)^2}$.

x		0	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	4	↘

b. Maximum global égal à 4 atteint pour $x = 0$.

c.



98 Méthode d'Euler

Partie A

1. a. $M_0(0 ; 1)$; **b.** $y = -2x + 1$.

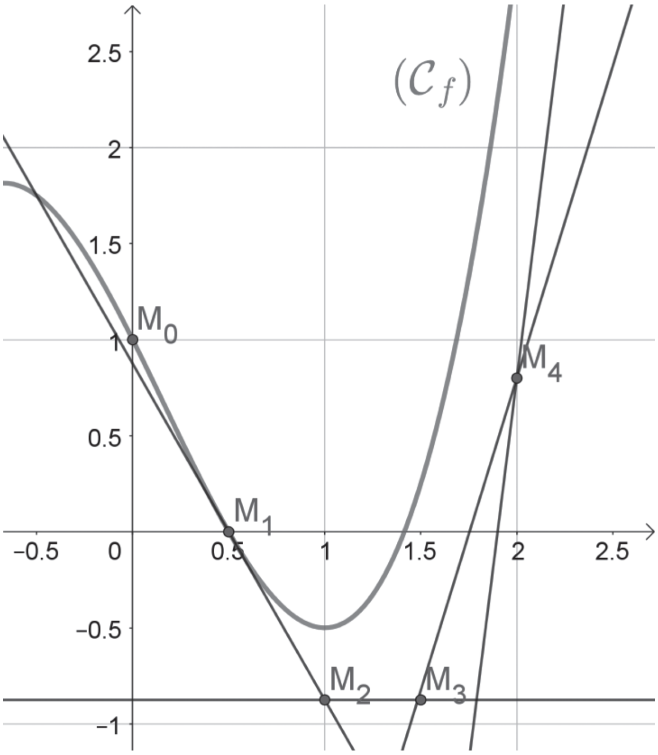
2. a. $M_1(0,5 ; 0)$; **b.** $y = -1,75x + 0,875$.

3. a. $M_2(1 ; -0,875)$; **b.** $y = -0,875$.

a. $M_3(1,5 ; -0,875)$; **b.** $y = 3,25x - 5,7$.

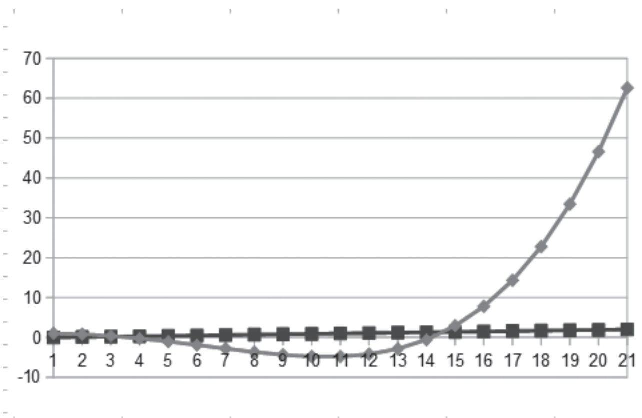
a. $M_4(2 ; 0,8)$; **b.** $y = 8x - 15,2$.

4.



Partie B

a. et **d.**



b. En cellule A4, on a saisi la formule « **=A3+1** ».
En cellule B4, on a saisi la formule « **=A4*B1** ».

c. En cellule C4, on a saisi la formule « **=C3+B4*(3*B4^2-B4-2** ».