

maxi. maths

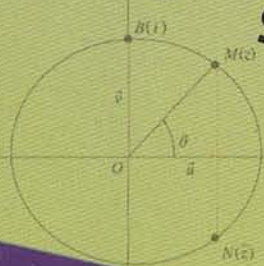
Exercices résolus

Mathématiques

Sc Math

2^{ème} Année Baccalauréat

Option sciences mathématiques
Section internationale



Tome 1

- Résumés de Cours
- Exercices variés et progressifs
- Problèmes de synthèse
- Extraits de sujets du bac

2^{ème} BAC S-M

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = l$$

EDITIONS Plus
إدنيشن بلس

Mari

Exercices résolus

MATHEMATIQUES

Sc Math

2^{ème} année du baccalauréat

Option sciences mathématiques

Section internationale

(Tome 1)

- ▶ **Résumés de cours**
- ▶ **Exercices variés et progressifs**
- ▶ **Problèmes de synthèse**
- ▶ **Extraits de sujets du bac**

Auteurs:

Groupe d'auteurs

Avant - propos

Chèr (e) élève,

Ce livre a été conçu pour permettre aux élèves un travail régulier et continu tout au long de l'année de la classe terminale. Il a été préparé pour vous aider à acquérir la rigueur nécessaire à la réussite aux contrôles continus durant toute l'année scolaire et à l'examen national du baccalauréat, en vous proposant des exercices et des problèmes conformes au programme officiel.

Ce livre contient les chapitres suivants :

1- Continuité d'une fonction numérique

2- Dérivation et étude de fonctions

3- Les suites numériques

4- Fonctions logarithmiques

5- Nombres complexes

Le contenu de chaque chapitre est conçu de la façon suivante :

- Des résumés de cours organisés suivant chaque paragraphe.
- Des exercices préparatoires pour mieux aborder le programme et en faire un point de départ pour l'élaboration d'une base solide en la matière.
- Des exercices classés, ordonnés et progressifs de chaque partie du cours.
- Des exercices de renforcement et de synthèse pour l'enrichissement personnel; ils combinent méthodes, outils et contenus mathématiques.
- Des extraits des sujets d'examens du baccalauréat.

Nous souhaitons vivement que ce livre réponde à vos attentes et participe à votre réussite au baccalauréat...

Les auteurs

Résumé

I Continuité en un point - Continuité sur un intervalle

1) Continuité en un point:

Définition: Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

On dit que la fonction f est continue au point x_0 si : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

2) Continuité à droite-continuité à gauche en un point:

Définitions:

- Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[x_0; x_0 + \alpha[$ où $\alpha > 0$.

On dit que la fonction f est continue à droite au point x_0 si : $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$.

- Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - \alpha; x_0]$ où $\alpha > 0$.

On dit que la fonction f est continue à gauche au point x_0 si : $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$

Propriété:

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.
La fonction f est continue au point x_0 si et seulement si, f est continue à droite et à gauche au point x_0 .

3) Continuité sur un intervalle:

Définitions:

- On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle ouvert I , si elle est continue en tout point de I .

- On dit qu'une fonction f est continue sur le segment $[a; b]$, si elle est continue sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ et continue à droite au point a et à gauche au point b .

4) Continuité des fonctions usuelles:

Propriété:

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles; la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$; la

fonction $x \mapsto \cos x$ et la fonction $x \mapsto \sin x$ sont continues sur tout intervalle inclu dans leurs ensemble de définition.



Image d'un intervalle par une fonction continue

1) Image d'un segment-Image d'un intervalle:

Propriété:

- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

2) Théorème des valeurs intermédiaires:

Théorème:

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux éléments de I . Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un nombre réel c compris entre a et b tel que : $f(c) = k$.

Conséquence:

Si f est continue sur le segment $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation : $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a; b[$ et l'équation admet une solution unique si f est strictement monotone sur $[a; b]$.

3) Cas où f est continue et strictement monotone:

a) f est continue et strictement croissante

I	$f(I)$
$[a; b]$	$[f(a) ; f(b)]$
$[a; b[$	$\left[f(a) ; \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$
$]a; b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) ; f(b) \right]$
$]a; b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) ; \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$

b) f est continue et strictement décroissante

I	$f(I)$
$[a; b]$	$[f(b) ; f(a)]$
$[a; b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) ; f(a) \right]$
$]a; b]$	$\left[f(b) ; \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$]a; b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) ; \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$

- Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique réel c de $[a; b]$ tel que : $f(c) = k$

4) Opérations sur les fonctions continues:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$

- Si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle I , alors les fonctions $f+g$, $f \times g$ et kf sont continues sur I .
- Si f et g sont continues sur I et g ne s'annule pas sur l'intervalle I , alors les deux fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .



Continuité de la composée de deux fonctions

- Soit f et g deux fonctions numériques.
- Si f est continue sur un intervalle I et g est continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I .
- Soit f est une fonction définie sur un intervalle I et g est une fonction définie un intervalle J tel que $f(I) \subset J$ et $x_0 \in I$.

Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

- Soit f une fonction définie sur un intervalle I tels que $f(I) \subset J$.

Si f admet une limite finie ℓ en x_0 et si g est continue en ℓ alors la fonction $g \circ f$ admet la limite $g(\ell)$ au point x_0 .

Exercices d'application

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{1 - \sqrt{3x-5}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1})$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x\sqrt{x^2+x} - 2x^2 - x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + ax^2 - 3 ; x \leq 1 \\ f(x) = ax + b ; 1 < x < 2 \\ f(x) = \frac{ax^2 + 2}{3x - 1} ; x \geq 2 \end{cases}$$

Déterminer les nombres a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2 + \cos x} - \sqrt{3}}{x^2} ; x \neq 0 \\ f(0) = -\frac{\sqrt{3}}{12} \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue en $x_0 = 0$.
- 2) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; |f(x)| \leq \frac{2\sqrt{3}}{x^2}$;
- b) En déduire : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x)$

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; +\infty \right[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \cos^3 x}{x \cdot \sin x \cdot \cos x} ; x \in \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right[\\ f(x) = \frac{3\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} ; x \in [0; +\infty[\end{cases}$$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} f(x)$
- 2) Étudier la continuité de la fonction f au point $x_0 = 0$

Exercice 5

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 2x + \frac{x^2 - 5x + 6}{|x^2 - 9| - |x - 3|}$

- 1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité au point $x_0 = 3$?

Exercice 6

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{(1 - \tan x)^2}{1 + \cos(4x)}$

- 1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f
- 2) a) Soit h un élément de l'ensemble $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[- \left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$;

Montrer que : $f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{2 \tan^2 h}{(1 - \tan h)^2 \cdot \sin^2(2h)}$

- b) Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 7

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{\cos x - \sqrt{1 + \frac{\sin x}{2}}}{x}$

Montrer que f est prolongeable par continuité au point $x_0 = 0$

Exercice 8

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} - \{\pi\}$ par :

$$f(x) = \frac{x \sin x - \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{x - \pi}$$

1) Soit x un élément de $\mathbb{R}^*$, montrer que :

$$f(x + \pi) = -\sin x - \pi \cdot \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

2) Montrer que f est prolongeable par continuité au point $x_0 = \pi$.

Exercice 9

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{\tan(\pi x)}{x - E(x)}$.

1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f .

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$.

$$x < \frac{1}{2}$$

3) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$?

Exercice 10

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$.

1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de f .

b) Étudier la parité de la fonction f .

2) Montrer que : $\left(\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[; 0 < f(x) < \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

3) Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$

Exercice 11

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x\right)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan\left(\sqrt{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\tan^2 x - \pi \tan x}{2x}\right)$$

Exercice 12

1) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 1 - xE\left(\frac{1}{x}\right)$

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*); |f(x)| < |x|$ et en déduire que f est prolongeable par continuité au point $x_0 = 0$

2) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = (\sin x)E\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Montrer que : $(\forall x \in]0; \pi[) ; \frac{\sin x}{x} - \sin x < g(x) \leq \frac{\sin x}{x}$

et $(\forall x \in]-\pi; 0[) ; \frac{\sin x}{x} \leq g(x) < \frac{\sin x}{x} - \sin x$

b) La fonction g admet-elle un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$?

3) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = \frac{x - E(x)}{\sqrt{|x|}}$

La fonction h admet-elle un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$?

Exercice 13

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \sqrt{|x| - E(x)} - x$

1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de f .

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2) Soit k un entier relatif.

a) Étudier la continuité de f à gauche et à droite au point $x_0 = k$

b) Étudier la continuité de f sur l'intervalle $]k; k+1[$.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} : \begin{cases} f(x) = x \times \sqrt{1 + \left(1 + E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+) ; \sqrt{1+x^2} < f(x) \leq \sqrt{x^2 + (x+1)^2}$;

b) En déduire que la fonction f est continue à droite au point $x_0 = 0$.

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3) a) Montrer que : $(\forall x \in [-1; 0[) ; -\sqrt{1+x^2} < f(x) \leq -\sqrt{x^2 + (x+1)^2}$;

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

4) La fonction f est-elle continue au point $x_0 = 0$?

Exercice 15

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{1}{E\left(\frac{2}{x}\right) - 1}$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de f .

2) a) Montrer que : $(\forall x \in D) ; \frac{2-2x}{x} < E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \leq \frac{2-x}{x}$

b) En déduire que la fonction f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$.

Exercice 16

- 1) Montrer que l'équation : $\sqrt{x} - x^3 + 2x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0; 1[$.
- 2) Montrer que l'équation : $\sin x = 1 - x$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0; \frac{\pi}{6}[$.
- 3) Montrer que la courbe de la fonction f telle que : $f(x) = x^5 + 3x^3 + 4x - 5$ coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse a tel que $0 < a < 1$.

Exercice 17

Soit α et β deux éléments de $\mathbb{R}^*$ et f une fonction continue sur le segment $[0; 1]$ telle que : $f(0) \neq f(1)$.

Montrer que : $(\exists x_0 \in]0; 1[) ; \alpha f(0) + \beta f(1) = (\alpha + \beta) f(x_0)$

Solutions**Exercice 1**

1) Calculons $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Soit x un élément de $]1; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} &= \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x-1}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} \times \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \times \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{1}{x+1}} \end{aligned}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} \times \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{1}{2} \times 0 = 0$

Alors : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} \times \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{1}{x+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2) Calculons $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{1 - \sqrt{3x-5}}$

Soit x un élément de l'intervalle $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right[$ et $x \neq 2$, on a :

$$\sqrt{x+2} - 2 = \frac{x-2}{\sqrt{x+2} + 2} \text{ et } 1 - \sqrt{3x-5} = \frac{-3(x-2)}{1 + \sqrt{3x-5}}, \text{ donc :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{1 - \sqrt{3x-5}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2} + 2} \times \frac{1 + \sqrt{3x-5}}{-3(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(1 + \sqrt{3x-5})}{3(\sqrt{x+2} + 2)} = -\frac{1}{6}$$

3) Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

Soit x un élément de l'intervalle $[0; +\infty[$ et $x \neq 1$, on a :

$$\frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \frac{x^2 - 1 - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} - 1 = (x+1)(\sqrt{x}+1) - 1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(\sqrt{x}+1) - 1 = 3$$

$$4) \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1})$$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} (\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}) &= \frac{1}{x} \left(\sqrt{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)} - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(x \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x^2} = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{2} - 1$$

$$5) \text{ Calculons : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x$$

Soit x un élément de l'intervalle $] -\infty; 0[$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x &= -x \sqrt{\frac{x}{x-1}} + x = x \left(1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}} \right) \\ &= x \frac{1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}}}{1 + \sqrt{\frac{x}{x-1}}} = -\frac{x}{x-1} \times \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x}{x-1}}} \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} = 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x}{x-1}} = 1$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x}{x-1} \times \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x}{x-1}}} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$6) \text{ Calculons : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x\sqrt{x^2+x} - 2x^2 - x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} 2x\sqrt{x^2+x} - 2x^2 - x &= -(x^2 + x - 2x\sqrt{x^2+x} + x^2) = -(\sqrt{x^2+x} - x)^2 \\ &= -\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} \right)^2 = -\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \right)^2 \end{aligned}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x\sqrt{x^2 + x} - 2x^2 - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(- \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + 1}} \right)^2 \right) = -\frac{1}{4}$

et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} = 0$

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x\sqrt{x^2 + x} - 2x^2 - x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \times \left(-\frac{1}{4} \right) = 0$

Exercice 2

Déterminons a et b

On a :

- La fonction $x \mapsto x^3 + ax^2 - 3$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme, donc f est continue sur l'intervalle $]-\infty; 1]$.

- La fonction $x \mapsto ax + b$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme, donc f est continue sur l'intervalle $]1; 2[$

- La fonction $x \mapsto \frac{ax^2 + 2}{3x - 1}$ est continue en tout point de $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$, car c'est une fonction rationnelle donc f est continue sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

D'où f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + b) = 2a + b$

et $f(1) = a - 2$ et $f(2) = \frac{4a + 2}{5}$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = a - 2 \\ \frac{4a + 2}{5} = 2a + b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow b = -2 \text{ et } a = 2 \end{aligned}$$

Par suite f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = 2$ et $b = -2$

Exercice 3

1) Montrons que f est continue en $x_0 = 0$.

Soit x un élément de $\mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\sqrt{2 + \cos x} - \sqrt{3})(\sqrt{2 + \cos x} + \sqrt{3})}{x^2(\sqrt{2 + \cos x} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{\cos x - 1}{x^2(\sqrt{2 + \cos x} + \sqrt{3})} = \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \left(\frac{-1}{\sqrt{2 + \cos x} + \sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{2 + \cos x} + \sqrt{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$

Alors : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \left(\frac{-1}{\sqrt{2 + \cos x} + \sqrt{3}} \right) = -\frac{1}{4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{12}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{12} = f(0)$, d'où f est continue en $x_0 = 0$

2) a) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; |f(x)| \leq \frac{2\sqrt{3}}{x^2}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}^*$, on a : $|f(x)| = \frac{|\sqrt{2 + \cos x} - \sqrt{3}|}{x^2}$

et on a : $|\sqrt{2 + \cos x} - \sqrt{3}| \leq \sqrt{2 + \cos x} + \sqrt{3}$

Puisque : $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 + \cos x \leq 3$
 $\Rightarrow 1 \leq \sqrt{2 + \cos x} \leq \sqrt{3}$

Alors : $\sqrt{2 + \cos x} + \sqrt{3} \leq 2\sqrt{3}$ donc : $|\sqrt{2 + \cos x} - \sqrt{3}| \leq 2\sqrt{3}$

D'où : $\frac{|\sqrt{2 + \cos x} - \sqrt{3}|}{x^2} \leq \frac{2\sqrt{3}}{x^2}$, c'est-à-dire : $|f(x)| \leq \frac{2\sqrt{3}}{x^2}$

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; |f(x)| \leq \frac{2\sqrt{3}}{x^2}$

b) Dédution :

On a : $\left\{ \begin{array}{l} (\forall x \in \mathbb{R}^*) ; |f(x)| \leq \frac{2\sqrt{3}}{x^2} \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{3}}{x^2} = 0 \end{array} \right.$

Donc d'après les propriétés des limites et l'ordre, on a : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Exercice 4

1) • Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} \left(3\sqrt{\frac{1}{x} + x} - 1 \right)}{\sqrt{x} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 1 \right)} = \frac{3\sqrt{\frac{1}{x} + x} - 1}{\frac{2}{\sqrt{x}} + 1}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3\sqrt{\frac{1}{x} + x} - 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} + 1 = 1$

Alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{\frac{1}{x} + x} - 1}{\frac{2}{\sqrt{x}} + 1} = +\infty$, donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• Calculons : $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} f(x)$

Soit x un élément de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; 0[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \sin x \cos x} \\ &= \left(\frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{x \sin x} \right) \times \left(\frac{1 - \cos x}{\cos x} \right) \\ &= \left(\frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{x \sin x} \right) \times \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) \end{aligned}$$

Puisque : $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \left(\frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{x \sin x} \right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) = +\infty$

car $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \cos x = 0^+$

alors : $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \left(\frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{x \sin x} \right) \times \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) = +\infty$ donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} f(x) = +\infty$

2) Étudions la continuité de f en $x_0 = 0$.

On a : $f(0) = \frac{3}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} = \frac{3}{2} = f(0)$

• Calculons : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

Soit x un élément de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; 0[$, on a :

$$f(x) = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \sin x \cos x} = \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{x}{\sin x} \times \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos x}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sin x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos x} = 3$

alors : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{x}{\sin x} \times \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{3}{2}$, donc : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{3}{2} = f(0)$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{2} = f(0)$, c'est-à-dire f est continue à gauche en $x_0 = 0$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, alors f est continue en $x_0 = 0$

Exercice 5

1) Déterminons D

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow |x^2 - 9| - |x - 3| \neq 0$

Puisque : $|x^2 - 9| - |x - 3| = 0 \Leftrightarrow |x - 3|(|x + 3| - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow |x - 3| = 0 \text{ et } |x + 3| = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = -4$$

Alors : $x \in D \Leftrightarrow x \neq 3$ et $x \neq -4$ et $x \neq -2$ donc : $D = \mathbb{R} - \{3; -2; -4\}$

2) Étudions si f admet un prolongement par continuité en $x_0 = 3$

• Calculons $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

Soit $x \in D$, on a : $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$

$$\text{Donc : } f(x) = 2x + \frac{(x-3)(x-2)}{|x-3|(|x+3|-1)}$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(2x + \frac{x-2}{|x+3|-1} \right) = \frac{31}{5}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(2x - \frac{x-2}{|x+3|-1} \right) = \frac{29}{5} \text{ ainsi } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

Par suite la fonction f n'admet pas de limite au point $x_0 = 3$, donc f n'est pas prolongeable par continuité au point $x_0 = 3$

Exercice 6

1) Déterminons D .

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right)$ et $1 + \cos(4x) \neq 0$

Puisque : $1 + \cos(4x) = 0 \Leftrightarrow \cos(4x) = -1$

$$\Leftrightarrow 4x = \pi + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}$$

alors : $x \in D \Leftrightarrow \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right)$ et $\left(x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right)$

$$\text{Donc : } D = \mathbb{R} - \left(\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$$

2) a) Montrons que : $f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{2 \tan^2 h}{(1 - \tan h)^2 \cdot \sin^2(2h)}$

$$\text{Soit } h \in]0; \frac{\pi}{2} \left[- \left\{ \frac{\pi}{4} \right\}, \text{ on a : } f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{\left(1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right)\right)^2}{1 + \cos(\pi + 4h)}$$

$$\text{Puisque : } \tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan h}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan h} = \frac{1 + \tan h}{1 - \tan h}$$

$$\text{alors : } 1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = 1 - \frac{1 + \tan h}{1 - \tan h} = \frac{-2 \tan h}{1 - \tan h}$$

$$\text{et on a : } 1 + \cos(\pi + 4h) = 1 - \cos(4h) = 2 \sin^2(2h)$$

$$\text{Donc : } f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{1}{2 \sin^2(2h)} \times \left(\frac{-2 \tan h}{1 - \tan h} \right)^2 = \frac{2 \tan^2 h}{(1 - \tan h)^2 \cdot \sin^2(2h)}$$

b) Montrons que f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Calculons $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x)$

$$\text{On pose : } h = x - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{et on a : } f(x) = f\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 \tan^2 h}{(1 - \tan h)^2 \cdot \sin^2(2h)} = \frac{2}{(1 - \tan h)^2} \times \frac{\left(\frac{\tan h}{h}\right)^2}{\left(\frac{\sin(2h)}{h}\right)^2}$$

Puisque : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan h}{h} = 1$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(2h)}{h} = 2$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \tan h = 0$,

$$\text{alors : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{(1 - \tan h)^2} \times \frac{\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2}{\left(\frac{\sin(2h)}{h}\right)^2} = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

D'où f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

et son prolongement g est défini par :
$$\begin{cases} g(x) = f(x), & x \in D - \{0\} \\ g(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 7

Montrons que la fonction f est prolongeable par continuité au point $x_0 = 0$.

- On a : $D_f = \mathbb{R}^*$
- Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\left(\cos x - \sqrt{1 + \frac{\sin x}{2}}\right)\left(\cos x + \sqrt{1 + \frac{\sin x}{2}}\right)}{x\left(\cos x + \sqrt{1 + \frac{\sin x}{2}}\right)} = \frac{\cos^2 x - 1 - \frac{\sin x}{2}}{x\left(\cos x + \sqrt{1 + \frac{\sin x}{2}}\right)} \\ &= \frac{2(\cos^2 x - 1) - \sin x}{2x\left(\cos x + \sqrt{1 + \frac{\sin x}{2}}\right)} = \frac{-2\sin^2 x - \sin x}{2x\left(\cos x + \sqrt{1 + \frac{\sin x}{2}}\right)} \\ &= \frac{-\sin x(2\sin x + 1)}{2x\left(\cos x + \sqrt{1 + \frac{\sin x}{2}}\right)} = -\frac{\sin x}{x} \times \frac{2\sin x + 1}{2\left(\cos x + \sqrt{1 + \frac{\sin x}{2}}\right)} \end{aligned}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x + 1}{2\left(\cos x + \sqrt{1 + \frac{\sin x}{2}}\right)} = \frac{1}{4},$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin x}{x} \times \frac{2\sin x + 1}{2\left(\cos x + \sqrt{1 + \frac{\sin x}{2}}\right)}\right) = -\frac{1}{4} \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{4}$$

D'où : f est prolongeable par continuité au point $x_0 = 0$ et son prolongement

g est défini par :
$$\begin{cases} g(x) = f(x) ; & x \neq 0 \\ g(0) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Exercice 8

1) Soit $x \in \mathbb{R}^*$, montrons que : $f(x + \pi) = -\sin x + \pi \cdot \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$.

On a : $x \in \mathbb{R}^*$ donc : $x + \pi \neq \pi$

D'où :

$$f(x + \pi) = \frac{(x + \pi) \cdot \sin(x + \pi) - \cos\left(\frac{x + \pi}{2}\right)}{(x + \pi) - \pi} = \frac{(x + \pi) \cdot (-\sin x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)}{x}$$

$$= \frac{-x \sin x - \pi \sin x + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = -\sin x - \pi \cdot \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

2) Montrons que f est prolongeable par continuité au point $x_0 = \pi$.

On a : $D_f = \mathbb{R} - \{\pi\}$,

• Calculons : $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$

On pose : $t = x - \pi$, On a : $f(x) = f(t + \pi) = -\sin t - \pi \cdot \frac{\sin t}{t} + \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t}$

Puisque : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 0$

$$\text{alors : } \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\sin t - \pi \cdot \frac{\sin t}{t} + \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t} \right) = -\pi + \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t + \pi) = \frac{1}{2} - \pi$$

D'où f est prolongeable par continuité au point $x_0 = \pi$ et son prolongement g est définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) ; x \neq \pi \\ g(\pi) = \frac{1}{2} - \pi \end{cases}$$

Exercice 9

1) Déterminons D

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x \in D \Leftrightarrow \left(\pi x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right) \text{ et } x - E(x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x \neq \frac{1}{2} + k ; k \in \mathbb{Z} \right) \text{ et } E(x) \neq x$$

Puisque : $E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$, alors : $x \in D \Leftrightarrow \left(x \neq \frac{1}{2} + k ; k \in \mathbb{Z} \right) \text{ et } x \notin \mathbb{Z}$

$$\text{Donc : } D = \mathbb{R} - \left(\left\{ \frac{1}{2} + k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \mathbb{Z} \right)$$

2) Calculons $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$

$$\begin{matrix} x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2} \end{matrix}$$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; 1[$ tel que : $x \neq \frac{1}{2}$ on a : $E(x) = 0$

$$\text{Donc : } f(x) = \frac{\tan(\pi x)}{x}$$

• Calculons $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \tan(\pi x)$

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \frac{1}{2} \\ x &< \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On pose : $t = x - \frac{1}{2}$,

$$\text{On a : } \tan(\pi x) = \tan\left(\pi\left(t + \frac{1}{2}\right)\right) = \tan\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(\pi t)} = \frac{t}{\tan(\pi t)} \times \left(-\frac{1}{t}\right)$$

$$\text{Puisque : } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan(\pi t)} = \frac{1}{\pi} \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{t}\right) = +\infty$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \tan(\pi x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan(\pi t)} \times \left(-\frac{1}{t}\right) = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} \frac{\tan(\pi x)}{x} = +\infty$$

3) Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; 1[$ tel que : $x \neq \frac{1}{2}$ on a : $f(x) = \frac{\tan(\pi x)}{x}$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(\pi x)}{x} = \pi$$

• Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

Soit x un élément de l'intervalle $] -1; 0[$ on a : $E(x) = -1$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan(\pi x)}{x - 1} = 0$$

$$\text{car : } \lim_{x \rightarrow 0^-} \tan(\pi x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) = -1, \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

D'où, la fonction f n'admet pas de limite finie au point $x_0 = 0$, par suite f n'est pas prolongeable par continuité au point $x_0 = 0$.

Exercice 10

1) a) Déterminons D

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow x \neq 0$ et $\sin x \neq 0$

Puisque : $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi ; k \in \mathbb{Z}$, alors $x \in D \Leftrightarrow x \neq k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Donc : } D = \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

b) Étudions la parité de la fonction f

Soit $x \in D$, on a : $-x \in D$

$$\text{et } f(-x) = \frac{1}{\sin(-x)} - \frac{1}{-x} = \frac{-1}{\sin x} + \frac{1}{x} = -\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

Donc : $(\forall x \in D) ; (-x \in D \text{ et } f(-x) = -f(x))$ d'où f est une fonction impaire.

2) Montrons que : $\left(\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right) ; 0 < f(x) < \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Rappel : $\left(\forall \alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right) ; 0 < \sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$

$$\begin{aligned}\text{Soit } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\text{ on a : } 0 < \sin x < x &\Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x} \\ &\Rightarrow 0 < \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Donc : $f(x) > 0$ (1)

$$\begin{aligned}\text{D'autre part, on a : } 0 < x < \tan x &\Rightarrow \frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{x} < -\frac{1}{\tan x} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } f(x) < \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}$$

Puisque :

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\text{alors : } f(x) < \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad (2)$$

d'où de (1) et (2) on conclut que : $0 < f(x) < \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Par suite : $\left(\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right) ; 0 < f(x) < \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

3) Montrons que la fonction f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned}\text{On a : } &\left(\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right) ; 0 < f(x) < \tan\left(\frac{x}{2}\right) \\ &\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \end{array} \right.\end{aligned}$$

Donc d'après les propriétés des limites et l'ordre, on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

On pose : $t = -x$, puisque la fonction f est impaire, alors

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(-t) = - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Par suite f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$.

Exercice 11

1) Calculons : $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right)$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{x} = \pi$ et la fonction $\cos$ est continue au point π

alors : $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right) = \cos \pi = -1$

2) Calculons : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan\left(\sqrt{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a : $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$

Donc : $\left|\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \sqrt{x}$ c'est-à-dire : $\left|\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \sqrt{x}$

Donc : $\begin{cases} (\forall x \in]0; +\infty[) ; \left|\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \sqrt{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \end{cases}$

D'où d'après les propriétés des limites et l'ordre, on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Puisque la fonction $\tan$ est continue au point 0,

alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan\left(\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \tan(0) = 0$

3) Calculons : $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow x - x^2 \leq x + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2 + x$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow 0} x - x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x = 0$

alors : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x = 0$ d'après les propriétés des limites et l'ordre.

et on a la fonction $\cos$ est continue au point 0,

alors : $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x\right) = \cos(0) = 1$

4) Calculons : $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\tan^2 x - \pi \tan x}{2x}\right)$

Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et $x \neq 0$, on a :

$$\frac{\tan^2 x - \pi \tan x}{2x} = \frac{\tan(x)(\tan x - \pi)}{2x} = \frac{\tan(x)}{x} \times \left(\frac{\tan x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ alors : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - \pi \tan x}{2x} = -\frac{\pi}{2}$

et on a la fonction $\sin$ est continue au point $-\frac{\pi}{2}$,

donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\tan^2 x - \pi \tan x}{2x}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

Exercice 12

1) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; |f(x)| < |x|$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \iff 0 \leq \frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right) < 1$

Donc : $\left| \frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right) \right| < 1$ d'où : $|x| \left| \frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right) \right| < |x|$

c'est-à-dire $\left| 1 - xE\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$ donc : $|f(x)| < |x|$

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; |f(x)| < |x|$

• Dédution :

On a : $\begin{cases} (\forall x \in \mathbb{R}) ; |f(x) - 0| < |x| \\ \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \end{cases}$

donc d'après les propriétés des limites et l'ordre, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

d'où : $0 \notin D_f$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ signifie que f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$

et ce prolongement est défini par : $\begin{cases} g(x) = f(x) ; x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

2) a) Montrons que : $(\forall x \in]0; \pi[) ; \frac{\sin x}{x} - \sin x < g(x) \leq \frac{\sin x}{x}$

Soit $x \in]0; \pi[$, on a : $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$

Puisque $\sin x > 0$, alors : $\frac{\sin x}{x} - \sin x < (\sin x) E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{\sin x}{x}$

Donc : $(\forall x \in]0; \pi[) ; \frac{\sin x}{x} - \sin x < g(x) \leq \frac{\sin x}{x}$

• Montrons que : $(\forall x \in]-\pi; 0[) ; \frac{\sin x}{x} \leq g(x) < \frac{\sin x}{x} - \sin x$

Soit $x \in]-\pi; 0[$, on a : $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$;

Puisque $\sin x < 0$, alors : $\frac{\sin x}{x} - \sin x > (\sin x) E\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{\sin x}{x}$

Donc : $\frac{\sin x}{x} \leq g(x) < \frac{\sin x}{x} - \sin x$

D'où : $(\forall x \in]-\pi; 0[) ; \frac{\sin x}{x} \leq g(x) < \frac{\sin x}{x} - \sin x$

b) Étudions si la fonction g admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$.

• On a : $0 \notin D_g$

- On a : $\left\{ \begin{array}{l} (\forall x \in]0; \pi[) ; \frac{\sin x}{x} - \sin x < g(x) \leq \frac{\sin x}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} - \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right.$
- On a : $\left\{ \begin{array}{l} (\forall x \in]-\pi; 0[) ; \frac{\sin x}{x} \leq g(x) < \frac{\sin x}{x} - \sin x \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} - \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right.$

Donc d'après les propriétés des limites et l'ordre on a : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1$ c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$;

Par suite, la fonction g admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$.

3) Étudions le prolongement par continuité de la fonction h au point $x_0 = 0$.

■ Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$

Soit x un élément de $]0; 1[$, on a : $E(x) = 0$ donc : $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$

■ Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$

Soit x un élément de $] -1; 0[$, on a : $E(x) = -1$

donc : $h(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-x}} = -\sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{-x}}$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{-x}} \right) = +\infty$, par suite h n'admet pas une limite

finie au point $x_0 = 0$, donc la fonction h n'est pas prolongeable par continuité au point $x_0 = 0$

Exercice 13

1) Déterminons D :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow |x| - E(x) \geq 0$

Puisque : $E(x) \leq x < E(x) + 1$ et $-|x| \leq x \leq |x|$

alors : $E(x) \leq |x|$ c'est-à-dire : $|x| - E(x) \geq 0$

Donc : $x \in D \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ d'où : $D = \mathbb{R}$.

b) • Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Soit x un élément de $]0; +\infty[$, on a : $f(x) = \sqrt{x - E(x)} - x$

Puisque : $E(x) \leq x < E(x) + 1$ alors $0 \leq x - E(x) < 1$

Donc $0 \leq \sqrt{x - E(x)} < 1$ c'est-à-dire $-x \leq \sqrt{x - E(x)} - x < 1 - x$

$$\text{D'où : } \begin{cases} (\forall x \in]0; +\infty[) ; f(x) < 1 - x \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) = -\infty \end{cases}$$

Ainsi d'après les propriétés des limites et l'ordre, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

• Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Soit x un élément de $]-\infty; 0]$, on a : $f(x) = \sqrt{-x - E(x)} - x$

Puisque : $x - E(x) \geq 0$ alors $-x - E(x) \geq -2x$;

Donc : $\sqrt{-x - E(x)} - x \geq \sqrt{-2x} - x$ c'est-à-dire $f(x) \geq \sqrt{-2x} - x$

$$\text{D'où : } \begin{cases} (\forall x \in]-\infty; 0]) ; f(x) \geq \sqrt{-2x} - x \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-2x} - x = +\infty \end{cases}$$

Ainsi d'après les propriétés des limites et l'ordre, on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2) a) Étudions la continuité de f à droite en $x_0 = k$.

Soit x un élément de $[k; k+1[$, on a : $E(x) = k$

Donc : $f(x) = \sqrt{|x| - k} - x$

$$\text{D'où : } \lim_{\substack{x \rightarrow k \\ k > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow k \\ k > 0}} \sqrt{|x| - k} - x = \sqrt{|k| - k} - k$$

et on a : $f(k) = \sqrt{|k| - k} - k$ donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow k \\ k > 0}} f(x) = f(k)$

Par suite, la fonction f est continue à droite au point $x_0 = k$.

• Étudions la continuité de f à gauche en $x_0 = k$.

x un élément de $]k-1; k]$, on a $E(x) = k-1$.

Donc : $f(x) = \sqrt{|x| - k + 1} - x$

$$\text{D'où : } \lim_{\substack{x \rightarrow k \\ x < k}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow k \\ x < k}} \sqrt{|x| - k + 1} - x = \sqrt{|k| - k + 1} - k$$

et puisque : $f(k) = \sqrt{|k| - k} - k$ alors $f(k) \neq \sqrt{|k| - k + 1} - k$,

donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow k \\ x < k}} f(x) \neq f(k)$, ainsi la fonction f n'est pas continue à gauche au point $x_0 = k$

b) Étudions la continuité de f sur l'intervalle $]k; k+1[$.

On a : $(\forall x \in]k; k+1[) ; f(x) = \sqrt{|x| - k} - x$

La fonction : $x \mapsto |x| - k$ est continue sur l'intervalle $]k; k+1[$ et $|x| - k \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $]k; k+1[$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{|x| - k}$ est continue sur l'intervalle $]k; k+1[$ et on a la fonction $x \mapsto -x$ est continue sur l'intervalle

$]k; k+1[$

Donc la fonction f est continue sur l'intervalle $]k; k+1[$ comme somme de deux fonctions continues sur l'intervalle $]k; k+1[$.

Exercice 14

1) a) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \sqrt{1+x^2} < f(x) \leq \sqrt{x^2+(x+1)^2}$

Soit x un élément de $]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right) + 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x} < 1 + E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{x^2} < \left(1 + E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 \leq \frac{(x+1)^2}{x^2}$$

$$\text{c'est-à-dire : } \frac{1+x^2}{x^2} < 1 + \left(1 + E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 \leq \frac{x^2 + (1+x)^2}{x^2}$$

$$\text{D'où : } \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} < \sqrt{1 + \left(1 + E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2} \leq \frac{\sqrt{x^2 + (1+x)^2}}{x}$$

$$\text{Ainsi : } \sqrt{1+x^2} < x \cdot \sqrt{1 + \left(1 + E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2} \leq \sqrt{x^2 + (1+x)^2}$$

$$\text{Par suite : } (\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \sqrt{1+x^2} < f(x) \leq \sqrt{x^2 + (1+x)^2}$$

b) Dédution :

$$\text{On a : } (\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \sqrt{1+x^2} < f(x) \leq \sqrt{x^2 + (1+x)^2}$$

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + (1+x)^2} = 1$ donc d'après les propriétés des limites et l'ordre, on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

$$\text{Puisque } f(0) = 1 \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

D'où la fonction f est continue à droite au point $x_0 = 0$.

2) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\text{D'après la question 1) a) on a : } (\forall x \in]0; +\infty[) ; f(x) > \sqrt{1+x^2}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3) a) Montrons que : $(\forall x \in [-1; 0]) ; -\sqrt{1+x^2} < f(x) \leq -\sqrt{x^2 + (1+x)^2}$

Soit x un élément de $[-1; 0[$, on a :

$$\begin{aligned}E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right) + 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \\&\Leftrightarrow \frac{1}{x} < 1 + E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1+x}{x}\end{aligned}$$

Puisque : $\frac{1+x}{x} \leq 0$ alors : $0 \leq -\left(\frac{1+x}{x}\right) \leq -\left(1 + E\left(\frac{1}{x}\right)\right) < -\frac{1}{x}$

$$\text{Donc : } \frac{(1+x)^2}{x^2} \leq \left(1 + E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 < \frac{1}{x^2}$$

$$\text{D'où : } \frac{(1+x)^2 + x^2}{x^2} \leq 1 + \left(1 + E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 < \frac{1+x^2}{x^2}$$

$$\text{et on a : } -1 \leq x < 0 \text{ donc : } \frac{\sqrt{x^2 + (1+x)^2}}{-x} \leq \sqrt{1 + \left(1 + E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2} < \frac{\sqrt{1+x^2}}{-x}$$

$$\text{D'où : } -\sqrt{1+x^2} < x \cdot \sqrt{1 + \left(1 + E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2} \leq -\sqrt{x^2 + (x+1)^2}$$

$$\text{c'est-à-dire : } -\sqrt{1+x^2} < f(x) \leq -\sqrt{x^2 + (x+1)^2}$$

$$\text{Par suite : } (\forall x \in [-1; 0[) ; -\sqrt{1+x^2} < f(x) \leq -\sqrt{x^2 + (1+x)^2}$$

b) Dédution :

$$\text{On a : } (\forall x \in [-1; 0[) ; -\sqrt{1+x^2} < f(x) \leq -\sqrt{x^2 + (1+x)^2}$$

et $\lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sqrt{1+x^2}) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sqrt{x^2 + (1+x)^2}) = -1$, donc d'après les propriétés des limites et l'ordre, on a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

4) Étudions la continuité de f au point $x_0 = 0$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \text{ et } f(0) = 1, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq f(0)$$

D'où la fonction f n'est pas continue à gauche en $x_0 = 0$, par suite la fonction f n'est pas continue au point $x_0 = 0$.

Exercice 15

1) Déterminons D :

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } x \in D \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \neq 0$$

$$\text{Puisque : } E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow E\left(\frac{2}{x}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{2}{x} < 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{x}{2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 < x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow x \in]1; 2]$$

alors : $x \in D \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \notin]1; 2]$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1] \cup]2; +\infty[$$

Donc : $D =]-\infty; 0[\cup]0; 1] \cup]2; +\infty[$

2) a) Montrons que :

$$(\forall x \in D) ; \frac{2-2x}{x} < E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \leq \frac{2-x}{x}$$

Soit $x \in D$; on a : $E\left(\frac{2}{x}\right) \leq \frac{2}{x} < E\left(\frac{2}{x}\right) + 1$

donc : $\frac{2}{x} - 1 < E\left(\frac{2}{x}\right) \leq \frac{2}{x}$ c'est-à-dire : $\frac{2}{x} - 2 < E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \leq \frac{2}{x} - 1$

D'où : $\frac{2-2x}{x} < E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \leq \frac{2-x}{x}$ par suite :

$$(\forall x \in D) ; \frac{2-2x}{x} < E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \leq \frac{2-x}{x}$$

b) Dédution :

• Calculons : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

Soit $x \in]0; 1[$, on a : $\frac{2-2x}{x} < E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \leq \frac{2-x}{x}$

Puisque : $\frac{2-2x}{x} > 0$ alors : $\frac{x}{2-x} \leq \frac{1}{E\left(\frac{2}{x}\right) - 1} < \frac{x}{2-2x}$

Donc : $(\forall x \in]0; 1[) ; \frac{x}{2-x} \leq f(x) < \frac{x}{2-2x}$

et on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2-2x} = 0$ donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

• Calculons : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

Soit $x \in]-\infty; 0[$, on a : $\frac{2-2x}{x} < E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \leq \frac{2-x}{x}$

Puisque : $\frac{2-x}{x} < 0$ alors : $\frac{x}{2-x} \leq \frac{1}{E\left(\frac{2}{x}\right) - 1} < \frac{x}{2-2x}$

Donc : $(\forall x \in]-\infty; 0[) ; \frac{x}{2-x} \leq f(x) < \frac{x}{2-2x}$ et on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2-2x} = 0$$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ finalement on a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $0 \notin D$.

Donc la fonction f est prolongeable par continuité au point $x_0 = 0$

Exercice 16

1) Montrons que l'équation $\sqrt{x} - x^3 + 2x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0; 1[$.

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = \sqrt{x} - x^3 + 2x - 1$.

• La fonction f est continue sur $[0; 1]$ car c'est la somme de deux fonctions continues f_1 et f_2 sur $[0; 1]$ telles que : $f_1: x \mapsto \sqrt{x}$ et $f_2: x \mapsto -x^3 + 2x - 1$ (f_1 est la restriction d'une fonction polynôme sur l'intervalle $[0; 1]$ et f_2 est la restriction de la fonction racine carrée sur l'intervalle $[0; 1]$).

et on a : $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ donc $f(0) \times f(1) < 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins c de $]0; 1[$ tel que $f(c) = 0$ d'où l'équation $\sqrt{x} - x^3 + 2x - 1 = 0$ admet au moins une solution c dans $]0; 1[$.

2) Montrons que l'équation $\sin x = 1 - x$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0; \frac{\pi}{6}[$.

Soit f la fonction numérique définie sur $[0; \frac{\pi}{6}]$ par : $f(x) = \sin x + x - 1$

• La fonction f est la somme des deux fonctions f_1 et f_2 telles que :

$$f_1: x \mapsto \sin x \text{ et } f_2: x \mapsto x - 1$$

Puisque f_1 est continue sur $[0; \frac{\pi}{6}]$ (restriction de $\sin$ sur $[0; \frac{\pi}{6}]$)

et f_2 est continue sur $[0; \frac{\pi}{6}]$ (restriction d'une fonction polynôme sur $[0; \frac{\pi}{6}]$)

alors f est continue sur $[0; \frac{\pi}{6}]$

$$\bullet \text{ On a : } f(0) = -1 \text{ et } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} - 1 = \frac{\pi - 3}{6}$$

Donc : $f(0) \times f\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0$ (car : $\pi - 3 > 0$) et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{6}[$ tel que $f(c) = 0$.

d'où, l'équation: $\sin x = 1 - x$ admet au moins une solution c dans $]0; \frac{\pi}{6}[$.

• Montrons que c est unique, pour cela, on montre que f est strictement monotone sur $]0; \frac{\pi}{6}[$.

On a : $(\forall x \in]0; \frac{\pi}{6}[) ; f'(x) = \cos x + 1$, puisque $(\forall x \in]0; \frac{\pi}{6}[) ; \cos x > -1$ alors $f'(x) > 0$ pour tout x de $]0; \frac{\pi}{6}[$, donc f est strictement croissante sur

$\left]0; \frac{\pi}{6}\right]$ d'où c est unique.

On en déduit que l'équation : $\sin x = 1 - x$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{6}\right[$.

3) Montrons que la courbe (C_f) de la fonction f coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse a telle que : $0 < a < 1$.

On a : La courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse a tel que : $0 < a < 1$ signifie que : $(\exists! a \in]0; 1]) ; f(a) = 0$

• On a : $f(x) = x^5 + 3x^3 + 4x - 5$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

f est continue sur l'intervalle $[0; 1]$ car c'est la restriction d'une fonction polynôme sur $[0; 1]$ (1)

• On a : $f(0) = -5$ et $f(1) = 3$ donc $f(0) \times f(1) < 0$ (2)

• Et on a : $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 4$ donc $(\forall x \in [0; 1]) ; f'(x) > 0$

d'où f est strictement croissante sur $[0; 1]$ (3)

De (1), (2) et (3), on déduit qu'il existe un réel unique a de l'intervalle $]0; 1[$ tel que $f(a) = 0$, c'est-à-dire la courbe de la fonction f coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse a telle que $0 < a < 1$.

Exercice 17

Montrons que : $(\exists x_0 \in]0; 1]) ; \alpha f(0) + \beta f(1) = (\alpha + \beta)f(x_0)$

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$h(x) = \alpha f(0) + \beta f(1) - (\alpha + \beta)f(x)$$

On a : La fonction f est continue sur l'intervalle $[0; 1]$ et la fonction $x \mapsto \alpha f(0) + \beta f(1)$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0; 1]$ donc la fonction h est continue sur le segment $[0; 1]$ car c'est la somme de deux fonctions continues sur le segment $[0; 1]$

$$h(0) = \alpha f(0) + \beta f(1) - (\alpha + \beta)f(0) = \beta(f(1) - f(0))$$

$$\text{et } h(1) = \alpha f(0) + \beta f(1) - (\alpha + \beta)f(1) = -\alpha(f(1) - f(0))$$

$$\text{Donc : } h(0) \times h(1) = -\alpha\beta(f(1) - f(0))^2$$

Puisque : $f(1) \neq f(0)$ c'est-à-dire : $f(1) - f(0) \neq 0$ et $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

alors : $-\alpha\beta(f(1) - f(0))^2 < 0$ donc : $h(0) \times h(1) < 0$

D'où : La fonction h est continue sur le segment $[0; 1]$ et $h(0) \times h(1) < 0$,

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a :

$$(\exists x_0 \in]0; 1[) ; h(x_0) = 0$$

$$\text{et on a : } h(x_0) = 0 \iff \alpha f(0) + \beta f(1) - (\alpha + \beta)f(x_0) = 0$$

$$\iff \alpha f(0) + \beta f(1) = (\alpha + \beta)f(x_0)$$

$$\text{Donc : } (\exists x_0 \in]0; 1[) ; \alpha f(0) + \beta f(1) = (\alpha + \beta)f(x_0)$$

IV Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

1) Fonction réciproque:

Définition: Soit f une fonction numérique continue et strictement monotone sur un intervalle I et soit J l'image de l'intervalle I par la fonction f .

La fonction qui associe à tout élément y de J , l'unique élément x de I tel que $f(x) = y$, est appelée la fonction réciproque de f et on la note par : f^{-1} .

conséquences: Soit f une fonction numérique continue et strictement monotone sur un intervalle I et f^{-1} est sa fonction réciproque alors :

$$\bullet \left(\begin{cases} f(x) = y \\ x \in I \end{cases} \iff \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in f(I) \end{cases} \right) \quad \bullet (\forall x \in I) ; (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$\bullet (\forall x \in f(I)) ; (f \circ f^{-1})(x) = x$$

Propriété: Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $f(I)$.

2) Propriétés de la fonction réciproque:

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f^{-1} est sa fonction réciproque, alors :

- f^{-1} est continue sur l'intervalle $f(I)$.
- f^{-1} est strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ (de même monotonie que f sur I)
- Les courbes des deux fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation: $y = x$ dans un repère orthonormé.

V Fonction racine $n^{\text{ième}}$

1) Propriétés :

$$\bullet \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad \bullet a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b} \quad \bullet a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

$$\begin{aligned} \bullet a - b &= \frac{a^4 - b^4}{(a+b)(a^2+b^2)} & \bullet \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} &= \frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} \\ \bullet \sqrt{a} - \sqrt{b} &= \frac{a-b}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2})} \end{aligned}$$

2) Fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$:

$$\begin{aligned} \bullet [0; +\infty[&\longrightarrow [0; +\infty[& \bullet (\forall x \in [0; +\infty[) ; (\sqrt[n]{x})^n &= \sqrt[n]{x^n} = x \\ \bullet \sqrt[n]{\cdot} : x &\longmapsto \sqrt[n]{x} \\ \bullet (\forall y \in [0; +\infty[) ; (\forall x \in [0; +\infty[) &; \sqrt[n]{x} = y \iff x = y^n \end{aligned}$$

VI Fonction Arctan

1) Les propriétés de la fonction $\text{Arc tan} : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

$$\begin{aligned} \bullet (\forall x \in \mathbb{R}) ; \tan(\text{Arc tan } x) &= x & \bullet \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[; \text{Arc tan}(\tan x) &= x \\ \bullet (\forall x \in \mathbb{R}) ; \left(\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right) &; \text{Arc tan } x = y \iff \tan y = x \end{aligned}$$

2) Limites usuelles

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arc tan } x &= \frac{\pi}{2} & \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arc tan } x &= -\frac{\pi}{2} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan } x}{x} &= 1 \end{aligned}$$

Exercices d'application

Exercice 18

Soit f une fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $]-\infty; 1[$ et g une fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $]1; +\infty[$ telles que f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ et il existe deux réels x_1 et x_2 de $\mathbb{R}^*$ vérifiant : $x_1 < x_2$ et $f(x_1) = x_1$ et $g(x_2) = x_2$. Montrer que : $(\exists x_3 \in]x_1; x_2[) ; (f \times g)(x_3) = x_3$

Exercice 19

Soit f une fonction numérique continue sur l'intervalle $[0; 1]$ telle que :

$$f(0) = f(1)$$

Montrer que : $(\exists c \in [0; \frac{1}{2}]) ; f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$

Exercice 20

Soit f une fonction définie de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ et continue sur $[0; 1]$.

Montrer que : $(\exists \alpha \in [0; 1]) ; f(\alpha) + f(1 - \alpha) = 2\alpha$

Exercice 21

Dans chacune des questions suivantes, f est une fonction numérique et g sa restriction sur l'intervalle I .

Montrer que g est bijective de I sur un intervalle J que l'on déterminera; puis déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

$$1) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} ; I = [0; 1[\quad ; \quad 2) f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} ; I = [-1; 1]$$

$$3) f(x) = (x + 1)\sqrt{x + 1} - 1 ; I = [-1; +\infty[$$

$$4) f(x) = \sqrt[3]{x + 1} - 3 ; I = [-1; +\infty[$$

$$5) f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 ; I = \mathbb{R}$$

Exercice 22

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1) \sqrt{1 - x} = 1 - x$$

$$4) \sqrt[3]{x + 7} + \sqrt[3]{28 - x} = 5$$

$$2) x + \sqrt[3]{x} = 2$$

$$5) \sqrt{\frac{2 - x}{3 + x}} + \sqrt{\frac{3 + x}{2 - x}} = 2$$

$$3) \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12$$

$$6) 4x - 3\sqrt[3]{x} - 1 = 0$$

Exercice 23

Calculer les limites suivantes:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2} - x}{x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{4x + 4} - 2}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{1 - \sqrt[3]{x + 1}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt{x + 1}}{x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3 - x} - 1}{2 - \sqrt[3]{x + 6}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt{x^3 + 1})$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x} - 1 + \sqrt{(x - 1)^3}}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - \sqrt[3]{3x + 5}}{1 - \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2(1 - \sqrt{x})} - \frac{1}{3(1 - \sqrt[3]{x})}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{x}$$

$$12) \lim_{\substack{x \rightarrow 8 \\ x < 8}} \frac{(4 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{x - 8}$$

Exercice 24

Calculer les limites suivantes

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x + \sqrt[3]{x^2}}{x} \right)$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt[3]{x-1})$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x - \sqrt{1-x})$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x)$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - 2x)$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}})$

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 2}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 2} \right)$

9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{3}{2}} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}))$

10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{1-x^3} - \sqrt[4]{x^4-1})$

11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2+x})$

12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3-x^2} - \sqrt{x^2-1})$

13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}} \right)$

14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x+1}} \right)$

15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos(x) - \cos(2x)}{\sqrt[3]{x}} \right)$

16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{1+\frac{8x}{x^4}}} \right)$

Exercice 25Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2} - 1$ 1) Déterminer D l'ensemble de définition de f 2) Calculer les limites suivantes : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ 3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$.a) Montrer que g est bijective de I sur un intervalle J à déterminerb) Montrer que : $(\forall x \in [1; +\infty[); g(x) < x$ **Exercice 26**Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2-x}$.1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de f .b) Montrer que f est bijective de D sur un intervalle J à déterminer.2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $f(x) = \sqrt[3]{2x}$.

Exercice 27

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \sqrt[3]{1-x} - \sqrt{x}$

- 1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de f .
- b) Montrer que f est continue sur D .
- c) Montrer que f est bijective de D sur un intervalle J à déterminer.
- 2) Montrer que : $\left(\exists c \in \left]0; \frac{1}{2}\right[; f(c) = c^3\right)$
- 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = \sqrt{1-2x}$
- 4) Calculons $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}}$

Exercice 28

- 1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \cos(\text{Arc tan } x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, puis en déduire que :
 $(\forall x \in \mathbb{R}); \sin(\text{Arc tan } x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- 2) Soit $x \in \mathbb{R}$, déterminer en fonction de x :
 $\sin(2\text{Arc tan } x)$ et $\cos^2\left(\frac{1}{2}\text{Arc tan } x\right)$
- 3) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \cos^2\left(\frac{1}{2}\text{Arc tan } x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1+x\sqrt{3}}{4\sqrt{1+x^2}}$

Exercice 29

Simplifier les expressions suivantes :

- 1) $A(x) = \tan(2\text{Arc tan } x)$
- 2) $B(x) = \cos(4\text{Arc tan } x)$
- 3) $C(x) = \cos(6\text{Arc tan } x)$
- 4) $D(x) = \sin(3\text{Arc tan } x)$

Vous pouvez utiliser les formules suivantes, pour tout α de $\mathbb{R}$:

$$\bullet \cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \quad \bullet \sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

Exercice 30

Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \text{Arc tan } \sqrt{\frac{x-1}{x}}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \text{Arc tan} \left(\frac{1}{x-2}\right)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Arc tan}(5x^2 + x + 1)}{x}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \text{Arc tan}(\tan x)$
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arc tan} \left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+4}-3}\right)$
- 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arc tan} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}\right)$

Exercices d'application

Exercice 18

Montrons que : $(\exists x_3 \in]x_1; x_2[) ; (f \times g)(x_3) = x_3$

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (f \times g)(x) - x$;

• On a : La fonction $f \times g$ est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$.

• On a : $f(x_1) = x_1$ et $h(x_1) = (f \times g)(x_1) - x_1 = f(x_1)g(x_1) - x_1$

donc : $h(x_1) = x_1(g(x_1) - 1)$

et on a : $g(x_2) = x_2$ et $h(x_2) = (f \times g)(x_2) - x_2 = f(x_2)g(x_2) - x_2$

donc : $h(x_2) = x_2(f(x_2) - 1)$

Puisque : $g: \mathbb{R} \mapsto]1; +\infty[$ alors $g(x_1) > 1$ c'est-à-dire $g(x_1) - 1 > 0$

et on a : $x_1 > 0$ donc $x_1(g(x_1) - 1) > 0$ c'est-à-dire $h(x_1) > 0$

Puisque : $f: \mathbb{R} \rightarrow]-\infty; 1[$ alors $f(x_2) < 1$ c'est-à-dire $f(x_2) - 1 < 0$

et on a : $x_2 > 0$ donc $x_2(f(x_2) - 1) < 0$ c'est-à-dire $h(x_2) < 0$

donc $h(x_1) \times h(x_2) < 0$, par suite la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur le segment $[x_1; x_2]$ et $h(x_1) \times h(x_2) < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires : $(\exists x_3 \in]x_1; x_2[) ; h(x_3) = 0$

c'est-à-dire : $(\exists x_3 \in]x_1; x_2[) ; (f \times g)(x_3) = x_3$.

Exercice 19

Montrons que : $(\exists c \in [0; \frac{1}{2}]) ; f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$ par :

$$h(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

La fonction : $u: x \mapsto x + \frac{1}{2}$ est continue sur l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$ et $u\left([0; \frac{1}{2}]\right) \subset [0; 1]$

et la fonction f est continue sur l'intervalle $[0; 1]$ donc la fonction

$x \mapsto f\left(x + \frac{1}{2}\right) = (f \circ u)(x)$ est continue sur l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$.

D'où la fonction h est continue sur l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$ car c'est la somme de

deux fonctions continues sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

D'autre part, on a : $h(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right)$

et $h\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1)$ et puisque $f(1) = f(0)$

alors $h\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) = -\left(f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = -h(0)$

donc : $h(0) \times h\left(\frac{1}{2}\right) = -(h(0))^2$

• Si $h(0) = 0$ alors $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ c'est-à-dire $c = 0$

• Si $h(0) \neq 0$ alors on a h est continue sur le segment $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et $h(0) \times h\left(\frac{1}{2}\right) < 0$
donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a :

$$\left(\exists c \in \left]0; \frac{1}{2}\right[\right); h(c) = 0$$

D'où $\left(\exists c \in \left]0; \frac{1}{2}\right[\right); f\left(c + \frac{1}{2}\right) = f(c)$

Exercice 20

Montrons que : $(\exists \alpha \in [0; 1]); f(\alpha) + f(1 - \alpha) = 2\alpha$

On considère la fonction numérique h définie sur $[0; 1]$ par :

$$h(x) = f(x) + f(1 - x) - 2x$$

• Étudions la continuité de h sur le segment $[0; 1]$

La fonction : $u: x \mapsto 1 - x$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme et en particulier sur $[0; 1]$ $u([0; 1]) \subset [0; 1]$ et la fonction f est continue sur $[0; 1]$ donc la fonction : $x \mapsto f(1 - x) = (f \circ u)(x)$ est continue sur $[0; 1]$,

et on a la fonction : $x \mapsto 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0; 1]$ donc h est continue sur $[0; 1]$

On a : $h(0) = f(0) + f(1)$ et $h(1) = f(1) + f(0) - 2$ et puisque la fonction f est définie de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ alors : $f(0) \in [0; 1]$ et $f(1) \in [0; 1]$ c'est à dire $0 \leq f(1) \leq 1$ et $0 \leq f(0) \leq 1$

donc : $0 \leq f(0) + f(1) \leq 2$ d'où $f(0) + f(1) - 2 \leq 0$ et $f(0) + f(1) \geq 0$

c'est-à-dire : $h(1) \leq 0$ et $h(0) \geq 0$

- Si $h(0) = 0$ alors $f(0) + f(1) = 0$ donc $\alpha = 0$
- Si $h(1) = 0$ alors $f(1) + f(0) = 2$ donc $\alpha = 1$
- Si $h(1) < 0$ et $h(0) > 0$ alors $h(1) \times h(0) < 0$, donc on a :

h est continue sur $[0; 1]$ et $h(1) \times h(0) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $(\exists \alpha \in]0; 1[) ; h(\alpha) = 0$

c'est-à-dire : $(\exists \alpha \in]0; 1[) ; f(\alpha) + f(1 - \alpha) - 2\alpha = 0$

D'où : $(\exists \alpha \in [0; 1]) ; f(\alpha) + f(1 - \alpha) = 2\alpha$

Exercice 21

1) On a : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ et g est la restriction de f sur I

• La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[0; 1]$, (Car : $g'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$) donc g est bijective de I sur l'intervalle $J = g(I) =]-\infty; -1]$

• Déterminons $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Soit x un élément de $]-\infty; -1]$.

On pose : $y = g^{-1}(x)$ où $y \in I$.

On a : $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2 + 1}{y^2 - 1} = x$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 1 = xy^2 - x$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)y^2 = 1 + x$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1 + x}{x - 1}$$

$$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}} \text{ (car } y \geq 0 \text{)}$$

Donc : $g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}$ pour tout x de $]-\infty; -1]$.

2) On a : $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$ et g est la restriction de f sur l'intervalle $[1; -1]$.

• La fonction g est continue et strictement croissante sur I (vérifier le) donc g est bijective de I vers I

• On a : $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$

• Si : $x \neq 0$ alors l'équation : $\frac{2y}{1+y^2} = x$, où y est l'inconnue admet deux solutions

$y_1 = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ et $y_2 = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$, et puisque $y_2 > 1$ pour $-1 < x < 1$ alors

$g^{-1}(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ pour $x \neq 0$ et $g^{-1}(0) = 0$

Donc : $g^{-1}(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ pour tout x de l'intervalle $[-1; 1]$.

3) On a : $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$ et g est la restriction de f sur l'intervalle $I = [-1; +\infty[$.

Vérifier les résultats suivants :

• La fonction g est bijective de I sur l'intervalle $J = I$. (g est continue et strictement croissante sur I).

• $g^{-1}(x) = -1 + \sqrt[3]{(x+1)^2}$ pour tout x de l'intervalle $[-1; +\infty[$.

4) On a : $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - 3$ et g est la restriction de f sur l'intervalle $I = [-1; +\infty[$

Puisque l'ensemble de définition de f est I alors $f = g$

- Montrons que f est une bijection:

• Étudions la continuité de f sur I .

- La fonction : $u: x \mapsto x+1$ est continue et positive sur I (fonction affine).

- La fonction : $v: x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est continue sur $u(I)$ (car $u(I) \subset \mathbb{R}^+$)

Donc le fonction : $v \circ u: x \mapsto \sqrt[3]{x+1}$ est continue sur I .

Puisque la fonction : $w: x \mapsto -3$ est continue sur I alors la fonction $f = v \circ u + w$ est continue sur l'intervalle de I .

• Étudions la monotonie de f sur l'intervalle I :

Soit x_1 et x_2 deux éléments de I tels que : $x_1 < x_2$.

Comparons $f(x_1)$ et $f(x_2)$:

On a : $-1 \leq x_1 < x_2$ donc : $0 \leq x_1 + 1 < x_2 + 1$

d'où : $\sqrt[3]{x_1+1} < \sqrt[3]{x_2+1}$ (car la fonction : $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante $\mathbb{R}^+$).

Ainsi : $\sqrt[3]{x_1+1} - 3 < \sqrt[3]{x_2+1} - 3$

c'est-à-dire : $f(x_1) < f(x_2)$ et par suite, f est strictement croissante sur l'intervalle I

On a f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I , donc f est une bijection de I vers l'intervalle $J = [-3; +\infty[$.

- Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout x de $[-3; +\infty[$

Soit x de $[-3; +\infty[$ et y de $[-1; +\infty[$ tels que $f^{-1}(x) = y$:

On a : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y+1} - 3 = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y+1} = x+3$$

$$\Leftrightarrow y+1 = (x+3)^3$$

$$\Leftrightarrow y = -1 + (x+3)^3$$

Donc : $f^{-1}(x) = -1 + (x+3)^3$ pour tout x de $[-3; +\infty[$.

5) On a : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ et g est la restriction de f sur $I = \mathbb{R}$, donc on a : $f = g$.

- Montrons que f est une bijection

• On a :

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme).

- La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(car : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$)

donc f est une bijection de I sur l'intervalle $J = \mathbb{R} = I$

- Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que : $f^{-1}(x) = y$

On a : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

$$\Leftrightarrow y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = x$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^3 = x$$

Puisque $y-1$ et $(y-1)^3$ ont le même signe alors x et $y-1$ ont le même signe

• donc : si $x \geq 0$ alors $y-1 \geq 0$ donc : $(y-1)^3 = x \Leftrightarrow y-1 = \sqrt[3]{x}$
 $\Leftrightarrow y = 1 + \sqrt[3]{x}$

• Si $x < 0$ alors $y-1 < 0$, donc :

$$(y-1)^3 = x \Leftrightarrow -(y-1)^3 = -x$$

$$\Leftrightarrow -(y-1) = \sqrt[3]{-x}$$

$$\Leftrightarrow y = 1 - \sqrt[3]{-x}$$

Donc :
$$\begin{cases} f^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x} & ; x \geq 0 \\ f^{-1}(x) = 1 - \sqrt[3]{-x} & ; x < 0 \end{cases}$$

Exercice 22

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_1): \sqrt[4]{1-x} = 1-x$

L'équation (E_1) est définie sur l'intervalle $]-\infty; 1]$

Soit x un élément de $]-\infty; 1]$, on pose : $X = \sqrt[4]{1-x}$

On a : $X = X^4 \Leftrightarrow X(X^3 - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow X(X-1)(X^2+X+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 0 \text{ ou } X = 1$$

Donc : $\sqrt[4]{1-x} = 1-x \Leftrightarrow \sqrt[4]{1-x} = 0 \text{ ou } \sqrt[4]{1-x} = 1$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 0$$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est : $S = \{0; 1\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_2): x + \sqrt[3]{x} = 2$

L'équation (E_2) est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$

Soit x un élément de $[0; +\infty[$, on pose : $X = \sqrt[3]{x}$ c'est-à-dire : $x = X^3$

On a : $X^3 + X = 2 \Leftrightarrow X^3 + X - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow X^3 - 1 + (X - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X - 1)(X^2 + X + 1) + (X - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X - 1)(X^2 + X + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X^2 + X + 2 = 0$$

Puisque le discriminant du trinôme $X^2 + X + 2$ est -3

alors : $X^2 + X + 2 \neq 0$;

Donc : $x + \sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 1$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

D'où l'ensemble de solution de l'équation (E_2) est : $S = \{1\}$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_3): \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12$

L'équation (E_3) est définie sur $[0; +\infty[$.

Soit x un élément de $[0; +\infty[$, on a :

$$\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{x^3} + \sqrt[6]{x^2} = (\sqrt[6]{x})^3 + (\sqrt[6]{x})^2$$

On pose : $X = \sqrt[6]{x}$, donc :

$$X^3 + X^2 = 12 \Leftrightarrow X^3 - 8 + X^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (X - 2)(X^2 + 2X + 4) + (X - 2)(X + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X - 2)(X^2 + 3X + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 2 \text{ ou } X^2 + 3X + 6 = 0$$

Puisque le discriminant du trinôme $X^2 + 3X + 6$ est le nombre -15 , alors

$$X^2 + 3X + 6 \neq 0$$

$$\text{Donc : } \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2^6 = 64$$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) est : $S = \{64\}$

$$4) \text{ Résolvons dans } \mathbb{R} \text{ l'équation } (E_4): \sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x} = 5$$

Soit D l'ensemble de définition de l'équation (E_4)

$$x \in D \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } 28 - x \geq 0 \text{ et } x + 7 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq -7 \text{ et } x \leq 28$$

$$\Leftrightarrow x \in [-7; 28]$$

$$\text{Donc : } D = [-7; 28]$$

Soit x un élément de $[-7; 28]$, on a :

$$(E_4) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x})^3 = 5^3$$

$$\Leftrightarrow x+7+28-x+3\sqrt[3]{x+7} \cdot \sqrt[3]{28-x} \cdot (\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x}) = 125$$

$$\Rightarrow 35 + 15\sqrt{(x+7)(28-x)} = 125$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{(x+7)(28-x)} = 6$$

$$\Rightarrow (x+7)(28-x) = 6^3 = 216$$

$$\Rightarrow x^2 - 21x + 20 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 20$$

Réciproquement si: $x = 1$ ou $x = 20$, alors $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x} = 5$

Donc: l'ensemble des solutions de l'équation (E_4) est : $S = \{1; 20\}$

$$5) \text{ Résolvons dans } \mathbb{R} \text{ l'équation: } (E_5): \sqrt[4]{\frac{2-x}{3+x}} + \sqrt[4]{\frac{3+x}{2-x}} = 2$$

l'équation (E_5) est définie sur l'intervalle $] -3; 2[$

$$\text{Soit } x \text{ un élément de }] -3; 2[, \text{ on pose : } X = \sqrt[4]{\frac{2-x}{3+x}}$$

$$\text{On a : } \sqrt[4]{\frac{3+x}{2-x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{2-x}{3+x}}} = \frac{1}{X}, \text{ donc l'équation } (E_5) \text{ devient } X + \frac{1}{X} = 2$$

c'est-à-dire : $X^2 - 2X + 1 = 0$, donc: $X = 1$

$$\text{Ainsi : } (E_5) \Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{2-x}{3+x}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-x}{3+x} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Par suite, l'ensemble des solutions de l'équation (E_5) est : $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$$6) \text{ Résolvons dans } \mathbb{R} \text{ l'équations } (E_6): 4x - 3\sqrt[3]{x} - 1 = 0$$

Soit x un élément de l'intervalle $[0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
 4x - 3\sqrt[3]{x} - 1 &= 4(\sqrt[3]{x})^3 - 3\sqrt[3]{x} - 1 \\
 &= 4(\sqrt[3]{x})^3 - 4 - 3\sqrt[3]{x} + 3 = 4((\sqrt[3]{x})^3 - 1) - 3(\sqrt[3]{x} - 1) \\
 &= 4(\sqrt[3]{x} - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1) - 3(\sqrt[3]{x} - 1) \\
 &= 4(\sqrt[3]{x} - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{4}) = 4(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2})^2
 \end{aligned}$$

Donc : $(E_6) \Leftrightarrow 4(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2})^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation (E_6) est $\{1\}$

Remarque: On peut poser $X = \sqrt[3]{x}$

L'équation (E_6) devient $4X^3 - 3X - 1 = 0$

C'est-à-dire $(X - 1)(4X^2 + X + 1) = 0$ d'où $X = 1$ ainsi $\sqrt[3]{x} = 1$ d'où: $x = 1$

Exercice 23

1) Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2} - x}{x}$

Soit x un élément de l'intervalle $] -\infty; 0[$ on a :

$$\frac{\sqrt[3]{x^2} - x}{x} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} - \frac{x}{x} = -\sqrt{-\frac{x^2}{x^3}} - 1 = -\sqrt{-\frac{1}{x}} - 1$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow 0^-} (-\frac{1}{x}) = +\infty$ alors : $\lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sqrt{-\frac{1}{x}}) = -\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sqrt{-\frac{1}{x}} - 1) = -\infty$

2) Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{4x+4} - 2}{\sqrt[3]{x} - 1}$

Soit x un élément de l'intervalle $[0; +\infty[$ et $x \neq 1$, on a :

$$\sqrt[3]{4x+4} - 2 = \frac{(\sqrt[3]{4x+4})^3 - (2)^3}{(\sqrt[3]{4x+4})^2 + 2\sqrt[3]{4x+4} + (2)^2} = \frac{4(x-1)}{(\sqrt[3]{4x+4})^2 + 2\sqrt[3]{4x+4} + 4}$$

et $\sqrt[3]{x} - 1 = \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - (1)^3}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{x-1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{4x+4} - 2}{\sqrt[3]{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4(x-1)}{(\sqrt[3]{4x+4})^2 + 2\sqrt[3]{4x+4} + 4} \times \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1}{x-1} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt[3]{4x+4})^2 + 2\sqrt[3]{4x+4} + 4} = \frac{12}{12} = 1$$

3) Calculons $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}$

Soit x un élément de l'intervalle $[0; +\infty[$ et $x \neq 2$ on a :

$$\sqrt{x} - \sqrt{2} = \frac{x-2}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}$$

$$\text{et } \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2} = \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{2})^3}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{2})^2} = \frac{x - 2}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x - 2}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}} \times \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}}{x - 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{3\sqrt[3]{16}}{2\sqrt[3]{8}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\end{aligned}$$

$$4) \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{1 - \sqrt[3]{x+1}}$$

Soit x un élément de l'intervalle $[-1; +\infty[$ et $x \neq 0$

$$\sqrt{x+1} - 1 = \frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} \text{ et}$$

$$1 - \sqrt[3]{x+1} = \frac{(1)^3 - (\sqrt[3]{x+1})^3}{1 + \sqrt[3]{x+1} + (\sqrt[3]{x+1})^2} = \frac{-x}{1 + \sqrt[3]{x+1} + (\sqrt[3]{x+1})^2}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{1 - \sqrt[3]{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}+1} \times \frac{1 + \sqrt[3]{x+1} + (\sqrt[3]{x+1})^2}{-x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1 + \sqrt[3]{x+1} + (\sqrt[3]{x+1})^2)}{\sqrt{x+1}+1} = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$5) \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{x}$$

Soit x un élément de l'intervalle $[-1; +\infty[$ et $x \neq 0$, on a :

$$\frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{x} = \frac{(\sqrt[3]{x+1} - 1) - (\sqrt{x+1} - 1)}{x} = \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} - \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

$$\begin{aligned}\text{Puisque } \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} &= \frac{(\sqrt[3]{x+1})^3 - (1)^3}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1)} \\ &= \frac{x}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1)} = \frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1}\end{aligned}$$

$$\text{et } \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

alors :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} - \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$6) \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3-x} - 1}{2 - \sqrt[3]{x+6}}$$

Soit x un élément de l'intervalle $[-6; 3]$ et $x \neq 2$, on a :

$$\sqrt[3]{3-x} - 1 = \frac{(\sqrt[3]{3-x})^3 - (1)^3}{(\sqrt[3]{3-x})^2 + \sqrt[3]{3-x} + 1} = \frac{-(x-2)}{(\sqrt[3]{3-x})^2 + \sqrt[3]{3-x} + 1}$$

$$\text{et } 2 - \sqrt{x+6} = \frac{(2)^3 - (\sqrt{x+6})^3}{(2)^2 + 2\sqrt{x+6} + (\sqrt{x+6})^2} = \frac{-(x-2)}{4 + 2\sqrt{x+6} + (\sqrt{x+6})^2}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3-x} - 1}{2 - \sqrt{x+6}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{-(x-2)}{(\sqrt[3]{3-x})^2 + \sqrt[3]{3-x} + 1} \times \frac{4 + 2\sqrt{x+6} + (\sqrt{x+6})^2}{-(x-2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 + 2\sqrt{x+6} + (\sqrt{x+6})^2}{(\sqrt[3]{3-x})^2 + \sqrt[3]{3-x} + 1} = \frac{3 \times 4}{3} = 4 \end{aligned}$$

7) Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} (\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3+1})$

Soit x un élément de l'intervalle de l'intervalle $[-1; +\infty[$ et $x \neq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3+1} &= \frac{(\sqrt[3]{x^3+x^2})^3 - (\sqrt[3]{x^3+1})^3}{(\sqrt[3]{x^3+x^2})^2 + \sqrt[3]{x^3+x^2} \times \sqrt[3]{x^3+1} + (\sqrt[3]{x^3+1})^2} \\ &= \frac{x^2 - 1}{(\sqrt[3]{x^3+x^2})^2 + \sqrt[3]{x^3+x^2} \times \sqrt[3]{x^3+1} + (\sqrt[3]{x^3+1})^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} (\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3+1}) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left(\frac{x^2 - 1}{(\sqrt[3]{x^3+x^2})^2 + \sqrt[3]{x^3+x^2} \times \sqrt[3]{x^3+1} + (\sqrt[3]{x^3+1})^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(\sqrt[3]{x^3+x^2})^2 + \sqrt[3]{x^3+x^2} \times \sqrt[3]{x^3+1} + (\sqrt[3]{x^3+1})^2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \end{aligned}$$

8) Calculons $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x} - 1 + \sqrt{(x-1)^3}}{\sqrt{x^2-1}}$

Soit x un élément de $]1; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{x} - 1 + \sqrt{(x-1)^3}}{\sqrt{x^2-1}} &= \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1} ((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1)} + \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} \times \left(\frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} + \sqrt{x-1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} \times \left(\frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} + \sqrt{x-1} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1 + \sqrt{(x-1)^3}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1} \left(\frac{1}{(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} + 1} + \sqrt{x - 1} \right) = \frac{0}{2} \times \left(\frac{1}{3} + 0 \right) = 0$$

9) Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1 - \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; 2[$ et $x \neq 1$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5} &= (\sqrt{x+3} - 2) - (\sqrt[3]{3x+5} - 2) \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{3(x-1)}{(\sqrt[3]{3x+5})^2 + 2\sqrt[3]{3x+5} + 4} \\ &= (x-1) \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{3}{(\sqrt[3]{3x+5})^2 + 2\sqrt[3]{3x+5} + 4} \right) \\ \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1 - \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)} &= \frac{x-1}{1 - \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{3}{(\sqrt[3]{3x+5})^2 + 2\sqrt[3]{3x+5} + 4} \right) \end{aligned}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{3}{(\sqrt[3]{3x+5})^2 + 2\sqrt[3]{3x+5} + 4} \right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{3 \times 4} = 0$

• Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1 - \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$

Puisque la fonction : $u: x \mapsto \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ est dérivable au point 1 alors :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{u(x) - u(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) - 1}{x - 1} = u'(1) = \frac{\pi}{4} \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{\pi}{2}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1 - \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) - 1} = - \frac{2}{\pi}$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1 - \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)} = \left(- \frac{2}{\pi} \right) \times 0 = 0$

10) Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}$

Soit x un élément de l'intervalle $[0; +\infty[$ et $x \neq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} &= \frac{1+\sqrt{x}}{2(1-x)} - \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1}{3(1-x)} \\ &= \frac{3+3\sqrt{x}-2(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}-2}{6(1-x)} = \frac{2(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}-3\sqrt{x}-1}{6(x-1)} = \frac{2(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}-4-3\sqrt{x}+3}{6(x-1)} \end{aligned}$$

Puisque:

$$2(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} - 4 = 2((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} - 2) = 2(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x} + 2) = \frac{2(x-1)(\sqrt[3]{x} + 2)}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1}$$

$$\text{et } -3\sqrt{x} + 3 = -3(\sqrt{x} - 1) = \frac{-3(x-1)}{\sqrt{x} + 1}$$

$$\text{Alors : } 2(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x} - 1 = (x-1) \left(\frac{2(\sqrt[3]{x} + 2)}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} - \frac{3}{\sqrt{x} + 1} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{6} \left(\frac{2(\sqrt[3]{x} + 2)}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} - \frac{3}{\sqrt{x} + 1} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{6}{3} - \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

11) Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{x}$

Soit x un élément de l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ et $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{x} &= \frac{(\cos x)^3 - (\sqrt[3]{\cos x})^3}{x((\cos x)^2 + \cos x \cdot \sqrt[3]{\cos x} + (\sqrt[3]{\cos x})^2)} \\ &= \frac{\cos^3 x - \cos x}{x(\cos^2 x + \cos x \cdot \sqrt[3]{\cos x} + (\sqrt[3]{\cos x})^2)} \\ &= \frac{\cos^2 x - 1}{x} \times \frac{\cos x}{\cos^2 x + \cos x \cdot \sqrt[3]{\cos x} + (\sqrt[3]{\cos x})^2} \end{aligned}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\cos^2 x + \cos x \cdot \sqrt[3]{\cos x} + (\sqrt[3]{\cos x})^2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \times (-x(1 + \cos x)) = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{x} = \frac{1}{3} \times 0 = 0$$

12) Calculons $\lim_{\substack{x \rightarrow 8 \\ x < 8}} \frac{(4 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{x - 8}$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; 8[$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{(4 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{x - 8} &= \frac{(4 - \sqrt[3]{x^2})^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt[3]{x})^3 - (2)^3} = \frac{(4 - \sqrt[3]{x^2})\sqrt{4 - \sqrt[3]{x^2}}}{(\sqrt[3]{x} - 2)((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)} \\ &= \frac{-((\sqrt[3]{x})^2 - (2)^2)\sqrt{4 - \sqrt[3]{x^2}}}{(\sqrt[3]{x} - 2)((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x}+2)\sqrt{4-\sqrt[3]{x^2}}}{(\sqrt[3]{x}-2)((\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4)} \\
 &= \frac{-(\sqrt[3]{x}+2)\sqrt{4-\sqrt[3]{x^2}}}{(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4}
 \end{aligned}$$

Donc: $\lim_{\substack{x \rightarrow 8 \\ x < 8}} \frac{(4 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{x - 8} = \lim_{\substack{x \rightarrow 8 \\ x < 8}} \frac{-(\sqrt[3]{x}+2)\sqrt{4-\sqrt[3]{x^2}}}{(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4} = 0$

Exercice 24

1) Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x + \sqrt[3]{x^2}}{x} \right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]-\infty; 0[$, on a :

$$\frac{x + \sqrt[3]{x^2}}{x} = \frac{x}{x} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = 1 - \sqrt[3]{\frac{x^2}{-x^3}} = 1 - \sqrt[3]{-\frac{1}{x}}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{-\frac{1}{x}} = 0$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \sqrt[3]{-\frac{1}{x}} = 1$

2) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt[3]{x-1}$

Soit x un élément de l'intervalle $]1; +\infty[$, on a :

$$x - \sqrt[3]{x-1} = x - \sqrt[3]{x^3 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)} = x - x \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = x \left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} \right)$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = 0$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt[3]{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} \right) = +\infty$

3) Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x - \sqrt[3]{1-x})$

Soit x un élément de l'intervalle $]-\infty; 0[$, on a : $x = -(-x) = -\sqrt[3]{-x^3}$

Donc : $x^2 + x - \sqrt[3]{1-x} = x \left(x + 1 + \frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{-x^3}} \right) = x \left(x + 1 + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^3}} \right)$

Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^3}} = 0$

et on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x - \sqrt[3]{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(x + 1 + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^3}} \right) = +\infty$

4) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) + \sqrt[3]{x} = +\infty$

5) Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x &= \frac{x^2 + 1}{\left(\sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}\right)^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)} + x^2} \\&= \frac{x^2 + 1}{x^2 \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}\right)^2 + x^2 \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + x^2} \\&= \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left[\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + 1\right]} \\&= \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + 1}\end{aligned}$$

et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}\right)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + 1} = \frac{1}{3}$

6) Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - 2x)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - 2x &= \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)} - 2x \\&= x \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} - 2x = x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} - 2\right)\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = 1$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = 1$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} - 2\right) = -\infty$

7) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}})$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} = x^{\frac{2}{3}} (x^{\frac{2}{3} - \frac{5}{3}} - 1) = x^{\frac{2}{3}} (x^{-\frac{11}{6}} - 1)$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\frac{11}{6}} = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{-\frac{11}{6}} - 1) = -1$

et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{2}{3}} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{2}{3}}(x^{-\frac{11}{6}} - 1) = -\infty$, d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}) = -\infty$

8) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 2}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 2} \right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 2 = x^{\frac{2}{3}} \cdot (1 - x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}) = x^{\frac{2}{3}} \cdot (1 - x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}})$$

$$\text{et } x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 2 = x^{\frac{2}{3}} \cdot (1 - 3x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}}) = x^{\frac{2}{3}} \cdot (1 - 3x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}})$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 2}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 2} &= \frac{x^{\frac{2}{3}} \cdot (1 - x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}})}{x^{\frac{2}{3}} \cdot (1 - 3x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}})} \\ &= x^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1 - x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}}{1 - 3x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}}} \right) \\ &= x^{\frac{4}{15}} \cdot \left(\frac{1 - x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}}{1 - 3x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}}} \right) \end{aligned}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\frac{1}{3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\frac{2}{3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\frac{1}{5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\frac{2}{5}} = 0$

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}}{1 - 3x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}}} = 1$, et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{4}{15}} = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{4}{15}} \cdot \left(\frac{1 - x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}}{1 - 3x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}}} \right) = +\infty$, d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 2}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 2} = +\infty$

9) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{2}{3}} \cdot ({}^3\sqrt{x+1} - {}^3\sqrt{x-1}))$

Soit x un élément de l'intervalle $]1; +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} x^{\frac{2}{3}} \cdot ({}^3\sqrt{x+1} - {}^3\sqrt{x-1}) &= {}^3\sqrt{x^2} \cdot ({}^3\sqrt{x+1} - {}^3\sqrt{x-1}) \\ &= {}^3\sqrt{x^3 + x^2} - {}^3\sqrt{x^3 - x^2} \\ &= \frac{2x^2}{({}^3\sqrt{x^3 + x^2})^2 + {}^3\sqrt{x^3 + x^2} \cdot {}^3\sqrt{x^3 - x^2} + ({}^3\sqrt{x^3 - x^2})^2} \\ &= \frac{2x^2}{\left({}^3\sqrt{x^3 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} \right)^2 + {}^3\sqrt{x^3 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} \cdot {}^3\sqrt{x^3 \left(1 - \frac{1}{x} \right)} + \left({}^3\sqrt{x^3 \left(1 - \frac{1}{x} \right)} \right)^2} \\ &= \frac{2x^2}{x^2 \cdot \left[\left({}^3\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)^2 + {}^3\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \cdot {}^3\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \left({}^3\sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right)^2 \right]} \\ &= \frac{2}{\left({}^3\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)^2 + {}^3\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \cdot {}^3\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \left({}^3\sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right)^2} \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} = 1$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{2}{3}} \cdot (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}) = \frac{2}{3}$$

$$10) \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{1-x^3} - \sqrt[4]{x^4-1})$$

Soit x un élément de l'intervalle $]-\infty; -1[$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^3} - \sqrt{x^4-1} &= (\sqrt[3]{1-x^3} - (-x)) - (\sqrt[4]{x^4-1} - (-x)) \\ &= \frac{(\sqrt[3]{1-x^3})^3 - (-x)^3}{(\sqrt[3]{1-x^3})^2 - x \cdot \sqrt[3]{1-x^3} + x^2} - \frac{(\sqrt[4]{x^4-1})^4 - (-x)^4}{(\sqrt[4]{x^4-1}-x)((\sqrt[4]{x^4-1})^2 + x^2)} \\ &= \frac{1}{(\sqrt[3]{1-x^3})^2 - x \cdot \sqrt[3]{1-x^3} + x^2} + \frac{1}{(\sqrt[4]{x^4-1}-x)((\sqrt[4]{x^4-1})^2 + x^2)} \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1-x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4-1 = +\infty$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{1-x^3} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[4]{x^4-1} = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{1-x^3})^2 - x \cdot \sqrt[3]{1-x^3} + x^2 = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[4]{x^4-1}-x)((\sqrt[4]{x^4-1})^2 + x^2) = +\infty$$

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x^3} - \sqrt{x^4-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(\sqrt[3]{1-x^3})^2 - x \cdot \sqrt[3]{1-x^3} + x^2} + \frac{1}{(\sqrt[4]{x^4-1}-x)((\sqrt[4]{x^4-1})^2 + x^2)} = 0$$

$$11) \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2+x})$$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2+x} &= \sqrt{x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - \sqrt[3]{x^3 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)} \\ &= x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Puisque } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = 0 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = 0$$

$$\text{et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} \right) = +\infty$$

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-x} = +\infty$

12) Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3-x^2} - \sqrt{x^2-1})$

Soit x un élément de $]1; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3-x^2} - \sqrt{x^2-1} &= (\sqrt[3]{x^3-x^2} - x) - (\sqrt{x^2-1} - x) \\ &= \frac{-x^2}{(\sqrt[3]{x^3-x^2})^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3-x^2} + x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1} + x} \\ &= \frac{-x^2}{x^2 \left[\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} \right)^2 + \sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} + 1 \right]} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1} + x} \\ &= \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} \right)^2 + \sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1} + x} \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} = 1$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} \right)^2 + \sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} + 1} = -\frac{1}{3}$

et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1} + x} = 0$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} \right)^2 + \sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1} + x} = -\frac{1}{3}$

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3-x^2} - \sqrt{x^2-1} = -\frac{1}{3}$

13) Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}} \right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x+1} &= \frac{(\sqrt[4]{x})^4 - (\sqrt[4]{x+1})^4}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x+1})((\sqrt[4]{x})^2 + (\sqrt[4]{x+1})^2)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt[4]{x} \cdot \left(1 + \sqrt[4]{\frac{x+1}{x}}\right) \cdot (\sqrt[4]{x})^2 \cdot \left(1 + \left(\sqrt[4]{\frac{x+1}{x}}\right)^2\right)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt[4]{x^3} \cdot \left(1 + \sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\right) \left(1 + \left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\right)^2\right)} \end{aligned}$$

et $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = \frac{(\sqrt[3]{x+1})^3 - (\sqrt[3]{x})^3}{(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} \left[\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} \right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right]} \\
 \text{Donc : } \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}} &= \frac{-\sqrt[3]{x^2} \left[\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} \right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right]}{\sqrt[4]{x^3} \left(1 + \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} \right) \left(1 + \left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} \right)^2 \right)} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt[12]{x}} \cdot \left(\frac{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} \right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} + 1}{\left(1 + \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} \right) \left(1 + \left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} \right)^2 \right)} \right)
 \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} = 1$

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} \right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} + 1}{\left(1 + \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} \right) \left(1 + \left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} \right)^2 \right)} = \frac{3}{4}$

et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\sqrt[12]{x}} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}} = 0$

14) Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x+1}} \right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x+1}} &= \frac{\sqrt[12]{(x+1)^3} - \sqrt[12]{x^4}}{\sqrt[12]{x^3} - \sqrt[12]{(x+1)^4}} \\
 &= \frac{\sqrt[12]{x^4} \cdot \left(\sqrt[12]{\frac{(x+1)^3}{x^4}} - 1 \right)}{\sqrt[12]{(x+1)^4} \cdot \left(\sqrt[12]{\frac{x^3}{(x+1)^4}} - 1 \right)} \\
 &= \sqrt[12]{\left(\frac{x}{x+1} \right)^4} \cdot \frac{\sqrt[12]{\frac{(x+1)^3}{x^4}} - 1}{\sqrt[12]{\frac{x^3}{(x+1)^4}} - 1} \\
 &= \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{\sqrt[12]{\frac{(x+1)^3}{x^4}} - 1}{\sqrt[12]{\frac{x^3}{(x+1)^4}} - 1}
 \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} = 1$

et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[12]{\frac{(x+1)^3}{x^4}} = 0$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{\sqrt[12]{\frac{(x+1)^3}{x^4}} - 1}{\sqrt[12]{\frac{x^3}{(x+1)^4}} - 1} = 1, \text{ ainsi : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x+1}} = 1$$

$$15) \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos(x) - \cos(2x)}{\sqrt[3]{x}} \right)$$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$ on a : $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

et $-1 \leq -\cos(2x) \leq 1$

D'où : $-2 \leq \cos(x) - \cos(2x) \leq 2$ c'est-à-dire : $|\cos(x) - \cos(2x)| \leq 2$

$$(\forall x \in]0; +\infty[); \left| \frac{\cos(x) - \cos(2x)}{\sqrt[3]{x}} \right| \leq \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$$

et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x) - \cos(2x)}{\sqrt[3]{x}} = 0$

$$16) \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{\frac{1+8x}{x^4}}} \right)$$

On pose : $t = \frac{1}{x}$

$$\text{Donc : } \frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{\frac{1+8x}{x^4}}} = \frac{\tan(t)}{\sqrt[3]{t^4 + 8t^3}} = \frac{\tan(t)}{\sqrt[3]{t^3(t+8)}} = \frac{\tan(t)}{t} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{t+8}}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan(t)}{t} = 1 \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{t+8}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{alors : } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan(t)}{t} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{t+8}} = \frac{1}{2} \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{\frac{1+8x}{x^4}}} = \frac{1}{2}$$

Exercice 25

1) Déterminons D

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow x(x-1)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ ou } x = 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0$$

Donc : $D = [0; +\infty[$

2) a) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x-1)^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x(x-1)^2} = +\infty$

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x(x-1)^2} - 1 = +\infty$

b) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2} - 1}{x} \\ &= \frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}{x} - \frac{1}{x} \\ &= \sqrt[3]{\frac{x(x-1)^2}{x^3}} - \frac{1}{x} = \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} - \frac{1}{x}\end{aligned}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = 1$ et la fonction : $x \mapsto \sqrt[3]{x}$

est continue en 1 alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = 1$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} - \frac{1}{x} = 1$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

c) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}f(x) - x &= \sqrt[3]{x(x-1)^2} - 1 - x \\ &= \frac{(\sqrt[3]{x(x-1)^2})^3 - x^3}{(\sqrt[3]{x(x-1)^2})^2 + x \cdot \sqrt[3]{x(x-1)^2} + x^2} - 1 \\ &= \frac{x(x-1)^2 - x^3}{(\sqrt[3]{x(x-1)^2})^2 + x \cdot \sqrt[3]{x(x-1)^2} + x^2} - 1 \\ &= \frac{-2x^2 + x}{\left(\sqrt[3]{x^3\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2}\right)^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} + x^2} - 1 \\ &= \frac{x^2\left(-2 + \frac{1}{x}\right)}{x^2 \cdot \left[\left(\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2}\right)^2 + \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} + 1\right]} - 1 \\ &= \frac{-2 + \frac{1}{x}}{\left(\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2}\right)^2 + \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} + 1} - 1\end{aligned}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \frac{1}{x}}{\left(\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2}\right)^2 + \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} + 1} - 1 = -\frac{2}{3} - 1 = -\frac{5}{3}$

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -\frac{5}{3}$

3) a) Montrons que g est bijective

• Étudions la continuité de g sur l'intervalle $[1; +\infty[$

La fonction $u: x \mapsto x(x-1)^2$ est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[1; +\infty[$ et $u(x) \geq 0$ pour tout x de $[1; +\infty[$ c'est-à-dire : $u([1; +\infty[) \subset \mathbb{R}^+$ et la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc : $x \mapsto \sqrt[3]{u(x)}$ est continue sur $[1; +\infty[$

D'où la fonction g est continue $[1; +\infty[$

• Étudions la monotonie de g sur $[1; +\infty[$

Soit x et y de l'intervalle $[1; +\infty[$ tels que $x < y$

La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } 1 < x < y &\Rightarrow \begin{cases} x < y \\ 0 \leq x-1 < y-1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x < y \\ (x-1)^2 < (y-1)^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow 0 \leq x(x-1)^2 < y(y-1)^2\end{aligned}$$

d'où : $\sqrt[3]{x(x-1)^2} < \sqrt[3]{y(y-1)^2}$ c'est-à-dire : $g(x) < g(y)$

Ainsi : $(\forall x, y \in [1; +\infty[); x < y \Rightarrow g(x) < g(y)$, par suite la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

On a donc g est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$

donc g est une bijection de $[1; +\infty[$ vers l'intervalle J tel que :

$$J = g([1; +\infty[) = [g(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[= [-1; +\infty[$$

b) Montrons que : $(\forall x \in [1; +\infty[); g(x) < x$

Soit x un élément de l'intervalle $[1; +\infty[$, on a :

$$x < x+1 \text{ et } 0 \leq x-1 < x+1$$

donc : $x < x+1$ et $(x-1)^2 < (x+1)^2$ d'où : $0 \leq x(x-1)^2 < (x+1)^3$

Puisque la fonction : $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ alors :

$$\sqrt[3]{x(x-1)^2} < \sqrt[3]{(x+1)^3} \text{ c'est-à-dire : } \sqrt[3]{x(x-1)^2} < x+1$$

$$\text{donc : } \sqrt[3]{x(x-1)^2} - 1 < x$$

D'où : $(\forall x \in [1; +\infty[); g(x) < x$

Exercice 26

1) a) Déterminons D :

Soit x un nombre réel, on a :

$$x \in D \Leftrightarrow x + 2 \geq 0 \text{ et } 2 - x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2 \text{ et } x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow x \in [-2; 2]$$

Donc : $D = [-2; 2]$

b) Montrons que f est bijective de D vers J .

• Étudions la continuité de la fonction f

La fonction: $u: x \mapsto x + 2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[-2, 2]$ et $u([-2; 2]) \subset [0; +\infty[$ et la fonction : $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$, donc la fonction $\sqrt[3]{u}$ est continue sur $[-2, 2]$ et la fonction $v: x \mapsto 2 - x$ est un continue $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[-2, 2]$ et $v([-2; 2]) \subset [0; +\infty[$ et la fonction : $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc la fonction $\sqrt[3]{v}$ est continue sur $[-2, 2]$.

Donc la fonction f est continue sur $[-2, 2]$ comme somme de deux fonctions continues sur $[-2, 2]$.

• Étudions la monotonie de f sur D .

Soit x et y deux éléments de D tels que $x < y$:

Puisque la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ alors on a :

$$x < y \Rightarrow 0 \leq x + 2 < y + 2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x+2} < \sqrt[3]{y+2}$$

et $x < y \Rightarrow -y < -x \quad (2)$

$$\Rightarrow 0 \leq 2 - y < 2 - x$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2-y} < \sqrt[3]{2-x}$$

$$\Rightarrow -\sqrt[3]{2-x} < -\sqrt[3]{2-y}$$

Donc de (1) et (2) on a : $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2-x} < \sqrt[3]{y+2} - \sqrt[3]{2-y}$

c'est-à-dire : $f(x) < f(y)$, d'où : $(\forall (x, y) \in D^2) ; x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Ainsi f est strictement croissante sur $[-2; 2]$

Conclusion : f est continue et strictement croissante sur $[-2; 2]$, donc f est

une bijection de $[-2; 2]$ sur l'intervalle J tel que :

$$J = f([-2; 2]) = [f(-2); f(2)] = [-\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{4}]$$

2) Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

Soit x un élément de l'intervalle $[-2; 2]$ et $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2-x}}{x} \\ &= \frac{(\sqrt[3]{x+2})^3 - (\sqrt[3]{2-x})^3}{x((\sqrt[3]{x+2})^2 + \sqrt[3]{2-x} \cdot \sqrt[3]{x+2} + (\sqrt[3]{2-x})^2)} \\ &= \frac{2}{(\sqrt[3]{x+2})^2 + \sqrt[3]{2-x} \cdot \sqrt[3]{x+2} + (\sqrt[3]{2-x})^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(\sqrt[3]{x+2})^2 + \sqrt[3]{2-x} \cdot \sqrt[3]{x+2} + (\sqrt[3]{2-x})^2} \\ &= \frac{2}{3\sqrt[3]{4}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{3 \times 2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \end{aligned}$$

• Calculons $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

Soit x un élément de l'intervalle $[-2; 2]$, on a : $f(2) = \sqrt[3]{4}$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \frac{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2-x} - \sqrt[3]{4}}{x - 2} \\ &= \frac{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{4}}{x - 2} - \frac{\sqrt[3]{2-x}}{x - 2} \\ &= \frac{(\sqrt[3]{x+2})^3 - (\sqrt[3]{4})^3}{(x - 2)((\sqrt[3]{x+2})^2 + \sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt[3]{4} + (\sqrt[3]{4})^2)} + \frac{\sqrt[3]{2-x}}{\sqrt{(2-x)^3}} \\ &= \frac{1}{(\sqrt[3]{x+2})^2 + \sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt[3]{4} + (\sqrt[3]{4})^2} + \frac{1}{\sqrt{(2-x)^2}} \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+2})^2 + \sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt[3]{4} + (\sqrt[3]{4})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}^2}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(2-x)^2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt[3]{\frac{1}{(2-x)^2}} = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = +\infty$$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $f(x) = \sqrt[3]{2x}$

L'équation (E) est définie sur l'intervalle $[0; 2]$. Soit x un élément de l'intervalle $[0; 2]$ on a :

$$\begin{aligned}
 f(x) = \sqrt[3]{2x} &\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{2x} \\
 &\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2-x})^3 = (\sqrt[3]{2x})^3 \\
 &\Leftrightarrow 2x - 3\sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt[3]{2-x} + (\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2-x})^3 = 2x \\
 &\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{4-x^2} \cdot \sqrt[3]{2x} = 0 \text{ ou } \sqrt[3]{x+2} = \sqrt[3]{2-x} \\
 &\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 0
 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{0; 2\}$.

Exercice 27

1) a) Déterminons D :

Soit x un réel, on a : $x \in D \Leftrightarrow 1 - x \geq 0$ et $x \geq 0$

$$\Leftrightarrow x \leq 1 \text{ et } x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [0; 1]$$

Donc : $D = [0; 1]$

b- Montrons que la fonction f est continue sur D

La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$;

Puisque la fonction $u: x \mapsto 1 - x$ est continue sur $[0; 1]$ et $u([0; 1]) \subset \mathbb{R}^+$

Alors la fonction $\sqrt[3]{u}$ est continue sur $[0; 1]$.

Donc la fonction f est continue sur $[0; 1]$ car c'est la somme de deux fonctions continues sur $[0; 1]$.

c- Montrons que f est bijective.

étudions la monotonie de f sur $[0; 1]$.

Soit x et y de l'intervalle $[0; 1]$ tels que $x < y$;

On a : la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$

donc : $0 \leq x < y \Rightarrow \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}$

$$\Rightarrow -\sqrt[3]{y} < -\sqrt[3]{x} \quad (1)$$

et : $0 \leq x < y \Rightarrow 0 \leq 1 - y < 1 - x$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{1-y} < \sqrt[3]{1-x} \quad (2)$$

De (1) et (2) on déduit que : $\sqrt[3]{1-y} - \sqrt[3]{y} < \sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{x}$ c'est-à-dire : $f(x) > f(y)$

D'où : $(\forall x, y \in [0; 1]) ; x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, par suite la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

On a : f est continue et strictement décroissante sur $[0; 1]$, donc f est une

bijection de $[0; 1]$ vers l'intervalle $J = f([0; 1])$,

tel que : $J = [f(1); f(0)] = [-1; 1]$

2) Montrons que : $(\exists c \in]0; \frac{1}{2}[) ; f(c) = c^3$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$ par : $g(x) = f(x) - x^3$

La fonction g est continue sur $[0; \frac{1}{2}]$, car c'est la somme de deux fonctions continues sur $[0; \frac{1}{2}]$.

et on a : $g(0) = 1$ et $g(\frac{1}{2}) = -(\frac{1}{2})^3$, donc : $g(0) \times g(\frac{1}{2}) < 0$

D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $(\exists c \in]0; \frac{1}{2}[) ; g(c) = 0$
c'est-à-dire : $(\exists c \in]0; \frac{1}{2}[) ; f(c) = c^3$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E): $f(x) = \sqrt[3]{1-2x}$

Soit D_1 l'ensemble de définition de l'équation (E), on a :

$$x \in D_1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } x \in [0; 1] \text{ et } 1 - 2x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } x \in [0; 1] \text{ et } x \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in [0; \frac{1}{2}]$$

$$\text{Donc : } D_1 = [0; \frac{1}{2}]$$

Soit x un élément de D_1 , on a :

$$f(x) = \sqrt[3]{1-2x} \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{1-2x}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{x})^3 = (\sqrt[3]{1-2x})^3$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2x - 3\sqrt[3]{1-x} \times \sqrt[3]{x} (\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{x}) = 1 - 2x$$

$$\Leftrightarrow -3\sqrt[3]{1-x} \times \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{1-2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

Puisque $\frac{1}{2} \in D$ et $0 \in D$ et $1 \notin D$ alors : $S = \{0; \frac{1}{2}\}$

4) Calculons $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}}$

$$\text{Soit } x \text{ un élément de }]0; \frac{1}{2}[, \text{ on a : } \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{x}}{x - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{1-x})^3 - (\sqrt[3]{x})^3}{(x - \frac{1}{2}) \times ((\sqrt[3]{1-x})^2 + \sqrt[3]{1-x} \times \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2)}$$

$$= \frac{1-2x}{\left(x - \frac{1}{2}\right) \left((\sqrt[3]{1-x})^2 + \sqrt[3]{1-x} \times \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2 \right)}$$

$$= \frac{-2}{(\sqrt[3]{1-x})^2 + \sqrt[3]{1-x} \times \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-2}{(\sqrt[3]{1-x})^2 + \sqrt[3]{1-x} \times \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}} = -\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$

alors : $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} = -\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$.

Exercice 28

1) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \cos(\text{Arc tan } x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Soit $x \in \mathbb{R}$; il existe un unique réel α de l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$ tel que : $\tan \alpha = x$
c'est-à-dire : $\alpha = \text{Arc tan } x$

On a : $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}} = \sqrt{\cos^2 \alpha} = |\cos \alpha| = \cos \alpha$

(car $\cos \alpha > 0$) donc : $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos(\text{Arc tan } x)$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \cos(\text{Arc tan } x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

• Dédoublons que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \sin(\text{Arc tan } x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $\sin(\text{Arc tan } x) = \cos(\text{Arc tan } x) \times \tan(\text{Arc tan } x)$

Puisque : $\cos(\text{Arc tan } x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\tan(\text{Arc tan } x) = x$

alors : $\sin(\text{Arc tan } x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \sin(\text{Arc tan } x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

2) • Déterminons en fonction de x : $\sin(2\text{Arc tan } x)$

En utilisant la formule : $(\forall a \in \mathbb{R}) ; \sin(2a) = 2 \sin a \cos a$, on a :

$$\sin(2\text{Arc tan } x) = 2 \sin(\text{Arc tan } x) \times \cos(\text{Arc tan } x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{1+x^2}$$

• Déterminons en fonction de x : $\cos^2\left(\frac{1}{2}\text{Arc tan } x\right)$

En utilisant la formule : $(\forall a \in \mathbb{R}) ; \cos^2 a = \frac{1}{2}(\cos(2a) + 1)$, on a :

$$\cos^2\left(\frac{1}{2}\text{Arc tan } x\right) = \frac{1}{2}(\cos(\text{Arc tan } x) + 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 1\right) = \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}$$

3) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \cos^2\left(\frac{1}{2}\text{Arc tan } x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1+x\sqrt{3}}{4\sqrt{1+x^2}}$

Soit x un réel, on a : $\cos^2\left(\frac{1}{2}\text{Arc tan } x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\text{Arc tan } x + \frac{2\pi}{3}\right) + 1 \right]$

$$\begin{aligned} \text{Puisque : } \cos\left(\text{Arc tan } x + \frac{2\pi}{3}\right) &= \cos(\text{Arc tan } x) \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin(\text{Arc tan } x) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{-(1+x\sqrt{3})}{2\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

$$\text{alors : } \cos^2\left(\frac{1}{2}\text{Arc tan } x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\text{Arc tan } x + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1+x\sqrt{3}}{4\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; \cos^2\left(\frac{1}{2}\text{Arc tan } x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1+x\sqrt{3}}{4\sqrt{1+x^2}}$$

Exercice 29

1) Simplifions $A(x)$

Rappel : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \tan(\text{Arc tan } x) = x$

$$\bullet \tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2(a)} ; a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } a \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \text{ Pour tout réel } x \text{ de } \mathbb{R} : -\frac{\pi}{2} < \text{Arc tan } x < \frac{\pi}{2}$$

On a : l'expression $A(x)$ est définie si et seulement si : $x \in \mathbb{R}$ et $\text{Arc tan } x \neq \frac{\pi}{4}$
et $\text{Arc tan } x \neq -\frac{\pi}{4}$

c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 1$ et $x \neq -1$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 1$ et $x \neq -1$, on a :

$$\tan(2\text{Arc tan } x) = \frac{2 \tan(\text{Arc tan } x)}{1 - \tan^2(\text{Arc tan } x)} = \frac{2x}{1 - x^2}$$

2) Simplifions $B(x)$

• L'expression $B(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $B(x) = \cos(2 \times 2\text{Arc tan } x)$

$$= 2 \cos^2(2\text{Arc tan } x) - 1$$

$$= 2 \left(\frac{1}{1 + \tan^2(2\text{Arc tan } x)} \right) - 1 = \frac{1 - \tan^2(2\text{Arc tan } x)}{1 + \tan^2(2\text{Arc tan } x)}$$

$$\text{Puisque : } \tan(2\text{Arc tan } x) = \frac{2 \tan(\text{Arc tan } x)}{1 - \tan^2(\text{Arc tan } x)} = \frac{2x}{1 - x^2}$$

$$\text{alors : } 1 + \tan^2(2\text{Arc tan } x) = 1 + \left(\frac{2x}{1 - x^2} \right)^2 = \frac{(x^2 + 1)^2}{(1 - x^2)^2}$$

et on a : $1 - \tan^2(2\text{Arc tan } x) = 1 - \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2 = \frac{x^4 - 6x^2 + 1}{(1-x^2)^2}$

donc : $B(x) = \left(\frac{x^4 - 6x^2 + 1}{(1-x^2)^2}\right) \left(\frac{(1-x^2)^2}{(x^2+1)^2}\right) = \frac{x^4 - 6x^2 + 1}{(x^2+1)^2}$

3) Simplifions $C(x)$

• l'expression $C(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $C(x) = \cos(6\text{Arc tan } x)$

$$= \cos(3(2\text{Arc tan } x))$$

$$= 4\cos^3(2\text{Arc tan } x) - 3\cos(2\text{Arc tan } x)$$

$$= 4(2\cos^2(\text{Arc tan } x) - 1)^3 - 3(2\cos^2(\text{Arc tan } x) - 1)$$

Puisque : $2\cos^2(\text{Arc tan } x) - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2(\text{Arc tan } x)} - 1 = \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

alors : $C(x) = 4\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^3 - 3\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$
 $= \frac{4(1-x^2)^3 - 3(1-x^2)(1+x^2)^2}{(1+x^2)^3} = \frac{(1-x^2)(x^4 - 14x^2 + 1)}{(1+x^2)^3}$

4) Simplifions $D(x)$

• l'expression $D(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$D(x) = \sin(3\text{Arc tan } x) = 3\sin(\text{Arc tan } x) - 4\sin^3(\text{Arc tan } x)$$

Puisque : $\sin^2(\text{Arc tan } x) = 1 - \cos^2(\text{Arc tan } x)$

$$= 1 - \frac{1}{1 + \tan^2(\text{Arc tan } x)} = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

alors : $|\sin(\text{Arc tan } x)| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$

et on a : x et $\sin(\text{Arc tan } x)$ ont le même signe, donc : $\sin(\text{Arc tan } x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

d'où : $D(x) = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}} - 4\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^3 = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{4x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x(3-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

Exercice 30

1) Calculons $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \text{Arc tan } \sqrt{\frac{x-1}{x}}$

On a : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x}} = 1$, et la fonction Arc tan est continue en 1, donc :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \text{Arc tan } \sqrt{\frac{x-1}{x}} = \text{Arc tan}(1) = \frac{\pi}{4}$$

2) Calculons $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x-2}\right)$

On a : $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \text{Arc tan } X = \frac{\pi}{2}$, donc : $\lim_{x \rightarrow 2^+} \text{Arc tan} \left(\frac{1}{x-2} \right) = \frac{\pi}{2}$

et on a : $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2) = 0$; donc : $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2) \text{Arc tan} \left(\frac{1}{x-2} \right) = 0$

3) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Arc tan}(5x^2 + x + 1)}{x}$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^2 + x + 1) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \text{Arc tan } X = \frac{\pi}{2}$,

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arc tan}(5x^2 + x + 1) = \frac{\pi}{2}$

et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Arc tan}(5x^2 + x + 1)}{x} = 0$

4) Calculons $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \text{Arc tan}(\tan x)$

On a : $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} \text{Arc tan } X = -\frac{\pi}{2}$

donc : $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \text{Arc tan}(\tan x) = -\frac{\pi}{2}$

5) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arc tan} \left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+4}-3} \right)$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+4}-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)}{\sqrt{x} \left(\sqrt{1+\frac{4}{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}}} = 1$

et la fonction Arc tan est continue en 1, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arc tan} \left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+4}-3} \right) = \text{Arc tan}(1) = \frac{\pi}{4}$$

6) Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arc tan} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}} \right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]-\infty; 0[$, on a :

$$\sqrt[3]{1-x^3} = \sqrt[3]{-x^3 \left(1 - \frac{1}{x^3} \right)} = -x \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}}} = -1$

Puisque la fonction Arc tan est continue en -1 , alors :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arc tan} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}} \right) = \text{Arc tan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

Exercices de synthèse

Exercice 31

1) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2}$

b) En déduire : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); \operatorname{Arc} \tan(x) + \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$

2) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arc} \tan x}{x} = 1$

3) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arc} \tan(x^2 - x)}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Arc} \tan(\sqrt{x^2 + x})}{\sqrt{x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\operatorname{Arc} \tan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} x \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\right) - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{x}}$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation : $\operatorname{Arc} \tan x + \operatorname{Arc} \tan(x - 1) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 32

Soit f une fonction numérique définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe au moins un réel a qui vérifie : $(f \circ f)(a) = a$

Montrer que : $(\exists c \in \mathbb{R}); f(c) = c$

Exercice 33

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) \neq 0$ pour tout x de I .

Montrer que : $((\forall x \in I); f(x) > 0)$ ou $((\forall x \in I); f(x) < 0)$

Exercice 34

1) Soit f une fonction définie et continue sur le segment $[a; b]$ telle que $f(x) > 0$ pour tout x de $[a; b]$.

Montrer que : $(\exists \alpha \in \mathbb{R}^+); (\forall x \in [a; b]); f(x) \geq \alpha$

2) Soit g fonction définie et continue sur le segment $[a; b]$ telle que $g(x) \neq x$ pour tout x de $[a; b]$.

Montrer que : $(\exists \beta \in \mathbb{R}^+); (\forall x \in [a; b]); |g(x) - x| \geq \beta$

Exercice 35

Soit f et g deux fonctions numériques et continues sur le segment $[0; 1]$ telles que : $g(0) = f(1)$ et $g(1) = f(0)$. Montrer que : $(\exists c \in [0; 1]); f(c) = g(c)$

Exercice 36

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{1}{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x^2 + 2x} \right) - 1$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de f .

2) Montrer que :

$$\left(\exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2; \left(\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right] \right); \alpha x \leq \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x^2 + 2x} \leq \beta x \right)$$

3) Montrer que : $\left(\exists c \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right] \right); \sqrt{1 + \frac{1}{c}} - \sqrt{c^2 + 2c} = c$

Exercice 37

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 + x - 1$

1) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) En déduire la monotonie de f^{-1} sur J

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que : $0 < \alpha < 1$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sqrt[3]{f(x)}}{x - \alpha}$

Exercice 38

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]-\infty; 3]$ par :

$$f(x) = \text{Arc tan} \sqrt{3 - x}$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x - 3}$.

2) Montrer que f est bijective de l'intervalle $]-\infty; 3]$ sur un intervalle J à déterminer.

3) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

4) Montrer qu'il existe un réel α de l'intervalle $]2; 3[$ tel que : $f(\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{4}$

Exercice 39

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f puis simplifier son expression

$$1) f(x) = \text{Arc tan} \left(\frac{x^2 - 1}{2x} \right)$$

$$4) f(x) = \text{Arc tan} \left(\frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x} \right)$$

$$2) f(x) = \text{Arc tan} \left(\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} \right)$$

$$5) f(x) = \text{Arc tan} (\sqrt{1 + x^2} - x)$$

$$3) f(x) = \text{Arc tan} \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right)$$

$$6) f(x) = \text{Arc tan} \left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \right);$$

(Calculer $\tan(3\alpha)$ en fonction de $\tan \alpha$).

Exercice 40

1) Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

a-Montrer que g est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $] -1; 1]$;

b-Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle $] -1; 1]$.

2) Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \text{Arc tan} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$$

a-Montrer que f est une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer ;

b-Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J ;

c-Calculer : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$.

Exercices de synthèse

Exercice 31

1) a) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); \text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, il existe un unique élément α

de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que : $\tan \alpha = x$, c'est-à-dire : $\alpha = \text{Arc tan } x$

$$\text{On a : } \frac{1}{x} = \frac{1}{\tan \alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\text{Puisque : } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -\alpha < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{alors : } \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{donc : } \text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{d'où : } (\forall x \in \mathbb{R}^+); \text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

b) Dédution

Soit x un élément de l'intervalle $] -\infty; 0[$, on a : $-x \in]0; +\infty[$

$$\text{Puisque la fonction Arc tan est impaire et } \text{Arc tan}(-x) + \text{Arc tan}\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{alors : } -\text{Arc tan}(x) - \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{c'est-à-dire } \text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in \mathbb{R}^+); \text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

2) Montrons que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan } x}{x} = 1$

Soit x un nombre réel, on pose $y = \text{Arc tan } x$ donc $x = \tan y$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan } x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = 1$ car : $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan y}{y} = 1$

3) Calculons les limites suivantes :

a) Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan}(x^2 - x)}{x}$

On a : $\frac{\text{Arc tan}(x^2 - x)}{x} = \frac{\text{Arc tan}(x^2 - x)}{x^2 - x} \times \frac{x^2 - x}{x}$

On pose : $t = x^2 - x$,

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan}(x^2 - x)}{x^2 - x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan } t}{t} = 1$

et on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = -1$ donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan}(x^2 - x)}{x} = -1$

b) Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan}(\sqrt{x^2 + x})}{\sqrt{x}}$

On a : $\frac{\text{Arc tan}(\sqrt{x^2 + x})}{\sqrt{x}} = \frac{\text{Arc tan}(\sqrt{x^2 + x})}{\sqrt{x^2 + x}} \times \frac{\sqrt{x^2 + x}}{\sqrt{x}}$

On pose : $t = \sqrt{x^2 + x}$,

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan}(\sqrt{x^2 + x})}{\sqrt{x^2 + x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan } t}{t} = 1$

et on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan}(\sqrt{x^2 + x})}{\sqrt{x}} = +\infty$

c) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \text{Arc tan}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Soit x un réel de l'intervalle $]0; +\infty[$;

On a : $x \text{Arc tan}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = (\sqrt{x})^2 \times \text{Arc tan}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x} \times \frac{\text{Arc tan}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

On pose : $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$, Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Arc tan}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan } t}{t} = 1$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \text{Arc tan}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$

d) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \text{Arc tan}(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2}x\right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$\text{Arc tan}(\sqrt{x}) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{c'est-à-dire : } \operatorname{Arc} \tan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} = - \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\text{Donc : } x \operatorname{Arc} \tan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} x = - x \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) = -\infty \text{ d'après 3)c)}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \operatorname{Arc} \tan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} x\right) = -\infty$$

$$\text{e) Calculons } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\right) - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{x}}$$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; 1[$, on a : $x^2 < \frac{1}{x}$ c'est-à-dire : $x < \frac{1}{\sqrt{x}}$
donc : $\frac{1}{\sqrt{x}} - x > 0$,

$$\text{D'où : } \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\right) + \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{\sqrt{x}}{1 - x\sqrt{x}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

c'est-à-dire : $\operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\right) - \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1}\right) = \frac{\pi}{2}$ car $\operatorname{Arc} \tan$ est impaire

$$\text{Donc : } \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\right) - \frac{\pi}{2} = \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\right) - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{x}} &= \frac{\operatorname{Arc} \tan\left(\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1}\right)}{\sqrt{x}} \\ \text{D'où : } &= \frac{\operatorname{Arc} \tan\left(\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1}} \times \frac{\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\operatorname{Arc} \tan\left(\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1}} \times \frac{1}{x\sqrt{x} - 1} \end{aligned}$$

$$\text{On pose : } t = \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1},$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Arc} \tan\left(\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arc} \tan t}{t} = 1, \text{ et on a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x\sqrt{x} - 1} = -1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan} \left(\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} \right)}{\sqrt{x}} = -1 \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x \right) - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{x}} = -1$$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}^*$ l'équation (E) : $\text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}(x-1) = \frac{\pi}{2}$

L'ensemble de définition de l'équation (E) est : $D = \mathbb{R}$

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation (E);

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \text{Arc tan}(x) < 0$, donc : $S \subset \mathbb{R}^+$

D'où l'équation (E) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^-$.

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a : $\text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

donc l'équation (E) est équivalente à : $\text{Arc tan}(x-1) = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right)$

Puisque la fonction Arc tan est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, alors l'équation

(E) est équivalente à : $x-1 = \frac{1}{x}$ et $x > 0$ c'est-à-dire : $x^2 - x - 1 = 0$

et $x > 0$.

Les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Puisque $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ alors $S = \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$.

Exercice 32

Montrons que : $(\exists c \in \mathbb{R}) ; f(c) = c$

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - x$

On a g est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est la somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

On a : $g(a) = f(a) - a$ et $g(f(a)) = f(f(a)) - f(a) = a - f(a)$ (car $f(f(a)) = a$)

donc : $g(a) \times g(f(a)) = -(f(a) - a)^2$

- Si $f(a) = a$ alors $c = a$
- Si $f(a) \neq a$ alors on a soit $f(a) > a$ ou $f(a) < a$

On suppose que : $f(a) < a$ (pour la démonstration; de même si on suppose $f(a) > a$)

On a : g est continue sur le segment $[f(a); a]$ et $g(a) \times g(f(a)) < 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaire : $(\exists c \in]f(a); a[) ; g(c) = 0$

c'est-à-dire : $(\exists c \in]f(a); a[) ; f(c) = c$, d'où : $(\exists c \in \mathbb{R}) ; f(c) = c$

Exercice 33

Montrons que : $((\forall x \in I) ; f(x) > 0)$ ou $((\forall x \in I) ; f(x) < 0)$ en utilisant le raisonnement par l'absurde. On a : $f(x) \neq 0$ pour tout x de I .

On suppose que : $((\exists b \in I) ; f(b) < 0)$ et $((\exists a \in I) ; f(a) > 0)$

On a : $[a; b] \subset I$ et la fonction f est continue sur I , donc f est continue sur $[a; b]$.

D'où f est continue sur $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, d'après le théorème

des valeurs intermédiaires, on a : $(\exists c \in]a; b[) ; f(c) = 0$

c'est-à-dire : $(\exists c \in I) ; f(c) = 0$ et cela est contradictoire avec le fait que : $(\forall x \in I) ; f(x) \neq 0$

Donc : $((\forall x \in I) ; f(x) < 0)$ ou $((\forall x \in I) ; f(x) > 0)$

Exercice 34

1) Montrer que : $(\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*) ; (\forall x \in [a; b]) ; f(x) \geq \alpha$

La fonction f est continue sur le segment $[a; b]$, donc : $f([a; b]) = [m; M]$

où : $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$ et $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$

Rappel : L'image d'un segment par une fonction continue est un segment

et on a : $(\forall x \in [a; b]) ; m \leq f(x) \leq M$ (1)

Puisque f est surjective de $[a; b]$ vers $[m; M]$ alors $(\exists c \in [a; b]) ; f(c) = m$

et on a : $f(c) > 0$ donc $m > 0$

On prend : $\alpha = m$, d'après la double inégalité (1), on a :

$(\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*) ; (\forall x \in [a; b]) ; f(x) \geq \alpha$

2) Montrons que : $(\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*) ; (\forall x \in [a; b]) ; |g(x) - x| \geq \beta$

On considère la fonction numérique h définie sur $[a; b]$ par : $h(x) = |g(x) - x|$

On a : $(\forall x \in [a; b]) ; g(x) \neq x$ donc : $(\forall x \in [a; b]) ; h(x) > 0$

et puisque la fonction g est continue sur le segment $[a; b]$ alors la fonction h est continue sur $[a; b]$.

Donc d'après la question 1) : $(\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*) ; (\forall x \in [a; b]) ; h(x) \geq \beta$

D'où : $(\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*) ; (\forall x \in [a; b]) ; |g(x) - x| \geq \beta$

Exercice 35

Montrons que : $(\exists c \in [0; 1]) ; f(c) = g(c)$

On considère la fonction numérique h définie sur le segment $[0; 1]$ par :

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

On a : h est continue sur le segment $[0; 1]$ car c'est la somme de deux fonctions continues sur $[0; 1]$.

D'autre part, on a : $h(0) = f(0) - g(0)$ et $f(1) = g(0)$

donc : $h(0) = f(0) - f(1)$

et on a : $h(1) = f(1) - g(1)$ et $g(1) = f(0)$ donc $h(1) = f(1) - f(0)$

d'où : $h(0) \times h(1) = -(h(0))^2$

- Si $h(0) = 0$ alors $f(0) = g(0)$ donc $c = 0$

- Si $h(0) \neq 0$ alors $-(h(0))^2 < 0$

Puisque h est continue sur $[0; 1]$ et $h(0) \times h(1) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $(\exists c \in]0; 1[) ; h(c) = 0$

C'est-à-dire : $(\exists c \in]0; 1[) ; f(c) = g(c)$

Ainsi : $(\exists c \in [0; 1]) / f(c) = g(c)$

Exercice 36

11) Déterminons D :

Soit x un réel, on a :

$$x \in D \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } 1 + \frac{1}{x} \geq 0 \text{ et } x^2 + 2x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } \frac{x+1}{x} \geq 0 \text{ et } x(x+2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } x(x+1) \geq 0 \text{ et } x(x+2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[\\ x \in]-\infty; -2] \cup]0; +\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -2] \cup]0; +\infty[$$

Donc : $D =]-\infty; -2] \cup]0; +\infty[$

2) Montrons que : $(\exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2) ; \left(\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right] \right) ; \alpha x \leq \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x^2 + 2x} \leq \beta x$

Soit g la fonction numérique définie sur $\left[\frac{1}{2}; 1 \right]$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x^2 + 2x} \right)$$

Les fonctions : $u: x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ et $v: x \mapsto x^2 + 2x$ sont continues sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et $u(x) \geq 0$ et $v(x) \geq 0$ pour tout x de $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$,

c'est-à-dire : $u\left(\left[\frac{1}{2}; 1\right]\right) \subset \mathbb{R}^+$ et $v\left(\left[\frac{1}{2}; 1\right]\right) \subset \mathbb{R}^+$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$

Donc : la fonction $\sqrt{u}$ et $\sqrt{v}$ sont continues sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ comme composées de deux fonctions continues et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

Donc la fonction g est continue sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, comme somme et produit de fonctions continues sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

Par suite la fonction g est continue sur le segment $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et l'image d'un segment par une fonction continue est un segment

$$\text{donc : } (\exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2); g\left(\left[\frac{1}{2}; 1\right]\right) = [\alpha; \beta]$$

$$\text{c'est-à-dire : } (\exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2); \left(\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]\right) ; \alpha \leq g(x) \leq \beta$$

$$\text{D'où : } (\exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2); \left(\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]\right) ; \alpha x \leq \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x^2 + 2x} \leq \beta x$$

$$3) \text{ Montrons que : } \left(\exists c \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]\right); \sqrt{1 + \frac{1}{c}} - \sqrt{c^2 + 2c} = c$$

$$\text{On a : } f(1) = \sqrt{2} - \sqrt{3} - 1 \text{ et } f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{\frac{5}{4}}\right) - 1 = 2\sqrt{3} - \sqrt{5} - 1$$

$$\text{Puisque : } \sqrt{2} - \sqrt{3} - 1 < 0 \text{ et } 2\sqrt{3} - \sqrt{5} - 1 > 0 \text{ alors : } f(1) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

On a f est continue sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et $f(1) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires. $\left(\exists c \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]\right); f(c) = 0$

$$\text{D'où : } \left(\exists c \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]\right); \sqrt{1 + \frac{1}{c}} - \sqrt{c^2 + 2c} = c$$

Exercice 37

1) a) Montrons que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}

• Étudions la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = 6x^2 + 1$

Puisque $f'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; donc la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'où f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle J tel que : $J = f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-\infty; +\infty[$

$$\text{car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

Par suite f admet une bijection réciproque définie sur $\mathbb{R}$.

b) Dédution : La fonction f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car elle a la même monotonie que f .

2) a) Montrons que : $(\exists ! \alpha \in \mathbb{R}); f(\alpha) = 0$

On a : f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et puisque $0 \in \mathbb{R}$, alors il existe un unique élément α de $\mathbb{R}$ tel que : $f(\alpha) = 0$ (c'est-à-dire : 0 admet un unique antécédent)

• Montrons que : $0 < \alpha < 1$

On a : $f(0) = -1$ et $f(1) = 2$ c'est-à-dire $f^{-1}(-1) = 0$ et $f^{-1}(2) = 1$

Puisque f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors :

$$-1 < 0 < 2 \implies f^{-1}(-1) < f^{-1}(0) < f^{-1}(2)$$

c'est-à-dire : $0 < \alpha < 1$ car $f^{-1}(0) = \alpha$

b) Calculons : $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{\sqrt[3]{f(x)}}{x - \alpha}$

Soit x un élément de l'intervalle $]\alpha; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - f(\alpha) &= 2x^3 + x - 2\alpha^3 - \alpha \\ &= 2(x^3 - \alpha^3) + (x - \alpha) \\ &= 2(x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2) + (x - \alpha) \\ &= (x - \alpha)(2x^2 + 2\alpha x + 2\alpha^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \frac{\sqrt[3]{f(x)}}{x - \alpha} = \frac{\sqrt[3]{f(x)}}{\sqrt[3]{(x - \alpha)^3}} = \sqrt[3]{\frac{2x^2 + 2\alpha x + 2\alpha^2 + 1}{(x - \alpha)^2}}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{2x^3 + 2\alpha x + 2\alpha^2 + 1}{(x - \alpha)^2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{X} = +\infty$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \sqrt[3]{\frac{2x^2 + 2\alpha x + 2\alpha^2 + 1}{(x - \alpha)^2}} = +\infty$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{\sqrt[3]{f(x)}}{x - \alpha} = +\infty$$

1) Calculons $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)}{x-3}$

Soit x un élément de $] -\infty; 3[$, on a : $\frac{f(x)}{x-3} = \frac{\text{Arc tan } \sqrt{3-x}}{x-3}$

On pose : $t = \text{Arc tan } \sqrt{3-x}$, donc : $\tan t = \sqrt{3-x}$

c'est-à-dire : $x-3 = -\tan^2 t$;

On a : $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)}{x-3} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-t}{\tan^2 t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\tan t} \times \left(\frac{-1}{\tan t} \right) = -\infty$

car : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\tan t} = 1$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\tan t} = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)}{x-3} = -\infty$

2) Montrons que f est bijective

• Étudions la continuité de f sur $] -\infty; 3[$

La fonction $u: x \mapsto \sqrt{3-x}$ est continue sur l'intervalle $] -\infty; 3[$ et $u(] -\infty; 3[) \subset \mathbb{R}$ et la fonction Arc tan est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $f = \text{Arc tan} \circ u$ est continue sur l'intervalle $] -\infty; 3[$.

• Étudions la monotonie de f sur l'intervalle $] -\infty; 3[$.

Soit x et y deux éléments de l'intervalle $] -\infty; 3[$ tel que : $x < y$.

On a : $x < y \leq 3 \Rightarrow 0 \leq 3-y < 3-x$
 $\Rightarrow \sqrt{3-y} < \sqrt{3-x}$

Puisque Arc tan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow \text{Arc tan } \sqrt{3-y} < \text{Arc tan } \sqrt{3-x} \\ &\Rightarrow f(x) > f(y) \end{aligned}$$

Donc : $(\forall x, y \in] -\infty; 3[); (x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$ d'où la fonction f est strictement décroissante sur $] -\infty; 3[$.

Par suite f est continue et strictement décroissante sur $] -\infty; 3[$;

donc f est bijective de l'intervalle $] -\infty; 3[$ sur l'intervalle $J = [f(3); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$

Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3-x} = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \text{Arc tan } X = \frac{\pi}{2}$, alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

et on a : $f(3) = 0$, donc $J = [0; \frac{\pi}{2}[$

3) Déterminons $f^{-1}(x)$

Soit $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$ et $y \in] -\infty; 3[$, tel que : $f^{-1}(x) = y$

$$\text{On a : } f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$$

$$\Leftrightarrow x = \text{Arc tan} \sqrt{3 - y}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3 - y}$$

$$\Leftrightarrow y = 3 - \tan^2 x$$

$$\text{Donc : } \left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \right) ; f^{-1}(x) = 3 - \tan^2 x$$

$$4) \text{ Montrons que : } (\exists \alpha \in]2; 3[) ; f(\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{4}$$

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[2; 3]$ par :

$$g(x) = f(x) + \frac{x}{4} - 1$$

• La fonction g est continue sur le segment $[2; 3]$, car c'est la somme de deux fonctions continues sur $[2; 3]$.

$$\bullet \text{ On a : } g(2) = \frac{\pi - 2}{4} \text{ et } g(3) = -\frac{1}{4}, \text{ c'est-à-dire } g(2) > 0 \text{ et } g(3) < 0$$

Donc : $g(2)g(3) < 0$ d'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$(\exists \alpha \in]2; 3[) ; g(\alpha) = 0$$

$$\text{signifie que : } (\exists \alpha \in]2; 3[) ; f(\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{4}$$

Exercice 39

$$1) \text{ On a : } f(x) = \text{Arc tan} \left(\frac{x^2 - 1}{2x} \right)$$

• Déterminons D , ensemble de définition de f :

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } x \in D \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{Donc : } D = \mathbb{R}^*.$$

• Simplifions $f(x)$:

$$\text{On a : } (\forall x \in \mathbb{R}^*) ; -x \in \mathbb{R}^* \text{ et } f(-x) = -f(x)$$

donc la fonction f est impaire, d'où il suffit de simplifier f sur l'intervalle $]0; +\infty[$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, il existe un unique élément α de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\tan \alpha = x$, c'est-à-dire $\alpha = \text{Arc tan } x$.

• Écrivons $\frac{x^2 - 1}{2x}$ en fonction de α , on a :

$$\frac{x^2-1}{2x} = \frac{\tan^2 \alpha - 1}{2 \tan \alpha} = \frac{-1}{\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}} = \frac{-1}{\tan 2\alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)$$

$$\text{Donc : } f(x) = \text{Arc tan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)\right)$$

$$\text{et on a : } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < 2\alpha < \pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + 2\alpha < \frac{\pi}{2} + \pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) - \pi < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Puisque : } \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = \tan\left(\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) - \pi\right)$$

alors :

$$f(x) = \text{Arc tan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)\right) = \text{Arc tan}\left(\tan\left(\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) - \pi\right)\right) = \frac{\pi}{2} + 2\alpha - \pi$$

$$= 2\alpha - \frac{\pi}{2} = 2\text{Arc tan}(x) - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in]0; +\infty[) ; f(x) = 2\text{Arc tan}(x) - \frac{\pi}{2}$$

Soit x un élément de l'intervalle $] -\infty; 0[$;

On a $-x > 0$ et f est impaire, donc :

$$f(x) = -f(-x)$$

$$= -\left(2\text{Arc tan}(-x) - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\left(-2\text{Arc tan}(x) - \frac{\pi}{2}\right) = 2\text{Arc tan}(x) + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{D'où : } (\forall x \in]-\infty; 0[) ; f(x) = 2\text{Arc tan}(x) + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Par suite : } \begin{cases} f(x) = 2\text{Arc tan}(x) - \frac{\pi}{2} ; x > 0 \\ f(x) = 2\text{Arc tan}(x) + \frac{\pi}{2} ; x < 0 \end{cases}$$

$$2) \text{ On a : } f(x) = \text{Arc tan}\left(\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}\right)$$

* Déterminons D ensemble de définition de f

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } x \in D \Leftrightarrow \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \geq 0 \text{ et } 1 + \sin x \neq 0$$

$$\text{Puisque : } 1 + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{et on a } \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \geq 0 \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

car : $-1 \leq \sin x \leq 1$ Donc : $D = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

• Simplifions $f(x)$:

On a : $(\forall x \in D) ; x + 2\pi \in D$ et $f(x + 2\pi) = f(x)$ donc la fonction f est périodique de période 2π ; d'où il suffit de simplifier f sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$.

Soit x un élément de l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$, on a :

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

$$\text{Donc : } f(x) = \text{Arc tan}\left(\sqrt{\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}\right) = \text{Arc tan}\left(\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right|\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Puisque : } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} < -\frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

alors on a deux cas :

Cas 1: Si $0 \leq \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}$, alors : $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \geq 0$

$$\text{Donc : } f(x) = \text{Arc tan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$$

Cas 2: Si $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \leq 0$ c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3\pi}{2}$ alors $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \leq 0$;

Puisque Arc tan est impaire, alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{Arc tan}\left(-\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right) \\ &= -\text{Arc tan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right) = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} ; x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} ; x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\end{cases} \text{ ou } \left(\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\right) ; f(x) = \left| \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right|$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier relatif k tel que :

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi ; \text{ c'est-à-dire } -\frac{\pi}{2} < x - 2k\pi < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Donc : } f(x) = \left| \frac{x}{2} - k\pi - \frac{\pi}{4} \right|$$

$$3) \text{ On a : } f(x) = \text{Arc tan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

• Déterminons D , ensemble de définition de f

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow 1 - x \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

Donc : $D =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

• Simplifions $f(x)$:

Soit $x \in D$, il existe un unique élément α de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et tel que :

$$\tan \alpha = x \text{ et } \alpha \neq \frac{\pi}{4},$$

on a : $\alpha = \text{Arc tan } x$

• Écrivons $\frac{1+x}{1-x}$ en fonction de α ; On a :

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)}{\sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

$$\text{Donc : } f(x) = \text{Arc tan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right)$$

$$\text{Puisque : } \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \alpha \neq \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \alpha + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

alors on a deux cas :

Cas 1: Si : $-\frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{4}$, signifie que : $x < 1$

$$\text{alors : } f(x) = \text{Arc tan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right) = \frac{\pi}{4} + \alpha = \frac{\pi}{4} + \text{Arc tan } x$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in]-\infty; 1[) ; f(x) = \frac{\pi}{4} + \text{Arc tan } x$$

Cas 2: Si : $\frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$ c'est-à-dire $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, signifie que $x > 1$

$$\begin{aligned} \text{et puisque : } \frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \pi < \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \pi < \frac{3\pi}{4} - \pi \\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \pi < -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\text{et } \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \tan\left(\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \pi\right)$$

alors :

$$f(x) = \text{Arc tan} \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \right) = \text{Arc tan} \left(\tan \left(\left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \pi \right) \right) = \frac{\pi}{4} + \alpha - \pi = -\frac{3\pi}{4} + \text{Arc tan } x$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in]1; +\infty[) ; f(x) = -\frac{3\pi}{4} + \text{Arc tan } x$$

$$\text{Par suite : } \begin{cases} f(x) = \frac{\pi}{4} + \text{Arc tan } x ; x < 1 \\ f(x) = -\frac{3\pi}{4} + \text{Arc tan } x ; x > 1 \end{cases}$$

$$4) \text{ On a : } f(x) = \text{Arc tan} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right)$$

• Déterminons D ensemble de définition de f

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } x \in D \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } 1+x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{Donc : } D = \mathbb{R}^*.$$

• Simplifions $f(x)$:

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}^*, \text{ il existe un unique réel } \alpha \text{ de } \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\text{ tel que :}$$

$$\tan \alpha = x \text{ et } \alpha \neq 0$$

$$\text{On a : } \alpha = \text{Arc tan } x$$

• Écrivons $\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ en fonction de α ;

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} &= \frac{1}{\tan \alpha} \cdot (\sqrt{1+\tan^2 \alpha} - 1) = \frac{1}{\tan \alpha} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} - 1 \right) \\ &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \left(\frac{1}{|\cos \alpha|} - 1 \right) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

$$\text{Puisque : } \sin \alpha = 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) \text{ et } 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\text{alors : } \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)} = \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right), \text{ donc : } \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\text{c'est-à-dire : } f(x) = \text{Arc tan} \left(\tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right)$$

$$\text{et on a : } \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}, \\ \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{donc : } f(x) = \text{Arc tan} \left(\tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \text{Arc tan } x$$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}') ; f(x) = \frac{1}{2} \text{Arc tan } x$

5) On a : $f(x) = \text{Arc tan}(\sqrt{1+x^2} - x)$

• Déterminons D ensemble de définition de f :

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $x \in D \Leftrightarrow 1+x^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Donc : $D = \mathbb{R}$

• Simplifions $f(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique réel α de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, tel que : $\tan \alpha = x$ c'est-à-dire $\alpha = \text{Arc tan } x$

• Écrivons $\sqrt{1+x^2} - x$ en fonction de α .

$$\begin{aligned}\text{On a : } \sqrt{1+x^2} - x &= \sqrt{1+\tan^2 \alpha} - \tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{|\cos \alpha|} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Puisque : } 1 - \sin \alpha &= 1 - 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2\end{aligned}$$

$$\text{et } \cos \alpha = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{alors : } \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{Donc : } f(x) = \text{Arc tan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}\text{et on a : } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < -\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } f(x) = \text{Arc tan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \text{Arc tan } x$$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \text{Arc tan } x$

6) On a : $f(x) = \text{Arc tan}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$

• Déterminons D ensemble de définition de f :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow 1 - 3x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 \neq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ et } x \neq -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Donc : } D = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

• Simplifions $f(x)$:

Soit $x \in D$, il existe un unique réel α de $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ avec $\alpha \neq \frac{\pi}{6}$ et $\alpha \neq -\frac{\pi}{6}$ tel que : $\tan \alpha = x$ c'est-à-dire $\alpha = \text{Arc tan } x$

• Écrivons $\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$ en fonction de α .

$$\text{On a : } \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

$$\text{et on a : } \tan(3\alpha) = \tan(\alpha + 2\alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan(2\alpha)}{1 - \tan \alpha \tan(2\alpha)}$$

Puisque :

$$\tan \alpha + \tan(2\alpha) = \tan \alpha + \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha - \tan^3 \alpha + 2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

et

$$1 - \tan \alpha \tan(2\alpha) = 1 - \tan \alpha \cdot \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{1 - \tan^2 \alpha - 2 \tan^2 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{1 - 3 \tan^2 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\text{alors : } \tan(3\alpha) = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \cdot \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

$$\text{Donc : } \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \tan(3\alpha), \text{ d'où : } f(x) = \text{Arc tan}(\tan(3\alpha))$$

$$\text{et on a : } \begin{cases} -\frac{3\pi}{2} < 3\alpha < \frac{3\pi}{2} \\ 3\alpha \neq \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \alpha \neq \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} \text{ et } 3\alpha \neq -\frac{\pi}{2}$$

$$\alpha \neq -\frac{\pi}{6} \text{ et } \alpha \neq \frac{\pi}{6}$$

On a donc 3 cas :

Cas 1 : Si : $-\frac{3\pi}{2} < 3\alpha < -\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $-\frac{\pi}{2} < \alpha < -\frac{\pi}{6}$ signifie que : $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Puisque : $-\frac{3\pi}{2} < 3\alpha < -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < 3\alpha + \pi < \frac{\pi}{2}$ et $\tan(3\alpha) = \tan(3\alpha + \pi)$

alors :

$$f(x) = \text{Arc tan}(\tan(3\alpha)) = \text{Arc tan}(\tan(3\alpha + \pi)) = 3\alpha + \pi = 3\text{Arc tan}(x) + \pi$$

$$\text{donc : } \left(\forall x \in \left] -\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right[\right) ; f(x) = 3\text{Arc tan}(x) + \pi$$

Cas 2 : Si : $-\frac{\pi}{2} < 3\alpha < \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire $-\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{6}$, signifie que : $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\text{alors : } f(x) = \text{Arc tan}(\tan(3\alpha)) = 3\alpha = 3\text{Arc tan}(x)$$

$$\text{donc : } \left(\forall x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right[\right) ; f(x) = 3\text{Arc tan}(x)$$

Cas 3 : Si $\frac{\pi}{2} < 3\alpha < \frac{3\pi}{2}$ c'est-à-dire $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, signifie que : $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\text{Puisque : } \frac{\pi}{2} < 3\alpha < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < 3\alpha - \pi < \frac{\pi}{2} \text{ et } \tan(3\alpha) = \tan(3\alpha - \pi)$$

alors :

$$f(x) = \text{Arc tan}(\tan(3\alpha)) = \text{Arc tan}(\tan(3\alpha - \pi)) = 3\alpha - \pi = 3\text{Arc tan}(x) - \pi$$

$$\text{donc : } \left(\forall x \in \left] \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty \right[\right) ; f(x) = 3\text{Arc tan}(x) - \pi$$

$$\text{Par suite : } \begin{cases} f(x) = 3\text{Arc tan}(x) + \pi ; x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ f(x) = 3\text{Arc tan}(x) ; -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}} \\ f(x) = 3\text{Arc tan}(x) - \pi ; x > \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Exercice 40

1) a-Montrons que g est bijective.

La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$, et on a :

$$(\forall x \in [0; +\infty[) ; g'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

Donc : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; g'(x) \leq 0$; d'où la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$,

et on a : g est continue sur $[0; +\infty[$, d'où la fonction g est une bijection de l'intervalle $[0; +\infty[$ sur l'intervalle J tel que :

$$J = g([0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); g(0) \right[=]-1; 1]$$

b-Déterminons $g^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle $] -1; 1]$

Soit x un élément de $] -1; 1]$ et y un élément de $[0; +\infty[$, tels que $g^{-1}(x) = y$

On a : $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{1-y^2}{1+y^2} = x$$

$$\Leftrightarrow (x+1)y^2 = 1-x$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad (\text{car } y \geq 0)$$

Donc : $(\forall x \in]-1; 1[) ; g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

2) a- Montrons que f est bijective.

• Continuité de f .

La fonction g est continue sur $[0; +\infty[$ et $g([0; +\infty[) \subset \mathbb{R}$ et la fonction Arc tan est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $f = \text{Arc tan} \circ g$ est continue sur $[0; +\infty[$.

• Monotonie de f sur $[0; +\infty[$

La fonction g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ et $g([0; +\infty[) \subset \mathbb{R}$ et la fonction Arc tan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

donc $f = \text{Arc tan} \circ g$ est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, d'où f est bijective de $[0; +\infty[$ sur $J = f([0; +\infty[)$.

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1$ et Arc tan est continue en -1

alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \text{Arc tan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ et $f(0) = \frac{\pi}{4}$, donc :

$$J = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(0) \right[= \left] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right[$$

b- Déterminons $f^{-1}(x)$.

Soit x un élément de $\left] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right[$ et y un élément de $[0; +\infty[$ tels que :

$$f^{-1}(x) = y$$

On a : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

$$\Leftrightarrow \text{Arc tan}(g(y)) = x$$

$$\Leftrightarrow g(y) = \tan x$$

$$\Leftrightarrow y = g^{-1}(\tan x) = \sqrt{\frac{1-\tan x}{1+\tan x}}$$

$$\text{et on a : } y = \sqrt{\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}} = \sqrt{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}} = \sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$$

$$\text{Donc : } \left(\forall x \in \left] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right] \right) ; f'(x) = \sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$$

$$c - \text{Calculons } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$$

$$\text{On pose : } y = f(x), \text{ on a : } y = f(x) \Leftrightarrow x = \sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right)}$$

$$\text{Donc : } \frac{f(x)}{x-1} = \frac{y}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right)} - 1} = \frac{y}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right) - 1} \times \left(\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right)} + 1 \right)$$

$$\text{et on a : } \tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right) - 1 = \frac{1 - \tan y}{1 + \tan y} - 1 = \frac{-2 \tan y}{1 + \tan y}$$

$$\text{Donc : } \frac{y}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right) - 1} = \frac{y}{\tan y} \times \left(\frac{1 + \tan y}{-2} \right)$$

$$\text{et puisque : } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} \times \left(\frac{1 + \tan y}{-2} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{c'est-à-dire : } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right) - 1} = -\frac{1}{2} \text{ et } \lim_{y \rightarrow 0} \sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right)} + 1 = 2$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right)} - 1} = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$$

Résumé

I

Dérivée de la composée de deux fonctions

Propriété:

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur les intervalles I et J tels que: $f(I) \subset J$

Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J , alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et on a: $(\forall x \in I); (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

II

Dérivabilité d'une fonction réciproque

Propriété:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Si f est dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ pour tout x de I , alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et on a: $(\forall x \in J); (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

III

Dérivées des fonctions: $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ et $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$

Soit n un entier naturel supérieur à 1.

- La fonction $f: x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on a:

$$(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

- Si une fonction u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I

alors la fonction $f: x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I et on a:

$$(\forall x \in I); f'(x) = \frac{1}{n} u'(x) (u(x))^{1/n-1} = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{(u(x))^{n-1}}}$$

IV

Dérivées des fonctions: $x \mapsto x^r$ et $x \mapsto (u(x))^r$ ou $r \in \mathbb{Q}^*$

Soit r un nombre rationnel non nul

• La fonction $f: x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = rx^{r-1}$$

• Si une fonction u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I , alors la fonction $f: x \mapsto (u(x))^r$ est dérivable sur I et on a :

$$(\forall x \in I); f'(x) = ru'(x)(u(x))^{r-1}$$

Exercices

Exercice 1

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$$

- 1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f .
- b) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$
- 2) a) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite et à gauche au point $x_0 = 1$
- b) Étudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en $x_1 = -2$
- 3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $D - \{-2; 1\}$.
- b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; \pi]$ par : $f(x) = \sqrt[3]{1 - \cos x}$

- 1) Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; \pi[$.
- 2) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0; \pi[$
- 3) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{\sin x}$$

1) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Montrer que : $(\forall x \in I) ; f'(x) = (f(x) - 1) \times \sqrt{(f(x))^2 - 2f(x)}$

3) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]2; +\infty[$, et que :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(x-1) \times \sqrt{x^2 - 2x}} \text{ pour tout réel } x \text{ de l'intervalle }]2; +\infty[$$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f après avoir déterminé D_f son ensemble définition, puis déterminer l'expression de sa fonction dérivée :

1) $f(x) = (x-1) \times \sqrt[3]{2x}$

5) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x} - x$

2) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x+2}$

6) $f(x) = (\sqrt[3]{x^2} - 1)^4$

3) $f(x) = \frac{2\sqrt[3]{x}}{1+x\sqrt{x}}$

7) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 2x}}$

4) $f(x) = x \times \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x}}$

8) $f(x) = x \times \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1$

1) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x .

b) Montrer que la fonction dérivée f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, en déduire que : $(\exists ! \alpha \in \mathbb{R}) / f'(\alpha) = 0$

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

2) a) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}) / f(x) = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right) f'(x) + \left(3x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right)$

b) Montrer que : $f(\alpha) > 0$

c) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}) / f(x) > 0$

Exercice 1

1) a) Déterminons D :

Soit x un réel, on a : $x \in D \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x \geq -2$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2$$

$$\Leftrightarrow x \in [-2; +\infty[$$

Donc : $D = [-2; +\infty[$

b) • Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$,

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} = +\infty$, c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

Soit x un réel de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt[3]{x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)}}{x} = \frac{x \times \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}}{x} = \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = 1$ et la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est continue en 1,

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \sqrt[3]{1} = 1$ c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

• Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$:

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} - x = \frac{-3x + 2}{(\sqrt[3]{x^3 - 3x + 2})^2 + x \times \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} + x^2} \\ &= \frac{x^2 \left(-\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x^2 \times \left(\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}\right)^2 + x \times \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}} + 1} \\ &= \frac{-\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}} + 1} \end{aligned}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = 0$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}} + 1 = 3$

Alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}} + 1} = 0$

C'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$

2) a) • Etudions la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0 = 1$:

Soit x un élément de l'intervalle $]1; +\infty[$, on a : $f(1) = 0$

et $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2 \times (x+2)}}{x-1} = \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2 \times (x+2)}{(x-1)^3}} = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{X} = +\infty$, alors : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}} = +\infty$

C'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 1$.

• Etudions la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 1$:

Soit x un élément de l'intervalle $] -2; 1[$, on a :

$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2 \times (x+2)}}{x-1} = -\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2 \times (x+2)}{-(x-1)^3}} = -\sqrt[3]{\frac{x+2}{1-x}}$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{1-x} = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{X} = +\infty$, alors : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt[3]{\frac{x+2}{1-x}} = +\infty$

C'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à gauche en $x_0 = 1$.

b) Etudions la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_1 = -2$:

Soit x un élément de l'intervalle $] -2; +\infty[$, on a : $f(-2) = 0$

et $\frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2 \times (x+2)}}{x+2} = \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2 \times (x+2)}{(x+2)^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2}$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{X} = +\infty$, alors :

$\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2} = +\infty$

C'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = +\infty$

Signifie que la fonction f n'est pas dérivable à droite en $x_1 = -2$.

3) a) Calculons $f'(x)$ où $x \in D - \{-2; 1\}$:

La fonction $u: x \mapsto x^3 - 3x + 2$ est dérivable sur chacun des intervalles $]-2; 1[$ et $]1; +\infty[$ et $u(x) > 0$ pour tout réel x de $]-2; 1[\cup]1; +\infty[$ et la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Donc la fonction $f = \sqrt[3]{u}$ est dérivable sur chacun des intervalles $]-2; 1[$ et $]1; +\infty[$.

Soit x un élément de $D - \{-2; 1\}$, on a : $u'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

$$\text{et } f'(x) = \frac{u'(x)}{3 \times \sqrt[3]{(u(x))^2}} = \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2}}$$

$$\text{Ainsi : } (\forall x \in D - \{-2; 1\}) ; f'(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2}}$$

b) Tableau de variations de la fonction f :

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - 1$ sur $D - \{-2; 1\}$, donc le tableau de variations de f est comme suit

x	-2	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$	$+\infty$	+	0	-	$-\infty$	$+\infty$	+
f	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 2

1) Montrons que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; \pi[$:

On a la fonction $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur l'intervalle $]0; \pi[$, donc la fonction $u: x \mapsto 1 - \cos x$ est dérivable sur l'intervalle $]0; \pi[$.

Et puisque $u(x) > 0$ pour tout x de $]0; \pi[$ et la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{u}$ est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ alors la fonction $f = \sqrt[3]{u}$ est dérivable sur l'intervalle $]0; \pi[$.

2) Calculons $f'(x)$ pour tout x de $]0; \pi[$:

$$\text{Soit } x \text{ un élément de }]0; \pi[, \text{ on a : } f'(x) = \frac{u'(x)}{3 \times \sqrt[3]{(u(x))^2}}$$

et comme : $u'(x) = \sin(x)$ alors : $f'(x) = \frac{\sin x}{3\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$

Donc : $(\forall x \in]0; \pi]) ; f'(x) = \frac{\sin x}{3 \times \sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$

3) Etudions la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 :

Soit x un élément de l'intervalle $]0; \pi]$, on a : $f(0) = 0$

$$\text{et } \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{1 - \cos x}}{x} = \sqrt[3]{\frac{1 - \cos x}{x^3}}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^3} = +\infty$. Et comme : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{X} = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{1 - \cos x}{x^3}} = +\infty$, c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$

Finalement la fonction f n'est pas dérivable à droite en 0.

Interprétation graphique :

On a la fonction est continue à droite en 0 et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$, donc

la courbe de la fonction f admet une demi-tangente verticale au point O dirigée vers le haut.

Exercice 3

1) Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} :

La fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable et ne s'annule pas sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ donc la fonction $f: x \mapsto 1 + \frac{1}{\sin x}$ est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Et on a : $(\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]) ; f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2(x)}$

Puisque : $f'(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$, alors f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Donc la fonction f est continue et strictement croissante sur $I = \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Par suite, f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$

où $J = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right); \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)\right] = [2; +\infty[$

Ainsi f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J = [2; +\infty[$.

2) Montrons que $(\forall x \in I); f'(x) = (f(x) - 1) \times \sqrt{(f(x))^2 - 2f(x)}$:

Soit x un élément de l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, on a : $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2(x)}$

$$\text{et } (f(x))^2 - 2f(x) = (f(x) - 1)^2 - 1 = \frac{1}{\sin^2(x)} - 1 = \frac{1 - \sin^2(x)}{\sin^2(x)} = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2$$

Puisque : $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ alors : $\frac{\cos x}{\sin x} \leq 0$.

Il s'ensuit que : $\sqrt{\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2} = -\frac{\cos x}{\sin x}$. Par suite : $\sqrt{(f(x))^2 - 2f(x)} = -\frac{\cos x}{\sin x}$

$$\text{Donc : } (f(x) - 1) \times \sqrt{(f(x))^2 - 2f(x)} = \frac{1}{\sin x} \times \left(-\frac{\cos x}{\sin x}\right) = -\frac{\cos x}{\sin^2(x)} = f'(x)$$

Finalement : $(\forall x \in I); f'(x) = (f(x) - 1) \times \sqrt{(f(x))^2 - 2f(x)}$

3) • Montrons que la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]2; +\infty[$:

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout réel $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$,

donc la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f\left(\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[\right)$ où

$$f\left(\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[\right) = \left]f\left(\frac{\pi}{2}\right); \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)\right[=]2; +\infty[$$

Donc la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

• Montrons que $(\forall x \in]2; +\infty[); (f^{-1})'(x) = \frac{1}{(x-1) \times \sqrt{x^2 - 2x}}$:

Soit x un élément de l'intervalle $]2; +\infty[$, on a : $f^{-1}(x) \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$

Donc, d'après la question précédente :

$$f'(f^{-1}(x)) = (f(f^{-1}(x)) - 1) \times \sqrt{(f(f^{-1}(x)))^2 - 2f(f^{-1}(x))} = (x - 1) \times \sqrt{x^2 - 2x}$$

Et comme $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, il s'ensuit que : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(x-1) \times \sqrt{x^2 - 2x}}$

$$\text{Finalement : } (\forall x \in]2; +\infty[); (f^{-1})'(x) = \frac{1}{(x-1) \times \sqrt{x^2 - 2x}}$$

Exercice 4

1) $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{2x}$:

• Ensemble de définition : $D_f = [0; +\infty[$

• Étude de la dérivabilité :

Les fonctions $u: x \mapsto (x-1)$ et $v: x \mapsto \sqrt[3]{2x}$ sont dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$, donc la fonction $f = u \times v$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

• Soit x un élément de $]0; +\infty[$, on a : $f(0) = 0$

$$\text{et } \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{(x-1) \times \sqrt[3]{2x}}{x} = (x-1) \times \sqrt[3]{\frac{2}{x^2}}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{2}{x^2}} = +\infty$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) \times \sqrt[3]{\frac{2}{x^2}} = -\infty$$

C'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$ signifie que la fonction f est non dérivable à droite en 0.

• Calculons $f'(x)$ où $x \in]0; +\infty[$:

$$\text{Soit } x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

$$\text{Et comme } u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = \frac{2}{3 \times \sqrt[3]{4x^2}}$$

$$\text{alors : } f'(x) = \sqrt[3]{2x} + \frac{2(x-1)}{3 \times \sqrt[3]{4x^2}} = \frac{6x + 2(x-1)}{3 \times \sqrt[3]{4x^2}} = \frac{2(4x-1)}{3 \times \sqrt[3]{4x^2}}$$

$$\text{Ainsi : } (\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = \frac{2(4x-1)}{3 \times \sqrt[3]{4x^2}}$$

$$2) f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x+2} :$$

• Ensemble de définition : $D_f =]1; +\infty[$

• Etude de la dérivabilité :

Les fonctions $u: x \mapsto \sqrt[3]{x-1}$ et $v: x \mapsto x+2$ sont dérivables sur l'intervalle $]1; +\infty[$, donc la fonction $f = \frac{u}{v}$ est dérivable sur $]1; +\infty[$.

• Soit x un élément de $]1; +\infty[$, on a : $f(1) = 0$

$$\text{et } \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{x+2} \times \sqrt[3]{\frac{x-1}{(x-1)^3}} = \frac{1}{x+2} \times \sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)^2}}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)^2}} = +\infty$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x+2} \times \sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)^2}} = +\infty$$

C'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$ signifie que la fonction f est non dérivable à droite en 1.

• Calculons $f'(x)$ où $x \in]1; +\infty[$:

$$\text{Soit } x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$$

Et comme $u'(x) = \frac{1}{3 \times \sqrt[3]{(x-1)^2}}$ et $v'(x) = 1$

$$\begin{aligned} \text{alors : } f'(x) &= \frac{1}{(x+2)^2} \left((x+2) \times \frac{1}{3 \times \sqrt[3]{(x-1)^2}} - \sqrt[3]{x-1} \right) \\ &= \frac{1}{(x+2)^2} \left(\frac{(x+2) - 3(x-1)}{3 \times \sqrt[3]{(x-1)^2}} \right) = \frac{5-2x}{3(x+2)^2 \times \sqrt[3]{(x-1)^2}} \end{aligned}$$

Ainsi : $(\forall x \in]1; +\infty[); f'(x) = \frac{5-2x}{3(x+2)^2 \times \sqrt[3]{(x-1)^2}}$

3) $f(x) = \frac{2 \times \sqrt[3]{x}}{1+x\sqrt{x}}$:

• Ensemble de définition : $D_f = [0; +\infty[$

• Etude de la dérivabilité :

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ en tant que quotient de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ qui sont : $u: x \mapsto 2\sqrt[3]{x}$

et $v: x \mapsto 1+x\sqrt{x}$ ($f = \frac{u}{v}$)

• Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $f(0) = 0$

$$\text{et } \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{2 \times \sqrt[3]{x}}{x(1+x\sqrt{x})} = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}(1+x\sqrt{x})}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1+x\sqrt{x} = 1$ alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x^2}(1+x\sqrt{x}) = 0^+$,

il s'ensuit que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}(1+x\sqrt{x})} = +\infty$

C'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$ signifie que la fonction f n'est pas dérivable à droite en 0.

• Calculons $f'(x)$ où $x \in]0; +\infty[$:

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$

Et comme $u'(x) = \frac{2}{3 \times \sqrt[3]{x^2}}$ et $v'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

$$\begin{aligned} \text{alors : } f'(x) &= \frac{1}{(1+x\sqrt{x})^2} \times \left(\frac{2}{3 \times \sqrt[3]{x^2}}(1+x\sqrt{x}) - 3\sqrt{x} \times \sqrt[3]{x} \right) \\ &= \frac{1}{(1+x\sqrt{x})^2} \times \left(\frac{2}{3 \times \sqrt[3]{x^2}}(1+x\sqrt{x}) - \frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} \right) \\ &= \frac{1}{(1+x\sqrt{x})^2} \times \left(\frac{2+2x\sqrt{x}-9x\sqrt{x}}{3 \times \sqrt[3]{x^2}} \right) \\ &= \frac{2-7x\sqrt{x}}{3(1+x\sqrt{x})^2 \times \sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

Ainsi : $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = \frac{2-7x\sqrt{x}}{3(1+x\sqrt{x})^2 \times \sqrt[3]{x^2}}$

$$4) f(x) = x \times \sqrt[3]{1-\frac{2}{x}} :$$

• Ensemble de définition :

Soit x un réel, on a : $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$ et $1-\frac{2}{x} \geq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } \frac{x-2}{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } x \in]-\infty; 0[\cup [2; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\cup [2; +\infty[$$

Donc : $D_f =]-\infty; 0[\cup [2; +\infty[$

• Etude de la dérivabilité :

La fonction $u: x \mapsto 1-\frac{2}{x}$ est dérivable et strictement positive sur les deux intervalles $]-\infty; 0[$ et $[2; +\infty[$ par conséquent la fonction $\sqrt[3]{u}$ est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $[2; +\infty[$.

Donc la fonction f est dérivable en tout point de $]-\infty; 0[$ et $[2; +\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables.

• Soit $x \in [2; +\infty[$, on a : $f(2) = 0$

$$\text{et } \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x \times \sqrt[3]{1-\frac{2}{x}}}{x-2} = x \times \frac{\sqrt[3]{\frac{x-2}{x}}}{\sqrt[3]{(x-2)^3}} = x \times \sqrt[3]{\frac{1}{x(x-2)^2}}$$

$$\text{Et comme : } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x(x-2)^2} = +\infty \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x(x-2)^2}} = +\infty$$

$$\text{Par suite : } \lim_{x \rightarrow 2^+} x \times \sqrt[3]{\frac{1}{x(x-2)^2}} = +\infty, \text{ c'est-à-dire : } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty,$$

signifie que : f n'est pas dérivable à droite en 2.

• Calculons $f'(x)$ où $]-\infty; 0[\cup [2; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in]-\infty; 0[\cup [2; +\infty[, \text{ on a : } f'(x) &= \sqrt[3]{1-\frac{2}{x}} + x \times \frac{\frac{2}{x^2}}{3 \times \sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}} \\ &= \sqrt[3]{1-\frac{2}{x}} + \frac{2}{3x \times \sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}} \\ &= \frac{3x-4}{3x \times \sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}} \end{aligned}$$

Ainsi : $(\forall x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[); f'(x) = \frac{3x-4}{3x \times \sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}}$

5) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x} - x$:

• Ensemble de définition :

Soit x un réel, on a : $x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + 2x \geq 0$

$$\Leftrightarrow x(x+2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$$

Donc : $D_f =]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$

• Etude de la dérivabilité :

La fonction f est dérivable en tout point de $D_f - \{0; -2\}$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{x+2}{x^2}} - 1 = +\infty$ signifie que f n'est pas dérivable à droite en 0.

• $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x} - x + 2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \left(-\sqrt[3]{\frac{-x}{(x+2)^2}} - 1 \right) = -\infty$

signifie que f n'est pas dérivable à gauche en -2.

• Calculons $f'(x)$ où $x \in D_f - \{0; -2\}$:

Soit x un élément de $D_f - \{0; -2\}$, on a :

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 2x)'}{3 \times \sqrt[3]{(x^2 + 2x)^2}} - 1 = \frac{2x + 2}{3 \times \sqrt[3]{(x^2 + 2x)^2}} - 1$$

Ainsi : $(\forall x \in D_f - \{0; -2\}); f'(x) = \frac{2x + 2}{3 \times \sqrt[3]{(x^2 + 2x)^2}} - 1$

6) $f(x) = (\sqrt[3]{x^2} - 1)^4$:

• Ensemble de définition $D_f = \mathbb{R}$.

• Etude de la dérivabilité :

La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt[3]{x^2} - 1)^4 - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{((\sqrt[3]{x^2} - 1)^2 - 1)((\sqrt[3]{x^2} - 1)^2 + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\sqrt[3]{x^2} - 1)^2 + 1) \times \frac{(\sqrt[3]{x^2})^2 - 2\sqrt[3]{x^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\sqrt[3]{x^2} - 1)^2 + 1) \left(\frac{\sqrt[3]{x^2} - 2}{\sqrt[3]{x}} \right) = -\infty \end{aligned}$$

Donc la fonction est non dérivable à droite en 0.

• Calculons la dérivée :

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}^*, \text{ on a : } f'(x) = 4(\sqrt[3]{x^2} - 1)^3 \times \left(\frac{2x}{3 \times \sqrt[3]{x^4}} \right) = \frac{8 \times (\sqrt[3]{x^2} - 1)^3}{3 \times \sqrt[3]{x^4}}$$

$$\text{Ainsi : } (\forall x \in \mathbb{R}^*); f'(x) = \frac{8}{3} \times \frac{(\sqrt[3]{x^2} - 1)^3}{\sqrt[3]{x^4}}$$

$$7) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - 2x} :$$

• Ensemble de définition :

$$\text{Soit } x \text{ un réel, on a : } x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$$

$$\text{Donc : } D_f =]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$$

• Calculons $f'(x)$ où $x \in D_f$:

La fonction f est dérivable en tout point de D_f .

Soit $x \in D_f$, on a :

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}} \times \left(\frac{2x - 2}{3 \times \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}} \right) = - \left(\frac{2x - 2}{x^2 - 2x} \right) \times \frac{1}{3 \times \sqrt[3]{x^2 - 2x}}$$

$$\text{Ainsi : } (\forall x \in D_f); f'(x) = - \frac{2}{3} \left(\frac{x - 1}{x^2 - 2x} \right) \times f(x)$$

$$8) f(x) = x \times \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}} :$$

• Ensemble de définition :

$$\text{Soit } x \text{ un réel, on a : } x \in D_f \Leftrightarrow x - 2 \neq 0 \text{ et } \frac{x+2}{x-2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 2 \text{ et } (x+2)(x-2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 2 \text{ et } x \in]-\infty; -2] \cup]2; +\infty[$$

$$\text{Donc : } D_f =]-\infty; -2] \cup]2; +\infty[$$

• Calcul de la dérivée :

La fonction f est dérivable en tout point de $]-\infty; -2] \cup]2; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}} + x \times \frac{\frac{-4}{(x-2)^2}}{3 \times \sqrt[3]{\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}} - \frac{4x}{3(x-2)^2 \times \sqrt[3]{\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3(x-2)^2 \left(\frac{x+2}{x-2} \right) - 4x}{3(x-2)^2 \times \sqrt[3]{\left(\frac{x+2}{x-2} \right)^2}} \\
 &= \frac{3x^2 - 4x - 12}{3(x-2)^2 \times \sqrt[3]{\left(\frac{x+2}{x-2} \right)^2}}
 \end{aligned}$$

Ainsi : $(\forall x \in D_f - \{-2\}) ; f'(x) = \frac{3x^2 - 4x - 12}{3(x-2)^2 \times \sqrt[3]{\left(\frac{x+2}{x-2} \right)^2}}$

Exercice 5

1) a) Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculons $f'(x)$

On a : $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1$

La fonction f est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynomiale.

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + 18x - 4 = 2(4x^3 - 6x^2 + 9x - 2)$

b) Montrons que f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

- La fonction f' est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme

- $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f''(x) = 2(12x^2 - 12x + 9) = 6(4x^2 - 4x + 3)$

Puisque le discriminant du trinôme $4x^2 - 4x + 3$ est -32 et $a = 4$ alors $4x^2 - 4x + 3 > 0$ pour tout réel x

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f''(x) > 0$

Par suite la fonction f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Ainsi la fonction f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle

$$J = f'(\mathbb{R}) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)[= \mathbb{R} \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 8x^3 = +\infty$$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 8x^3 = -\infty$

- Déduisons que : $(\exists ! \alpha \in \mathbb{R}) / f'(\alpha) = 0$

Comme f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$

alors il existe un unique réel α tel que $f'(\alpha) = 0$

c) Dressons le tableau de variations de f :

• Déterminons le signe de $f'(x)$ où $x \in \mathbb{R}$

Puisque la fonction f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f'(\alpha) = 0$ alors

on aura : $x < \alpha \Rightarrow f'(x) < f'(\alpha)$

$$\Rightarrow f'(x) < 0$$

Et $x > \alpha \Rightarrow f'(x) > f'(\alpha)$

$$\Rightarrow f'(x) > 0$$

• On a : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} 2x^4 = +\infty$

Ainsi le tableau de variations de la fonction f est :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
f	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

2)

a- Vérifions que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right)f'(x) + \left(3x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right)$

Soit x un réel, on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right)f'(x) &= \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right)(2(4x^3 - 6x^2 + 9x - 2)) \\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)(4x^3 - 6x^2 + 9x - 2) \\ &= \frac{1}{2}\left(4x^4 - 8x^3 + 12x^2 - \frac{13}{2}x + 1\right) = 2x^4 - 4x^3 + 6x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right)f'(x) + \left(3x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right) &= 2x^4 - 4x^3 + 6x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{1}{2} + 3x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \\ &= 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 = f(x) \end{aligned}$$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right)f'(x) + \left(3x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right)$

b- Montrons que : $f(\alpha) > 0$

D'après la question précédente, on a

$$f(\alpha) = \left(\frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{8}\right)f'(\alpha) + \left(3\alpha^2 - \frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{2}\right)$$

or $f'(\alpha) = 0$, donc $f(\alpha) = 3\alpha^2 - \frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{2}$

Puisque le discriminant du trinôme $3x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ est $-\frac{87}{16}$ et $a = 3$

alors $3x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} > 0$ pour tout réel x

Ainsi : $3\alpha^2 - \frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{2} > 0$, c'est-à-dire : $f(\alpha) > 0$

c) Dédution :

$f(\alpha)$ est la valeur minimale de f sur $\mathbb{R}$ signifie : $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \geq f(\alpha)$

or $f(\alpha) > 0$, donc : $(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) > 0$

V Dérivée de la fonction Arctangente

• La fonction Arc tan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); (\text{Arc tan})'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

• Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la

fonction $f: x \mapsto \text{Arc tan}(u(x))$ est dérivable sur I et on a :

$$(\forall x \in I); f'(x) = \frac{u'(x)}{1 + u^2(x)}$$

Exercices

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants; étudier la dérivabilité de la fonction f après avoir déterminé D son ensemble de définition, puis déterminer l'expression de sa dérivée.

1) $f(x) = x \times \text{Arc tan}(\sqrt{x})$

3) $f(x) = \sqrt[3]{\text{Arc tan } x}$

2) $f(x) = \frac{\text{Arc tan } x}{\sqrt{x}}$

4) $f(x) = \text{Arc tan}(\sqrt[3]{(x+2)^2})$

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de la fonction f après avoir déterminé D son ensemble de définition, et en déduire une simplification de l'expression de $f(x)$ pour tout réel x de D :

1) $f(x) = \text{Arc tan}(\sqrt{1+x^2} - x)$

2) $f(x) = \text{Arc tan}\left(\frac{2x+1}{2-x}\right)$

3) $f(x) = \text{Arc tan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \text{Arc tan}\left(\frac{2-x}{x\sqrt{3}}\right)$

4) $f(x) = \text{Arc tan}\left(\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right)$

Exercice 8

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \text{Arc tan}\left(\frac{x-1}{x}\right) - \text{Arc tan}\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f .

b) Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

2) a) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de D .

b) En déduire que : $(\forall x \in]-1; 0[); f(x) = \text{Arc tan}(2x^2) + \frac{\pi}{2}$

et $(\forall x \in]-\infty; -1[\cup]0; -\infty[); f(x) = \text{Arc tan}(2x^2) - \frac{\pi}{2}$

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -1; 1[$ par :

$$f(x) = 2x + \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

1) a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $] -1; 1[$ sur un ensemble J à préciser.

b) Déterminer $f''(x)$ pour tout réel x de $] -1; 1[$.

2) On pose $g = f^{-1}$ où f^{-1} est la bijection réciproque de la fonction f .

a) Montrer que la fonction g est deux fois dérivable sur J .

b) Calculer chacun des nombres suivants : $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $g'(2)$ et $g''(2)$

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{\operatorname{Arc} \tan(x)}$$

- 1) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0; +\infty[$ et que : $1 < \alpha < \sqrt{3}$
- 3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.
c) Montrer que : $(f^{-1})'(0) = \frac{1 + \alpha^2}{1 + 2\alpha^2}$

Solutions**Exercice 6**

1) $f(x) = x \times \operatorname{Arc} \tan(\sqrt{x})$

• $D =]0; +\infty[$

• La fonction $u: x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, donc la fonction Arctan ou est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Par conséquent, la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

• Soit x un élément de $]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{Arc} \tan(\sqrt{x}) + x \times \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} = \operatorname{Arc} \tan(\sqrt{x}) + \frac{x}{2\sqrt{x}(1+x)} \\ &= \operatorname{Arc} \tan(\sqrt{x}) + \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} \end{aligned}$$

Ainsi : $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = \operatorname{Arc} \tan(\sqrt{x}) + \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$

2) $f(x) = \frac{\operatorname{Arc} \tan x}{\sqrt{x}}$:

• $D =]0; +\infty[$

• La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$, en tant que quotient de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ à savoir : $x \mapsto \operatorname{Arc} \tan x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$

• Soit $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{\sqrt{x}}{1+x^2} - \frac{\text{Arc tan } x}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{2x - (1+x^2)\text{Arc tan } x}{2x\sqrt{x}(1+x^2)}$$

$$\text{Ainsi : } \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \frac{2x - (1+x^2)\text{Arc tan } x}{2x\sqrt{x}(1+x^2)}$$

$$3) f(x) = \sqrt[3]{\text{Arc tan } x} :$$

• Soit x un réel, on a : $x \in D \iff \text{Arc tan } x \geq 0$

$$\iff x \geq 0$$

$$\iff x \in [0; +\infty[$$

$$\text{Donc : } D = [0; +\infty[$$

• La fonction $x \mapsto \text{Arc tan } x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et $\text{Arc tan } x > 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$, il s'ensuit que la fonction $f: x \mapsto \sqrt[3]{\text{Arc tan } x}$ est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} \text{et on a : } \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) &= \frac{\frac{1}{1+x^2}}{3 \times \sqrt[3]{(\text{Arc tan } x)^2}} \\ &= \frac{1}{3(1+x^2) \times \sqrt[3]{(\text{Arc tan } x)^2}} \end{aligned}$$

$$4) f(x) = \text{Arc tan}(\sqrt[3]{(x+2)^2}) :$$

$$\bullet D = \mathbb{R}$$

• La fonction $u: x \mapsto (x+2)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur les intervalles $]-\infty; -2[$ et $]-2; +\infty[$ et $u(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Par suite la fonction $v: x \mapsto \sqrt[3]{u(x)}$ est dérivable sur les deux intervalles $]-\infty; -2[$ et $]-2; +\infty[$

Il s'ensuit que la fonction $f = \text{Arc tan} \circ v$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}; f(x) = \frac{v'(x)}{1+(v(x))^2}$$

$$\text{Et } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}; v'(x) = \frac{2(x+2)}{3\sqrt[3]{(x+2)^4}}$$

$$\text{et } 1+(v(x))^2 = 1+\sqrt[3]{(x+2)^4}$$

$$\text{Ainsi : } (\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}); f'(x) = \frac{2(x+2)}{3\sqrt[3]{(x+2)^4} \times (1+\sqrt[3]{(x+2)^4})}$$

Exercice 7

$$1) f(x) = \text{Arc tan}(\sqrt{1+x^2} - x) :$$

• Déterminons D

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } x \in D \Leftrightarrow 1+x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc : } D = \mathbb{R}$$

• Déterminons la dérivée de f :

La fonction $u: x \mapsto \sqrt{1+x^2} - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $f = \text{Arc tan}$ ou est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } u'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2} = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1+(1+x^2-2x\sqrt{1+x^2}+x^2)} \\ &= \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{2(1+x^2-x\sqrt{1+x^2})} = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{2(1+x^2)(\sqrt{1+x^2}-x)} \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x^2}$$

• Simplifions l'expression de $f(x)$:

$$\text{On a : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; \left(-\frac{1}{2} \text{Arc tan } x\right)' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} = f'(x),$$

$$\text{donc : } (\exists c \in \mathbb{R}) / (\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = -\frac{1}{2} \cdot \text{Arc tan}(x) + c$$

$$\text{et on a : } f(0) = \text{Arc tan}(1) = \frac{\pi}{4} \text{ donc } c = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Finalement : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = -\frac{1}{2} \text{Arc tan}(x) + \frac{\pi}{4}$$

$$2) f(x) = \text{Arc tan}\left(\frac{2x+1}{2-x}\right)$$

• Déterminons D :

$$x \in D \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } 2-x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$\text{Donc : } D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

• Déterminons la dérivée de f

la fonction f est dérivable en tout point de D , en plus on a :

$$(\forall x \in D); f'(x) = \frac{5}{(2-x)^2} = \frac{5}{(2-x)^2} \times \frac{(2-x)^2}{5(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

• Simplification de l'expression de $f(x)$

On a : $(\forall x \in D); f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (\text{Arc tan})'(x)$

donc : $(\exists c_1 \in \mathbb{R}) / (\forall x \in]-\infty; 2[); f(x) = \text{Arc tan}(x) + c_1$

$(\exists c_2 \in \mathbb{R}) / (\forall x \in]2; +\infty[); f(x) = \text{Arc tan}(x) + c_2$

et puisque : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \text{Arc tan}(-2) = -\text{Arc tan}(2)$

Alors : $c_1 = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tan}(2) = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{2}\right)$

et $c_2 = -\frac{\pi}{2} - \text{Arc tan}(2) = -\pi + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{2}\right)$

Finalement :
$$\begin{cases} (\forall x \in]-\infty; 2[); f(x) = \text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{2}\right) \\ (\forall x \in]2; +\infty[); f(x) = \text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{2}\right) - \pi \end{cases}$$

3) $f(x) = \text{Arc tan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \text{Arc tan}\left(\frac{2-x}{x\sqrt{3}}\right)$

• $D = \mathbb{R}^*$

• La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$,

Soit x un réel non nul, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{-\frac{2\sqrt{3}}{3x^2}}{1 + \left(\frac{2-x}{x\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4x^2 - 4x + 4} - \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4x^2 - 4x + 4} = 0 \end{aligned}$$

Par suite :
$$\begin{cases} (\exists c_2 \in \mathbb{R}) / (\forall x \in]0; +\infty[); f(x) = c_1 \\ (\exists c_2 \in \mathbb{R}) / (\forall x \in]-\infty; 0[); f(x) = c_2 \end{cases}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \text{Arc tan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$

et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \text{Arc tan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{3}$

alors $c_1 = \frac{\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} f(x) = \frac{\pi}{3} & \text{si } x \in]0; +\infty[\\ f(x) = -\frac{2\pi}{3} & \text{si } x \in]-\infty; 0[\end{cases}$$

$$4) f(x) = \text{Arc tan} \left(\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1} \right)$$

• Déterminons D :

Soit x un réel on a : $x \in D \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 \neq 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \neq 2 \text{ et } x \neq -1 - \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x \neq -1 + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}\}$$

$$\text{Donc : } D = \mathbb{R} - \{-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}\}$$

• Déterminons la dérivée de f :

La fonction f est dérivable en tout point de D ,

soit x un élément D , on pose : $u(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1}$

$$\text{On a : } u'(x) = \frac{(2x-2)(x^2+2x-1) - (2x+2)(x^2-2x-1)}{(x^2+2x-1)^2}$$

$$= \frac{4(x^2+1)}{(x^2+2x-1)^2}$$

$$\text{Donc : } f'(x) = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$$

$$= \frac{4(x^2+1)}{(x^2+2x-1)^2} \times \frac{(x^2+2x-1)^2}{(x^2+2x-1)^2 + (x^2-2x-1)^2}$$

$$= \frac{2}{1+x^2}$$

$$\text{Ainsi : } (\forall x \in D); f'(x) = 2 \times \frac{1}{1+x^2}$$

• Simplification de l'expression de $f(x)$

$$\text{On a : } (\forall x \in D); f'(x) = (2 \text{Arc tan})'(x)$$

$$\text{donc : } \begin{cases} (\exists c_1 \in \mathbb{R}) / (\forall x \in]-\infty; -1 - \sqrt{2}[); f(x) = 2 \text{Arc tan}(x) + c_1 \\ (\exists c_2 \in \mathbb{R}) / (\forall x \in]-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}[); f(x) = 2 \text{Arc tan}(x) + c_2 \\ (\exists c_3 \in \mathbb{R}) / (\forall x \in]-1 + \sqrt{2}; +\infty[); f(x) = 2 \text{Arc tan}(x) + c_3 \end{cases}$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arc tan } x = \frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arc tan } x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{donc : } c_1 = \frac{5\pi}{4} \text{ et } c_3 = -\frac{3\pi}{4}$$

Et on a : $f(0) = \frac{\pi}{4}$ et $\text{Arc tan}(0) = 0$, donc : $c_2 = \frac{\pi}{4}$

Finalement :

$$\begin{cases} (\forall x \in]-\infty; -1 - \sqrt{2}[); f(x) = 2\text{Arc tan}(x) + \frac{5\pi}{4} \\ (\forall x \in]-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}[); f(x) = 2\text{Arc tan}(x) + \frac{\pi}{4} \\ (\forall x \in]-1 + \sqrt{2}; +\infty[); f(x) = 2\text{Arc tan}(x) - \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Exercice 8

1) a- Déterminons D l'ensemble de définition de f :

Soit x un réel, on a : $f(x) = \text{Arc tan}\left(\frac{x-1}{x}\right) - \text{Arc tan}\left(\frac{x}{1+x}\right)$

donc : $x \in D \Leftrightarrow x \neq 0$ et $1+x \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$$

D'où : $D = \mathbb{R} \setminus \{0; -1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; +\infty[$

b- Calculons les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$ et comme

la fonction Arc tan est continue en 1 alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arc tan}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arc tan}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \text{Arc tan}(1) = \frac{\pi}{4}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arc tan}\left(\frac{x-1}{x}\right) - \text{Arc tan}\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$

C'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arc tan}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \text{Arc tan}(1) = \frac{\pi}{4}$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1+x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arc tan}\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{4}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arc tan}\left(\frac{x-1}{x}\right) - \text{Arc tan}\left(\frac{x}{1+x}\right) = 0$ C'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{Arc tan}\left(\frac{x}{1+x}\right) = \text{Arc tan}(0) = 0$

Et on a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x} = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \text{Arc tan}(X) = \frac{\pi}{2}$

donc : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{Arc tan}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

Par suite $\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{Arc tan}\left(\frac{x-1}{x}\right) - \text{Arc tan}\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{2}$

C'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{\pi}{2}$

2) a- Déterminons $f'(x)$ où $x \in D$

La fonction f est dérivable en tout point de l'ensemble D

Soit x un élément de D , on pose : $u(x) = \frac{x-1}{x}$ et $v(x) = \frac{x}{1+x}$

alors $f(x) = \text{Arc tan}(u(x)) - \text{Arc tan}(v(x))$

Donc : $f'(x) = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2} - \frac{v'(x)}{1+(v(x))^2}$

On a : $u'(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)' = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$

et $v'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$

Puisque : $1+(u(x))^2 = 1 + \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 = \frac{x^2 + x^2 - 2x + 1}{x^2} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2}$

$1+(v(x))^2 = 1 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 = \frac{2x^2 + 2x + 1}{(1+x)^2}$

Alors : $\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2} = \frac{1}{x^2} \times \frac{x^2}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}$

et $\frac{v'(x)}{1+(v(x))^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \times \frac{(1+x)^2}{2x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{2x^2 + 2x + 1}$

Donc : $f'(x) = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{2x^2 + 2x + 1}$

Ainsi : $(\forall x \in D) ; f'(x) = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{2x^2 + 2x + 1}$

b) Dédution :

Soit $x \in D$, on a : $f'(x) = \frac{1}{2x^2 + 1 - 2x} - \frac{1}{2x^2 + 1 + 2x}$
 $= \frac{2x^2 + 1 + 2x - 2x^2 - 1 + 2x}{(2x^2 + 1 + 2x)(2x^2 + 1 - 2x)} = \frac{4x}{(2x^2 + 1)^2 - 4x^2}$
 $= \frac{4x}{1 + 4x^4}$

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \text{Arc tan}(2x^2)$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; h'(x) = (\text{Arc tan}(2x^2))' = \frac{(2x^2)'}{1 + (2x^2)^2} = \frac{4x}{1 + 4x^4}$$

Par suite les fonctions f et h sont dérivables en tout point de D

et on a : $(\forall x \in D), f'(x) = h'(x)$

Par conséquent :

- $(\exists c_1 \in \mathbb{R}) / (\forall x \in]-\infty; -1[); f(x) = h(x) + c_1$
- $(\exists c_2 \in \mathbb{R}) / (\forall x \in]-1; 0[); f(x) = h(x) + c_2$
- $(\exists c_3 \in \mathbb{R}) / (\forall x \in]0; +\infty[); f(x) = h(x) + c_3$

Déterminons les constantes c_1, c_2 et c_3 :

On a : $(\forall x \in]-\infty; -1[); f(x) = h(x) + c_1$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) + c_1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) + c_1$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arc tan}(2x^2) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{d'où } c_1 = -\frac{\pi}{2}$$

de même on a : $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = h(x) + c_3$

$$\text{alors } c_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - h(x) \text{ donc : } c_3 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ainsi : } (\forall x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[); f(x) = \text{Arc tan}(2x^2) - \frac{\pi}{2}$$

D'autre part : on a : $(\forall x \in]-1; 0[); f(x) = h(x) + c_2$

$$\text{donc : } c_2 = \lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x) - h(x))$$

$$\text{or : } \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{Arc tan}(2x^2) = \text{Arc tan}(0) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{\pi}{2} \text{ d'où } c_2 = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 9

1) a- Montrons que f est une bijection de $] -1; 1[$ sur J :

• Continuité de f :

La fonction $u: x \mapsto \frac{\pi}{2}x$ est continue sur $] -1; 1[$ et $u(]-1; 1[) =] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

et la fonction $\tan$ est continue sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, donc la fonction

$x \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = (\tan \circ u)(x)$ est continue sur $] -1; 1[$.

Par suite la fonction f est continue sur $] -1; 1[$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $] -1; 1[$ à savoir : $x \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ et $x \mapsto 2x$.

• Stricte monotonie de f :

$$\text{On a : } (\forall x \in] -1; 1[); f'(x) = 2 + \frac{\pi}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{2} x\right)$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in] -1; 1[); f'(x) > 0$$

D'où la fonction f est strictement croissante sur $] -1; 1[$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection réciproque, la fonction f réalise une bijection de $] -1; 1[$ sur $J = f(] -1; 1[) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x); \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)[= \mathbb{R}$,

$$\text{car : } \lim_{x \rightarrow -1^+} \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{X \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(X) = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1^-} \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{X \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(X) = +\infty \text{ (on pose : } X = \frac{\pi}{2}x \text{)}$$

Finalement f réalise une bijection de $] -1; 1[$ sur $\mathbb{R}$

b- Déterminons $f''(x)$ pour $x \in] -1; 1[$:

$$\text{On a : } (\forall x \in] -1; 1[); f'(x) = 2 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } (\forall x \in] -1; 1[); f''(x) &= \frac{\pi}{2} \left(2 \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) \times \left(\frac{\pi}{2}\right) \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) \right) \\ &= \left(\frac{\pi^2}{2}\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) \times \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) \end{aligned}$$

2) Montrons que la fonction g est deux fois dérivable sur $J = \mathbb{R}$

$$\text{On a : } g = f^{-1}$$

Puisque la fonction f est dérivable sur $] -1; 1[$, en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $] -1; 1[$, telle que $f'(x) \neq 0$ pour tout réel de $] -1; 1[$

alors la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}); g'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ \text{C'est-à-dire : } g' &= \frac{1}{f' \circ f^{-1}} = \frac{1}{f' \circ g} \end{aligned}$$

Par suite montrons que la fonction $f' \circ g$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ pour déduire que g' est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\text{On a : la fonction } g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, g(\mathbb{R}) =] -1; 1[$$

et la fonction f' est dérivable sur $] -1; 1[$ par suite la fonction $f' \circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en plus $f' \circ g(x) \neq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

D'où : $g' = \frac{1}{f' \circ g}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Finalement la fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

b) Calculons : $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $g'(2)$ et $g''(2)$

On a : $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} + \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2$ et $g(2) = \frac{1}{2}$

• $g'(2) = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}$ or $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 + \pi$

Donc : $g'(2) = \frac{1}{2 + \pi}$

• On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g''(x) = \frac{-(f''(g(x)) \times g'(x))}{(f'(g(x)))^2}$

Par suite : $g''(2) = \frac{-f''\left(\frac{1}{2}\right) \times g'(2)}{\left(f'\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}$

or : $f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2} \times 1 \times (1 + 1) = \pi^2$ et $g'(2) = \frac{1}{2 + \pi}$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \pi$

Donc : $g''(2) = -\frac{\pi^2}{4(2 + \pi)^3}$

Exercice 10

1) Dressons le tableau de variations de la fonction f :

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Arc tan } x = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Arc tan } x} = +\infty$

alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - \frac{1}{\text{Arc tan } x} = -\infty$, c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arc tan } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{Arc tan } x} = \frac{2}{\pi}$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{\text{Arc tan } x} = +\infty$ c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$, et on a :

$(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = 1 + \frac{1}{(1+x^2)(\text{Arc tan } x)^2} = 1 + \frac{1}{(1+x^2)(\text{Arc tan } x)^2}$

• On a : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Par suite le tableau de variations de f est :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

2) Montrons que : $(\exists! \alpha \in]0; +\infty[) / f(\alpha) = 0$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Donc, d'après le théorème de la fonction réciproque,

la fonction f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur

$$f(]0; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$$

Et comme : $0 \in \mathbb{R}$ donc : $(\exists! \alpha \in]0; +\infty[) : f(\alpha) = 0$

• Montrons que : $1 < \alpha < \sqrt{3}$

$$\text{On a : } f(1) = 1 - \frac{1}{\text{Arc tan}(1)} = 1 - \frac{4}{\pi} = \frac{\pi - 4}{\pi} \text{ et } \pi - 4 < 0$$

Alors $f(1) < 0$

$$\text{et on a : } f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} - \frac{1}{\text{Arc tan}(\sqrt{3})} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \text{ et } \sqrt{3} > \frac{\pi}{3}$$

alors $f(\sqrt{3}) > 0$

Par suite : $f(1) < 0 < f(\sqrt{3})$ c'est-à-dire : $f(1) < f(\alpha) < f(\sqrt{3})$

Et puisque la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

alors : $1 < \alpha < \sqrt{3}$

3) a) Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} :

On a f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b- Montrons que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et $f'(x) \neq 0$

pour tout réel x de $]0; +\infty[$, donc la fonction f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R} = f(]0; +\infty[)$

c- Montrons que $(f^{-1})'(0) = \frac{1 + \alpha^2}{1 + 2\alpha^2}$

On a : $f(\alpha) = 0$ alors $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(\alpha)}$ or : $f'(\alpha) = 1 + \frac{1}{(1+\alpha^2)(\text{Arc tan}(\alpha))^2}$

Et on a : $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\text{Arc tan } \alpha}$

$$\Leftrightarrow \text{Arc tan } \alpha = \frac{1}{\alpha}$$

Donc : $(1+\alpha^2)(\text{Arc tan } \alpha)^2 = (1+\alpha^2) \times \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1+\alpha^2}{\alpha^2}$

Par suite $f'(\alpha) = 1 + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} = \frac{1+2\alpha^2}{1+\alpha^2}$

Ainsi : $(f^{-1})'(0) = \frac{1+\alpha^2}{1+2\alpha^2}$

VI Théorème de Rolle

Si une fonction f est continue sur l'intervalle fermé $[a; b]$ (ou segment $[a; b]$) et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ et $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins un élément c de $]a; b[$ tel que : $f'(c) = 0$

VII Théorème des accroissements finis

Si une fonction f est continue sur l'intervalle fermé $[a; b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$, alors il existe au moins un élément c de $]a; b[$ tel que : $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

VIII Inégalité des accroissements finis

Propriété 1:

Si f est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ et s'il existe deux nombres réels m et M tels que : $m < f'(x) \leq M$ pour tout x de $]a; b[$, alors : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Propriété 2:

Si f est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ et s'il existe un réel positif k tel que : $(\forall x \in]a; b[); |f'(x)| \leq k$
alors : $(\forall (x; y) \in [a; b]^2) : |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

Exercices

Exercice 11

1) a) Montrer que : $(\forall x \in [0; +\infty[); -\frac{x^3}{3} \leq \text{Arc tan}(x) - x \leq -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$

b) En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan}(x) - x}{x^2} = 0$

2) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - x}{x^2} = -1$

Exercice 12

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ et dérivable sur $]0; 1[$ telle que : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$

Montrer que : $(\exists c \in]0; 1[); 2c f'(c) = \sqrt{c}$

Exercice 13

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ et dérivable sur $]0; 1[$ telle que : $f(0) \neq f(1)$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout réel x de $]0; 1[$

Montrer que : $(\exists ! c \in]0; 1[); f(0) - f(1) = 2 f(c)$

Exercice 14

Soit a, b et c des nombres réels donnés non tous nuls.

Montrer que l'équation : $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a + b + c) = 0; x \in \mathbb{R}$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0; 1[$.

Exercice 15

1) a) Soit a et b des réels tels que : $0 \leq a < b$

Montrer que : $\frac{1}{1+b^2} < \frac{\text{Arc tan}(b) - \text{Arc tan}(a)}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$

b) En déduire que : $(\forall x \in]0; +\infty[); \frac{1}{1+x^2} < \frac{\text{Arc tan}(x)}{x} < 1$

2) Application :

a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\text{Arc tan}(x)}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Montrer que la fonction f est continue en $x_0 = 0$, puis étudier sa dérivabilité en $x_0 = 0$.

b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = (x-1)^2 \times \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right)$

Etudier la nature des branches infinies de la courbe de la fonction g au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 16

En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer les inégalités suivantes :

1) $(\forall x \in]-\infty; 0[); \text{Arc tan}(x) < \frac{x}{1+x^2}$

2) $\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{\tan b - \tan a}{b-a} < \frac{1}{\cos^2 b}$ où a et b sont deux réels tels que :

$$0 < a < b < \frac{\pi}{2}$$

3) $(\forall (x; y) \in ([0; 10]^2); |x \cos x - y \cos y| \leq 11 \times |x - y|$

4) $(\forall x \in]0; 1[); |f(x) - f(y)| < \frac{1}{4 \cos^2(1)} \times |x - y|$ où $f(t) = \frac{1}{4} \tan\left(\frac{1}{1+t}\right)$

5) $(\forall (x; y) \in (]0; 2[)^2); |g(x) - g(y)| < \frac{\sqrt{2}}{12} |x - y|$ où $g(t) = \text{Arc tan}(\sqrt{t+2})$

Exercice 17

1) Énoncer le théorème des accroissements finis.

2) Montrer que : $(\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[); 1 < \frac{\tan(x)}{x} < 1 + \tan^2(x)$, en appliquant le théorème des accroissements finis.

Exercice 18

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ telle que : $f(0) = 0$ et la fonction f' est décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

1) Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[); f(x) \geq x f'(x)$

2) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{f(x)}{x}$
Montrer que la fonction g est décroissante sur $]0; +\infty[$.

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{4}[$ par :

$$f(x) = 2x + \sin(x) - \cos(x)$$

1) Montrer que : $(\exists ! \alpha \in]0; \frac{\pi}{4}[) / f(\alpha) = \alpha$

2) Montrer que : $(\forall x \in [0; \frac{\pi}{4}]) : |f'(x)| \leq 4$

3) Montrer que : $(\exists ! \alpha \in [0; \frac{\pi}{4}]) : |f(x) - \alpha| \leq \pi$

Exercice 20

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ et dérivable sur $]0; 1[$ telles que :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 4$$

Montrer que : $(\exists c \in]0; 1[) : \sqrt[4]{c^3} \times f'(c) = 1$

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - x + \text{Arc tan}(x)$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a) Montrer que le point $I(0; 1)$ est un centre de symétrie de (C) .

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que : $2 < \alpha < \frac{5}{2}$

3) a) Etudier les branches infinies de la courbe (C) .

b) Tracer la courbe (C) .

4) a) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \{1\}$

et que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}) : 1 + (f^{-1})'(x) + \frac{1}{(f^{-1}(x))^2} = 0$

b) Montrer que : $(\exists c \in]\frac{\pi}{4}; 1[) : (\frac{\pi}{4} - 1) \left(1 + \frac{1}{(f^{-1}(c))^2} \right) = -1$

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\tan(x)} ; \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ f(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$

2) Montrer que : $-2 \leq f'(x) \leq -1$ pour tout réel x de $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$

3) En déduire que : $\frac{\pi}{2} - 2x \leq \frac{1 - \tan x}{\tan x} \leq \frac{\pi}{4} - x$ pour tout réel x de $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $[0; 1]$.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout réel x de $[0; 1]$.

Exercice 23

1) a et b deux réels tels que : $a < b$

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ et dérivables sur $]a; b[$ telle que $g'(x) \neq 0$ pour tout réel x de $]a; b[$.

a) Montrer que : $g(a) \neq g(b)$

b) En considérant la fonction φ définie sur $[a; b]$ par :

$$\varphi(x) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \times (g(x) - g(a)) - (f(x) - f(a))$$

Montrer que : $(\exists c \in]a; b[); \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

2) Application :

Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{x^3} \right) \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \text{Arc tan}(x)}{x^3} \right)$$

Exercice 24

a et b deux nombres réels avec $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a; b[$ telle que :

$$f(a) = f(b) = 0 \text{ et } f'_a(a) = 0$$

Montrer que : $(\exists c \in]a; b[); f'(c) = \frac{f(c)}{c - a}$

Exercice 25

n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ et dérivable sur l'intervalle $]0; 1[$ telle que :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1$$

Montrer que : $(\exists (a; b; c) \in (]0; 1[)^3); f'(a) \times f'(b) = \frac{1 - c^n}{1 - c} \times c^{n-1}$

Exercice 26

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$(\exists \alpha \in]0; +\infty[); (\forall x \in \mathbb{R}); f''(x) \geq \alpha$$

1) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$

2) Montrer que f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note : g la bijection réciproque de l'application f' .

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = xg(x) - f(g(x))$

Montrer que la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $g'(x)$ pour tout réel x .

Exercice 27

Soit a et b deux nombres réels avec $a < b$.

Soit f une fonction numérique continue sur le segment $[a; b]$ et deux fois dérivable sur l'intervalle $]a; b[$ telle que : $f(a) = f(b) = 0$ et $f''(x) \neq 0$ pour tout réel x de $]a; b[$.

Montrer que : $(\forall x \in]a; b[); f(x) \neq 0$

Exercice 28

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$, dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0)$

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$\begin{cases} F(x) = f\left(\frac{1}{x} - 1\right); 0 < x \leq 1 \\ F(0) = f(0) \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction $\varphi: x \mapsto \frac{1}{x} - 1$ réalise une bijection de l'intervalle $]0; 1]$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2) a) Montrer que la fonction F est continue sur $[0; 1]$.

b) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $]0; 1[$.

3) Montrer que : $(\exists c \in]0; +\infty[) / f'(c) = 0$

4) On suppose que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ pour tout réel $x > 0$.

Montrer que le réel c est unique.

Exercice 11

1) a- Montrons que : $(\forall x \geq 0) ; -\frac{x^3}{3} \leq \text{Arc tan}(x) - x \leq -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$

On considère la fonction φ définie sur $[0; +\infty[$

$$\text{par } \varphi(x) = x - \text{Arc tan}(x) - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

La fonction φ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on a :

$$(\forall x \in [0; +\infty[) ; \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} - x^2 + x^4 = \frac{x^6}{1+x^2}$$

Par suite : $(\forall x \geq 0) ; \varphi'(x) \geq 0$, il s'ensuit que la fonction φ est croissante sur $[0; +\infty[$. Donc : $(\forall x \geq 0) ; \varphi(x) \geq \varphi(0)$

C'est-à-dire : $\forall x \in [0; +\infty[; \varphi(x) \geq 0$ donc

$$(\forall x \in [0; +\infty[) ; x - \text{Arc tan } x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \geq 0$$

$$\text{Ainsi : } (\forall x \in [0; +\infty[) ; \text{Arc tan}(x) - x \leq -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

D'autre part, on considère la fonction ψ définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\psi(x) = \text{Arc tan}(x) - x + \frac{x^3}{3}$$

La fonction ψ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et de plus :

$$(\forall x \in [0; +\infty[) ; \psi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \frac{x^4}{1+x^2}$$

Par suite $\psi'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0; +\infty[$

Par conséquent la fonction ψ est croissante sur $[0; +\infty[$

Donc : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; \psi(x) \geq \psi(0)$

C'est-à-dire : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; \psi(x) \geq 0$

$$\text{Ainsi : } (\forall x \in [0; +\infty[) ; -\frac{x^3}{3} \leq \text{Arc tan}(x) - x$$

$$\text{Finalement : } (\forall x \in [0; +\infty[) ; -\frac{x^3}{3} \leq \text{Arc tan}(x) - x \leq -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

$$\text{b) Déduisons : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan}(x) - x}{x^2}$$

$$\text{Soit } x \text{ un élément de }]0; +\infty[, \text{ on a : } -\frac{x^3}{3} \leq \text{Arc tan}(x) - x \leq -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

$$\text{équivalent à : } -\frac{x}{3} \leq \frac{\text{Arc tan}(x) - x}{x^2} \leq -\frac{x}{3} + \frac{x^3}{5}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} (\forall x > 0); -\frac{x}{3} \leq \frac{\text{Arc tan}(x) - x}{x^2} \leq -\frac{x}{3} + \frac{x^3}{5} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x}{3}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x}{3} + \frac{x^3}{5}\right) = 0 \end{cases}$$

D'après le théorème de la limite par encadrement : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan}(x) - x}{x^2} = 0$

$$\text{Calculons } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{Arc tan}(x) - x}{x^2}$$

On pose : $X = -x$ on a : $x = -X$ et $X \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow x \rightarrow 0^-$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{Arc tan}(x) - x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan}(-X) - (-X)}{(-X)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\text{Arc tan} X - X}{X^2} \\ &= 0 \quad (\text{d'après le résultat précédent}) \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan}(x) - x}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{Arc tan}(x) - x}{x^2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Par suite : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan}(x) - x}{x^2} = 0$$

$$2) \text{ Montrons que : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - x}{x^2} = -1$$

Soit x un élément de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\text{Arc tan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - x}{x^2} &= \frac{1}{x^2} \cdot \left[\frac{\text{Arc tan}\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{x}{x+1} - x}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} \times \frac{x^2}{(x+1)^2} \right] \\ &= \frac{1}{(x+1)^2} \times \left[\frac{\text{Arc tan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{x}{x+1}}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} - (x+1) \right] \end{aligned}$$

On pose : $t = \frac{x}{x+1}$, on a : x tend vers 0 équivaut à t tend vers 0

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{x}{x+1}}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan}(t) - t}{t^2} = 0$$

et on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)^2} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -(x+1) = -1$

$$\text{Par conséquent : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - x}{x^2} = 1 \times (0 - 1) = -1$$

Exercice 12

Montrons que : $(\exists c \in]0; 1[) : 2cf'(c) = \sqrt{c}$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$g(x) = f(x) - \sqrt{x}$$

On a : La fonction f est continue sur $[0; 1]$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; 1]$, donc la fonction g est continue sur $[0; 1]$

• La fonction f est dérivable sur $]0; 1[$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; 1[$, donc la fonction g est dérivable sur $]0; 1[$.

• $g(0) = g(1) = 0$, car $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$

D'après le théorème de Rolle : $(\exists c \in]0; 1[) / g'(c) = 0$

$$\text{Puisque : } (\forall x \in]0; 1[) ; g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} = f'(x) - \frac{\sqrt{x}}{2x}$$

$$\begin{aligned} \text{alors : } g'(c) = 0 &\Leftrightarrow f'(c) - \frac{\sqrt{c}}{2c} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2cf'(c) = \sqrt{c} \end{aligned}$$

Ainsi : $(\exists c \in]0; 1[) / 2cf'(c) = \sqrt{c}$

Exercice 13

Montrons que : $(\exists! c \in]0; 1[) / f(0) - f(1) = 2f(c)$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$g(x) = 2f(x) - f(0) - f(1)$$

On a : la fonction f est continue sur $[0; 1]$, donc la fonction g est continue sur le segment $[0; 1]$.

$$\text{Et on a : } g(0) \times g(1) = (f(0) - f(1)) \times (f(1) - f(0)) = -(f(0) - f(1))^2$$

Puisque $f(0) \neq f(1)$ alors $-(f(0) - f(1))^2 < 0$, c'est-à-dire :

$$g(0) \times g(1) < 0$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0; 1[$, signifie que :

$$(\exists c \in]0; 1[) / 2f(c) = f(0) - f(1)$$

• Montrons que le réel c est unique :

En utilisant un raisonnement par l'absurde :

On suppose que : $(\exists c' \in]0; 1[) / g(c') = 0$

où $c < c'$ par exemple.

On a : La fonction g est continue sur le segment $[c; c']$, et dérivable sur l'intervalle $]c; c'[$ et $g(c) = g(c') = 0$

Donc, d'après le théorème de Rolle : $(\exists \alpha \in]c; c'[) / g'(\alpha) = 0$

Et puisque : $(\forall x \in]0; 1[) ; g'(x) = 2f'(x)$ et $\alpha \in]0; 1[$

alors : $(\exists \alpha \in]0; 1[) / f'(\alpha) = 0$

Ce qui est contradictoire avec : $(\forall x \in]0; 1[) ; f'(x) \neq 0$

Par conséquent le réel $c \in]0; 1[$ est unique.

Finalement : $(\exists ! c \in]0; 1[) / f(0) - f(1) = 2f(c)$

Exercice 14

Montrons que l'équation : $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a + b + c) = 0$ admet au moins une solution dans $]0; 1[$:

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a + b + c)x$$

• On a : la fonction f est continue sur $[0; 1]$, car f est la restriction de la fonction polynôme $x \mapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a + b + c)x$

• La fonction f est dérivable sur $]0; 1[$, car c'est la restriction d'une fonction polynômiale.

• $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$, c'est-à-dire : $f(1) = f(0) = 0$

Donc, d'après le théorème de Rolle : $(\exists x_0 \in]0; 1[) / f'(x_0) = 0$

Or : $(\forall x \in]0; 1[) ; f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a + b + c)$

Donc : $(\exists x_0 \in]0; 1[) / 4ax_0^3 + 3bx_0^2 + 2cx_0 - (a + b + c) = 0$

c'est-à-dire : l'équation $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a + b + c) = 0 ; x \in \mathbb{R}$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0; 1[$.

Exercice 15

1) a) Montrons que : $\frac{1}{1+b^2} < \frac{\text{Arc tan}(b) - \text{Arc tan}(a)}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$

a et b étant deux réels tels que : $0 \leq a < b$

La fonction Arc tan est continue $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$, donc d'après le théorème des accroissements finis :

$$(\exists c \in]a; b[) ; \text{Arc tan}(b) - \text{Arc tan}(a) = (b-a)(\text{Arc tan})'(c)$$

Comme: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; (\text{Arc tan})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$,

alors: $(\exists c \in]a; b[) ; \frac{\text{Arc tan}(b) - \text{Arc tan}(a)}{b-a} = \frac{1}{1+c^2}$

Et on a: $0 \leq a < c < b \Rightarrow 0 < 1+a^2 < 1+c^2 < 1+b^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2}$$

Ainsi: $\frac{1}{1+b^2} < \frac{\text{Arc tan}(b) - \text{Arc tan}(a)}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$

b) Dédution:

Soit x un réel de l'intervalle $]0; +\infty[$

On prend: $a = 0$ et $b = x$, en utilisant l'inégalité précédente

On a: $\frac{1}{1+x^2} < \frac{\text{Arc tan } x}{x} < 1$

Ainsi: $(\forall x \in]0; +\infty[) ; \frac{1}{1+x^2} < \frac{\text{Arc tan } x}{x} < 1$

2) Application:

a) * Etude de la continuité de f en 0:

On a:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan } x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan } x - \text{Arc tan } 0}{x - 0} = (\text{Arc tan})'(0) = 1$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ signifie que f est continue en 0.

* Etude de la dérivabilité de f en 0:

Soit x un élément de $]0; +\infty[$, on a:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} \left(\frac{\text{Arc tan } x}{x} - 1 \right) = \frac{\text{Arc tan}(x) - x}{x^2}$$

Puisque $\frac{1}{1+x^2} < \frac{\text{Arc tan } x}{x} < 1$ alors $\frac{x}{1+x^2} < \text{Arc tan } x < x$

Donc: $\frac{-x}{1+x^2} < \frac{\text{Arc tan}(x) - x}{x^2} < 0$

Par suite: $\left\{ \begin{array}{l} (\forall x \in]0; +\infty[) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-x}{1+x^2} \right) = 0 ; \frac{-x}{1+x^2} < \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} < 0 \end{array} \right.$

D'après les propriétés des limites et ordre, on déduit que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

• Calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

Soit $x \in]-\infty; 0[$, on a: $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\text{Arc tan}(x) - x}{x^2}$

On pose: $t = -x$, alors $x \rightarrow 0^- \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$

Comme la fonction Arc tan est impaire, alors:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{Arc tan } x - x}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan}(-t) + t}{(-t)^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{\text{Arc tan } t - t}{t^2} = 0$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

c'est-à-dire: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

Signifie que la fonction f est dérivable en 0 et que: $f'(0) = 0$

b) Déterminons les branches infinies de la courbe de la fonction g :

* Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a:

$$g(x) = (x-1)^2 \times \frac{\text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \times \frac{1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \times \frac{\text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

On pose: $t = \frac{1}{x}$, alors $|x| \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0$

Donc: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan}(t)}{t} = (\text{Arc tan})'(0) = 1$

Et on a: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

Ainsi: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

* Calcul de $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a: $\frac{g(x)}{x} = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \times \frac{\text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

Comme: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$ et $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 = 1$

Alors: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$

• Calcul de $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (g(x) - x)$

On pose: $t = \frac{1}{x}$, alors $|x| \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0$

Donc:

$$\begin{aligned} g(x) - x &= (x-1)^2 \cdot \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) - x \\ &= \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 \cdot \text{Arc tan}(t) - \frac{1}{t} = \frac{\text{Arc tan}(t) - t}{t^2} - 2 \times \frac{\text{Arc tan } t}{t} + \text{Arc tan}(t) \end{aligned}$$

Et puisque: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan } t - t}{t^2} = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan } t}{t} = 1$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \text{Arc tan}(t) = 0$

$$\text{alors } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} g(x) - x = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 \cdot \text{Arc tan}(t) - \frac{1}{t} = -2$$

Ainsi la droite d'équation $y = x - 2$ est une asymptote oblique à la courbe de la fonction de g au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 16

1) Montrons que: $(\forall x \in]-\infty; 0[) ; \text{Arc tan } x < \frac{x}{1+x^2}$

Soit x un élément de l'intervalle $]-\infty; 0[$

La fonction Arc tan est continue sur $[x; 0]$ et dérivable sur $]x; 0[$.

D'après le théorème des accroissements finis:

$$(\exists c \in]x; 0[) : \text{Arc tan}(x) - \text{Arc tan}(c) = (x - c) \times (\text{Arc tan})'(c)$$

$$\text{C'est-à-dire: } (\exists c \in]x; 0[) : \text{Arc tan } x = x(\text{Arc tan})'(c)$$

$$\text{Or: } (\forall x \in \mathbb{R}) ; (\text{Arc tan})'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \text{ soit } (\text{Arc tan})'(c) = \frac{1}{1+c^2}$$

$$\text{Donc: } (\exists c \in]x; 0[) : \text{Arc tan } x = \frac{x}{1+c^2}$$

$$\text{Puisque: } x < c < 0 \Leftrightarrow 0 < c^2 < x^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + c^2 < 1 + x^2$$

$$\text{alors } \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2}$$

$$\text{Par suite: } \frac{x}{1+c^2} < \frac{x}{1+x^2}, \text{ donc: } \text{Arc tan}(x) < \frac{x}{1+x^2}$$

$$\text{Ainsi: } (\forall x \in]-\infty; 0[) ; \text{Arc tan}(x) < \frac{x}{1+x^2}$$

2) Soit a et b des réels tels que $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

$$\text{Montrons que: } \frac{1}{\cos^2(a)} < \frac{\tan b - \tan a}{b - a} < \frac{1}{\cos^2(b)}$$

La fonction $\tan$ est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. D'après le théorème des accroissements finis.

$$(\exists c \in]a; b[) / \tan(b) - \tan(a) = (b - a) \times (\tan)'(c)$$

$$\text{Or: } \left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\} \right), (\tan)'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\text{Donc: } (\exists c \in]a; b[) / \tan(b) - \tan(a) = \frac{b - a}{\cos^2(c)}$$

$$\text{C'est-à-dire: } \frac{\tan b - \tan a}{b - a} = \frac{1}{\cos^2(c)}$$

Puisque la fonction $\cos$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$

$$\text{alors: } 0 < a < c < b < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos b < \cos c < \cos a$$

$$\Rightarrow 0 < \cos^2(b) < \cos^2(c) < \cos^2(a)$$

$$\text{Donc: } \frac{1}{\cos^2(a)} < \frac{1}{\cos^2(c)} < \frac{1}{\cos^2(b)}$$

$$\text{Ainsi } \frac{1}{\cos^2(a)} < \frac{\tan b - \tan a}{b - a} < \frac{1}{\cos^2(b)}$$

3) Montrons que:

$$(\forall x; y \in [0; 10]) ; |x \cos x - y \cos y| \leq 11 \times |x - y|$$

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par: $f(t) = t \cos t$

* La fonction f est continue sur $[0; 10]$ (produit de deux fonctions continues).

* La fonction f est dérivable sur $]0; 10[$

$$* (\forall t \in \mathbb{R}) ; f'(t) = \cos t - t \sin t$$

$$\text{et } |f'(t)| \leq |\cos t| + |t| |\sin t| \leq 1 + |t| \leq 1 + 10$$

$$\text{Donc: } (\forall t \in [0; 10]) , |f'(t)| \leq 11$$

D'après l'inégalité des accroissements finis (IAF):

$$\forall (x; y) \in [0; 10]^2 ; |f(x) - f(y)| \leq 11 \times |x - y|$$

$$\text{Ainsi: } (\forall (x; y) \in [0; 10]^2) ; |x \cos x - y \cos y| \leq 11 \times |x - y|.$$

$$4) \text{ Montrons que: } (\forall x; y \in [0; 1]) ; |f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{4 \cos^2(1)}$$

$$\text{où } f(t) = \frac{1}{4} \tan\left(\frac{1}{1+t}\right)$$

* Montrons que la fonction f est dérivable $[0; 1]$:

La fonction $u: t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est dérivable sur $[0; 1]$ et on a :

$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$ c'est-à-dire $u([0; 1]) \subset]0; \frac{\pi}{2}[$ et la fonction $\tan$ est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, donc la fonction $f = \tan \circ u$ est dérivable sur $[0; 1]$.

* Calcul de la dérivée de f :

$$\begin{aligned} (\forall t \in [0; 1]) ; f'(t) &= \frac{1}{4} \times \frac{u'(t)}{\cos^2(u(t))} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{-1}{\cos^2\left(\frac{1}{1+t}\right)} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{(1+t)^2} \times \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{1+t}\right)} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{(1+t)^2} \leq 1 \quad (2)$$

Et puisque la fonction $\cos$ est strictement décroissante sur $[0; \pi]$

$$\text{et } \left[\frac{1}{2}; 1\right] \subset [0; \pi] \text{ alors : } \cos(1) \leq \cos\left(\frac{1}{1+t}\right) \leq \cos\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Donc : } 0 < \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{1+t}\right)} \leq \frac{1}{\cos^2(1)} \quad (3)$$

$$\text{Et comme : } (\forall t \in [0; 1]) ; |f'(t)| = \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1+t)^2} \times \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{1+t}\right)} \quad (\text{d'après (1), (2) et (3)})$$

$$\text{Alors : } (\forall t \in [0; 1]) ; |f'(t)| \leq \frac{1}{4 \cos^2(1)}$$

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis (IAF)

$$(\forall x; y \in [0; 1]) ; |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4 \cos^2(1)} \times |x - y|$$

$$5) \text{ Montrons que : } (\forall x; y \in [0; 2]) ; |g(x) - g(y)| \leq \frac{\sqrt{2}}{12} |x - y|$$

$$\text{où } g(t) = \text{Arc tan}(\sqrt{t+2})$$

* Montrons que la fonction g est dérivable sur $[0; 2]$

On a la fonction $u: t \mapsto \sqrt{t+2}$ est dérivable sur $[0; 2]$, il s'ensuit que la fonction $g = \text{Arc tan} \circ u$ est dérivable sur $[0; 2]$

$$* \text{ On a : } (\forall t \in [0; 2]) ; g'(t) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t+2}}}{1 + (\sqrt{t+2})^2} = \frac{1}{2(t+3)\sqrt{t+2}}$$

$$\text{Ainsi : } |g'(t)| = \frac{1}{2(t+3)\sqrt{t+2}} \text{ pour } t \in [0; 2]$$

$$\text{Puisque } 0 \leq t \leq 2 \Rightarrow 3 \leq t+3 \leq 5 \text{ et } \sqrt{2} \leq \sqrt{t+2} \leq 2$$

Alors : $2(t+3)\sqrt{t+2} \geq 6\sqrt{2}$ c'est-à-dire : $\frac{1}{2(t+3)\sqrt{t+2}} \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}$

Ainsi : $(\forall t \in [0; 2]) ; |g'(t)| \leq \frac{\sqrt{2}}{12}$

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis (IAF) :

$$(\forall x, y \in [0; 2]) ; |g(x) - g(y)| \leq \frac{\sqrt{2}}{12} |x - y|$$

Exercice 17

1) Théorème des accroissements finis :

a et b étant deux réels avec $a < b$

Si f est une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$,

alors : $(\exists c \in]a; b[) : f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

2) Montrons que : $(\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[) ; 1 < \frac{\tan x}{x} < 1 + \tan^2(x)$

Soit x un réel de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$

La fonction $t \mapsto \tan t$ est continue sur $[0; x]$ et dérivable sur $]0; x[$ (car $]0; x[\subset]0; \frac{\pi}{2}[$ et $\tan$ est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$)

Donc, d'après TAF : $\exists c \in]0; x[: \tan(x) - \tan(0) = (x - 0)(\tan)'(c)$

Puisque : $(\forall t \in]0; x[) ; (\tan)'(t) = 1 + \tan^2(t)$

alors : $(\exists c \in]0; x[) : \frac{\tan(x)}{x} = 1 + \tan^2(c)$

$$\begin{aligned} \text{or : } 0 < c < x < \frac{\pi}{2} &\Rightarrow 0 < \tan(c) < \tan(x) \\ &\Rightarrow 1 < 1 + \tan^2(c) < 1 + \tan^2(x) \end{aligned}$$

Donc : $1 < \frac{\tan x}{x} < 1 + \tan^2(x)$

Ainsi : $(\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[) ; 1 < \frac{\tan x}{x} < 1 + \tan^2(x)$

Exercice 18

1) Montrons que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f(x) \geq xf'(x)$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : la fonction f est continue sur $[0; x]$

et dérivable sur $]0; x[$ donc, d'après TAF : $(\exists c \in]0; x[) : f(x) - f(0) = (x - 0)f'(c)$

c'est-à-dire : $(\exists c \in]0; x[) : f(x) = xf'(c)$ (car $f(0) = 0$)

Puisque f' est décroissante sur $]0; x[$ alors : $0 < c < x \Rightarrow f'(c) \geq f'(x)$

Par suite $xf'(c) \geq xf'(x)$, d'où : $f(x) \geq xf'(x)$

Ainsi : $(\forall x \in]0; +\infty[); f(x) \geq xf'(x)$

2) Montrons que la fonction g est décroissante sur $]0; +\infty[$

Les fonctions f et $u: x \mapsto \frac{1}{x}$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$,
donc la fonction $g = \frac{f}{u}$ est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Et on a : $(\forall x \in]0; +\infty[); g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

or : $xf'(x) - f(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$

Donc : $(\forall x \in]0; +\infty[); g'(x) \leq 0$

On conclut que la fonction g est décroissante sur $]0; +\infty[$

Exercice 19

1) Montrons que : $\exists! \alpha \in]0; \frac{\pi}{4}[/ f(\alpha) = \alpha$

On considère la fonction g définie sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ par :

$$g(x) = f(x) - x = x + \sin x - \cos x$$

• La fonction g est continue sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ en tant que somme des fonctions continues.

• $f(0) = -1$ et $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$, alors $f(0) \times f(\frac{\pi}{4}) < 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$(\exists \alpha \in]0; \frac{\pi}{4}[) / g(\alpha) = 0$$

c'est-à-dire : $(\exists \alpha \in]0; \frac{\pi}{4}[) / f(\alpha) = \alpha$

• Montrons que le réel α est unique :

La fonction g est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ et on a :

$$(\forall x \in [0; \frac{\pi}{4}]); g'(x) = 1 + \cos x + \sin x$$

$$\text{or } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin x \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 + \sin x + \cos x > 0$$

c'est-à-dire : $(\forall x \in [0; \frac{\pi}{4}]); g'(x) > 0$

Donc la fonction g est strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{4}]$, d'où l'unicité du réel α .

Finalement : $(\exists! \alpha \in]0; \frac{\pi}{4}[) / f(\alpha) = \alpha$.

2) Montrons que : $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] / f'(x) \leq 4$

La fonction f est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et on a :

$$\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]\right); f'(x) = 2 + \cos x + \sin x$$

Puisque : $|f'(x)| \leq 2 + |\cos x| + |\sin x|$, $|\cos x| \leq 1$ et $|\sin x| \leq 1$ alors

$$|f'(x)| \leq 4$$

Ainsi : $|f'(x)| \leq 4$ pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

3) Montrons que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]\right); |f(x) - \alpha| \leq \pi$

La fonction f est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et $|f'(x)| \leq 4$ pour tout réel x de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, donc, d'après TAF :

$$\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]\right); |f(x) - f(\alpha)| \leq 4|x - \alpha|$$

$$\text{C'est-à-dire : } \left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]\right); |f(x) - \alpha| \leq 4|x - \alpha|$$

$$\text{Or } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ et } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} \text{ donc : } -\frac{\pi}{4} \leq x - \alpha \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\text{C'est-à-dire : } |x - \alpha| \leq \frac{\pi}{4} \text{ par suite : } 4|x - \alpha| \leq \pi$$

$$\text{Par conséquent : } |f(x) - \alpha| \leq \pi$$

$$\text{Finalement : } \left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]\right); |f(x) - \alpha| \leq \pi$$

Exercice 20

Montrons que : $(\exists c \in]0; 1[); \sqrt[4]{c^3} \times f'(c) = 1$

On considère la fonction g définie sur $[0; 1]$ par : $g(x) = f(x) - 4\sqrt[4]{x}$

La fonction g est continue sur $[0; 1]$, en tant que somme de deux fonctions continues sur $[0; 1]$, à savoir : f et $x \mapsto -4\sqrt[4]{x}$.

De même la fonction g est dérivable sur $]0; 1[$ telles que :

$$g(1) = g(0) = 0 \text{ (car } f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 4)$$

Donc, d'après le théorème de Rolle : $(\exists c \in]0; 1[); g'(c) = 0$

$$\text{Or } g'(x) = f'(x) - 4 \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} = f'(x) - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$$

$$\text{Donc : } g'(c) = 0 \iff \sqrt[4]{c^3} \times f'(c) = 1$$

$$\text{Finalement : } (\exists c \in]0; 1[); \sqrt[4]{c^3} \times f'(c) = 1$$

Exercice 21

1) a) Montrons que le point $I(0; 1)$ est un centre de symétrie de (C) :

L'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R}$, donc pour tout $x \in D_f$, on a : $-x \in D_f$

D'autre part, pour tout $x \in D_f$, on a :

$$\begin{aligned} f(-x) + f(x) &= 1 - x + \text{Arc tan}(-x) + 1 - x + \text{Arc tan}(x) \\ &= 1 - x - \text{Arc tan}(x) + 1 - x + \text{Arc tan}(x) = 2 \end{aligned}$$

Ainsi : $(\forall x \in D_f); 2 \times 0 - x \in D_f$ et $f(2 \times 0 - x) + f(x) = 2 \times 1$

C'est-à-dire le point $I(0; 1)$ est un centre de symétrie de la courbe (C) .

b) Dressons le tableau de variations de f :

On a pour tout réel x : $f(x) = 1 - x + \text{Arc tan}(x)$

• La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, à savoir : $x \mapsto 1 - x$ et $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$

$$\begin{aligned} \text{Et on a : } (\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) &= (1 - x)' + (\text{Arc tan})'(x) \\ &= -1 + \frac{1}{1 + x^2} = \frac{-x^2}{1 + x^2} \end{aligned}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) \leq 0$ et $f'(x) = 0 \iff x = 0$

Ainsi la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$$\bullet \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arc tan } x = \frac{\pi}{2}$$

Alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x + \text{Arc tan}(x) = -\infty$, c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arc tan } x = -\frac{\pi}{2}$$

Alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - x + \text{Arc tan}(x) = +\infty$, c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

D'où le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
f	$+\infty \xrightarrow{\quad} 1 \xrightarrow{\quad} -\infty$		

2) a) Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} :

D'après la question précédente, la fonction f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de la bijection réciproque, la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$,

$$\text{où } f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$$

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrons que : $(\exists! \alpha \in \mathbb{R}) ; f(\alpha) = 0$

Puisque la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$,

et $0 \in \mathbb{R}$, donc il existe un unique réel α tel que : $f(\alpha) = 0$

Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

• Montrons que : $2 < \alpha < \frac{5}{2}$

$$\text{On a : } f(2) = 1 - 2 + \text{Arc tan}(2) = -1 + \text{Arc tan}(2)$$

$$\text{Comme } \frac{\pi}{4} < 2 \Rightarrow \text{Arc tan}\left(\frac{\pi}{4}\right) < \text{Arc tan}(2)$$

$$\Rightarrow 1 < \text{Arc tan}(2)$$

$$\Rightarrow \text{Arc tan}(2) - 1 > 0$$

$$\text{Alors : } f(2) > 0$$

$$\text{Et on a : } f\left(\frac{5}{2}\right) = 1 - \frac{5}{2} + \text{Arc tan}\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \text{Arc tan}\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\text{et } \text{Arc tan}\left(\frac{5}{2}\right) \simeq 1,19. \text{ Alors : } f\left(\frac{5}{2}\right) < 0$$

Par suite : $f\left(\frac{5}{2}\right) < f(\alpha) < f(2)$ et la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\text{donc : } 2 < \alpha < \frac{5}{2}$$

3) a) Etudions les branches infinies de la courbe (C) :

• Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}^*, \text{ on a : } \frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{\text{Arc tan } x}{x}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{1}{x}\right) = -1. \text{ Alors : } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

• Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) + x = 1 + \text{Arc tan } x$, et comme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arc tan } x = \frac{\pi}{2}$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arc tan } x = -\frac{\pi}{2}$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = 1 + \frac{\pi}{2}$

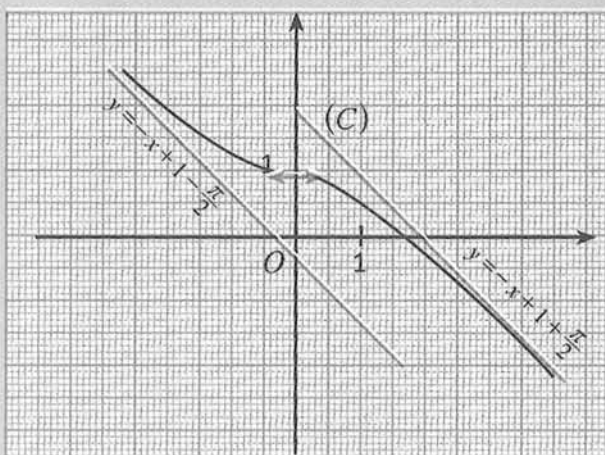
et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = 1 - \frac{\pi}{2}$

Conclusion :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(-x + 1 - \frac{\pi}{2}\right) = 0$, donc la droite d'équation $y = -x + 1 - \frac{\pi}{2}$ est une asymptote oblique de la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(-x + 1 + \frac{\pi}{2}\right) = 0$, donc la droite d'équation $y = -x + 1 + \frac{\pi}{2}$ est une asymptote oblique de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

b) La courbe (C) de la fonction f :



4) a) • Montrons que la fonction f^{-1} est dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \{1\}$.

La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \{0\}$

et $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f(x) \neq 0$, donc la fonction f^{-1} est dérivable sur

$f(\mathbb{R}) - \{f(0)\} = \mathbb{R} - \{1\}$ car $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $f(0) = 1$

Ainsi la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \{1\}$.

• Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}) ; 1 + (f^{-1})'(x) + \frac{1}{(f^{-1}(x))^2} = 0$

Soit x un élément de $\mathbb{R} - \{1\}$, on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Or $(\forall y \in \mathbb{R}^+); f'(y) = \frac{-y^2}{1+y^2}$. Puisque : $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ alors : $f^{-1}(x) \in \mathbb{R}^+$

$$\text{donc : } f'(f^{-1}(x)) = \frac{-(f^{-1}(x))^2}{1+(f^{-1}(x))^2}$$

$$\text{Par suite : } \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{1+(f^{-1}(x))^2}{(f^{-1}(x))^2} = -1 - \frac{1}{(f^{-1}(x))^2}$$

$$\text{D'où : } (f^{-1})'(x) = -1 - \frac{1}{(f^{-1}(x))^2}$$

$$\text{Ainsi : } (\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}); 1 + (f^{-1})'(x) + \frac{1}{(f^{-1}(x))^2} = 0$$

$$\text{b) Montrons que : } (\exists c \in]\frac{\pi}{4}; 1[); (\frac{\pi}{4} - 1) \left(1 + \frac{1}{(f^{-1}(c))^2} \right) = -1$$

La fonction f^{-1} est continue sur $[\frac{\pi}{4}; 1]$ et dérivable sur $]\frac{\pi}{4}; 1[$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe au moins $c \in]\frac{\pi}{4}; 1[$ tel que : $f^{-1}(\frac{\pi}{4}) - f^{-1}(1) = (\frac{\pi}{4} - 1)(f^{-1})'(c)$.

Puisque : $f(0) = 1$ et $f(1) = \frac{\pi}{4}$ alors : $f^{-1}(1) = 0$ et $f^{-1}(\frac{\pi}{4}) = 1$

$$\text{donc : } f^{-1}(\frac{\pi}{4}) - f^{-1}(1) = 1$$

$$\text{Et on a : } (f^{-1})'(c) = -\left(1 + \frac{1}{(f^{-1}(c))^2}\right)$$

$$\text{Donc : } (\exists c \in]\frac{\pi}{4}; 1[); (\frac{\pi}{4} - 1) \left(1 + \frac{1}{(f^{-1}(c))^2} \right) = -1$$

Exercice 22

1) Montrons que la fonction f est dérivable sur $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$

La fonction $\tan$ est dérivable en tout point de $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

et $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}] \subset D_{\tan}$ donc la fonction $\tan$ est dérivable et ne s'annule pas sur l'intervalle $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$.

Par conséquent : $f = \frac{1}{\tan}$ est dérivable sur $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$

* Montrons que f est dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$:

Soit $x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$, on a : $f(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ et $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ donc :

$$\frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{1}{\tan x}}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x}$$

On pose: $t = x - \frac{\pi}{2}$, on a: $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \Leftrightarrow t \rightarrow 0^-$

$$\text{et } \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan(x) = tx \tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{t}{\tan(t)}$$

$$\text{Donc: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(-\frac{\tan(t)}{t}\right) = -1$$

Ainsi: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$, c'est-à-dire la fonction f est dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$ et on a: $f'_g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

Finalement la fonction f est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Montrons que: $\left(\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]\right); -2 \leq f'(x) \leq -1$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \left(\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]\right), f'(x) &= \left(\frac{1}{\tan(x)}\right)' = \frac{-(1 + \tan^2(x))}{\tan^2(x)} \\ &= -1 - \frac{1}{\tan^2(x)} \end{aligned}$$

Soit $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, on a: $-1 - \frac{1}{\tan^2(x)} < -1$ (car $\frac{-1}{\tan^2(x)} < 0$)

C'est-à-dire: $f'(x) < -1$ et on a: $f'_g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

Donc: $\left(\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]\right); f'(x) \leq -1$

D'autre part : on a: $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq \tan x$
 $\Rightarrow 1 \leq \tan(x)$

Car la fonction $\tan$ est croissante sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$

Par suite $1 \leq \tan x \Rightarrow 1 \leq \tan^2(x)$

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{1}{\tan^2(x)}$$

$$\Rightarrow -1 \leq -\frac{1}{\tan^2(x)}$$

$$\Rightarrow -2 \leq -1 - \frac{1}{\tan^2(x)}$$

Donc: $\left(\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]\right); -2 \leq f'(x)$ (2)

Finalement, de (1) et (2) s'ensuit que: $(\forall x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]) ; -2 \leq f'(x) \leq -1$

3) Dédudons que: $(\forall x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]) , \frac{\pi}{2} - 2x \leq \frac{1 - \tan x}{\tan x} \leq \frac{\pi}{4} - x$

Soit $x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$, on a la fonction f

est continue sur $[\frac{\pi}{4}; x]$ et dérivable sur $] \frac{\pi}{4}; x[$ donc, d'après le théorème

des accroissements finis, on a: $(\exists c \in] \frac{\pi}{4}; x[) 1 \frac{1}{\tan x} - 1 = (x - \frac{\pi}{4}) f'(c)$

Puisque: $-2 \leq f'(c) \leq -1$ alors $-2(x - \frac{\pi}{4}) \leq (x - \frac{\pi}{4}) f'(c) \leq -x + \frac{\pi}{4}$

Donc: $-2x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{1 - \tan x}{\tan x} \leq \frac{\pi}{4} - x$

Ainsi: $(\forall x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]) ; \frac{\pi}{2} - 2x \leq \frac{1 - \tan x}{\tan x} \leq \frac{\pi}{4} - x$

4) a) Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} :

Puisque f est dérivable sur $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$ alors elle est continue sur $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$.

Et on a $f'(x) \leq -1 < 0$ pour tout $x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$ donc la fonction f est strictement décroissante $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$,

s'ensuit que f réalise une bijection de $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$ sur l'intervalle

$$f([\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]) = [f(\frac{\pi}{2}); f(\frac{\pi}{4})] = [0; 1]$$

Par conséquent f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0; 1]$

b) l'expression de $f^{-1}(x)$ où $x \in [0; 1]$

Soit $x \in [0; 1]$ et $y \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$ tels que : $f^{-1}(x) = y$.

On a: $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\tan y}$$

$$\Leftrightarrow \tan y = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow y = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Et on a: $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ donc $f^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$

Ainsi: $f^{-1}(x) = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \in]0; 1]$

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

Exercice 23

1) a) Montrons que: $g(a) \neq g(b)$

En utilisant un raisonnement par l'absurde, supposons que: $g(a) = g(b)$

On a la fonction g est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ et telle que $g(a) = g(b)$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe au moins un réel $c \in]a; b[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui est absurde, car $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a; b[$.

Donc: $g(a) \neq g(b)$.

b) Montrons que: $(\exists c \in]a; b[) \setminus \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

On considère la fonction φ définie sur l'intervalle $[a; b]$ par:

$$\varphi(x) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \times (g(x) - g(a)) - (f(x) - f(a))$$

La fonction φ est continue sur $[a; b]$ (car f et g sont des fonctions continues sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ (car f et g sont des fonctions dérivables sur $]a; b[$) et telles que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

Donc, d'après le théorème de Rolle: $(\exists c \in]a; b[) / \varphi'(c) = 0$

$$\text{Comme: } (\forall x \in]a; b[) ; \varphi'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x) - f'(x)$$

$$\begin{aligned} \text{alors } \varphi'(c) = 0 &\Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) - f'(c) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \end{aligned}$$

$$\text{Finalement: } (\exists c \in]a; b[) / \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

2) Application:

Calculons les limites suivantes:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{x^3} \right)$$

Soit x un réel de $]0; +\infty[$

On considère les fonctions f et g définies sur $[0; x]$ par:

$$f(t) = t - \sin t \text{ et } g(t) = t^3$$

Les fonctions f et g sont continues sur $[0; x]$ et dérivables sur $]0; x[$ et que:

$(\forall t \in]0; x[) ; g'(t) = 3t^2$, c'est-à-dire $(\forall t \in]0; x[) ; g'(t) \neq 0$

Donc, d'après la question précédente: $(\exists c \in]0; x[) / \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Comme: $(\forall t \in]0; x[) ; f'(t) = 1 - \cos t$ et $f(0) = g(0) = 0$, alors:

$$(\exists c \in]0; x[) / \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1 - \cos c}{3c^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - \cos c}{c^2} \right).$$

Et on a: $0 < c < x$ alors: $x \rightarrow 0^+$ équivaut $c \rightarrow 0^+$

$$\text{Donc: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - \sin x}{x^3} \right) = \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{3} \left(\frac{1 - \cos c}{c^2} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\bullet \text{ Calculons: } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x - \sin x}{x^3} \right)$$

On pose: $t = -x$ on aura $x \rightarrow 0^- \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x - \sin x}{x^3} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{-t - \sin(-t)}{-t^3} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{t - \sin t}{t^3} \right) = \frac{1}{6}$$

$$\text{Ainsi: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{x^3} \right) = \frac{1}{6}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \text{Arc tan } x}{x^3} \right):$$

Soit $x \in]0; +\infty[$. On considère les fonctions u et v définies sur $[0; x]$ définies par: $u(t) = t - \text{Arc tan } t$ et $v(t) = t^3$

Les fonctions u et v sont continues sur $[0; x]$ et dérivable sur $]0; x[$

Et on a: $(\forall t \in]0; x[) ; v'(t) = 3t^2$ c'est-à-dire: $(\forall t \in]0; x[) ; v'(t) \neq 0$

Donc, d'après la questions précédente: $(\exists c \in]0; x[) : \frac{u(x) - u(0)}{v(x) - v(0)} = \frac{u'(c)}{v'(c)}$

Puisque $(\forall t \in]0; x[) ; u'(t) = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$ et $u(0) = v(0)$ alors

$$(\exists c \in]0; x[) ; \frac{x - \text{Arc tan } x}{x^3} = \frac{c^2}{3c^2(1+c^2)} = \frac{1}{3(1+c^2)}$$

Et on a: $0 < c < x$ alors $x \rightarrow 0^+$ équivaut à $c \rightarrow 0^+$

$$\text{Donc: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \text{Arc tan } x}{x^3} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{3(1+c^2)} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Calculons } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x - \text{Arc tan } x}{x^3} \right)$$

On pose: $t = -x$, on aura $x \rightarrow 0^- \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x - \text{Arc tan } x}{x^3} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{-t - \text{Arc tan } (-t)}{-t^3} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{t - \text{Arc tan } t}{t^3} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Ainsi: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \text{Arc tan } x}{x^3} \right) = \frac{1}{3}$$

Exercice 24

Montrons que : $(\exists c \in]a; b[) / f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[a; b]$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } a < x \leq b \\ g(a) = 0 \end{cases}$$

On a : La fonction f est continue sur $[a; b]$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x - a}$ est continue sur $]a; b]$ donc la fonction g est continue sur l'intervalle $]a; b]$.

Puisque la fonction f est dérivable à droite en a et $f(a) = 0$ et $f'_d(a) = 0$, alors : $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 = g(a)$

signifie que la fonction g est continue à droite en a .

Par conséquent la fonction g est continue sur le segment $[a; b]$.

Et on a la fonction g est dérivable sur $]a; b[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $]a; b[$.

Et comme $g(a) = g(b) = 0$ alors : d'après le théorème de Rolle :

$$(\exists c \in]a; b[) / g'(c) = 0$$

$$\text{or : } (\forall x \in]a; b[) ; g'(x) = \frac{(x - a) \times f'(x) - f(x)}{(x - a)^2}$$

$$\text{Donc : } g'(c) = 0 \Leftrightarrow (c - a)f'(c) - f(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(c)}{c - a}$$

$$\text{Ainsi : } (\exists c \in]a; b[) / f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Exercice 25

Montrons que : $(\exists (a; b; c) \in (]0; 1[)^3) / f'(a) \times f'(b) = \frac{1 - c^n}{1 - c} \cdot c^{n-1}$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$g(x) = f(x) + x^n - 1 \text{ ou } n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq 2$$

La fonction g est continue sur $[0; 1]$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $[0; 1]$ qui sont $x \mapsto x^n$ et f .

Et puisque $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ alors $g(0) = -1$ et $f(1) = 1$

C'est-à-dire : $g(0) \times g(1) < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$(\exists c \in]0; 1[) / g(c) = 0$ c'est-à-dire : $\exists c \in]0; 1[/ f(x) = 1 - c^n$

Par suite la fonction f est continue sur $[0; c]$ et dérivable sur $]0; c[$, donc d'après le théorème des accroissements finis :

$(\exists a \in]0; c[) / f(c) - f(0) = (c - 0) \cdot f'(a)$

Comme $f(0) = 0$ et $f(c) = 1 - c^n$ on aura donc :

$$(\exists a \in]0; c[) / f'(a) = \frac{1 - c^n}{c}$$

Et on a la fonction f est continue sur $[c; 1]$ et dérivable sur $]c; 1[$.

Donc, d'après le théorème des accroissements finis, on a :

$$(\exists b \in]c; 1[) / f(1) - f(c) = (1 - c) \cdot f'(b)$$

comme $f(1) = 1$ et $f(c) = 1 - c^n$ on aura donc :

$$f'(b) = \frac{1 - 1 + c^n}{1 - c} = \frac{c^n}{1 - c}$$

Par conséquent : $f'(a) \times f'(b) = \frac{1 - c^n}{c} \times \frac{c^n}{1 - c} = \frac{1 - c^n}{1 - c} \times c^{n-1}$

Finalement : $(\exists (a; b; c)) \in (]0; 1[)^3 / f'(a) \times f'(b) = \frac{1 - c^n}{1 - c} \times c^{n-1}$

Exercice 26

1) a- Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$

Soit x un réel de $]0; +\infty[$, on a :

la fonction f' est continue sur $[0; x]$ et dérivable sur $]0; x[$

donc, d'après T A F : $(\exists c \in]0; x[) / f'(x) - f'(0) = (x - 0)f''(c)$

Comme $f''(t) \geq \alpha$ pour tout réel t , alors $f''(c) \geq \alpha$

Par suite $xf''(c) \geq \alpha x$, car $x > 0$

Par conséquent :
$$\begin{cases} (\forall x \in]0; +\infty[), f'(x) \geq f'(0) + \alpha x \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(0) + \alpha x = +\infty \end{cases}$$

On conclut, d'après les propriétés de limites et ordre : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$

• Montrons que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$:

Soit $x \in]-\infty; 0[$, on a :

La fonction f' est continue sur $[x; 0]$ et dérivable sur $]x; 0[$

Donc, d'après T A F : $\exists c' \in]x; 0[/ f'(x) - f'(0) = (x - 0)f''(c')$

comme $f''(t) \geq \alpha$ pour tout réel t , alors $f''(c') \geq \alpha$

Par suite $xf''(c') \leq \alpha x$, car $x < 0$

Par suite :
$$\begin{cases} (\forall x \in]-\infty; 0[) : f'(x) \leq f'(0) + \alpha x \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(0) + \alpha x = -\infty \end{cases}$$

On conclut, d'après les propriétés de limites et ordre : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$

2) Montrons que f' est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$:

On a : $f''(x) \geq \alpha$ pour tout réel x et $\alpha > 0$

donc $(\forall x \in \mathbb{R}) : f''(x) > 0$

signifie que la fonction f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Comme f' est continue sur $\mathbb{R}$ alors f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f'(\mathbb{R}) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)[=]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$

3) • Montrons que la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$:

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) \neq 0$ pour tout réel x ; donc la fonction $g = (f')^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Et on a la fonction $f''og$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent la fonction $h: x \mapsto xg(x) - fog(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Calcul de $h'(x)$ où $x \in \mathbb{R}$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : (fog)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = xg'(x)$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}), h'(x) = g(x) + xg'(x) - xg'(x) = g(x)$

Exercice 27

Montrons que $(\forall x \in]a; b[); f'(x) \neq 0$

En utilisant un raisonnement par l'absurde :

Supposons que : $(\exists x_0 \in]a; b[) / f(x_0) = 0$

On a : La fonction f est continue sur $[a; x_0]$, dérivable sur $]a; x_0[$
et $f(x_0) = f(a) = 0$

Donc, d'après le théorème de Rolle :

$$(\exists c_1 \in]a; x_0[) / f'(c_1) = 0$$

• La fonction f est continue sur $[x_0; b]$; dérivable sur $]x_0; b[$
et $f(x_0) = f(b) = 0$

Donc, d'après le théorème de Rolle : $(\exists c_2 \in]x_0; b[) / f'(c_2) = 0$

D'autre part la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]a; b[$
et $a < c_1 < c_2 < b$.

Donc : la fonction f' est continue sur $[c_1; c_2]$, dérivable sur $]c_1; c_2[$
et $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$.

Il s'ensuit que : $\exists c \in]c_1; c_2[/ f''(c) = 0$, d'après le théorème de Rolle :

Ce qui est contradictoire avec $f''(x) \neq 0$ pour tout réel x de $]a; b[$

On conclut que : $(\forall x \in]a; b[); f'(x) \neq 0$

Exercice 28

1) Montrons que φ est une bijection de $]0; 1]$ sur $[0; +\infty[$:

La fonction $\varphi: x \mapsto \frac{1}{x} - 1$ étant continue et dérivable sur l'intervalle $]0; 1]$
et on a :

$$(\forall x \in]0; 1[); \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Il s'ensuit que : $(\forall x \in]0; 1[); \varphi'(x) < 0$, c'est-à-dire la fonction φ est strictement décroissante sur $]0; 1]$.

Puisque la fonction φ est continue et strictement décroissante sur $]0; 1]$
alors elle réalise une bijection de $]0; 1]$ sur l'intervalle $J = \varphi(]0; 1])$

$$\text{où } J = [\varphi(1); \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)[= [0; +\infty[$$

2) a) Montrons que la fonction F est continue sur $[0; 1]$:

$$\text{On a : } (\forall x \in]0; 1[); F(x) = f\left(\frac{1}{x} - 1\right) = (f \circ \varphi)(x)$$

Puisque la fonction φ est continue sur $]0; 1]$, la fonction f est continue sur $[0; +\infty[$ et $\varphi(]0; 1]) = [0; +\infty[$, alors la fonction $F = f \circ \varphi$ est continue sur l'intervalle $]0; 1]$.

D'autre part : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = f(0)$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(\varphi(x)) = f(0)$ c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0)$

signifie que la fonction F est continue à droite en 0.

Finalement la fonction F est continue sur le segment $[0; 1]$.

b) Montrons que la fonction F est dérivable sur $]0; 1]$:

On a : $F = f \circ \varphi$. Puisque la fonction φ est dérivable sur $]0; 1[$ et la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $\varphi(]0; 1[) =]0; +\infty[$ alors la fonction $F = f \circ \varphi$ est dérivable sur l'intervalle $]0; 1[$.

3) Montrons que : $(\exists c \in]0; +\infty[); f'(c) = 0$

En appliquant le théorème de Rolle à la fonction F sur l'intervalle $[0; 1]$.

On a : la fonction F est continue sur $[0; 1]$, dérivable sur $]0; 1[$ et telle que : $F(0) = F(1) = 0$

D'après le théorème de Rolle : $(\exists k \in]0; 1[); F'(k) = 0$

Or $(\forall x \in]0; 1[); F'(x) = (f \circ \varphi)'(x) = f'(\varphi(x)) \times \varphi'(x)$

C'est-à-dire : $(\forall x \in]0; 1[); F'(x) = -\frac{1}{x^2} \times f'\left(\frac{1}{x} - 1\right)$

Par suite : $F'(k) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{k^2} \times f'\left(\frac{1}{k} - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{k} - 1\right) = 0$$

On prend : $c = \frac{1}{k} - 1 = \varphi(k)$

Et comme $\varphi(]0; 1[) =]0; +\infty[$ alors : $c = \varphi(k) \in]0; +\infty[$

Ainsi : $(\exists c \in]0; +\infty[); f'(c) = 0$

4) Montrons que le réel c est unique :

En utilisant un raisonnement par l'absurde

On suppose que : $(\exists c' \in]0; +\infty[); f'(c') = 0$ où $c < c'$ par exemple

On a la fonction f' est continue sur $[c; c']$, et dérivable sur $]c; c'[$

telle que : $f'(c) = f'(c') = 0$

Donc, d'après le théorème de Rolle : $(\exists \alpha \in]c; c'[); f''(\alpha) = 0$

Ce qui est contradictoire avec : $(\forall x \in]0; +\infty[); f''(x) \neq 0$

Finalement : $(\exists ! c \in]0; +\infty[) / f'(c) = 0$

Exercices de synthèse

Exercice 29

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x(\sqrt[3]{x} - 2)^2$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- b) Etudier la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.
- 2) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0, puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.
- 3) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de f .
- 4) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 30

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = 1 + \cos(\pi x)$$

- 1) a) Donner le tableau de variations de la fonction f .
- b) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $[0; 2]$.
- 2) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]0; 2[$ et que :
$$(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\pi \sqrt{2x - x^2}} \text{ pour tout réel } x \text{ de }]0; 2[.$$
- 3) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f^{-1}(x)}{x - 2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(x) - 1}{x}$.
- 4) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par :

$$h(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}(2 - x)$$

- a) Montrer que la fonction h est dérivable sur l'intervalle $]0; 2[$, puis calculer $h'(x)$ pour tout réel x de $]0; 2[$.
- b) Calculer, $h(1)$, puis montrer que : $h(x) = 1$ pour tout réel x de l'intervalle $[0; 2]$.
- c) Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

Exercice 31

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \text{Arc tan}(2x\sqrt{1-x}) + \frac{\pi}{2}$$

et soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de f .
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, donner une interprétation graphique du résultat obtenu.
- 2) Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en 1, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- 3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $] -\infty; 1[$,
- b) Dresser le tableau de variations de f .
- c) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 32

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$

- 1) a) Dresser le tableau de variations de la fonction f ;
- b) Vérifier que : $f([1; 2]) \subset [1; 2]$, et montrer que :

$$(\forall x \in [1; +\infty[); |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$$

- c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1; 2[$.

- 2) On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On pose pour tout entier naturel n : $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$

- a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq 2$
- b) i) Montrer que la suite (x_n) est décroissante et que la suite (y_n) est croissante.
- ii) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); y_n < \alpha < x_n$
- c) i) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 |x_n - y_n|$
- ii) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.
- iii) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \alpha$

Exercice 33

I/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \text{Arc tan}(x) + 2x - 1$

- 1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) > 2$
- 2) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
- 3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que : $0 < \alpha < 1$
- 4) Montrer que : $(\forall x \in]\alpha; +\infty[) ; f(x) > x$

II/ On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \text{ ou } a \in \mathbb{R} \text{ et } a > \alpha \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$$

- 1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > \alpha$
- 2) Montrer que la suite (u_n) est monotone, puis en déduire qu'elle est convergente.
- 3) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - \alpha < \frac{1}{2}(u_n - \alpha)$$

- 4) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 34

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x - \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}$$

et soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) a) Déterminer D le domaine de définition de f ;
- b) Calculer les limites de la fonction f aux bornes des intervalles de D ;
- c) Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.
- 2) Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en -1 , puis donner une interprétation graphique du résultat obtenu.
- 3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $D - \{-1\}$;
- b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- c) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.
- 4) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

a) Montrer que la fonction g réalise une bijection dans un intervalle J à préciser.

b) Montrer que : $(\exists! \alpha \in]0; +\infty[); g(\alpha) = 0$ et que : $1 < \alpha < 2$

c) Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable sur J , et montrer que :

$$(g^{-1})'(0) = \frac{3\alpha^4}{1+3\alpha^4}$$

d) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 35

I/ Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{\tan x}{x}; 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction g est continue sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x)$.

2) a) Soit x un élément de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $\varphi: t \mapsto \tan(t) - t$ sur l'intervalle $[0; x]$, montrer que : $0 < \tan(x) - x < x \times \tan^2(x)$

b) Montrer que la fonction g est dérivable à droite en $x_0 = 0$

3) a) Dresser le tableau de variations de la fonction g .

b) Montrer que la fonction g réalise une bijection de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J à préciser.

II/ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \text{Arc tan}(g(x)); 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ f(0) = \frac{\pi}{4} \text{ et } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Et soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a) Montrer que la fonction f est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0 = 0$, puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

2) a) Montrer que : $(\forall t > 0); \text{Arc tan}(t) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$

- b) Montrer que la fonction f est dérivable à gauche en $x_1 = \frac{\pi}{2}$
- 3) a) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- b) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 36

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{\pi \operatorname{Arc} \tan(x)} ; x > 0 \\ f(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Et soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) a) Montrer que : $(\forall x > 0); \operatorname{Arc} \tan(x) + \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$
- b) Montrer que la fonction f est continue sur $[0; +\infty[$.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis donner une interprétation graphique du résultat obtenu.
- 3) a) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0, donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.
- b) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0; +\infty[$, puis étudier le signe de $f'(x)$ pour $x > 0$.
- c) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 4) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$.
- a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
- b) Déterminer la monotonie de la fonction g^{-1} sur J , puis donner l'expression de g^{-1} pour $x \in J$.

Exercice 37

I/ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 \times \sqrt[3]{x+1} - x$$

et soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère

orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis étudier la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

b) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0 = -1$, puis donner une interprétation géométrique du résultat.

2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $] -1; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f ,

b) Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $]5; 6[$ tel que :

$$f(\alpha) = 0$$

c) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

II/ Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

1) Montrer que : $(\exists! \lambda_0 \in]2; 3[); g(\lambda_0) = \lambda_0$

2) a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable sur l'intervalle $] -\infty; 3[$

$$\text{et que : } (g^{-1})'(\lambda_0) = \frac{4\lambda_0^2}{9 - \lambda_0^2}$$

c) Tracer (Γ) la courbe représentative de la fonction g^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

3) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$g^{-1}(x) - \alpha < \frac{x\alpha^2}{9 - \alpha^2} \text{ pour tout réel } x \text{ de }] -\infty; 0[.$$

III/ On considère la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Pour tout entier naturel n , on pose : $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n \leq 3$

b) Montrer que la suite (x_n) est croissante et que la suite (y_n) est décroissante.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); x_n < \lambda_0 < y_n$, puis en déduire les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes.

3) a) Montrer que : $(\forall x \in [0; 3]); |f'(x)| \leq \left(1 - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right)$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \left(1 - \frac{1}{2^{\frac{3}{\sqrt{2}}}}\right)^2 \times |x_n - y_n|$

c) En déduire que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

4) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lambda_0$

Exercice 38

A) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \cos(\text{Arc tan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

B) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2\text{Arc tan}\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right) ; 0 \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \pi \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$.

2) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$ puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$.

3) Montrer que : $(\forall x \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right]) ; f'(x) = \frac{5}{3} - \cos(f(x))$

4) Soit x un élément de l'intervalle $\left]0; \frac{3\pi}{4}\right[$.

a) Montrer que : $(\exists c \in \left]x; \frac{3\pi}{4}\right[) ; f(x) - \pi = \left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \times f'(c)$

b) En déduire que : $\frac{5}{3} - \cos(f(x)) < \frac{f(x) - \pi}{x - \frac{3\pi}{4}} < \frac{8}{3}$

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \cos(f(x))$, en déduire que la fonction f est dérivable à gauche en $\frac{3\pi}{4}$ puis interpréter graphiquement le résultat.

5) a) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

b) Etudier la concavité de la courbe (C) .

c) Tracer la courbe (C) .

6) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.

b) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout réel x de J .

Exercice 39

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1) Etudier la parité de f .

2) Montrer que f est continue en 0.

3) Etudier la dérivabilité de f en 0 et donner une interprétation géométrique du résultat.

4) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (on rappelle que : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arc} \tan(t)}{t} = 1$)

5) a) En utilisant théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{++}) ; \frac{x}{1+x^2} < \operatorname{Arc} \tan(x) < x$$

b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{++}) ; \frac{x^3}{1+x^2} < f(x) < x$

c) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet la droite (D) d'équation $y = x$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

6) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{++}) ; f'(x) = 2x \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}$

b) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

7) Tracer $(\mathcal{C}_f)$.

8) a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{\pi}{4}$ et calculer $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (Remarquer que $f(1) = \left(\frac{\pi}{4}\right)$)

9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique a_n dans $]0; +\infty[$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; a_n < 1$

c) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

d) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 40

On considère la fonction f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = 2\left(\frac{1}{1 - \sin x} - 1\right)$

1) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$

b) Déterminer $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(2)$.

2) a) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$ on a :

$$1 - \sin(f^{-1}(x)) = \frac{2}{2+x} \text{ et } \cos(f^{-1}(x)) = \frac{2\sqrt{1+x}}{2+x}$$

b) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $[0; +\infty[$.

c) Montrer que : $(\forall x \in [0; +\infty[); (f^{-1})'(x) = \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$

d) Montrer que : $(\forall x \in [0; +\infty[); 0 < (f^{-1})'(x) \leq \frac{1}{2}$

3) On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n \leq 2$

b) Montrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$$

c) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente en précisant sa limite.

4) Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par :

$$(\forall n \geq 1); v_n = n \left(f^{-1}\left(u_n + \frac{2}{n}\right) - f^{-1}\left(u_n + \frac{1}{n}\right) \right)$$

a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \left(\exists c_n \in \left] u_n + \frac{1}{n}; u_n + \frac{2}{n} \right] \right); v_n = \frac{1}{(2+c_n)\sqrt{1+c_n}}$$

b) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Exercice 41

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]-\infty; 1]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\text{Arc tan}(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}}; x < 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

Et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a) Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $]-\infty; 1]$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Pour tout réel a de l'intervalle $]-\infty; 1]$, on considère la fonction numérique φ_a de la variable réelle x définie sur l'intervalle $]-\infty; 1]$ par :

$$\varphi_a(x) = (\text{Arc tan}(\sqrt{1-a}) - \sqrt{1-a})(\sqrt{1-x})^3 - (\text{Arc tan}(\sqrt{1-x}) - (\sqrt{1-x}))(\sqrt{1-a})^3$$

a) Montrer que la fonction φ_a est continue sur l'intervalle $[a; 1]$ et dérivable sur l'intervalle $]a; 1[$.

b) Calculer $\varphi_a(1)$ et $\varphi_a(a)$ puis montrer que :

$$(\exists c \in]a; 1[); \frac{\text{Arc tan}(\sqrt{1-a}) - \sqrt{1-a}}{(\sqrt{1-a})^3} = \frac{1}{3(c-2)}$$

c) En déduire que : $(\forall x \in]-\infty; 1[); \frac{1}{3(2-x)} < \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} < \frac{1}{3}$

d) Montrer que la fonction f est dérivable à gauche en 1 et que : $f'_g(1) = \frac{1}{3}$, puis interpréter graphiquement ce résultat.

3) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty; 1]$

et que : $(\forall x \in]-\infty; 1[); f'(x) = \frac{1}{2(1-x)} \left(f(x) - \frac{1}{2-x} \right)$

b) Montrer que : $(\forall x > 0); \frac{x}{1+x^2} < \text{Arc tan}(x) < x$ (T.A.F)

c) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty; 1]$.

d) Tracer la courbe (C) .

4) a) Montrer que : $(\forall x < 1); f'(x) < \frac{1}{2(2-x)}$

b) En déduire que : $(\forall x \leq 1); |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c) Montrer que : $(\forall (x; y) \in]-\infty; 1]); |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$

Exercice 29

1) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x} - 2)^2 = +\infty$

Par suite $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt[3]{x} - 2)^2 = +\infty$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) Branche infinie:

On a: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x} - 2)^2 = +\infty$

Donc la courbe ($\mathcal{C}$) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

2) * La dérivabilité de f à droite en 0:

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a $f(0) = 0$ et $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = (\sqrt[3]{x} - 2)^2$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt[3]{x} - 2)^2 = 4$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 4$

Signifie que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 4$

* Interprétation géométrique:

La courbe ($\mathcal{C}$) admet une demi-tangente en son point d'abscisse

0, d'équation:
$$\begin{cases} y = 4x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

3) * Calcul de $f'(x)$ où $x \in]0; +\infty[$:

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ qui sont:

$x \mapsto \sqrt[3]{x} - 2$ et $x \mapsto x$.

Et on a pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (\sqrt[3]{x} - 2)^2 + 2x(\sqrt[3]{x} - 2) \times \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\
 &= \left(\frac{\sqrt[3]{x} - 2}{3\sqrt[3]{x^2}} \right) \cdot (3\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x} - 2) + 2x) \\
 &= \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot (5x - 6\sqrt[3]{x^2}) = \frac{1}{3}(\sqrt[3]{x} - 2)(5\sqrt[3]{x} - 6)
 \end{aligned}$$

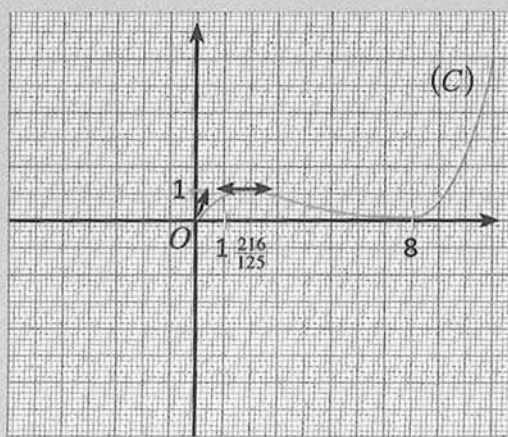
* Signe de $f'(x)$ où $x > 0$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 2$ où $\sqrt[3]{x} = \frac{6}{5}$
 $\Leftrightarrow x = 8$ où $x = \frac{216}{125}$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{6}{5} < \sqrt[3]{x} < 2$
 $\Leftrightarrow \frac{216}{125} < x < 8$

* Tableau de variations de f :

x	0	$\frac{216}{125}$		8		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	0	$\nearrow f\left(\frac{216}{125}\right)$		$\searrow$		$0 \nearrow +\infty$

4) Le tracé: $f\left(\frac{216}{125}\right) \simeq 1$ et $\frac{216}{119} \simeq 1,7$



Exercice 30

1) a) Le tableau de variations de la fonction de f :

• La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$ et de plus :

$$f'(x) = -\pi \sin(\pi x) \text{ donc : } (\forall x \in [0; 1]) ; f'(x) \leq 0$$

$$\text{Et on a : } f'(x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0; 1]$ et $f(0) = 2$;

$$f(1) = 0$$

Ainsi le tableau de variations de f est :

x	0	1
$f'(x)$	0	—
f	2	0

b) Montrons que f admet une fonction réciproque :

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0; 1]$.

D'après le théorème de la bijection réciproque, la fonction f réalise une bijection de $[0; 1]$ sur $f([0; 1]) = [f(1); f(0)] = [0; 2]$

Par conséquent f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $[0; 2]$.

2) • Montrons que f^{-1} est dérivable sur $]0; 2[$:

La fonction f est dérivable sur $]0; 1[$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout réel

x de $]0; 1[$, donc la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle

$$f([0; 1]) =]f(1); f(0)[=]0; 2[$$

$$\bullet \text{ Montrons que : } (\forall x \in]0; 2[) ; (f^{-1}(x))' = \frac{-1}{\pi \sqrt{2x - x^2}}$$

$$\text{Soit } x \text{ un élément de }]0; 2[, \text{ on a : } (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{-1}{\pi \cdot \sin(\pi f^{-1}(x))},$$

$$\text{car } f'(t) = -\pi \cdot \sin(\pi t)$$

$$\text{Or } f(f^{-1}(x)) = 1 + \cos(\pi f^{-1}(x)) \text{ c'est-à-dire : } \cos(\pi f^{-1}(x)) = x - 1$$

$$\text{Et puisque : } \cos^2(\pi \cdot f^{-1}(x)) + \sin^2(\pi \cdot f^{-1}(x)) = 1 \text{ alors :}$$

$$\sin^2(\pi \cdot f^{-1}(x)) = 1 - (x-1)^2$$

$$\text{Donc : } |\sin^2(\pi \cdot f^{-1}(x))| = \sqrt{2x-x^2}$$

$$\text{Or } f^{-1}(x) \in]0; 1[\Rightarrow \pi \cdot f^{-1}(x) \in]0; \pi[, \text{ par suite : } \sin(\pi \cdot f^{-1}(x)) = \sqrt{2x-x^2}$$

$$\text{D'où : } (f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\pi \cdot \sqrt{2x-x^2}}. \text{ Ainsi : } (\forall x \in]0; 2[); (f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\pi \sqrt{2x-x^2}}$$

$$3) \bullet \text{ Déterminons } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f^{-1}(x)}{x-2} :$$

$$\text{Soit } x \in]0; 2[, \text{ on pose : } y = f^{-1}(x),$$

$$\text{c'est-à-dire : } x = f(y)$$

$$\text{On a : } x \rightarrow 2 \iff y \rightarrow 0^+$$

$$\text{Donc : } \frac{f^{-1}(x)}{x-2} = \frac{y}{f(y)-2} = \frac{1}{\frac{f(y)-f(0)}{y-0}}, \text{ car } f(0) = 2$$

$$\text{Or } \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(y)-f(0)}{y-0} = 0^- \text{ donc : } \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{f(y)-2} = -\infty$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f^{-1}(x)}{x-2} = -\infty$$

$$\bullet \text{ Déterminons } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(x)-1}{x} :$$

$$\text{Soit } x \in]0; 2[, \text{ on pose : } y = f^{-1}(x), \text{ c'est-à-dire : } x = f(y)$$

$$\text{On a : } x \rightarrow 0^+ \iff y \rightarrow 1^-$$

$$\text{Donc : } \frac{f^{-1}(x)-1}{x} = \frac{y-1}{f(y)} = \frac{1}{\frac{f(y)-f(1)}{y-1}}; \text{ car } f(1) = 0$$

$$\text{Or } \lim_{y \rightarrow 1^-} \frac{f(y)-f(1)}{y-1} = 0^- \text{ donc : } \lim_{y \rightarrow 1^-} \frac{y-1}{f(y)} = -\infty$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(x)-1}{x} = -\infty$$

4) a) Montrons que la fonction h est dérivable sur $]0; 2[$:

La fonction $u: x \mapsto 2-x$ est dérivable sur $]0; 2[, f^{-1}$ est dérivable sur $]0; 2[$ telles que $u(]0; 2[) =]0; 2[$, donc la fonction $f^{-1} \circ u$ est dérivable sur $]0; 2[$.

Ainsi la fonction $h = f^{-1} + f^{-1} \circ u$ est dérivable sur $]0; 2[$.

• Calculons $h'(x)$ où $x \in]0; 2[$:

Soit $x \in]0; 2[$, on a : $h'(x) = (f^{-1})'(x) + (f^{-1})'(u(x)) \times u'(x)$

Puisque : $u'(x) = -1$, $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\pi \cdot \sqrt{2x-x^2}}$

et $(f^{-1})'(u(x)) = \frac{-1}{\pi \cdot \sqrt{2u(x)-(u(x))^2}} = \frac{-1}{\pi \cdot \sqrt{4-2x-(4-4x+x^2)}} = \frac{-1}{\pi \cdot \sqrt{2x-x^2}}$

Donc : $h'(x) = \frac{-1}{\pi \cdot \sqrt{2x-x^2}} + \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{2x-x^2}} = 0$

Ainsi : $(\forall x \in]0; 2[); h'(x) = 0$

b) • Calculons $h(1)$:

On a : $h(1) = f^{-1}(1) + f^{-1}(1) = 2f^{-1}(1)$

Or $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ signifie que : $f^{-1}(1) = \frac{1}{2}$

Donc : $h(1) = 1$

• Montrons que : $(\forall x \in [0; 2]); h(x) = 1$

On a la fonction h est dérivable sur l'intervalle $]0; 2[$

et $(\forall x \in [0; 2]); h'(x) = 0$

Donc h est constante sur $]0; 2[$.

Comme $h(1) = 1$ alors : $h(x) = 1$ pour tout $x \in]0; 2[$.

Et on a : $h(0) = f^{-1}(0) + f^{-1}(2) = 1$ et $h(2) = 1$

Ainsi : $(\forall x \in [0; 2]); h(x) = 1$

c) interprétation graphique :

On a : $(\forall x \in [0; 2]); (2-x) \in [0; 2]$ et $f^{-1}(2-x) + f^{-1}(x) = 1$

C'est-à-dire : $(\forall x \in [0; 2]); (2 \times 1 - x) \in [0; 2]$

et $f^{-1}(2 \times 1 - x) + f^{-1}(x) = 2 \times \frac{1}{2}$

Donc le point $\Omega\left(1; \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe de la fonction f^{-1} dans un repère donné.

Exercice 31

1) a) Déterminons D :

On a : $f(x) = \text{Arc tan}(2x\sqrt{1-x}) + \frac{\pi}{2}$

Soit x un réel, on a : $x \in D \Leftrightarrow 1 - x \geq 0$

$$\Leftrightarrow x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; 1]$$

Donc : $D =]-\infty; 1]$

b) • Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x\sqrt{1-x} = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} \text{Arc tan } X = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arc tan}(2x\sqrt{1-x}) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arc tan}(2x\sqrt{1-x}) + \frac{\pi}{2} = 0$$

• Interprétation graphique :

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$.

2) Etude de la dérivabilité de f à gauche en 1:

$$\text{Soit } x \text{ un réel, on a : } f(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{et } \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\text{Arc tan}(2x\sqrt{1-x})}{x - 1} = \frac{\text{Arc tan}(2x\sqrt{1-x})}{2x\sqrt{1-x}} \times \frac{2x\sqrt{1-x}}{x - 1}$$

$$\text{On pose : } t = 2x\sqrt{1-x}, \text{ on a : } x \rightarrow 1^- \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\text{Arc tan}(2x\sqrt{1-x})}{2\sqrt{1-x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan } t}{t} = (\text{Arc tan})'(1) = 1$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x\sqrt{1-x}}{x - 1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{-2x}{\sqrt{1-x}} \right) = -\infty$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$ signifie que la fonction f n'est pas dérivable à gauche en 1.

• Interprétation graphique :

La courbe $(\mathcal{C})$ admet une demi-tangente verticale à gauche en son point d'abscisse 1; dirigée vers le haut.

3) a) Calcul de $f'(x)$ où $x < 1$:

La fonction $u: x \mapsto 2x\sqrt{1-x}$ est dérivable sur l'intervalle $]-\infty; 1[$, il s'ensuit que la fonction Arc tan ou est dérivable sur $]-\infty; 1[$

Donc le fonction f l'est aussi:

Et on a: $(\forall x < 1) ; f'(x) = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$

Or: $(\forall x < 1) ; u'(x) = 2\sqrt{1-x} - \frac{x}{\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{\sqrt{1-x}}$

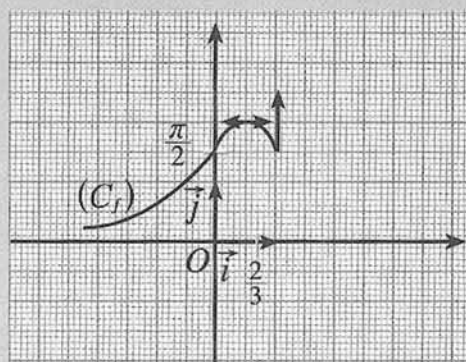
Ainsi: $(\forall x \in]-\infty; 1[) ; f'(x) = \frac{2-3x}{\sqrt{1-x}(1+4x^2(1-x))}$

b) Tableau de variations de f :

Puisque le signe de $f'(x)$ est celui de $2-3x$ sur l'intervalle $]-\infty; 1[$ alors le tableau de variations de f est comme suit:

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1
$f'(x)$	+		-
f			
	0	$f\left(\frac{2}{3}\right)$	$\frac{\pi}{2}$

c) La courbe de $(\mathcal{C})$



Exercice 32

1) a) Le tableau de variations de la fonction f :

• On a: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} 1 = 1$

• La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que:

$(\forall x \in \mathbb{R}) ;$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+1)(x^2+1) - 2x(x+1)^2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2(x+1)(x^2+1-x^2-x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x+1)(1-x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Par suite le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x^2$, donc le tableau de variations de f est:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	1	↘ 0		↗ 2	↘ 1

b) * Vérifions que: $f([1;2]) \subset [1;2]$

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1;2]$

donc: $f([1;2]) = [f(2); f(1)] = \left[\frac{9}{5}; 2\right]$

Et puisque $1 < \frac{9}{5} < 2$ alors $\left[\frac{9}{5}; 2\right] \subset [1;2]$

Ainsi: $f([1;2]) \subset [1;2]$

* Montrons que: $(\forall x \in [1; +\infty[) ; |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

Soit x un élément de $[1; +\infty[$, on a: $f'(x) \leq 0$

Donc: $|f'(x)| = -f'(x) = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

Par suite:

$$\begin{aligned} |f'(x)| - \frac{1}{4} &= \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{4} = \frac{8(x^2-1) - (x^2+1)^2}{4(x^2+1)^2} \\ &= -\frac{(x^4+2x^2+1-8x^2+8)}{4(x^2+1)^2} = -\frac{(x^4-6x^2+9)}{4(x^2+1)^2} = -\frac{(x^2-3)^2}{4(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Et comme $-\frac{(x^2-3)^2}{4(x^2+1)^2} \leq 0$ alors $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

D'où: $(\forall x \in]1; +\infty[) ; |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

c) Montrons que: $(\exists! \alpha \in]1; 2[) / f(\alpha) = \alpha$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]1; 2[$

par: $g(x) = f(x) - x$

La fonction g est dérivable sur $]1; 2[$ et que:

$(\forall x \in]1; 2[) ; g'(x) = f'(x) - 1$

Comme $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]1; 2[$ alors $g'(x) < 0$ pour tout $x \in]1; 2[$
c'est-à-dire la fonction est strictement décroissante sur $]1; 2[$.

Donc la fonction g est continue et strictement décroissante sur $]1; 2[$ donc elle réalise une bijection de $]1; 2[$ sur $g(]1; 2[)$ où

$$g(]1; 2[) =]\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x); \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)[=]g(2); g(1)[=]-\frac{1}{5}; 1[$$

Comme $0 \in]-\frac{1}{5}; 1[$ alors il existe un unique réel $\alpha \in]1; 2[$

tel que $g(\alpha) = 0$ c'est-à-dire $f(\alpha) = \alpha$

Ainsi: $(\exists \alpha \in]1; 2[) / f(\alpha) = \alpha$

Signifie que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1; 2[$.

2) a) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq 2$

En utilisant un raisonnement par récurrence.

-Initialisation:

• Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $1 \leq 2 \leq 2$ donc $1 \leq u_0 \leq 2$

-Hérédité:

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1 \leq u_n \leq 2$ et montrons que: $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

On a: $1 \leq u_n \leq 2$ et $f(]1; 2[) \subset]1; 2[$ donc $f(u_n) \in]1; 2[$

C'est-à-dire $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 2$

• Conclusion: D'après le principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq 2$.

b) Remarque:

• Soit n un entier naturel, on a:

$$x_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f(f(x_n))$$

$$\text{Et } y_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = f(u_{2(n+1)}) = f(f(u_{2n+1})) = f(f(y_n))$$

$$\text{Donc: } (\forall n \in \mathbb{N}) ; x_{n+1} = fof(x_n) \text{ et } y_{n+1} = fof(y_n)$$

• On a la fonction f est strictement décroissante sur $[1; 2]$ et $f([1; 2]) \subset [1; 2]$ donc la fonction fof est strictement croissante sur $[1; 2]$.

i) * Montrons que la suite (x_n) décroissante.

C'est-à-dire: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_{n+1} \leq x_n$ en utilisant un raisonnement par récurrence:

- Initialisation:

• Pour $n = 0$, on a: $x_0 = u_0 = 2$ et $x_1 = u_2$

comme $u_2 \leq 2$ alors $x_1 \leq x_0$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$

- Hérédité:

• Soit n un entier naturel, supposons que $x_{n+1} \leq x_n$ et montrons que $x_{n+2} \leq x_{n+1}$.

On a x_{n+1} et x_n sont des éléments de $[1; 2]$ et la fonction fof est croissante sur $[1; 2]$, donc: $x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow fof(x_{n+1}) \leq fof(x_n)$
 $\Rightarrow x_{n+2} \leq x_{n+1}$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow x_{n+2} \leq x_{n+1}$

• Conclusion: D'après le principe de récurrence:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_{n+1} \leq x_n$$

Signifie que la suite (x_n) est décroissante.

* Montrons que la suite (y_n) est croissante.

C'est-à-dire: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; y_n \leq y_{n+1}$, en utilisant un raisonnement par récurrence.

- Initialisation:

• Pour $n = 0$, on a: $u_2 \leq u_0$ alors $f(u_0) \leq f(u_2)$ c'est-à-dire

$u_1 \leq u_3$ signifie que $y_0 \leq y_1$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$

- Hérédité:

• Soit n un entier naturel, supposons que $y_n \leq y_{n+1}$ et montrons que

$y_{n+1} \leq y_{n+2}$

On a y_n et y_{n+1} sont deux éléments de $[1; 2]$ et la fonction $f \circ f$ est

croissante sur $[1; 2]$, donc: $y_n \leq y_{n+1} \Rightarrow f \circ f(y_n) \leq f \circ f(y_{n+1})$

$$\Rightarrow y_{n+1} \leq y_{n+2}$$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; y_n \leq y_{n+1} \Rightarrow y_{n+1} \leq y_{n+2}$

• Conclusions: D'après le principe de récurrence, on a:

$(\forall n \in \mathbb{N}) ; y_n \leq y_{n+1}$

Signifie que la suite (y_n) est croissante.

ii) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; y_n < \alpha < x_n$

• On a: $1 < \alpha < 2$ et la fonction f est strictement décroissante sur

l'intervalle $[1; +\infty[$, donc $f(2) < f(\alpha) < f(1)$

C'est-à-dire: $\frac{9}{5} < \alpha < 2$ par suite $y_0 < \alpha < x_0$

C'est-à-dire la propriété est vraie pour $n = 0$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $y_n < \alpha < x_n$ et montrons que:

$y_{n+1} < \alpha < x_{n+1}$

On a: x_n, y_n et α sont des éléments de $[1; 2]$, la fonction $f \circ f$ est strictement

sur $[1; 2]$ et $f(\alpha) = \alpha$ donc $y_n < \alpha < x_n \Rightarrow f \circ f(y_n) < f \circ f(\alpha) < f \circ f(x_n)$

$$\Rightarrow y_{n+1} < \alpha < x_{n+1}$$

• Conclusion: D'après le principe de récurrence:

$(\forall n \in \mathbb{N}) ; y_n < \alpha < x_n$

c) i) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot |x_n - y_n|$

La fonction f est dérivable sur $[1; 2]$ et $f([1; 2]) \subset [1; 2]$

donc la fonction $f \circ f$ est dérivable sur $[1; 2]$ et que $(\forall x \in [1; 2]) ;$

$$(f \circ f)'(x) = f'(f(x)) \times f'(x).$$

Et comme $|f'(t)| \leq \frac{1}{4}$ pour $t \in [1; 2]$ alors:

$$|(f \circ f)'(x)| = |f'(x)| \times |f'(f(x))| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 \text{ pour } x \in [1; 2]$$

Donc la fonction $f \circ f$ est dérivable sur $[1; 2]$ et que:

$$(\forall x \in [1; 2]) ; |(f \circ f)'(x)| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

Par suite, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) , |f \circ f(x_n) - f \circ f(y_n)| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot |x_n - y_n|$$

$$\text{équivalent à } (\forall n \in \mathbb{N}) , |x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot |x_n - y_n|$$

u) Montrons que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

* Montrons par récurrence que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |x_n - y_n| \leq \left(\frac{1}{16}\right)^n \cdot |x_0 - y_0|$$

- Initialisation:

- Pour $n = 0$, on a $|x_0 - y_0| \leq \left(\frac{1}{16}\right)^0 \cdot |x_0 - y_0|$

- Hérité:

- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|x_n - y_n| \leq \left(\frac{1}{16}\right)^n \cdot |x_0 - y_0|$

et montrons que: $|x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{16}\right)^{n+1} \cdot |x_0 - y_0|$

On a: d'après la question précédente: $|x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \frac{1}{16} \cdot |x_n - y_n|$

Et on a: $|x_n - y_n| \leq \left(\frac{1}{16}\right)^n \cdot |x_0 - y_0| \Rightarrow \frac{1}{16} \cdot |x_n - y_n| \leq \left(\frac{1}{16}\right)^{n+1} \cdot |x_0 - y_0|$

Donc $|x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{16}\right)^{n+1} \cdot |x_0 - y_0|$

* Conclusion: D'après le principe de récurrence:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |x_n - y_n| \leq \left(\frac{1}{16}\right)^n \cdot |x_0 - y_0|$$

- On a: $-1 < \frac{1}{16} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^n = 0$

c'est-à-dire: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^n \cdot |x_0 - y_0| = 0$

Donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - y_n| = 0$ signifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - y_n = 0$

Et de plus la suite (x_n) est décroissante et la suite (y_n) est croissante.

Par conséquent les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

d) Montrons que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \alpha$

Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes alors elles sont convergentes et ont la même limite.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a: $|x_n - \alpha| = x_n - \alpha$ car $\alpha < x_n$

Comme $y_n < \alpha$ alors $-\alpha < -y_n$ donc $|x_n - \alpha| < x_n - y_n$

Par suite:
$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}); |x_n - \alpha| < x_n - y_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - y_n = 0 \end{cases}$$

donc, d'après les critères de convergence: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \alpha$.

Exercice 33

1) Montrons que: $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) > 2$:

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont Arc tan et $x \mapsto 2x - 1$

Et que: $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 2$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a: $f'(x) - 2 = \frac{1}{1+x^2}$ et $\frac{1}{1+x^2} > 0$ donc $f'(x) - 2 > 0$

c'est-à-dire $f'(x) > 2$

Ainsi: $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) > 2$

2) Montrons que f admet réciproque f^{-1}

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

(car $f'(x) > 2 > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$)

Donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arc tan } x = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arc tan } x = -\frac{\pi}{2}$, alors

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, donc: $f(\mathbb{R}) =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

Par suite f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

3) Montrons que $(\exists! \alpha \in \mathbb{R}) / f(\alpha) = \alpha$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = f(x) - x$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{1+x^2} + 1$$

Il s'ensuit que: $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Et puisque g est continue sur $\mathbb{R}$ alors elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$ c'est-à-dire: $f(\alpha) = \alpha$

* Montrons que: $0 < \alpha < 1$

On a: $g(0) = -1$ et $g(1) = \frac{\pi}{4}$ donc $g(0) < 0 < g(1)$

c'est-à-dire: $g(0) < g(\alpha) < g(1)$

Comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors $0 < \alpha < 1$.

4) Montrons que $(\forall x \in]\alpha; +\infty[) ; f(x) > x$:

La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc:

$$\begin{aligned} x > \alpha &\Rightarrow g(x) > g(\alpha) \\ &\Rightarrow f(x) - x > 0 \\ &\Rightarrow f(x) > x \end{aligned}$$

Donc: $(\forall x \in]\alpha; +\infty[) ; f(x) > x$

II) 1) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > \alpha$

En utilisant un raisonnement par récurrence:

- Initialisation:

• Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et $a > \alpha$ donc $u_0 > \alpha$

- Hérédité:

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > \alpha$ et montrons que $u_{n+1} > \alpha$

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Et comme $f(\alpha) = \alpha$ alors $f^{-1}(\alpha) = \alpha$

Par conséquent $u_n > \alpha \Rightarrow f^{-1}(u_n) > f^{-1}(\alpha)$

$$\Rightarrow u_{n+1} > \alpha$$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > \alpha \Rightarrow u_{n+1} > \alpha$

Conclusion: D'après le principe de récurrence on a:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > \alpha$$

2) * Etude de la monotonie de (u_n) :

On a: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) > x$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > \alpha$ donc $f(u_n) > u_n$

Et comme f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors:

$$\begin{aligned} f(u_n) > u_n &\Rightarrow f^{-1}(f(u_n)) > f^{-1}(u_n) \\ &\Rightarrow u_n > f^{-1}(u_n) \\ &\Rightarrow u_n > u_{n+1} \end{aligned}$$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$

Signifie que la suite (u_n) est strictement décroissante.

* Dédution:

La suite (u_n) est décroissante et minorée par le réel α , donc elle est convergente.

3) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - \alpha < \frac{1}{2}(u_n - \alpha)$

Soit $n \in \mathbb{N}$

La fonction f^{-1} est continue sur $[\alpha; u_n]$ et dérivable sur $] \alpha; u_n[$

donc, d'après le théorème des accroissements finis:

$$(\exists c \in] \alpha; u_n[) / f^{-1}(u_n) - f^{-1}(\alpha) = (u_n - \alpha)(f^{-1})'(c)$$

$$\text{c'est-à-dire: } (\exists c \in] \alpha; u_n[) / u_{n+1} - \alpha = (u_n - \alpha)(f^{-1})'(c)$$

$$\text{Et puisque } (\forall x \in \mathbb{R}) , (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \text{ alors } (f^{-1})'(c) = \frac{1}{f'(f^{-1}(c))}$$

On a $f'(x) > 2$ pour tout réel x donc $f'(f^{-1}(c)) > 2$

$$\text{Il s'ensuit que } \frac{1}{f'(f^{-1}(c))} < \frac{1}{2} \text{ c'est-à-dire: } (f^{-1})'(c) < \frac{1}{2}$$

$$\text{Et comme } u_n - \alpha > 0 \text{ alors } (u_n - \alpha)(f^{-1})'(c) < \frac{1}{2}(u_n - \alpha)$$

c'est-à-dire: $u_{n+1} - \alpha < \frac{1}{2}(u_n - \alpha)$

Finalement: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - \alpha < \frac{1}{2}(u_n - \alpha)$

4) Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n - \alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (u_0 - \alpha)$

- Initialisation:

• Pour $n = 0$, on a $u_0 - \alpha > 0$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot (u_0 - \alpha) = u_0 - \alpha$

Donc: $0 < u_0 - \alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot (u_0 - \alpha)$

- Hérédité:

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < u_n - \alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (u_0 - \alpha)$

et montrons que $0 < u_{n+1} - \alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot (u_0 - \alpha)$

On a d'après la question précédente:

$u_{n+1} - \alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (u_n - \alpha)$ et $\frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot |u_0 - \alpha|$

donc: $u_{n+1} - \alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot (u_0 - \alpha)$ et $0 < u_{n+1} - \alpha$

D'où $0 < u_{n+1} - \alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot (u_0 - \alpha)$

Par suite $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n - \alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (u_0 - \alpha)$

Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

Exercice 34

1) a) * Déterminons D

Soit x un réel, on a:

$$x \in D \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } \frac{x+1}{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } x(x+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$$

Donc: $D =]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$

* Calcul des limites de f :

• On a $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ et la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est continue en 1.

$$\text{donc } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} = 1$$

$$\text{Par suite: } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} = -\infty$$

$$\bullet \text{ On a } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} = +\infty$$

$$\text{Par suite } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} = -\infty$$

c) Branches infinies

• On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale de la courbe $(\mathcal{C})$.

$$\bullet \text{ On a: } (\forall x \in D); f(x) = x - 1 - \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} - 1 \right)$$

$$\text{Et comme: } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} - 1 \right) = 0 \text{ alors } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = 0$$

Donc la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique de la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$

2) • Etude de la dérivabilité de f à gauche en -1:

Soit $x \in]-\infty; -1[$, on a $f(-1) = -1$

$$\text{et } \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{x - \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} + 1}{x + 1} = 1 + \frac{\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}}{\sqrt[3]{-(x+1)^3}} = 1 + \sqrt[3]{\frac{-1}{x(x+1)^2}}$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{-1}{x(x+1)^2} \right) = +\infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow -1^-} \sqrt[3]{\frac{-1}{x(x+1)^2}} = +\infty$$

$$\text{Par suite } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty$$

Ainsi la fonction f n'est pas dérivable à gauche en -1

• Interprétation géométrique:

La courbe $(\mathcal{C})$ admet une demi-tangente verticale à gauche en son point d'abscisse -1, dirigée vers le bas.

3) a) Calcul de la dérivée de f :

La fonction f est dérivable en tout point de $D - \{-1\}$ et que:

$$(\forall x \in D \setminus \{-1\}); f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x^2}}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}} = 1 + \frac{1}{3x^2 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}}$$

b) Tableau de variations de f :

On a: $(\forall x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[) ; f'(x) > 0$

signifie que la fonction f est strictement croissante sur les deux intervalles $]-\infty; -1]$ et $]0; +\infty[$

Par suite le tableau de variations de f est:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
f	$-\infty$	-1		$+\infty$

4) a) Montrons que g admet une fonction réciproque

La fonction $u: x \mapsto \frac{x+1}{x}$ est continue et positive sur $]0; +\infty[$

donc la fonction $\sqrt[3]{u}$ est continue sur $]0; +\infty[$, par suite g est continue sur $]0; +\infty[$.

Et comme g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ alors elle réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur l'intervalle $J = g(]0; +\infty[)$ où $J = \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

Par conséquent g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrons que $(\exists ! \alpha \in]0; +\infty[) / g(\alpha) = 0$ et que: $1 < \alpha < 2$

La fonction g est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$

Et comme $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe un unique réel $\alpha \in]0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$

On a: $g(1) = 1 - \sqrt[3]{2}$ et $g(2) = 2 - \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ alors $g(1) < 0 < g(2)$

c'est-à-dire $g(1) < g(\alpha) < g(2)$

Et comme g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ alors $1 < \alpha < 2$.

c) * Montrons que g^{-1} est dérivable sur J :

La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $g'(x) \neq 0$ pour tout réel $x \in]0; +\infty[$

Donc la fonction g^{-1} est dérivable sur $g(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$

* Montrons que: $(g^{-1})'(0) = \frac{3\alpha^4}{1+3\alpha^4}$

On a: $g(\alpha) = 0$ alors $g^{-1}(0) = \alpha$, par suite $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(\alpha)}$

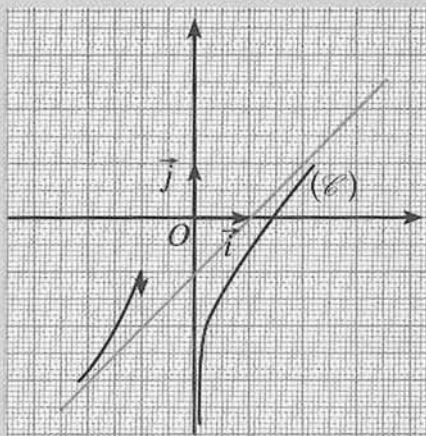
Et comme: $g'(\alpha) = 1 + \frac{1}{3\alpha^2 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right)^2}$ et

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{\alpha+1}{\alpha}} = \alpha \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right)^2 = \alpha^2 \end{aligned}$$

alors $g'(\alpha) = 1 + \frac{1}{3\alpha^4} = \frac{3\alpha^4 + 1}{3\alpha^4}$

Ainsi: $(g^{-1})'(\alpha) = \frac{3\alpha^4}{1+3\alpha^4}$

d) La courbe:



Exercice 35

1) • Montrons que la fonction g est continue sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

La fonction $g : x \mapsto \frac{\tan x}{x}$ est continue sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ en tant que produit de deux fonctions continues sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ qui sont: $x \mapsto \tan x$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$

Et on a: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x} = 1$ et $g(0) = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(1)$ signifie que la fonction

g est continue à droite en 0

D'où la fonction g est continue sur l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

• Calcul de $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x)$

On a : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0$ avec $\cos x > 0$ pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$

donc $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$, par suite $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = +\infty$

2) a) Montrons que : $0 < \tan(x) - x < x \cdot \tan^2(x)$, où $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$

La fonction $\varphi : t \mapsto \tan(t) - t$ est continue sur $[0; x]$ et dérivable sur $]0; x[$.
D'après le théorème des accroissements finis :

$$(\exists c \in]0; x[) ; \varphi(x) - \varphi(0) = (x - 0)\varphi'(c)$$

Et puisque $(\forall t \in]0; \frac{\pi}{2}[) ; \varphi'(t) = \tan^2(t)$ alors $\varphi'(c) = \tan^2(c)$

Donc : $(\exists c \in]0; x[) ; \tan(x) - x = x \times \tan^2(c)$

Et on a la fonction $\tan$ est strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$,

$$\begin{aligned} \text{donc : } 0 < c < x < \frac{\pi}{2} &\Rightarrow 0 < \tan(c) < \tan(x) \\ &\Rightarrow 0 < \tan^2(c) < \tan^2(x) \end{aligned}$$

Comme $x > 0$ alors $0 < x \tan^2(c) < x \cdot \tan^2(x)$

D'où : $0 < \tan(x) - x < x \cdot \tan^2(x)$

Ainsi : $(\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[) ; 0 < \tan(x) - x < x \cdot \tan^2(x)$

b) Montrons que la fonction g est dérivable à droite en $x_0 = 0$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} \left(\frac{\tan x}{x} - 1 \right) = \frac{\tan(x) - x}{x^2}$$

Et d'après la question précédente, on a : $0 < \tan(x) - x < x \tan^2(x)$

$$\text{Donc : } 0 < \frac{\tan(x) - x}{x^2} < \frac{\tan^2(x)}{x}, \text{ c'est-à-dire : } 0 < \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} < \frac{\tan^2(x)}{x}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2(x)}{x} = 0$

$$\text{Par suite on a : } \begin{cases} (\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[) ; 0 < \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} < \frac{\tan^2(x)}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2(x)}{x} = 0 \end{cases}$$

Donc : d'après les propriétés de limites et ordre : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$

c'est-à-dire la fonction g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0) = 0$

3) a) Tableau de variations de g :

La fonction g est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, et on a :

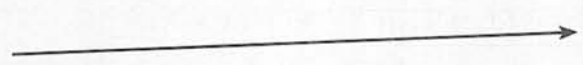
$$(\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[) ; g'(x) = \frac{x(1 + \tan^2 x) - \tan x}{x^2}$$

Et d'après la question 2) a) on a : $\tan(x) - x < x \tan^2(x)$

c'est-à-dire : $0 < x(1 + \tan^2(x)) - \tan x$ pour $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$

Donc : $g'(x) > 0$ pour tout réel $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$

c'est-à-dire la fonction g est strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, par suite le tableau de variations de la fonction g est :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	0	+	
g	1		

b) Montrons que la fonction g est une bijection :

La fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$, donc elle réalise une bijection de $]0; \frac{\pi}{2}[$ sur l'intervalle $J = g(]0; \frac{\pi}{2}[)$

où $J = [g(0); \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x)[= [1; +\infty[$

II) 1) a) Montrons que la fonction f est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}[$

• La fonction g est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et la fonction Arc tan est continue sur $\mathbb{R}$ telles que $g(]0; \frac{\pi}{2}[) \subset \mathbb{R}$, donc la fonction $f = \text{Arc tan} \circ g$ est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}[$

• On a : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \text{Arc tan } X = \frac{\pi}{2}$,

donc $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \text{Arc tan}(g(x)) = \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \frac{\pi}{2} = f(\frac{\pi}{2})$ signifie la

fonction f est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$

Ainsi la fonction f est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}[$

b) • Étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$

Soit x un élément de $]0; \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\text{Arc tan}(g(x)) - \frac{\pi}{4}}{x - 0} = \left(\frac{\text{Arc tan}(g(x)) - \frac{\pi}{4}}{g(x) - 1} \right) \times \left(\frac{g(x) - 1}{x - 0} \right)$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - 1}{x - 0} = 0$ Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan}(g(x)) - \frac{\pi}{4}}{g(x) - 1}$

On pose : $t = g(x)$, alors $x \mapsto 0^+$ équivaut à $t \mapsto 1^+$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan}(g(x)) - \frac{\pi}{4}}{g(x) - 1} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{\text{Arc tan } t - \text{Arc tan } 1}{t - 1} = (\text{Arc tan})'(1) = \frac{1}{2}$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ signifie que la fonction f est dérivable à droite en $x_0 = 0$ et que : $f'_d(0) = 0$

• Interprétation géométrique :

La courbe $(\mathcal{C})$ admet une demi-tangente horizontale à droite en son point d'abscisse $x_0 = 0$ (d'équation : $y = \frac{\pi}{4}$ et $x \geq 0$)

2) a) Montrons que : $(\forall t > 0) ; \text{Arc tan}(t) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$h(t) = \text{Arc tan}(t) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{t}\right)$$

La fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$, et on a :

$$(\forall t > 0) ; h'(t) = \frac{1}{1+t^2} + \frac{-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} = 0$$

Donc : $(\exists c \in \mathbb{R}) / (\forall t \in]0; +\infty[) ; h(t) = c$

Comme $h(1) = \text{Arc tan}(1) + \text{Arc tan}(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Ainsi : $(\forall t \in]0; +\infty[) ; \text{Arc tan}(t) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$

b) Montrons que f est dérivable à gauche en $x_1 = \frac{\pi}{2}$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{\text{Arc tan}(g(x)) - \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}}$$

Comme $g(x) > 1$ alors $\text{Arc tan}(g(x)) - \frac{\pi}{2} = -\text{Arc tan}\left(\frac{1}{g(x)}\right)$

$$\text{Donc : } \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = - \frac{\text{Arc tan}\left(\frac{1}{g(x)}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = - \left(\frac{\text{Arc tan}\left(\frac{1}{g(x)}\right)}{\frac{1}{g(x)}} \right) \times \left(\frac{1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot g(x)} \right)$$

• On pose : $t = \frac{1}{g(x)}$, alors $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\text{Arc tan}\left(\frac{1}{g(x)}\right)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan } t}{t} = 1$$

• On pose : $X = x - \frac{\pi}{2}$, alors $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \Leftrightarrow X \rightarrow 0^-$

$$\text{Et : } \left(x - \frac{\pi}{2}\right)g(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\tan(x)}{x} = X \cdot \frac{\tan\left(X + \frac{\pi}{2}\right)}{X + \frac{\pi}{2}} = - \frac{X}{\tan X} \cdot \frac{1}{X + \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Comme } \lim_{X \rightarrow 0^-} \frac{\tan X}{X} = 1 \text{ et } \lim_{X \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{X + \frac{\pi}{2}} \right) = \frac{2}{\pi}$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{-X}{\tan x} \times \frac{1}{X + \frac{\pi}{2}} \right) = - \frac{2}{\pi}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot g(x)} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \text{ signifie que la fonction } f \text{ est dérivable}$$

à gauche en $x_1 = \frac{\pi}{2}$

3) Tableau de variations de f :

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$

$$\text{et que : } (\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[) ; f'(x) = \frac{g'(x)}{1 + (g(x))^2}$$

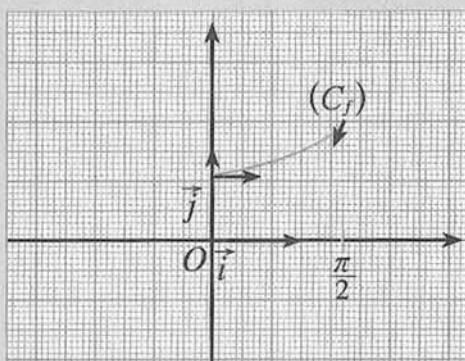
Comme $g'(x) > 0$ pour $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ alors $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

Ainsi le tableau de variations de f est :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	+
f	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

b) La courbe ($\mathcal{C}_f$)



Exercice 36

1) a) Montrons que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; \operatorname{Arc} \tan(x) + \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $(\exists ! \alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[) ; \tan \alpha = x$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \tan \alpha = x &\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{\tan \alpha} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \end{aligned}$$

$$\text{Or } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc : } \frac{\pi}{2} - \alpha = \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Comme $\tan \alpha = x$ et $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ alors $\alpha = \operatorname{Arc} \tan(x)$

$$\text{Par suite } \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc} \tan(x) + \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{Ainsi : } (\forall x \in]0; +\infty[) ; \operatorname{Arc} \tan(x) + \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

b) Montrons que f est continue sur $[0; +\infty[$

• La fonction $u : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0; +\infty[$ donc la fonction $\operatorname{Arc} \tan ou$ est continue sur $]0; +\infty[$

La fonction $v : x \mapsto \pi \operatorname{Arc} \tan x$ continue et positive sur $]0; +\infty[$ donc la fonction $\sqrt{v}$ est continue sur $]0; +\infty[$

Par conséquent la fonction $f = \operatorname{Arc} \tan ou + \sqrt{v}$ est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions continues sur $]0; +\infty[$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Arc} \tan x = \frac{\pi}{2} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

et on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\pi \operatorname{Arc} \tan x} = \sqrt{0} = 0$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{\pi \operatorname{Arc} \tan x} = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

signifie que f est continue à droite en 0

Il s'ensuit que la fonction f est continue sur $[0; +\infty[$

2) • Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{Arc} \tan 0 = 0$

Et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \pi \operatorname{Arc} \tan(x) = \frac{\pi^2}{2}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\pi \operatorname{Arc} \tan x} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

• Interprétation graphique

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$, donc la droite $y = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ est une asymptote de la courbe

($\mathcal{C}$) au voisinage de $+\infty$

3) a) Étude de la dérivabilité de f à droite en 0

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $\operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc} \tan(x)$, donc :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{\operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{\pi \operatorname{Arc} \tan(x)} - \frac{\pi}{2}}{x} = \frac{-\operatorname{Arc} \tan(x) + \sqrt{\pi \operatorname{Arc} \tan(x)}}{x} \\ &= -\frac{\operatorname{Arc} \tan x}{x} + \sqrt{\frac{\pi}{x} \times \frac{\operatorname{Arc} \tan x}{x}} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Arc} \tan x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{x} = +\infty$,

alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\operatorname{Arc} \tan x}{x} + \sqrt{\frac{\pi}{x} \times \frac{\operatorname{Arc} \tan x}{x}} \right) = +\infty$

c'est-à-dire la fonction f n'est pas dérivable à droite en 0

• Interprétation géométrique

La courbe ($\mathcal{C}$) admet une demi-tangente verticale à droite en son point d'abscisse 0, dirigée vers le haut

b) Calcul de $f'(x)$ où $x \in]0; +\infty[$

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{\frac{\pi}{1+x^2}}{2\sqrt{\pi \operatorname{Arc} \tan x}} = \frac{-1}{1+x^2} + \frac{\pi}{2(1+x^2)\sqrt{\pi \cdot \operatorname{Arc} \tan x}}$$

$$= \frac{\pi - 2\sqrt{\pi \operatorname{Arc} \tan x}}{2(1+x^2)\sqrt{\pi \cdot \operatorname{Arc} \tan x}} = \frac{\pi^2 - 4\pi \operatorname{Arc} \tan x}{2(1+x^2)(\pi + 2\sqrt{\pi \cdot \operatorname{Arc} \tan x}) \cdot \sqrt{\pi \cdot \operatorname{Arc} \tan x}}$$

• Étude du signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$

On a : $2(1+x^2)(\pi + 2\sqrt{\pi \cdot \operatorname{Arc} \tan x})\sqrt{\pi \cdot \operatorname{Arc} \tan x} > 0$

pour tout $x \in]0; +\infty[$

Donc la signe de $f'(x)$ est celui de $\pi^2 - 4\pi \operatorname{Arc} \tan(x)$ où $x \in]0; +\infty[$

On a : $\pi^2 - 4\pi \operatorname{Arc} \tan(x) = 4\pi\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{Arc} \tan x\right)$, alors :

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; 1[$

c) Tableau de variations de fonction f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

4) a) Montrons que g admet une fonction réciproque :

La fonction g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur l'intervalle $J = g(I)$

où $J = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); g(1) \right] = \left] \frac{\pi\sqrt{2}}{2}; \frac{3\pi}{4} \right]$

Par suite g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = \left] \frac{\pi\sqrt{2}}{2}; \frac{3\pi}{4} \right]$

b) • La monotonie de g^{-1}

Les fonctions g et g^{-1} ont le même sens de variations,

donc la fonction g^{-1} est strictement décroissante sur $\left] \frac{\pi\sqrt{2}}{2}; \frac{3\pi}{4} \right]$

• L'expression de $g^{-1}(x)$ où $x \in J$

Soit $x \in \left] \frac{\pi\sqrt{2}}{2}; \frac{3\pi}{4} \right]$ et $y \in [1; +\infty[$ tels que : $g^{-1}(x) = y$

On a : $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{y}\right) + \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{Arc} \tan y = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc} \tan y + \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\operatorname{Arc} \tan y} = x$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Arc} \tan y - \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\operatorname{Arc} \tan y} + x - \frac{\pi}{2} = 0 ; (*)$$

On pose : $Y = \sqrt{\operatorname{Arc} \tan y}$ où $Y \in \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right]$

Donc l'égalité (*) devient : $Y^2 - \sqrt{\pi} Y + x - \frac{\pi}{2} = 0$

Réolvons l'équation (E) : $Y^2 - \sqrt{\pi} Y + x - \frac{\pi}{2} = 0$ dont l'inconnue est Y :

Le discriminant de (E) est : $\Delta = \pi - 4x + 2\pi = 3\pi - 4x$, on a : $\Delta \geq 0$

Par suite les solutions de (E) sont :

$$Y_1(x) = \frac{\sqrt{\pi} + \sqrt{3\pi - 4x}}{2} \text{ et } Y_2(x) = \frac{\sqrt{\pi} - \sqrt{3\pi - 4x}}{2}$$

$$\text{Comme : } Y_1(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{3\pi - 4x}}{2} \text{ et } Y_2(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} = -\frac{\sqrt{3\pi - 4x}}{2}$$

$$\text{alors } Y_2(x) \notin \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right]$$

$$\text{Donc : } g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{\operatorname{Arc} \tan y} = \frac{\sqrt{\pi} + \sqrt{3\pi - 4x}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Arc} \tan y = \left(\frac{\sqrt{\pi} + \sqrt{3\pi - 4x}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y = \tan\left(\pi - x + \frac{\sqrt{3\pi^2 - 4\pi x}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = -\tan\left(x - \frac{\sqrt{3\pi^2 - 4\pi x}}{2}\right)$$

$$\text{Ainsi : } \left(\forall x \in \left[\frac{\pi\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]\right) ; f^{-1}(x) = -\tan\left(x - \frac{\sqrt{3\pi^2 - 4\pi x}}{2}\right)$$

Exercice 37

1) a) • Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x+1} - x = 3x \times \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} - x = x \left(3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} - 1 \right)$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = 0$ par suite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} - 1 = -1$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} - 1 \right) = -\infty$$

• Branche infinie :

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ donc la courbe ($\mathcal{C}$) admet une branche infinie au voisinage de $+\infty$

$$\text{Puisque } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} - 1 = -1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \cdot \sqrt[3]{1+x} = +\infty$$

alors la courbe ($\mathcal{C}$) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = -x$ au voisinage de $+\infty$

b) • Étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0 = -1$

Soit $x \in]-1; +\infty[$, on a : $f(-1) = 1$

$$\text{et } \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{x+1} - x - 1}{x + 1} = -1 + 3 \times \sqrt[3]{\frac{x+1}{(x+1)^3}} = -1 + 3 \times \sqrt[3]{\frac{1}{(x+1)^2}}$$

$$\text{Puisque } \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{(x+1)^2} \right) = +\infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow -1^+} 3 \sqrt[3]{\frac{1}{(x+1)^2}} = +\infty$$

Donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty$ signifie que la fonction f n'est pas dérivable

à droite en $x_0 = -1$

• Interprétation graphique :

La courbe ($\mathcal{C}$) admet une demi-tangente verticale à droite en son point d'abscisse -1 , dirigée vers le haut (d'équation $x = -1$ et $y \geq 1$)

2) a) Calcul de $f'(x)$ pour tout $x \in]-1; +\infty[$:

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-1; +\infty[$

$$\text{Et on a pour } x \in]-1; +\infty[: f'(x) = 3 \times \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}} - 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} - 1$$

• Le signe de $f'(x)$ où $x \in]-1; +\infty[$:

Soit x un réel de l'intervalle $]-1; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - \sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{-x(x+2)}{\sqrt[3]{(x+1)^2} \times (1 + \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^4})}$$

Alors le signe de $f'(x)$ est celui de $-x(x+2)$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$

D'où le tableau de variation de f est :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	+	0
f	1	3	$-\infty$

b) Montrons que : $(\exists ! \alpha \in]5;6[) ; f(\alpha) = 0$

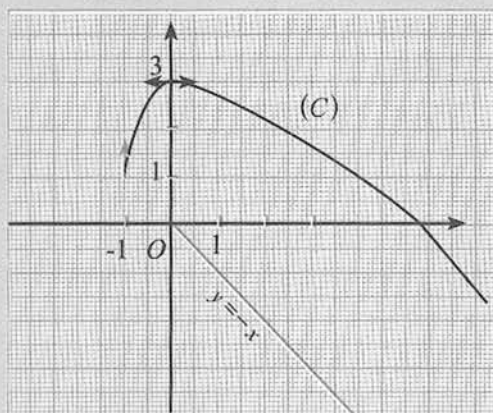
Soit h la restriction de la fonction f sur l'intervalle $]5;6[$

La fonction h est continue et strictement décroissante sur $]5;6[$

Donc elle réalise une bijection de $]5;6[$ sur $h(]5;6[) =]h(6);h(5)[$

Puisque $h(6) = 3 \cdot \sqrt[3]{7} - 6$ et $h(5) = 3 \cdot \sqrt[3]{6} - 5$ c'est-à-dire : $h(5) > 0$ et $h(6) < 0$ alors $0 \in]h(6);h(5)[$ donc il existe un unique réel $\alpha \in]5;6[$ tel que $h(\alpha) = 0$ c'est-à-dire $f(\alpha) = 0$

Par suite $(\exists ! \alpha \in]5;6[) ; f(\alpha) = 0$



II) 1) Montrons que : $(\exists ! \lambda_0 \in]2;3[) ; g(\lambda_0) = \lambda_0$

On considère la fonction φ définie sur l'intervalle $]2;3[$ par :

$$\varphi(x) = g(x) - x$$

• La fonction φ est continue sur $]2;3[$

• La monotonie de φ sur $]2;3[$ tels que $x < y$

On a la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$ donc $g(x) > g(y)$

Par suite $x < y \Rightarrow g(x) > g(y)$ et $-x > -y$

$$\Rightarrow g(x) - x > g(y) - y$$

$$\Rightarrow \varphi(x) > \varphi(y)$$

c'est-à-dire la fonction φ est strictement décroissante sur $]2;3[$

Par conséquent la fonction φ réalise une bijection de $]2;3[$ sur $\varphi(]2;3[) =]\varphi(3); \varphi(2)[$

Et on a : $\varphi(3) < 0$ et $\varphi(2) > 0$ c'est-à-dire : $0 \in]\varphi(3); \varphi(2)[$

Donc il existe un unique réel $\lambda_0 \in]2;3[$ tel que $\varphi(\lambda_0) = 0$

c'est-à-dire : $g(\lambda_0) = \lambda_0$

Ainsi : $(\exists! \lambda_0 \in]2;3[) ; g(\lambda_0) = \lambda_0$

2) a) • Montrons que g admet une fonction réciproque :

La fonction g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur l'intervalle $J = g([0; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); g(0)[=]-\infty; 3]$

Par conséquent g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $] -\infty; 3]$

b) • Montrons que la fonction g^{-1} est dérivable sur $] -\infty; 3[$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$, donc la fonction g^{-1} est dérivable sur l'intervalle $g(]0; +\infty[) =]-\infty; 3[$

• Montrons que : $(g^{-1})'(\lambda_0) = \frac{4\lambda_0^2}{9 - 4\lambda_0^2}$

On a la fonction g^{-1} est dérivable en λ_0 , et $g(\lambda_0) = \lambda_0$ c

'est-à-dire $g^{-1}(\lambda_0) = \lambda_0$

Donc : $(g^{-1})'(\lambda_0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(\lambda_0))} = \frac{1}{g'(\lambda_0)}$

Et on a : $g'(\lambda_0) = \frac{1}{(\sqrt[3]{\lambda_0 + 1})^2} - 1$

Puisque : $g(\lambda_0) = \lambda_0 \Leftrightarrow 3 \cdot \sqrt[3]{\lambda_0 + 1} - \lambda_0 = \lambda_0$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\lambda_0 + 1} = \frac{2\lambda_0}{3}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{\lambda_0 + 1})^2 = \frac{4\lambda_0^2}{9}$$

Alors $g'(\lambda_0) = \frac{9}{4\lambda_0^2} - 1 = \frac{9 - 4\lambda_0^2}{4\lambda_0^2}$

D'où $(g^{-1})'(\lambda_0) = \frac{4\lambda_0^2}{9 - 4\lambda_0^2}$

c) La courbe (Γ) voir la figure précédente

3) Montrons que : $(\forall x \in]-\infty; 0[) ; g^{-1}(x) - \alpha < \frac{x\alpha^2}{9 - \alpha^2}$

Soit $x \in]-\infty; 0[$, on a :

La fonction g^{-1} est continue sur $[x; 0]$ et est dérivable sur $]x; 0[$, donc d'après le théorème des accroissements finis :

$$(\exists c \in]x; 0[) ; g^{-1}(x) - g^{-1}(0) = (x - 0)(g^{-1})'(c)$$

Or $g(\alpha) = 0$ c'est-à-dire $g^{-1}(0) = \alpha$

Et on a : $(g^{-1})'(c) = \frac{1}{g'(g^{-1}(c))}$, donc : $(\exists c \in]x; 0[)$

$$\text{tel que } g^{-1}(x) - \alpha = \frac{x}{g'(g^{-1}(c))}$$

Puisque la fonction g^{-1} est strictement décroissante sur $]-\infty; 3]$

Alors : $x < c < 0 \Rightarrow g^{-1}(0) < g^{-1}(c) < g^{-1}(x)$

$$\Rightarrow \alpha < g^{-1}(c) < g^{-1}(x)$$

Et on a : $(\forall x \in]-1; +\infty[) ; f''(x) = -\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{5}{3}}$

Donc la fonction f' est strictement décroissante sur $] -1; +\infty[$ par suite g' est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$

Il s'ensuit que : $\alpha < g^{-1}(c) \Rightarrow g'(g^{-1}(c)) < g'(\alpha) < 0$

$$\text{Et on a : } g'(\alpha) = \frac{1}{(\sqrt[3]{\alpha+1})^2} - 1$$

$$\text{et puisque } f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\alpha+1} = \frac{\alpha}{3} \Leftrightarrow (\sqrt[3]{\alpha+1})^2 = \frac{\alpha^2}{9}$$

$$\text{Donc } g'(\alpha) = \frac{9}{\alpha^2} - 1 = \frac{9 - \alpha^2}{\alpha^2}$$

$$\text{Par suite : } g'(g^{-1}(c)) < \frac{9 - \alpha^2}{\alpha^2} \text{ c'est-à-dire } \frac{\alpha^2}{9 - \alpha^2} < \frac{1}{g'(g^{-1}(c))}$$

$$\text{Et comme } x < 0 \text{ alors } \frac{x}{g'(g^{-1}(c))} < \frac{x\alpha^2}{9 - \alpha^2}$$

$$\text{D'où } g^{-1}(x) - \alpha < \frac{x\alpha^2}{9 - \alpha^2}$$

$$\text{Ainsi : } (\forall x \in]-\infty; 0[) + q \quad g^{-1}(x) - \alpha < \frac{x\alpha^2}{9 - \alpha^2}$$

III) 1) a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 3$

En utilisant un raisonnement par récurrence

Initialisations :

• Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 0$ donc $0 \leq u_0 \leq 3$

- Hérité :

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leq u_n \leq 3$, et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 3$

On a la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$

donc : $0 \leq u_n \leq 3 \implies f(3) \leq f(u_n) \leq f(0)$

$$\implies 3 \cdot \sqrt[3]{4} - 3 \leq u_{n+1} \leq 3$$

et on a $3 \cdot \sqrt[3]{4} - 3 > 0$ d'où $0 \leq u_{n+1} \leq 3$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 3 \implies 0 \leq u_{n+1} \leq 3$

• **Conclusion** : D'après la principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 3$

b) • Remarque :

• Soit n un entier naturel, on a :

$$x_{n+1} = u_{2(n+1)} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f(f(x_n))$$

$$\text{Et } y_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = f(u_{2(n+1)}) = f(u_{2n+1+1}) = f(f(u_{2n+1})) = f(f(y_n))$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_{n+1} = fof(x_n)$ et $y_{n+1} = fof(y_n)$

• La fonction f est strictement décroissante sur $[0; 3]$ et que $f([0; 3]) \subset [0; 3]$

. Donc la fonction fof est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 3]$

• Montrons par récurrence que la suite (x_n) est croissante, c'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n \leq x_{n+1}$

• Pour $n = 0$, on a : $x_0 = u_0 = 0$ et $x_1 = u_2$

et comme $u_2 \geq 0$ alors $x_0 \leq x_1$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $x_n \leq x_{n+1}$ et montrons que $x_{n+1} \leq x_{n+2}$

On a x_n et x_{n+1} des éléments de l'intervalle $[0; 3]$ et la fonction fof croissante sur $[0; 3]$ donc : $x_n \leq x_{n+1} \implies fof(x_n) \leq fof(x_{n+1})$

$$\implies x_{n+1} \leq x_{n+2}$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n \leq x_{n+1} \implies x_{n+1} \leq x_{n+2}$

• **Conclusion** : D'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n \leq x_{n+1}$

Ainsi la suite (x_n) est croissante.

• Montrons, par récurrence, que la suite (y_n) est décroissante

c'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; y_{n+1} \leq y_n$

• Pour $n = 0$, on a : $u_0 \leq u_2$ donc $f(u_2) \leq f(u_1)$, c'est-à-dire $u_3 \leq u_1$ signifie que $y_1 \leq y_0$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $y_{n+1} \leq y_n$ et montrons que $y_{n+2} \leq y_{n+1}$

On a y_n et y_{n+1} des éléments de $[0; 3]$ et la fonction $f \circ f$ est croissante sur $[0; 3]$, donc : $y_{n+1} \leq y_n \implies f \circ f(y_{n+1}) \leq f \circ f(y_n)$

$$\implies y_{n+2} \leq y_{n+1}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; y_{n+1} \leq y_n \implies y_{n+2} \leq y_{n+1}$

• Conclusion : D'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; y_{n+1} \leq y_n$

Ainsi la suite (y_n) est décroissante

2) • Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n < \lambda_0 < y_n$

En utilisant un raisonnement par récurrence

• Pour $n = 0$, on a : $x_0 = 0$, $y_0 = 3$ et $0 < 2 < \lambda_0 < 3$, donc : $x_0 < \lambda_0 < y_{n+1}$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $x_n < \lambda_0 < y_n$ et montrons que :

$$x_{n+1} < \lambda_0 < y_{n+1}$$

On a : x_n , y_n et λ_0 sont des éléments de $[0; 3]$ et la fonction $f \circ f$ est croissante sur $[0; 3]$, donc

$$x_n < \lambda_0 < y_n \implies f \circ f(x_n) < f \circ f(\lambda_0) < f \circ f(y_n)$$

$$\implies x_{n+1} < \lambda_0 < y_{n+1} \text{ (car } f \circ f(\lambda_0) = f(\lambda_0) = \lambda_0 \text{)}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n < \lambda_0 < y_n \implies x_{n+1} < \lambda_0 < y_{n+1}$

• Conclusion : D'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n < \lambda_0 < y_n$

• Dédution :

La suite (x_n) est croissante et majorée par λ_0 , donc elle est convergente

La suite (y_n) est décroissante et minorée par λ_0 , donc elle est convergente

3) a) Montrons que : $(\forall x \in [0; 3]) ; |f'(x)| \leq \left(1 - \frac{1}{2 \times \sqrt[3]{2}}\right)$

Soit $x \in [0; 3]$, on a : $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} - 1$ et $f'(x) \leq 0$

$$\text{Donc : } |f'(x)| = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$\text{Par suite : } |f'(x)| - \left(1 - \frac{1}{2 \times \sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{2 \times \sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{16}}{2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

Puisque : $0 \leq x \leq 3 \implies 1 \leq 1+x \leq 4$

$$\implies 1 \leq (1+x)^2 \leq 16$$

$$\implies 1 \leq \sqrt[3]{(x+1)^2} \leq \sqrt[3]{16}$$

c'est-à-dire : $\sqrt[3]{(1+x)^2} - \sqrt[3]{16} \leq 0$, donc $|f'(x)| - \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right) \leq 0$

signifie que : $|f'(x)| \leq 1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}$

Ainsi $(\forall x \in [0;3]) ; |f'(x)| \leq \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right)$

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right)^2 \times |x_n - y_n|$

On a la fonction f est dérivable sur $[0;3]$ et $f([0;3]) \subset [0;3]$

donc $f \circ f$ est dérivable sur $[0;3]$ et on a : $(f \circ f)'(x) = f'(f(x)) \times f'(x)$ pour tout $x \in [0;3]$

Et comme $|f'(t)| \leq 1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}$ pour $t \in [0;3]$

Alors $|(f \circ f)'(x)| = |f'(x)| \times |f'(f(x))| \leq \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right)^2$ pour tout $x \in [0;3]$

Donc : La fonction $f \circ f$ est dérivable sur $[0;3]$

et $(\forall x \in [0;3]) ; |(f \circ f)'(x)| \leq \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right)^2$

Par suite, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |f \circ f(x_n) - f \circ f(y_n)| \leq \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right)^2 \times |x_n - y_n|$

équivalent à : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right)^2 \times |x_n - y_n|$

c) Dédution :

• Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |x_n - y_n| \leq \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right)^{2n} |x_0 - y_0|$

• Pour $n = 0$, on a : $|x_0 - y_0| \leq \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right)^0 \times |x_0 - y_0|$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $|x_n - y_n| \leq \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right)^{2n} \times |x_0 - y_0|$ et montrons que : $|x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right)^{2(n+1)} \times |x_0 - y_0|$

On a d'après la question précédente $|y_{n+1} - x_{n+1}| \leq \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right)^2 \times |x_n - y_n|$

Et on a :

$|x_n - y_n| \leq \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right)^{2n} \times |x_0 - y_0| \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right)^2 \times |x_n - y_n| \leq \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right)^{2n+2} \times |x_0 - y_0|$

Donc : $|x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right)^{2(n+1)} \times |x_0 - y_0|$

• **Conclusion** : D'après le principe de récurrence :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |x_n - y_n| \leq \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right)^{2n} \times |x_0 - y_0|$$

• On a : $\left|1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right|^2 \leq 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right)^{2n} = 0$

Par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - y_n = 0$

Et de plus la suite (x_n) est croissante et la suite (y_n) est décroissante

Par conséquent les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes

4) Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lambda_0$

Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes alors elles sont convergentes et ont la même limite

On pose : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \ell$

Puisque : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n < \lambda_0 < y_n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \lambda_0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$

c'est-à-dire : $\ell \leq \lambda_0 \leq \ell$ donc $\lambda_0 = \ell$

Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lambda_0$

Exercice 38

A) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \cos(\text{Arc tan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

La fonction $t \mapsto \tan t$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ donc : $(\exists! \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[) ; \tan(\alpha) = x$

c'est-à-dire : $\alpha = \text{Arc tan}(x)$

On a : $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}} = |\cos \alpha|$

Puisque $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ alors $\cos \alpha > 0$, c'est-à-dire $|\cos \alpha| = \cos \alpha$

Donc : $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos \alpha = \cos(\text{Arc tan}(x))$

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \cos(\text{Arc tan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

B) 1) Montrons que la fonction f est continue sur $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$

On a : la fonction $u : x \mapsto \frac{2}{3}x$ est continue sur $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$ et la fonction $\tan$

est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ telles que $u\left(\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]\right) = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Donc la fonction $v : x \mapsto \frac{1}{2} \tan\left(\frac{2x}{3}\right)$ est continue sur $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$

En plus on a : $v\left(\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]\right) \subset \mathbb{R}$ et la fonction Arc tan est continue sur $\mathbb{R}$; donc la fonction $f = 2\text{Arc tan} \circ v$ est continue sur l'intervalle $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$

• Étude de la continuité de f à gauche en $\frac{3\pi}{4}$

$$\text{Calculons } \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} 2\text{Arc tan}\left(\frac{1}{2} \tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right)$$

$$\text{On pose : } X = \frac{2x}{3}, \text{ alors } x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^- \Leftrightarrow x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \left(\frac{1}{2} \tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{2} \tan X = +\infty$$

$$\text{Et comme } \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Arc tan}(t) = \frac{\pi}{2} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \text{Arc tan}\left(\frac{1}{2} \tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Par suite } \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \left(2\text{Arc tan}\left(\frac{1}{2} \tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right)\right) = \pi$$

$$\text{c'est-à-dire } \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} f(x) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

signifie que la fonction f est continue à gauche en $\frac{3\pi}{4}$

Finalement la fonction f est continue sur $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$

2) • Montrons que f est dérivable sur $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$

On a la fonction $v : x \mapsto \frac{1}{2} \tan\left(\frac{2x}{3}\right)$ est dérivable sur $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$ et la fonction Arc tan est dérivable sur $\mathbb{R}$ telles que $v\left(\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]\right) \subset \mathbb{R}$

Donc la fonction $f = 2\text{Arc tan} \circ v$ est dérivable sur $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$

• Calculons $f'(x)$ pour tout x de $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$

Soit x un élément de $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$, on pose : $v(x) = \frac{1}{2} \tan\left(\frac{2x}{3}\right)$

$$\text{On a : } v'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \left(1 + \tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)\right) = \frac{1}{3} \left(1 + \tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)\right)$$

Et comme $f = 2\text{Arc tan} \circ v$ alors :

$$f'(x) = 2 \times \frac{v'(x)}{1 + (v(x))^2} = \frac{2}{3} \times \frac{1 + \tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}{1 + \frac{1}{4} \times \tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)} = \frac{8}{3} \times \frac{1 + \tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}{4 + \tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}$$

Ainsi : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right] ; f'(x) = \frac{8}{3} \frac{1 + \tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}{4 + \tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}\right)$

3) Montrons que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right] ; f'(x) = \frac{5}{3} - \cos(f(x))\right)$

Soit $x \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$, on a :

$$\cos(f(x)) = \cos\left(2 \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{2} \tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right)\right) = 2 \cos^2\left(\operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{2} \tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right)\right) - 1$$

D'après le résultat de la partie A) on aura :

$$\cos^2\left(\operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{2} \tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right)\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)} = \frac{4}{4 + \tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}$$

$$\text{Il s'ensuit que } \cos(f(x)) = \frac{8}{4 + \tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)} - 1 = \frac{4 - \tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}{4 + \tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \frac{5}{3} - \cos(f(x)) &= \frac{5}{3} - \frac{4 - \tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}{4 + \tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)} \\ &= \frac{20 + 5 \tan^2\left(\frac{2x}{3}\right) - 12 + 3 \tan^3\left(\frac{2x}{3}\right)}{3\left(4 + \tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)\right)} \\ &= \frac{8}{3} \times \frac{1 + \tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}{4 + \tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)} = f'(x) \end{aligned}$$

Ainsi : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right] ; f'(x) = \frac{5}{3} - \cos(f(x))\right)$

4) 2) Montrons que : $\left(\exists c \in \left]x; \frac{3\pi}{4}\right[\mid f(x) - \pi = \left(x - \frac{3\pi}{4}\right) f'(c)\right)$

Soit $x \in \left]0; \frac{3\pi}{4}\right[$; on a $\left[x; \frac{3\pi}{4}\right] \subset \left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$, alors la fonction f est continue sur $\left[x; \frac{3\pi}{4}\right]$ et dérivable sur $\left]x; \frac{3\pi}{4}\right[$, donc d'après le théorème des accroissements finis, on a :

$$\left(\exists c \in \left]x; \frac{3\pi}{4}\right[\mid f(x) - f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(x - \frac{3\pi}{4}\right) f'(c)\right)$$

c'est-à-dire : $\left(\exists c \in \left]x; \frac{3\pi}{4}\right[\mid f(x) - \pi = \left(x - \frac{3\pi}{4}\right) f'(c)\right)$

b) Dédution :

On a : $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$ et la fonction f est continue à gau-

che en $\frac{3\pi}{4}$, donc f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$

Comme la fonction $\cos$ est strictement décroissante sur $[0; \pi]$

$$\begin{aligned} \text{Alors on a : } x < \frac{3\pi}{4} &\Rightarrow 0 < f(x) < f\left(\frac{3\pi}{4}\right) < \pi \\ &\Rightarrow \cos \pi < \cos(f(x)) < \cos(0) \\ &\Rightarrow -1 < \cos(f(x)) < 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } -\cos(f(x)) < -\cos(f\left(\frac{3\pi}{4}\right)) < 1$$

$$\text{c'est-à-dire : } \frac{5}{3} - \cos(f(x)) < \frac{5}{3} - \cos\left(f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) < \frac{8}{3}$$

$$\text{D'après la question précédente, on a : } f'(x) = \frac{f(x) - \pi}{x - \frac{3\pi}{4}}$$

$$\text{D'où : } \frac{5}{3} - \cos(f(x)) < \frac{f(x) - \pi}{x - \frac{3\pi}{4}} < \frac{8}{3}$$

c) • Calcul de $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \cos(f(x))$

On a : $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} f(x) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \pi$ et la fonction $\cos$ est continue en π

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \cos(f(x)) = \cos(\pi) = -1$$

• Dédution :

$$\begin{aligned} \text{On a : } \left(\forall x \in \left] 0; \frac{3\pi}{4} \right[\right) ; \frac{5}{3} - \cos(f(x)) &< \frac{f(x) - \pi}{x - \frac{3\pi}{4}} < \frac{8}{3} \\ \left\{ \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{5}{3} - \cos(f(x)) = \frac{8}{3} \right. \end{aligned}$$

$$\text{Donc, d'après les propriétés de limites et ordre : } \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{f(x) - \pi}{x - \frac{3\pi}{4}} = \frac{8}{3}$$

$$\text{Et on a : } f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \pi, \text{ par conséquent : } \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{x - \frac{3\pi}{4}} = \frac{8}{3}$$

c'est-à-dire f est dérivable à gauche en $\frac{3\pi}{4}$ et que $f'_s\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{8}{3}$

• Interprétation graphique :

La courbe $(\mathcal{C})$ admet une demi-tangente en son point d'abscisse $\frac{3\pi}{4}$

$$\text{d'équation : } \begin{cases} y = \frac{8}{3}x - \pi \\ x \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

5) a) Tableau variations de f :

x	0	$\frac{3\pi}{4}$
$f'(x)$		+
f	0	π

b) Étude de la concavité de $(\mathcal{C})$

On a : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right] ; f'(x) = \frac{5}{3} - \cos(f(x))\right)$

Comme la fonction f est dérivable sur $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$, $f\left(\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]\right) = [0; \pi]$ et la fonction $\cos$ est dérivable sur $[0; \pi]$ donc f' est dérivable sur $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$,

et on a : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right] ; f''(x) = f'(x) \times \sin(f(x))\right)$

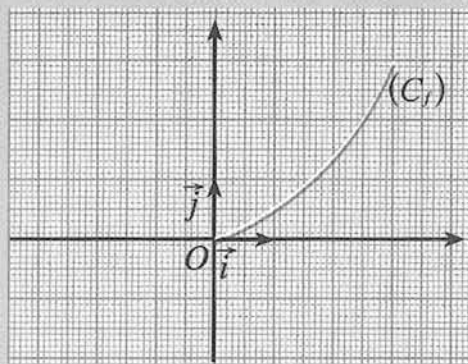
Soit $x \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$, on a : $0 \leq f(x) < \pi$ donc $\sin(f(x)) \geq 0$

Comme $f'(x) > 0$ alors $f'(x) \times \sin(f(x)) \geq 0$

Donc $\left(\forall x \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right] ; f''(x) \geq 0\right)$

Ainsi la courbe $(\mathcal{C})$ est convexe sur $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$

c) Courbe $(\mathcal{C})$:



6) a) Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1}

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$, donc elle réalise une bijection de $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$ sur l'intervalle $J = f\left(\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]\right)$ où $J = \left[f(0); f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = [0; \pi]$

Par suite f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0; \pi]$

b) Calculons $f^{-1}(x)$ où $x \in [0; \pi]$

Soit $x \in [0; \pi]$ et $y \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$ tels que $f^{-1}(x) = y$, on a :

$$\begin{aligned}f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow x = f(y) \\&\Leftrightarrow x = 2 \operatorname{Arc} \tan \left(\frac{1}{2} \tan \left(\frac{2y}{3} \right) \right) \\&\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{Arc} \tan \left(\frac{1}{2} \tan \left(\frac{2y}{3} \right) \right) \\&\Leftrightarrow 2 \tan \left(\frac{x}{2} \right) = \tan \left(\frac{2y}{3} \right) \\&\Leftrightarrow \operatorname{Arc} \tan \left(2 \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) = \frac{2y}{3} \\&\Leftrightarrow y = \frac{3}{2} \operatorname{Arc} \tan \left(2 \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right)\end{aligned}$$

Et comme $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \pi$ alors $f^{-1}(\pi) = \frac{3\pi}{4}$

$$\text{Donc : } \begin{cases} f^{-1}(x) = \frac{3}{2} \operatorname{Arc} \tan \left(2 \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) & \text{si } x \in [0; \pi[\\ f^{-1}(\pi) = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Exercice 39

1) Étudions la parité de la fonction f :

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $-x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = -f(x)$, en tant que la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc} \tan(x)$ est impaire.

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(-x) = -f(x)$

Signifie que f est une fonction impaire.

2) Montrons que f est continue en 0 :

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Arc} \tan X = \frac{\pi}{2}$ donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{Arc} \tan \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2}$

Et comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$ alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \operatorname{Arc} \tan \left(\frac{1}{x} \right) = 0$

c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -f(-x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} -f(t) = 0$, en posant : $x = -t$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$

Ainsi la fonction f est continue en 0.

3) • Étudions la dérivabilité de la fonction f en 0 :

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right)$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ signifie que la fonction f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

• Interprétation géométrique :

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente horizontale en son point d'abscisse 0.

4) Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$:

Soit $]0; +\infty[$, on a : $f(x) = x \times \frac{\operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

On pose : $t = \frac{1}{x}$ donc : $x \rightarrow +\infty \iff t \rightarrow 0^+$

Par suite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \times \frac{\operatorname{Arc} \tan t}{t} = +\infty$

car : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Arc} \tan t}{t} = 1$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

5) a) Montrons que : $(\forall x > 0) ; \frac{x}{1+x^2} < \operatorname{Arc} \tan(x) < x$:

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a :

La fonction $\operatorname{Arc} \tan$ est continue sur $[0; x]$ et dérivable sur

$]0; x[$ donc ; d'après le théorème des accroissements finis, on a :

$(\exists c \in]0; x[) ; \operatorname{Arc} \tan(x) - \operatorname{Arc} \tan(0) = (x - 0)(\operatorname{Arc} \tan)'(c)$

Or $(\forall t \in \mathbb{R}) ; (\operatorname{Arc} \tan)'(t) = \frac{1}{1+t^2}$

Donc : $(\exists c \in]0; x[) ; \operatorname{Arc} \tan(x) = \frac{x}{1+c^2}$

Et comme : $0 < c < x \implies 1 < 1+c^2 < 1+x^2$

$$\implies \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1$$

Par suite : $\frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c^2} < x$; car $x > 0$

D'où : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; \frac{x}{1+x^2} < \text{Arc tan}(x) < x$

b) Dédution :

Soit $x \in]0; +\infty[$, d'après la question précédente, on a :

$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} < \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

équivalent à : $\frac{x}{1+x^2} < \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

Donc : $\frac{x^3}{1+x^2} < x^2 \cdot \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) < x$

Ainsi : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; \frac{x^3}{1+x^2} < f(x) < x$

c) Montrons que la droite $(D) : y = x$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $\frac{x^3}{1+x^2} < f(x) < x$

Par suite : $\frac{x^3}{1+x^2} - x < f(x) - x < 0$, c'est-à-dire : $\frac{-x}{1+x^2} < f(x) - x < 0$

Et comme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$

Alors, d'après les propriétés des limites et ordre : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$ signifie que la droite $(D) : y = x$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

6) a) Montrons que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = 2x \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}$:

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = 2x \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 2x \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}$$

Ainsi : $(\forall x > 0) ; f'(x) = 2x \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}$

b) Montrons que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } f'(x) &= 2x \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{x} \left(x^2 \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^3}{1+x^2} \right) + x \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} \left(f(x) - \frac{x^3}{1+x^2} \right) + x \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

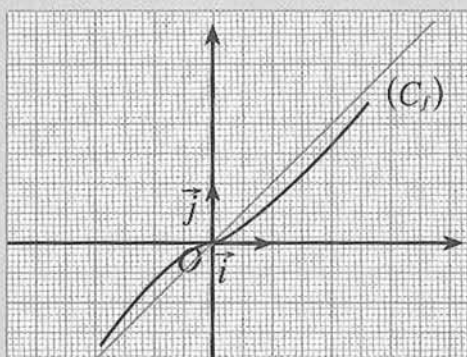
comme $\frac{x^3}{1+x^2} < f(x)$, d'après la déduction, et $x \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) > 0$

alors : $\frac{1}{x} - \left(f(x) - \frac{x^3}{1+x^2}\right) + x \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ C'est-à-dire : $f'(x) > 0$

Donc : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) > 0$

Par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

7) La courbe (C_f) :



8) a) Montrons que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$:

La fonction $u \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, donc la fonction $\operatorname{Arc} \tan$ ou est continue sur les deux intervalles $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

Donc la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de deux fonctions continues qui sont $\operatorname{Arc} \tan$ ou et $x \mapsto x^2$.

Et comme f est continue en 0 alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

En plus la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, par suite elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= \mathbb{R}$

b) Montrons que f^{-1} est dérivable en $\frac{\pi}{4}$ et calculons $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{4}\right)$:

La fonction f est dérivable en 1 et $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{2}{\pi - 1}$

9) a) Montrons que $(\exists ! a_n \in]0; +\infty[) ; f(a_n) = \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^*$:

La fonction f réalise une bijection de l'intervalle $]0; +\infty[$ sur $]0; +\infty[$.

Puisque $\frac{1}{n} \in]0; +\infty[$, alors l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une et une seule

solution a_n dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! a_n \in]0; +\infty[) ; f(a_n) = \frac{1}{n}$

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; a_n < 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on a : $f(1) = \frac{\pi}{4}$

comme $n \geq 2$; c'est-à-dire : $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$ alors $\frac{1}{n} < \frac{\pi}{4}$,

donc : $f(a_n) < f(1)$

Par suite : $f(a_n) < f(1) \Rightarrow a_n < 1$; car f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Ainsi : $(\forall n \geq 2) ; a_n < 1$

c) Montrons que la suite (a_n) est décroissante :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $f(a_n) = \frac{1}{n}$ et $f(a_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$

Or $n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, il s'ensuit que : $f(a_{n+1}) < f(a_n)$

Comme la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Alors : $a_{n+1} \leq a_n$

Conclusion : La suite (a_n) est décroissante.

d) Montrons que (a_n) est convergente et déterminons sa limite:

La suite (a_n) est décroissante et minorée par 0, alors elle est convergente.

On pose : $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ où $\ell \in \mathbb{R}$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < a_n < 1$ alors : $\ell \in [0; 1]$

comme $a_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ alors : $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = f^{-1}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}\right) = f^{-1}(0) = 0$

Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Exercice 40

1) a) Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} :

• La fonction $u : x \rightarrow 1 - \sin x$ est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc la fonction $f = 2\left(\frac{1}{u} - 1\right)$ est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

• La fonction f est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et que :

$$(\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]) ; f'(x) = 2 \left(\frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2} \right)$$

Il s'ensuit que : $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}[$.

comme la fonction f est continue et strictement croissante sur

l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}[$ alors elle est bijective de $[0; \frac{\pi}{2}[$

$$\text{sur } f\left([0; \frac{\pi}{2}[\right) = \left[f(0); \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \right[= [0; +\infty[$$

Par conséquent f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0; +\infty[$.

b) Déterminons $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(2)$:

• comme $f(0) = 0$ alors : $f^{-1}(0) = 0$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Soit } \alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[\text{ tel que : } f^{-1}(2) = \alpha, \text{ on a : } f^{-1}(2) = \alpha &\Leftrightarrow f(\alpha) = 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1 - \sin \alpha} = 2 \\ &\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } f^{-1}(2) = \frac{\pi}{6}$$

$$2) a) \bullet \text{ Montrons que : } (\forall x \in [0; +\infty[) ; 1 - \sin(f^{-1}(x)) = \frac{2}{x+2}$$

Soit $x \in [0; +\infty[$, on a : $f^{-1}(x) \in [0; \frac{\pi}{2}[$ donc :

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= 2 \left(\frac{1}{1 - \sin(f^{-1}(x))} - 1 \right) \Leftrightarrow x = \frac{2}{1 - \sin(f^{-1}(x))} - 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{1 - \sin(f^{-1}(x))} = x + 2 \\ &\Leftrightarrow 1 - \sin(f^{-1}(x)) = \frac{2}{x+2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in [0; +\infty[) ; 1 - \sin(f^{-1}(x)) = \frac{2}{x+2}$$

$$\bullet \text{ Montrons que } (\forall x \in [0; +\infty[) ; \cos(f^{-1}(x)) = \frac{2\sqrt{1+x}}{2+x} :$$

$$\text{Soit } x \in [0; +\infty[, \text{ on a : } \cos^2(f^{-1}(x)) = 1 - \sin^2(f^{-1}(x))$$

$$\text{C'est-à-dire : } \cos(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(f^{-1}(x))}, \text{ car } f^{-1}(x) \in [0; \frac{\pi}{2}[$$

$$\begin{aligned}\text{Or } 1 - \sin^2(f^{-1}(x)) &= (1 - \sin(f^{-1}(x)))(1 + \sin(f^{-1}(x))) \\ &= \left(\frac{2}{2+x}\right)\left(1 + 1 - \frac{2}{2+x}\right) = \frac{4(1+x)}{(2+x)^2}\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \cos(f^{-1}(x)) = \frac{2\sqrt{1+x}}{2+x}$$

$$\text{Ainsi : } (\forall x \in [0; +\infty[) ; \cos(f^{-1}(x)) = \frac{2\sqrt{1+x}}{x+2}$$

b) Montrons que la fonction f^{-1} est dérivable sur $[0; +\infty[$:

La fonction f est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ telle que : $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, donc la fonction f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right[\right) = [0; +\infty[$

c) Montrons que $(\forall x \in [0; +\infty[) ; (f^{-1})'(x) = \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$:

$$\text{On a : } (\forall x \in [0; +\infty[) ; (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Soit $x \in [0; +\infty[$, on a :

$$f'(f^{-1}(x)) = \frac{2\cos(f^{-1}(x))}{(1 - \sin(f^{-1}(x)))^2} = \frac{4\sqrt{1+x}}{2+x} \times \left(\frac{2+x}{2}\right)^2 = (2+x)\sqrt{1+x}$$

$$\text{Donc : } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$$

$$\text{Ainsi : } (\forall x \in [0; +\infty[) ; (f^{-1})'(x) = \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$$

d) Montrons que $(\forall x \in [0; +\infty[) ; 0 < (f^{-1})'(x) \leq \frac{1}{2}$:

Soit $x \in [0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(x) > 0 \text{ et } 0 \leq x &\Rightarrow 2 \leq x+2 \text{ et } \sqrt{x+1} \geq 1 \\ &\Rightarrow (x+2)\sqrt{1+x} \geq 2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

C'est-à-dire : $(f^{-1})'(x) \leq \frac{1}{2}$, donc : $0 < (f^{-1})'(x) \leq \frac{1}{2}$

$$\text{Ainsi : } (\forall x \in [0; +\infty[) ; 0 < (f^{-1})'(x) \leq \frac{1}{2}$$

3) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 2$

• Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 2$ donc : $0 \leq u_0 \leq 2$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leq u_n \leq 2$ et montrons que : $0 \leq u_{n+1} \leq 2$

La fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ alors la fonction réciproque f^{-1} est aussi strictement croissante sur $[0; +\infty[$, par suite on

$$a: 0 \leq u_n \leq 2 \implies f^{-1}(0) \leq f^{-1}(u_n) \leq f^{-1}(2)$$

$$\implies 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{\pi}{6}$$

$$\implies 0 \leq u_{n+1} \leq 2$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 2 \implies 0 \leq u_{n+1} \leq 2$

• **Conclusion** : d'après le principe de la récurrence on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 2$$

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

La fonction f^{-1} est continue sur $[0; 2]$ et dérivable sur $]0; 2[$ telle que :

$$(\forall x \in]0; 2[) ; 0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$$

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis : (TAF) on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0(u_n - 0) < f^{-1}(u_n) - f^{-1}(0) \leq \frac{1}{2}(u_n - 0)$$

$$\text{Ainsi : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$$

c) Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$:

• Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 2$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ donc : $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{0-1}$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ et montrons que :

$$0 < u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On a d'après la question précédente : $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

et comme : $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \implies 0 < \frac{1}{2} u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ alors : $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc : $0 < u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

d) Dédution :

On a : $-1 < \frac{1}{2} < 1$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

Et comme : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

On conclut, d'après les critères de convergence, que la suite (u_n) est convergente et de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

4) a) Montrons que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \left(\exists c_n \in \left] u_n + \frac{1}{n}; u_n + \frac{2}{n} \right[\right); v_n = \frac{1}{(2 + c_n)\sqrt{1 + c_n}}$$

Soit n un entier naturel non nul, on a : $0 \leq u_n + \frac{1}{n} < u_n + \frac{2}{n} \leq 2$

C'est-à-dire : $\left] u_n + \frac{1}{n}; u_n + \frac{2}{n} \right[\subset [1; 2]$

La fonction f^{-1} est continue sur $\left] u_n + \frac{1}{n}; u_n + \frac{2}{n} \right[$ et dérivable sur $\left] u_n + \frac{1}{n}; u_n + \frac{2}{n} \right[$

donc, d'après le théorème des accroissements finis, on a :

$$\left(\exists c_n \in \left] u_n + \frac{1}{n}; u_n + \frac{2}{n} \right[\right); f^{-1}\left(u_n + \frac{2}{n}\right) - f^{-1}\left(u_n + \frac{1}{n}\right) = \left(u_n + \frac{2}{n} - u_n - \frac{1}{n}\right)(f^{-1})'(c_n)$$

C'est-à-dire : $\left(\exists c_n \in \left] u_n + \frac{1}{n}; u_n + \frac{2}{n} \right[\right); \left(\frac{v_n}{n} = \frac{1}{n}(f^{-1})'(c_n) \right)$

$$\text{Or } (f^{-1})'(c_n) = \frac{1}{(2 + c_n)\sqrt{1 + c_n}}$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^*); \left(\exists c_n \in \left] u_n + \frac{1}{n}; u_n + \frac{2}{n} \right[\right); v_n = \frac{1}{(2 + c_n)\sqrt{1 + c_n}}$$

b) • Montrons $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$ et calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$:

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n + \frac{1}{n} < c_n < u_n + \frac{2}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \frac{2}{n} = 0$;

d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0 \text{ puis que : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$$

Exercice 41

1) a) Montrons que la fonction f est continue sur $]-\infty; 1]$:

• La fonction $u: x \mapsto \sqrt{1-x}$ est continue sur $]-\infty; 1[$ donc la fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(u(x))$ est continue sur $]-\infty; 1[$, et on a : $u(x) \neq 0$ pour tout x de $]-\infty; 1[$. Il s'ensuit que la fonction $f = \frac{\text{Arc tan } u}{u}$ est continue sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.

• Soit $x \in]-\infty; 1[$, on pose $t = \sqrt{1-x}$ donc : $x \rightarrow 1^- \iff t \rightarrow 0^+$

$$\text{Par suite : } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\text{Arc tan}(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan } t}{t} = 1$$

C'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ signifie que f est continue à gauche en 1.

Finalement la fonction f est continue sur l'intervalle $]-\infty; 1]$.

b) • Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \text{Arc tan } X = \frac{\pi}{2}$,

donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arc tan } \sqrt{1-x} = \frac{\pi}{2}$

Par suite : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\text{Arc tan}(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}} = 0$; c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

• **Interprétation graphique :**

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe ($\mathcal{C}$) au voisinage de $-\infty$.

2) a) • Montrons que la fonction φ_a est continue sur $[a; 1]$:

Les fonctions $u: x \mapsto \sqrt{1-x}$ est continue sur $[a; 1]$, car $[a; 1]$ est inclus dans $]-\infty; 1]$, donc la fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(u(x))$ est continue sur $[a; 1]$.

Par conséquent la fonction :

$\varphi_a: x \mapsto (\text{Arc tan}(\sqrt{1-a}) - \sqrt{1-a}) \times u^3 - (\text{Arc tan } ou - u) \times (\sqrt{1-a})^3$ est continue sur l'intervalle $[a; 1]$.

• Montrons que la fonction φ_a est dérivable sur $]a; 1[$.

la fonction $u: x \mapsto \sqrt{1-x}$ est dérivable sur $]-\infty; 1[$ en particulier sur l'intervalle $]a; 1[$.

Par conséquent la fonction :

$\varphi_a: x \mapsto (\text{Arc tan}(\sqrt{1-a}) - \sqrt{1-a}) \times u^3 - (\text{Arc tan } ou - u) \times (\sqrt{1-a})^3$ est dérivable sur l'intervalle $]a; 1[$

b) • Calculons $\varphi_a(1)$ et $\varphi_a(a)$:

On a :

$$\varphi_a(1) = (\text{Arc tan}(\sqrt{1-a}) - \sqrt{1-a}) \times 0 - (\text{Arc tan}(0) - 0) \times (\sqrt{1-a})^3 = 0$$

Et

$$\varphi_a(a) = (\text{Arc tan}(\sqrt{1-a}) - \sqrt{1-a}) \times (\sqrt{1-a})^3 - (\text{Arc tan}(\sqrt{1-a}) - \sqrt{1-a}) \times (\sqrt{1-a})^3 = 0$$

C'est-à-dire : $\varphi_a(1) = \varphi_a(a) = 0$

• Montrons que : $(\exists c \in]a; 1[); \frac{\text{Arc tan}(\sqrt{1-a}) - \sqrt{1-a}}{(\sqrt{1-a})^3} = \frac{1}{3(c-2)}$

la fonction φ_a est continue sur $[a; 1]$, dérivable sur $]a; 1[$ et telle que $\varphi_a(1) = \varphi_a(a) = 0$, d'après le théorème de Rolle on a :

$$(\exists c \in]a; 1[); \varphi'(c) = 0$$

Or : pour tout réel x de $]a; 1[$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi_a'(x) &= \frac{-3(\sqrt{1-x})^2}{2\sqrt{1-x}} (\text{Arc tan}(\sqrt{1-a}) - \sqrt{1-a}) - \left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}(1+(\sqrt{1-x})^2)} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \right) \times (\sqrt{1-a})^3 \\ &= -\frac{3}{2}\sqrt{1-x} \times (\text{Arc tan}(\sqrt{1-a}) - \sqrt{1-a}) - \left(\frac{-1}{2(2-x)\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \right) \times (\sqrt{1-a})^3 \\ &= -\frac{3}{2}\sqrt{1-x} \times (\text{Arc tan}(\sqrt{1-a}) - \sqrt{1-a}) - \left(\frac{\sqrt{1-x}}{2(2-x)} \right) \times (\sqrt{1-a})^3\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\varphi_a(c) = 0 &\Leftrightarrow \frac{3}{2}\sqrt{1-c} (\text{Arc tan}(\sqrt{1-a}) - \sqrt{1-a}) = \frac{\sqrt{1-c}}{2(c-2)} \times (\sqrt{1-a})^3 \\ &\Leftrightarrow \frac{\text{Arc tan}(\sqrt{1-a}) - \sqrt{1-a}}{(\sqrt{1-a})^3} = \frac{1}{3(c-2)}\end{aligned}$$

Ainsi : $(\exists c \in]a; 1[); \frac{\text{Arc tan}(\sqrt{1-a}) - \sqrt{1-a}}{(\sqrt{1-a})^3} = \frac{1}{3(c-2)}$

c) Dédution :

$$\begin{aligned}\text{Soit } x \in]-\infty; 1[, \text{ on a : } \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{1}{x - 1} \left(\frac{\text{Arc tan}(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{x - 1} \left(\frac{\text{Arc tan}(\sqrt{1-x}) - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} \right) \\ &= - \left(\frac{\text{Arc tan}(\sqrt{1-x}) - \sqrt{1-x}}{(\sqrt{1-x})^3} \right)\end{aligned}$$

D'après la question précédente on a :

$$(\exists c \in]x; 1[); \frac{\text{Arc tan}(\sqrt{1-x}) - \sqrt{1-x}}{(\sqrt{1-x})^3} = \frac{1}{3(c-2)}$$

C'est-à-dire : $(\exists c \in]x; 1[); \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1}{3(c-2)}$

Puisque : $x < c < 1 \Leftrightarrow x - 2 < c - 2 < -1$

$$\Leftrightarrow 3(x-2) < 3(c-2) < -3$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} < \frac{1}{3(c-2)} < \frac{1}{3(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3(2-x)} < \frac{-1}{3(c-2)} < \frac{1}{3}$$

Alors : $\frac{1}{3(2-x)} < \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} < \frac{1}{3}$

Ainsi : $(\forall x \in]-\infty; 1[); \frac{1}{3(2-x)} < \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} < \frac{1}{3}$

d) Montrons la fonction f est dérivable à gauche en 1:

$$\text{On a : } (\forall x < 1); \frac{1}{3(2-x)} < \frac{f(x)-f(1)}{x-1} < \frac{1}{3}. \text{ Et } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{3(2-x)} = \frac{1}{3}$$

Donc, d'après le théorème de la limite par encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{3}$$

D'où la fonction f est dérivable à gauche en 1 et $f'_s(1) = \frac{1}{3}$

• **Interprétation géométrique :**

La courbe représentative de f admet une demi-tangente à gauche en son

$$\text{point d'abscisse 1 dont une équation est : } \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ x \leq 1 \end{cases}$$

3) a) Montrons que f est dérivable sur $]-\infty; 1[$:

On a la fonction $u: x \mapsto \sqrt{1-x}$ est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et $\sqrt{1-x} \neq 0$ pour tout $x \in]-\infty; 1[$, donc la fonction $f = \frac{\text{Arc tan } u}{u}$ est dérivable sur $]-\infty; 1[$.

et comme f est dérivable à gauche en 1,

on conclut donc que la fonction f est dérivable sur $]-\infty; 1[$.

• Montrons que : $(\forall x < 1); f'(x) = \frac{1}{2(1-x)} \left(f(x) - \frac{1}{2-x} \right)$

Soit un élément de $]-\infty; 1[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2} u(x) - \text{Arc tan}(u(x)) u'(x)}{(u(x))^2} \\ &= \frac{1}{1-x} \left(\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{2-x} \times \sqrt{1-x} - \text{Arc tan}(\sqrt{1-x}) \times \left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{1-x} \left(\frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2(2-x)} \right) \\ &= \frac{1}{2(1-x)} \left(f(x) - \frac{1}{2-x} \right) \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } (\forall x \in]-\infty; 1[); f'(x) = \frac{1}{2(1-x)} \left(f(x) - \frac{1}{2-x} \right)$$

b) Montrons que $(\forall x > 0); \frac{x}{1+x^2} < \text{Arc tan } x < x$:

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : la fonction Arc tan est continue sur $[0; x]$ et est dérivable sur $]0; x[$, donc d'après TAF

$$(\exists c \in]0; x[); \operatorname{Arc} \tan(x) - \operatorname{Arc} \tan(0) = (x - 0)(\operatorname{Arc} \tan)'(c)$$

$$\text{C'est-à-dire : } (\exists c \in]0; x[); \operatorname{Arc} \tan(x) = \frac{x}{1+c^2}$$

$$\text{Or } 0 < c < x \Rightarrow 1 < 1+c^2 < 1+x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1$$

$$\text{Alors : } \frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c^2} < x$$

$$\text{Donc : } \frac{x}{1+x^2} < \operatorname{Arc} \tan x < x$$

$$\text{Ainsi : } (\forall x > 0); \frac{x}{1+x^2} < \operatorname{Arc} \tan x < x$$

c) Dédution :

• Déterminons le signe de $f'(x)$ où $x < 1$:

$$\text{Soit } x \in]-\infty; 1[; \text{ on a : } \sqrt{1-x} \in]0; +\infty[$$

$$\text{donc : } \frac{\sqrt{1-x}}{2-x} < \operatorname{Arc} \tan(\sqrt{1-x}) < \sqrt{1-x}$$

d'après la double inégalité précédente

$$\text{Donc : } \frac{1}{2-x} < \frac{\operatorname{Arc} \tan(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}} < 1$$

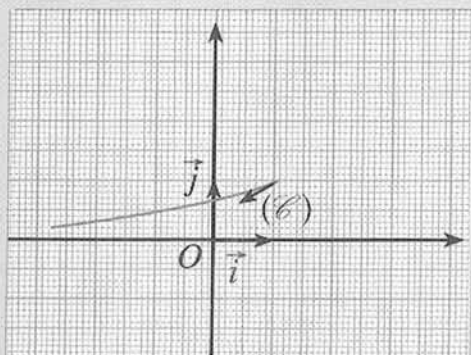
$$\text{Il en résulte que : } \frac{1}{2-x} < f(x) \text{ c'est-à-dire : } f(x) - \frac{1}{2-x} > 0$$

$$\text{Par suite : } \frac{1}{2(1-x)} \left(f(x) - \frac{1}{2-x} \right) > 0$$

$$\text{C'est-à-dire : } f'(x) > 0 \text{ pour tout } x < 1$$

On conclut donc que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty; 1]$.

d) La courbe $(\mathcal{C})$:



4) a) Montrons que : $(\forall x \in]-\infty; 1[); f'(x) < \frac{1}{2(2-x)}$

Soit $x \in]-\infty; 1[$; on a : $f(x) < 1 \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2-x} < 1 - \frac{1}{2-x}$

$$\Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2-x} < \frac{1-x}{2-x}$$

comme $1-x > 0$ alors : $\frac{1}{2(1-x)} \left(f(x) - \frac{1}{2-x} \right) < \frac{1}{2(2-x)}$

C'est-à-dire : $f'(x) < \frac{1}{2(2-x)}$

Ainsi : $(\forall x < 1); f'(x) < \frac{1}{2(2-x)}$

b) Dédution :

Soit $x \in]-\infty; 1[$; on a : $f'(x) > 0$

donc : $|f'(x)| - \frac{1}{2} = f'(x) - \frac{1}{2}$

Or $f'(x) < \frac{1}{2(2-x)} \Leftrightarrow f'(x) - \frac{1}{2} < \frac{1}{2(2-x)} - \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow f'(x) - \frac{1}{2} < \frac{x-1}{2(2-x)}$$

Comme $\frac{x-1}{2(2-x)} < 0$ alors : $f'(x) - \frac{1}{2} < 0$

Donc : $|f'(x)| < \frac{1}{2}$

Ainsi : $(\forall x \in]-\infty; 1[); |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c) Montrons que $(\forall (x,y) \in]-\infty; 1[); |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$:

La fonction f est dérivable sur $]-\infty; 1[$

et que $(\forall x \in]-\infty; 1[); |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

Il résulte de l'inégalité des accroissements finis que :

$$(\forall (x,y) \in (]-\infty; 1[))^2; |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$$

Résumé

Soit n_0 un entier naturel et $I \subset \mathbb{N}$ avec $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$

I

Suite majorée ; suite minorée ; suite bornée.

Définitions:

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique définie sur I

- La suite $(u_n)_{n \in I}$ est majorée si et seulement s'il existe un réel M tel que:

$$(\forall n \in I) ; u_n \leq M$$

- La suite $(u_n)_{n \in I}$ est minorée si et seulement s'il existe un réel m tel que:

$$(\forall n \in I) ; u_n \geq m$$

- La suite $(u_n)_{n \in I}$ est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

II

Sens de variations d'une suite

Propriétés:

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite définie sur I

• $(u_n)_{n \in I}$ est une suite croissante si et seulement si: $(\forall n \in I) ; u_{n+1} \geq u_n$

• $(u_n)_{n \in I}$ est une suite strictement croissante si et seulement si:

$$(\forall n \in I) ; u_{n+1} > u_n$$

• $(u_n)_{n \in I}$ est une suite décroissante si et seulement si: $(\forall n \in I) ; u_{n+1} \leq u_n$

• $(u_n)_{n \in I}$ est une suite strictement décroissante si et seulement si,

$$(\forall n \in I) ; u_{n+1} < u_n$$

• $(u_n)_{n \in I}$ est une suite constante si et seulement si: $(\forall n \in I) ; u_{n+1} = u_n$

Remarque:

• Toute suite croissante est minorée par son premier terme.

• Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.



Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
$(\forall n \in I) ; u_{n+1} = u_n + r$	$(\forall n \in I) ; u_{n+1} = qu_n$
$u_n = u_0 + nr$; cas où: $I = \mathbb{N}$	$u_n = q^n u_0$; cas où: $I = \mathbb{N}$ et $q \neq 0$
$u_n = u_p + (n-p)r$; n et p de I	$u_n = q^{n-p} u_p$; n et p de I et $q \neq 0$
Somme des termes consécutifs	Somme des termes consécutifs
$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$ $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \left(\frac{n-p+1}{2}\right)(u_p + u_n)$ $S_n = \left(\text{nombre de termes}\right) \times \left(\frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}\right)$ - Cas particulier: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$	$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$ $S_n = \left(\frac{1^{\text{er}} \text{ terme de la somme}}{\text{la somme}}\right) \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$ avec $q \neq 1$ Cas particulier: $1 + q + q + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ où $q \neq 1$

Exercices d'application

Exercice 1

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = 3u_n - 1 \end{cases}$

On pose pour tout n de $\mathbb{N}$ $a_n = u_n - \frac{1}{2}$

1) Montrer que (a_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

2) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 2

Soit (v_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} v_0 = \frac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_{n+1} = -\frac{4v_n + 1}{4v_n} \end{cases}$

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n \neq -\frac{1}{2}$.

2) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $b_n = \frac{2}{2v_n + 1}$

a) Montrer que (b_n) est une suite arithmétique, dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n .

Exercice 3

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n < 1$

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n) .

2) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique, puis exprimer v_n en fonction de n

b) En déduire u_n en fonction de n

Exercice 4

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par:

$u_1 = 1 ; v_1 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} = 2v_n$ et $v_{n+1} = u_n + v_n$

1) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose: $d_n = u_n - v_n$

Calculer d_{n+1} en fonction de d_n , en déduire d_n en fonction de n

2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$

3) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $x_n = u_{n+1} + u_n$ et $y_n = u_{n+1} - 2u_n$

a) Montrer que (x_n) et (y_n) sont deux suites géométriques, puis exprimer u_n en fonction de n

b) Exprimer v_n en fonction de n

Exercice 5

Soit (u_n) la suite numérique définie par son premier terme u_1 et par la relation de récurrence suivante: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; (n+2)u_{n+1} = nu_n + 1 - n$ (E)

1) a) Calculer u_2 et u_3 en fonction de u_1

b) On pose $\alpha_n = an + b$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ où a et b sont deux réels.

Déterminer a et b sachant que la suite $(\alpha_n)_n$ vérifie la relation (E).

2) Soit (x_n) la suite numérique définie par: $x_n = u_n - \alpha_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, avec $u_1 = 1$ avec (α_n) vérifiant (α_n)

a) Montrer que $x_{n+1} = \frac{n}{n+2}x_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

b) Exprimer x_n puis u_n en fonction de n

c) Calculer les sommes: $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ et $T_n = \sum_{k=1}^n u_k$ en fonction de n .

Solutions**Exercice 1**

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a: $a_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}$

$$= 3u_n - 1 - \frac{1}{2}$$

$$= 3u_n - \frac{3}{2}$$

$$= 3\left(u_n - \frac{1}{2}\right) = 3a_n$$

donc: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_{n+1} = 3a_n$

Par conséquent (a_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $a_0 = \frac{1}{2}$

2) Exprimons u_n en fonction de n :

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n = a_0 q^n = \frac{1}{2} 3^n$ (car (a_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $\frac{1}{2}$)

par suite: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = a_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3^n + 1)$

Exercice 2

1) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n \neq -\frac{1}{2}$

• Initialisation: pour $n = 0$; on a: $v_0 = \frac{1}{2}$ donc: $v_0 \neq -\frac{1}{2}$

• Hérédité: Soit n un élément de $\mathbb{N}$

Supposons que: $v_n \neq -\frac{1}{2}$ et montrons que $v_{n+1} \neq -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{On a: } v_{n+1} + \frac{1}{2} &= \frac{-4v_n - 1}{4v_n} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{-4v_n - 1 + 2v_n}{4v_n} \end{aligned}$$

$$\text{c'est à dire: } v_{n+1} + \frac{1}{2} = \frac{-2v_n - 1}{4v_n} = \frac{-(2v_n + 1)}{4v_n}$$

et puisque $v_n \neq -\frac{1}{2}$ (d'après l'hypothèse de récurrence), alors $v_n + \frac{1}{2} \neq 0$

c'est à dire $2v_n + 1 \neq 0$ donc $v_{n+1} + \frac{1}{2} \neq 0$, d'où $v_{n+1} \neq -\frac{1}{2}$

Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n \neq -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 2) \text{ a) Soit } n \in \mathbb{N} ; \text{ on a: } b_{n+1} - b_n &= \frac{2}{2v_{n+1} + 1} - \frac{2}{2v_n + 1} \\ &= 2 \left(\frac{2v_n}{-(2v_n + 1)} - \frac{1}{2v_n + 1} \right) \\ &= 2 \left(\frac{-2v_n - 1}{2v_n + 1} \right) = -2 \end{aligned}$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}) ; b_{n+1} = b_n - 2$

c'est-à-dire (b_n) est une suite arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $b_0 = 1$

b) • On a: (b_n) est une suite arithmétique, donc $b_n = b_0 + nr$

et puisque $b_0 = 1$ et $r = -2$; alors ; $(\forall n \in \mathbb{N}) ; b_n = 1 - 2n$

$$\begin{aligned} \text{et pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a: } b_n &= \frac{2}{2v_n + 1} \Leftrightarrow 2v_n + 1 = \frac{2}{b_n} \\ &\Leftrightarrow 2v_n = \frac{2}{b_n} - 1 \\ &\Leftrightarrow v_n = \frac{1}{b_n} - \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow v_n = \frac{1}{1 - 2n} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

donc: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \frac{1 + 2n}{2 - 4n}$.

Exercice 3

1) a) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n < 1$

• Initialisation: pour $n = 0$; on a: $0 \leq u_0 < 1$ car $u_0 = 0$

• Hérédité: soit $n \in \mathbb{N}$:

Supposons que $0 \leq u_n < 1$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} < 1$

$$\begin{aligned} \text{- On a: } u_n \geq 0 &\Rightarrow \begin{cases} 2u_n + 1 \geq 0 \\ u_n + 2 > 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \geq 0 \\ &\Rightarrow u_{n+1} \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{- d'autre part: } 1 - u_{n+1} = 1 - \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} = \frac{1 - u_n}{u_n + 2}$$

et puisque $1 - u_n > 0$ (d'après l'hypothèse de récurrence) et $u_n + 2 > 0$

alors $1 - u_{n+1} > 0$ c'est à dire $u_{n+1} < 1$ (2)

de (1) et (2) on déduit que: $0 \leq u_{n+1} < 1$

• Conclusion: d'après le principe de récurrence ; $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n < 1$

b) Étudions la monotonie de (u_n) : Soit $n \in \mathbb{N}$; on a:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{1 - u_n^2}{u_n + 2} = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{u_n + 2}$$

et puisque $0 \leq u_n < 1$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} > u_n$ c'est-à-dire la suite (u_n) est strictement croissante

2) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \in \mathbb{N} ; \text{ on a: } v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1}{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} + 1} = \frac{u_n - 1}{3u_n + 3} = \frac{1}{3} \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 1} \right) = \frac{1}{3} v_n \\ \text{d'où: } (\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} &= \frac{1}{3} v_n \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$, et de premier terme $v_0 = -1$ ainsi: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = v_0 \left(\frac{1}{3} \right)^n = -\left(\frac{1}{3} \right)^n$

b) Écrivons u_n en fonction de n :

$$\begin{aligned}
 v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} &\Leftrightarrow (u_n + 1)v_n = u_n - 1 \\
 &\Leftrightarrow u_n \cdot v_n - u_n = -1 - v_n \\
 &\Leftrightarrow u_n = \frac{v_n + 1}{1 - v_n} \\
 &\Leftrightarrow u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{3^n - 1}{3^n + 1}
 \end{aligned}$$

finalement : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{3^n - 1}{3^n + 1}$

Exercice 4

1) Calculons d_{n+1} en fonction de d_n

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } n \in \mathbb{N}^* ; \text{ on a : } d_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} \\
 &= 2v_n - u_n - v_n \\
 &= v_n - u_n \\
 &= -d_n
 \end{aligned}$$

donc (d_n) est une suite géométrique de raison $q = -1$ et de premier terme $d_1 = 1$ d'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*) d_n = d_1(-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$

2) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^* ; \text{ on a : } u_{n+2} = 2v_{n+1} = 2(u_n + v_n) = 2u_n + 2v_n = 2u_n + u_{n+1}$$

3) a) • Montrons que la suite (x_n) est géométrique

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } n \in \mathbb{N}^* , \text{ on a : } x_{n+1} &= u_{n+1} + u_{n+2} = u_{n+1} + u_{n+1} + 2u_n \\
 &= 2(u_{n+1} + u_n) = 2x_n
 \end{aligned}$$

donc (x_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $x_1 = 1$

• Montrons que (y_n) est une suite géométrique

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } n \in \mathbb{N}^* ; \text{ on a : } y_{n+1} &= u_{n+2} - 2u_{n+1} \\
 &= u_{n+1} + 2u_n - 2u_{n+1} = -(u_{n+1} - 2u_n) = -y_n
 \end{aligned}$$

donc (y_n) est une suite géométrique de raison -1 et de premier terme $y_1 = -2$

Déduction: on a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; x_n = (2)^{n-1}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) y_n = 2(-1)^n$

$$\text{or } \begin{cases} x_n = u_{n+1} + u_n \\ y_n = u_{n+1} - 2u_n \end{cases} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*$$

$$\text{donc } u_n = \frac{x_n - y_n}{3} \quad \text{d'où } u_n = \frac{(2)^{n-1} - 2(-1)^n}{3}$$

b) Écrivons v_n en fonction de n : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $v_n = \frac{1}{2} u_{n+1}$

$$\text{Donc: } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = \frac{(2)^n - 2(-1)^{n+1}}{6}$$

Exercice 5

1) a) On a: $u_2 = \frac{1}{3} u_1$ et $u_3 = \frac{1}{2} u_2 - \frac{1}{4}$ car: $4u_3 = 2u_2 - 1$

$$\text{donc: } u_3 = \frac{1}{6} u_1 - \frac{1}{4}$$

b) On a: La suite $(\alpha_n)_n$ vérifie la relation (E) signifie que:

$$(n+2)\alpha_{n+1} = n\alpha_n + 1 - n \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*$$

$$\text{Signifie que: } (\forall n \in \mathbb{N}^*); (n+2)(an + a + b) = n(an + b) + 1 - n$$

$$\text{Signifie que: } (\forall n \in \mathbb{N}^*) an^2 + an + bn + 2an + 2a + 2b = an^2 + bn + 1 - n$$

$$\text{Signifie que: } (\forall n \in \mathbb{N}^*) (3a + 1)n + 2a + 2b - 1 = 0$$

$$\text{donc: } \begin{cases} 3a + 1 = 0 \\ 2a + 2b = 1 \end{cases} \quad \text{c'est à dire: } a = -\frac{1}{3} \text{ et } b = \frac{5}{6}.$$

$$\text{D'où la suite } (\alpha_n)_n \text{ vérifie (E) lorsque: } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n = -\frac{1}{3}n + \frac{5}{6}$$

2) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); x_{n+1} = \frac{n}{n+2} x_n$

$$\text{on a: } (\forall n \in \mathbb{N}^*) (n+2)\alpha_{n+1} = n\alpha_n + 1 - n \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}^*) (n+2)u_{n+1} = nu_n + 1 - n$$

$$\text{Donc: } (\forall n \in \mathbb{N}^*) (n+2)(u_{n+1} - \alpha_{n+1}) = n(u_n - \alpha_n) \text{ (car } (u_n) \text{ et } (\alpha_n) \text{ vérifient (E))}.$$

$$\text{d'où } (\forall n \in \mathbb{N}^*) (n+2)x_{n+1} = nx_n$$

$$\text{c'est à dire } (\forall n \in \mathbb{N}^*) x_{n+1} = \frac{n}{n+2} x_n$$

b) D'après la question précédente on a: $x_2 = \frac{1}{3} x_1$

$$x_3 = \frac{2}{4} x_2$$

$$x_4 = \frac{3}{5} x_3$$

⋮

$$x_n = \frac{n-1}{n+1} x_{n-1}$$

En multipliant membre à membre les égalités précédentes, et après simplification, on obtient :

$$x_n = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)}{3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (n+1)} x_1 = \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Et puisque $u_n = x_n + \alpha_n$ et (α_n) vérifie (E), alors $\alpha_n = -\frac{1}{3}n + \frac{5}{6}$

et $u_n = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{3}n + \frac{5}{6}$

c) Calculons S_n et T_n

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Donc : $S_n = \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$
 $= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; S_n = \frac{n}{n+1}$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $T_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n x_k + \alpha_k = \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n \alpha_k$
 $= S_n + \sum_{k=1}^n -\frac{1}{3}k + \frac{5}{6} = S_n - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n \frac{5}{6}$
 $= S_n - \frac{1}{3} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{5}{6}n$
 $= S_n - \frac{n(4-n)}{6} = \frac{n}{n+1} - \frac{n(4-n)}{6}$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; T_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n(4-n)}{6}$



Limites usuelles

Pour tout p de $\mathbb{N}^*$; on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$ • $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^p} = +\infty$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ • $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^p}} = 0$

• Si : $\alpha \in \mathbb{Q}^{*+}$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$ • Si : $\alpha \in \mathbb{Q}^{*-}$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$

Soit q un réel.

• Si $q > 1$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

• Si $q = 1$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$

• Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

Si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) n'admet pas de limite

V Convergence d'une suite

Soit $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ avec n_0 un entier naturel.

Définition:

- On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est une suite convergente si elle admet une limite l , et on écrit: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$
- Toute suite non convergente est dite divergente

VI Critères de convergence d'une suite

1) Critères de convergence d'une suite:

- Si $(\forall n \geq n_0) ; |u_n - \ell| \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in I}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.
- Si: $(\forall n \geq n_0) ; w_n \leq u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$, alors la suite $(u_n)_{n \in I}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$
- Si $(\forall n \geq n_0) ; v_n \leq u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors: (u_n) est une suite divergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- Si $(\forall n \geq n_0) ; u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors: (u_n) est une suite divergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

2) Propriétés:

Propriété 1: • Toute suite croissante et majorée est convergente.

- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Propriété 2: Si $\begin{cases} (\exists k \in \mathbb{N}) ; (\forall n \geq k) ; u_n \geq 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \end{cases}$ alors $\ell \geq 0$

Propriété 3: Si $\begin{cases} (\exists k \in \mathbb{N}) ; \forall n \geq k, u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell' \end{cases}$ alors $\ell \leq \ell'$

Propriété 4: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$

Exercices d'application

Exercice 6

1) On considère la suite numérique (v_n) telle que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$$

a) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que:

$$(\forall p \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1} + \frac{c}{p+2}$$

b) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+4}$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

2) On considère la suite numérique (w_n) définie par:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; w_n = \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} \right)$$

a) Déterminer w_n en fonction de n . Remarquer:

$$\frac{1}{\sqrt{p-1}+\sqrt{p}} = \sqrt{p} - \sqrt{p-1}$$

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$

Exercice 7

Déterminer dans chacun des cas suivant, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

1) $u_n = \frac{\cos n}{n}$

2) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

3) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

4) $u_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}$

5) $u_n = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^n k^2$

6) $u_n = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n E(kx)$

Exercice 8

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = u_n + \alpha^n \end{cases}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Étudier la convergence de la suite (u_n) .

Exercice 9

Soit (u_n) une suite d'entiers naturels telle que (u_n) est strictement croissante

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq n$

2) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 10

1) Montrons que: $(\forall x \in \mathbb{R}^+); \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) - \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{1+x}\right)$

2) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$, et on considère la suite numérique (S_n) définie par: $(\forall n \in \mathbb{N}^+); S_n = \sum_{k=1}^n u_k$

a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

b) Déterminer S_n en fonction de n , puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 11

Soit (u_n) la suite numérique définie par:
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} \end{cases}$$

1) a) Montrons que la suite (u_n) est strictement croissante

b) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n < 2$

2) On pose: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Exprimer u_n en fonction de n c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 12

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par: $(\forall n \in \mathbb{N}^+); u_n = \frac{n}{2^n} + 1$

1) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

2) a) Montrer que: $(\forall n \in (\mathbb{N}^* - \{1\})); 2^n > C_n^2$

b) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); 1 < u_n < \frac{2}{n-1} + 1$.

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 13

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} ; u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n} \right) \end{cases}$$

- 1) Calculer u_2 et u_3 .
- 2) Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{2u_n}{4u_n - 1}$.
- 3) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$
- 4) Pour tout n de $\mathbb{N}$; on pose: $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{4}{3}$, montrer que (v_n) est une suite géométrique que, puis exprimer v_n et u_n en fonction de n .
- 5) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 14

- 1) Montrer que: $(\forall x \in]0, 1]) ; \sqrt{1-x} < 1 - \frac{1}{2}x < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$
- 2) Soit (u_n) la suite numérique définie que:
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \cdot u_{n-1} \end{cases}$$

Écrire u_n en fonction de n

- 3) Pour tout n de $\mathbb{N}$; on pose: $v_n = u_n \sqrt{n+1}$ et $w_n = u_n \sqrt{n}$
- a) Montrer que la suite (v_n) est strictement décroissante et que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n < \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

- b) Montrer que la suite (w_n) est strictement croissante et que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{4\sqrt{n}} \leq u_n$$

- c) Étudier la convergence de la suite (u_n) .

Exercice 15

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1+u_n^3}{8}} \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

b) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}$; on pose $v_n = \frac{7}{8}u_n^3 - \frac{1}{8}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{8}$;

b) Exprimer u_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 16

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 2^n > n$

2) On considère la suite numérique (x_n) définie par: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante et majorée, puis en déduire qu'elle est convergente.

3) On considère la suite (y_n) définie par: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k}$

Montrer que la suite (y_n) est majorée, et en déduire qu'elle est convergente.

Exercice 17

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1} \end{cases}; n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < 2$

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n)

3) a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a: $2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$.

b) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente, puis calculer: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 18

On a: $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \end{cases}; n \in \mathbb{N}$

- 1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 3$
- 2) Étudier la monotonie de la suite (u_n)
- 3) a) Montrer que: $u_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(u_n - 3)$ pour tout n de $\mathbb{N}$
- b) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$
- c) Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 19

Soit (u_n) la suite numérique définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n \end{cases} (n \in \mathbb{N})$$

- 1) a) Montrer que la suite (u_n) est croissante
- b) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 2^n$, et en déduire $\lim u_n$.
- 2) on pose : $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k + 1}$
- a) Vérifier que: $\frac{1}{1 + u_k} = \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}}$ pour tout k de $\mathbb{N}$
- b) En déduire que la suite (v_n) est convergente.

Exercice 20

Soit (u_n) la suite numérique définie par:
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1 + u_n^2}} \end{cases}$$

- 1) Montrer que la suite (u_n) est convergente, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- 2) Calculer de deux façons la somme suivante $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k$ où $(\forall k \in \mathbb{N}^*) ; v_k = \frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2}$,
puis en déduire que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n^2 = 1$

Exercice 21

Soit (u_n) la suite numérique définie par:
$$\begin{cases} u_0 > \sqrt[3]{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{2}{3} \left(u_n + \frac{1}{u_n^2} \right) \end{cases}$$

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$.

2) a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - \sqrt[3]{2} = \frac{2u_n + \sqrt[3]{2}}{3u_n^2} (u_n - \sqrt[3]{2})^2$ (1)

b) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq \sqrt[3]{2}$.

c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

3) a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - \sqrt[3]{2} \leq \frac{2}{3} (u_n - \sqrt[3]{2})$.

b) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n - \sqrt[3]{2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot (u_0 - \sqrt[3]{2})$.

c) Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 22

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par: $u_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 1$

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n) , en déduire qu'elle est convergente.

3) Montrer que récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$; puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Solutions

Exercice 6

1) a) Déterminons a, b et c tels que:

$$(\forall p \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1} + \frac{c}{p+2}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$; on a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1} + \frac{c}{p+2} &\Leftrightarrow \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{a(p+1)(p+2) + bp(p+2) + cp(p+1)}{p(p+1)(p+2)} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{(a+b+c)p^2 + (3a+2b+c)p + 2a}{p(p+1)(p+2)} \end{aligned}$$

donc: $(\forall p \in \mathbb{N}^*) ; (a+b+c)p^2 + (3a+2b+c)p + 2a = 1$

$$\text{d'où } \begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases} \text{ par conséquent: } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (Après résolution}$$

du système)

ainsi: $(\forall p \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2p+4}$

b) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+4}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$;

on a:

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2p+4} \right) \\ &= \left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{2p} \right) - \left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p+1} \right) + \left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{2p+4} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{2n+4} \right) \\ &= \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n} \right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n} \right) + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{3}{4} + 2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n} \right) + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} - \frac{1}{n+1}$

• Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

on a: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{4}$

2) a) Déterminons w_n en fonction de n

on a: $(\forall p \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{\sqrt{p} + \sqrt{p-1}} = \sqrt{p} - \sqrt{p-1}$

donc pour $p = 2$: $\frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

pour $p = 3$: $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

pour $p = 4$: $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} = \sqrt{4} - \sqrt{3}$

$\vdots$
pour $p = n$: $\frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

Par sommation des égalités membre à membre, et après simplification, on

obtient $\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n} - 1$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; w_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

b) Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a: $w_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}}$

et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$

Exercice 7

1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \frac{\cos n}{n}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$, on a: $-1 \leq \cos n \leq 1$ donc $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$

d'où: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); -\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ et puisque: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ alors, d'après

les critères de convergence $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

2) $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$, on a: $|u_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$

et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$ donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

3) $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a:

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

4) $(\forall n \geq 2); u_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que: $n \geq 2$

$$u_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n} = \frac{n\left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)} = \frac{1 - \frac{(-1)^n}{n}}{1 + \frac{(-1)^n}{n}}$$

et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{(-1)^n}{n}}{1 + \frac{(-1)^n}{n}} = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

5) $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^n k^2$

on rappelle que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$; on a: $u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
 $= \frac{1}{n^3} \times \frac{n^3 \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \right)}{6} = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$

et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}$

donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}$

6) $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n E(kx)$ (où $x \in \mathbb{R}^*$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $(\forall k \in \{1; 2; \dots, n\}); kx - 1 < E(kx) \leq kx$

donc $\sum_{k=1}^n (kx - 1) < \sum_{k=1}^n E(kx) \leq \sum_{k=1}^n kx$

et on a: $\sum_{k=1}^n kx = x \sum_{k=1}^n k = x \times \frac{n(n+1)}{2}$

et $\sum_{k=1}^n (kx - 1) = \sum_{k=1}^n kx - \sum_{k=1}^n 1 = x \times \frac{n(n+1)}{2} - n$

d'où $x \times \frac{n(n+1)}{2} - n < \sum_{k=1}^n E(kx) \leq x \times \frac{n(n+1)}{2}$

c'est-à-dire: $x \times \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(kx) \leq x \times \frac{n(n+1)}{2n^2}$

par suite: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); x \times \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} < u_n \leq x \times \frac{n(n+1)}{2n^2}$

et puisque: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x \times \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{x}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x \times \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} = \frac{x}{2}$

et d'après les critères de convergence on a: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{x}{2}$

Exercice 8

Étudions la convergence de la suite (u_n)

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1} - u_n = \alpha^n$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$, on a: $(\forall k \in \{1; \dots, n\}); \sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=1}^n \alpha^k$

$$\begin{aligned}
 \text{et puisque: } \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k-1}) &= \sum_{k=1}^n u_k - \sum_{k=1}^n u_{k-1} \\
 &= \sum_{k=1}^n u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \\
 &= u_n - u_0 = u_n - 1
 \end{aligned}$$

$$\text{alors: } u_n - 1 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \text{ c'est-à-dire: } u_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k$$

$$\text{donc: } \begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = u_0 + \sum_{k=1}^n \alpha^{k-1} \end{cases}$$

1^{er} cas: si $\alpha = 1$, alors (u_n) est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_0 = 1$ donc $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = n + 1$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$2^{\text{ème}} \text{ cas: Si } \alpha \neq 1 \text{ alors } \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k = \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}$$

$$\text{donc } (\forall n \in \mathbb{N}); u_n = 1 + \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}$$

$$\bullet \text{ Si: } -1 < \alpha < 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^n = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} = \frac{1}{1 - \alpha} \text{ par conséquent: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2 - \alpha}{1 - \alpha}$$

La suite (u_n) est donc convergente et sa limite est $\frac{2 - \alpha}{1 - \alpha}$

$$\bullet \text{ Si } \alpha > 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^n = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} = +\infty \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

La suite est donc divergente.

$\bullet$ Si $\alpha \leq -1$ alors la suite (α^n) est divergente et n'admet pas de limite.

d'où la suite (u_n) est divergente car elle n'admet pas de limite.

Exercice 9

1) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq n$

Utilisons le raisonnement par récurrence

(u_n) est une suite d'entiers naturels signifie que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in \mathbb{N}$

$\bullet$ Initialisation: pour $n = 0$, on a: $u_0 \in \mathbb{N}$, donc: $u_0 \geq 0$

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $u_n \geq n$ et montrons que:

$$u_{n+1} \geq n+1$$

on a: (u_n) est strictement croissante, donc $u_{n+1} > u_n$

et puisque: $u_n \geq n$ alors $u_{n+1} > n$ et on a: $n \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} \in \mathbb{N}$,

donc: $u_{n+1} \geq n+1$

Rappel: $(\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2); x > y \iff x \geq y+1$

Conclusion: d'après le principe de récurrence on a: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq n$

2) Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

on a: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

donc d'après les critères de convergence: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Exercice 10

1) Montrons que: $(\forall x \in \mathbb{R}^+); \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) - \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{1+x}\right)$

Soit x un élément de $]0; +\infty[$

On pose: $\alpha = \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\beta = \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{1+x}\right)$ c'est à dire: $\tan \alpha = \frac{1}{x}$

et $\tan \beta = \frac{1}{1+x}$ tels que: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

On a: $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$

$$= \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}}{1 + \frac{1}{x} \times \frac{1}{1+x}}$$

$$= \frac{\frac{1}{x(1+x)}}{\frac{x(1+x) + 1}{x(1+x)}} = \frac{1}{x(x+1) + 1} = \frac{1}{1+x+x^2}$$

et puisque: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ alors $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$

donc $\alpha - \beta = \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$

c'est à dire: $\operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) - \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{1+x}\right)$

d'où $(\forall x \in \mathbb{R}^+); \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) - \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{1+x}\right)$

2) Calculons: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

On a: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + n + n^2 = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + n + n^2} = 0$

et puisque la fonction Arc tan est continue en 0 ; alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Arc tan}\left(\frac{1}{1 + n + n^2}\right) = \text{Arc tan}(0) = 0 \text{ c'est-à-dire: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

b) • Déterminons S_n en fonction de n .

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; On a: $(\forall k \in \{1; 2; 3; \dots; n\})$;

$$u_k = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{1 + k + k^2}\right) = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{k}\right) - \text{Arc tan}\left(\frac{1}{1 + k}\right)$$

$$\text{donc: } S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\text{Arc tan}\left(\frac{1}{k}\right) - \text{Arc tan}\left(\frac{1}{1 + k}\right) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \text{Arc tan}\left(\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^n \text{Arc tan}\left(\frac{1}{1 + k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \text{Arc tan}\left(\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=2}^{n+1} \text{Arc tan}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$= \text{Arc tan}(1) + \sum_{k=2}^n \text{Arc tan}\left(\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=2}^n \text{Arc tan}\left(\frac{1}{k}\right) - \text{Arc tan}\left(\frac{1}{1 + n}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \text{Arc tan}\left(\frac{1}{1 + n}\right)$$

• Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

on a: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + n} = 0$ et la fonction Arc tan est continue en 0 ;

$$\text{donc: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Arc tan}\left(\frac{1}{1 + n}\right) = \text{Arc tan}(0) = 0 ;$$

$$\text{par conséquent: } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \text{Arc tan}\left(\frac{1}{1 + n}\right) \right) = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 11

1) Montrons que la suite (u_n) est strictement croissante.

• Initialisation:

pour $n = 0$ on a: $u_1 - u_0 = \frac{2}{3}$, donc $u_1 - u_0 > 0$ d'où la propriété est vraie

pour $n = 0$

- Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $u_{n+1} - u_n > 0$ et montrons que $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$

$$\begin{aligned} \text{On a: } u_{n+2} - u_{n+1} &= \frac{2u_{n+1} + 3}{u_{n+1} + 2} - \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} \\ &= \frac{2u_{n+1}u_n + 4u_{n+1} + 3u_n + 6 - 2u_{n+1}u_n - 3u_{n+1} - 4u_n - 6}{(u_n + 2)(u_{n+1} + 2)} \\ &= \frac{u_{n+1} - u_n}{(u_n + 2)(u_{n+1} + 2)} \end{aligned}$$

On a: $u_{n+1} - u_n > 0$ d'après l'hypothèse de récurrence et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$
(à vérifier par récurrence) d'où $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$

- Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n > 0$ c'est à dire la suite (u_n) est strictement croissante

b) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n < 2$, utilisons le raisonnement par récurrence.

- Initialisation: pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ donc $u_0 < 2$

- Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $u_n < 2$ et montrons que $u_{n+1} < 2$

$$\text{On a: } u_{n+1} - 2 = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} - 2 = \frac{-1}{u_n + 2}$$

et puisque $u_n + 2 > 0$ alors $u_{n+1} - 2 < 0$ c'est à dire $u_{n+1} < 2$

- Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < 2$

2) Montrons que la suite (v_n) est géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - \sqrt{3}}{u_{n+1} + \sqrt{3}} = \frac{\frac{2u_n + 3}{u_n + 2} - \sqrt{3}}{\frac{2u_n + 3}{u_n + 2} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})u_n + 3 - 2\sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})u_n + 3 + 2\sqrt{3}} = \frac{(2 - \sqrt{3})u_n - \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})u_n + \sqrt{3}(2 + \sqrt{3})} = \frac{(2 - \sqrt{3})(u_n - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(u_n + \sqrt{3})} \end{aligned}$$

$$\text{donc } v_{n+1} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} v_n = (7 - 4\sqrt{3}) v_n$$

d'où la suite (v_n) est géométrique de raison $7 - 4\sqrt{3}$ et de premier terme $v_0 = -2 + \sqrt{3}$

b) Déterminons u_n en fonction de n .

on a: $v_n = (\sqrt{3} - 2)(7 - 4\sqrt{3})^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (car (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = -2 + \sqrt{3}$ et de raison $q = 7 - 4\sqrt{3}$)

on a: $v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$ pour tout n de $\mathbb{N}$, donc $v_n u_n + \sqrt{3} v_n = u_n - \sqrt{3}$

c'est à dire: $u_n(v_n - 1) = -\sqrt{3} v_n - \sqrt{3}$ d'où $u_n = \frac{\sqrt{3} v_n + \sqrt{3}}{1 - v_n}$

par conséquent: $u_n = \frac{(-2 + \sqrt{3})\sqrt{3}(7 - 4\sqrt{3})^n + \sqrt{3}}{1 + (2 - \sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})^n}$

c) Calculons: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

on a: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (7 - 4\sqrt{3})^n = 0$ (car $-1 < 7 - 4\sqrt{3} < 1$) donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$

Exercice 418

1) a) Montrons que la suite (u_n) est décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a: $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} + 1 - \frac{n}{2^n} - 1 = \frac{n+1-2n}{2^{n+1}} = \frac{1-n}{2^{n+1}}$

et puisque $n \in \mathbb{N}^*$; alors $1 - n \leq 0$, donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$, d'où (u_n) est décroissante

b) Montrons que la suite (u_n) est convergente

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n > 1$ (car $u_n - 1 = \frac{n}{2^n}$), donc la suite (u_n) est minorée par 1, et puisqu'elle est décroissante alors (u_n) est convergente.

2) a- Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; 2^n > C_n^2$

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$; On a:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i 1^i \times 1^{n-i} = \sum_{i=0}^n C_n^i = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$$

donc $2^n - C_n^2 = 1 + C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^n$ d'où $2^n - C_n^2 > 0$ ainsi; $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}; 2^n > C_n^2$

b) Dédudons que: $1 < u_n < \frac{2}{n-1} + 1$

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; 2^n > C_n^2$ donc $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{C_n^2}$ d'où: $1 < u_n < \frac{n}{C_n^2} + 1$

et puisque $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-1)n}{2}$ alors: $1 < u_n < \frac{n}{(n-1)\frac{n}{2}} + 1$

c'est à dire: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; 1 < u_n < \frac{2}{n-1} + 1$

c) Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

On a: $1 < u_n < \frac{2}{n-1} + 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n-1} + 1 = 1$ donc; $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ (d'après les critères de convergence)

Exercice 13

1) Calculons u_2 et u_3

on a: $\frac{1}{u_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) = \frac{1}{2} (1 + 2) = \frac{3}{2}$ donc $u_2 = \frac{2}{3}$

• on a: $\frac{1}{u_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{2}{3}} + 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) = \frac{5}{4}$ donc $u_3 = \frac{4}{5}$

2) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{2u_n}{4u_n - 1}$

• Initialisation:

Pour: $n = 0$ on a: $\frac{2u_0}{4u_0 - 1} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{4 \times \frac{1}{2} - 1} = 1 = u_1$ donc $u_1 = \frac{2u_0}{4u_0 - 1}$

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$;

Supposons que: $u_{n+1} = \frac{2u_n}{4u_n - 1}$ et montrons que: $u_{n+2} = \frac{2u_{n+1}}{4u_{n+1} - 1}$

On a: $u_{n+1} = \frac{2u_n}{4u_n - 1}$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

donc: $u_n = \frac{u_{n+1}}{4u_{n+1} - 2}$ or: $\frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n} \right)$

donc:

$$\frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_n + u_{n+1}}{u_{n+1} \times u_n} \right) = \frac{1}{2} \frac{\frac{u_{n+1}}{4u_{n+1} - 2} + u_{n+1}}{u_{n+1} \times \frac{u_{n+1}}{4u_{n+1} - 2}} = \frac{1}{2} \frac{4u_{n+1}^2 - u_{n+1}}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{2} \frac{4u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}$$

ainsi $u_{n+2} = \frac{2u_{n+1}}{4u_{n+1} - 1}$

• Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{2u_n}{4u_n - 1}$

3) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ (par récurrence)

• Initialisation: pour $n = 0$ on a: $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq 1$ donc $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$

la propriété est vraie pour $n = 0$

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ et montrons que $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

$$\text{- on a: } u_{n+1} - 1 = \frac{2u_n}{4u_n - 1} - 1 = \frac{1 - 2u_n}{4u_n - 1}$$

et puisque: $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ alors: $1 - 2u_n \leq 0$ et $4u_n - 1 > 0$

donc: $u_{n+1} - 1 \leq 0$ ainsi $u_{n+1} \leq 1$

$$\text{- Et on a: } u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2u_n}{4u_n - 1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2(4u_n - 1)}$$

et puisque $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ alors $4u_n - 1 > 0$; donc $u_{n+1} - \frac{1}{2} \geq 0$ ainsi $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$, la propriété est vraie pour $n + 1$

• Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{2} \leq u_n < 1$

4) Montrons que la suite (v_n) est géométrique, puis calculons v_n et u_n en fonction de n

$$\begin{aligned} \text{• Soit } n \in \mathbb{N} ; \text{ on a: } v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{4}{3} = \frac{1}{\frac{2u_n}{4u_n - 1}} - \frac{4}{3} = \frac{4u_n - 1}{2u_n} - \frac{4}{3} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2u_n} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = -\frac{1}{2} v_n$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$, et de premier terme

$$v_0 = \frac{1}{u_0} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

• Exprimons v_n puis u_n en fonction de n .

On a: (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$ et de premier terme

$$v_0 = \frac{2}{3} \text{ donc } v_n = v_0 \times (q)^n = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \text{ et puisque } v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{4}{3} \text{ alors } u_n = \frac{3}{3v_n + 4}$$

$$\text{donc } u_n = \frac{3}{3 \times \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4} \text{ d'où } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{3}{4 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

5) Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\text{on a: } -1 < -\frac{1}{2} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ d'où: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{4}$$

Exercice 14

1) Montrons que: $(\forall x \in]0, 1]) ; \sqrt{1-x} < 1 - \frac{1}{2}x < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Soit x un élément de $]0, 1]$; on a: $\sqrt{1-x} - 1 = \frac{-x}{\sqrt{1-x} + 1}$

et puisque $\sqrt{1-x} < 1$

alors $\sqrt{1-x} + 1 < 2$ donc $\frac{1}{\sqrt{1-x} + 1} > \frac{1}{2}$ d'où $\frac{-x}{\sqrt{1-x} + 1} < -\frac{x}{2}$

c'est-à-dire $\sqrt{1-x} - 1 < -\frac{x}{2}$ ainsi $\sqrt{1-x} < 1 - \frac{x}{2}$ (1)

on a aussi $\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{-x}{\sqrt{1+x}(1 + \sqrt{1+x})}$

et puisque: $\sqrt{1+x} > 1$ et $\sqrt{1+x} + 1 \geq 2$ alors $\sqrt{1+x}(1 + \sqrt{1+x}) > 2$

donc $\frac{1}{\sqrt{1+x}(1 + \sqrt{1+x})} < \frac{1}{2}$ par suite $\frac{-x}{\sqrt{1+x}(1 + \sqrt{1+x})} > -\frac{x}{2}$

c'est-à-dire: $\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 > -\frac{x}{2}$ d'où $\frac{1}{\sqrt{1+x}} > 1 - \frac{x}{2}$ (2)

de (1) et (2) on déduit que: $(\forall x \in]0, 1]) \quad \sqrt{1-x} < 1 - \frac{1}{2}x < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

2) a) Exprimons u_n en fonction de n

On a: $(\forall k \in \mathbb{N}^*) ; u_k = \left(1 - \frac{1}{2k}\right) u_{k-1}$

donc, pour $k = n$ on a: $u_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) u_{n-1}$

Pour $k = n-1$ $u_{n-1} = \left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) u_{n-2}$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

Pour $k = 2$ $u_2 = \left(1 - \frac{1}{2 \times 2}\right) u_1$

Pour $k = 1$ $u_1 = \left(1 - \frac{1}{2 \times 1}\right) u_0$

Par produit des inégalités précédentes membre à membre, et après simplification, on

obtient: $u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{2n}\right) u_0$

donc: $u_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2 \times 2}\right) \dots \times \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (2n-1) \times 2n}{(2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (1 \times 2 \times \dots \times n)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} \times (n!)^2} \end{aligned}$$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2}$

3) Montrons que la suite (v_n) est strictement décroissante

Soit n un élément de $\mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = u_{n+1} \sqrt{n+2}$ et $v_n = u_n \sqrt{n+1}$

et on a $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n > 0$ (à vérifier)

donc : $v_{n+1} = u_{n+1} \sqrt{n+2} = \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right) u_n \sqrt{n+2}$

d'où:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right) u_n \sqrt{n+2} - u_n \sqrt{n+1} \\ &= u_n \sqrt{n+2} \left(1 - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}\right) = u_n \sqrt{n+2} \left(1 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{n+1}\right) - \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right) \end{aligned}$$

et d'après la question 1 on a: $\left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1}\right)\right) < \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}}$ (car $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$)

c'est-à-dire: $\left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1}\right)\right) < \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$ d'où $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} - v_n < 0$

Par suite, la suite (v_n) est strictement décroissante.

• Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n < \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = u_n \sqrt{n+1}$ donc $u_n = \frac{v_n}{\sqrt{n+1}}$

et puisque la suite (v_n) est strictement décroissante, alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n < v_0$

$$\text{donc } u_n < \frac{v_0}{\sqrt{n+1}}$$

et comme, $v_0 = u_0 \sqrt{0+1} = \frac{1}{2}$ alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n < \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$

b) Montrons que la suite (w_n) est strictement croissante

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \in \mathbb{N} \text{ on a: } w_{n+1} - w_n &= u_{n+1} \sqrt{n+1} - u_n \sqrt{n} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right) u_n \sqrt{n+1} - u_n \sqrt{n} \\ &= u_n \sqrt{n+1} \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} - \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right) \\ &= u_n \sqrt{n+1} \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} - \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}}\right) \end{aligned}$$

et d'après la question 1) on a: $1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1}\right) > \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n+1}\right)}$ (car $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$)

donc $w_{n+1} - w_n > 0$, d'où la suite (w_n) est strictement croissante

• Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{4\sqrt{n}} \leq u_n$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$, on a: $w_n = u_n \sqrt{n}$ donc $u_n = \frac{w_n}{\sqrt{n}}$

et puisque (w_n) est une suite strictement croissante, alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; w_n \geq w_1$

c'est-à-dire: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; w_n \geq \frac{1}{4}$ d'où: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \geq \frac{1}{4\sqrt{n}}$

c) Etudions la convergence de la suite (u_n)

On a: d'après ce qui précède: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{4\sqrt{n}} \leq u_n < \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$

Les suites (S_n) et (S'_n) définies par: $S_n = \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$ et $S'_n = \frac{1}{4\sqrt{n}}$ pour tout n de

$\mathbb{N}^*$ sont convergentes, et on a: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = 0$, donc (u_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Exercice 15

1) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$ en utilisant le raisonnement par récurrence

• Initialisation: pour $n = 0$; on a: $u_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}}$

Et puisque $\frac{2}{7} > \frac{1}{7}$ alors $\sqrt[3]{\frac{2}{7}} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$ alors $u_0 > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$ et montrons que $u_{n+1} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

$$\begin{aligned} \text{on a: } u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}} &\Rightarrow u_n^3 > \frac{1}{7} \\ &\Rightarrow 1 + u_n^3 > \frac{1}{7} + 1 \\ &\Rightarrow \frac{1 + u_n^3}{8} > \frac{1}{7} \end{aligned}$$

et puisque la fonction: $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur l'intervalle

$[0; +\infty[$, alors $\sqrt[3]{\frac{1 + u_n^3}{8}} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$ c'est à dire: $u_{n+1} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

• Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

b) Dédution:

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}; \text{ on a: } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1 + u_n^3}{8}}}{u_n} = \sqrt[3]{\frac{1 + u_n^3}{8u_n^3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8u_n^3} + \frac{1}{8}}$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}} &\Rightarrow u_n^3 > \frac{1}{7} \\ &\Rightarrow 8u_n^3 > \frac{8}{7} \\ &\Rightarrow \frac{1}{8u_n^3} < \frac{7}{8} \\ &\Rightarrow 0 < \frac{1}{8u_n^3} + \frac{1}{8} < 1 \end{aligned}$$

et puisque la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$

alors $\sqrt[3]{\frac{1}{8u_n^3} + \frac{1}{8}} < 1$ c'est-à-dire: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$; donc $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

c) Montrons que la suite (u_n) est convergente

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et $u_n > 0$

donc $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} < u_n$, c'est-à-dire la suite (u_n) est strictement décroissante, et puisqu'elle est minorée par $\sqrt[3]{\frac{1}{7}}$; alors elle est convergente.

2) a) Montrons que la suite (v_n) est géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a: $v_{n+1} = \frac{7}{8}u_{n+1}^3 - \frac{1}{8}$

et puisque $u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1+u_n^3}{8}}$ alors $u_{n+1}^3 = \frac{1+u_n^3}{8}$

donc $v_{n+1} = \frac{7}{8}\left(\frac{1}{8} + \frac{u_n^3}{8}\right) - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8} + \frac{7}{8}u_n^3 - 1\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}u_n^3 - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}v_n$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = \frac{1}{8}v_n$

Par conséquent; (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{8}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{8}$

b) • Calculons u_n en fonction de n

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{8}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{8}$,

donc: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{8}\right)^n$ c'est à dire: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a: $v_n = \frac{7}{8}u_n^3 - \frac{1}{8} \iff 8v_n + 1 = 7u_n^3$

$$\iff u_n^3 = \frac{1}{7}(8v_n + 1)$$

$$\iff u_n = \sqrt[3]{\frac{1}{7}(8v_n + 1)}$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \sqrt[3]{\frac{1}{7}\left(\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1} + 1\right)}$

• Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Puisque $-1 < \frac{1}{8} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{7}\left(\left(\frac{1}{8}\right)^n + 1\right) = \frac{1}{7}$

et puisque la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est continue en $\frac{1}{7}$

alors: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{7}\left(\left(\frac{1}{8}\right)^n + 1\right)} = \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$ ainsi: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

Exercice 16

1) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2^n > n$

• 1^{er} cas si $n = 0$; on a: $2^0 = 1$ et $1 > 0$ donc $2^0 > 0$

• 2^{ème} cas : si $n \neq 0$

$$\begin{aligned}\text{On a : } 2^n &= (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \\ &= C_n^0 + C_n^1 + \sum_{k=2}^n C_n^k \\ &= 1 + n + \sum_{k=2}^n C_n^k\end{aligned}$$

donc $2^n - n = 1 + \sum_{k=2}^n C_n^k$ et puisque $1 + \sum_{k=2}^n C_n^k > 0$, alors $2^n - n > 0$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2^n > n$

2) Montrons que la suite (x_n) est strictement croissante

$$\begin{aligned}\text{Soit } n \in \mathbb{N} ; \text{ on a : } x_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = x_n + \frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

donc $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ et puisque $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$ alors $x_{n+1} - x_n > 0$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_{n+1} > x_n$, ainsi la suite (x_n) est strictement croissante

• Montrons que la suite (x_n) est majorée.

Soit k un élément de $\mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$

$$\begin{aligned}\text{on a : } k \geq 2 \text{ donc } k^2 > k^2 - k &\Leftrightarrow \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2 - k} \quad (\text{car } k^2 - k > 0) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\end{aligned}$$

$$\text{donc } (\forall n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}) ; \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$\begin{aligned}\text{et on a : } \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}\end{aligned}$$

$$\text{d'où } (\forall n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}) ; \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{n}$$

$$\text{Soit } n \text{ un élément de } \mathbb{N} - \{0; 1\} ; \text{ on a : } x_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < 1 + 1 - \frac{1}{n}$$

c'est-à-dire $x_n < 2 - \frac{1}{n}$, et puisque $2 - \frac{1}{n} < 2$

et on a: $x_1 = 1$, donc $x_1 < 2$

donc ; $(\forall n \in \mathbb{N}^*); x_n < 2$

c'est à dire: la suite (x_n) est majorée par 2.

on a: (x_n) est une suite croissante et majorée, donc elle est convergente

3) Montrons que la suite (y_n) est majorée

Soit n et k deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que: $k \leq n$

on a: $2^k > k$ donc $k \times 2^k > k^2$ d'où: $\frac{1}{k2^k} < \frac{1}{k^2}$ ainsi: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

c'est à dire $y_n < x_n$ et comme $x_n < 2$ alors $y_n < 2$,

d'où: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); y_n < 2$, c'est à dire (y_n) est une suite majorée par 2 (1)

• Étudions la monotonie de la suite (y_n)

Soit n un élément de $\mathbb{N}$ on a:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k2^k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} + \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = y_n + \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \end{aligned}$$

c'est-à-dire: $y_{n+1} - y_n = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

d'où $y_{n+1} - y_n > 0$ (car $\frac{1}{(n+1)2^{n+1}} > 0$)

Ainsi, $(\forall n \in \mathbb{N}^*); y_{n+1} > y_n$

c'est-à-dire la suite (y_n) est strictement croissante (2), donc de (1) et (2)

on déduit que la suite (y_n) est convergente.

Exercice 17

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < 2$ (utilisons le raisonnement par récurrence)

• Initialisation: pour $n = 0$ on a $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 < 2$

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < u_n < 2$ et montrons que $0 < u_{n+1} < 2$

- Puisque $u_n > 0$ alors $u_n^3 + 2 > 0$ et $u_n^2 + 1 > 0$, donc $u_{n+1} > 0$ (1)

- On a $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n^3 - 2u_n^2}{u_n^2 + 1} = \frac{u_n^2}{u_n^2 + 1}(u_n - 2)$

et puisque $u_n - 2 < 0$ et $\frac{u_n^2}{u_n^2 + 1} > 0$, alors $u_{n+1} - 2 < 0$

c'est à dire $u_{n+1} < 2$ (2)

de (1) et (2) on déduit que $0 < u_{n+1} < 2$

Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 < u_n < 2$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ on a: $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1} - u_n = \frac{2 - u_n}{u_n^2 + 1}$

et puisque $0 < u_n < 2$; alors $u_{n+1} - u_n > 0$; donc $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} > u_n$

D'où la suite (u_n) est strictement croissante

3) a) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$

On a: $2 - u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n^2 + 1}(2 - u_n)$

Il suffit de montrer que: $\frac{u_n^2}{u_n^2 + 1} \leq \frac{4}{5}$

On a $\frac{u_n^2}{u_n^2 + 1} - \frac{4}{5} = \frac{u_n^2 - 4}{5(u_n^2 + 1)} = \frac{(u_n - 2)(u_n + 2)}{5(u_n^2 + 1)}$

et puisque $0 < u_n < 2$ alors $u_n - 2 < 0$ et $u_n + 2 > 0$ et on a $5(u_n^2 + 1) > 0$

donc $\frac{u_n^2}{1 + u_n^2} - \frac{4}{5} \leq 0$ c'est à dire: $\frac{u_n^2}{1 + u_n^2} \leq \frac{4}{5}$

on a: $\frac{u_n^2}{1 + u_n^2} \leq \frac{4}{5}$ et $2 - u_n > 0$

Donc $\frac{u_n^2}{1 + u_n^2}(2 - u_n) \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$

Ainsi: $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$

b) Déduisons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ (utilisons un raisonnement par récurrence)

• Initialisation: pour $n = 0$ on a: $2 - u_0 = 1$ et $\left(\frac{4}{5}\right)^0 = 1$ et $0 < 1 \leq 1$

donc $0 < 2 - u_0 \leq \left(\frac{4}{5}\right)^0$

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$;

Supposons que $0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ et montrons que $0 < 2 - u_{n+1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

on a: $0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ donc $0 < \frac{4}{5}(2 - u_n) \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

et d'après la question 3) a) on a: $2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$

donc $0 < 2 - u_{n+1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

c) Montrons que (u_n) est convergente et calculons $\lim u_n$

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2, donc elle est convergente

et on a: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - 2| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ (car $-1 < \frac{4}{5} < 1$) alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

Exercice 18

on a: $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 3$

• Initialisation: pour $n = 0$ on a: $u_0 = 4$ donc $u_0 > 3$

donc la propriété est vraie pour $n = 0$

• Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > 3$ et montrons que $u_{n+1} > 3$

On a: $u_{n+1} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3u_n - 9}{u_n + 2}$

$u_{n+1} - 3 = \frac{(u_n - 3)(2u_n + 3)}{u_n + 2}$ (car $2x^2 - 3x - 9 = (x - 3)(2x + 3)$)

et puisque $u_n > 3$ alors $u_n - 3 > 0$ et $2u_n + 3 > 0$ et $u_n + 2 > 0$

donc $u_{n+1} - 3 > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 3$

Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 3$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a: $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n - 3}{u_n + 2}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)(u_n + 1)}{u_n + 2}$$

et puisque $u_n > 3$ alors $\frac{(u_n - 3)(u_n + 1)}{u_n + 2} > 0$ donc $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} > u_n$

d'où (u_n) est une suite strictement croissante.

3) a) On a: $u_{n+1} - 3 = (u_n - 3) \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}$ et on a: $\frac{2u_n + 3}{u_n + 2} - \frac{3}{2} = \frac{u_n}{2(u_n + 2)}$

et puisque $u_n > 3 > 0$ alors $\frac{2u_n + 3}{u_n + 2} - \frac{3}{2} > 0$

c'est à dire: $\frac{2u_n + 3}{u_n + 2} > \frac{3}{2}$

et puisque $u_n - 3 > 0$ alors $\frac{(u_n - 3)(2u_n + 3)}{u_n + 2} > \frac{3}{2}(u_n - 3)$

Ainsi: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(u_n - 3)$

b) Déduisons que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$

Méthode 1: (par récurrence)

• Initialisation:

pour $n = 0$ on a: $\left(\frac{3}{2}\right)^0 + 3 = 4$ et $u_0 = 4$ donc $u_0 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^0 + 3$

• Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que: $u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$ et montrons que: $u_{n+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 3$

On a: $u_n - 3 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$ donc: $\frac{3}{2}(u_n - 3) \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$

et puisque $u_{n+1} - 3 \geq \frac{3}{2}(u_n - 3)$ (d'après la question précédente)

alors $u_{n+1} - 3 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$ c'est à dire: $u_{n+1} > 3 + \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$

• Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$

Méthode 2:

Rappel: $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

On a: $u_{n+1} - 3 \geq \frac{3}{2}(u_n - 3) \Leftrightarrow \frac{u_{n+1} - 3}{u_n - 3} \geq \frac{3}{2} ; \text{car } (\forall n \in \mathbb{N}) u_n > 3$

donc $\prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{u_{k+1} - 3}{u_k - 3}\right) \geq \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right) ; \text{d'où: } \frac{u_n - 3}{u_0 - 3} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$

et puisque $u_0 = 4$ alors $u_0 - 3 = 1$; donc: $u_n - 3 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$

c) on a: $\frac{3}{2} > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3 = +\infty$

et puisque $u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$ alors $\lim u_n = +\infty$ (d'après les critères de convergence)

Exercice 19

1) a) On a: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = u_n + u_n^2$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n = u_n^2$

d'où: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n \geq 0$ car $u_n^2 \geq 0$; Ainsi: la suite (u_n) est croissante

b) On a: (u_n) est croissante donc $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq u_0$ et $u_0 = 1$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 1$

d'où: $u_n \geq 1 \Rightarrow u_n + 1 \geq 2$
 $\Rightarrow u_n(u_n + 1) \geq 2u_n$
 $\Rightarrow u_{n+1} \geq 2u_n$

et puisque $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$ (car $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 1$) alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 2$

donc: $\prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) \geq \prod_{k=0}^{n-1} 2$ c'est-à-dire $\frac{u_n}{u_0} \geq 2^n$

Ainsi: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 2^n$

on a: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ (car $2 > 1$) donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (d'après les critères

de convergence)

2) a) Vérifions que: $\frac{1}{1+u_k} = \frac{1}{1+u_{k+1}} + \frac{1}{u_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

On a: $(\forall k \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} = \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k u_{k+1}} = \frac{u_k(1+u_k) - u_k}{u_k u_{k+1}}$
 $= \frac{1+u_k - 1}{u_{k+1}} = \frac{u_k}{u_k(1+u_k)}$
 $= \frac{1}{1+u_k}$

$$b) \text{ on a: } v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+u_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} \right) = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_n} = 1 - \frac{1}{u_n}$$

et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$ donc (v_n) est une suite convergente

Exercice 20

1) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

• Initialisation: pour $n = 0$ on a: $u_0 = 1$ donc $u_0 > 0$

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$

On a: $u_n > 0$ et $\sqrt{1+u_n^2} > 0$, - donc $u_{n+1} > 0$

• Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

d'autre part on a: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{1+u_n^2}}$

et puisque: $\sqrt{1+u_n^2} > 1$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$, d'où la suite (u_n) est décroissante

on a: (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente

2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$; On a: $v_k = \frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2} = \frac{1+u_{k-1}^2}{u_{k-1}^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2} = 1$

donc: $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 = 1$

d'autre part, on a: $\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2} \right) = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} = \frac{1}{u_n^2} - 1$

donc: $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k = \frac{1}{nu_n^2} - \frac{1}{n}$

Déduction: on a: $\frac{1}{nu_n^2} - \frac{1}{n} = 1$ donc $\frac{1}{nu_n^2} = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$

d'où: $nu_n^2 = \frac{n}{n+1}$

et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n^2 = 1$

Exercice 21

1) a) Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

• Initialisation: pour $n = 0$ on a: $u_0 > \sqrt[3]{2}$ donc $u_0 > 0$

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$

on a: $u_n > 0$ donc $\frac{1}{u_n^2} > 0$ d'où: $\frac{2}{3}\left(u_n + \frac{1}{u_n^2}\right) > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 0$

• Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

2) a) Montrons l'égalité (E)

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $u_{n+1} - \sqrt[3]{2} = \frac{2}{3}\left(u_n + \frac{1}{u_n^2}\right) - \sqrt[3]{2}$

c'est-à-dire: $u_{n+1} - \sqrt[3]{2} = \frac{2u_n^3 - 3\sqrt[3]{2}u_n^2 + 2}{3u_n^2}$ (1)

et on a: $\frac{2u_n + \sqrt[3]{2}}{3u_n^2}(u_n - \sqrt[3]{2})^2 = \frac{(2u_n + \sqrt[3]{2})(u_n^2 - 2\sqrt[3]{2}u_n + \sqrt[3]{4})}{3u_n^2}$

c'est-à-dire : $\frac{2u_n + \sqrt[3]{2}}{3u_n^2}(u_n - \sqrt[3]{2})^2 = \frac{2u_n^3 - 3\sqrt[3]{2}u_n^2 + 2}{3u_n^2}$ (2)

de (1) et (2) on déduit que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - \sqrt[3]{2} = \frac{2u_n + \sqrt[3]{2}}{3u_n^2}(u_n - \sqrt[3]{2})^2$

b) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq \sqrt[3]{2}$:

de la question précédente on déduit que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n - \sqrt[3]{2} = \frac{2u_{n-1} + \sqrt[3]{2}}{3u_{n-1}^2}(u_{n-1} - \sqrt[3]{2})^2$$

et puisque $(u_{n-1} - \sqrt[3]{2})^2 \geq 0$ et $\frac{2u_{n-1} + \sqrt[3]{2}}{3u_{n-1}^2} > 0$ alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n - \sqrt[3]{2} \geq 0$

c'est-à-dire $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \geq \sqrt[3]{2}$ et puisque: $u_0 \geq \sqrt[3]{2}$ (d'après les données),

alors: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq \sqrt[3]{2}$

c) Montrons que (u_n) est croissante:

Soit n un élément de $\mathbb{N}$

$$\text{on a: } u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3u_n^2} = \frac{-(u_n^3 - 2)}{3u_n^2} = -\frac{(u_n - \sqrt[3]{2})(u_n^2 + \sqrt[3]{2}u_n + \sqrt[3]{4})}{3u_n^2}$$

et puisque $u_n - \sqrt[3]{2} \geq 0$ (d'après 2) b) et $u_n^2 + \sqrt[3]{2}u_n + \sqrt[3]{4} > 0$ (car $u_n > 0$) alors

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$ d'où la suite (u_n) est décroissante.

3) a) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - \sqrt[3]{2} \leq \frac{2}{3}(u_n - \sqrt[3]{2})$

Soit $n \in \mathbb{N}$ on a: $u_{n+1} - \sqrt[3]{2} = \frac{2u_n + \sqrt[3]{2}}{3u_n^2}(u_n - \sqrt[3]{2})^2$ (d'après 2) a))

$$\text{donc } u_{n+1} - \sqrt[3]{2} = \frac{2u_n^2 - \sqrt[3]{2}u_n - \sqrt[3]{4}}{3u_n^2}(u_n - \sqrt[3]{2})$$

$$\text{c'est-à-dire: } u_{n+1} - \sqrt[3]{2} = \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt[3]{2}u_n + \sqrt[3]{4}}{3u_n^2} \right) (u_n - \sqrt[3]{2})$$

$$\text{On a: } \frac{2}{3} - \frac{\sqrt[3]{2}u_n + \sqrt[3]{4}}{3u_n^2} \geq 0 \text{ car } u_n - \sqrt[3]{2} \geq 0 \text{ et } u_{n+1} - \sqrt[3]{2} \geq 0$$

$$\text{Donc: } \frac{2}{3} - \frac{\sqrt[3]{2}u_n + \sqrt[3]{4}}{3u_n^2} \leq \frac{2}{3} \text{ (car } \frac{\sqrt[3]{2}u_n + \sqrt[3]{4}}{3u_n^2} > 0) \text{ donc } u_{n+1} - \sqrt[3]{2} \leq \frac{2}{3}(u_n - \sqrt[3]{2})$$

$$\text{D'où } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - \sqrt[3]{2} \leq \frac{2}{3}(u_n - \sqrt[3]{2})$$

b) Dédution:

$$\text{On a: } (\forall k \in \mathbb{N}) ; 0 < u_{k+1} - \sqrt[3]{2} \leq \frac{2}{3}(u_k - \sqrt[3]{2})$$

(on peut vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > \sqrt[3]{2}$)

$$\text{Donc: Pour } k = n-1 \quad 0 < u_n - \sqrt[3]{2} \leq \frac{2}{3}(u_{n-1} - \sqrt[3]{2})$$

$$\text{Pour } k = n-2: \quad 0 < u_{n-1} - \sqrt[3]{2} \leq \frac{2}{3}(u_{n-2} - \sqrt[3]{2})$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \end{array}$$

$$\text{Pour } k = 0: \quad 0 < u_1 - \sqrt[3]{2} \leq \frac{2}{3}(u_0 - \sqrt[3]{2})$$

En multipliant membre à membre ces doubles inégalités strictement posi-

tives et après simplification: on obtient $0 < u_n - \sqrt[3]{2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - \sqrt[3]{2})$

$$\text{donc } (\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n - \sqrt[3]{2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - \sqrt[3]{2})$$

c) Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\text{on a } u_0 - \sqrt[3]{2} > 0 \text{ (par hypothèse) et } -1 < \frac{2}{3} < 1$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - \sqrt[3]{2}) = 0$ et on a aussi $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n - \sqrt[3]{2} > 0$

et d'après les critères de convergence on a: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \sqrt[3]{2}) = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt[3]{2}$

Exercice 22

1) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 1$:

- Initialisation: pour $n = 0$ on a: $u_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $0 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1$, donc $0 \leq u_0 \leq 1$

- Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons: $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que: $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

on a: $0 \leq u_n \leq 1$ donc: $0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1+u_n}{2} \leq 1$ d'où $0 \leq \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \leq 1$

c'est à dire: $0 \leq u_{n+1} \leq 1$, par conséquent, la propriété est vraie pour $n+1$

- Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 1$

2) Étudions la monotonie de la suite (u_n)

Soit n un élément de $\mathbb{N}$, on a:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} - u_n = \frac{\frac{1+u_n}{2} - u_n^2}{u_n + \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}} = \frac{-2u_n^2 + u_n + 1}{2\left(u_n + \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}\right)} = \frac{-(u_n - 1)\left(u_n + \frac{1}{2}\right)}{u_n + \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}}$$

et puisque: $0 \leq u_n \leq 1$ alors $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$, donc la suite (u_n) est croissante

Dédution:

La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle est convergente.

3) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

- Initialisation: pour $n = 0$ on a: $u_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{2^2}$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$

- Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que: $u_n = \cos \frac{\pi}{2^{n+2}}$ et montrons que

$$u_{n+1} = \cos \frac{\pi}{2^{n+3}}$$

$$\text{on a: } u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\left(2\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)\right)}{2}} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}$$

(car $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$) et puisque $0 \leq \frac{\pi}{2^{n+3}} \leq \frac{\pi}{2}$; alors $u_{n+1} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)$.

Donc: $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

• Conclusion: On a: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2^{n+2}} = 0$ et la fonction $\cos$ est continue en 0

donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \cos 0 = 1$

VII Suites (u_n) de type $u_{n+1} = f(u_n)$

• Monotonie (cas où f est croissante)

• Si: $u_n < u_{n_0+1}$; alors par récurrence, on montre que:

$$(\forall n \geq n_0); u_n < u_{n_0+1};$$

donc: $(u_n)_{n \in I}$ est croissante.

• Si: $u_{n_0} > u_{n_0+1}$; alors par récurrence on montre que: $(\forall n \geq n_0); u_n > u_{n+1}$;

donc: $(u_n)_{n \in I}$ est décroissante.

• Limite de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$

• Si f est continue sur un intervalle J

• $u_{n+1} = f(u_n); n \geq n_0$

• $f(J) \subset J$

• $u_{n_0} \in J$

• $(u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente

Alors: La limite de $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Exercices d'application

Exercice 23

Soit f la fonction numérique définie par: $f(x) = \frac{9x}{x^3 + 6}$

On considère la suite numérique (u_n) définie par: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle:

$$I = [0; \sqrt[3]{3}] \text{ et que : } f(I) = I.$$

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq \sqrt[3]{3}$

3) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

4) En déduire que la suite (u_n) est convergente, et calculer sa limite.

Exercice 24

Soit α un élément de l'intervalle $]0; 1[$

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 \in [0; \sqrt{\alpha}] \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{u_n + \alpha}{u_n + 1}$$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq \sqrt{\alpha}$

b) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{k!}$

a) Soit k un élément de $\mathbb{N}$, tel que : $k \geq 2$

Vérifier que : $k! \geq 2^{k-1}$, en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n < 3\sqrt{\alpha}$

b) En déduire que la suite (v_n) est convergente.

Exercice 25

On considère la suite numérique (x_n) définie par:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}); x_{n+1} = x_n + 1 - \sqrt{1 + x_n^2} \end{cases}$$

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < x_n < 1$.

2) Montrer que la suite (x_n) est décroissante.

3) Déduire que la suite (x_n) est convergente et calculer la limite.

(On peut considérer la fonction: $f: x \mapsto x + 1 - \sqrt{1 + x^2}$.)

Exercice 23

1) • Montrons que la fonction f est strictement croissante sur $I = [0; \sqrt[3]{3}]$:

La fonction f est dérivable sur I , et on a :

$$(\forall x \in I); f'(x) = 9 \cdot \frac{x^3 + 6 - 3x^3}{(x^3 + 6)^2} = \frac{18(3 - x^3)}{(x^3 + 6)^2}$$

et puisque: $0 \leq x \leq \sqrt[3]{3}$, alors: $0 \leq x^3 \leq 3$, c'est-à-dire: $3 - x^3 \geq 0$

donc: $(\forall x \in I); f'(x) \geq 0$ et f s'annule au point $x = \sqrt[3]{3}$.

D'où f est strictement croissante sur I .

• Montrons que $f(I) = I$

la fonction f est continue et strictement croissante sur $I = [0; \sqrt[3]{3}]$,

donc $f(I) = [f(0); f(\sqrt[3]{3})] = [0; \sqrt[3]{3}] = I$

2) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n < \sqrt[3]{3}$.

• Initialisation:

Pour $n = 0$, on a: $u_0 = 1$ et $1 \leq 1 < \sqrt[3]{3}$, donc: $1 \leq u_0 < \sqrt[3]{3}$

• Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que: $1 \leq u_n < \sqrt[3]{3}$, et montrons que: $1 \leq u_{n+1} < \sqrt[3]{3}$

on a f est strictement croissante sur l'intervalle $[1; \sqrt[3]{3}]$

donc: $1 \leq u_n < \sqrt[3]{3} \Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(\sqrt[3]{3})$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{9}{7} \leq u_{n+1} < \sqrt[3]{3}$$

• Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n < \sqrt[3]{3}$

3) Montrons que la suite (u_n) est strictement croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{u_n} \times \frac{9u_n}{u_n^3 + 6} = \frac{9}{u_n^3 + 6}$

et puisque: $1 \leq u_n < \sqrt[3]{3}$ alors: $0 < u_n^3 + 6 < 9$

donc : $\frac{1}{u_n^3 + 6} > \frac{1}{9}$ d'où : $\frac{9}{u_n^3 + 6} > 1$

on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et $u_n > 0$; alors : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} > u_n$

Par conséquent la suite (u_n) est strictement croissante.

4) • Dédution :

La suite (u_n) est strictement croissante et majorée par $\sqrt[3]{3}$, donc elle est convergente.

• Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

On a : • f est continue sur $I = [0; \sqrt[3]{3}]$ • $f(I) \subset I$

• $u_0 \in I$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$

et puisque la suite (u_n) est convergente , alors sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$ sur I .

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in I, \text{ on a : } f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{9x}{x^3 + 6} = x \\ &\Leftrightarrow x(x^3 - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 = 3 \text{ ou } x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3} \text{ ou } x = 0 \end{aligned}$$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 1$ donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq 1$, d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt[3]{3}$

Exercice 25

1) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq \sqrt{\alpha}$

• Initialisation: Pour $n = 0$, on a : $u_0 \in [0; \sqrt{\alpha}]$ (d'après les données)

donc : $0 \leq u_0 \leq \sqrt{\alpha}$

• Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que : $0 \leq u_n \leq \sqrt{\alpha}$, et montrons que : $0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{\alpha}$

on a : $u_n \geq 0$ et $\alpha > 0$, donc : $u_n + \alpha > 0$ et $u_n + 1 > 0$

d'où : $\frac{u_n + \alpha}{u_n + 1} > 0$, c'est-à-dire : $u_{n+1} \geq 0$ (1)

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ et on a : } u_{n+1} - \sqrt{\alpha} &= \frac{u_n + \alpha}{u_n + 1} - \sqrt{\alpha} \\
 &= \frac{u_n + \alpha - u_n \sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha}}{u_n + 1} \\
 &= \frac{u_n(1 - \sqrt{\alpha}) - \sqrt{\alpha}(1 - \sqrt{\alpha})}{1 + u_n} = \frac{(1 - \sqrt{\alpha})(u_n - \sqrt{\alpha})}{u_n + 1}
 \end{aligned}$$

et puisque : $0 \leq u_n \leq \sqrt{\alpha}$, alors : $u_n - \sqrt{\alpha} \leq 0$ et $u_n + 1 > 0$

et on a : $0 < \alpha < 1$, donc : $1 - \sqrt{\alpha} > 0$, d'où : $\frac{(1 - \sqrt{\alpha})(u_n - \sqrt{\alpha})}{u_n + 1} \leq 0$,

c'est-à-dire : $u_{n+1} - \sqrt{\alpha} \leq 0$, ainsi : $u_{n+1} \leq \sqrt{\alpha}$ (2)

en déduit que : $0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{\alpha}$, ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n \leq \sqrt{\alpha}$

b) Montrons que la suite (u_n) est convergente

• Étudions la monotonie de la suite (u_n) :

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + \alpha}{u_n + 1} - u_n \\
 &= \frac{u_n + \alpha - u_n^2 - u_n}{u_n + 1} = \frac{\alpha - u_n^2}{u_n + 1}
 \end{aligned}$$

et puisque : $0 \leq u_n \leq \sqrt{\alpha}$, alors : $\alpha - u_n^2 \geq 0$ et $u_n + 1 > 0$

donc : $\frac{\alpha - u_n^2}{u_n + 1} \geq 0$, d'où : $u_{n+1} \geq u_n$, par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \geq u_n$

Donc la suite (u_n) est croissante.

Puisque (u_n) est croissante, et majorée par $\sqrt{\alpha}$, alors elle est convergente.

* Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

Soit f la fonction numérique définie sur $[0; \sqrt{\alpha}]$ par : $f(x) = \frac{x + \alpha}{x + 1}$

on a : * f est continue sur $[0; \sqrt{\alpha}]$

* $f([0; \sqrt{\alpha}]) \subset [0; \sqrt{\alpha}]$ (Remarquer que f est strictement croissante sur $[0; \sqrt{\alpha}]$ et $f([0; \sqrt{\alpha}]) = [\alpha; \sqrt{\alpha}]$)

* $u_0 \in [0; \sqrt{\alpha}]$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n)$

et puisque (u_n) est convergente, alors sa limite est une solution de l'équation

$f(x) = x$ sur l'intervalle $[0; \sqrt{\alpha}]$.

$$\begin{aligned}\text{Soit } x \in [0; \sqrt{\alpha}] \text{ on a : } f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{x+\alpha}{x+1} = x \\ &\Leftrightarrow x + \alpha = x^2 + x \\ &\Leftrightarrow x^2 = \alpha \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{\alpha} \text{ (car } x \geq 0)\end{aligned}$$

$$\text{donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{\alpha}$$

2) a) Soit k un élément de $\mathbb{N}$, tel que $k \geq 2$

* Vérifions que : $k! \geq 2^{k-1}$

$$\text{On a : } \forall p \in \{2; 3; 4; \dots; k\} ; p \geq 2, \text{ donc : } \prod_{p=2}^k p \geq \prod_{p=2}^k 2$$

$$\text{et puisque : } \prod_{p=2}^k p = 2 \times 3 \times \dots \times k = 1 \times 2 \times \dots \times k = k!$$

$$\text{et } \prod_{p=2}^k 2 = \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{(k-1) \text{ fois}} = 2^{k-1}, \text{ alors : } k! \geq 2^{k-1}$$

* Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n < 3\sqrt{\alpha}$

- Pour $n = 0$, on a : $v_0 = u_0$ et $u_0 = \sqrt{\alpha}$ et $\sqrt{\alpha} < 3\sqrt{\alpha}$, donc : $v_0 < 3\sqrt{\alpha}$

- Pour $n = 1$ on a : $v_1 = u_0 + u_1$ et $u_0 \leq \sqrt{\alpha}$ et $u_1 \leq \sqrt{\alpha}$

donc : $v_1 \leq 2\sqrt{\alpha}$, d'où : $v_1 < 3\sqrt{\alpha}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$, tel que : $n \geq 2$

$$\text{On a : } v_n = \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{k!} = u_0 + u_1 + \sum_{k=2}^n \frac{u_k}{k!}$$

$$\text{et on a : } \forall k \in \{2; 3; \dots; n\} ; k! \geq 2^{k-1}, \text{ donc : } \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\text{et puisque : } 0 \leq u_k \leq \sqrt{\alpha}, \text{ alors : } \frac{u_k}{k!} \leq \frac{\sqrt{\alpha}}{2^{k-1}}$$

$$\text{d'où : } \sum_{k=2}^n \frac{u_k}{k!} \leq \sum_{k=2}^n \frac{\sqrt{\alpha}}{2^{k-1}}$$

$$\text{or : } \sum_{k=2}^n \frac{\sqrt{\alpha}}{2^{k-1}} = \sqrt{\alpha} \cdot \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = \sqrt{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right)$$

$$= \sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \sqrt{\alpha} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right)$$

$$\text{et puisque : } 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 1, \text{ alors : } \sqrt{\alpha} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) < \sqrt{\alpha}$$

c'est-à-dire : $\sum_{k=2}^n \frac{\sqrt{\alpha}}{2^{k-1}} < \sqrt{\alpha}$, donc : $\sum_{k=2}^n \frac{u_k}{k!} < \sqrt{\alpha}$

d'où : $v_n < u_0 + u_1 + \sqrt{\alpha}$ et on a : $u_0 \leq \sqrt{\alpha}$ et $u_1 \leq \sqrt{\alpha}$, donc : $v_n < 3\sqrt{\alpha}$

par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n < 3\sqrt{\alpha}$

b) Dédution:

* Étudions la monotonie de la suite (v_n) :

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{u_k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{k!} + \frac{u_{n+1}}{(n+1)!} - \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{k!} = \frac{u_{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

et puisque : $\frac{u_{n+1}}{(n+1)!} \geq 0$, alors : $v_{n+1} - v_n \geq 0$, c'est-à-dire : $v_{n+1} \geq v_n$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n \leq v_{n+1}$ c'est-à-dire que la suite (v_n) est croissante

• La suite (v_n) est croissante, et majorée par $3\sqrt{\alpha}$, donc elle est convergente.

Exercice 25

1) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < x_n < 1$

• Initialisation: pour $n = 0$, on a: $x_0 = \frac{1}{2}$ et $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc $0 < x_0 < 1$

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < x_n < 1$ et montrons que: $0 < x_{n+1} < 1$

$$\text{On a: } x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n + 1 + \sqrt{1 + x_n^2}}$$

et puisque $x_n > 0$ alors $x_n + 1 + \sqrt{1 + x_n^2} > 0$, donc $x_{n+1} > 0$ (1)

$$\begin{aligned} \text{et on a: } x_{n+1} - 1 &= x_n - \sqrt{1 + x_n^2} \\ &= \frac{-1}{x_n + \sqrt{1 + x_n^2}} \end{aligned}$$

et puisque $x_n > 0$, alors $x_n + \sqrt{1 + x_n^2} > 0$ donc $x_{n+1} - 1 < 0$ (2)

De (1) et (2) on déduit que $0 < x_{n+1} < 1$

• Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < x_n < 1$

2) Montrons que la suite (x_n) est décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a: $x_{n+1} - x_n = 1 - \sqrt{1+x_n^2} = \frac{-x_n^2}{1+\sqrt{1+x_n^2}}$

et puisque $-x_n^2 < 0$ et $1 + \sqrt{1+x_n^2} > 0$ alors $x_{n+1} - x_n < 0$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_{n+1} < x_n$, par conséquent, la suite (x_n) est décroissante.

3) Dédution:

La suite (x_n) est décroissante, minorée par 0, donc elle est convergente

• Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [0; 1]$ par

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{1+x^2}$$

f est dérivable sur I et on a: $(\forall x \in I) ; f'(x) = \frac{1}{(x + \sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}$

on a: $(\forall x \in I) ; f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur l'intervalle I

est puisque f est continue sur I alors: $f(I) = [f(0); f(1)] = [0; 2 - \sqrt{2}]$

on a: $f(I) \subset I$ (car $2 - \sqrt{2} < 1$) d'où les conditions suivantes sont vérifiées:

- $x_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N} ; x_{n+1} = f(x_n)$
- f est continue sur l'intervalle I et $f(I) \subset I$
- La suite (x_n) est convergente

D'où la limite de la suite (x_n) est une solution de l'équation $f(x) = x$ sur $I = [0; 1]$

$$\begin{aligned}\text{Soit } x \in I \text{ on a: } f(x) = x &\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow 1+x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0\end{aligned}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

VIII Suites adjacentes

Si $(u_n)_{n \in I}$ et $(v_n)_{n \in I}$ sont deux suites telles que:

(1) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$$

alors (u_n) et (v_n) sont convergentes et admettent la même limite.

Les suites (u_n) et (v_n) vérifiant (1) et (2) sont dites adjacentes.

Exercices d'application

Exercice 26

On considère la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1} = \frac{7}{u_n + 6} \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$.

On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; u_n > 0$

1) Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n , puis y_{n+1} en fonction de y_n .

2) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); x_n < 1 < y_n$;

b- Montrer que $(x_n)_{n \geq 1}$ est croissante et que $(y_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

3- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); |1 - u_n| < \frac{1}{6^{n-1}}$

4- En déduire que les suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

Exercice 27

On considère la suite $(s_n)_{n \geq 1}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); s_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p}}$

1) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

b- Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ et : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{\sqrt{n}} = 2$

2) On considère la suite (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = s_n - 2\sqrt{n}$

a- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n > -2$. Que peut-on conclure ?

3) On considère la suite (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_n = s_n - 2\sqrt{n+1}$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 28

Soit a et b deux nombres réels tels que: $a > b > 0$

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$\begin{cases} a_0 = a ; b_0 = b \\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \end{cases}$$

- 1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n > b_n > 0$
- 2) Montrer que la suite (a_n) est strictement décroissante et que la suite (b_n) est strictement croissante.
- 3) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n - b_n)$
- 4) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
- 5) En déduire que $(a_n \times b_n)_n$ est constante et en déduire la limite commune des suites (a_n) et (b_n) .

Exercice 29

Soit a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a ; v_0 = b \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \sqrt{u_n \cdot v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

- 1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < v_n$
- 2) Étudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n) .
- 3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 30

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$

- 1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2 \leq u_n \leq 3$
- 2) Pour tout entier naturel n , on pose : $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$

Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n puis b_{n+1} en fonction de b_n

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < a_n < b_n$

b) Étudier la monotonie des suites (a_n) et (b_n)

4) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{25}(b_n - a_n)$

b) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

Exercice 31

On considère les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ définies par :

$$(\forall n \geq 2) ; u_n = 2^{n+1} \times \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \text{ et } v_n = 2^{n+1} \times \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

1) Montrer que (u_n) est strictement croissante et (v_n) strictement décroissante.

2) a) Montrer que : $(\forall n \geq 2) ; u_n < v_n$

b) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$

3) En déduire que les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont convergentes et calculer leurs limites.

Exercice 32

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{1+x}$

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $x_n = u_{2n+1}$ et $y_n = x_{2n}$

1) Montrer que f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ et que

$$f([0; +\infty[) \subset [0; +\infty[$$

2) a) Montrer par récurrence que la suite (x_n) est strictement croissante et que la suite (y_n) est strictement décroissante. (On montrera d'abord que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; fof(x_n) = u_{n+1} \text{ et } y_{n+1} = fof(y_n))$$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n \leq y_n$.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; |u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

4) a) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes et calculer leur limite commune

b) Montrer que la suite (u_n) est convergente puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Solutions

Exercice 26

1) Exprimons x_{n+1} en fonction de x_n puis y_{n+1} en fonction de y_n :

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N} ; x_{n+1} = u_{2n+2} = \frac{7}{u_{2n+1} + 6} = \frac{7}{\frac{7}{u_{2n} + 6} + 6} = \frac{7(u_{2n} + 6)}{7 + 6(u_{2n} + 6)}$$

$$\text{Donc } (\forall n \in \mathbb{N}) ; x_{n+1} = \frac{7x_n + 42}{6x_n + 43}$$

$$\text{On montre de même que : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; y_{n+1} = \frac{7y_n + 42}{6y_n + 43}$$

2) a- Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; x_n < 1 < y_n$:

• Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; x_n < 1$

• Initialisation :

Pour $n = 1$, $x_1 = u_2 = \frac{7}{8}$ donc : $x_1 < 1$; la proposition est donc vraie au rang initial

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons que : $x_n < 1$ et montrons que : $x_{n+1} < 1$

$$\text{On a : } x_{n+1} - 1 = \frac{7x_n + 42}{6x_n + 43} - 1 = \frac{x_n - 1}{6x_n + 43}$$

$$0 < x_n < 1 \Rightarrow (x_n - 1 < 0 \text{ et } 6x_n + 43 > 0)$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - 1 < 0$$

Donc $x_{n+1} < 1$

Conclusion/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; x_n < 1$

On montre de même que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; y_n > 1$. donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; x_n < 1 < y_n$

b- Montrons par récurrence que $(x_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

• Initialisation: Pour $n = 1$, on a : $x_1 = u_2 = \frac{7}{8}$ et $x_2 = \frac{385}{386}$, donc $x_2 \geq x_1$

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons que $x_{n+1} \geq x_n$,

montrons que : $x_{n+2} \geq x_{n+1}$

$$\text{on a : } x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{7x_{n+1} + 42}{6x_{n+1} + 43} - \frac{7x_n + 42}{6x_n + 43} = \frac{49(x_{n+1} - x_n)}{(6x_{n+1} + 43)(6x_n + 43)}$$

or $x_{n+1} - x_n \geq 0$; et $6x_{n+1} + 43 > 0$; $6x_n + 43 > 0$ donc : $x_{n+2} \geq x_{n+1}$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); x_{n+1} \geq x_n$

Donc la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est croissante. on montre de même que la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

3) montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); |1 - u_n| < \frac{1}{6^{n-1}}$;

• Initialisation :

Pour $n = 2$ on a : $|1 - u_2| = \left|1 - \frac{7}{8}\right| = \frac{1}{8} < \frac{1}{6^{2-1}}$, donc la proposition est vraie au rang initial.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, supposons que : $|1 - u_n| < \frac{1}{6^{n-1}}$, et

montrons que : $|1 - u_{n+1}| < \frac{1}{6^n}$

$$\text{on a : } |1 - u_{n+1}| = \left|1 - \frac{7}{u_n + 6}\right| = |1 - u_n| \times \frac{1}{u_n + 6}$$

$$u_n > 0 \Rightarrow \frac{1}{u_n + 6} < \frac{1}{6}$$

or, d'après l'hypothèse de récurrence : $|1 - u_n| < \frac{1}{6^{n-1}}$

d'où : $|1 - u_{n+1}| < \frac{1}{6^{n-1}} \times \frac{1}{6}$ c'est-à-dire : $|1 - u_{n+1}| < \frac{1}{6^n}$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); |1 - u_n| < \frac{1}{6^{n-1}}$;

4) Dédisons que : $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$; on a : $|1 - x_n| = |1 - u_{2n}|$ et $|1 - u_{2n}| < \frac{1}{6^{2n-1}}$

Donc : $|1 - x_n| < \frac{1}{6^{2n-1}}$, or : $-1 < \frac{1}{6} < 1$ donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{2n-1} = 0$

d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |1 - x_n| = 0$, et par suite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ et on montre de même que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 1 \text{ donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$$

On a : * La suite (x_n) est croissante ; * La suite (y_n) est décroissante ;

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$$

Donc les suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

Exercice 27

1) a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sqrt{n-1} < \sqrt{n} < \sqrt{n+1}$

$$\text{Donc : } \sqrt{n} + \sqrt{n-1} < 2\sqrt{n} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$$

$$\text{D'où : } \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$$

$$\text{c'est-à-dire : } \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

b- Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{\sqrt{n}} = 2$

$$\bullet \text{ On a : } s_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\text{D'après 1) a- on a : } \sum_{p=1}^{p=n} 2(\sqrt{p+1} - \sqrt{p}) < \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p}} < \sum_{p=1}^{p=n} 2(\sqrt{p} - \sqrt{p-1})$$

$$\text{Donc : } 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{1}) < \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{0}) ;$$

$$\text{d'où : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; s_n > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

$$\text{or : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2(\sqrt{n+1} - 1) = +\infty \text{ et } s_n > 2(\sqrt{n+1} - 1) \text{ donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$$

* D'après l'inégalité précédente , on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 2(\sqrt{n+1} - 1) < s_n < 2\sqrt{n}$

$$\text{Donc : } 2\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \frac{s_n}{\sqrt{n}} < 2$$

$$\text{or : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \text{ donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2$$

$$\text{et comme : } 2\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \frac{s_n}{\sqrt{n}} < 2, \text{ alors : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{\sqrt{n}} = 2$$

2) a- Montrons que (u_n) est décroissante :.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } u_n = s_n - 2\sqrt{n} \text{ donc : } u_{n+1} = s_{n+1} - 2\sqrt{n+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } u_{n+1} - u_n &= s_{n+1} - s_n - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\ &= \sum_{p=1}^{p=n+1} \frac{1}{\sqrt{p}} - \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p}} + 2(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) \end{aligned}$$

$$\text{d'après la question 1) a - on a : } \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$\text{donc : } \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) < 0$$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_{n+1} - u_n < 0$, et par conséquent, la suite (u_n) est strictement décroissante.

b- Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n > -2$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_n = s_n - 2\sqrt{n}$ et d'après le résultat précédent ;

$$s_n > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

$$\text{Donc : } u_n > 2(\sqrt{n+1} - 1) - 2\sqrt{n} \text{ d'où : } u_n > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 2$$

$$\text{c'est-à-dire : } u_n + 2 > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$\text{or : } \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0, \text{ donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n + 2 > 0$$

• Dédution :

Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée par -2 , alors elle est convergente.

3) Montrons que $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes

* La suite (u_n) est décroissante. (1)

* Montrons que $(v_n)_{n \geq 1}$ est croissante

$$\begin{aligned}\text{Soit } n \in \mathbb{N}^* ; v_{n+1} - v_n &= (s_{n+1} - 2\sqrt{n+2}) - (s_n - 2\sqrt{n+1}) \\ &= s_{n+1} - s_n - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2})\end{aligned}$$

D'après la question 1) a- on a : $\frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$

Donc : $\frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}) > 0$, d'où : $v_{n+1} - v_n > 0$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) v_{n+1} > v_n$. La suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est donc strictement croissante. (2)

$$\begin{aligned}\text{* Soit } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } u_n - v_n &= s_n - 2\sqrt{n} - s_n + 2\sqrt{n+1} \\ &= 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\end{aligned}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0, \text{ donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0 \quad (3)$$

De : (1) ; (2) et (3), on déduit que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

Exercice 28

1) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n > b_n > 0$:

* On peut montrer facilement, par récurrence, que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : a_n > 0$
et $b_n > 0$;

• Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n > b_n$

Initialisation : pour $n = 0$, on a : $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et $a > b$,
donc : $a_0 > b_0$

La proposition est donc vraie au rang initial.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$;

Supposons que : $a_n > b_n$ et montrons que $a_{n+1} > b_{n+1}$

$$\text{On a : } a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = \frac{(a_n + b_n)^2 - 4a_n b_n}{2(a_n + b_n)} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)}$$

or : $a_n > 0$; $b_n > 0$ et d'après l'hypothèse de récurrence : $a_n > b_n$,

donc $a_n \neq b_n$

d'où : $a_{n+1} - b_{n+1} > 0$ c'est-à-dire : $a_{n+1} > b_{n+1}$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n > b_n > 0$

2) Montrons que (a_n) est décroissante et (b_n) est croissante :

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$

Puisque : $b_n - a_n < 0$ alors $a_{n+1} < a_n$

$$\bullet \text{ On a : } b_{n+1} - b_n = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} - b_n = \frac{a_n b_n - b_n^2}{a_n + b_n} = \frac{b_n(a_n - b_n)}{a_n + b_n}$$

Puisque : $a_n > b_n > 0$, alors $b_{n+1} - b_n > 0$, donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) : a_{n+1} < a_n$ et $b_{n+1} > b_n$

Donc (a_n) est strictement décroissante et (b_n) est strictement croissante.

3) Montrons que : $a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n - b_n)$:

Méthode 1: Soit $n \in \mathbb{N}$;

Déterminons le signe de $2(a_{n+1} - b_{n+1}) - (a_n - b_n)$

$$\begin{aligned} \text{on a : } 2(a_{n+1} - b_{n+1}) - (a_n - b_n) &= a_n + b_n - \frac{4a_n b_n}{a_n + b_n} - a_n + b_n \\ &= 2b_n - \frac{4a_n b_n}{a_n + b_n} \\ &= \frac{2a_n b_n + 2b_n^2 - 4a_n b_n}{a_n + b_n} \\ &= \frac{2b_n(b_n - a_n)}{a_n + b_n} \end{aligned}$$

Puisque $a_n > 0$, $b_n > 0$ et $b_n - a_n < 0$ alors : $2(a_{n+1} - b_{n+1}) - (a_n - b_n) < 0$

d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n - b_n)$

Méthode 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\text{On a : } a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \left(\frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} \right)$$

Puisque : $a_n > 0$; $b_n > 0$ et $a_n > b_n$; alors : $0 < \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} < 1$

$$\text{Donc : } 0 < \frac{1}{2}(a_n - b_n) \left(\frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} \right) < \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

$$\text{d'où } (\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

4) Déduisons que (a_n) et (b_n) sont adjacentes :

$$\text{on a : } \begin{cases} 0 < a_n - b_n < \frac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1}) \\ 0 < a_{n-1} - b_{n-1} < \frac{1}{2}(a_{n-2} - b_{n-2}) \\ \vdots \\ 0 < a_1 - b_1 < \frac{1}{2}(a_0 - b_0) \end{cases}$$

En multipliant , membre à membre ces doubles inégalités strictement positives , et après simplification, on obtient : $0 < a_n - b_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - b_0)$

$$\text{on a : } -1 < \frac{1}{2} < 1 ; \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ d'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$$

En résumant les résultats précédents, on a :

- La suite (a_n) est strictement décroissante
- La suite (b_n) est strictement croissante
- $\lim(a_n - b_n) = 0$

Donc les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

5) Montrons que la suite $(a_n \times b_n)$ est constante

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N} , \text{ on a : } a_{n+1} \times b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \times \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = a_n \times b_n$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_{n+1} b_{n+1} = a_n b_n$; d'où la suite $(a_n \times b_n)$ est constante

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n b_n = ab$

- Déduisons la limite de (a_n) et (b_n)

Puisque les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, alors elles ont une même limite l : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n) = l \times l = ab$

donc : $l^2 = ab$, et puisque : $l \geq 0$ car $a_n > 0$, alors : $l = \sqrt{ab}$,

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{ab}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \sqrt{ab}$.

Exercice 29

1) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < v_n$:

Initialisation : • Pour $n = 0$, on a : $u_0 = a$ et $v_0 = b$ et puisque $0 < a < b$, alors : $0 < u_0 < v_0$

• Hérédité ; soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $0 < u_n < v_n$,

montrons que : $0 < u_{n+1} < v_{n+1}$

On a : $0 < u_n < v_n$, donc $\sqrt{u_n \cdot v_n} > 0$ et $\frac{u_n + v_n}{2} > 0$ donc $u_{n+1} > 0$

et $v_{n+1} > 0$

$$\begin{aligned} \text{on a : } v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n \cdot v_n} \\ &= \frac{1}{2} (u_n + v_n - 2\sqrt{u_n \cdot v_n}) \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 \end{aligned}$$

Puisque : $0 < u_n < v_n$, alors : $\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n} < 0$, donc : $\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n} \neq 0$,

d'où : $\frac{1}{2} (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 > 0$ Ainsi : $v_{n+1} > u_{n+1} > 0$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < v_n$

2) • Étudions la monotonie de (u_n) :

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n \cdot v_n} - u_n = \frac{u_n \cdot v_n - u_n^2}{\sqrt{u_n \cdot v_n} + u_n} = \frac{u_n (v_n - u_n)}{\sqrt{u_n \cdot v_n} + u_n}$$

Puisque : $0 < u_n < v_n$, alors : $v_n - u_n > 0$ et $\sqrt{u_n \cdot v_n} + u_n > 0$

Donc : $\frac{u_n (v_n - u_n)}{\sqrt{u_n \cdot v_n} + u_n} > 0$, et par conséquent : $u_{n+1} - u_n > 0$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est donc strictement croissante.

• Étudions la monotonie de la suite (v_n) :

$$\begin{aligned}\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n + v_n}{2} - v_n \\ &= \frac{u_n + v_n - 2v_n}{2} = \frac{u_n - v_n}{2}\end{aligned}$$

Puisque : $0 < u_n < v_n$ alors : $u_n - v_n < 0$ donc : $v_{n+1} - v_n < 0$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} < v_n$. La suite (v_n) est donc strictement décroissante.

3) Montrons que (u_n) et (v_n) sont adjacentes

• Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2$$

$$\text{or : } \sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} = \frac{v_n - u_n}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}} \text{ donc : } (\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2 = (v_n - u_n) \times \frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}}$$

$$\text{et puisque, } 0 < \sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} < \sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}, \text{ alors : } \frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}} < 1$$

$$\text{Donc : } (v_n - u_n) \times \frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}} < v_n - u_n \text{ (car : } v_n - u_n > 0 \text{)},$$

$$\text{d'où } (\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2 < v_n - u_n$$

$$\text{Donc : } v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

$$\text{Conclusion : } (\forall k \in \mathbb{N}) ; 0 < v_{k+1} - u_{k+1} < \frac{1}{2}(v_k - u_k)$$

$$\begin{aligned}\text{en remplaçant } k \text{ successivement par : } &\begin{cases} 0 < v_1 - u_1 < \frac{1}{2}(v_0 - u_0) \\ 0 < v_2 - u_2 < \frac{1}{2}(v_1 - u_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 < v_n - u_n < \frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1}) \end{cases} \\ 0 ; 1 ; 2 ; \dots ; (n-1), \text{ on obtient : } &\end{aligned}$$

Par produit membre à membre ces doubles inégalité strictement positives et après simplification on obtient :

$$0 < v_n - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$$

$$\text{Puisque : } -1 < \frac{1}{2} < 1, \text{ alors : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0, \text{ donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a) = 0$$

$$\text{d'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0 \text{ (d'après un critère de convergence)}$$

on a alors : • (u_n) est croissante. • (v_n) est décroissante. • $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$

Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 30

1) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2 \leq u_n \leq 3$

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 2$ et $2 \leq 2 \leq 3$ donc $2 \leq u_0 \leq 3$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé

Supposons que : $2 \leq u_n \leq 3$ et montrons que : $2 \leq u_{n+1} \leq 3$

On a : $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{7}{3} \leq 2 + \frac{1}{u_n} \leq \frac{5}{2}$ donc $2 \leq 2 + \frac{1}{u_n} \leq 3$,

d'où : $2 \leq u_{n+1} \leq 3$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2 \leq u_n \leq 3$

2) • Exprimons a_{n+1} en fonction de a_n

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{On a : } a_{n+1} = u_{2n+2} = 2 + \frac{1}{u_{2n+1}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{u_{2n}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{a_n}} = \frac{5a_n + 2}{2a_n + 1}$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; a_{n+1} = \frac{5a_n + 2}{2a_n + 1}$$

• Exprimons b_{n+1} en fonction de b_n

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ On a : } b_{n+1} = u_{2n+3} = 2 + \frac{1}{u_{2n+2}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{u_{2n+1}}}$$

$$b_{n+1} = 2 + \frac{2}{2 + \frac{1}{b_n}} = 2 + \frac{b_n}{2b_n + 1} = \frac{5b_n + 2}{2b_n + 1}$$

$$\text{D'où : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; b_{n+1} = \frac{5b_n + 2}{2b_n + 1}$$

3) a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < a_n < b_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$, On a : $a_n > 0$ (car $u_{2n} \geq 2$ donc $u_{2n} > 0$), donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n > 0$

Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n < b_n$

• Initialisation : Pour $n = 0$; on a : $b_0 = \frac{5}{2}$ et $a_0 = 2$ donc : $a_0 < b_0$.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$; Suppose que : $a_n < b_n$ et montrons que : $a_{n+1} < b_{n+1}$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } b_{n+1} - a_{n+1} &= \frac{5b_n + 2}{2b_n + 1} - \frac{5a_n + 2}{2a_n + 1} \\
 &= \frac{(5b_n + 2)(2a_n + 1) - (5a_n + 2)(2b_n + 1)}{(2b_n + 1)(2a_n + 1)} \\
 &= \frac{10a_n b_n + 5b_n + 4a_n + 2 - 10a_n b_n - 5a_n - 4b_n - 2}{(2b_n + 1)(2a_n + 1)} \\
 &= \frac{b_n - a_n}{(2b_n + 1)(2a_n + 1)}
 \end{aligned}$$

• On a : $a_n > 0$ et $b_n > 0$ donc $(2b_n + 1)(2a_n + 1) > 0$, et d'après l'hypothèse de récurrence, $a_n < b_n$ d'où : $b_n - a_n > 0$

Ainsi : $b_{n+1} > a_{n+1}$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n < b_n$

b) Étudions la monotonie de la suite (a_n) en utilisant le raisonnement par récurrence

• Initialisation : Pour $n = 0$;

On a : $a_0 = 2$ et $a_1 = u_2 = 2 + \frac{1}{u_1} = \frac{12}{5}$ donc $a_0 < a_1$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$;

Supposons que $a_n < a_{n+1}$, et montrons que $a_{n+1} < a_{n+2}$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } a_{n+2} - a_{n+1} &= \frac{5a_{n+1} + 2}{2a_{n+1} + 1} - \frac{5a_n + 2}{2a_n + 1} \\
 &= \frac{(5a_{n+1} + 2)(2a_n + 1) - (5a_n + 2)(2a_{n+1} + 1)}{(2a_{n+1} + 1)(2a_n + 1)} \\
 &= \frac{10a_n a_{n+1} + 5a_{n+1} + 4a_n + 2 - 10a_n a_{n+1} - 5a_n - 4a_{n+1} - 2}{(2a_{n+1} + 1)(2a_n + 1)} \\
 &= \frac{a_{n+1} - a_n}{(2a_{n+1} + 1)(2a_n + 1)}
 \end{aligned}$$

Puisque $2a_n + 1 > 0$ et $2a_{n+1} + 1 > 0$ et $a_{n+1} - a_n > 0$ (d'après l'hypothèse de récurrence); alors $a_{n+2} > a_{n+1}$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n < a_{n+1}$; donc la suite (a_n) est strictement croissante

• Étudions le monotonie de la suite (b_n) en utilisant le raisonnement par récurrence

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a: $b_0 = u_1 = \frac{5}{2}$ et $b_1 = u_3 = \frac{29}{12}$

donc: $b_1 < b_0$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que: $b_{n+1} < b_n$ et montrons que:

$$b_{n+2} < b_{n+1}$$

$$\text{On a: } b_{n+2} - b_{n+1} = \frac{5b_{n+1} + 2}{2b_{n+1} + 1} - \frac{5b_n + 2}{2b_n + 1} = \frac{b_{n+1} - b_n}{(2b_{n+1} + 1)(2b_n + 1)}$$

Puisque: $2b_n + 1 > 0$ et $2b_{n+1} + 1 > 0$ et $b_{n+1} - b_n < 0$ (d'après l'hypothèse de récurrence) alors $b_{n+2} - b_{n+1} < 0$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $b_{n+1} < b_n$ d'où la suite (b_n) est strictement décroissante.

4) a) Démontrons l'inégalité demandée

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \in \mathbb{N}; \text{ On a: } b_{n+1} - a_{n+1} &= \frac{b_n - a_n}{(2b_n + 1)(2a_n + 1)} \\ &= \frac{1}{(2b_n + 1)(2a_n + 1)} (b_n - a_n) \end{aligned}$$

Or: $u_n \geq 2$, $a_n \geq 2$ et $b_n \geq 2$ alors: $(2a_n + 1)(2b_n + 1) \geq 25$

$$\text{Donc: } \frac{1}{(2a_n + 1)(2b_n + 1)} \leq \frac{1}{25}$$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{25} (b_n - a_n)$ (car $b_n - a_n > 0$)

b) Dédisons que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes

On a: (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante; reste à montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$$

D'après les résultats précédents, on a: $(\forall p \in \mathbb{N})$; $0 < b_{p+1} - a_{p+1} \leq \frac{1}{25} (b_p - a_p)$

$$\text{Donc : } \left\{ \begin{array}{l} 0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{25}(b_{n-1} - a_{n-1}) \\ 0 < b_{n-1} - a_{n-1} \leq \frac{1}{25}(b_{n-2} - a_{n-2}) \\ \vdots \\ 0 < b_1 - a_1 \leq \frac{1}{25}(b_0 - a_0) \end{array} \right.$$

Par produit membre à membre ces doubles inégalités strictement positives et après simplification, on obtient : $0 < b_n - a_n \leq \left(\frac{1}{25}\right)^n (b_0 - a_0)$

$$\text{Or : } \left\{ \begin{array}{l} b_0 - a_0 = \frac{1}{2}, \text{ donc } (\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < b_n - a_n \leq \left(\frac{1}{25}\right)^n \times \frac{1}{2} \\ b_n - a_n > 0 \end{array} \right.$$

$$\text{On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{25}\right)^n \times \frac{1}{2} = 0 \text{ (car } -1 < \frac{1}{25} < 1) \text{ donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$$

Les trois conditions sont vérifiées, donc : les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

• Déterminons la limite commune ℓ de ces deux suites.

$$\text{On a : } a_{n+1} = \frac{5a_n + 2}{2a_n + 1}; \lim a_n = \ell; \text{ donc : } \lim \frac{5a_n + 2}{2a_n + 1} = \frac{5\ell + 2}{2\ell + 1}$$

$$\text{Or } \lim a_{n+1} = \ell, \text{ donc, d'après l'unicité de la limite } \ell = \frac{5\ell + 2}{2\ell + 1}$$

$$\text{On a : } \ell = \frac{5\ell + 2}{2\ell + 1} \Leftrightarrow \ell = 1 + \sqrt{2} \text{ ou } \ell = 1 - \sqrt{2} \text{ or } \ell \geq 2 \text{ donc : } \ell = 1 + \sqrt{2}$$

$$\text{d'où : } a: \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 1 + \sqrt{2}.$$

Exercice 31

1) • Montrons que (u_n) est strictement croissante :

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que : $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \text{On a : } u_n &= 2^{n+1} \times \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \\ &= 2^{n+1} \times \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \\ &= 2^{n+1} \times 2 \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \\ &= 2^{n+2} \times \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

On a : $u_{n+1} = 2^{n+2} \times \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

Donc : $u_{n+1} - u_n = 2^{n+2} \times \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 2^{n+2} \times \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$
 $= 2^{n+2} \times \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right)$

Or : $0 < \frac{\pi}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{2}$ donc : $0 < \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) < 1$ et $0 < \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) < 1$

D'où : $1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) > 0$ et par suite $2^{n+2} \times \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right) > 0$

Donc : $(\forall n \geq 2); u_{n+1} > u_n$; et par conséquent la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante

• Montrons que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$;

On a : $0 < \frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2}$, donc $\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right) > 0$ et $2^{n+1} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right) > 0$; d'où $v_n > 0$

On a : $v_n = 2^{n+1} \times \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

$$= 2^{n+1} \times \tan\left(2 \times \frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

$$= 2^{n+1} \times \frac{2 \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{2^{n+2} \times \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{v_{n+1}}{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

D'où : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

et comme : $1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) < 1$, alors : $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$; donc $v_{n+1} < v_n$; (car $v_n > 0$)

D'où : $(\forall n \geq 2); v_{n+1} < v_n$; la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est donc strictement décroissante

2) a) Montrons que : $(\forall n \geq 2); u_n < v_n$:

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$; on a : $v_n = 2^{n+1} \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \frac{u_n}{\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$

Puisque : $0 < \frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2}$, alors : $0 < \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) < 1$

Donc : $\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} > 1$, d'où : $\frac{u_n}{\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} > u_n$ (car $u_n > 0$)

Donc : $(\forall n \geq 2); u_n < v_n$

b) Montrons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$

$$\begin{aligned}\text{On a : } u_n - v_n &= 2^{n+1} \times \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - 2^{n+1} \times \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \\ &= 2^{n+1} \times \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - 1\right) \\ &= 2\pi \times \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - 1\right)\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2^n} = 0$ et la fonction $\cos$ est continue en 0, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \cos(0) = 1 \text{ donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - 1 = 0$$

• On considère la fonction φ définie par :
$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{\tan x}{x} ; x \neq 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 1 = \varphi(0)$, donc la fonction φ continue en 0.

et puisque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2^n} = 0$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \varphi(0) = 1$

$$\text{c'est-à-dire : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}} = 1$$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$

3) • Dédudisons que les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont convergentes

On a :

- La suite (u_n) est strictement croissante.
- La suite (v_n) est strictement décroissante.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Donc les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont adjacentes donc convergentes et convergent vers la même limite.

• Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\text{On a : } (\forall n \geq 2) ; v_n = 2\pi \times \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}} = 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2\pi$$

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2\pi$

1) Montrons que f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

• La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on a :

$$(\forall x \in [0; +\infty[) ; f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

Donc : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; f'(x) < 0$, et par conséquent f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

• Montrons que : $f([0; +\infty[\subset [0; +\infty[$

Puisque f est continue et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

$$\text{alors : } f([0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(0) \right[=]0; 1]$$

Or : $]0; 1[\subset [0; +\infty[$, donc : $f([0; +\infty[\subset [0; +\infty[$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } x_{n+1} &= u_{2(n+1)+1} = f(u_{2(n+1)}) \\ &= f(u_{2n+1}+1) = f(f(u_{2n+1})) = f(f(x_n)) \end{aligned}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_{n+1} = fof(x_n)$

On montre de même que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; y_{n+1} = fof(y_n)$

Et puisque f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

et $f([0; +\infty[) \subset [0; +\infty[$ alors la fonction fof est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

a) • Montrons par récurrence que (x_n) est strictement croissante

• Initialisation : Pour $n = 0$

$$\text{On a : } x_0 = u_1 = f(u_0) = \frac{1}{2} \text{ et } x_1 = f(x_0) = fof\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{5} \text{ et } \frac{1}{2} < \frac{3}{5}$$

Donc : $x_0 < x_1$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$

On suppose que $x_n < x_{n+1}$. Montrons que $x_{n+1} < x_{n+2}$

Puisque $(x_n, x_{n+1}) \in ([0; +\infty[)^2$ et fof est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

alors : $x_n < x_{n+1} \implies fof(x_n) < fof(x_{n+1})$

$$\implies x_{n+1} < x_{n+2}$$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n < x_{n+1}$, donc la suite (x_n) est strictement croissante.

Montrons par récurrence que la suite (y_n) est strictement décroissante.

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a :

$$y_0 = u_0 = 1 \text{ et } y_1 = fof(1) = \frac{2}{3} \text{ et } \frac{2}{3} < 1, \text{ donc } y_1 < y_0$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $y_{n+1} < y_n$.

Montrons que : $y_{n+2} < y_{n+1}$

Puisque : $(y_n, y_{n+1}) \in ([0; +\infty[)^2$ et fof est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

$$\text{alors : } y_{n+1} < y_n \implies fof(y_{n+1}) < fof(y_n)$$

$$\implies y_{n+2} < y_{n+1}$$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; y_{n+1} < y_n$, donc la suite (y_n) est strictement décroissante.

b) Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n < y_n$

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $x_0 = \frac{1}{2}$; $y_0 = 1$ et $\frac{1}{2} < 1$, donc $x_0 < y_0$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé

On suppose que : $x_n < y_n$. Montrons que : $x_{n+1} < y_{n+1}$

On a : $(x_n, y_n) \in ([0; +\infty[)^2$ et fof est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

$$\text{Donc : } x_n < y_n \implies fof(x_n) < fof(y_n)$$

$$\implies x_{n+1} < y_{n+1}$$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n < y_n$

3) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1$ et $\frac{1}{2} \leq 1 \leq 1$, donc : $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On suppose que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$. Montrons que : $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

Puisque la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} \text{alors : } \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 &\implies f(1) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\implies \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

et comme : $\frac{2}{3} \leq 1$, alors : $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

• Conclusion : d'après le principe de récurrence ($\forall n \in \mathbb{N}$) ; $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

b) Montrons que : ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) ; $|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } u_{n+1} - u_n &= f(u_n) - f(u_{n-1}) \\ &= \frac{1}{1+u_n} - \frac{1}{1+u_{n-1}} \\ &= \frac{u_{n-1} - u_n}{(1+u_n)(1+u_{n-1})} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } |u_{n+1} - u_n| = \left| \frac{u_{n-1} - u_n}{(1+u_n)(1+u_{n-1})} \right| = \frac{|u_n - u_{n-1}|}{(1+u_n)(1+u_{n-1})}$$

$$\text{Or : } \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \text{ et } \frac{1}{2} \leq u_{n-1} \leq 1$$

$$\text{Donc : } \frac{3}{2} \leq 1 + u_n \leq 2 \text{ et } \frac{3}{2} \leq 1 + u_{n-1} \leq 2$$

$$\text{D'où : } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq \frac{2}{3} \text{ et } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+u_{n-1}} \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{Par produit membre à membre, on obtient : } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{(1+u_n)(1+u_{n-1})} \leq \frac{4}{9}$$

En multipliant de part et d'autre par $|u_n - u_{n-1}|$ on obtient :

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right) |u_n - u_{n-1}|$$

$$\text{On a : } (\forall k \in \mathbb{N}^*) ; |u_{k+1} - u_k| \leq \frac{4}{9} |u_k - u_{k-1}|$$

En remplaçant k successivement par : 1; 2; 3; ...; n on obtient les inégalités

$$\text{suivantes : } \begin{cases} 0 < |u_2 - u_1| \leq \left(\frac{4}{9}\right) |u_1 - u_0| \\ 0 < |u_3 - u_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right) |u_2 - u_1| \\ \vdots \\ 0 < |u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right) |u_n - u_{n-1}| \end{cases}$$

Par produit membre à membre, et après simplification, on obtient :

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |u_1 - u_0|$$

Or : $|u_1 - u_0| = \frac{1}{2}$ donc : $\left(\frac{4}{9}\right)^n |u_1 - u_0| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; |u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$

4) a) • Montrons que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes et calculons leur limite commune puis calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$

Donc : $|u_{2n+1} - u_{2n}| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{2n}$. Soit : $|x_n - y_n| \leq \left(\frac{16}{81}\right)^n$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; |x_n - y_n| \leq \left(\frac{16}{81}\right)^n$

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{16}{81}\right)^n = 0$ (car $-1 < \frac{16}{81} < 1$); donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$

On a : • La suite (x_n) est croissante

• La suite (y_n) est décroissante

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$

Donc : Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes, par suite elles convergent vers la même limite ℓ

• Déterminons ℓ :

On a : • La fonction $f \circ f$ est continue sur $[0; +\infty[$

• $f \circ f([0; +\infty[) \subset [0; +\infty[$

• $x_0 \in [0; +\infty[$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_{n+1} = f \circ f(x_n)$

et puisque la suite (x_n) est convergente, alors sa limite ℓ est une solution de l'équation $f \circ f(x) = x$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$

Soit $x \in [0; +\infty[$ on a : $f \circ f(x) = f\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{x+1}{x+2}$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } f \circ f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x+2} = x \\ &\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

et puisque : $\ell \geq 0$ alors : $\ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

b) • Montrons que la suite (u_n) est convergente et calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

c'est-à-dire : $(\forall \varepsilon > 0); (\exists N \in \mathbb{N}); (\forall n \in \mathbb{N}) ; n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$

$$\text{On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Soit $\varepsilon > 0$; $(\exists N_1 \in \mathbb{N}); (\forall n \in \mathbb{N}) ; n \geq N_1 \Rightarrow |u_{2n} - \ell| < \varepsilon$

et $(\exists N_2 \in \mathbb{N}); (\forall n \in \mathbb{N}) ; n \geq N_2 \Rightarrow |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$

En prenant $N = \max(2N_1; 2N_2 + 1)$ on obtient : $(\forall \varepsilon > 0); (\exists N \in \mathbb{N})$

$(\forall n \in \mathbb{N}) ; n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Exercices de synthèses

Exercice 33

Soit (u_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 1$

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n) .

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 2 \leq u_n^2 - u_{n-1}^2 \leq 2 + u_n - u_{n-1}$ (1)

$$\text{et } 2n \leq u_n^2 - 1 \leq 2n + u_n - 1 \quad (2)$$

b) En déduire que la suite (u_n) est divergente.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1 - \frac{1}{u_n} \leq \frac{2n}{u_n^2} \leq 1 - \frac{1}{u_n^2}$

b) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2n}}{u_n} = 1$

Exercice 34

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$
et $u_0 = 1$

1) Calculer u_1 et u_2 , et montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n$

2) Montrer que $(\forall x \in [0; +\infty[) ; \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x)$

3) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \sqrt{n} \leq u_n$

b- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq n + \frac{1}{2^n}$

c- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \leq \sqrt{2n}$

En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$

4) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = u_n - \sqrt{n}$; montrer que (v_n) est convergente.

Exercice 35

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$

1) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k \right) - \frac{1}{6n^6} \left(\sum_{k=1}^n k^3 \right) \leq u_n \leq \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k \right)$

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \sum_{k=1}^n k^3 \leq n^4$

2) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 36

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $0 < \alpha < 1$

On considère les suites (a_n) et (S_n) définies par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n = (1-\alpha)^n \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

1) Montrer que les suites (a_n) et (S_n) sont convergentes puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

2) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 > 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$

a - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$ et que (u_n) est une suite strictement croissante.

b - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq u_0 + \frac{1}{\alpha u_0}$

c - En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 37

1- Soit (u_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$

Montrer que (u_n) est convergente en déterminant sa limite.

2- On considère la suite (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = \sin\left(\frac{a}{2^n}\right) \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$

où $a \in \mathbb{R}$, tel que $a \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Montrer que la suite (v_n) est convergente.

3) a- Soit $x \in \mathbb{R}$, tel que $x \neq \frac{k\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$

Vérifier que : $\tan x = \cotan x - 2\cotan(2x)$

b- On considère la suite (w_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; w_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$

où $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq \frac{k\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$:

Exercice 38

Pour tout entier naturel non nul n , on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$

par : $f_n(x) = x^3 + nx - 1$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n sur $\mathbb{R}$ et que : $0 < x_n < 1$

2) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante, et en déduire qu'elle est convergente.

3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < x_n < \frac{1}{n}$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

Exercice 39

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = 2x^3 - x^2 + 2(n+1)x - 1$$

1) a- Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n sur $[0;1]$.

b- Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ selon les valeurs de x .

c- En déduire que (α_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

2) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{-1}{2n+2} \leq \alpha_n \leq \frac{1}{n+1}$

b- En déduire $\lim \alpha_n$

Exercice 40

On considère la fonction polynôme P_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - 1 \text{ tel que } (n \in \mathbb{N}^*)$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n sur l'intervalle $[0;1]$.

2) a- Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[) ; P_{n+1}(x) > P_n(x)$

b- En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante

3) a- Soit $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$\text{Montrer que : } P_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 2$$

b- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 2\alpha_n - (\alpha_n)^{n+1} - 1 = 0$

c- Déterminer α_2 et vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} ; \alpha_n < \alpha_2$, et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$

d- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 41

1) Soit (u_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Calculer u_2 et u_3

2) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a :

a) $u_n \geq n$ b) $u_n \times u_{n+2} + (-1)^{n+1} = (u_{n+1})^2$

II) Soit (α_n) et (β_n) les suites définies par : $\alpha_n = \frac{u_{2n-1}}{u_{2n}}$ et $\beta_n = \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \beta_n - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n} \cdot u_{2n+1}}$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n < \beta_n$ et $0 < \beta_n - \alpha_n < \frac{1}{n}$ (utiliser I) 2) b))

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n} \cdot u_{2n+2}}$ (utiliser I) 2) b))

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n = \frac{1}{\beta_n} - 1$

c) En déduire la monotonie de chacune des suites (α_n) et (β_n) .

3) a) Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont adjacentes.

b) Calculer la limite de chacune des suites (α_n) et (β_n) .

Exercice 42

On considère les suites numériques (a_n) et (b_n) définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 0 ; a_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}) ; a_n = na_{n-1} + a_{n-2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = b_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}) ; b_n = nb_{n-1} + b_{n-2} \end{cases}$$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1} = (-1)^n$

b) Montrer que la suite (b_n) est croissante et que $b_n > (n+1)b_{n-2}$ pour tout de $\mathbb{N}$, tel que $n \geq 3$

2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}}$ et $v_n = \frac{a_{2n}}{b_{2n}}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < u_n - v_n < \frac{2}{(n+1)!}$

b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 43

Soit (u_n) une suite numérique et ℓ un nombre réel.

On pose $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) Montrer que : $\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = \ell \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n) = \ell\right)$

2) Soit (v_n) une suite numérique décroissante ayant pour limite 0

a) On suppose que : $u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k v_k$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes. Que peut-on déduire?

b) Montrer que la suite numérique (a_n) définie par : $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ est convergente.

Exercice 44

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1 - 2u_n^2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$; où a est un nombre réel de l'intervalle $\left]0, \frac{1}{4}\right[$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < \frac{1}{4}$ et que la suite (u_n) est décroissante.

b) Montrer que (u_n) est convergente et que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

2) On considère la suite (s_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$

et on pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = s_{2n}$ et $w_n = s_{2n+1}$.

a) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

Soit ℓ la limite commune de (v_n) et (w_n)

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \frac{2}{7} u_n$

c) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |s_n - v_n| \leq a \sum_{k=n+1}^{k=2n} \left(\frac{2}{7}\right)^k$

d) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \ell$ (Remarquer que : $|s_n - \ell| \leq |s_n - v_n| + |v_n - \ell|$)

Exercice 45

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$

1) 1) Déterminer la nature de la suite (u_n) dans chacun des cas : $u_0 = 0$

et $u_0 = 1$

2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

b) Montrer que si la suite (u_n) est convergente alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

c) Montrer que si $u_0 < 0$ ou $u_0 > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

II) On suppose que : $u_0 \in]0; 1[$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < 1$

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente

2) Soit (s_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; s_n = \sum_{k=0}^n \frac{u_k^2}{1+u_k}$

a) Vérifier que : $\sum_{k=0}^n u_k^2 = u_0 - u_{n+1}$ en déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k^2 = u_0$

b) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}) ; 0 < \frac{u_k^2}{1+u_k} < u_k^2$

c) Montrer que la suite (s_n) est convergente.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} > 1$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < \frac{1}{n+1}$

Exercice 46

Soit k un élément de $\mathbb{N}^*$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = k$ et $u_{n+1} = k + \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer u_1 et u_2 en fonction de k

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; k \leq u_n \leq k+1$

2) Soit (x_n) et (y_n) les suites définies par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$

a) Calculer x_{n+1} en fonction de x_n puis calculer y_{n+1} en fonction de y_n

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n < y_n$ et $y_n = k + \frac{1}{x_n}$

c) Étudier la monotonie de chacune des suites (x_n) et (y_n)

d) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{y_n - x_n}{(1+k^2)^2}$

e) En déduire que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes, et calculer leur limite commune

Exercice 47

On considère la suite (α_n) telle que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \alpha_{n+4} = \frac{1}{4}(\alpha_n + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3})$$

Soit (a_n) et (b_n) les suites définies par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n = \min(\alpha_n; \alpha_{n+1}; \alpha_{n+2}; \alpha_{n+3})$

et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; b_n = \max(\alpha_n; \alpha_{n+1}; \alpha_{n+2}; \alpha_{n+3})$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n \leq \alpha_{n+4}$, en déduire que la suite (a_n)

est croissante.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; b_n \geq \alpha_{n+4}$, en déduire que la suite (b_n)

est décroissante.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_0 \leq a_n \leq \alpha_n \leq b_n \leq b_0$

b) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes:

On pose : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$.

4) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \alpha_{n+4} \leq \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \alpha_{n+1} \leq \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a$

c) En utilisant la dernière inégalité (pour les termes) $\alpha_{n+5}, \alpha_{n+6}, \alpha_{n+7}$ montrer que : $b \leq a$

5) Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

6) Montrer que $(\alpha_n)_n$ est une suite convergente et calculer sa limite.

Exercice 48

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$$0 < u_0 < v_0 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} \end{cases}$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$ et $v_n > 0$ (1)

et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < v_n$ (2)

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < v_n - u_n < \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$

b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4) On suppose que : $u_0 = v_0 \cos \alpha$ où $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = v_n \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$

b) En déduire que : $v_n = v_0 \times \frac{\sin \alpha}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ en fonction de v_0 et α .

En déduire que : $\left(\forall \alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right) ; \sin \alpha \leq \alpha \leq \tan \alpha$

d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ dans le cas où $v_0 = 2$ et $u_0 = 1$.

Solutions

Exercice 33

1) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 1$

Initialisation: Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 1$, et $1 \geq 1$ donc $u_0 \geq 1$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $u_n \geq 1$, et montrons que $u_{n+1} \geq 1$

On a : $u_n \geq 1$, et $\frac{1}{u_n} > 0$, donc $u_n + \frac{1}{u_n} > 1$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 1$,

par suite $u_{n+1} \geq 1$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 1$

b) Étudions la monotonie de (u_n)

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n}$, et puisque $u_n \geq 1$ alors $\frac{1}{u_n} > 0$,

donc $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2) a) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n^2 = \left(u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}\right)^2 = u_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{u_{n-1}^2}$

donc $u_n^2 - u_{n-1}^2 = 2 + \frac{1}{u_{n-1}^2}$, d'où $u_n^2 - u_{n-1}^2 > 2$;

d'autre part on a : $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{u_{n-1}}$

et puisque $u_{n-1} \geq 1$ alors $u_{n-1}^2 \geq u_{n-1}$ d'où $\frac{1}{u_{n-1}^2} \leq \frac{1}{u_{n-1}}$

d'où : $2 + \frac{1}{u_{n-1}^2} \leq 2 + \frac{1}{u_{n-1}}$

et puisque $u_n^2 - u_{n-1}^2 = 2 + \frac{1}{u_{n-1}^2}$ et $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{u_{n-1}}$

alors $u_n^2 - u_{n-1}^2 \leq 2 + u_n - u_{n-1}$

par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; (1) \quad 2 \leq u_n^2 - u_{n-1}^2 \leq 2 + u_n - u_{n-1}$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq k \leq n$

on a : d'après (1) : $2 \leq u_k^2 - u_{k-1}^2 \leq 2 + u_k - u_{k-1}$

d'où : $\sum_{k=1}^n 2 \leq \sum_{k=1}^n (u_k^2 - u_{k-1}^2) \leq \sum_{k=1}^n 2 + \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k-1})$

d'où : $2n \leq u_n^2 - u_0^2 \leq 2n + u_n - u_0$

Par conséquent : $2n \leq u_n^2 - 1 \leq 2n + u_n - 1$, (car $u_0 = 1$)

Remarque
$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_0$$
$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$$

b) Dédudons que la suite (u_n) est divergente :

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n^2 - 1 > 2n$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \geq \sqrt{2n+1}$; cette inégalité est vraie pour $n=0$ (car $u_0 = 1$),

d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq \sqrt{2n+1}$ et puisque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n+1} = +\infty$

alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, (d'après les critères de convergence), donc la suite (u_n) est divergente.

3) a) On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 2n \leq u_n^2 - 1 \leq 2n + u_n - 1$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n^2 - u_n \leq 2n \leq u_n^2 - 1$

et puisque : $(n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 1$, alors : $1 - \frac{1}{u_n} \leq \frac{2n}{u_n^2} \leq 1 - \frac{1}{u_n^2}$

b) On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1 - \frac{1}{u_n} \leq \frac{2n}{u_n^2} \leq 1 - \frac{1}{u_n^2}$

et puisque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{u_n^2}\right) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{u_n}\right) = 1$

d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{u_n^2} = 1$

et puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 1, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2n}{u_n^2}} = \sqrt{1} = 1$

Finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2n}}{u_n} = 1$

Exercice 34

1) • $u_1 = \sqrt{1+u_0} = \sqrt{2}$ • $u_2 = \sqrt{2+u_1} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$

• Initialisation : pour $n = 0$ on a : $u_0 = 1$ donc $u_0 > 0$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons que $u_n > 0$, et montrons que $u_{n+1} > 0$

$$\begin{aligned} \text{on a : } u_n > 0 &\Rightarrow n+1+u_n > 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{n+1+u_n} > 0 \\ &\Rightarrow u_{n+1} > 0 \end{aligned}$$

Conclusions : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$

2) Méthode 1 : On a : $(\forall a > 0 \forall b > 0) ; \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$;

donc : $(\forall x \geq 0) ; \sqrt{1 \times x} \leq \frac{x+1}{2}$ d'où : $(\forall x \geq 0) ; \sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$

Méthode 2 : $\frac{x+1}{2} - \sqrt{x} = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{2} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2}$

Méthode 3 : $\frac{x+1}{2} \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow (x+1) \geq 2\sqrt{x}$
 $\Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 4x$
 $\Leftrightarrow (x+1)^2 - 4x \geq 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$

Remarque : Si $b \geq 0$ et $a \geq 0$ alors : $a \leq b \Leftrightarrow a^n \leq b^n$

3) a- Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq \sqrt{n}$:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{n-1} \geq 0 \Rightarrow n + U_{n-1} \geq n$

$$\Rightarrow \sqrt{n + U_{n-1}} \geq \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow U_n \geq \sqrt{n}$$

La propriété est aussi vraie pour $n = 0$; donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n \geq \sqrt{n}$

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n \leq n + \frac{1}{2^n}$;

• Initialisation :

• On a : $\left. \begin{array}{l} U_0 = 1 \\ 0 + \frac{1}{2^0} = 1 \end{array} \right\}$ donc d'où la propriété est vraie pour $n = 0$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $U_n \leq n + \frac{1}{2^n}$, et montrons que : $U_{n+1} \leq n + 1 + \frac{1}{2^{n+1}}$

On a : $U_n \leq n + \frac{1}{2^n} \Rightarrow n + 1 + U_n \leq 2n + 1 + \frac{1}{2^n}$

$$\Rightarrow U_{n+1} \leq \sqrt{n + 1 + U_n} \leq \sqrt{2n + 1 + \frac{1}{2^n}} \quad (\text{car } \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(x + 1))$$

donc : $U_n \leq n + \frac{1}{2^n} \Rightarrow U_{n+1} \leq n + 1 + \frac{1}{2^{n+1}}$

• Conclusion $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n \leq n + \frac{1}{2^n}$

c- On a : $U_n = \sqrt{n + U_{n-1}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $U_{n-1} \leq n - 1 + \frac{1}{2^{n-1}}$

c'est-à-dire : $n + U_{n-1} \leq 2n - 1 + \frac{1}{2^{n-1}}$

on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 2^{n-1} \geq 1 \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{2^{n-1}} \leq 1$

Donc : $n + U_{n-1} \leq 2n$, d'où : $\sqrt{n + U_{n-1}} \leq \sqrt{2n}$

par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) U_n \leq \sqrt{2n}$

• Déduisons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{\sqrt{n}} = 1$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; U_n \geq \sqrt{n}$ donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \frac{U_n}{\sqrt{n}} \geq 1$

On a : $U_n = \sqrt{n + U_{n-1}}$ et $U_{n-1} \leq \sqrt{2n - 2}$, donc : $n + U_{n-1} \leq n + \sqrt{2n - 2}$

c'est-à-dire : $\sqrt{n + U_{n-1}} \leq \sqrt{n + \sqrt{2n - 2}}$

$$\begin{aligned}
 \text{et on a : } \sqrt{n + U_{n-1}} &\leq \sqrt{n + \sqrt{2n - 2}} \Leftrightarrow U_n \leq \sqrt{n + \sqrt{2n - 2}} \\
 &\Leftrightarrow \frac{U_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n + \sqrt{2n - 2}}}{\sqrt{n}} \\
 &\Leftrightarrow \frac{U_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}}}
 \end{aligned}$$

$$\text{donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1 \leq \frac{U_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}}}$$

$$\text{on a : } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}}} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{cases}$$

d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{\sqrt{n}} = 1$, d'après les critères de convergence

4) Montrons que la suite (V_n) est convergente :

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; V_n &= \sqrt{n + U_{n-1}} - \sqrt{n} \\
 &= \frac{U_{n-1}}{\sqrt{n + U_{n-1}} + \sqrt{n}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{et on a : } V_n &= \frac{U_{n-1}}{\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + U_{n-1}} + \sqrt{n}} \\
 &= \frac{U_{n-1}}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{U_{n-1}}{n}} + 1}
 \end{aligned}$$

$$\text{et on a : } \frac{U_{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \times \frac{U_{n-1}}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \times \frac{U_{n-1}}{\sqrt{n-1}}$$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n-1}}{\sqrt{n}} = 1 \text{ (car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n-1}}{\sqrt{n-1}} = 1)$$

$$\text{On a : } (\forall n \geq 1) ; \sqrt{n-1} \leq U_{n-1} \leq \sqrt{2(n-1)}$$

$$\text{donc : } (\forall n \geq 1) ; \frac{\sqrt{n-1}}{n} \leq \frac{U_{n-1}}{n} \leq \frac{\sqrt{2(n-1)}}{n}$$

$$\text{c'est-à-dire : } (\forall n \geq 1) ; \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \leq \frac{U_{n-1}}{n} \leq \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}}$$

et puisque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} = 0$, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n-1}}{n} = 0$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{U_{n-1}}{n} + 1}} = \frac{1}{2}$$

par conséquent : $\lim V_n = \frac{1}{2}$, donc la suite (v_n) est convergente.

Exercice 35

1) a) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$

On a : f est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+); : f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$f''(x) = -\sin(x) + x$$

$$f'''(x) = 1 - \cos x$$

donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); f'''(x) \geq 0$

Dressons le tableau des variations de f''' ; f'' et f .

x	0	$+\infty$
$f'''(x)$		+
f''	0	
$f''(x)$		+
f'	0	
$f'(x)$		+
f	0	

d'après le tableau ci-dessus, on a : $f'''(x) \geq 0$ et $f'(x) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$

et $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ donc : $\sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0$

et $(\forall x \in \mathbb{R}^+); -\sin x + x \geq 0$

d'où : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

b) Dédution :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : d'après la question précédente (en prenant $x = \frac{k}{n^2}$)

$$\forall k \in \{1; 2; 3; \dots; n\} ; \frac{k}{n^2} - \frac{1}{6} \left(\frac{k}{n^2} \right)^3 \leq \sin \left(\frac{k}{n^2} \right) \leq \frac{k}{n^2}$$

$$\text{donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{6} \left(\frac{k}{n^2} \right)^3 \leq \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n^2} \right) \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2} \right)$$

$$\text{d'où } \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k \right) - \frac{1}{6n^6} \left(\sum_{k=1}^n k^3 \right) \leq u_n \leq \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k \right)$$

$$\text{c- Montrons que : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \sum_{k=1}^n k^3 \leq n^4$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \begin{cases} 1^3 \leq n^3 \\ 2^3 \leq n^3 \\ \vdots \\ n^3 \leq n^3 \end{cases}$$

Par addition membre à membre on obtient : $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \leq n.n^3$

$$\text{donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \leq n^4$$

2) Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \in \mathbb{N} \text{ on a : } \sum_{k=1}^n k^3 \leq n^4 &\Rightarrow -\frac{1}{6n^6} \left(\sum_{k=1}^n k^3 \right) \geq -\frac{1}{6n^2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k \right) - \frac{1}{6n^6} \left(\sum_{k=1}^n k^3 \right) \geq \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k \right) - \frac{1}{6n^2} \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k \right) - \frac{1}{6n^2} \leq u_n \leq \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k \right)$$

$$\text{et puisque : } \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{alors : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \leq u_n \leq \frac{n+1}{2n}$$

$$\text{On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2} \text{ (d'après les critères de convergence)}$$

1) Montrons que les suites (a_n) et (S_n) sont convergentes.

* On a : $0 < \alpha < 1$, donc : $0 < 1 - \alpha < 1$

d'où la suite (a_n) est convergente et on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

* On a : $S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ et (a_n) est une suite géométrique de raison

$q = 1 - \alpha$, et de premier terme $a_0 = 1$ donc : $S_n = \frac{1 - (1 - \alpha)^{n+1}}{1 - (1 - \alpha)}$

c'est-à-dire : $S_n = \frac{1 - (1 - \alpha)^{n+1}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} [1 - (1 - \alpha)^{n+1}] = \frac{1}{\alpha} (1 - a_{n+1})$

et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = 0$ alors (S_n) est convergente et on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{\alpha}$

2) Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$, et que (u_n) est une suite strictement croissante

• Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 > 0$

• Hérédité: soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$

on a : $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$ et puisque $a_n = (1 - \alpha)^n$ et $1 - \alpha > 0$, alors $a_n > 0$

et on a : $u_n > 0$, donc $u_{n+1} > 0$.

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

• Montrons que la suite (u_n) est strictement croissante

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{a_n}{u_n}$ et puisque : $a_n > 0$ et $u_n > 0$ alors :

$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq u_0 + \frac{1}{\alpha u_0}$:

Méthode 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$, et (u_n) est croissante, donc :

$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq u_0$

d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{u_0}$, et puisque : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n > 0$, alors : $\frac{a_n}{u_n} < \frac{a_n}{u_0}$,
 c'est-à-dire : $u_{n+1} - u_n < \frac{a_n}{u_0}$ ainsi : $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{u_0}$, par conséquent :
 $u_n - u_0 \leq \frac{S_{n-1}}{u_0} \leq \frac{S_n}{u_0}$

et puisque : $S_n = \frac{1}{\alpha} - \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{\alpha}$ alors : $S_n \leq \frac{1}{\alpha}$, donc : $u_n - u_0 \leq \frac{1}{\alpha u_0}$

c'est-à-dire : $u_n \leq u_0 + \frac{1}{\alpha u_0}$, d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq u_0 + \frac{1}{\alpha u_0}$

Méthode 2 :

(u_n) est une suite strictement croissante, donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^+ - \{1\})$,

$$\frac{1}{u_{n-1}} < \frac{1}{u_0}$$

et puisque : $a_n > 0$ alors : $\frac{a_{n-1}}{u_{n-1}} < \frac{a_{n-1}}{u_0}$, donc $u_n - u_{n-1} < \frac{a_{n-1}}{a_0}$

$$\text{D'où : } u_n < u_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{a_0}$$

$$\text{Donc : } (\forall k \in \mathbb{N}^+ - \{1\}) ; u_k < u_{k-1} + \frac{a_{k-1}}{a_0}$$

$$\bullet \text{ Pour } k = n : u_n < u_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{u_0}$$

$$\bullet \text{ Pour } k = n-1 : u_{n-1} < u_{n-2} + \frac{a_{n-2}}{u_0}$$

$$\bullet \text{ Pour } k = n-2 : u_{n-2} < u_{n-3} + \frac{a_{n-3}}{u_0}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\bullet \text{ Pour } k = 1 : u_1 < u_0 + \frac{a_0}{u_0}$$

Par addition membre à membre et après simplification, on obtient :

$$u_n < u_0 + \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k}{u_0}$$

$$\text{c'est-à-dire : } u_n < u_0 + \frac{S_{n-1}}{u_0} \quad (2) \text{ donc : } u_n < u_0 + \frac{1}{u_0} \times \frac{1}{\alpha} [1 - (1-\alpha)^n]$$

$$\text{et puisque : } (1 - (1-\alpha)^n) < 1, \text{ alors : } u_n < u_0 + \frac{1}{u_0} \times \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{c'est-à-dire : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < u_0 + \frac{1}{\alpha u_0}.$$

c- Déduisons la convergence de la suite (u_n) :

On a : $u_n < u_0 + \frac{1}{\alpha u_0}$, donc la suite (u_n) est majorée par $u_0 + \frac{1}{\alpha u_0}$, et comme (u_n) est croissante, alors elle est convergente.

Exercice 37

1- Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } 1 \leq k \leq 2n+1 &\Leftrightarrow n^2+1 \leq n^2+k \leq (n+1)^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n^2+1} \leq \sqrt{n^2+k} \leq n+1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} ; \text{ c'est-à-dire : } \frac{2n+1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\text{d'où : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{2n+1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = 2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 2$$

alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ (d'après les critères de convergence)

2- Montrons que la suite (v_n) est convergente :

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } v_{n+1} &= \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) \\ &= \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{a}{2^n}\right) \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \frac{1}{2} v_n \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$$

Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et de premier terme $v_1 = \frac{1}{2} \sin a$.

$$\begin{aligned} \text{par conséquent : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{2} \sin a \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin a \end{aligned}$$

$$\text{et puisque : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ (car } -1 < \frac{1}{2} < 1 \text{, alors : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0)$$

3-a- Soit $x \in \mathbb{R}$, tel que $x \neq \frac{k\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\cotan(x) - 2\cotan(2x) &= \frac{\cos x}{\sin x} - 2 \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \\ &= \frac{2 \cos^2 x - 2 \cos(2x)}{2 \sin x \cos x} \\ &= \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos x \sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x\end{aligned}$$

b- Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$:

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $\theta \neq \frac{k\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{On a : } \frac{1}{2^p} \tan\left(\frac{\theta}{2^p}\right) = \frac{1}{2^p} \cotan\left(\frac{\theta}{2^p}\right) - \frac{1}{2^{p-1}} \cotan\left(\frac{\theta}{2^{p-1}}\right)$$

On pose : $a_p = \frac{1}{2^p} \cotan\left(\frac{\theta}{2^p}\right)$, on a :

$$\begin{aligned}w_n &= \sum_{p=0}^n \frac{1}{2^p} \tan\left(\frac{\theta}{2^p}\right) \\ &= \sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{2^p} \cotan\left(\frac{\theta}{2^p}\right) - \frac{1}{2^{p-1}} \cotan\left(\frac{\theta}{2^{p-1}}\right) \right) + \tan \theta \\ &= \sum_{p=1}^n (a_p - a_{p-1}) + \tan \theta \\ &= \sum_{p=1}^n a_p - \sum_{p=0}^{n-1} a_p + \tan \theta = a_n - a_0 + \tan \theta\end{aligned}$$

et puisque : $a_n = \frac{1}{2^n} \cotan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ et $a_0 = \cotan \theta$

$$\begin{aligned}\text{alors : } w_n &= \frac{1}{2^n} \cotan\left(\frac{\theta}{2^n}\right) - \cotan \theta + \tan \theta \\ &= \frac{1}{2^n} \cotan\left(\frac{\theta}{2^n}\right) - 2\cotan(2\theta)\end{aligned}$$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; w_n = \frac{1}{2^n} \cotan\left(\frac{\theta}{2^n}\right) - 2\cotan(2\theta)$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N} ; \text{ on a : } \frac{1}{2^n} \cotan\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = \frac{1}{\theta} \left(\frac{\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \right)$$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta}{2^n} = 0$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\theta}{2^n}}{\tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = 1$

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{1}{\theta} - 2\cotan(2\theta)$

Exercice 38

1) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrons que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n sur $\mathbb{R}$.

La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car fonction polynôme)

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'_n(x) = 3x^2 + n$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'_n(x) > 0$ et par conséquent la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'où : f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f_n(\mathbb{R})$; avec $f_n(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right[$

or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$, donc : $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

et puisque : $0 \in \mathbb{R}$, alors il existe un unique réel x_n de $\mathbb{R}$ tel que $f_n(x_n) = 0$

. Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists! x_n \in \mathbb{R}) ; f_n(x_n) = 0$

* Montrons que : $0 < x_n < 1$

on a : $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = n$ donc : $f_n(0) < 0 < f_n(1)$

d'où : $f_n(0) < f_n(x_n) < f_n(1)$ et puisque f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

alors : $0 < x_n < 1$

2) Montrons que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in]0; 1[$

On a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = (x^3 + (n+1)x - 1) - (x^3 + nx - 1) = x$

Donc : $\forall x \in]0; 1[; f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

or : $x_n \in]0; 1[$, donc : $f_{n+1}(x_n) > f_n(x_n)$; d'où : $f_{n+1}(x_n) > 0$ (car $f_n(x_n) = 0$)

et puisque : $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ alors : $f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$, d'où $x_n > x_{n+1}$

car f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; x_{n+1} < x_n$

et par conséquent la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.

• Dédution

La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.

3) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < x_n < \frac{1}{n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $x_n > 0$ et : $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$, donc : $0 < f_n\left(\frac{1}{n}\right)$

d'où : $f_n(x_n) < f_n\left(\frac{1}{n}\right)$, car : $(0 = f_n(x_n))$

et puisque f_n est strictement croissante, alors : $x_n < \frac{1}{n}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < x_n < \frac{1}{n}$

* Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < x_n < \frac{1}{n}$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc, d'après un critère de convergence, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

Exercice 39

1) a- Montrons que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique.

• La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ (car fonction polynôme)

• $f_n(1) = 2n + 2$ et $f_n(0) = -1$; donc $f_n(1) \times f_n(0) < 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_n(x) = 0$ admet au moins une solution α_n dans $[0; 1]$.

- La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car fonction polynôme),

$$\begin{aligned} \text{et } (\forall x \in \mathbb{R}); f'_n(x) &= 6x^2 - 2x + 2(n+1) \\ &= 2(3x^2 - x + 1) + 2n \end{aligned}$$

Le discriminant de $3x^2 - x + 1$ est $\Delta = -11$, donc $(\forall x \in \mathbb{R}); 3x^2 - x + 1 > 0$ (car $a > 0$)

d'où : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'_n(x) > 0$ et par suite f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc : $(\exists! \alpha_n \in]0; 1[) f_n(\alpha_n) = 0$

b- Déterminons le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$;

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (2x^3 - x^2 + 2(n+2)x - 1) - (2x^3 - x^2 + 2(n+1)x - 1) = 2x$$

Donc : $(\forall x \geq 0); f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$ et $(\forall x \leq 0); f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$

c) Dédudisons que (α_n) est décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}$;

on a : $\alpha_n \in]0; 1[$, donc : $f_{n+1}(\alpha_n) > f_n(\alpha_n)$ (car $\forall x \in]0; +\infty[$ $f_{n+1}(x) > f_n(x)$)

or : $f_n(\alpha_n) = 0$, donc : $f_{n+1}(\alpha_n) > 0$

et puisque : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$, alors : $f_{n+1}(\alpha_n) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})$

et puisque : f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors : $\alpha_n > \alpha_{n+1}$

Donc la suite (α_n) est strictement décroissante.

De plus : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < \alpha_n < 1$, donc la suite (α_n) est minorée par 0, d'où la suite (α_n) est convergente.

2) a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{-1}{2n+2} \leq \alpha_n \leq \frac{1}{n+1}$

$$\begin{aligned}\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) &= 2\left(\frac{1}{n+1}\right)^3 - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + 2 - 1 \\ &= \frac{2}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n+1)^2} + 1 \\ &= \frac{2 - (n+1) + (n+1)^3}{(n+1)^3} \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n + 2}{(n+1)^3}\end{aligned}$$

Donc : $f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) > 0$

D'autre part : $f_n\left(\frac{-1}{2n+2}\right) = \frac{-2}{8(n+1)^3} - \frac{1}{(2n+2)^2} - 2$

Donc : $f_n\left(\frac{-1}{2n+2}\right) < 0$ et puisque : $f_n(\alpha_n) = 0$,

alors : $f_n\left(\frac{-1}{2n+2}\right) < f_n(\alpha_n) < f_n\left(\frac{1}{n+1}\right)$

Donc $\frac{-1}{2n+2} < \alpha_n < \frac{1}{n+1}$ (car f_n est strictement croissante)

b) Dédudisons $\lim \alpha_n$

on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2n+2} = 0$ Donc : $\lim \alpha_n = 0$ (D'après un critère de convergence)

1) Montrons que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n

• P_n est une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0; 1]$

- Si $n = 1$, alors $P_1(x) = x - 1$; donc l'équation $P_1(x) = 0$ admet une unique solution qui est: $\alpha_1 = 1$

- Si $n \geq 2$, alors $P_n(0) = -1$ et $P_n(1) = n - 1$

Donc $P_n(1) \times P_n(0) < 0$ (car $n \geq 2 \Leftrightarrow n - 1 > 0$)

On a : La fonction P_n est continue sur $[0; 1]$ et $P_n(0) \times P_n(1) < 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (TVI); l'équation $P_n(x) = 0$ admet au moins une solution α_n dans $[0; 1]$: $(\exists \alpha_n \in]0; 1[) ; P_n(\alpha_n) = 0$

• Unicité de α_n

la fonction P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0; 1]$; on a : $(\forall x \in [0; 1]) ; P'_n(x) > 0$, donc P_n est strictement croissante sur $[0; 1]$, et par suite : $(\exists ! \alpha_n \in]0; 1[) ; P_n(\alpha_n) = 0$.

2) a- Montrons que $\forall x \in]0; +\infty[; P_{n+1}(x) > P_n(x)$

Soit $x \in]0; +\infty[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$;

On a :

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = (x^{n+1} + x^n + \dots + x - 1) - (x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1) = x^{n+1}$$

on a : $x > 0$ donc : $x^{n+1} > 0$ et par suite : $P_{n+1}(x) > P_n(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$

b- Dédudons que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante

on a : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; P_{n+1}(x) > P_n(x)$

et puisque: $P_n(\alpha_n) = 0$, alors : $P_{n+1}(\alpha_n) > 0$

or : $P_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$, donc: $P_{n+1}(\alpha_n) > P_{n+1}(\alpha_{n+1})$

et puisque la fonction P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors :
 $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n > \alpha_{n+1}$ et par suite : $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.

3) a- Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} ; P_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 2$

Soit $x \in \mathbb{R} - \{1\} ;$

$$\begin{aligned} \text{on a : } P_n(x) &= x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1 \\ &= (x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1) - 2 \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in \mathbb{N}^*) ; (\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) ; P_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 2$$

b) Dédudons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2\alpha_n - (\alpha_n)^{n+1} - 1 = 0$

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \in \mathbb{N} ; \text{ on a } P_n(\alpha_n) &= 0 \Rightarrow \frac{1-\alpha_n^{n+1}}{1-\alpha_n} - 2 = 0 \\ &\Rightarrow 1 - \alpha_n^{n+1} - 2(1 - \alpha_n) = 0 \\ &\Rightarrow 2\alpha_n - \alpha_n^{n+1} - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; 2\alpha_n + (\alpha_n)^{n+1} - 1 = 0$$

c-• Déterminons α_2 et vérifions que $\alpha_n \leq \alpha_2$

α_2 est l'unique solution de l'équation $P_2(x) = 0$ sur $[0; 1]$ avec $P_2(x) = x^2 + x - 1$

Le discriminant de $x^2 + x - 1$ est : $\Delta = 5$, donc ses racines sont :

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$0 < \alpha_2 < 1, \text{ donc : } \alpha_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} ; \left(\text{car } \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \right)$$

Puisque la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante, alors :
 $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; \alpha_n \leq \alpha_2$

Dédudons $\lim(\alpha_n)^n$

$$\text{on a : } (\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; 0 < (\alpha_n)^n \leq (\alpha_2)^n$$

$$\text{or } 0 < \alpha_2 < 1, \text{ donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_2)^n = 0 \text{ donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$$

d- Montrons que $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est convergente

La suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.

• Calculons sa limite

ona: $2\alpha_n - \alpha_n^{n+1} - 1 = 0$ donc: $\alpha_n(2 - \alpha_n^n) = 1$ d'où: $\alpha_n = \frac{1}{2 - \alpha_n^n}$ (car $2 - (\alpha_n^n) \neq 0$)

or: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$ donc: $\lim \alpha_n = \frac{1}{2}$

Exercice 41

1) 1) Calculons u_2 et u_3

On a: $u_2 = u_1 + u_0 = 2$ et $u_3 = u_2 + u_1 = 3$

2) a) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq n$

• Initialisation: L'inégalité $u_n \geq n$ est vraie pour $n = 0$ (pour $n = 1$ et pour $n = 2$)

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que $u_n \geq n$ et $u_{n+1} \geq n+1$ et montrons que $u_{n+2} \geq n+2$

On a: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$; $u_n \geq n$ et $u_{n+1} \geq n+1$

Donc: $u_{n+2} \geq (n+1) + n$ c'est-à-dire: $u_{n+2} \geq 2n+1$

et on a: $(2n+1) - (n+2) = n-1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n-1 \geq 0$ c'est-à-dire

$2n+1 \geq n+2$; d'où: $u_{n+2} \geq n+2$

• Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq n$

b) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \times u_{n+2} + (-1)^{n+1} = (u_{n+1})^2$

• Initialisation: Pour $n = 0$, on a: $u_0 \times u_2 + (-1)^{0+1} = 1$ et $(u_1)^2 = 1$

Donc: $u_2 \times u_0 + (-1)^1 = (u_1)^2$

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que la propriété est vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$

$$\begin{aligned} \text{On a: } u_{n+1} \times u_{n+3} + (-1)^{n+2} &= u_{n+1}(u_{n+1} + u_{n+2}) + (-1)^{n+2} \\ &= (u_{n+1})^2 + u_{n+1} \times u_{n+2} + (-1)^{n+2} \end{aligned}$$

et puisque: $u_n \times u_{n+2} + (-1)^{n+1} = (u_{n+1})^2$

$$\begin{aligned} \text{alors: } u_{n+1} \times u_{n+3} + (-1)^{n+2} &= u_n \times u_{n+2} + (-1)^{n+1} + u_{n+1} \times u_{n+2} + (-1)^{n+2} \\ &= u_{n+2}(u_n + u_{n+1}) + (-1)^{n+1}(1 + (-1)) \end{aligned}$$

$$= u_{n+2} u_{n+2} \text{ (car } u_n + u_{n+1} = u_{n+2} \text{)}$$

$$\text{Donc : } u_{n+1} \times u_{n+3} + (-1)^{n+2} = (u_{n+2})^2$$

$$\bullet \text{ Conclusion : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \times u_{n+2} + (-1)^{n+1} = (u_{n+1})^2$$

$$\text{II- 1) a) Montrons que } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \beta_n - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n} \times u_{2n+1}}$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}; \text{ on a : } \beta_n - \alpha_n = \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}} - \frac{u_{2n-1}}{u_{2n}} = \frac{(u_{2n})^2 - u_{2n-1} \times u_{2n+1}}{u_{2n} \times u_{2n+1}}$$

$$\text{et d'après I) 1) b) on a : } u_{2n-1} \times u_{2n+1} = u_{2n}^2 - (-1)^{2n} = (u_{2n})^2 - 1$$

$$\text{Donc : } \beta_n - \alpha_n = \frac{(u_{2n})^2 - (u_{2n})^2 + 1}{u_{2n} \times u_{2n+1}} = \frac{1}{u_{2n} \times u_{2n+1}}$$

$$\text{b) D\'eduisons que : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \alpha_n < \beta_n \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < \beta_n - \alpha_n < \frac{1}{n}$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}; \text{ on a : } \beta_n - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n} \times u_{2n+1}} \text{ et } u_{2n} \geq 2n \text{ et } u_{2n+1} \geq 2n+1$$

$$\text{Donc : } \beta_n - \alpha_n > 0 \text{ d'o\`u : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n < \beta_n$$

$$\bullet \text{ D\'eduisons que : } 0 < \beta_n - \alpha_n < \frac{1}{n}.$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*; \text{ on a : } \beta_n - \alpha_n > 0 \text{ et } \beta_n - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n} \times u_{2n+1}}$$

$$\text{et puisque : } u_{2n} \geq 2n \text{ et } u_{2n+1} \geq 2n+1 \text{ alors : } u_{2n} \times u_{2n+1} \geq 4n^2 + 2n > n$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{u_{2n} \times u_{2n+1}} < \frac{1}{n} \text{ d'o\`u : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < \beta_n - \alpha_n < \frac{1}{n}$$

$$\text{2) a) Montrons que } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n} u_{n+2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \in \mathbb{N}^*; \text{ on a : } \alpha_{n+1} - \alpha_n &= \frac{u_{2n+1}}{u_{2n+2}} - \frac{u_{2n-1}}{u_{2n}} \\ &= \frac{u_{2n+1} \times u_{2n} - u_{2n+2} \times u_{2n-1}}{u_{2n+2} \times u_{2n}} \\ &= \frac{(u_{2n} + u_{2n-1})u_{2n} - u_{2n-1}(u_{2n} + u_{2n+1})}{u_{2n+2} u_{2n}} \\ &= \frac{u_{2n}^2 + u_{2n-1}u_{2n} - u_{2n-1}u_{2n} - u_{2n-1}u_{2n+1}}{u_{2n+2} u_{2n}} = \frac{u_{2n}^2 - u_{2n-1}u_{2n+1}}{u_{2n+2} u_{2n}} \end{aligned}$$

$$\text{et puisque : } u_{2n-1} \times u_{2n+1} = u_{2n}^2 - (-1)^{2n}$$

$$\text{alors : } \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{u_{2n}^2 - (u_{2n}^2 - (-1)^{2n})}{u_{2n+2} u_{2n}}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n+2}u_{2n}}$

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n = \frac{1}{\beta_n} - 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $\alpha_n + 1 = \frac{u_{2n-1}}{u_{2n}} + 1 = \frac{u_{2n-1} + u_{2n}}{u_{2n}} = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \frac{1}{\beta_n}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n = \frac{1}{\beta_n} - 1$

c) Dédudons la monotonie de chacune des suites (α_n) et (β_n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n+2}u_{2n}}$

et puisque $u_{2n+2} \times u_{2n} > 0$ (car $u_{2n} \geq 2n$ et $u_{2n+2} \geq 2n+2$ et $n > 0$)

alors : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_{n+1} - \alpha_n > 0$ donc la suite (α_n) est strictement croissante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $\frac{1}{\beta_n} = 1 + \alpha_n$ donc $\beta_n = \frac{1}{1 + \alpha_n}$

et puisque : (α_n) est strictement croissante alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_{n+1} > \alpha_n$

Donc : $\alpha_{n+1} + 1 > \alpha_n + 1$ d'où : $\frac{1}{\alpha_{n+1} + 1} < \frac{1}{\alpha_n + 1}$

Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \beta_{n+1} < \beta_n$ donc la suite (β_n) est strictement décroissante.

3) a) Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont adjacentes

On a : (α_n) est strictement croissante et (β_n) est strictement décroissante (1)

et on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < \beta_n - \alpha_n < \frac{1}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0$ (2)

de (1) et (2) on déduit que les suites (α_n) et (β_n) sont adjacentes.

b) Déterminons la limite de chacune des suites (α_n) et (β_n) :

Puisque les suites (α_n) et (β_n) sont adjacentes, alors il existe un réel ℓ tel que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \ell$ et $\ell > 0$ (car $\alpha_n > 0$ et $\beta_n > 0$) et puisque $\alpha_n = \frac{1}{\beta_n} - 1$

alors $\ell = \frac{1}{\ell} - 1$

Donc : $\ell^2 + \ell - 1 = 0$ d'où : $\ell = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ (vérifie ce résultat)

Par conséquent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

1) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1} = (-1)^n$

• Initialisation : Pour $n = 1$, on a : $a_0b_1 - a_1b_0 = (-1) = (-1)^1$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que : $a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1} = (-1)^n$ et montrons que : $a_nb_{n+1} - a_{n+1}b_n = (-1)^{n+1}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } a_nb_{n+1} - a_{n+1}b_n &= a_n((n+1)b_n + b_{n-1}) - ((n+1)a_n + a_{n-1})b_n \\ &= (n+1)a_nb_n + a_nb_{n-1} - (n+1)a_nb_n - a_{n-1}b_n \\ &= a_nb_{n-1} - a_{n-1}b_n \\ &= -(a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1}) \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour $n + 1$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1} = (-1)^n$

b) • Montrons que la suite (b_n) est croissante

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \in \mathbb{N}^* ; \text{ on a : } b_{n+1} - b_n &= (n+1)b_n + b_{n-1} - b_n \\ &= nb_n + b_{n-1} \end{aligned}$$

Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; b_n > 0$

• Initialisation : Pour $n = 1$, on a : $b_1 = b_0 = 1$, donc $b_1 > 0$ (et $b_0 > 0$)

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que : $b_n > 0$ et $b_{n-1} > 0$ et montrons que $b_{n+1} > 0$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \begin{cases} b_{n-1} > 0 \\ b_n > 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} nb_n > 0 \\ b_{n-1} > 0 \end{cases} \\ &\implies nb_n + b_{n-1} > 0 \\ &\implies b_{n+1} > 0 \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour $n + 1$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; b_n > 0$ par conséquent $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; b_{n+1} - b_n > 0$ donc la suite (b_n) est croissante

• Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}; n \geq 3) ; b_n \geq (n+1)b_{n-2}$

Soit $n \in \mathbb{N}$; tel que $n \geq 3$ on a : $b_{n-1} > b_{n-2} \Rightarrow nb_{n-1} > nb_{n-2}$

$$\Rightarrow nb_{n-1} + b_{n-2} > nb_{n-2} + b_{n-2}$$

$$\Rightarrow b_n > (n+1)b_{n-2}$$

$$\begin{aligned} 2) a) \bullet \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*; \text{ on a : } u_n - v_n &= \frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}} - \frac{a_{2n}}{b_{2n}} \\ &= \frac{a_{2n-1}b_{2n} - a_{2n}b_{2n-1}}{b_{2n-1}b_{2n}} \\ &= \frac{(-1)^{2n}}{b_{2n-1}b_{2n}} \text{ d'après 1) a)} \\ &= \frac{1}{b_{2n-1}b_{2n}} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } u_n - v_n > 0 \quad (1)$$

• Montrons que : $u_n - v_n < \frac{2}{(n+1)!}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $n \geq 3$ d'après 1) b); on a : $b_n > (n+1)b_{n-2}$

$$\text{Donc : } b_n b_{n-1} > (n+1)b_{n-1}b_{n-2} \text{ d'où } 0 < \frac{1}{b_n b_{n-1}} < \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{1}{b_{n-1}b_{n-2}}$$

$$\text{En remplaçant successivement : } \begin{cases} 0 < \frac{1}{b_3 b_2} < \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{b_2 b_1} \\ 0 < \frac{1}{b_4 b_3} < \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{b_3 b_2} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 < \frac{1}{b_n b_{n-1}} < \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{1}{b_{n-1} b_{n-2}} \end{cases}$$

Par produit membre à membre les inégalités précédentes, et après simplification on obtient :

$$\frac{1}{b_n b_{n-1}} < \frac{1}{b_1 \times b_2 \times 4 \times 5 \times \dots \times (n+1)}$$

$$\text{c'est-à-dire : } \frac{1}{b_n \cdot b_{n-1}} < \frac{1}{3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (n+1)}$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{b_n \cdot b_{n-1}} < \frac{2}{(n+1)!}$$

Or (b_n) est croissante et strictement positive donc $b_n b_{n-1} < b_{2n} b_{2n-1}$

$$\text{D'où : } \frac{1}{b_{2n} \cdot b_{2n-1}} < \frac{1}{b_n \cdot b_{n-1}}$$

$$\text{Ainsi : } \frac{1}{b_{2n} \cdot b_{2n-1}} < \frac{2}{(n+1)!} \text{ par suite : } u_n - v_n < \frac{2}{(n+1)!} \quad (2)$$

de (1) et (2) on déduit que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < u_n - v_n < \frac{2}{(n+1)!}$

(Vérifier par calcul que $u_1 - v_1 < 1$ et $0 < u_2 - v_2 < \frac{1}{3}$)

b) d'après a) on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < u_n - v_n < \frac{2}{(n+1)!}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{(n+1)!} = 0$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ (d'après les critères de convergence)

$$\left(0 < \frac{2}{(n+1)!} \leq \frac{2}{n+1} \right)$$

Il reste à montrer que (v_n) est croissante et (u_n) est décroissante

• Montrons que (u_n) est décroissante :

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \text{On a : } u_{n+1} - u_n &= \frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}} - \frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}} \\ &= \frac{a_{2n+1} \cdot b_{2n-1} - a_{2n-1} \cdot b_{2n+1}}{b_{2n+1} \cdot b_{2n-1}} \\ &= \frac{((2n+1)a_{2n} + a_{2n-1})b_{2n-1} - a_{2n-1}((2n+1)b_{2n} + b_{2n-1})}{b_{2n+1} \cdot b_{2n-1}} \\ &= \frac{(2n+1)(a_{2n} \cdot b_{2n-1} - a_{2n-1} \cdot b_{2n})}{b_{2n+1} \cdot b_{2n-1}} \\ &= \frac{(2n+1) \left(\frac{b_{2n}}{b_{2n+1}} - \frac{b_{2n-1}}{b_{2n}} \right)}{b_{2n+1} \cdot b_{2n-1}} ; \text{ d'après 1) a)} \\ &= \frac{-(2n+1)}{b_{2n+1} \cdot b_{2n-1}} \end{aligned}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} - u_n < 0$ ainsi la suite (u_n) est décroissante.

• Montrons que (v_n) est croissante.

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } v_{n+1} - v_n &= \frac{a_{2n+2}}{b_{2n+2}} - \frac{a_{2n}}{b_{2n}} \\ &= \frac{a_{2n+2} \cdot b_{2n} - a_{2n} \cdot b_{2n+2}}{b_{2n+2} \cdot b_{2n}} \\ &= \frac{((2n+2)a_{2n+1} + a_{2n})b_{2n} - a_{2n}((2n+2)b_{2n+1} + b_{2n})}{b_{2n+2} \cdot b_{2n}} \\ &= \frac{(2n+2)(a_{2n+1} \cdot b_{2n} - a_{2n} \cdot b_{2n+1})}{b_{2n+2} \cdot b_{2n}} \\ &= \frac{(2n+2)((-1)^{2n})}{b_{2n+2} \cdot b_{2n}} = \frac{2n+2}{b_{2n+2} \cdot b_{2n}} \end{aligned}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_{n+1} - v_n > 0$, ainsi la suite (v_n) est croissante.

Conclusion : on a : • (u_n) est décroissante; • (v_n) est croissante;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$$

Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes

1) Montrons que : $(\lim u_n = \ell) \iff (\lim x_n = \ell \text{ et } \lim y_n = \ell)$

On a : $(\lim u_n = \ell) \iff (\forall \varepsilon > 0); (\exists N \in \mathbb{N}) ; \forall n \in \mathbb{N} ; n \geq N \implies |u_n - \ell| < \varepsilon$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $n \geq N \implies 2n \geq N$

$$\implies |u_{2n} - \ell| < \varepsilon$$

$$\implies |x_n - \ell| < \varepsilon$$

Donc : $(\forall \varepsilon > 0); (\exists N \in \mathbb{N}) ; (\forall n \in \mathbb{N}) ; n \geq N \implies |x_n - \ell| < \varepsilon$ d'où : $\lim x_n = \ell$

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a : $n \geq N \implies 2n + 1 \geq N$

$$\implies |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$$

$$\implies |y_n - \ell| < \varepsilon$$

Donc : $(\forall \varepsilon > 0); (\exists N \in \mathbb{N}) ; (\forall n \in \mathbb{N}) ; n \geq N \implies |y_n - \ell| < \varepsilon$ d'où : $\lim y_n = \ell$.

Par conséquent : $(\lim u_n = \ell) \implies (\lim x_n = \ell \text{ et } \lim y_n = \ell)$

Réciproquement : supposons que $\lim(x_n) = \ell$ et $\lim(y_n) = \ell$ et montrons que $\lim(u_n) = \ell$

On a : $\lim x_n = \ell \iff (\forall \varepsilon > 0) (\exists N_1 \in \mathbb{N}) ; (\forall n \in \mathbb{N}) ; n \geq N_1 \implies |x_n - \ell| < \varepsilon$

et $\lim y_n = \ell \iff (\forall \varepsilon > 0) (\exists N_2 \in \mathbb{N}) ; (\forall n \in \mathbb{N}) ; n \geq N_2 \implies |y_n - \ell| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$; on pose : $N = \max(2N_1; 2N_2 + 1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq N$

Si n est pair alors : $(\exists p \in \mathbb{N}) ; n = 2p$

On a : $n \geq N \implies 2p \geq N$

$$\implies 2p \geq 2N_1 \text{ (car } N \geq 2N_1)$$

$$\implies p \geq N_1$$

$$\implies |x_p - \ell| < \varepsilon \text{ (car } \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = \ell)$$

$$\implies |u_{2p} - \ell| < \varepsilon$$

$$\implies |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Si n est impair, alors : $(\exists p \in \mathbb{N}) ; n = 2p + 1$

On a : $n \geq N \Rightarrow 2p+1 \geq N$

$$\Rightarrow 2p+1 \geq 2N_2+1 \text{ (car } N \geq 2N_2+1)$$

$$\Rightarrow p \geq N_2$$

$$\Rightarrow |y_p - \ell| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |u_{2p+1} - \ell| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Donc pour tout n de $\mathbb{N}$ tel que : $n \geq N$ on a : $|u_n - \ell| < \varepsilon$

Par suite :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N = \max(2N_1; 2N_2 + 1)) \in \mathbb{N}; (\forall n \in \mathbb{N}) ; n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

$$\text{ainsi : } \lim u_n = \ell \text{ d'où : } (\lim x_n = \ell \text{ et } \lim y_n = \ell) \Rightarrow (\lim u_n = \ell)$$

$$\text{Conclusion : } (\lim u_n = \ell) \Leftrightarrow (\lim x_n = \ell \text{ et } \lim (y_n) = \ell)$$

2) a) • Soit $n \in \mathbb{N}$; on a :

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= u_{2n+2} - u_{2n} = \left(\sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k v_k \right) - \left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k v_k \right) \\ &= (-1)^{2n+1} v_{2n+1} + (-1)^{2n+2} v_{2n+2} = v_{2n+2} - v_{2n+1} \end{aligned}$$

puisque (v_n) est décroissante alors $v_{2n+2} - v_{2n+1} \leq 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_{n+1} - x_n \leq 0$ donc la suite (x_n) est décroissante. (1)

• Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $y_{n+1} - y_n = u_{2n+3} - u_{2n+1}$

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k v_k \right) - \left(\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k v_k \right) \\ &= (-1)^{2n+2} v_{2n+2} + (-1)^{2n+3} v_{2n+3} \\ &= v_{2n+2} - v_{2n+3} \end{aligned}$$

puisque (v_n) est décroissante alors $v_{2n+2} - v_{2n+3} \geq 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; y_{n+1} - y_n \geq 0$ donc la suite (y_n) est croissante. (2)

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Soit } n \in \mathbb{N} ; \text{ on a : } x_n - y_n &= \left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k v_k \right) - \left(\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k v_k \right) \\ &= -(-1)^{2n+1} v_{2n+1} \\ &= v_{2n+1} \end{aligned}$$

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{2n+1}) = 0$ (3)

de (1), (2) et (3) on déduit que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes et admettent la même limite ℓ . On en déduit que la suite (u_n) est convergente et $\lim u_n = \ell$.

b) On pose : $v_n = \frac{1}{n!}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

• Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$

$$= \frac{-n}{(n+1)!}$$

On a : $\frac{-n}{(n+1)!} \leq 0$ donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} - v_n \leq 0$ d'où (v_n) est décroissante

D'autre part : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n!) = +\infty$ (car : $n! \geq n$) donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = 0$

Par conséquent la suite (v_n) est décroissante et ayant pour limite 0

Et puisque : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k v_k$ alors (et d'après 2) a) la suite (a_n) est convergente.

Exercice 44

1) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < \frac{1}{4}$

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $u_0 = a$ et $0 < a < \frac{1}{4}$

Donc : $0 < u_0 < \frac{1}{4}$

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que : $0 < u_n < \frac{1}{4}$ et montrons que $0 < u_{n+1} < \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } 0 < u_n < \frac{1}{4} &\Rightarrow 0 < u_n^2 < \frac{1}{16} \\ &\Rightarrow 0 < 2u_n^2 < \frac{1}{8} \\ &\Rightarrow 1 > 1 - 2u_n^2 > \frac{7}{8} \\ &\Rightarrow 1 < \frac{1}{1 - 2u_n^2} < \frac{8}{7} \end{aligned}$$

$$\text{On a : } 0 < \frac{1}{1 - 2u_n^2} < \frac{8}{7} \text{ et } 0 < u_n^2 < \frac{1}{16} \text{ donc : } 0 < \frac{u_n^2}{1 - 2u_n^2} < \frac{1}{14} < \frac{1}{4}$$

D'où : $0 < u_{n+1} < \frac{1}{4}$.

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < \frac{1}{4}$

• Montrons que (u_n) est décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{1 - 2u_n^2}$

et puisque $0 < \frac{1}{1 - 2u_n^2} < \frac{8}{7}$ alors : $0 < \frac{u_n}{1 - 2u_n^2} < \frac{2}{7}$ (car $0 < u_n < \frac{1}{4}$)

c'est-à-dire : $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{2}{7} < 1$

et puisque : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$ alors $0 < u_{n+1} < u_n$ donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$
d'où (u_n) est décroissante.

b) Dédudions que la suite (u_n) est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

La suite (u_n) est décroissante et minorée par zéro, donc convergente.

• Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = \left[0; \frac{1}{4}\right]$ par
 $f(x) = \frac{x^2}{1 - 2x^2}$; f est dérivable sur $\left[0; \frac{1}{4}\right]$.

On a : • $f'(x) = \frac{2x}{(1 - 2x^2)^2}$, (donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$)

• f est continue sur I et $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(I) \subset I$ (car $f(I) = \left[0; \frac{1}{14}\right]$)

et puisque (u_n) est convergente alors sa limite ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$ sur I

$$\begin{aligned}\text{On a : } f(\ell) = \ell &\Leftrightarrow \frac{\ell^2}{1 - 2\ell^2} = \ell \\ &\Leftrightarrow \ell^2 = \ell(1 - 2\ell^2) \\ &\Leftrightarrow \ell(2\ell - 1)(\ell + 1) = 0\end{aligned}$$

La seule valeur de ℓ vérifiant cette équation et appartenant à $\left[0; \frac{1}{4}\right]$ est 0
donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

2) a) Montrons que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes

On a : $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ et $v_n = s_{2n}$ et $w_n = s_{2n+1}$

et $v_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots + u_{2n}$ et $w_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots + u_{2n} - u_{2n+1}$

Étudions la monotonie de chacune des suites (v_n) et (w_n)

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ On a : } v_{n+1} - v_n &= s_{2(n+1)} - s_{2n} \\
 &= \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k \\
 &= (-1)^{2n+1} u_{2n+1} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} \\
 &= u_{2n+2} - u_{2n+1}
 \end{aligned}$$

et puisque la suite (u_n) décroissante alors $u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} - v_n \leq 0$, d'où la suite (v_n) est décroissante. (1)

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ On a : } w_{n+1} - w_n &= s_{2n+3} - s_{2n+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k \\
 &= (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+3} u_{2n+3} \\
 &= u_{2n+2} - u_{2n+3}
 \end{aligned}$$

et puisque la suite (u_n) est décroissante, alors $u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}) ; w_{n+1} - w_n \geq 0$ d'où la suite (w_n) est croissante. (2)

• Calculons : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n - v_n)$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } w_n - v_n &= s_{2n+1} - s_{2n} \\
 &= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k \\
 &= (-1)^{2n+1} u_{2n+1} \\
 &= -u_{2n+1}
 \end{aligned}$$

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0$ donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n - v_n) = 0$ (3)

de (1), (2) et (3), on déduit que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

Soit ℓ la limite commune aux suites (v_n) et (w_n)

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_{n+1} < \frac{2}{7} u_n$

On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{1 - 2u_n^2}$ et $0 < \frac{u_n}{1 - 2u_n^2} < \frac{2}{7}$ (d'après 1) a)

Donc : $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{2}{7}$ et puisque $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

alors $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_{n+1} < \frac{2}{7} u_n$

c) Déduisons que : $|s_n - v_n| \leq a \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^k$

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a :

$$|s_n - v_n| = \left| \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k u_k - s_{2n} \right| = \left| \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{k=2n} (-1)^k u_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{k=2n} (-1)^k u_k \right|$$

$$\text{Donc : } |s_n - v_n| \leq \sum_{k=n+1}^{k=2n} |(-1)^k u_k|$$

$$\text{D'où : } |s_n - v_n| \leq \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_k \text{ car } |(-1)^k| = 1 \text{ et } (|u_k| = u_k) \text{ (car } u_k > 0) \quad (4)$$

et d'après 2) b) on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \frac{2}{7} u_n$

$$\text{Donc : } \begin{cases} 0 < u_n \leq \frac{2}{7} u_{n-1} \\ 0 < u_{n-1} \leq \frac{2}{7} u_{n-2} \\ \vdots \\ 0 < u_2 \leq \frac{2}{7} u_1 \\ 0 < u_1 \leq \frac{2}{7} u_0 \end{cases}$$

$$\text{Rappel : } \left| \sum_{K=1}^n a_K \right| \leq \sum_{K=1}^n |a_K|$$

Par produit membre à membre et après simplification on obtient

$$0 < u_n \leq \left(\frac{2}{7}\right)^n u_0$$

$$\text{c'est-à-dire : } u_n \leq \left(\frac{2}{7}\right)^n a \text{ (car } u_0 = a) \text{ donc } (\forall k \in \mathbb{N}) ; u_k \leq \left(\frac{2}{7}\right)^k a \quad (5)$$

$$\text{de (4) et (5) on déduit que : } |s_n - v_n| \leq \sum_{k=n+1}^{k=2n} \left(\frac{2}{7}\right)^k a$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |s_n - v_n| \leq a \sum_{k=n+1}^{k=2n} \left(\frac{2}{7}\right)^k$$

d) Déduisons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 1$

$$\text{On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \text{ et } |s_n - \ell| \leq |s_n - v_n| + |v_n - \ell|$$

$$\text{et puisque : } |s_n - v_n| \leq a \sum_{k=n+1}^{k=2n} \left(\frac{2}{7}\right)^k \text{ alors } |s_n - \ell| \leq a \sum_{k=n+1}^{k=2n} \left(\frac{2}{7}\right)^k + |v_n - \ell|$$

$$\text{Or : } a \sum_{k=n+1}^{k=2n} \left(\frac{2}{7}\right)^k = a \left(\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{7}\right)^{n+2} + \dots + \left(\frac{2}{7}\right)^{2n} \right) = a \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} \left[\frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^n}{1 - \frac{2}{7}} \right]$$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} a \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} \left[\frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^n}{\frac{5}{7}} \right] = 0 \text{ (car } -1 < \frac{2}{7} < 1) \text{ et on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} |v_n - \ell| = 0$$

$$(\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell) \text{ D'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} a \sum_{k=n+1}^{k=2n} \left(\frac{2}{7}\right)^k + |v_n - \ell| = 0$$

$$\text{et puisque : } |s_n - \ell| \leq a \sum_{k=n+1}^{k=2n} \left(\frac{2}{7}\right)^k + |v_n - \ell| \text{ alors : } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \ell$$

Exercice 45

1) 1) Déterminons la nature de la suite (u_n)

• 1er cas : $u_0 = 0$

On a : $u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0, \dots$ et $u_n = 0$

On peut montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 0$

• 2ème cas : $u_0 = 1$, on a : $u_1 = 0$, et on montre que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = 0$

(u_n) est stationnaire (constante à partir du rang 1)

2) a) Montrons que la suite (u_n) est décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = -u_n^2$ et $-u_n^2 < 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n < 0$ d'où la suite (u_n) est strictement décroissante

b) Montrons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ dans le cas où (u_n) est convergente

Si (u_n) est convergente, alors sa limite ℓ vérifie $\ell = \ell - \ell^2$ alors $\ell = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

c) Montrons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ dans le cas où $u_0 < 0$ ou $u_0 > 1$

• 1er cas : $u_0 < 0$

Supposons que : (u_n) est minorée par α et puisqu'elle est décroissante alors

$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \alpha \leq u_n \leq u_0 < 0$ et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ avec $\ell \leq u_0 < 0$, ce qui est

contradiction avec le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (d'après 2 b))

D'où (u_n) est décroissante non minorée, par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

• 2ème cas : $u_0 > 1$

On a : $u_1 = u_0 - u_0^2 = u_0(1 - u_0)$ donc : $u_1 < 0$ d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ (même raisonnement que le premier cas : il suffit de remplacer u_0 par u_1)

II) 1) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < 1$

• Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $0 < u_0 < 1$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $0 < u_n < 1$ et montrons que $0 < u_{n+1} < 1$

On a : $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$ et puisque $0 < u_n < 1$ alors $0 < 1 - u_n < 1$

D'où : $0 < u_n(1 - u_n) < 1$, c'est-à-dire $0 < u_{n+1} < 1$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < 1$

b) Dédution :

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente et on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2) a) Montrons que : $\sum_{k=0}^n u_k^2 = u_0 - u_{n+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $\sum_{k=0}^n u_k^2 = \sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1})$
 $= (u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + \dots + (u_{n-1} - u_n) + (u_n - u_{n+1})$

Donc : $\sum_{k=0}^n u_k^2 = u_0 - u_{n+1}$

Dédution : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_0 - u_{n+1}) = u_0$ (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 0$)

b) Montrons que : $(\forall k \in \mathbb{N}) ; 0 \leq \frac{u_k^2}{1 + u_k} \leq u_k^2$

Soit $k \in \mathbb{N}$; on a $1 + u_k > 1$ donc $0 < \frac{1}{1 + u_k} < 1$

d'où $(\forall k \in \mathbb{N}) ; 0 < \frac{u_k^2}{1 + u_k} < u_k^2$

c) Montrons que la suite (s_n) est convergente

On a : $0 < \sum_{k=0}^n \frac{u_k^2}{1 + u_k} < \sum_{k=0}^n u_k^2$ donc $0 < s_n < u_0 - u_{n+1}$ d'où $(\forall n \in \mathbb{N}) ; s_n < u_0$

et on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; s_{n+1} - s_n = \frac{u_{n+1}^2}{1 + u_{n+1}}$ et puisque $u_{n+1}^2 > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$ alors $s_{n+1} - s_n > 0$, donc la suite (s_n) est croissante

D'où : (s_n) est croissante et majorée par u_0 , donc elle est convergente

3) a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} > 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n - u_n^2} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{1 - u_n}$

et puisque $0 < 1 - u_n < 1$ alors $\frac{1}{1 - u_n} > 1$ donc $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} > 1$

b) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < \frac{1}{n+1}$

On a $u_n > 0$ (d'après II) 1 a)). Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < \frac{1}{n+1}$

• Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 < \frac{1}{0+1}$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que : $u_n < \frac{1}{n+1}$ c'est-à-dire $\frac{1}{u_n} > n+1$
montrons que : $u_{n+1} < \frac{1}{n+2}$

On a : $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} > 1$ (d'après la question précédente)

Donc : $\frac{1}{u_{n+1}} > 1 + \frac{1}{u_n}$ d'où : $\frac{1}{u_{n+1}} > 1 + n + 1$ c'est-à-dire : $u_{n+1} < \frac{1}{n+2}$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < \frac{1}{n+1}$

Exercice 46

1) a) Calculons u_1 , u_2 et u_3 en fonction de k :

On a : $u_0 = k$ donc $u_1 = k + \frac{1}{k} = \frac{k^2 + 1}{k}$ et $u_2 = k + \frac{1}{u_1} = k + \frac{k}{k^2 + 1} = \frac{k^3 + 2k}{k^2 + 1}$

et $u_3 = k + \frac{1}{u_2} = k + \frac{k^2 + 1}{k^3 + 2k} = \frac{k^4 + 3k^2 + 1}{k^3 + 2k}$

b) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; k \leq u_n \leq k+1$

• Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 = k$ et $k \leq k \leq k+1$

• Hérédité : Supposons que : $k \leq u_n \leq k+1$ et montrons que $k \leq u_{n+1} \leq k+1$

On a : $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ et puisque $k \leq u_n \leq k+1$ alors $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{k}$

et comme $k \in \mathbb{N}^*$ alors $0 < \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{k} \leq 1$ d'où $k \leq k + \frac{1}{u_n} \leq k+1$

c'est-à-dire $k \leq u_{n+1} \leq k+1$, donc la propriété est vraie pour $n+1$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; k \leq u_n \leq k+1$

2) a) Calculons x_{n+1} en fonction de x_n et calculons y_{n+1} en fonction de y_n

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $x_{n+1} = u_{2(n+1)}$ et $y_{n+1} = u_{2(n+1)+1}$

$$\text{Donc : } x_{n+1} = k + \frac{1}{u_{2n+1}} \text{ et } y_{n+1} = k + \frac{1}{u_{2(n+1)}}$$

$$\text{D'où : } x_{n+1} = k + \frac{1}{k + \frac{1}{u_{2n}}} \text{ et } y_{n+1} = k + \frac{1}{k + \frac{1}{u_{2n+1}}}$$

$$\text{c'est-à-dire : } x_{n+1} = k + \frac{u_{2n}}{ku_{2n} + 1} \text{ et } y_{n+1} = k + \frac{u_{2n+1}}{ku_{2n+1} + 1}$$

$$\text{Ainsi : } x_{n+1} = k + \frac{x_n}{kx_n + 1} \text{ et } y_{n+1} = k + \frac{y_n}{ky_n + 1}$$

$$\text{Par conséquent : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; y_{n+1} = k + \frac{y_n}{1 + ky_n} \text{ et } x_{n+1} = k + \frac{x_n}{1 + kx_n}$$

b) • Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n < y_n$ et $y_n = k + \frac{1}{x_n}$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N} ; \text{ on a : } y_n = u_{2n+1} = k + \frac{1}{u_{2n}} = k + \frac{1}{x_n} \text{ donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; y_n = k + \frac{1}{x_n}$$

• Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n < y_n$

• Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $y_0 = u_1 = k + \frac{1}{k}$ et $x_0 = u_0 = k$

$$\text{Donc : } y_0 - x_0 = \frac{1}{k} \text{ d'où } y_0 - x_0 > 0 \text{ c'est-à-dire } x_0 < y_0$$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $x_n < y_n$ et montrons que $x_{n+1} < y_{n+1}$

On a (d'après 2) a):

$$\begin{aligned} y_{n+1} - x_{n+1} &= \left(k + \frac{y_n}{1 + ky_n} \right) - \left(k + \frac{x_n}{1 + kx_n} \right) \\ &= \frac{y_n}{1 + ky_n} - \frac{x_n}{1 + kx_n} = \frac{y_n + kx_n y_n - x_n - kx_n y_n}{(1 + ky_n)(1 + kx_n)} = \frac{y_n - x_n}{(1 + ky_n)(1 + kx_n)} \end{aligned}$$

On a : $(1 + kx_n)(1 + ky_n) > 0$ et $y_n - x_n > 0$ donc : $y_{n+1} - x_{n+1} > 0$, c'est-à-dire $x_{n+1} < y_{n+1}$, d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; y_n > x_n$

c) Étudions la monotonie de la suite (x_n) et de la suite (y_n) en utilisant le raisonnement par récurrence

• Initialisation :

$$\text{Pour } n = 0 \text{ on a } x_0 = u_0 = k \text{ et } x_1 = u_2 = k + \frac{k}{k^2 + 1} \text{ donc } x_1 > x_0$$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $x_n > x_{n-1}$

et montrons que $x_{n+1} > x_n$

$$\begin{aligned}\text{On a : } x_{n+1} - x_n &= \left(k + \frac{x_n}{1 + kx_n}\right) - \left(k + \frac{x_{n-1}}{1 + kx_{n-1}}\right) \\&= \frac{x_n}{1 + kx_n} - \frac{x_{n-1}}{1 + kx_{n-1}} \\&= \frac{x_n + kx_n x_{n-1} - x_{n-1} - kx_n x_{n-1}}{(1 + kx_n)(1 + kx_{n-1})} \\&= \frac{x_n - x_{n-1}}{(1 + kx_n)(1 + kx_{n-1})}\end{aligned}$$

et puisque $x_n > x_{n-1}$ alors $x_n - x_{n-1} > 0$ d'où $x_{n+1} - x_n > 0$ par conséquent $x_{n+1} > x_n$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_{n+1} > x_n$, donc la suite (x_n) est strictement croissante

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$y_{n+1} - y_n = \left(k + \frac{1}{x_{n+1}}\right) - \left(k + \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{-(x_{n+1} - x_n)}{x_{n+1} \times x_n}$$

et puisque la suite (x_n) est strictement croissante alors $-(x_{n+1} - x_n) < 0$; donc $(\forall n \in \mathbb{N}) ; y_{n+1} - y_n < 0$. D'où la suite (y_n) est strictement décroissante

d) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{y_n - x_n}{(1 + k^2)^2}$

$$\begin{aligned}\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } y_{n+1} - x_{n+1} &= \left(k + \frac{y_n}{1 + ky_n}\right) - \left(k + \frac{x_n}{1 + kx_n}\right) \\y_{n+1} - x_{n+1} &= \frac{y_n - x_n}{(1 + kx_n)(1 + ky_n)}\end{aligned}$$

et d'après 1) b) on a : $x_n \geq k$ et $y_n \geq k$ (car $k \leq u_n \leq k + 1$)

Donc : $1 + kx_n \geq 1 + k^2$ et $1 + ky_n \geq 1 + k^2$ (car $k > 0$)

$$\text{D'où : } \frac{1}{1 + kx_n} \leq \frac{1}{1 + k^2} \text{ et } \frac{1}{1 + ky_n} \leq \frac{1}{1 + k^2}$$

$$\text{par suite } \frac{1}{(1 + kx_n)(1 + ky_n)} \leq \frac{1}{(1 + k^2)^2}$$

$$\text{Finalement : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{y_n - x_n}{(1 + k^2)^2}$$

c) Dédudons que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes et calculons leur limite

Puisque : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{y_n - x_n}{(1+k^2)^2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; y_{n+1} > x_{n+1}$

$$\text{alors : } \begin{cases} 0 < y_n - x_n \leq \frac{y_{n-1} - x_{n-1}}{(1+k^2)^2} \\ 0 < y_{n-1} - x_{n-1} \leq \frac{y_{n-2} - x_{n-2}}{(1+k^2)^2} \\ \vdots \\ 0 < y_2 - x_2 \leq \frac{y_1 - x_1}{(1+k^2)^2} \\ 0 < y_1 - x_1 \leq \frac{y_0 - x_0}{(1+k^2)^2} \end{cases}$$

Par le produit membre à membre et après simplification; on obtient :

$$0 < y_n - x_n \leq \left(\frac{1}{(1+k^2)^2} \right)^n (y_0 - x_0) \text{ c'est-à-dire : } 0 < y_n - x_n \leq \left(\frac{1}{(1+k^2)^2} \right)^n \times \left(\frac{1}{k} \right)$$

$$\text{et puisque : } -1 < \frac{1}{(1+k^2)^2} < 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{(1+k^2)^2} \right)^n = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - x_n) = 0$$

• On a : (x_n) est croissante et (y_n) est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - x_n) = 0$ donc les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes

• Calculons : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$

On a : $y_n = k + \frac{1}{x_n}$ et puisque (x_n) et (y_n) sont adjacentes alors elles admettent la même limite ℓ où ℓ vérifie $\ell = k + \frac{1}{\ell}$ et $0 < k \leq \ell \leq k+1$

ℓ est donc solution de l'équation (E) : $\ell^2 - k\ell - 1 = 0$

le discriminant de $\ell^2 - k\ell - 1 = 0$ (où ℓ est l'inconnue) est $\Delta = k^2 + 4$

$$\text{Les solutions de (E) sont : } \ell_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \text{ et } \ell_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

Le nombre ℓ_2 ne vérifie pas la condition $\ell > 0$; donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

1) • Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n \leq \alpha_{n+4}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a :

$$a_n \leq \alpha_n \text{ et } a_n \leq \alpha_{n+1} \text{ et } a_n \leq \alpha_{n+2} \text{ et } a_n \leq \alpha_{n+3}$$

$$\text{car } a_n = \min(\alpha_{n+3}; \alpha_{n+2}; \alpha_{n+1}; \alpha_n)$$

$$\text{Donc : } 4a_n \leq \alpha_n + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3}$$

$$\text{D'où : } a_n \leq \frac{1}{4}(\alpha_n + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3}) \text{ c'est-à-dire : } a_n \leq \alpha_{n+4}$$

• Déduisons que la suite (a_n) est croissante

Soit $n \in \mathbb{N}$;

$$\text{On a : } a_n \leq \alpha_{n+4} \text{ et } a_n \leq \alpha_{n+1} \text{ et } a_n \leq \alpha_{n+2} \text{ et } a_n \leq \alpha_{n+3}$$

$$\text{Donc : } a_n \leq \min(\alpha_{n+1}; \alpha_{n+2}; \alpha_{n+3}; \alpha_{n+4}) \text{ c'est-à-dire : } a_n \leq a_{n+1}$$

D'où la suite (a_n) est croissante

2) • Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; b_n \geq \alpha_{n+4}$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N} ; \text{ on a : } \alpha_n \leq b_n \text{ et } \alpha_{n+1} \leq b_n \text{ et } \alpha_{n+2} \leq b_n \text{ et } \alpha_{n+3} \leq b_n$$

$$\text{car } b_n = \max(\alpha_{n+3}; \alpha_{n+2}; \alpha_{n+1}; \alpha_n)$$

$$\text{Donc : } \alpha_n + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} \leq 4b_n \text{ (par sommation)}$$

$$\text{D'où : } \frac{1}{4}(\alpha_n + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3}) \leq b_n$$

$$\text{Par conséquent : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; b_n \geq \alpha_{n+4}$$

• Déduisons que la suite (b_n) est décroissante (1)

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a :

$$\alpha_{n+4} \leq b_n \text{ et } \alpha_{n+1} \leq b_n \text{ et } \alpha_{n+2} \leq b_n \text{ et } \alpha_{n+3} \leq b_n$$

$$\text{Donc : } \max(\alpha_{n+1}; \alpha_{n+2}; \alpha_{n+3}; \alpha_{n+4}) \leq b_n \text{ c'est-à-dire : } b_{n+1} \leq b_n$$

D'où la suite (b_n) est décroissante.

3) a) On a : (a_n) est croissante, donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_0 \leq a_n$

et (b_n) est décroissante donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; b_n \leq b_0$

et d'après les données on a : $a_n \leq \alpha_n \leq b_n$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_0 \leq a_n \leq \alpha_n \leq b_n \leq b_0$

b) La suite (a_n) est croissante et majorée par b_0 , donc elle est convergente et la suite (b_n) est décroissante minorée par a_0 , donc elle est convergente.

On pose $\lim a_n = a$ et $\lim b_n = b$

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $\alpha_{n+4} = \frac{1}{4}(\alpha_n + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3})$

et $a_n \leq \min(\alpha_n; \alpha_{n+1}; \alpha_{n+2}; \alpha_{n+3})$

Puisque $a_n = \min(\alpha_n; \alpha_{n+1}; \alpha_{n+2}; \alpha_{n+3})$, alors $a_n = \alpha_n$ ou $a_n = \alpha_{n+1}$ ou $a_n = \alpha_{n+2}$ ou $a_n = \alpha_{n+3}$

Supposons par exemple que a_n est le plus petit des nombres, $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}$ et α_{n+3} ; alors $a_n = \alpha_n$ et dans ce cas on a :

$\alpha_{n+1} \leq b_n$ et $\alpha_{n+2} \leq b_n$ et $\alpha_{n+3} \leq b_n$ et $\alpha_n = a_n$

D'où : $\alpha_n + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} \leq a_n + 3b_n$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \alpha_{n+4} \leq \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n$

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \alpha_{n+4} \leq \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a$

Puisque la suite (a_n) est croissante,

alors $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, donc $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n \leq a$

D'où : $\frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n \leq \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a$

Or $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \alpha_{n+1} \leq \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a_n$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \alpha_{n+1} \leq \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a$

c) Montrons que $b \leq a$

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{n+4} \leq \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a \\ \alpha_{n+5} \leq \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}a \\ \alpha_{n+6} \leq \frac{3}{4}b_{n+2} + \frac{1}{4}a \\ \alpha_{n+7} \leq \frac{3}{4}b_{n+3} + \frac{1}{4}a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{n+4} \leq \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a \\ \alpha_{n+5} \leq \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a \\ \alpha_{n+6} \leq \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a \\ \alpha_{n+7} \leq \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a \end{array} \right.$$

Donc : $\max(\alpha_{n+4}; \alpha_{n+5}; \alpha_{n+6}; \alpha_{n+7}) \leq \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a$

$$\text{D'où : } b_{n+4} \leq \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a$$

$$\text{Or : } \lim b_{n+4} = b \text{ et } \lim \left(\frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a \right) = \frac{3}{4}b + \frac{1}{4}a$$

donc, (d'après limites et ordre);

$$\text{On a : } b \leq \frac{3}{4}b + \frac{1}{4}a \text{ donc : } b \leq a$$

5) Montrons que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

On a : (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.

Reste à montrer que $\lim(a_n - b_n) = 0$

D'après 4) b) $b \leq a$

$$\text{Or } (\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n \leq b_n, \text{ donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \text{ d'où } a \leq b$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$, d'où : les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.

6) Montrons que (α_n) est convergente

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n \leq \alpha_n \leq b_n$$

$$\text{et puisque } \lim a_n = \lim b_n = a \in \mathbb{R}$$

alors (α_n) est convergente et $\lim \alpha_n = a$

Exercice 48

1) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0 \text{ et } v_n > 0$ (1)

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$

$$\text{On a : } u_n > 0 \text{ et } v_n > 0 \text{ donc } \frac{u_n + v_n}{2} > 0 \text{ c'est-à-dire } u_{n+1} > 0$$

$$\text{On a : } u_{n+1} > 0 \text{ et } v_n > 0 \text{ donc } u_{n+1} \times v_n > 0 \text{ d'où } v_{n+1} > 0$$

• Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0 \text{ et } v_n > 0$

Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < v_n$ (2)

- Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 < v_0$

- Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $u_n < v_n$ et montrons que $u_{n+1} < v_{n+1}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } u_{n+1}^2 - v_{n+1}^2 &= u_{n+1}^2 - u_{n+1}v_n \\ &= u_{n+1}(u_{n+1} - v_n) \\ &= \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)\left(\frac{u_n + v_n}{2} - v_n\right) \\ &= \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)\left(\frac{u_n - v_n}{2}\right) \end{aligned}$$

et puisque $0 < u_n < v_n$ alors $\frac{u_n - v_n}{2} < 0$ et $\frac{u_n + v_n}{2} > 0$ donc $u_{n+1}^2 - v_{n+1}^2 < 0$
c'est-à-dire $u_{n+1}^2 < v_{n+1}^2$, et comme $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$ alors $u_{n+1} < v_{n+1}$

- Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < v_n$

2) Montrons que la suite (u_n) est croissante et que (v_n) est strictement décroissante.

- On a : $u_n < v_n \Leftrightarrow u_n + u_n < u_n + v_n$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow u_n < \frac{u_n + v_n}{2} \\ &\Leftrightarrow u_n < u_{n+1} \end{aligned}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < u_{n+1}$ c'est-à-dire que la suite (u_n) est croissante.

$$\begin{aligned} \text{• On a : } v_{n+1}^2 - v_n^2 &= u_{n+1}v_n - v_n^2 \\ &= v_n(u_{n+1} - v_n) \\ &= v_n\left(\frac{u_n + v_n}{2} - v_n\right) \\ &= v_n\left(\frac{u_n - v_n}{2}\right) \end{aligned}$$

et puisque $0 < u_n < v_n$ alors $v_{n+1}^2 - v_n^2 < 0$

c'est-à-dire : $v_{n+1}^2 < v_n^2$ et comme $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n > 0$ alors : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} < v_n$

Par conséquent la suite (v_n) est strictement décroissante.

3) a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \in \mathbb{N} ; \text{ on a : } v_{n+1} < v_n &\Leftrightarrow v_{n+1} - u_{n+1} < v_n - u_{n+1} \\ &\Leftrightarrow v_{n+1} - u_{n+1} < v_n - \frac{u_n + v_n}{2} \\ &\Leftrightarrow v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{v_n - u_n}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < \frac{v_{n+1} - u_{n+1}}{v_n - u_n} < \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } 0 < \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{v_{k+1} - u_{k+1}}{v_k - u_k} \right) < \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$\text{D'où : } 0 < \frac{v_n - u_n}{v_0 - u_0} < \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$\text{c'est-à-dire : } 0 < v_n - u_n < \left(\frac{1}{2} \right)^n (v_0 - u_0) \text{ car } (\forall k \in \mathbb{N}) ; v_k - u_k > 0$$

Méthode 2 : (on peut utiliser le raisonnement par récurrence)

$$\text{b) On a : } 0 < v_n - u_n < \left(\frac{1}{2} \right)^n (v_0 - u_0) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n (v_0 - u_0) = 0 \text{ (car } -1 < \frac{1}{2} < 1)$$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

et puisque (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, alors les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, par suite elles admettent la même limite

$$4) \text{ a) Montrons par récurrence que : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = v_n \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

• Initialisation : Pour $n = 0$

$$\text{On a : } u_0 = v_0 \cos(\alpha) \text{ donc la propriété est vraie pour } n = 0$$

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $u_n = v_n \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$ et montrons que:

$$u_{n+1} = v_{n+1} \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } u_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ &= \frac{1}{2} \left(v_n \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) + v_n \right) \\ &= \frac{1}{2} v_n \left(1 + \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} v_n \left(2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) \right) \\ &= v_n \cos^2\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) \quad (a) \end{aligned}$$

$$\text{et } v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}$$

$$= \sqrt{v_n^2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)}$$

$$= v_n \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right); \text{ car } 0 < \frac{\alpha}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) > 0 \text{ et } v_n > 0 \right)$$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } u_{n+1} &= v_n \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) \quad (\text{d'après (a)}) \\ &= v_{n+1} \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = v_n \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$

b) Dédudons que : $v_n = v_0 \times \frac{\sin \alpha}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$

On a : $v_{n+1}^2 = u_{n+1} v_n$

Donc : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)$

Or : $\sin(\theta) = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, donc $\frac{\sin(\theta)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

On prend $\theta = \frac{\alpha}{2^n}$ on obtient : $\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)}$

Donc : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)}$; d'où : $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^{k+1}}\right)}$

Par conséquent : $\frac{v_n}{v_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\sin(\alpha)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$; donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = v_0 \times \frac{\sin(\alpha)}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$

c) Déterminons $\lim v_n$ en fonction de v_0 et α

On a : $v_n = v_0 \times \frac{\sin(\alpha)}{\frac{\alpha}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)} \left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin x}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$, donc f est continue en 0

et on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = 0$ (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{2^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = f(0)$ (car f est continue en 0)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)} = 1$$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v_0 \times \frac{\sin \alpha}{\alpha}$

Déduction :

On a : $u_0 \leq u_n < v_n \leq v_0$; donc : $u_0 < v_n \leq v_0$; et puisque (v_n) est convergente,

alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_0$, donc $u_0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \leq v_0$

Ainsi : $v_0 \cos \alpha \leq v_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq v_0$; donc : $\cos \alpha \leq \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq 1$; (car $v_0 > 0$)

Par conséquent : $(\forall \alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[)$; $\sin \alpha \leq \alpha \leq \tan \alpha$

d) Dans le cas où $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$; déterminons $\lim u_n$

On a : $\cos \alpha = \frac{u_0}{v_0} = \frac{1}{2}$; donc : $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (car $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v_0 \times \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ et $v_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 2 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

Résumé

1 Fonction logarithme népérien

1) Définition et propriétés:

Définition: La fonction logarithme népérienne est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1; on la note $\ln$.

Conséquences:

- L'ensemble de définition de la fonction $\ln$ est $]0; +\infty[$.
- $\ln 1 = 0$
- La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et : $(\forall x \in]0; +\infty[); (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$
- La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
- Pour tous réels a et b de $]0; +\infty[$ on a : $a < b \iff \ln a < \ln b$
- Le signe de $\ln(x)$; où $x \in]0; +\infty[$
 - ✓ $\ln x = 0 \iff x = 1$
 - ✓ $\ln x > 0 \iff x > 1$
 - ✓ $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$

Propriété: (égalité)

Pour tous a et b de $]0; +\infty[$ on a : $\ln a = \ln b \iff a = b$

Propriété fondamentale:

Pour tous a et b de $]0; +\infty[$ on a : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Propriétés:

Soit a et b deux éléments de $]0; +\infty[$ et r un élément de $\mathbb{Q}$, on a :

- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$
- $\ln(a^r) = r\ln a$
- $r = \ln e^r$

Remarques:

- Si $xy > 0$ alors : $\ln(xy) = \ln|x| + \ln|y|$ et $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln|x| - \ln|y|$
- Si $x \in \mathbb{R}^*$ alors : $\ln x^2 = 2\ln|x|$.

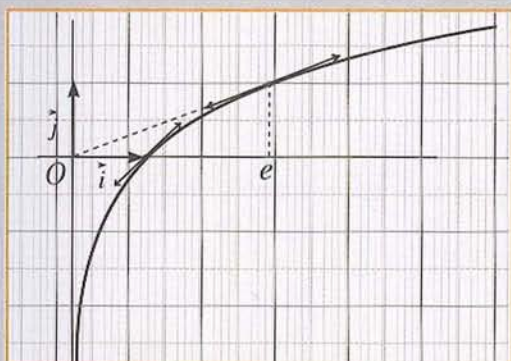
2) Limites usuelles:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
- $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$

3) Tableau de variations de la fonction $\ln$:

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$		+
$\ln$	$-\infty$	$+\infty$

4) Courbe de la fonction $\ln$



$$\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

où $e \simeq 2,7$

5) La dérivée logarithmique d'une fonction

Définition: Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I : c'est-à-dire : $((\forall x \in I); u(x) \neq 0)$.

La fonction : $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ (où u' est la fonction dérivée de u) est appelée la dérivée logarithmique de la fonction u sur l'intervalle I

Propriété 1:

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle, alors la fonction $f: x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est la dérivée logarithmique de la fonction u c'est-à-dire : $(\forall x \in I); f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Propriété 2:

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I .

Les primitives de la fonction : $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I , sont les fonctions $x \mapsto \ln|u(x)| + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

2 Fonction logarithme de base a ($a > 0$ et $a \neq 1$)

Définition: Soit a un nombre réel strictement positif et distinct de 1. La fonction logarithme de base a est la fonction notée $\log_a$ et qui est définie sur $]0; +\infty[$ par : $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Conséquences:

- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(e) = \frac{1}{\ln a}$
- $\log_a(1) = 0$
- $(\forall x \in]0; +\infty[); \log_e(x) = \ln x$
- $\ln = \log_e$

Propriétés:

Pour tous x et y de $]0; +\infty[$, et pour tout a de $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ on a :

- 1) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- 2) $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$
- 3) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- 4) $(\forall r \in \mathbb{Q}); \log_a(x^r) = r \log_a(x)$.

3 Fonction logarithme décimale

Définition: La fonction logarithme décimale est la fonction logarithme de base 10, et notée $\log$ au lieu de $\log_{10}$, et on a : $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$ pour tout x de $]0; +\infty[$

Conséquences:

- $\log 10 = 1$
- $\log(1) = 0$
- $(\forall r \in \mathbb{Q}); \log(10^r) = r$

4 Variations de la fonction logarithme de base a

La fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(\forall x \in]0; +\infty[); (\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$

Cas où $a > 1$

x	0	$+\infty$
$\log_a'(x)$		+
$\log_a$	$-\infty$	$+\infty$

Cas où $0 < a < 1$

x	0	$+\infty$
$\log_a'(x)$		-
$\log_a$	$+\infty$	$-\infty$

Exercices d'application

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\ln(x^2) = 16$

2) $(\ln(x))^2 = 16$

3) $\ln(x^2 - 4) - \ln(1 - 4x) = 0$

4) $\ln(x - 2) + \ln(4 - x) = \ln(2x - 5)$

5) $\ln(4x + 2) - \ln(x - 1) = 2 \ln(x)$

6) $(\ln(x))^2 - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 2$

7) $\ln(10 - x^2) = 2 \ln(3) - \ln(x^2)$

Exercice 2

Résoudre $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\ln x < 3 \ln(2) - \ln(3)$

2) $\ln(x^2 - 1) < 0$

3) $\ln(\ln(x)) > 0$

4) $(1 - \ln(x))(3 + \ln(x)) \geq 0$

5) $\frac{2 + \ln(x)}{2 \ln(x) - 1} < 0$

6) $\ln(x + 6) > 2 \ln x$

Exercice 3

Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1)
$$\begin{cases} \ln(x) - \ln(y) = 2 \\ 2 \ln(x) - 3 \ln(y) = 5 \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} \ln(x^2 \cdot y^3) = -4 \\ \ln\left(\frac{x^3}{y^4}\right) = 11 \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} (\ln(x)) \cdot (\ln(y)) = -15 \\ \ln(xy) = -2 \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(3) \end{cases}$$

Exercice 4

Soit a et b deux réels tels que : $a > 1$ et $0 \leq b < a$

Montrer que : $(\ln(a - b)) \cdot (\ln(a + b)) \leq (\ln(a))^2$

Exercice 5

Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f , dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \ln|x-1| + \ln(x)$

4) $f(x) = \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x-2}$

2) $f(x) = x \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

5) $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$

3) $f(x) = \frac{\ln(x)}{1 - \ln(x)}$

6) $f(x) = \ln(k^2 - 2k \cos(x) + 1)$ où $k \in \mathbb{R}$

Exercice 6

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^3}$

6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln^2(x)$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}$

7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \cdot \ln^2(x)$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \sqrt{|\ln x|}$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{2x + 1}$

9) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2x}{x-1} + \ln(x-1) \right)$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(2x+1)}$

10) $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \ln(x^2 - 2x)$

Exercice 7

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

2) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

7) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3} \cdot \ln\left(\frac{x}{3}\right)$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 - x - \ln(x+1)$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \ln(\cos x)$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - \ln(x^2 + 1)$

9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x) - \ln(x)}{1 + 2 \ln(x)}$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1 + \sqrt{x^2+1})}{2x}$

Exercice 8Déterminer dans chacun des cas suivants, la fonction dérivée de la fonction f

1) $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

5) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{|\ln x|}$

$$2) f(x) = \frac{x \ln |x|}{x-1}$$

$$6) f(x) = \sqrt{1 - \ln(x-1)}$$

$$3) f(x) = x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$7) f(x) = x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x)$$

$$4) f(x) = x \left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right)^2$$

$$8) f(x) = \ln(x-1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2})$$

Exercice 9

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$

- 1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f
- 2) étudier la dérivabilité de f à droite en -1 et à gauche en 1
- 3) Calculer $f'(x)$ pour tout élément x de $D - \{-1; 1\}$

Exercice 10

Soit u la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $] -1; +\infty[$ par $u(x) = x - \ln(x+1)$

- 1) Dresser le tableau de variations de la fonction u .
- 2) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$

Exercice 11

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right|$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) a- Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f .
b- Déterminer les limites aux bornes des intervalles de D
- 2) a- Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
b- Montrer que le point $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C})$.
- 3) Construire $(\mathcal{C})$.

Exercice 1

Soit D l'ensemble de définition de l'équation proposée, et S son ensemble de solutions.

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(x^2) = 16$

On a : $D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^*$

Soit x un élément de $\mathbb{R}^*$

On a : $\ln(x^2) = 16 \Leftrightarrow 2 \ln|x| = 16$

$$\Leftrightarrow \ln|x| = 8 \quad (\forall r \in \varphi), (\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); (\ln x = r \Leftrightarrow x = e^r)$$

$$\Leftrightarrow |x| = e^8$$

$$\Leftrightarrow x = e^8 \text{ ou } x = -e^8$$

Donc : $S = \{e^8; -e^8\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\ln(x))^2 = 16$

On a : $D = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\} =]0; +\infty[$

Soit $x \in]0; +\infty[$:

On a : $(\ln(x))^2 = 16 \Leftrightarrow \ln(x) = 4 \text{ ou } \ln(x) = -4$

$$\Leftrightarrow x = e^4 \text{ ou } x = e^{-4}$$

Donc : $S = \{e^4; e^{-4}\}$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(x^2 - 4) - \ln(1 - 4x) = 0$

■ Déterminons D .

Soit $x \in \mathbb{R}$:

On a : $x \in D \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \text{ et } 1 - 4x > 0$

$$\Leftrightarrow x \in (]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[) \text{ et } x < \frac{1}{4}$$

Donc : $D =]-\infty; -2[$

Soit $x \in]-\infty; -2[$:

On a : $\ln(x^2 - 4) - \ln(1 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 4) = \ln(1 - 4x)$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 1 - 4x \quad (\text{car } \ln \text{ est une application}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \quad \text{bijective de }]0; +\infty[\text{ vers } \mathbb{R})$$

et on a : 1 et -5 sont les solutions de l'équation $x^2 + 4x - 5 = 0$ dans $\mathbb{R}$ et puisque : $1 \notin D$ et $-5 \in D$, alors : $S = \{-5\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(x - 2) + \ln(4 - x) = \ln(2x - 5)$

■ Déterminons D .

Soit $x \in \mathbb{R}$:

On a : $x \in D \Leftrightarrow x-2 > 0$ et $4-x > 0$ et $2x-5 > 0$

$$\Leftrightarrow x > 2 \text{ et } x > \frac{5}{2} \text{ et } x < 4$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] \frac{5}{2}; 4 \right[$$

Donc : $D = \left] \frac{5}{2}; 4 \right[$.

Soit $x \in \left] \frac{5}{2}; 4 \right[$:

On a : $\ln(x-2) + \ln(4-x) = \ln(2x-5) \Leftrightarrow \ln(x-2)(4-x) = \ln(2x-5)$

$$\Leftrightarrow (x-2)(4-x) = (2x-5)$$

(car $\ln$ est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$).

Donc : $x^2 - 4x + 3 = 0$.

et on a : 1 et 3 sont les solutions de l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$ dans $\mathbb{R}$

et puisque : $1 \notin D$ et $3 \in D$ alors : $S = \{3\}$.

5) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(4x+2) - \ln(x-1) = 2 \ln x$

■ Déterminons D .

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a : $x \in D \Leftrightarrow 4x+2 > 0$ et $x-1 > 0$ et $x > 0$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{2} \text{ et } x > 1 \text{ et } x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

Donc : $D =]1; +\infty[$

Soit $x \in]1; +\infty[$, l'équation proposée est équivalente à l'équation :

$$\ln\left(\frac{4x+2}{x-1}\right) = \ln(x^2), \text{ donc : } x^2 = \frac{4x+2}{x-1}, \text{ c'est-à-dire : } x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0$$

On remarque que -1 est une racine du polynôme $x^3 - x^2 - 4x - 2$:

$$\text{et on a : } x^3 - x^2 - 4x - 2 = (x+1)(x^2 - 2x - 2)$$

les solutions de l'équation $x^2 - 2x - 2 = 0$ sont $1 - \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3}$.

et puisque $1 + \sqrt{3} \in D$, $1 - \sqrt{3} \notin D$ et $-1 \notin D$, alors $S = \{1 + \sqrt{3}\}$.

6) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $(\ln(x))^2 - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 2$

On a : $D =]0; +\infty[$,

soit $x \in]0; +\infty[$. L'équation (E) s'écrit $(\ln(x))^2 + \ln(x) - 2 = 0$

Posons $X = \ln(x)$

(E) devient $X^2 + X - 2 = 0$, donc $X = 1$ ou $X = -2$

c'est-à-dire $\ln x = 1$ ou $\ln(x) = -2$ donc : $S = \{e; e^{-2}\}$

7) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(10 - x^2) = 2 \ln(3) - \ln(x^2)$

■ Déterminons D .

Soit $x \in \mathbb{R}$,

On a : $x \in D \Leftrightarrow 10 - x^2 > 0$ et $x^2 > 0$

$$\Leftrightarrow |x| < \sqrt{10} \text{ et } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\sqrt{10}, 0[\cup]0, \sqrt{10}[$$

Donc : $D =]-\sqrt{10}, 0[\cup]0, \sqrt{10}[$

Soit $x \in D$

On a : $\ln(10 - x^2) = 2 \ln(3) - \ln(x^2) \Leftrightarrow \ln(10 - x^2) + \ln x^2 = \ln(9)$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2(10 - x^2)) = \ln(9)$$

$$\Leftrightarrow x^2(10 - x^2) = 9$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ ou } x^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-1, 1, 3, -3\}$$

Donc : $S = \{-3, -1, 1, 3\}$

Exercice 2

Dans tous ce qui suit D est l'ensemble de définition de l'inéquation proposée et S son ensemble de solutions.

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\ln(x) < 3 \ln(2) - \ln(3)$

On a : $D =]0; +\infty[$

Soit $x \in D$, on a : $\ln(x) < 3 \ln(2) - \ln(3) \Leftrightarrow \ln(x) < \ln\left(\frac{8}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow x < \frac{8}{3}$$

Donc : $S = \left]0; \frac{8}{3}\right[$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\ln(x^2 - 1) < 0$

On a : $D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 > 0\} =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

Soit $x \in D$, on a :

$$\ln(x^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow 0 < x^2 - 1 < 1$$

$$\Leftrightarrow 1 < x^2 < 2$$

$$\Leftrightarrow 1 < |x| < \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\sqrt{2}, -1[\cup]1, \sqrt{2}[$$

et puisque : $]-\sqrt{2}, -1[\cup]1, \sqrt{2}[\subset D$ alors : $S =]-\sqrt{2}, -1[\cup]1, \sqrt{2}[$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\ln((\ln x)) > 0$

$$\text{On a : } D = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln(x) > 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } x > 1\} =]1, +\infty[$$

$$\text{Soit } x \in D, \text{ on a : } \ln(\ln(x)) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 1$$

$$\Leftrightarrow x > e$$

$$\text{Donc : } S =]e; +\infty[$$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $(1 - \ln(x))(3 + \ln(x)) \geq 0$

$$\text{On a : } D =]0; +\infty[$$

$$\text{Soit } x \in D, \text{ on a : } (1 - \ln(x))(3 + \ln(x)) \geq 0 \Leftrightarrow (\ln(x) - 1)(\ln(x) + 3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq \ln(x) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{-3}) \leq \ln(x) \leq \ln(e)$$

$$\Leftrightarrow e^{-3} \leq x \leq e$$

$$\text{Donc : } S = [e^{-3}; e]$$

5) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\frac{2 + \ln(x)}{2 \ln(x) - 1} < 0$

$$\text{On a : } D = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } 2 \ln(x) - 1 \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } x \neq \sqrt{e}\}$$

$$\text{Donc : } D =]0; \sqrt{e}[\cup]\sqrt{e}; +\infty[$$

$$\text{Soit } x \in D, \text{ on a :}$$

$$\frac{2 + \ln(x)}{2 \ln(x) - 1} < 0 \Leftrightarrow (\ln(x) + 2)(2 \ln(x) - 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow -2 < \ln(x) < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{-2}) < \ln(x) < \ln \sqrt{e}$$

$$\Leftrightarrow e^{-2} < x < \sqrt{e}$$

$$\text{Donc : } S =]e^{-2}; \sqrt{e}[$$

6) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\ln(x + 6) > 2 \ln x$

$$\text{On a : } D = \{x \in \mathbb{R} / x + 6 > 0 \text{ et } x > 0\}$$

donc : $D =]0; +\infty[$

Soit $x \in D$, on a : $\ln(x+6) > 2\ln(x) \iff \ln(x+6) > \ln(x^2)$

$$\iff x+6 > x^2$$

$$\iff x^2 - x - 6 < 0$$

$$\iff (x+2)(x-3) < 0$$

$$\iff -2 < x < 3$$

Donc : $S =]-2; 3[\cap]0; +\infty[=]0; 3[$

Exercice 3

Dans tous ce qui suit E est l'ensemble de définition du système proposé et S son ensemble de solutions.

1) Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système :
$$\begin{cases} \ln(x) - \ln(y) = 2 \\ 2\ln(x) - 3\ln(y) = 5 \end{cases}$$

On a : $E =]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ c'est-à-dire $E = (\mathbb{R}^{++})^2$

Soit (x, y) un élément E , on pose $a = \ln x$ et $b = \ln y$

Le système devient : $\begin{cases} a - b = 2 \\ 2a - 3b = 5 \end{cases}$, c'est-à-dire : $\begin{cases} a = b + 2 \\ b = -1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

D'où : $\ln x = 1$ et $\ln y = -1$, par conséquent $x = e$ et $y = \frac{1}{e}$,

d'où : $S = \left\{ \left(e; \frac{1}{e} \right) \right\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système :
$$\begin{cases} \ln(x^2 \cdot y^3) = -4 \\ \ln\left(\frac{x^3}{y^4}\right) = 11 \end{cases}$$

• Déterminons D .

On a : $(x, y) \in E \iff \begin{cases} x^2 \cdot y^3 > 0 \\ \frac{x^3}{y^4} > 0 \text{ et } y \neq 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} y > 0 \text{ et } x \neq 0 \\ x > 0 \text{ et } y \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff x > 0 \text{ et } y > 0$$

Donc : $E = (\mathbb{R}^{++})^2$

• Déterminons S :

Soit (x, y) un élément de E :

On a : $\begin{cases} \ln(x^2 y^3) = -4 \\ \ln\left(\frac{x^3}{y^4}\right) = 11 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(x^2) + \ln(y^3) = -4 \\ \ln(x^3) - \ln(y^4) = 11 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\ln(x) + 3\ln(y) = -4 \\ 3\ln(x) - 4\ln(y) = 11 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = 1 \text{ et } \ln y = -2$$

$$\Leftrightarrow x = e \text{ et } y = e^{-2}$$

$$\text{Donc : } S = \{(e; e^{-2})\}$$

$$3) \text{ Résolvons dans } \mathbb{R}^2 \text{ le système : } \begin{cases} (\ln(x)) \cdot (\ln(y)) = -15 \\ \ln(x \cdot y) = -2 \end{cases}$$

$$\text{On a : } E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ et } xy > 0\} \\ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 0\}$$

$$\text{Donc : } E = (\mathbb{R}^+)^2.$$

Soit (x, y) un élément de E , on a :

$$\begin{cases} \ln(x) \cdot \ln(y) = -15 \\ \ln(x \cdot y) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) \cdot \ln(y) = -15 \\ \ln(x) + \ln(y) = -2 \end{cases}$$

$$\text{Posons : } a = \ln(x) \text{ et } b = \ln(y), \text{ le système devient : } \begin{cases} a + b = -2 \\ a \cdot b = -15 \end{cases}$$

Donc : a et b sont les solutions (si elles existent) de l'équation $t^2 + 2t - 15 = 0$ dans $\mathbb{R}$

$$\text{et on a : } t^2 + 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \text{ ou } t = -5$$

$$\text{Donc : } (a; b) = (3; -5) \text{ ou } (a; b) = (-5; 3)$$

$$\text{D'où : } (x; y) = (e^3; e^{-5}) \text{ ou } (x; y) = (e^{-5}; e^3)$$

$$\text{Par conséquent : } S = \{(e^3; e^{-5}); (e^{-5}; e^3)\}$$

$$4) \text{ Résolvons dans } \mathbb{R}^2 \text{ le système : } \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(3) \end{cases}$$

$$\text{On a : } E = (\mathbb{R}^+)^2.$$

Soit $(x; y)$ un élément de E .

$$\text{Puisque : } \ln(x) + \ln(y) = \ln(3) \Leftrightarrow \ln(xy) = \ln(3) \\ \Leftrightarrow xy = 3$$

$$\text{alors le système devient : } \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 \cdot y^2 = 9 \end{cases}$$

Donc : x^2 et y^2 sont les solutions (si elles existent) de l'équation $t^2 - 10t + 9 = 0$ dans $\mathbb{R}$

$$\text{D'où : } \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Et puisque : } x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ alors : } (x; y) \in \{(1; 3); (3; 1)\}, \text{ par conséquent : } \\ S = \{(1; 3); (3; 1)\}$$

Exercice 4

Montrons que : $(\ln(a-b)) \cdot (\ln(a+b)) \leq (\ln(a))^2$

On a $a > 1$ et $0 \leq b < a$, donc : $a-b > 0$ et $0 \leq \frac{b}{a} < 1$, d'où : $1 - \frac{b}{a} > 0$

Et puisque : $a-b = a\left(1 - \frac{b}{a}\right)$ alors : $\ln(a-b) = \ln(a) + \ln\left(1 - \frac{b}{a}\right)$

et on a aussi : $a+b > 0$ et $1 + \frac{b}{a} > 0$. Et puisque : $a+b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$

alors : $\ln(a+b) = \ln(a) + \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)$

Donc : $\ln(a-b) \times \ln(a+b) = (\ln(a) + \ln\left(1 - \frac{b}{a}\right))(\ln(a) + \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right))$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} (\ln(a-b))(\ln(a+b)) &= (\ln(a))^2 + \ln(a)\left(\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) + \ln\left(1 - \frac{b}{a}\right)\right) + \ln\left(1 - \frac{b}{a}\right) \times \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \\ &= (\ln(a))^2 + \ln(a) \cdot \ln\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right) + \ln\left(1 - \frac{b}{a}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

et on a : $0 \leq \frac{b}{a} < 1$, donc : $0 < 1 - \frac{b}{a} \leq 1$ et $0 < 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \leq 1$

Donc : $\ln\left(1 - \frac{b}{a}\right) \leq 0$ et $\ln\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right) \leq 0$

Et on a : $\ln(a) > 0$ (car $a > 1$) et $\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) > 0$ (car $1 + \frac{b}{a} > 1$)

D'où : $(\ln(a)) \cdot \ln\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right) + \ln\left(1 - \frac{b}{a}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq 0$

Par suite : $(\ln(a-b)) \cdot (\ln(a+b)) \leq (\ln(a))^2$

Exercice 5

1) Déterminons D , où $f(x) = \ln|x-1| + \ln(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x \in D \Leftrightarrow |x-1| > 0 \text{ et } x > 0$$

$$\Leftrightarrow |x-1| \neq 0 \text{ et } x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 1 \text{ et } x > 0$$

Donc : $D =]0; 1[\cup]1; +\infty[$

Déterminons D , où $f(x) = x \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x \in D \Leftrightarrow x+1 \neq 0 \text{ et } \frac{x-1}{x+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

Donc : $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

3) Déterminons D , où $f(x) = \frac{\ln(x)}{1 - \ln(x)}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x \in D \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } 1 - \ln(x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln(x) \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq e$$

Donc : $D =]0; e[\cup]e; +\infty[$

4) Déterminons D , où $f(x) = \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x-2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x \in D \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln(x) \geq 0 \text{ et } x - 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1 \text{ et } x > 0 \text{ et } x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1 \text{ et } x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x \in [1; 2[\cup]2; +\infty[$$

Donc : $D = [1; 2[\cup]2; +\infty[$

5) Déterminons D , où $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x \in D \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } x - \frac{1}{x} > 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } \frac{x^2 - 1}{x} > 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 1) > 0$$

Dressons le tableau de signe de $x(x^2 - 1)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
x^2-1	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x(x^2-1)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc : $x(x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 0[\cup]1; +\infty[$

D'où : $D =]-1; 0[\cup]1; +\infty[$

6) Déterminons D , où $f(x) = \ln(k^2 - 2k \cos(x) + 1)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x \in D \Leftrightarrow k^2 - 2k \cos(x) + 1 > 0$$

$$\begin{aligned} \text{et puisque : } k^2 - 2k \cos(x) + 1 &= k^2 - 2k \cos(x) + \cos^2(x) + \sin^2(x) \\ &= (k - \cos(x))^2 + \sin^2(x) \end{aligned}$$

$$\text{alors : } k^2 - 2k \cos(x) + 1 \geq 0$$

$$\text{Donc : } x \in D \Leftrightarrow k^2 - 2k \cos(x) + 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (k - \cos(x))^2 + \sin^2(x) \neq 0 \quad (A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ et } B = 0)$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) \neq k \text{ ou } \sin(x) \neq 0$$

$$\text{et on a : } (k - \cos(x))^2 + \sin^2(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = k \text{ et } \sin x = 0$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} \cos(x) = k \\ \sin(x) = 0 \end{cases} \text{ ainsi } 1 = \cos^2(x) + \sin^2(x) = k^2$$

$$\text{alors : } k = 1 \text{ ou } k = -1$$

$$\bullet \text{ Si } k = 1 \text{ alors : } x \in D \Leftrightarrow 2 - 2 \cos(x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x \neq 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc : } D = \mathbb{R} - \{2k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bullet \text{ Si } k = -1 \text{ alors :}$$

$$x \in D \Leftrightarrow 2 + 2 \cos(x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc : } D = \mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bullet \text{ Si : } k \neq 1 \text{ et } k \neq -1 \text{ alors : } (\forall x \in \mathbb{R}); (\cos(x) - k)^2 + \sin^2(x) \neq 0$$

$$\text{Donc : } D = \mathbb{R}.$$

Exercice 6

$$1) \text{ Calculons : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^3}$$

$$\text{Soit } x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } \frac{\ln^2(x)}{x^3} = \frac{1}{x} \left(\frac{\ln(x)}{x} \right)^2$$

$$\text{Et puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0 \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 = 0$$

$$\text{Or : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{\ln(x)}{x} \right)^2 = 0 \text{ par conséquent : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^3} = 0$$

$$2) \text{ Calculons : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Soit } x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } \ln(x) = 2 \ln(\sqrt{x}), \text{ donc : } \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} = \frac{4 \ln^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

$$\text{On pose : } \sqrt{x} = t^2 \text{ avec } t > 0. \text{ Si } x \text{ tend vers } +\infty \text{ alors } t \text{ tend vers } +\infty.$$

$$\text{et } \frac{4 \ln^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{4 \ln^2(t^2)}{t^2} = 4 \frac{(2 \ln t)^2}{t^2} = 16 \left(\frac{\ln(t)}{t} \right)^2$$

Et puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} 16 \left(\frac{\ln(t)}{t} \right)^2 = 0$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} = 0$

3) Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2}$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $\frac{\ln(1+x)}{x^2} = \frac{\ln(1+x)}{1+x} \cdot \frac{1+x}{x^2}$

posons : $t = x + 1$ on a : $x \rightarrow +\infty \iff t \rightarrow +\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$

Et comme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2} = 0$

4) Calculons : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{2x + 1}$

Soit $x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[$, on a : $\ln(x^2 - x + 1) = \ln\left(x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\right)$
 $= \ln(x^2) + \ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$
 $= 2 \ln(-x) + \ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$

Donc : $\frac{\ln(x^2 - x + 1)}{2x + 1} = 2 \times \frac{\ln(-x)}{2x + 1} + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{2x + 1}$
 $= 2 \cdot \frac{\ln(-x)}{(-x)} \cdot \frac{(-x)}{2x + 1} + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{2x + 1}$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 1$ et la fonction $\ln$ est continue en 1

alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) = 0$ et on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x + 1} = 0$

donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x + 1} \times \left(\ln 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$

posons : $t = -x$, on a : $x \rightarrow -\infty \iff t \rightarrow +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{(-x)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$,

et on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

D'où : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \cdot \frac{\ln(-x)}{(-x)} \cdot \frac{(-x)}{2x + 1} = 0$, par suite : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{2x + 1} = 0$

5) Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(2x+1)}$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$\ln(x+2) = \ln\left(x\left(1+\frac{2}{x}\right)\right) = \ln(x) + \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \ln(x) \left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\ln(x)}\right)$$

$$\text{et } \ln(2x+1) = \ln(x) + \ln\left(2+\frac{1}{x}\right) = \ln(x) \left(1 + \frac{\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right)$$

$$\text{Donc : } \frac{\ln(x+2)}{\ln(2x+1)} = \frac{1 + \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\ln(x)}}{1 + \frac{\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}}$$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(2+\frac{1}{x}\right) = \ln(2)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\ln(x)} = 0$ par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(2x+1)} = 1$$

6) Calculons : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \cdot \ln^2(x)$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \cdot \ln^2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot (x \ln x)^2 = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x)^2 = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

7) Calculons : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \cdot \ln^2(x)$

$$\text{Soit } x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } \ln(\sqrt[6]{x}) = \frac{1}{6} \ln(x)$$

$$\text{c'est-à-dire : } \ln(x) = 6 \ln(\sqrt[6]{x}) \text{ et on a : } (\sqrt[6]{x})^2 = \sqrt[3]{x}$$

$$\text{Donc : } \sqrt[3]{x} \cdot \ln^2(x) = (\sqrt[6]{x})^2 \cdot (6 \ln(\sqrt[6]{x}))^2 = 36 (\sqrt[6]{x} \cdot \ln(\sqrt[6]{x}))^2$$

$$\text{Posons : } t = \sqrt[6]{x}, \text{ on a : } x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \cdot \ln^2(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln^2(t) = 0, \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt[6]{x} \cdot \ln(\sqrt[6]{x}))^2 = 0$$

$$\text{Par suite : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \cdot \ln^2(x) = 0$$

Méthode 2 :

$$\text{On pose } \sqrt[3]{x} = t^2 \text{ avec } t > 0 \text{ alors } x = t^6 \text{ et on a : } x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt[3]{x} \ln^2 x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 \ln^2(t^6) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^6 (6 \ln t)^2 = \lim_{t \rightarrow 0^+} 36 t^6 \ln t = 0$$

8) Calculons : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{|\ln(x)|}$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $x \sqrt{|\ln x|} = \sqrt{x^2 |\ln x|} = \sqrt{x |x \ln x|}$

et puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x \ln(x)| = 0$, donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x |x \ln x|} = 0$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{|\ln x|} = 0$

9) Calculons : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2x}{x-1} + \ln(x-1) \right)$

Soit $x \in]1; +\infty[$, on a : $\frac{2x}{x-1} + \ln(x-1) = \frac{1}{x-1} (2x + (x-1) \ln(x-1))$

posons : $x-1 = t$, on a : $x \rightarrow 1^+ \iff t \rightarrow 0^+$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \ln(x-1) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + (x-1) \ln(x-1)) = 2$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ alors : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} (2x + (x-1) \ln(x-1)) = +\infty$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x-1} + \ln(x-1) = +\infty$

10) Calculons : $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \ln(x^2 - 2x)$

Soit $x \in]2; +\infty[$, on a : $(x-2) \ln(x^2 - 2x) = (x-2) \ln(x(x-2))$
 $= (x-2) (\ln(x) + \ln(x-2))$
 $= (x-2) \ln(x) + (x-2) \ln(x-2)$

posons : $t = x-2$ on a : $x \rightarrow 2^+ \iff t \rightarrow 0^+$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \ln(x-2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x) = \ln(2)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0$, alors : $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \ln(x) = 0$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \ln(x^2 - 2x) = 0$

Exercice 7

1) Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1+x^2 = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$

et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$, donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x^2} - x = +\infty$

et puisque $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{1+x^2} - x) = +\infty$

Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x^2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{1+x^2} - x) = -\infty$

2) Calculons : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$, donc : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = +\infty$

3) Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - x - \ln(x+1))$

Soit $x \in]0; +\infty[$ on a : $2x^2 - x - \ln(x+1) = (x+1) \left(\frac{2x^2 - x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right)$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$

on pose : $t = x + 1$,

on a : $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$, d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = +\infty$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - x - \ln(x+1)) = +\infty$

4) Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \ln(x^2 + 1))$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $3x - \ln(x^2 + 1) = 3x - \ln\left(x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right)$
 $= 3x - 2 \ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$
 $= x \left(3 - 2 \frac{\ln(x)}{x}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$ et la fonction $\ln$ est continue 1,

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) = 0$

Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(3 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - \ln(x^2 + 1) = +\infty$

5) Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

info : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

On pose $h = \frac{2}{x}$, on a : $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow h \rightarrow 0^+$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} 2 \cdot \frac{\ln(1+h)}{h} = 2 \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+h)}{h} = 2$

6) Calculons : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Soit $x \in]-\infty; -1[$, on a :

$$x \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \left(\frac{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 1} \right) \left(\frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 1}{\frac{1}{x}} \right) = \left(\frac{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 1} \right) \cdot \left(\frac{-2x}{x+1} \right)$$

Posons : $t = \frac{x-1}{x+1}$, on a : si x tend vers $-\infty$ alors t tend vers 1

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(t)}{t-1} = 1,$$

$$\text{et on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2) = -2. \text{ Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -2$$

$$7) \text{ Calculons : } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3} \cdot \ln\left(\frac{x}{3}\right)$$

Méthode 1 :

On pose : $\frac{x}{3} = 1+h$ c'est-à-dire $x-3 = 3h$ et on a : $x \rightarrow 3 \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$\text{Donc : } \frac{x}{x-3} \ln\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{3(1+h)}{3h} \cdot \ln(1+h) = (1+h) \cdot \frac{\ln(1+h)}{h}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} (1+h) = 1 \text{ alors : } \lim_{h \rightarrow 0} (1+h) \cdot \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3} \cdot \ln\left(\frac{x}{3}\right) = 1$$

Méthode 2 :

$$\text{On a : } \frac{x}{x-3} \ln\left(\frac{x}{3}\right) = x \left(\frac{\ln(x) - \ln(3)}{x-3} \right)$$

et puisque la fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$,

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x) - \ln(3)}{x-3} = (\ln)'(3) = \frac{1}{3}$$

$$\text{et on a : } \lim_{x \rightarrow 3} x = 3 \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3} \cdot \ln\left(\frac{x}{3}\right) = 1$$

$$8) \text{ Calculons : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \ln(\cos x)$$

$$\text{On a : } \frac{1}{x^2} \cdot \ln(\cos x) = \frac{\ln(\cos x)}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

Posons : $t = \cos x$. On a : $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 1$,

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\cos x - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(t)}{t-1} = 1$$

$$\text{et on a : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}, \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \ln(\cos x) = -\frac{1}{2}$$

$$9) \text{ Calculons : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x) - \ln(x)}{1 + 2 \ln(x)}$$

On pose : $t = \ln(x)$. On a : $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x) - \ln(x)}{1 + 2\ln(x)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 - t}{1 + 2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{2} = +\infty$$

10) Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1+\sqrt{x^2+1})}{2x}$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$\ln(x+1+\sqrt{x^2+1}) = \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right) = \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$\text{Donc : } \frac{\ln(x+1+\sqrt{x^2+1})}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{2x} \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = 2$ et la fonction $\ln$ est continue en 2

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = \ln(2) \text{ et comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = 0$$

$$\text{Par conséquent : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1+\sqrt{x^2+1})}{2x} = 0$$

Exercice 8

Dans tous ce qui suit; on désigne par D_f l'ensemble de définition de la fonction f

1) • Déterminons D_f où $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

$$\text{On a : } D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln(x) \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } x \neq 1\}$$

$$\text{Donc : } D_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

• Calculons $f'(x)$.

$$f \text{ est dérivable en tout point de } D_f \text{ et on a : } (\forall x \in D_f); f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$$

2) • Déterminons D_f où $f(x) = \frac{x \ln|x|}{x-1}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{0; 1\}$$

• Calculons $f'(x)$.

$$\text{Soit } x \in D_f; \text{ on a : } f(x) = \frac{x \ln|x|}{x-1}$$

$$\text{Donc : } f'(x) = \frac{(x-1)(\ln|x|+1) - x \ln|x|}{(x-1)^2} = \frac{x-1-\ln|x|}{(x-1)^2}$$

3) • Déterminons D_f où $f(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$$\text{On a : } D_f = \{x \in \mathbb{R} / (x+1)(x-1) > 0\} =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

• Calculons $f'(x)$.

f est dérivable en tout point de D_f

Soit $x \in D_f$; on a : $f(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$:

$$\text{Donc : } f'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x \left(\frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} \right) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x \cdot \left(\frac{-2}{x^2-1} \right)$$

$$\text{D'où : } (\forall x \in D_f); f'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{2x}{x^2-1}$$

4) • Déterminons D_f où $f(x) = x\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)^2$

$$\begin{aligned} \text{On a : } D_f &= \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } x \neq 1\} =]0; 1[\cup]1; +\infty[\end{aligned}$$

• Calculons $f'(x)$.

f est dérivable en tout point de D_f

Soit $x \in D_f$; on a : $f(x) = x\left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right)^2$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } f'(x) &= \left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right)^2 + 2x\left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right) \cdot \left(\frac{1}{x \ln^2(x)}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\ln(x)} + \frac{2}{\ln^2(x)}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right) \cdot \left(\frac{\ln^2(x) - \ln(x) + 2}{\ln^2(x)}\right) \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } (\forall x \in D_f); f'(x) = \left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right) \cdot \left(\frac{\ln^2(x) - \ln(x) + 2}{\ln^2(x)}\right)$$

5) • Déterminons D_f .

$$\text{On a : } f(x) = x^2 \cdot \sqrt{|\ln x|}, \text{ donc : } D_f =]0; +\infty[$$

$$\text{Soit } x \in D_f; \text{ on a : } \begin{cases} f(x) = x^2 \sqrt{\ln(x)} ; x \geq 1 \\ f(x) = x^2 \cdot \sqrt{-\ln(x)} ; 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

• Calculons $f'(x)$.

f est dérivable en tout point de $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

Si $0 < x < 1$

$$\text{On a : } f'(x) = 2x\sqrt{-\ln(x)} + x^2 \left(\frac{-1}{2x\sqrt{-\ln(x)}} \right) = \frac{4x\ln(x) - x}{2\sqrt{-\ln(x)}} = \frac{x(4\ln(x) - 1)}{2\sqrt{-\ln(x)}}$$

$$\text{Si } x > 1 \text{ alors : } f'(x) = 2x\sqrt{\ln(x)} + x^2 \left(\frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}} \right) = \frac{x(4\ln(x) + 1)}{2\sqrt{\ln(x)}}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} f'(x) = \frac{x(4 \ln(x) - 1)}{2\sqrt{-\ln(x)}}; x \in]0, 1[\\ f'(x) = \frac{x(4 \ln(x) + 1)}{2\sqrt{\ln(x)}}; x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

6) • Déterminons D_f .

$$\text{On a : } f(x) = \sqrt{1 - \ln(x-1)}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } D_f &= \{x \in \mathbb{R} / x-1 > 0 \text{ et } \ln(x-1) \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x > 1 \text{ et } x \leq e+1\} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } D =]1; 1+e]$$

• Calculons $f'(x)$.

f est dérivable en tout point de $]1; 1+e[$

$$\text{et on a : } (\forall x \in]1, 1+e[); f'(x) = \frac{\frac{-1}{x-1}}{2\sqrt{1-\ln(x-1)}} = \frac{-1}{2(x-1)\sqrt{1-\ln(x-1)}}$$

7) • Déterminons D_f .

$$\text{On a : } f(x) = x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } D_f &= \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } 1-x > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } x < 1\} =]0; 1[\end{aligned}$$

• Calculons $f'(x)$.

La fonction f est dérivable en tout point $]0; 1[$

Soit $x \in]0; 1[$

$$\begin{aligned} \text{On a : } f'(x) &= \ln(x) + 1 - \left(-\ln(1-x) + (1-x) \cdot \left(\frac{-1}{1-x} \right) \right) \\ &= \ln(x) + 1 + \ln(1-x) + 1 \\ &= 2 + \ln(x) + \ln(1-x) \end{aligned}$$

8) • Déterminons D_f .

$$\text{On a : } f(x) = \ln(x-1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2})$$

$$\text{Donc : } D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x + 2 \geq 0 \text{ et } x-1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2} > 0\}$$

$$\text{On a } (\forall x \in \mathbb{R}); x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \text{ donc } x^2 - 2x + 1 > 0$$

$$\text{et } x^2 - 2x + 1 > (x-1)^2 \text{ donc } \sqrt{x^2 - 2x + 2} > |x-1|$$

$$\text{et puisque : } |x-1| \geq -(x-1) \text{ alors : } \sqrt{x^2 - 2x + 2} + x - 1 > 0 \text{ d'où : } D_f = \mathbb{R}$$

• Calculons $f'(x)$.

f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$

$$\text{et on a : } (\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}}{x-1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

Exercice 9

1) Déterminons D où $f(x) = \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x \in D \Leftrightarrow 1+x \geq 0 \text{ et } \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} > 0 \text{ et } 1-x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1 \text{ et } \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \neq 0 \text{ et } x \leq 1$$

$$\text{et on a : } \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 0 \text{ et } \sqrt{1+x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ et } x = -1$$

et ceci est impossible donc $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \neq 0$ pour tout x élément $[-1; 1]$.

$$\text{Donc : } D = [-1; 1]$$

2) • Étudions la dérivabilité à gauche en 1.

Soit x un élément de $] -1; 1[$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{\ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - \ln \sqrt{2}}{x - 1} \\ &= \frac{1}{x - 1} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\ln \left(\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{2}} \right)}{\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{2}} - 1} \cdot \frac{\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{2}} - 1}{x - 1} \end{aligned}$$

$$\text{On pose : } t = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}, \text{ on a : } x \rightarrow 1^- \Leftrightarrow t \rightarrow 1^+$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln \left(\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{2}} \right)}{\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{2}} - 1} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{\ln(t)}{t - 1} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{et on a : } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{2}} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}(x - 1)} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{1+x} + \sqrt{2})} - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}} = -\infty \end{aligned}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$. Par conséquent f est non dérivable à droite en -1

• Étudions la dérivabilité à droite en (-1)

On pose $t = -x$ on a : $x \rightarrow -1^+ \Leftrightarrow t \rightarrow 1^-$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{f(-t) - f(-1)}{-t + 1} = - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} = +\infty$$

(car $(\forall x \in D); f(-x) = f(x)$)

f est non dérivable à droite en -1 .

3) Calculons $f'(x)$

La fonction f est dérivable en tout point de $] -1; 1[$ et on a : pour tout x élément de $] -1; 1[$

$$\text{Donc : } f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2} \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

Exercice 10

1) Dresser le tableau de variations la fonction u .

• Soit $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$u(x) = x - \ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = x - \ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\text{et puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$$

$$\text{et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \text{ et la fonction } \ln \text{ est continue en } 1; \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0.$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty. \text{ Et on a : } \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0^+ \text{ et } \lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty, \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow -1^+} u(x) = +\infty$$

• La fonction u est dérivable sur $] -1; +\infty[$ et on a :

$$(\forall x \in] -1, +\infty[); u'(x) = \frac{x}{x+1}$$

Donc le signe de $u'(x)$ sur $] -1; +\infty[$ est celui de $x(x+1)$

x	-1	0	$+\infty$
$u'(x)$	$-$	0	$+$
u	$+\infty$	0	$+\infty$

2) Dédution :

La fonction u est croissante sur $[0; +\infty[$ et décroissante sur $] -1; 0]$

Donc : $(\forall x \in [0, +\infty[); u(x) \geq u(0)$ et $(\forall x \in]-1, 0]); u(x) \geq u(0)$

et puisque $u(0) = 0$, alors $u(x) \geq 0$ pour tout x de $]-1; +\infty[$

En particulier $u(x) > 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$ (car $u(x) = 0 \iff x = 0$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{n} > 0$, d'où $u\left(\frac{1}{n}\right) > 0$

et on a : $u\left(\frac{1}{n}\right) > 0 \iff \frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$\iff 1 > n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\iff 1 > \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$$

$$\iff \ln(e) > \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$$

Donc $e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$

Exercice 11

1) a- Déterminons D où $f(x) = \ln\left|1 - \frac{1}{x}\right|$

On a : $x \in D \iff x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$ et $1 - \frac{1}{x} \neq 0$

$$\iff x \in \mathbb{R} \text{ et } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1$$

$$\iff x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

donc $D =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$

b- calculons les limites aux bornes des intervalles de D

On a : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left|1 - \frac{1}{x}\right| = 1$ et la fonction $\ln$ est continue en 1 ;

donc $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \left|1 - \frac{1}{x}\right| = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1} \left|1 - \frac{1}{x}\right| = 0^+$ et $\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$

2) a- f est dérivable sur chacun des intervalles de D

Soit $x \in D$, on a : $f'(x) = \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{x(x-1)}$

Dressons le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
f	0	$+\infty$	$-\infty$	0

b- Montrons que le point $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$

Si $x \in]-\infty; 0[$, alors $(1-x) \in]1; +\infty[$

Si $x \in]0; 1[$ alors $(1-x) \in]0; 1[$

Si $x \in]1; +\infty[$ alors $(1-x) \in]-\infty; 0[$ donc $(\forall x \in D); (1-x) \in D$

Soit $x \in D$; on a :

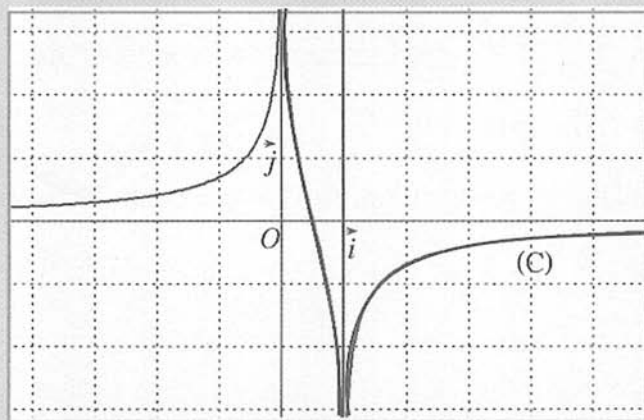
$$\begin{aligned} f(1-x) + f(x) &= \ln\left|1 - \frac{1}{1-x}\right| + \ln\left|1 - \frac{1}{x}\right| = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| \\ &= \ln\left|\frac{x}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x}\right| = \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

donc ; $(\forall x \in D); f(1-x) = -f(x)$

d'où le point $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C})$

3) Construction

- Les droites d'équation respective : $x=0$, $x=1$ et $y=0$ sont des asymptotes



Exercices de synthèses

Exercice 12

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x) = \frac{1}{\ln(x)} + \ln(|\ln(x)|)$ et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a- Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f .

b- Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c- Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.

2) a- Montrer que : $(\forall x \in D) ; f'(x) = \frac{-1 + \ln(x)}{x(\ln(x))^2}$

b- Dresser le tableau de variations de f .

3) a- Montrer que : $(\forall x \in D) ; f''(x) = \frac{\ln(x) \cdot (2 - (\ln(x))^2)}{(x \ln^2(x))^2}$

b- Déterminer les points d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$.

4) Construire $(\mathcal{C})$

Exercice 13

1ère Partie: Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = \ln(\ln(x)) - \frac{x+1}{x \ln(x)}$$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction g puis calculer les limites aux bornes de D .

2) Etudier les variations de g .

3) a- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $6,4 < \alpha < 6,5$.

b- En déduire le signe de $g(x)$ sur D .

2ème partie: On considère la fonction numérique f définie sur $([1; +\infty[- \{e\})$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{\ln(\ln(x))} ; x > 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) a- Montrer que f est continue à droite en 1

- b-** Etudier la dérivabilité de f à droite en 1, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- 2) a-** Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- b-** Calculer : $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$.
- 3)** Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.
- 4) a-** Dresser le tableau de variations de f .
- b-** Construire la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 14

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x) = \frac{\sqrt{\ln(1-x)}}{1-x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) a-** Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f .
- b-** Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$
- 2)** Etudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 0$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- 3) a-** Calculer $f'(x)$ pour tout x élément de $D - \{0\}$, puis dresser le tableau de variations de f .
- b-** Construire la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 15

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \ln((\sqrt{x-1}-1)^2)$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1)** Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f et calculer ses limites aux bornes de D .
- 2)** Etudier la dérivabilité de f à droite en 1, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- 3)** Etudier les variations de f .
- 4) a-** Etudier les branches infinies.
- b-** Etudier la concavité de $(\mathcal{C})$.
- 5) a-** Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 5
- b-** Construire $(\mathcal{C})$ et (T) .

Exercice 16**1ère partie:**

Soit g la fonction numérique définie sur $I = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{(x+1)^2}{x(x+2)} - \ln|x(x+2)|$$

1) Dresser le tableau de variations de la fonction g

2) a- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle : $]0, +\infty[$

b- En déduire le signe de $g(x)$ sur I .

2ème partie:

Soit f la fonction numérique définie sur $D = \mathbb{R} - \{-2; 0\}$ par:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln|x(x+2)|}{(x+1)^2}; x \neq -1 \text{ et soit } (\mathcal{C}_f) \text{ sa courbe représentative dans un} \\ f(-1) = -1 \end{cases}$$

repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) Montrer que la droite (Δ) d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.

2) a- Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

b- Montrer que la fonction f est continue en -1 (on peut utiliser le résultat

suivant : $\left(\forall t \in \left]0, \frac{1}{4}\right[\right], -\frac{t^2}{2} - t^3 \leq \ln(1-t) + t \leq -\frac{t^2}{2}$

4) a- Montrer que : $(\forall x \in I - \{-1\}); f'(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \cdot g(x)$.

b- Vérifier que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha+2)}$ puis dresser le tableau de variations de f sur D .

5) a- Déterminer les points d'intersection de $(O; \vec{i})$ avec la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

b- Tracer $(\mathcal{C}_f)$ (on prend : $\alpha \simeq 1,14$ et $f(\alpha) \simeq 0,28$).

Exercice 17

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*); (u_{n+1})^2 = 4u_n \end{cases}$

1) Ecrire u_2 et u_3 en fonction de 2^α où $\alpha \in \mathbb{Q}$

2) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_n = \ln(u_n) - \ln(4)$

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b- En déduire u_n en fonction de n .

Exercice 18

On considère les fonctions numériques u et v définies par : $u(x) = x - 1 - \ln x$ et $v(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2} + \ln(x)$

1) a- Dresser les tableaux des variations des fonction u et v .

b- En déduire que : $(\forall a \in]0; +\infty[); a - \frac{a^2}{2} < \ln(1+a) < a$

2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$

a- Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{12} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^3} < \ln(P_n) < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

b- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

Exercice 19

On considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = x - n + \frac{n}{2} \cdot \ln(x)$ où $n \in \mathbb{N}^*$

1) Dresser le tableau de variations de f_n

2) a- Montrer que : $(\exists! \alpha_n \in]0, +\infty[), f_n(\alpha_n) = 0$

b- Montrer que : $1 \leq \alpha_n < e^2$

c- Vérifier que : $\ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n} \cdot \alpha_n$

3) Ecrire $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et n , puis déduire que $\alpha_{n+1} > \alpha_n$

4) a- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est convergente. On pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \ell$

b- Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\alpha_n)$

Exercice 20

1) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

a- Calculer u_1, u_2 et u_3 .

b- Montrer que : $(\forall x \in [0, +\infty[); \ln(1+x) \leq x$ et $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)$

En déduire que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{1+k} \leq \ln(1+k) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$

c- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1} - 1 \leq \ln(1+n) \leq u_n$; en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \ln(1+n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n)$$

d- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2) On considère la suite numérique (c_n) définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); c_n = u_{n-1} - \ln(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

a- Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Calculer $c_{n+1} - c_n$, et en déduire la monotonie de la suite (c_n) .

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) ; c_n \leq 1 + \ln(n-1) - \ln(n)$

c- En déduire que la suite (c_n) est convergente (le nombre $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \gamma$, appelé la constante d'Euler et on a $\gamma \simeq 0,577215\dots$).

Exercice 21 n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x + n(1 + \ln x)$$

1) a- Dresser le tableau de variations de la fonction f_n .

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! \alpha_n \in]0; +\infty[); f_n(\alpha_n) = 0$

2) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{e^2} < \alpha_n < \frac{1}{e}$

b- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est convergente puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.

Exercice 22 n est un entier naturel supérieur ou égal à 2

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = nx^2 + \ln(x)$$

1) Montrer que : $(\forall n \geq 2); (\exists! \alpha_n \in]0; +\infty[); f_n(\alpha_n) = 0$

2) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

3) a- Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[); x - \frac{1}{2} \ln(x) > 0$

b- Montrer que : $(\forall n \geq 2); \alpha_n < n^{-\frac{1}{4}}$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.

c- Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$

Exercice 23 n est un entier naturel.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x - n \ln(x)$$

1) Montrer que si : $n \geq 3$ alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement 2 solutions a_n et b_n telles que : $0 < a_n < n < b_n$.

2) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

3) a- Montrer que : $(\forall n \geq 3); 1 < a_n < 2$

b- Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

c- Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$

Exercice 24

Soit n est un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$, on considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = -x^2 + 2 + n \ln(x)$

1) a- Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

b- Etudier les variations de f_n .

2) On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x \ln x + 2 - x$

3) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$; puis étudier les variations de g .

b- En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); g(x) > 0$

3) a- Montrer que : $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) > 0$

b- En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions u_n et v_n dans $\mathbb{R}^+$ (On suppose que : $u_n < v_n$).

c- Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

4) a- Montrer que : $(\forall n \geq 2); u_n \leq 1$

b- Vérifier que : $(\forall n \geq 2); f_{n+1}(u_n) = \ln(u_n)$

c- Montrer que $(u_n)_{n \geq 2}$ est croissante et convergente.

d- Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 25

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right); x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a- Montrer que la fonction f est continue à droite en $x_0 = 0$.

b- Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0 = 0$, et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c- Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2) Soit u et v les fonctions définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$u(t) = t - \ln(1+t) \text{ et } v(t) = t^2$$

a- Montrer que : $(\forall t > 0); (\exists c \in]0; t]); \frac{u(t)}{v(t)} = \frac{u'(c)}{v'(c)}$

Appliquer le théorème de Rolle sur l'intervalle $[0; t]$ ($t > 0$) à la fonction :

$$\varphi: x \mapsto u(t)v(x) - u(x)v(t)$$

b- En déduire que : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$

- 3) Montrer que la droite d'équation : $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe ($\mathcal{C}$) au voisinage de $+\infty$.
- 4) a- Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et que :
 $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = x \left(2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x} \right)$
- b- Montrer que : $(\forall x > 0); \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) > \frac{1}{1+x}$
 En déduire que : $f'(x) > 0$ pour tout réel x de $]0; +\infty[$.
- c- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 5) a- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
- b- Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en $\ln(2)$ et calculer $(f^{-1})'(\ln 2)$.
- c- Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(x)}{x} = +\infty$
- d- Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[); f^{-1}(x) > x$
- 6) Tracer dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe ($\mathcal{C}$) et la courbe ($\mathcal{C}'$) de f^{-1} .

Exercice 26

A/ 1) Montrer que :

$$(\forall x > -1); x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(x+1)} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

2) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

B/ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}; x \neq -1 \text{ et } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \text{ et } f(-1) = 0 \end{cases}$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) a- Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.
- b- Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en -1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- c- Montrer que la fonction f est dérivable en 0 , puis déterminer une équation de tangente à la courbe (C) au point $A(0; 1)$.
- 2) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, donner une interprétation géométrique

au résultat obtenu.

b- Montrer que la fonction f est dérivable sur les intervalles $] -1; 0[$ et $] 0; +\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $] -1; 0[\cup] 0; +\infty[$.

3) a- Montrer que : $(\forall x > -1); (x+1)\ln(x+1) - x \geq 0$

b- Dresser le tableau de variations de la fonction f .

c- Tracer la courbe (C) .

4) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = e \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > e - 1$

b- Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

c- Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e - 1$.

Exercice 27

I/ On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = -x \ln(x) + 2x - 2$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2) Montrer que g est strictement croissante sur $]0; e]$ et strictement décroissante sur $[e; +\infty[$.

3) a- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]e; +\infty[$ et que $4 < \alpha < 5$ (On donne : $\ln 2 < \frac{3}{4}$ et $\ln 5 > \frac{8}{5}$)

b- En déduire que g est positive sur $[1; \alpha]$ et négative sur $]0; 1]$ et sur $[\alpha; +\infty[$ (Remarquer que : $g(1) = 0$)

II/ Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x-1} ; x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$

1) a- Montrer que f est continue en 1.

b- Montrer que f est dérivable en 1.

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3) a- Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[- \{1\}); f'(x) = \frac{\ln(x)}{x(x-1)^2} \times g(x)$

b- Montrer que : $f(\alpha) = 4\left(\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\right)$

c- Montrer que : $f(\alpha) \in]0; 1[$

d- Montrer que f est strictement croissante sur $]0; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

III/ Soit F la fonction primitive de f sur $]0; +\infty[$ telle que : $F(\alpha) = \alpha$.

1) Montrer que F est strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement

croissante sur $[1; +\infty[$.

2) Montrer que : $(\forall x \in]0; \alpha]) ; F(x) \geq x$

3) Montrer que : $(\exists c \in]1; \alpha]) ; \alpha - F(1) = f(c)(\alpha - 1)$

4) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = c$ et pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = F(u_n)$$

a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; c \leq u_n \leq \alpha$

b- Montrer que la suite (u_n) est croissante, en déduire qu'elle est convergente.

c- En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall (x; y) \in ([c; \alpha]^2) ; |F(x) - F(y)| \leq f(\alpha)|x - y|$$

d- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq (f(\alpha))^n (\alpha - c)$

En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 28

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on considère la fonction f_n

définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \cdot \ln(x) ; x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a- Montrer que la fonction f_n est dérivable à droite en 0.

b- Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a- Calculer $f'_n(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f_n .

b- Etudier la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1})

c- Tracer, dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, les courbes (C_1) et (C_2) en précisant la tangente au point O et la tangente au point $A(1; 0)$.

3) a- Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, il existe un unique réel x_n dans l'intervalle $]0; +\infty[$ tel que : $f_n(x_n) = 1$.

b- Montrer que : $(\forall n \geq 2) ; f_{n+1}(x_n) > 1$

c- En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante et qu'elle est convergente.

4) On pose : $b_n = x_n^n$ pour tout $n \geq 2$.

- a- Montrer que : $(\forall n \geq 2); b_n \cdot \ln(b_n) = n$
- b- Montrer que : $(\forall x \in [1; +\infty[); x - 1 \leq x \ln(x)$
- c- En déduire que : $(\forall n \geq 2); 1 < b_n \leq n + 1$
- 5) a- Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$
- b- Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$

Exercice 29

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}(\ln(x))^2; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) a- Montrer que la fonction f est continue à droite en $x_0 = 0$.
- b- Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis donner la nature de la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.
- 2) a- Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0 = 0$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- b- Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, et que :
- $$(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = \frac{\ln(x)(\ln(x) + 4)}{2\sqrt{x}}$$
- c- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- d- Montrer que : $(\forall x \in [0; 1]); 0 \leq f(x) \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2$
- 3) a- Montrer que : $f''(x) = \frac{1}{4x\sqrt{x}}(8 - (\ln x)^2)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.
- b- Etudier la concavité de la courbe $(\mathcal{C})$ et montrer qu'elle admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.
- 4) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
- a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et calculer $(g^{-1})'(\sqrt{e})$
- b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! \alpha_n \in]0; +\infty[); g^{-1}(\alpha_n) = \frac{1}{n} + e$
- c- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.
- d- Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \sqrt{e}$.

I/ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x(1 + \ln^2(x)); x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a- Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b- Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

c- Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

2) a- Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = (1 + \ln(x))^2$$

b- Dresser le tableau de variations de la fonction f .

c- Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.

d- Montrer que : $f([e^{-1}; 1]) \subset [e^{-1}; 1]$

3) a- Etudier la concavité de la courbe $(\mathcal{C})$ et déterminer ses points d'inflexion s'ils existent.

b- Etudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.

4) a- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b- Tracer, dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe $(\mathcal{C})$ et la courbe (Γ) de f^{-1} .

5) Soit a et b deux nombres réels tels que : $e^{-1} < a < b$.

$$\text{Montrer que : } -1 + \ln^2(ea) < \frac{b \ln^2(b) - a \ln^2(a)}{b - a} < -1 + \ln^2(eb)$$

II/ On considère la suite (u_n) définie sur : $\begin{cases} u_0 = e^{-1} \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

- 1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); e^{-1} \leq u_n < 1$
- 2) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et en déduire qu'elle est convergente.
- 3) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Exercice 31

On considère la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie 1:

- 1) Montrer que f est continue sur $] -1; +\infty[$.
- 2) Soit k un nombre réel non nul tel que : $|k| \leq \frac{1}{2}$ et g la fonction définie sur l'intervalle $I = [-|k|; |k|]$ par : $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$
 - a- Montrer que g est dérivable sur l'intervalle I et que : $(\forall x \in I); g'(x) = \frac{x^2}{1+x}$
 - b- En déduire que : $(\forall x \in I); |g'(x)| \leq 2k^2$
 - c- Montrer que : $\left| \ln(1+k) - k + \frac{k^2}{2} \right| \leq 2|k^3|$
- 3) Montrer que la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$
- 4) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et donner une interprétation géométrique de chaque résultat.
- 5) a- Montrer que : $(\forall x \in] -1; +\infty[); \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)$
 - b- Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $] -1; +\infty[$.
- 6) Tracer (C_f) .

Partie 2:

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- 1) Montrer que : $(\forall t \in]-1; +\infty[); (1+t)^n \geq 1+nt$
- 2) On pose : $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
 - a- Montrer que : $\ln(u_n) = f\left(\frac{1}{n}\right)$
 - b- Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est croissante.
 - c- Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.
- 3) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); (n \geq 2); 0 \leq v_n - u_n \leq \frac{v_n}{n}$ (On peut utiliser II)1)).
- b- En déduire que les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont convergentes et ont la même limite.
- 4) On pose L la limite commune de $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$.
 - a- Montrer que : $L \geq \frac{9}{4}$
 - b- Déterminer la valeur de L .

Exercice 32

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = 2x - (1+2x)\ln(1+2x); x \neq -\frac{1}{2} \\ g\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \end{cases}$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) a- Montrer que la fonction g est continue à droite en $-\frac{1}{2}$;
- b- Étudier la dérivabilité de la fonction g à droite en $-\frac{1}{2}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- c- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$, interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2) a- Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$
- b- Dresser le tableau de variations de la fonction g .

c- Tracer la courbe (C) .

3) Soit h la restriction de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

a- Montrer que la fonction h réalise une bijection de l'intervalle $[0; +\infty[$ vers l'intervalle $] -\infty; 0]$;

b- Montrer que la fonction h^{-1} est dérivable sur l'intervalle $] -\infty; 0[$.

c- Etudier la dérivabilité de la fonction h^{-1} à gauche en 0,

d- Tracer la courbe de la fonction h^{-1} dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

4) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); (\exists! \alpha_n \in] -\infty; 0[); h^{-1}(\alpha_n) = \frac{1}{n}$

b- Déterminer la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$, puis en déduire qu'elle est convergente.

c- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.

Partie 2:

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x}; x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

Soit (Γ) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Montrer que la fonction f est continue en 0.

2) Pour tout réel non nul a de l'intervalle I , on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle I par :

$$h_a(x) = (\ln(1+2a) - 2a)x^2 - (\ln(1+2x) - 2x)a^2$$

a- Calculer $h_a(0)$, $h_a(a)$, puis en déduire qu'il existe un réel b compris strictement entre 0 et a tels que : $\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$

b- En déduire que la fonction f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -2$.

3) a- Montrer que la fonction f est dérivable en tout point de $I - \{0\}$ et

que : $(\forall x \in I - \{0\}); f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$

b- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, interpréter les résultats obtenus.

c- Montrer qu'il existe un réel unique α de l'intervalle $[1; 2]$ tel que :

$$f(\alpha) = 1$$

d- Tracer la courbe (Γ) (on prend $\alpha \simeq 1,3$)

Partie 3:

1) On pose : $(\forall x \in I); \varphi(x) = \ln(1 + 2x)$ et $J = [1; \alpha]$

a- Montrer que la fonction φ est dérivable sur I et que :

$$(\forall x \geq 1); 0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$$

b- Vérifier que : $\varphi(\alpha) = \alpha$ et que : $\varphi(J) \subset J$

2) On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n) \end{cases}$$

a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in J$

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha|$

c- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

d- En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Solutions

Exercice 12

1) a- Déterminons D où $f(x) = \frac{1}{\ln x} + \ln(|\ln(x)|)$

On a : $x \in D \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x > 0$ et $\ln(x) \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

donc $D =]0; 1[\cup]1; +\infty[$

b- Calcul des limites

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(|\ln(x)|) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

Soit $x \in]1; +\infty[$ on a : $\ln(x) > 0$

$$\text{donc : } f(x) = \frac{1}{\ln(x)} + \ln(\ln(x)) = \frac{1 + \ln(x) \cdot \ln(\ln(x))}{\ln(x)}$$

On pose : $t = \ln(x)$.

On a : $x \rightarrow 1^+ \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$

donc : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 + t \ln(t)}{t} = +\infty$ (car $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0$)

• Soit $x \in]0; 1[$, on a : $\ln(x) < 0$

donc $f(x) = \frac{1}{\ln(x)} + \ln(-\ln(x)) = \frac{1 - (-\ln(x)) \ln(-\ln(x))}{\ln(x)}$

On pose $t = -\ln(x)$, on a : $t \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow x \rightarrow 1^-$

donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - t \ln(t)}{-t} = -\infty$

• Soit $x \in]1; +\infty[$, on a : $\ln(x) > 0$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x)} + \ln(\ln(x)) = +\infty$

c- Etude des branches infinies

• On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe ($\mathcal{C}$)

• On a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à la courbe ($\mathcal{C}$).

• Soit $x \in]1; +\infty[$

On a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x \ln(x)} + \frac{\ln(\ln(x))}{x} = \frac{1}{x \ln(x)} + \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \cdot \frac{\ln(x)}{x}$

On pose $t = \ln(x)$, on a : $t \rightarrow +\infty \Leftrightarrow x \rightarrow +\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$ d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

donc la courbe ($\mathcal{C}$) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2) a- Soit $x \in D$; on a : $f'(x) = \frac{-1}{x \ln^2(x)} + \frac{1}{x \ln(x)} = \frac{-1 + \ln(x)}{x (\ln x)^2}$

b- Soit $x \in D$; on a : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 1$

$$\Leftrightarrow \ln(x) > \ln(e)$$

$$\Leftrightarrow x > e$$

$$\text{et } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$$

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		-	- 0 +	
f	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 1		$+\infty$ ↗

3) a- Soit $x \in D$

$$\begin{aligned} \text{On a : } f''(x) &= \frac{(\ln(x))^2 - (\ln(x) - 1)((\ln(x))^2 + 2\ln(x))}{x^2 (\ln(x))^4} \\ &= \frac{\ln(x) \cdot [\ln(x) - (\ln(x))^2 + \ln(x) - 2\ln(x) + 2]}{(x \ln^2(x))^2} = \frac{\ln(x) \cdot (2 - (\ln(x))^2)}{(x \ln^2(x))^2} \end{aligned}$$

b- Déterminons les points d'inflexions

Soit $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, on a : $\ln(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{et on a : } 2 - (\ln(x))^2 > 0 &\Leftrightarrow (\ln(x))^2 < 2 \\ &\Leftrightarrow |\ln(x)| < \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{2} < \ln(x) < \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow e^{-\sqrt{2}} < x < e^{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

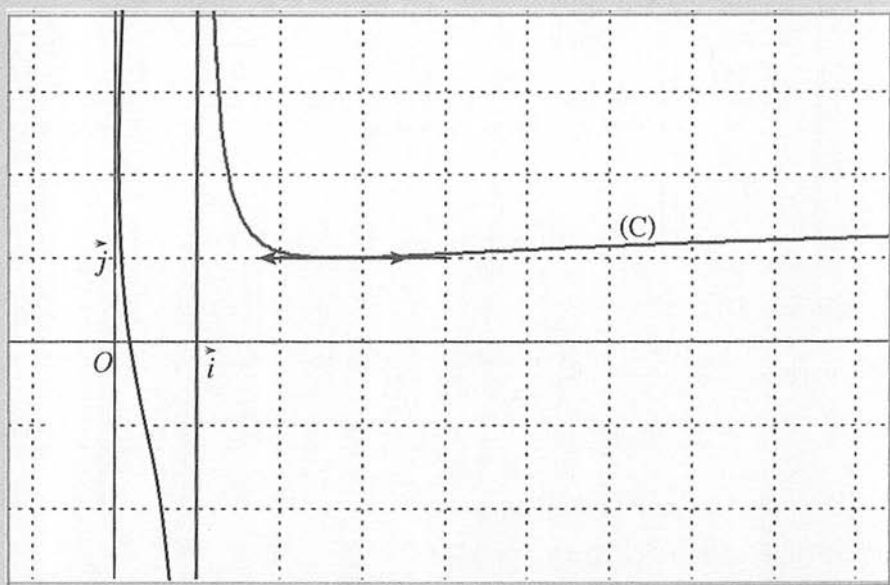
$$\begin{aligned} 2 - (\ln(x))^2 = 0 &\Leftrightarrow (\ln(x))^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow x = e^{\sqrt{2}} \text{ ou } x = e^{-\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Tableau de signe de $f''(x)$

x	0	$e^{-\sqrt{2}}$	1	$e^{\sqrt{2}}$
$\ln(x)$		-	0	+
$2 - (\ln(x))^2$		- 0 +		+ 0 -
$f''(x)$		+ 0 -		+ 0 -

donc f'' s'annule respectivement en $e^{\sqrt{2}}$ et $e^{-\sqrt{2}}$ en changeant de signe donc les points $A(e^{\sqrt{2}}, f(e^{\sqrt{2}}))$ et $B(e^{-\sqrt{2}}, f(e^{-\sqrt{2}}))$ sont deux points d'inflexions pour la courbe ($\mathcal{C}$).

4) Courbe



Exercice 13

1ère partie:

1) Déterminons D où $g(x) = \ln(\ln(x)) - \frac{x+1}{x \ln(x)}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow x > 0$ et $\ln x > 0$

$$\Leftrightarrow x \in]1; +\infty[$$

$$\text{donc } D =]1; +\infty[$$

• Calculons : $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$

Soit $x \in]1; +\infty[$, on a : $g(x) = \frac{x \ln(x) \cdot (\ln(\ln(x)) - (x+1))}{x \ln(x)}$

et $\lim_{x \rightarrow 1^+} x \ln(x) = 0^+$, (car $x > 1 \Leftrightarrow \ln(x) > 0$)

et on a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) \cdot \ln(\ln(x)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \cdot \ln(t) = 0$ (on pose $\ln(x) = t$)

donc : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} x \ln(x) \cdot \ln(\ln(x)) - (x+1) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x \ln(x) = 0^+ \end{cases}$ par suite $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$

• Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x \ln(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{x \ln(x)} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\ln(x)) = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

2) On a : g est dérivable sur l'intervalle $]1; +\infty[$

$$\begin{aligned}
 \text{et on a : } (\forall x \in]1; +\infty[) : g'(x) &= \frac{1}{x \ln(x)} - \frac{x \ln(x) - (x+1)(\ln(x)+1)}{(x \ln(x))^2} \\
 &= \frac{x \ln(x) - x \ln(x) + x \ln(x) + x + \ln(x) + 1}{(x \ln(x))^2} \\
 &= \frac{x \ln(x) + x + \ln(x) + 1}{(x \ln(x))^2}
 \end{aligned}$$

on a : $x \in]1; +\infty[$ donc $\forall x \in]1; +\infty[$ $g'(x) > 0$, d'où g est strictement croissante sur D .

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		+
g	$-\infty$	$+\infty$

3) a- On a : g est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ donc g est une bijection de $]1; +\infty[$ sur un intervalle J tel que :
 $J = g(]1; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[= \mathbb{R}$

On a : $g(6,4) \simeq -0,004$ et $g(6,5) \simeq 0,01$

donc $g(6,4) \times g(6,5) < 0$, d'où il existe un réel unique α de l'intervalle $]6,4; 6,5[$ tel que : $g(\alpha) = 0$

b- La fonction g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$

donc : $(\forall x \in]1; \alpha[) : g(x) < g(\alpha)$ et $(\forall x \in]\alpha; +\infty[) : g(\alpha) < g(x)$

c'est-à-dire : $(\forall x \in]1; \alpha[) : g(x) < 0$ et $(\forall x \in]\alpha; +\infty[) : g(x) > 0$

(car $g(\alpha) = 0$) donc g est positive sur $]\alpha; +\infty[$ et négative sur $]1; \alpha[$

x	1	α	$+\infty$
$g(x)$		- 0 +	

2ème partie:

1) On a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(\ln(x)) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$

donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{\ln(\ln(x))} = 0 = f(1)$ d'où f est continue à droite en 1

b- Soit x un élément de $]1; e[$ on a :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x+1}{(x-1)\ln(\ln(x))} = \frac{x+1}{\ln(x) \cdot \ln(\ln(x))} \times \frac{\ln x}{x-1}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} ((\ln x) \times \ln(\ln(x))) = 0^-$ (on pose $t = \ln(x)$) et $\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

et $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$, par suite f est non dérivable à droite en 1

• La courbe $(\mathcal{C})$ admet une demi-tangente verticale (dirigée vers le bas) au point d'abscisse 1

2) a- Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Soit $x \in]e; +\infty[$ on a : $f(x) = \frac{x+1}{\ln(\ln(x))} = \frac{1}{\frac{\ln(\ln(x))}{x+1}} \times \left(\frac{x}{\ln(x)} + \frac{1}{\ln(x)} \right)$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = 0^+$ (on pose $t = \ln(x)$)

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\ln t}{t}} = +\infty$ et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0$

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b- On a : $\lim_{x \rightarrow e^+} \ln(x) = 1^+$ (car $x > e \iff \ln(x) > 1$)

et puisque la fonction $\ln$ est continue en 1, alors $\lim_{x \rightarrow e^+} \ln(\ln(x)) = 0^+$

et on a : $\lim_{x \rightarrow e^+} (x+1) = e+1$, donc $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{x+1}{\ln(\ln(x))} = +\infty$ de la même façon on montre que : $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = -\infty$

3) • On a : $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = e$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

• On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ c'est-à-dire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche infinie au voisinage de $+\infty$.

- Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

Soit $x \in]e; +\infty[$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x \ln(\ln(x))} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \frac{1}{\ln(\ln(x))} = 0$$

donc la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des

abscisses au voisinage de $+\infty$.

4) a- La fonction f est dérivable sur chacun des intervalles $]1, e[$ et $]e, +\infty[$

et on a : $(\forall x \in (D_f - \{1\}))$;

$$f'(x) = \left(\ln(\ln(x)) - \frac{x+1}{x \ln(x)} \right) \frac{1}{(\ln(\ln(x)))^2} = \frac{g(x)}{\ln(\ln(x))}$$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ (car $\ln(\ln(x)) > 0$)

d'où le tableau de variations de f

x	1	e	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	- 0 +	+
f	0	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

Diagramme du tableau de variations :
 - À $x=1$, $f=0$.
 - À $x=e$, $f=+\infty$.
 - À $x=\alpha$, $f=f(\alpha)$.
 - À $x=+\infty$, $f=+\infty$.
 Les flèches indiquent que la fonction décroît de 0 à $+\infty$ (vers $-\infty$) et croît de $+\infty$ à $+\infty$ (à partir de $f(\alpha)$).

• Calculons $f(\alpha)$

$$\text{On a : } g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln(\ln(\alpha)) - \frac{\alpha+1}{\alpha \ln(\alpha)} = 0$$

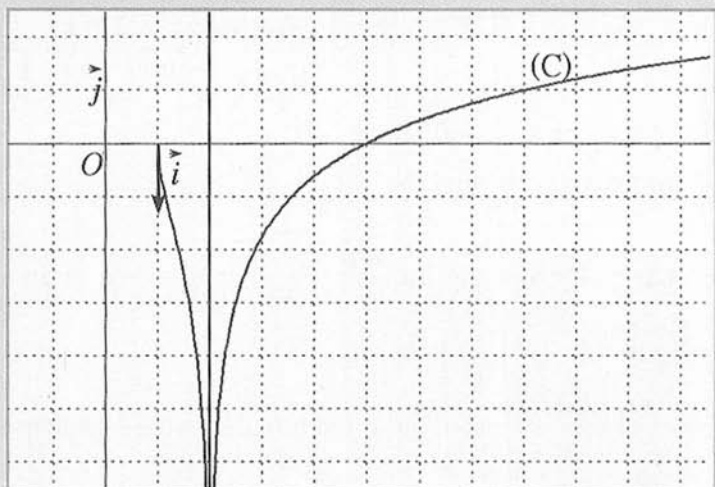
$$\Leftrightarrow \ln(\ln(\alpha)) = \frac{\alpha+1}{\alpha \ln(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha+1}{\ln(\ln(\alpha))} = \alpha \ln(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha \ln(\alpha)$$

On prend $\alpha \simeq 6,45$ et $f(\alpha) = 11,97$

b- Construction de la courbe ($\mathcal{C}$)



1) a) Déterminons D , où $f(x) = \frac{\sqrt{\ln(1-x)}}{1-x}$

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a :

$$x \in D \Leftrightarrow 1-x > 0 \text{ et } \ln(1-x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x < 1 \text{ et } 1-x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x < 1 \text{ et } x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 0]$$

donc $D =]-\infty, 0]$.

b) Soit $x \in]-\infty, 0]$ on a : $f(x) = \frac{\sqrt{\ln(1-x)}}{1-x} = \sqrt{\frac{\ln(1-x)}{(1-x)^2}}$

On pose $t = 1-x$ on a : $t \rightarrow +\infty \Leftrightarrow x \rightarrow -\infty$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)}{(1-x)^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} = 0^+$$

et puisque la fonction : $x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue à droite en 0,

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{\ln(1-x)}{(1-x)^2}} = 0$$

• Dédution :

on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ donc l'axe des abscisses est une asymptote au voisinage de $-\infty$.

2) Etudions la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in]-\infty, 0[, \text{ on a : } \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{\sqrt{\ln(1-x)}}{x(1-x)} \\ &= -\sqrt{\frac{\ln(1-x)}{x^2}} \cdot \frac{1}{1-x} \\ &= -\frac{1}{1-x} \cdot \sqrt{\frac{\ln(1-x)}{-x}} \cdot \frac{1}{-x} \end{aligned}$$

On pose $t = -x$; on a : $t \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow x \rightarrow 0^-$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-x)}{-x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

et on a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{-x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{\ln(1-x)}{-x}} \cdot \frac{1}{-x} = +\infty$ et on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{1-x} = -1$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$ d'où f est non dérivable à gauche en zéro

La courbe ($\mathcal{C}$) admet une demi-tangente verticale (parallèle à l'axe (oy)) au point d'abscisse 0 (dirigée vers le bas).

3) a- La fonction f est dérivable sur $]-\infty, 0[$

et pour tout x de $]-\infty, 0[$ on a :

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \left[\frac{-1}{2\sqrt{\ln(1-x)}} \cdot (1-x) + \sqrt{\ln(1-x)} \right] = \frac{1}{(1-x)^2} \left[\frac{2\ln(1-x) - 1}{2\sqrt{\ln(1-x)}} \right]$$

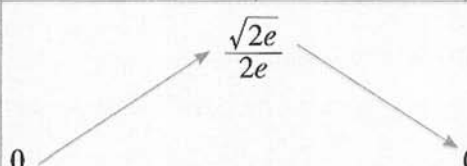
• Le signe de $f'(x)$ est celui $2\ln(1-x) - 1$

$$\text{On a : } \left(f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) > \frac{1}{2} \right) \quad \text{et} \quad \left(f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) = \frac{1}{2} \right)$$

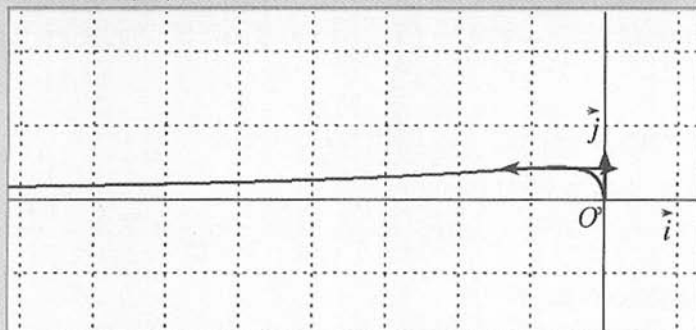
$$\left(f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) > \ln(\sqrt{e}) \right) \quad \text{et} \quad \left(f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{e} \right)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-x > \sqrt{e}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1 - \sqrt{e}$$

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{e}$	0
$f'(x)$	$+$	$-$	
f			

c- Construction de ($\mathcal{C}$)



Exercice 15

1) Déterminons D , où $f(x) = \ln((\sqrt{x-1} - 1)^2)$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\text{On a : } x \in D \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - 1 \neq 0 \text{ et } x-1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1 \text{ et } x \neq 2$$

donc $D = [1, 2[\cup]2, +\infty[$

- Calculons les limites de la fonction f :

• On a : $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x-1} - 1)^2 = 0^+$ et $\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$

• On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-1} - 1)^2 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2) Soit x un élément de $]1; 2[$

On a :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\ln(x - 2\sqrt{x-1})}{x - 1} = \frac{\ln(x - 2\sqrt{x-1})}{(x - 2\sqrt{x-1}) - 1} \times \frac{(x - 2\sqrt{x-1}) - 1}{x - 1}$$

On pose : $t = x - 2\sqrt{x-1}$ on a : $x \rightarrow 1^+ \Leftrightarrow t \rightarrow 1$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x - 2\sqrt{x-1})}{(x - 2\sqrt{x-1}) - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(t)}{t - 1} = 1$$

$$\text{d'autre part on a : } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 2\sqrt{x-1}) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x-1}}\right) = -\infty$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$$

d'où f est non dérivable à droite en 1.

Par suite la courbe $(\mathcal{C})$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse 1.

3) La fonction $u: x \mapsto (\sqrt{x-1} - 1)^2$ est dérivable en tout point de $(D - \{1\})$ et $u(x) > 0$ pour tout x de $(D - \{1\})$, donc f est dérivable en tout point de $(D - \{1\})$

et on a : pour tout élément x de $]1, 2[\cup]2, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot (\sqrt{x-1} - 1)}{(\sqrt{x-1} - 1)^2} = \frac{1}{\sqrt{x-1} \cdot (\sqrt{x-1} - 1)} = \frac{(\sqrt{x-1} + 1)}{\sqrt{x-1}} \times \frac{1}{x-2}$$

Tableau de variations de f

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-	+
f	0	$-\infty$	$+\infty$

4) a- On a : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote à la courbe ($\mathcal{C}$).

on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc la courbe ($\mathcal{C}$) admet une branche infinie au voisinage de $+\infty$

• Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Soit $x \in]2, +\infty[$ on a $\sqrt{x-1} - 1 > 0$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2 \ln(\sqrt{x-1} - 1)}{x} = \frac{2 \ln(\sqrt{x-1} - 1)}{\sqrt{x-1} - 1} \times \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x}$$

On pose $t = \sqrt{x-1} - 1$ on a : $t \rightarrow +\infty \Leftrightarrow x \rightarrow +\infty$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x-1} - 1)}{\sqrt{x-1} - 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} = 0 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

La courbe ($\mathcal{C}$) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

b- • Soit $x \in]1, 2[\cup]2, +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{On a : } f''(x) &= -\frac{(x-1-\sqrt{x-1})'}{(x-1-\sqrt{x-1})^2} = \frac{2\sqrt{x-1}-1}{2\sqrt{x-1}(x-1-\sqrt{x-1})^2} \\ &= -\frac{4x-5}{2\sqrt{x-1}(x-1-\sqrt{x-1})^2(1+2\sqrt{x-1})} \end{aligned}$$

Le signe de $f''(x)$ sur $]1, 2[\cup]2, +\infty[$ est celui de $5 - 4x$ donc le tableau de concavité de la courbe ($\mathcal{C}$) est le suivant:

x	1	$\frac{5}{4}$	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	-
Concavité de ($\mathcal{C}$)				

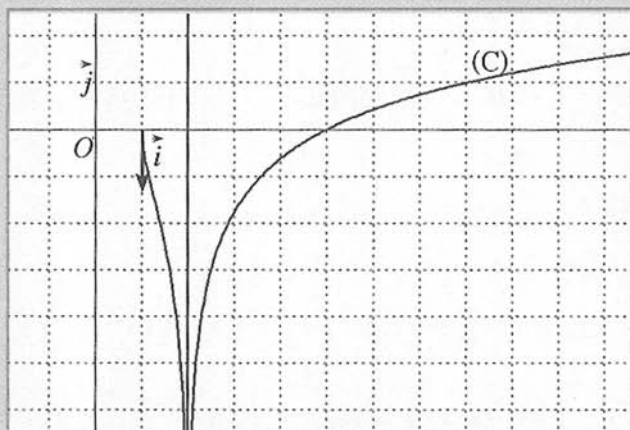
• Point d'inflexion de la courbe ($\mathcal{C}$)

f'' s'annule en $\frac{5}{4}$ en changeant de signe donc le point $A\left(\frac{5}{4}; -2\ln(2)\right)$ est un point d'inflexion de ($\mathcal{C}$)

5) a) Equation de la tangente (T)

On a : $f(5) = 0$ et $f'(5) = \frac{1}{2}$ donc une équation de (T) est $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

5) Le tracé



Exercice 16

1ère partie:

Dressons le tableau de variations de g :

$$\bullet \text{ On a: } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+1)^2 + |x(x+2)| \ln |x(x+2)|}{x(x+2)} = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln X = 0 \quad (\text{en posant } X = |x(x+2)|)$$

$$\bullet \text{ On a: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(x+2)} = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

$$\text{On a: } g(-1) = 0$$

$$\text{- Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$\text{Puisque: } \lim_{x \rightarrow +\infty} |x(x+2)| = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln |x(x+2)|) = -\infty$$

$$\text{et on a: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\bullet \text{ Calculons } g'(x)$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in I \text{ on a: } g'(x) &= \frac{2(x+1)x(x+2) - 2(x+1)^3}{x^2 \cdot (x+2)^2} - \frac{2x+2}{x(x+2)} \\ &= \frac{2(x+1)(x(x+2) - (x+1)^2)}{x^2(x+2)^2} - \frac{2(x+1)}{x(x+2)} \\ &= \frac{-2(x+1)}{x^2(x+2)^2} - \frac{2(x+1)}{x(x+2)} \\ &= \frac{-2(x+1)(1+x(x+2))}{(x(x+2))^2} = \frac{-2(x+1)^3}{(x(x+2))^2} \end{aligned}$$

$$\text{donc } (\forall x \in I); g'(x) \leq 0$$

d'où le tableau de variations de g

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	-		-
g	0 		$+\infty$ 

2) a- Soit h la restriction de g sur l'intervalle $]0, +\infty[$

La fonction h est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$

donc h est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $h(]0, +\infty[)$ telle que :

$$h(]0, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x); \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$$

Et puisque : $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe un seul réel α sur l'intervalle $]0, +\infty[$ tel que

$$h(\alpha) = 0$$

$$(c'est-à-dire : (\exists! \alpha \in]0, +\infty[) / g(\alpha) = 0)$$

donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0, +\infty[$

b- Dédution

La fonction g est décroissante sur l'intervalle $]-1; 0]$

$$\text{donc } (\forall x \in]-1; 0[); g(x) \leq g(-1)$$

$$c'est-à-dire : (\forall x \in]-1; 0[); g(x) \leq 0$$

La fonction g est décroissante sur chacun des intervalles $]0; \alpha]$ et $[\alpha; +\infty[$

$$\text{donc } (\forall x \in]0; \alpha[); g(x) \geq g(\alpha) \text{ et } (\forall x \in [\alpha; +\infty[); g(x) \leq g(\alpha)$$

$$c'est-à-dire : (\forall x \in]0; \alpha[); g(x) \geq 0 \text{ et } (\forall x \in [\alpha; +\infty[); g(x) \leq 0$$

d'où le tableau du signe de $g(x)$

x	-1	0	α	$+\infty$	
$g(x)$	0	$-$	$+$	0	$-$

2ème partie:

1) soit x un élément de D tel que : $x \neq -1$ On a : $(-2+x) \in D$ et

$$f(-2-x) = \frac{\ln|(-2-x)(-2-x+2)|}{(-2-x+1)^2} = \frac{\ln|-x(-2-x)|}{(-x-1)^2} = \frac{\ln|x(x+2)|}{(x+1)^2} = f(x)$$

$$\text{et } f(-2+1) = f(-1)$$

$$\text{donc : } (\forall x \in D); (-2-x) \in D \text{ et } f(-2-x) = f(x)$$

D'où la droite (Δ) d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

2) a- Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Soit $x \in]0, +\infty[$, on a : $x(x+2) > 0$

$$\text{donc } g(x) = \frac{\ln(x(x+2))}{(x+1)^2} = \frac{\ln(x(x+2))}{x(x+2)} \cdot \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

On pose $t = x(x+2)$ on a : $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x(x+2))}{x(x+2)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1) = 1$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

• Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow 0} |x(x+2)| = 0^+$ et $\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty$

alors $\lim_{x \rightarrow 0} \ln |x(x+2)| = -\infty$ et on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)^2} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

b- Montrons que f est continue à droite en -1

Soit $x \in]-2; 0[$ tel que : $x \neq -1$

$$\text{on a : } f(x) = \frac{\ln|x^2+2x|}{(x+1)^2} = \frac{\ln|(x+1)^2-1|}{(x+1)^2}$$

Posons $t = -(x+1)^2$ on a : $x \rightarrow -1 \Leftrightarrow t \rightarrow 0^-$

$$\text{donc } f(x) = \frac{\ln|-t-1|}{-t} = \frac{\ln(1+t)}{-t} \quad (\text{car } -t-1 = x^2+2x \text{ et } x^2+2x < 0 \text{ sur }]-2; 0[)$$

d'où $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(-\frac{\ln(1+t)}{t} \right) = -\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+t)}{t} = -1 = f(-1)$ par suite f est continue à droite en -1

3) Etudions la dérivabilité de f à droite en -1

Soit $x \in]-1; -\frac{1}{2}[$ on a : $x(x+2) < 0$

$$\begin{aligned} \text{et } \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} &= \frac{1}{(x+1)} \left(\frac{\ln(-x(x+2))}{(x+1)^2} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{x+1} \left(\frac{\ln(1-(x+1)^2)}{(x+1)^2} + 1 \right) \\ &= \frac{\ln(1-(x+1)^2) + (x+1)^2}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

On pose $t = x + 1$; on a : $x \rightarrow -1^+ \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$

$$\text{donc : } \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{\ln(1 - t^2) + t^2}{t^3}$$

on a : $-1 < x < -\frac{1}{2}$ c'est-à-dire $0 < x + 1 < \frac{1}{2}$ donc $0 < t < \frac{1}{2}$

$$\text{d'où } 0 < t^2 < \frac{1}{4} \text{ par suite : } -\frac{t^4}{2} - t^6 \leq \ln(1 - t^2) + t^2 \leq -\frac{t^4}{2}$$

$$\text{d'où : } \left(\forall t \in \left] 0; \frac{1}{2} \right[\right) : -\frac{t}{2} - t^3 \leq \frac{\ln(1 - t^2) + t^2}{t^3} \leq -\frac{t}{2}$$

et puisque : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(-\frac{t}{2} - t^3 \right) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(-\frac{t}{2} \right) = 0$ alors $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 - t^2) + t^2}{t^3} = 0$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = 0$$

finalement f est dérivable à droite en -1 et on a : $f'_d(-1) = 0$

4) a- Soit $x \in (I - \{-1\})$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(x+1)^4} \left[\frac{2x+2}{x(x+2)} \cdot (x+1)^2 - 2(x+1) \ln|x(x+2)| \right] \\ &= \frac{2(x+1)}{(x+1)^4} \left[\frac{(x+1)^2}{x(x+2)} - \ln|x(x+2)| \right] \\ &= \frac{2}{(x+1)^3} g(x) \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \forall x \in I - \{-1\} ; f'(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \cdot g(x)$$

$$\text{b- On a : } g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha(\alpha+2)} = \ln|\alpha(\alpha+2)|$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha(\alpha+2)} = \frac{\ln|\alpha(\alpha+2)|}{(\alpha+1)^2} \quad (\text{car } \alpha \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha+2)}$$

et puisque $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \cdot g(x)$ pour tout x de $(I - \{-1\})$ alors, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ sur $I - \{-1\}$, d'où le tableau de variation de f sur I .

x	-1	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	0 -	
f	-1	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

et on a: (Δ) est un axe de symétrie pour (C_g) donc (si on pose $t = -x - 2$) on

$$a: \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-2-x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$$

d'où le tableau de variations de f sur D

x	$-\infty$	$(-2-\alpha)$	-2	-1	0	α	∞		
$f'(x)$	+	0	-	+	0	-	+	0	-
f	$f(\alpha)$ $0 \nearrow$ $-\infty \searrow$			-1 $-\infty \nearrow$ $-\infty \searrow$			$f(\alpha)$ $-\infty \nearrow$ $0 \searrow$		

5) a- Soit x un élément de D tel que $x \neq -1$, on a :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln|x(x+2)| = 0$$

$$\Leftrightarrow |x(x+2)| = 1$$

$$\Leftrightarrow x(x+2) = 1 \quad \text{ou} \quad x(x+2) = -1$$

$$\text{et puisque } x(x+2) = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2$$

$$\text{alors } x(x+1) = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1 \text{ ou } x = -\sqrt{2} - 1$$

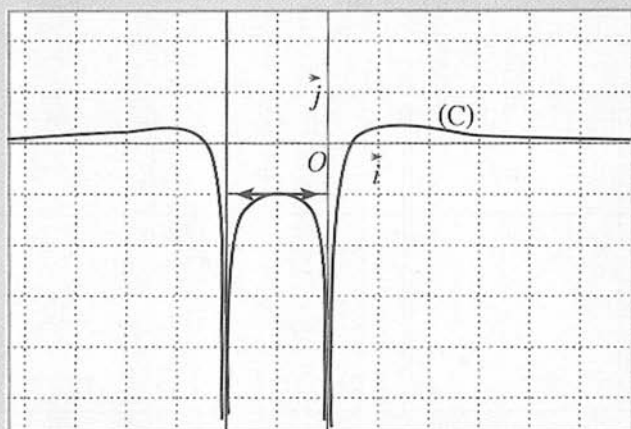
$$\text{et on a : } x(x+2) = -1 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \text{ (impossible: car } x \neq -1)$$

$$\text{donc } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1 \text{ ou } x = -\sqrt{2} - 1$$

donc (C_f) coupe l'axe des abscisses aux points $A(\sqrt{2} - 1; 0)$ et $B(-\sqrt{2} - 1; 0)$

$$\text{et on a : } f(-1) = -1$$

b- courbe



Exercice 17

1) Écrivons u_1 et u_2 en fonction de 2^a

On a $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$ par définition de la suite (u_n)

$$\text{donc } (u_2)^2 = 4 \Leftrightarrow u_2 = 2 \text{ et } (u_3)^2 = 4u_2 \Leftrightarrow (u_3)^2 = 2^3 \text{ donc } u_2 = 2^1 \text{ et } u_3 = 2^{\frac{3}{2}} \\ \Leftrightarrow u_3 = 2^{\frac{3}{2}}$$

2) a- Montrons que (v_n) est une suite géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - \ln 4$

et puisque $(u_{n+1})^2 = 4u_n$ alors $\ln((u_{n+1})^2) = \ln(4u_n)$, donc

$$2\ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) + \ln 4 \text{ c'est-à-dire } \ln(u_{n+1}) = \frac{1}{2}\ln(u_n) + \frac{1}{2}\ln(4)$$

$$\text{d'où } v_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(u_n) + \frac{1}{2}\ln(4) - \ln(4) = \frac{1}{2}\ln(u_n) - \frac{1}{2}\ln(4) = \frac{1}{2}v_n$$

Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ c'est-à-dire (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme

$$v_1 = \ln(u_1) - \ln(4) = -\ln 4$$

donc :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = (-\ln(4)) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = (-2\ln(2)) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \ln(2) = \ln 2^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}$$

et puisque $\ln(u_n) = v_n + \ln 4$

$$\text{alors : } \ln(u_n) = \ln\left(2^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}\right) + \ln(2^2) = \ln\left(2^{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}\right)$$

$$\text{donc : } u_n = 2^{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} \text{ d'où : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = 2^{2-4\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Exercice 18

1) Dressons le tableau de variations de la fonction u

• La fonction u est définie sur : $]0, +\infty[$

• Les limites : on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 = -1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = +\infty$

$$\text{et on a : } (\forall x \in]0, +\infty[), u(x) = x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

$$\text{et puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$$

• La fonction u est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $(\forall x \in]0, +\infty[)$;

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

x	0	1	$+\infty$
$u'(x)$	-	0	+
u	$+\infty$	0	$+\infty$

Dressons le tableau de variations de la fonction v .

- La fonction v est définie sur $]0, +\infty[$

- Les limites : on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) = -\infty$$

- et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$

- La fonction v est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$\text{et } (\forall x \in]0, +\infty[); v'(x) = x - 2 + \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$$

$$\text{donc : } \forall x \in]0, +\infty[- \{1\}; v'(x) > 0$$

Par suite v est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$v'(x)$	+	0	+
v	$-\infty$		

b- Dédution

- On a v est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

Soit $a \in]0, +\infty[$ on a : $a+1 > 1$ donc $v(a+1) > v(1)$ et $v(1) = 0$

et on a :

$$v(a+1) = \frac{1}{2}(a+1)^2 - 2(a+1) + \ln(a+1) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}a^2 - a + \ln(a+1)$$

$$\text{donc : } \ln(a+1) > a - \frac{1}{2}a^2 \quad (1)$$

- On a : u est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

Soit $a \in]0, +\infty[$, on a : $a+1 > 1$ donc $u(a+1) > u(1)$

et comme $u(1) = 0$ et $u(a+1) = a - \ln(1+a)$ alors $a > \ln(1+a)$ (2)

de (1) et (2) on déduit que :

$$(\forall a \in]0, +\infty[); a - \frac{a^2}{2} < \ln(1+a) < a \quad (3)$$

2) a- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$

$$\text{donc } \ln(P_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

et d'après l'inégalité double (3) et pour $a = \frac{k}{n^2}$ où $1 \leq k \leq n$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$\text{on a : } \frac{k}{n^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2}{n^4} < \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) < \frac{k}{n^2}$$

$$\text{donc } \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{2n^4} \cdot \sum_{k=1}^n k^2 < \ln(P_n) < \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n k$$

$$\text{c'est-à-dire : } \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} < \ln(P_n) < \frac{n+1}{2n}$$

Rappel :

- $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\text{donc : } \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{12} \times \frac{(n+1)(2n+1)}{n^3} < \ln(P_n) < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

b-Déduction

$$\text{On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{12} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{et } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{12} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^3} < \ln(P_n) < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{donc d'après les critères de convergence : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(P_n) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Et puisque } P_n = e^{\ln(P_n)} \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Exercice 19

• On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - n = -n$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - n + \frac{n}{2} \ln(x)\right) = -\infty$$

$$\text{Soit } x \in]0, +\infty[; \text{ on a : } f_n(x) = x\left(1 + \frac{n}{2} \cdot \frac{\ln(x)}{x} - \frac{n}{x}\right)$$

$$\text{et puisque } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n}{2} \cdot \frac{\ln(x)}{x} - \frac{n}{x}\right) = 1$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{n}{2} \cdot \frac{\ln(x)}{x} - \frac{n}{x} \right) = +\infty$$

Les fonctions : $x \mapsto \frac{n}{2} \ln(x)$ et $x \mapsto x - n$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$ donc f_n est dérivable sur $]0; +\infty[$, et on a : $\forall x \in]0; +\infty[; f'_n(x) = 1 + \frac{n}{2x}$

donc : $f'_n(x) > 0$ pour tout x élément de $]0; +\infty[$. d'où f_n est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'_n(x)$		+
f_n	$-\infty$	$+\infty$

2) a- Montrons que : $(\exists ! \alpha_n \in]0; +\infty[) ; f_n(\alpha_n) = 0$

La fonction f_n est continue sur $]0; +\infty[$ (puisque'elle est dérivable sur $]0; +\infty[$), et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc f_n est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $f_n(]0; +\infty[)$ telle que :
 $f_n(]0; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$

et puisque $0 \in \mathbb{R}$ alors $(\exists ! \alpha_n \in]0; +\infty[) , f_n(\alpha_n) = 0$

b- Montrons que : $1 \leq \alpha_n < e^2$

On a : $f_n(1) = 1 - n$ et $f_n(e^2) = e^2$ donc $f_n(1) \leq 0$ et $f_n(e^2) > 0$

d'où $f_n(1) \leq f_n(\alpha_n) < f_n(e^2)$ (car $f_n(\alpha_n) = 0$)

et puisque f_n est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ alors f_n^{-1} la bijection réciproque de f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

donc $f_n^{-1}(f_n(1)) \leq f_n^{-1}(\alpha_n) < (f_n^{-1}(e^2))$ c'est-à-dire $1 \leq \alpha_n < e^2$

c- Vérifions que : $\ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n} \alpha_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a :

$$f_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_n - n + \frac{n}{2} \ln(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{2} \ln(\alpha_n) = n - \alpha_n \Leftrightarrow \ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n} \alpha_n$$

$$\text{donc } \ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n} \alpha_n$$

3) Écrivons $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$(\forall x \in]0; +\infty[); f_{n+1}(x) = x - (n+1) + \frac{n+1}{2} \cdot \ln(x)$$

$$\text{donc } f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n - (n+1) + \frac{n+1}{2} \cdot \ln(\alpha_n)$$

et puisque: $\ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n} \alpha_n$ alors :

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n - n - 1 + \frac{n+1}{2} \left(2 - \frac{2}{n} \alpha_n \right) = \alpha_n - n - 1 + n + 1 - \left(1 + \frac{1}{n} \right) \alpha_n = -\frac{\alpha_n}{n}$$

$$\text{donc : } f_{n+1}(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n}{n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

* Dédution

$$\text{On a : } f_{n+1}(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n}{n} \text{ et } -\frac{\alpha_n}{n} < 0 \text{ donc : } f_{n+1}(\alpha_n) < 0$$

$$\text{On a : } f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 \text{ donc : } f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1})$$

Et puisque f_{n+1} est une fonction continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ alors c'est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, donc : $\alpha_n < \alpha_{n+1}$

4) a- Convergence de la suite (α_n) .

On a : la suite (α_n) est strictement croissante (d'après la question 3) et majorée par e^2 (d'après la question 2) b)

alors la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

b- Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\alpha_n)$

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n} \alpha_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \ell \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{n} \right) = 0$$

$$\text{donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{2}{n} \alpha_n \right) = 2 \text{ d'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\alpha_n) = 2$$

Exercice 20

1) a- Calculons u_1, u_2 et u_3

$$\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ on a : } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\text{donc : } u_1 = 1 \text{ et } u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ et } u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

b) Montrons que : $(\forall x \in [0; +\infty[); \ln(1+x) \leq x$ et $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$

On considère les fonctions numériques u et v définies sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(1+x) - x \\ v(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0; +\infty[$, et on a :

$$\begin{cases} (\forall x \in [0; +\infty[); u'(x) = \frac{-x}{1+x} \\ (\forall x \in [0; +\infty[); v'(x) = \frac{x}{(1+x)^2} \end{cases}$$

donc : $u'(x) \leq 0$ et $v'(x) \geq 0$ pour tout x de $[0, +\infty[$. et on a :

$$u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

et $v'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc : u est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et v est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

d'où : $(\forall x \in [0, +\infty[) ; u(x) \leq u(0)$ et $(\forall x \in [0, +\infty[) ; v(x) \geq v(0)$

et on a $u(0)=0$ et $v(0)=0$

$$\text{donc : } (\forall x \in [0, +\infty[) ; \begin{cases} \ln(1+x) \leq x \\ \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \end{cases}$$

• Dédution

$$\text{On a : } (\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x \quad (1)$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{On a : } \frac{1}{k} > 0, \text{ et d'après l'inégalité (1) on a : } \frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}} \leq \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

$$\text{c'est-à-dire : } \frac{1}{1+k} \leq \ln\left(\frac{1+k}{k}\right) \leq \frac{1}{k}, \text{ d'où : } \frac{1}{1+k} \leq \ln(1+k) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

$$\text{Par conséquent : } (\forall k \in \mathbb{N}^+) ; \frac{1}{1+k} \leq \ln(1+k) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

$$\text{C- Montrons que : } (\forall n \in \mathbb{N}^+) ; u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Pour tout } k \text{ de l'ensemble } \{1, 2, 3, \dots, n\} : \text{ on a : } \frac{1}{1+k} \leq \ln(1+k) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

$$\text{donc : } \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k} \leq \sum_{k=1}^n (\ln(1+k) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\text{d'où : } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right) - 1 = u_{n+1} - 1$$

$$\begin{aligned} \text{et : } \sum_{k=1}^n (\ln(1+k) - \ln(k)) &= \sum_{k=1}^n \ln(1+k) - \sum_{k=1}^n \ln(k) = \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) - \sum_{k=1}^n \ln(k) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \ln(k) \right) + \ln(1+n) - \sum_{k=1}^n \ln(k) = \ln(1+n) \end{aligned}$$

$$\text{donc : } u_{n+1} - 1 \leq \ln(1+n) \leq u_n,$$

$$\text{d'où : } (\forall n \in \mathbb{N}^+) ; u_{n+1} - 1 \leq \ln(1+n) \leq u_n$$

• Dédution

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^* \text{ d'après : } (\forall n \in \mathbb{N}^+) ; u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1)$$

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; u_n - 1 \leq \ln(n) \text{ et pour } n=1 : u_1=1 \text{ et } \ln(1)=0$$

$$\text{c'est-à-dire : } u_1 - 1 = \ln(1), \text{ donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^+) ; u_n - 1 \leq \ln(n)$$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \leq 1 + \ln(n)$ et on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \ln(n+1) \leq u_n$
 d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \ln(1+n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n)$

c- Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\text{On a : } \begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \geq \ln(n+1) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty \end{cases}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ d'après les critères de convergence. La suite (u_n) est divergente.

2) a- Soit n un entier tel que $n \geq 2$

* Calculons $c_{n+1} - c_n$

$$\text{On a : } c_n = u_{n-1} - \ln(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \ln(n)$$

$$\text{et } c_{n+1} = u_n - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

$$\text{donc : } c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(1+n)$$

* Dédution

$$\text{D'après 1) b) on a : } \ln(1+n) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{donc : } \frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(1+n) \geq 0, \text{ c'est-à-dire : } c_{n+1} - c_n \geq 0$$

d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; c_{n+1} \geq c_n$, par conséquent la suite $(c_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

$$\text{b- Montrons que : } (\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; c_n \leq 1 + \ln(n-1) - \ln(n)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

$$\text{D'après 1) c) on a } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \ln(n+1) \leq u_n \leq 1 + \ln(n)$$

$$\text{donc : } 0 < \ln(n) \leq u_{n-1} \leq 1 + \ln(n-1) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^* - \{1\}$$

$$\text{donc : } u_{n-1} - \ln(n) \leq 1 + \ln(n-1) - \ln(n) \text{ c'est-à-dire :}$$

$$c_n \leq 1 + \ln(n-1) - \ln(n)$$

$$\text{d'où : } (\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; c_n \leq 1 + \ln(n-1) - \ln(n)$$

c- Dédution

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. on a :

$$\ln(n-1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{et puisque : } 0 < 1 - \frac{1}{n} < 1 \text{ alors } \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 0 \text{ donc : } \ln(n-1) - \ln(n) < 0$$

$$\text{et on a : } c_n \leq 1 + \ln(n-1) - \ln(n) \text{ donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; c_n \leq 1$$

Par suite la suite $(c_n)_{n \geq 2}$ est majorée par 1. Et puisque $(c_n)_{n \geq 2}$ est croissante, alors $(c_n)_{n \geq 2}$ est une suite convergente.

Exercice 21

1) a- Dressons le tableau de variations de la fonction f_n :

La fonction f_n est définie sur $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = x + n(1 + \ln x)$

• Calcul de $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + n(1 + \ln x) = -\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + n(1 + \ln x) = +\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

• La dérivée de f_n :

La fonction f_n est dérivable sur $]0; +\infty[$, et que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[); f'_n(x) = 1 + \frac{n}{x}$$

• On a pour tout $x \in]0; +\infty[; f'_n(x) > 0$, d'où le tableau de variations de f_n est :

x	0	$+\infty$
$f'_n(x)$		+
f_n	$-\infty$	$+\infty$

b- Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); (\exists! \alpha_n \in]0; +\infty[); f_n(\alpha_n) = 0$:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur l'intervalle $f_n(]0; +\infty[)$ avec

$$f_n(]0; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$$

Et puisque $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe un unique α_n de $]0; +\infty[$ tel que :

$$f_n(\alpha_n) = 0$$

$$\text{Ainsi : } (\forall n \in \mathbb{N}^*); (\exists! \alpha_n \in]0; +\infty[); f_n(\alpha_n) = 0$$

2) a- Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{e^2} < \alpha_n < \frac{1}{e}$:

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } f_n\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} + n(1 - 1) = \frac{1}{e}$$

$$\text{et } f_n\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2} + n(1 - 2) = \frac{1}{e^2} - n = \frac{1 - ne^2}{e^2}$$

Comme $ne^2 > 1$ alors : $1 - ne^2 < 0$ donc : $f_n\left(\frac{1}{e}\right) > 0$ et $f_n\left(\frac{1}{e^2}\right) < 0$

Donc : $f_n\left(\frac{1}{e^2}\right) < 0 < f_n\left(\frac{1}{e}\right)$, c'est-à-dire : $f_n\left(\frac{1}{e^2}\right) < f_n(\alpha_n) < f_n\left(\frac{1}{e}\right)$

Et comme la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors : $\frac{1}{e^2} < \alpha_n < \frac{1}{e}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{e^2} < \alpha_n < \frac{1}{e}$

b- • Déterminons la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n + n(1 + \ln(\alpha_n)) + 1 + \ln(\alpha_n) = 1 + \ln(\alpha_n)$

Car $f_n(\alpha_n) = 0$ équivaut à $\alpha_n + n(1 + \ln(\alpha_n)) = 0$

Et puisque : $\frac{1}{e^2} < \alpha_n < \frac{1}{e}$ alors : $\ln(\alpha_n) + 1 < 0$

Par suite : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$ c'est-à-dire : $f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1})$

Par conséquent : $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ car f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n < \alpha_{n+1}$

signifie que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

• La convergence de la suite (α_n) :

La suite (α_n) est croissante et majorée par le réel $\frac{1}{e}$ donc elle est convergente.

• Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$:

On pose : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \ell$ où $\ell \in \mathbb{N}$.

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{e^2} < \alpha_n < \frac{1}{e}$ alors : $\frac{1}{e^2} \leq \ell \leq \frac{1}{e}$, d'après les propriétés de limites et ordre.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $f_n(\alpha_n) = 0 \iff \frac{\alpha_n}{n} = -1 - \ln(\alpha_n)$

En plus : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0$, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \ell$

D'autre part, la fonction $\ln$ est continue en ℓ et la suite (α_n) est convergente vers ℓ donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\alpha_n) = \ln(\ell)$

Et comme : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{\alpha_n}{n} = -1 - \ln(\alpha_n)$

alors : $0 = -1 - \ln(\ell)$ équivaut à : $\ln(\ell) = -1$ donc : $\ell = \frac{1}{e}$

Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{1}{e}$

Exercice 22

1) Montrons que : $(\forall n \geq 2) ; (\exists ! \alpha_n \in]0 ; +\infty[) ; f_n(\alpha_n) = 0$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

La fonction f_n est définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f_n(x) = nx^2 + \ln(x)$

• Calcul de $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} nx^2 + \ln x = -\infty; \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} nx^2 + \ln x = +\infty; \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

• La monotonie de f_n :

$(\forall x \in]0; +\infty[); f'_n(x) = 2nx + \frac{1}{x}$, donc : $f'_n(x) > 0$ pour tout réel $x \in]0; +\infty[$.

Par suite la fonction f_n est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

• La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ alors c'est une bijection de $]0; +\infty[$ sur l'intervalle $f_n(]0; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

Et puisque $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe un unique réel $\alpha_n \in]0; +\infty[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$.

Ainsi : $(\forall n \geq 2)(\exists! \alpha_n \in]0; +\infty[); f_n(\alpha_n) = 0$

2) • Montrons que la suite (α_n) est strictement décroissante :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq 2$; on a :

$$f_{n+1}(\alpha_n) = (n+1)\alpha_n^2 + \ln(\alpha_n) = n\alpha_n^2 + \ln(\alpha_n) + \alpha_n^2 = f_n(\alpha_n) + \alpha_n^2 = \alpha_n^2$$

or $\alpha_n^2 > 0$ donc : $f_{n+1}(\alpha_n) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ (car $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$)

Et comme la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ alors : $\alpha_n > \alpha_{n+1}$

Ainsi : $(\forall n \geq 2); \alpha_{n+1} < \alpha_n$

signifie que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante.

• Dédution :

La suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et minorée par le réel 0 donc elle est convergente.

3) a- Montrons que : $(\forall x \in]0; +\infty[); x - \frac{1}{2} \ln(x) > 0$

On considère la fonction φ définie sur $]0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = x - \frac{1}{2} \ln(x)$

$$\text{On a : } (\forall x \in]0; +\infty[); \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{2x} = \frac{2x-1}{2x}$$

Donc : la fonction φ est décroissante $]0; \frac{1}{2}]$ et croissante sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$.

Donc : $0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$

Et $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$

C'est-à-dire : $(\forall x \in]0; +\infty[); \varphi(x) \geq \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$

Or $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{1}{2}(1 + \ln(2))$ et $1 + \ln(2) > 0$

Donc : $\varphi(x) > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$

Ainsi : $(\forall x \in]0; +\infty[); x - \frac{1}{2} \ln(x) > 0$

b- Montrons que : $(\forall n \geq 2); \alpha_n < n^{-\frac{1}{4}}$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, on a :

$$f_n(n^{-\frac{1}{4}}) = n \times n^{-\frac{1}{2}} + \ln(n^{-\frac{1}{4}}) = n^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \ln(n^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{n} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{n})$$

Et comme $\sqrt{n} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{n}) > 0$ d'après la question précédente,

alors : $f_n(n^{-\frac{1}{4}}) > f_n(\alpha_n)$ et la fonction f_n est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Donc : $n^{-\frac{1}{4}} > \alpha_n$

Ainsi : $(\forall n \geq 2); \alpha_n < n^{-\frac{1}{4}}$

• Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$:

On a : $(\forall n \geq 2); 0 < \alpha_n < n^{-\frac{1}{4}}$

Et comme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-\frac{1}{4}} = 0$ (car $-\frac{1}{4} < 0$ et $-\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}^+$)

Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$, d'après les critères de convergence.

c- Montrons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$

Soit $n \geq 2$; on a : $f_n(\alpha_n) = 0 \iff \frac{1}{n} \ln(\alpha_n) = -\alpha_n^2 \iff \ln(\sqrt[n]{\alpha_n}) = -\alpha_n^2$

Donc : $\sqrt[n]{\alpha_n} = e^{-\alpha_n^2}$ pour tout $n \geq 2$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\alpha_n^2} = e^0 = 1$

Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$

Exercice 23

Soit n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

1) Montrons que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions a_n et b_n telles que : $0 < a_n < n < b_n$:

La fonction f_n est définie sur $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = x - n \ln(x)$

• Calcul de $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - n \ln(x) = +\infty; \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - n \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty; \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

- Les variations de la fonction f_n :

La fonction f_n est dérivable sur $]0; +\infty[$, en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$, qui sont : $x \mapsto x$ et $x \mapsto -n \ln(x)$

Et que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'_n(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$

Et on a : • $f_n(x) = 0 \iff x = n$ • $f_n(x) > 0 \iff x \in]n; +\infty[$

Donc la fonction f_n est strictement décroissante sur $]0; n]$ et strictement croissante sur $[n; +\infty[$.

- Soit φ_1 la restriction de la fonction f_n sur $]0; n[$.

La fonction φ_1 est continue et strictement décroissante sur $]0; n[$,

donc c'est une bijection de $]0; n[$ sur l'intervalle $\varphi_1(]0; n[)$ où

$\varphi_1(]0; n[) =]n - n \ln(n); +\infty[$

Et comme $n - n \ln(n) = n(1 - \ln(n)) < 0$ (car $n \geq 3 \geq e \Rightarrow \ln(n) > 1$)

Alors : $0 \in]n - n \ln(n); +\infty[$

Donc il existe un unique antécédent $a_n \in]0; n[$ tel que : $\varphi_1(a_n) = 0$

Ainsi : $(\forall n \geq 3); (\exists ! a_n \in]0; n[); f_n(a_n) = 0$

- Soit φ_2 la restriction de la fonction f_n sur $]n; +\infty[$:

La fonction φ_2 est continue et strictement croissante sur $]n; +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]n; +\infty[$ sur l'intervalle $]n - n \ln(n); +\infty[$.

Puisque : $0 \in]n - n \ln(n); +\infty[$, alors il existe un unique réel $b_n \in]n; +\infty[$ tel que : $\varphi_2(b_n) = 0$

Ainsi : $(\forall n \geq 3); (\exists ! b_n \in]n; +\infty[); f_n(b_n) = 0$

Finalement si $n \geq 3$ alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions a_n et b_n telles que : $0 < a_n < n < b_n$

2) Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$:

On a : $(\forall n \geq 3); b_n > n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$.

3) a- Montrons que : $(\forall n \geq 3); 1 < a_n < 2$

Soit $n \geq 3$, on a : $f_n(1) = 1$ et $f_n(2) = 2 - n \ln(2) = 2 - \ln(2^n) = \ln\left(\frac{e^2}{2^n}\right)$

Donc : $f_n(2) < 0 < f_n(1)$ c'est-à-dire : $f_n(2) < f_n(a_n) < f_n(1)$

Comme la fonction f_n est strictement décroissante sur $]0; n[$ alors :

$1 < a_n < 2$

Ainsi : $(\forall n \geq 3); 1 < a_n < 2$

b- Montrons que la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est décroissante :

Soit $n \geq 3$, on a : $f_{n+1}(a_n) = a_n - (n+1)\ln(a_n) = f_n(a_n) - \ln(a_n) = -\ln(a_n)$

Comme $a_n > 1$ alors : $\ln(a_n) > 0$, donc : $f_{n+1}(a_n) < 0$

Par suite : $f_{n+1}(a_n) < f_{n+1}(a_{n+1})$

Il s'ensuit que : $a_{n+1} < a_n$; car la fonction de f_{n+1} est strictement décroissante sur $]n+1; +\infty[$.

Ainsi : $(\forall n \geq 3); a_{n+1} < a_n$, signifie que la suite (a_n) est décroissante.

• La suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est décroissante minorée par le réel 0, donc elle est convergente.

c- Montrons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$

On pose : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$

On a : $(\forall n \geq 3); 1 \leq a_n < 2$ alors : $\ell \in [1; 2]$

Pour $n \geq 3$, on a : $f_n(a_n) = 0$ équivaut à : $\frac{a_n}{n} = \ln(a_n)$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(a_n) = \ln(\ell)$, (car la suite (a_n) est convergente vers ℓ et la fonction $\ln$ est continue en ℓ)

alors : $\ln(\ell) = 0$ c'est-à-dire : $\ell = 1$

Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$

Exercice 24

1) a- Calculons : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$:

• On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 - x^2 = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} n \ln x = -\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 - x^2 + n \ln x = -\infty$ c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = -\infty$

• On a : $f_n(x) = 2 + x \left(-x + n \frac{\ln(x)}{x} \right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + n \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + x \left(-x + n \frac{\ln(x)}{x} \right) = -\infty$ c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty$

b- Étudions les variations de f_n :

La fonction f_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[); f'_n(x) = -2x + \frac{n}{x} = \frac{n - 2x^2}{x}$$

Le signe de $f'_n(x)$ est celui de $n - 2x^2$ sur $]0; +\infty[$, donc :

• $f'_n(x) = 0 \iff x = \sqrt{\frac{n}{2}}$

- $f'_n(x) > 0 \iff x \in]0; \sqrt{\frac{n}{2}}[$
- $f'_n(x) < 0 \iff x \in]\sqrt{\frac{n}{2}}; +\infty[$

Par conséquent la fonction f_n est strictement croissante sur $]0; \sqrt{\frac{n}{2}}[$ et strictement décroissante sur $]\sqrt{\frac{n}{2}}; +\infty[$

2) a- • Calculons $g'(x)$ où $x \in]0; +\infty[$:

La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[); g'(x) = (x \ln(x) + 2 - x)' = \ln(x)$$

Par suite : • $g'(x) = 0 \iff x = 1$

- $g'(x) > 0 \iff x \in]1; +\infty[$
- $g'(x) < 0 \iff x \in]0; 1[$

Par conséquent la fonction g est croissante sur $]1; +\infty[$ et décroissante sur $]0; 1[$.

b- Dédution :

On a : $(\forall x \in]1; +\infty[); g(x) \geq g(1)$; car g est croissante.

Et $(\forall x \in]0; 1[); g(x) \geq g(1)$; car g est décroissante.

Et comme $g(1) = 1$ alors : $g(1) > 0$

Donc : $(\forall x \in]0; +\infty[); g(x) > 0$

3) a- Montrons que : $f_n(\sqrt{\frac{n}{2}}) > 0$

$$\text{On a : } f_n(\sqrt{\frac{n}{2}}) = -\frac{n}{2} + 2 + n \ln(\sqrt{\frac{n}{2}}) = -\frac{n}{2} + 2 + \frac{n}{2} \ln\left(\frac{n}{2}\right) = g\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\text{et } g\left(\frac{n}{2}\right) > 0$$

$$\text{Donc : } f_n(\sqrt{\frac{n}{2}}) > 0$$

b- Dédisons que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions u_n et v_n dans $\mathbb{R}_+$ ($u_n < v_n$):

• Soit φ_1 la restriction de f_n sur $]0; \sqrt{\frac{n}{2}}[$.

La fonction φ_1 est continue et strictement croissante sur $]0; \sqrt{\frac{n}{2}}[$,

donc elle réalise une bijection de $]0; \sqrt{\frac{n}{2}}[$ sur $\varphi_1(]0; \sqrt{\frac{n}{2}}[)$ tel que :

$$\varphi_1(]0; \sqrt{\frac{n}{2}}[) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi_1(x); \varphi_1(\sqrt{\frac{n}{2}}[) =]-\infty; f_n(\sqrt{\frac{n}{2}}[)$$

Puisque : $0 \in]-\infty; f_n(\sqrt{\frac{n}{2}}[)$ alors il existe un unique réel u_n dans $]0; \sqrt{\frac{n}{2}}[$ tel que : $f_n(u_n) = 0$.

• Soit φ_2 la restriction de f_n sur $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}; +\infty\right[$.

La fonction φ_2 est continue et strictement décroissante sur $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}; +\infty\right[$,
donc elle réalise une bijection de $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}; +\infty\right[$ sur $\varphi_2\left(\left[\sqrt{\frac{n}{2}}; +\infty\right[\right)$ tel que :
 $\varphi_2\left(\left[\sqrt{\frac{n}{2}}; +\infty\right[\right) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_1(x); \varphi_1\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \right[= \left] -\infty; f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \right[$

Puisque : $0 \in \left] -\infty; f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \right[$ alors : $(\exists v_n \in \left[\sqrt{\frac{n}{2}}; +\infty\right[)$ tel que : $f_n(v_n) = 0$

c- Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$:

On a : $(\forall n \geq 2); v_n \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} = +\infty$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

4) a- Montrons que : $(\forall n \geq 2); u_n \leq 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, on a : $f_n(1) = 1$ alors : $f_n(1) \geq f_n(u_n)$ et puisque
 $\sqrt{\frac{n}{2}} \geq 1$ et la fonction f_n est croissante sur $\left]0; \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$, alors : $1 \geq u_n$

D'où : $(\forall n \geq 2); u_n \leq 1$

b- Vérifions que : $(\forall n \geq 2); f_{n+1}(u_n) = \ln(u_n)$

Soit $n \geq 2$; on a : $f_{n+1}(u_n) = -u_n^2 + 2 + (n+1)\ln(u_n)$
 $= -u_n^2 + 2 + n\ln(u_n) + \ln(u_n)$
 $= f_n(u_n) + \ln(u_n) = \ln(u_n)$

Donc : $(\forall n \geq 2); f_{n+1}(u_n) = \ln(u_n)$

c- Montrons que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est croissante :

Soit $n \geq 2$; on a : $f_{n+1}(u_n) = \ln(u_n)$ et comme $0 < u_n < 1$
alors : $\ln(u_n) < 0$

Donc : $f_{n+1}(u_n) < 0$ c'est-à-dire : $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$
Et puisque la fonction f_{n+1} est croissante sur $\left]0; \sqrt{\frac{n+1}{2}}\right]$

Alors : $u_n \leq u_{n+1}$

Ainsi : $(\forall n \geq 2); u_n \leq u_{n+1}$

signifie que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

Et comme elle est majorée par 1 alors elle est convergente.

d- Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

Posons : $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ où $\ell \in \mathbb{R}$

On a : $(\forall n \geq 2); u_2 \leq u_n \leq 1$ alors : $0 < u_2 < \ell \leq 1$

$$\text{et } f_n(u_n) = 0 \iff \ln(u_n) = \frac{u_n^2}{n} - \frac{2}{n}$$

Puisque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2}{n} - \frac{2}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \ln(\ell)$ car la suite (u_n) converge vers $\ell \in]0; 1]$ et la fonction $\ln$ est continue en ℓ .

Alors : $\ln(\ell) = 0$ d'où : $\ell = 1$

Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Exercice 25

1) a- Montrons que la fonction f est continue à droite en $x_0 = 0$:

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x^2 (\ln(x+1) - \ln(x)) = x^2 \cdot \ln(x+1) - x^2 \cdot \ln(x)$$

Et comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} x+1 = 1$ alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+1) = \ln(1) = 0$

Par suite : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x+1) = 0$

Et on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = 0$, il s'ensuit que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cdot \ln(x+1) - x^2 \ln(x) = 0$

C'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ signifie que f est continue à droite en 0.

b- Étudions la dérivabilité à droite en 0 :

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $f(0) = 0$

$$\text{et } \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x \ln(1+x) - x \ln(x)$$

Et puisque : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(1+x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$

alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(1+x) - x \ln(x) = 0$

C'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

D'où, la fonction f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

• Interprétation graphique :

La courbe $(\mathcal{C})$ admet une demi-tangente horizontale à droite en son point d'abscisse 0.

c- Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$:

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $f(x) = x^2 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

On pose : $X = \frac{1}{x}$ alors : $x \rightarrow +\infty \iff X \rightarrow 0^+$

Par suite : $f(x) = \frac{1}{X^2} \cdot \ln(1+X) = \frac{1}{X} \cdot \frac{\ln(1+X)}{X}$

Comme $\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ alors : $\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} \times \frac{\ln(1+X)}{X} = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} \times \frac{\ln(1+X)}{X} = +\infty$

2) a- Montrons que $(\forall t > 0); (\exists c \in]0; t[); \frac{u(t)}{v(t)} = \frac{u'(c)}{v'(c)}$:

Les fonctions $u: t \mapsto t - \ln(1+t)$ et $v: t \mapsto t^2$ sont dérivables sur $] -1; +\infty[$ donc la fonction $\varphi: x \mapsto u(t)v(x) - u(x)v(t)$ est dérivable sur $] -1; +\infty[$ où $t \in] -1; +\infty[$ donné.

Il s'ensuit que : • La fonction φ est continue sur $[0; t]$

• La fonction φ est dérivable sur $]0; t[$

• $\varphi(0) = \varphi(t) = 0$

Donc, d'après le théorème de Rolle, on a : $(\exists c \in]0; t[); \varphi'(c) = 0$

Or : $(\forall x \in] -1; +\infty[); \varphi'(x) = u(t) \cdot v'(x) - u'(x) \cdot v(t)$

Donc : $\varphi'(c) = 0 \iff u(t) \cdot v'(c) - u'(c) \cdot v(t) = 0$

$$\iff u(t) \cdot v'(c) = u'(c) \cdot v(t)$$

$$\iff \frac{u(t)}{v(t)} = \frac{u'(c)}{v'(c)}$$

car $v(t) \neq 0$ et $v'(t) \neq 0$ pour tout réel $t \in]0; +\infty[$

Ainsi : $(\exists c \in]0; t[); \frac{u(t)}{v(t)} = \frac{u'(c)}{v'(c)}$

b- Dédudisons que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$:

Soit $t \in]0; +\infty[$, on a : $\frac{u(t)}{v(t)} = \frac{t - \ln(1+t)}{t^2}$ et $u'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}$ et $v'(t) = 2t$

Par suite, d'après le résultat de la question précédente on a :

$$(\exists c \in]0; t[); \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2(1+c)}$$

Et comme : $0 < c < t \iff 2 < 2(1+c) < 2(1+t)$

$$\iff \frac{1}{2(1+t)} < \frac{1}{2(1+c)} < \frac{1}{2}$$

Alors, on a : $(\forall t \in]0; +\infty[); \frac{1}{2(1+t)} < \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} < \frac{1}{2}$

Et puisque : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}$, alors : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$, d'après le théorème des limites et ordre.

3) Montrons que la droite (D): $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$:

Il suffit de montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

Soit $x \in]0; +\infty[$; on a : $f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x + \frac{1}{2}$

On pose : $t = \frac{1}{x}$ alors : $x \rightarrow +\infty \iff t \rightarrow 0^+$

Par suite : $f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{t^2} \cdot \ln(1+t) - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} = \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} + \frac{1}{2}$

Or $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = -\frac{1}{2}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} + \frac{1}{2} = 0$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

signifie que la droite (D) d'équation : $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

4) a- • Montrons que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$:

La fonction $u: x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ est dérivable et strictement positive sur l'intervalle $]0; +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur $]0; +\infty[$. La fonction $v: x \mapsto x^2$ est dérivable sur $]0; +\infty[$. Il s'ensuit que la fonction f telle que: $f(x) = v(x) \cdot \ln(u(x))$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

• Montrons que $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = x\left(2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right)$:

Soit $x \in]0; +\infty[$; on a : $f'(x) = v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$

Puisque : $v'(x) = 2x$ et $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ alors : $f'(x) = 2x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}$

$$= 2x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x}$$

$$= x\left(2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right)$$

D'où : $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = x\left(2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right)$

b- Montrons que $(\forall x > 0); \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1+x}$:

On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$$

La fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$(\forall x \in]0; +\infty[); h'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

Donc : $h'(x) < 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$, par conséquent la fonction h est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Et comme h est continue sur $]0; +\infty[$ alors :

$$h(]0; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x); \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)[=]0; +\infty[,$$

$$(\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x} = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x} = 1)$$

Donc : $(\forall x \in]0; +\infty[); h(x) > 0$

$$\text{Ainsi : } (\forall x \in]0; +\infty[); \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1+x}$$

• Dédution :

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $1 + \frac{1}{x} > 1$ alors : $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 0$

Par suite : $2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

Or $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$ donc : $2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$

C'est-à-dire : $2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} > 0$ soit $x\left(2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right) > 0$

Ainsi : $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) > 0$

c. Tableau de variations de la fonction f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
f	0	$+\infty$

5) a- Montrons que f admet une fonction réciproque :

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur l'intervalle

$$J = f([0; +\infty[) = [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [0; +\infty[$$

Par conséquent f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0; +\infty[= J$

b- Montrons que f^{-1} est dérivable en $\ln(2)$ et calculons $(f^{-1})'(\ln(2))$:

$$\text{on a : } f(1) = \ln 2 \implies f^{-1}(\ln 2) = 1$$

Et : $f'(1) \neq 0$, donc f^{-1} est dérivable en $\ln(2)$ et on a :

$$(f^{-1})'(\ln(2)) = \frac{1}{f'(1)}$$

Et comme $f'(1) = 2 \ln(2) - \frac{1}{2} = \frac{4 \ln(2) - 1}{2}$ alors : $(f^{-1})'(\ln(2)) = \frac{2}{4 \ln(2) - 1}$

c- Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(x)}{x} = +\infty$:

Soit $x \in]0; +\infty[$; on pose : $y = f^{-1}(x)$ alors : $x = f(y)$ et $x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow y \rightarrow 0^+$

Et on a : $\frac{f^{-1}(x)}{x} = \frac{y}{f(y)}$

Comme $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(y)}{y} = 0$ et $\frac{f(y)}{y} > 0$

alors : $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{f(y)} = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(x)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{f(y)} = +\infty$

d- Montrons que $(\forall x \in]0; +\infty[); f^{-1}(x) > x$:

Soit $x \in]0; +\infty[$; on a : $f^{-1}(x) > x \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) > f(x)$

$$\Leftrightarrow x > f(x) \text{ (car } f \text{ est croissante)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} < 0$$

Donc, il suffit de montrer que : $(\forall x > 0); \frac{1}{x} > \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

On pose : $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$; $x \in]0; +\infty[$

On a : $(\forall x > 0); g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)}$

Donc pour tout $x \in]0; +\infty[$; $g'(x) > 0$

D'où : la fonction g est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

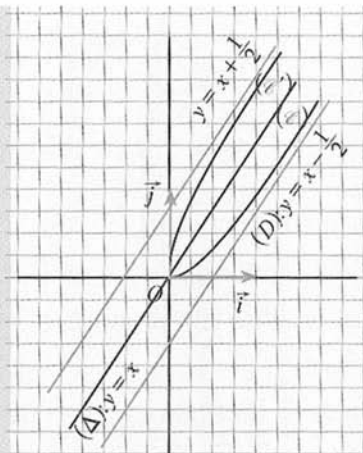
Par suite : $g(]0; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[=]-\infty; 0[$

D'où : $(\forall x \in]0; +\infty[); g(x) < 0$

C'est-à-dire : $(\forall x \in]0; +\infty[); \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} < 0$

Ainsi : $(\forall x \in]0; +\infty[); f^{-1}(x) > x$

6) Courbe.



Exercice 26

A/ 1) Montrons que :

$$(\forall x > -1); x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(x+1)} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

On considère les fonctions φ_1 et φ_2 définies sur $] -1; +\infty[$ par :

$$\varphi_1(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(x+1) \text{ et } \varphi_2(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(x+1)} - x + \ln(x+1)$$

Les fonctions φ_1 et φ_2 ont des dérivées sur $] -1; +\infty[$ et on a pour tout

$$x \in] -1; +\infty[: \varphi_1'(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} = \frac{x^3}{x+1}$$

$$\text{Et } \varphi_2'(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \times \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^3}{3(x+1)^2}$$

Donc : $(\forall x \in] -1; 0]) ; \varphi_1'(x) \leq 0$ et $\varphi_2'(x) \leq 0$

$$(\forall x \in [0; +\infty[) ; \varphi_1'(x) \geq 0 \text{ et } \varphi_2'(x) \geq 0$$

Il s'ensuit que φ_1 et φ_2 sont décroissantes sur $] -1; 0]$

Il en résulte donc que : $(\forall x \in] -1; 0]) ; \varphi_1(x) \geq \varphi_1(0)$ et $\varphi_2(x) \geq \varphi_2(0)$

De même φ_1 et φ_2 sont croissantes sur $[0; +\infty[$

Il en résulte donc que : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; \varphi_1(x) \geq \varphi_1(0)$ et $\varphi_2(x) \geq \varphi_2(0)$

D'où : $(\forall x \in] -1; +\infty[) ; \varphi_1(x) \geq 0$ et $\varphi_2(x) \geq 0$

$$\text{Conclusion : } (\forall x \in] -1; +\infty[) ; x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(x+1)} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

2) Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$:

Pour tout $x \in] -1; +\infty[$, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(x+1)} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

équivalent à : $-\frac{x}{3} + \frac{1}{2} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2} - \frac{x}{3(x+1)}$

Et puisque : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x}{3} + \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3(x+1)} \right) = \frac{1}{2}$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

B/ 1) a- Montrons que f est continue sur $[-1; +\infty[$:

La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $]1; +\infty[$ et comme $\ln(1+x) = 0$ équivaut à $x = 0$ alors la fonction u est continue et ne s'annule pas sur les intervalles $] -1; 0[$ et $]0; +\infty[$.

Il s'ensuit que f est continue en tant que quotient de deux fonctions continues.

• On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$

C'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ signifie que la fonction f est continue en 0.

• On a : $\lim_{x \rightarrow -1^+} x + 1 = 0^+$ et $\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty$

Par suite : $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{\ln(1+x)} = 0$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{\ln(1+x)} = 0$ c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$

D'où : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$ signifie que f est continue à droite en -1.

Conclusion : La fonction f est continue sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.

b- • Etudions la dérivabilité de f à droite en -1:

Soit $x \in] -1; 0[$; on a : $f(-1) = 0$ et $\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{x}{(x+1)\ln(x+1)}$

On pose : $t = x + 1$, alors : $x \rightarrow -1^+ \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1)\ln(x+1) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0^-$, il s'ensuit

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)} = -\infty$$

par suite : $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{(x+1)\ln(x+1)} = +\infty$

D'où : $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty$ c'est-à-dire la fonction f n'est pas dérivable à droite en -1.

• **Interprétation graphique:**

La courbe (C) admet une demi-tangente verticale à droite en son point

d'abscisse -1, dirigée vers le haut.

c- • Montrons que f est dérivable en 0:

Soit $x \in]-1; +\infty[$ et $x \neq 0$, on a : $f(0) = 1$

$$\text{et } \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} \left(\frac{x}{\ln(1+x)} - 1 \right) = \left(\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \right) \times \frac{x}{\ln(1+x)}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \right) \times \frac{x}{\ln(1+x)} = \frac{1}{2}$$

C'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}$ signifie que f est dérivable en 0 et que : $f'(0) = \frac{1}{2}$

• Equation de la tangente à (C) au point $A(0;1)$:

On a : $f(0) = 1$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$ donc : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, c'est-à-dire : $y = \frac{1}{2}x + 1$, est une équation de la tangente à la courbe (C) au point $A(0;1)$.

2) a- Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\text{Soit } x \in]-1; +\infty[, \text{ on a : } f(x) = \frac{x}{x+1} \times \frac{x+1}{\ln(x+1)}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{X}{\ln X} = +\infty \text{ (on pose } X = x+1)$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x+1)} = 0, \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$$

• Interprétation géométrique :

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

b- Montrons que f est dérivable :

La fonction $u: x \mapsto \ln(x+1)$ est dérivable et ne s'annule pas sur chacun des intervalles $] -1; 0[$ et $] 0; +\infty[$.

Par suite la fonction $f: x \mapsto \frac{x}{\ln(x+1)}$ est dérivable sur $] -1; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$.

• Calculons $f'(x)$ où $x \in] -1; 0[\cup] 0; +\infty[$:

Pour tout réel $x \in] -1; 0[\cup] 0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}}{(\ln(x+1))^2} = \frac{(x+1)\ln(x+1) - x}{(x+1)(\ln(x+1))^2}$$

3) a- Montrons que $(\forall x > -1); (x+1)\ln(x+1) - x \geq 0$:

On considère la fonction Ψ définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$\Psi(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$$

La fonction Ψ est dérivable sur $]-1; +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]-1; +\infty[); \Psi'(x) = \frac{x+1}{x+1} + \ln(x+1) - 1 = \ln(x+1)$$

Par suite : • $\Psi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ • $\Psi'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[$

$$\bullet \Psi'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 0[$$

Donc la fonction Ψ est croissante sur $[0; +\infty[$ et décroissante sur $]-1; 0]$.

Par conséquent : si $x \geq 0$ alors : $\Psi(x) \geq \Psi(0) = 0$

$$\text{si } -1 < x \leq 0 \text{ alors : } \psi(x) \geq \psi(0) = 0$$

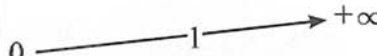
Ainsi : $(\forall x \in]-1; +\infty[); (x+1)\ln(x+1) - x \geq 0$

b- Le tableau de variations de f :

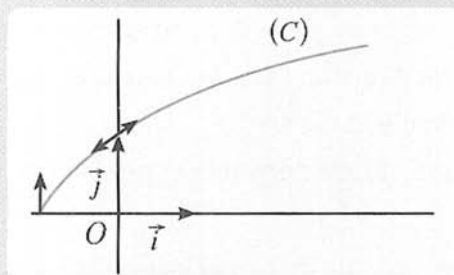
Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x+1)\ln(x+1) - x$, donc :

$$(\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[); f'(x) > 0$$

Par suite le tableau de variations de f est :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	
f			

c- Le tracé :



4) a- Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > e - 1$:

• Initialisation :

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 2$ et $2 > e - 1$ donc : $u_0 > e - 1$

• Hérité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $u_n > e - 1$, et montrons que : $u_{n+1} > e - 1$

La fonction f est strictement croissante sur $[-1; +\infty[$

$$\text{Donc : } u_n > e - 1 \Rightarrow f(u_n) > f(e - 1)$$

$$\text{Or } f(u_n) = u_{n+1} \text{ et } f(e - 1) = e - 1$$

$$\text{Donc : } u_{n+1} > e - 1$$

• Conclusion :

D'après le principe de récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > e - 1$

b- Montrons que la suite (u_n) est strictement décroissante :

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\ln(1 + u_n)} - u_n = u_n \times \left(\frac{1}{\ln(1 + u_n)} - 1 \right)$$

$$\text{Puisque : } u_n > e - 1 \Rightarrow u_n + 1 > e$$

$$\Rightarrow \ln(1 + u_n) > 1$$

$$\text{Alors : } \frac{1}{\ln(1 + u_n)} - 1 < 0$$

$$\text{Donc : } u_{n+1} - u_n < 0$$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$ signifie que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Et comme (u_n) est suite minorée par $e - 1$, donc elle est convergente.

c- Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e - 1$:

La fonction f est continue sur $[e - 1; +\infty[$ telle que :

$$f[e - 1; +\infty[\subset [e - 1; +\infty[\text{ et } u_0 \in [e - 1; +\infty[\text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$$

Comme la suite (u_n) est convergente alors sa limite ℓ vérifie : $f(\ell) = \ell$ et

$$\ell \in [e - 1; +\infty[$$

$$\text{Or } f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ln(1 + \ell) = 1$$

$$\Leftrightarrow \ell = e - 1$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e - 1$$

Exercice 27

1) Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$:

$$\text{Soit } x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } g(x) = x(-\ln(x) + 2) + 2$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \ln(x) = -\infty \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(2 - \ln(x)) + 2 = -\infty$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

2) Montrons que g est strictement croissante sur $]0; e]$ et strictement décroissante sur $[e; +\infty[$:

La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ et que : $(\forall x \in]0; +\infty[); g'(x) = 1 - \ln(x)$

Et on a : • $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

$$\bullet g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]e; +\infty[$$

$$\bullet g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; e[$$

Donc la fonction g est strictement croissante sur $]0; e]$ et strictement décroissante sur $[e; +\infty[$.

3) a- • Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]e; +\infty[$:

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $]e; +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]e; +\infty[$ sur $g(]e; +\infty[)$.

$$\text{où } g(]e; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); g(e)[=]-\infty; e - 2[$$

Puisque : $0 \in]-\infty; e - 2[$ alors il existe un unique réel α de $]e; +\infty[$ tel que :

$$g(\alpha) = 0$$

• Montrons que $4 < \alpha < 5$:

$$\text{On a : } g(4) = -4 \ln(4) + 8 - 2 = -8 \ln(2) + 6 = 8 \left(\frac{3}{4} - \ln(2) \right) \text{ et } g(5) = 5 \left(\frac{8}{5} - \ln(5) \right)$$

Et comme $\ln 2 < \frac{3}{4}$ et $\ln(5) > \frac{8}{5}$ alors : $g(4) > 0$ et $g(5) < 0$

Donc : $g(5) < 0 < g(4)$ c'est-à-dire : $g(5) < g(\alpha) < g(4)$

Puisque la fonction g est décroissante sur $]e; +\infty[$ alors : $4 < \alpha < 5$

b- Dédution :

• La fonction g est croissante sur $]0; 1]$. Donc si $x \in]0; 1]$ alors $g(x) \leq g(1)$ or $g(1) = 0$, il s'ensuit que : $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0; 1]$.

• La fonction g est décroissante sur $[\alpha; +\infty[$. Donc si $x \in [\alpha; +\infty[$ alors $g(x) \leq g(\alpha)$ or $g(\alpha) = 0$, il s'ensuit que : $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in [\alpha; +\infty[$.

• La fonction g est croissante sur $[1; e]$ et décroissante sur $[e; \alpha]$.

Donc : $1 \leq x \leq e \Rightarrow g(1) \leq g(x) \leq g(e)$

$$\Rightarrow 0 \leq g(x)$$

$$\begin{aligned} \text{et } e \leq x \leq \alpha &\Rightarrow g(\alpha) \leq g(x) \leq g(e) \\ &\Rightarrow 0 \leq g(x) \end{aligned}$$

Par suite : $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1; \alpha]$.

II/ 1) a- Montrons que f est continue en 1:

$$\text{Soit } x \in]0; +\infty[\text{ et } x \neq 1, \text{ on a : } f(x) = \frac{\ln(x)}{x-1} \times \ln(x)$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \ln(1) = 0$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \times \ln x = 0$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 = f(1)$ signifie que la fonction f est continue en 1.

b- Montrons que f est dérivable en 1:

$$\text{Soit } x \in]0; +\infty[\text{ et } x \neq 1, \text{ on a : } f(1) = 0 \text{ et } \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \left(\frac{\ln(x)}{x-1} \right)^2$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{x-1} \right)^2 = 1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1$$

D'où la fonction f est dérivable en 1, et que : $f'(1) = 1$

2) Calcul de $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\bullet \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x))^2 = +\infty,$$

$$\text{et comme : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-1} = -1$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x-1} = -\infty \text{ c'est-à-dire : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\bullet \text{ Soit } x \in]1; +\infty[, \text{ on a : } f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x} \times \left(\frac{x}{x-1} \right)$$

$$\text{et } \frac{\ln^2(x)}{x} = \left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \right)^2 = \left(\frac{2 \ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^2$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln t}{t} \right)^2 = 0$$

(en posant $t = \sqrt{x}$; $x \rightarrow +\infty \iff t \rightarrow +\infty$)

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x)}{x} = 0, \text{ et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x)}{x} \times \left(\frac{x}{x-1} \right) = 0 \text{ c'est-à-dire : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

3) a- Montrons que $(\forall x \in]0; +\infty[- \{1\}); f'(x) = \frac{\ln(x)}{x(x-1)^2} \times g(x)$:

La fonction f est dérivable en tout point de $]0; +\infty[- \{1\}$

Pour tout $x \in]0; +\infty[- \{1\}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{2}{x}(x-1)\ln(x) - \ln^2(x)}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1)\ln(x) - x\ln^2(x)}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{\ln(x)(2x-2-x\ln(x))}{x(x-1)^2} = \frac{\ln(x)}{x(x-1)^2} \times g(x) \end{aligned}$$

b- Montrons que $f(\alpha) = 4\left(\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\right)$:

On a : $f(\alpha) = \frac{\ln^2(\alpha)}{\alpha-1}$, et $g(\alpha) = 0$

Or $g(\alpha) = 0 \iff -\alpha \ln(\alpha) + 2\alpha - 2 = 0$

$$\iff \ln(\alpha) = \frac{2(\alpha-1)}{\alpha}$$

Donc : $f(\alpha) = \frac{4(\alpha-1)^2}{\alpha^2} \times \frac{1}{\alpha-1} = 4\left(\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\right)$

c- Montrons que $f(\alpha) \in]0; 1[$:

On a : $4 < \alpha < 5$ équivaut à $3 < \alpha - 1 < 4$

Donc : $4\left(\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\right) > 0$ c'est-à-dire : $f(\alpha) > 0$

Et comme : $\frac{1}{\alpha^2} < \frac{1}{16}$ alors : $\frac{\alpha-1}{\alpha^2} < \frac{1}{4}$ c'est-à-dire : $\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2} < 1$

Ainsi : $f(\alpha) \in]0; 1[$

d- Montrons que f est strictement croissante sur $]0; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$:

On a : $(\forall x \in]0; +\infty[- \{1\}); f'(x) = \frac{\ln(x)}{x(x-1)^2} \times g(x)$

Alors le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)\ln(x)$ donc comme suit :

x	0	1	α	$+\infty$
$\ln(x)$	-	0	+	+
$g(x)$	-	0	+	-
$g(x)\ln(x)$	+	0	+	-

C'est-à-dire : $(\forall x \in]0; \alpha]); g(x)\ln(x) \geq 0$ et $(\forall x \in [\alpha; +\infty]); g(x)\ln(x) \leq 0$

Et on a : $f'(x) = 0 \iff x = \alpha$ et f est continue en 1.

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

III/ 1) Montrons que F est strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$:

La fonction F est une primitive de la fonction f sur $]0; +\infty[$, signifie que F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $(\forall x > 0); F'(x) = f(x)$

Et comme : • $f(x) = 0 \iff x = 1$

$$\bullet f(x) > 0 \iff x \in]1; +\infty[$$

$$\bullet f(x) < 0 \iff x \in]0; 1[$$

Alors : $(\forall x \in]0; 1]); F'(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [1; +\infty[); F'(x) \geq 0$

Donc la fonction F est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0; 1]$.

2) Montrons que $(\forall x \in]0; \alpha]); F(x) \geq x$:

On considère la fonction φ définie sur $]0; \alpha]$ par : $\varphi(x) = F(x) - x$

La fonction φ est dérivable sur $]0; \alpha]$ et que :

$$(\forall x \in]0; \alpha]); \varphi'(x) = F'(x) - 1 = f(x) - 1$$

Et comme f est strictement croissante sur $]0; \alpha]$ alors :

$$(\forall x \in]0; \alpha]); f(x) \leq f(\alpha)$$

Or $f(\alpha) \in]0; 1[; f(x) < 1$ pour tout $x \in]0; \alpha]$

Par suite : $(\forall x \in]0; \alpha]); \varphi'(x) < 0$

Donc la fonction φ est strictement décroissante sur $]0; \alpha]$.

Il s'ensuit que : $(\forall x \in]0; \alpha]); \varphi(x) \geq \varphi(\alpha)$

Or $\varphi(\alpha) = F(\alpha) - \alpha = 0$ (car $F(\alpha) = \alpha$)

Ainsi : $(\forall x \in]0; \alpha]); F(x) \geq x$

3) Montrons que $(\exists c \in]1; \alpha]); \alpha - F(1) = f(c)(\alpha - 1)$:

La fonction F est dérivable $]0; +\infty[$ et $[1; \alpha] \subset]0; +\infty[$

alors : la fonction F est continue sur $[1; \alpha]$ et dérivable sur $]1; \alpha[$.

Donc, d'après le théorème des accroissements finis :

$$(\exists c \in]1; \alpha]); F(\alpha) - F(1) = (\alpha - 1)F'(c)$$

Comme : $F(\alpha) = \alpha$ et $F'(c) = f(c)$

Alors : $(\exists c \in]1; \alpha[); \alpha - F(1) = (\alpha - 1)f(c)$

4) a- Montrons, par récurrence, que $(\forall n \in \mathbb{N}); c \leq u_n \leq \alpha$:

• **Initialisation :**

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = c$ et $c \in]1; \alpha[$, alors : $c \leq u_0 < \alpha$

Donc : $c \leq u_0 \leq \alpha$

• **Hérédité :**

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $c \leq u_n \leq \alpha$, montrons que $c \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

La fonction F est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et $[c; \alpha] \subset [1; +\infty[$ (car $c \in]1; \alpha[$),

donc : $c \leq u_n \leq \alpha \Rightarrow F(c) \leq F(u_n) \leq F(\alpha)$
 $\Rightarrow c \leq u_{n+1} \leq \alpha$

car $F(\alpha) = \alpha$ et $F(c) \geq c$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); c \leq u_n \leq \alpha \Rightarrow c \leq u_{n+1} \leq \alpha$

• **Conclusion :**

D'après le principe de récurrence; on a : $(\forall n \in \mathbb{N}); c \leq u_n \leq \alpha$

b- Montrons que la suite (u_n) est croissante :

On a : $\forall x \in]0; \alpha[; F(x) \geq x$ et $u_n \in [0; \alpha]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); F(u_n) \geq u_n$

C'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \geq u_n$ signifie que la suite (u_n) est croissante.

Déduction : La suite (u_n) est croissante et majorée par le réel α , donc elle est convergente.

c- Montrons que $(\forall (x; y) \in ([c; \alpha])^2); |F(x) - F(y)| \leq f(\alpha)|x - y|$:

Puisque la fonction F est continue et dérivable sur $[c; \alpha]$ (car $[c; \alpha] \subset]0; +\infty[$).

Alors elle est continue et dérivable sur chaque segment $[x; y]$ ou $[y; x]$ (où x et y sont deux éléments de $[c; \alpha]$).

Donc : d'après le théorème des accroissements finis,

on a : il existe un réel d compris entre x et y tel que :

$$F(x) - F(y) = (x - y)F'(d)$$

Par suite : $(\exists d \in]c; \alpha[); F(x) - F(y) = (x - y)f(d)$

Il s'ensuit que : $(\exists d \in]c; \alpha[); |F(x) - F(y)| = |x - y| f(d)$

(car $(\forall x \in [1; +\infty[); f(x) \geq 0$)

Et on a : $d \leq \alpha \Rightarrow f(d) \leq f(\alpha)$. Alors : $|x - y| f(d) \leq |x - y| f(\alpha)$

Donc : $|F(x) - F(y)| \leq |x - y| f(\alpha)$

Ainsi : $(\forall (x; y) \in ([c; \alpha])^2); |F(x) - F(y)| = |x - y| f(\alpha)$

d- Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq (f(\alpha))^n (\alpha - c)$:

En prenant : $x = u_n$ et $y = \alpha$, on obtient alors :

$$|F(u_n) - F(\alpha)| \leq |u_n - \alpha| f(\alpha)$$

Comme : $F(u_n) = u_{n+1}$; $F(\alpha) = \alpha$ et $|u_n - \alpha| = \alpha - u_n$

Alors : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq |u_n - \alpha| f(\alpha)$

• Par récurrence montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq (f(\alpha))^n (\alpha - c)$

• Initialisation :

Pour $n = 0$, on a : $|u_0 - \alpha| = |c - \alpha| = \alpha - c$ et

$$(f(\alpha))^0 (\alpha - c) = 1 \times (\alpha - c) = \alpha - c$$

Donc : $|u_n - \alpha| \leq (f(\alpha))^0 (\alpha - c)$

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $|u_n - \alpha| \leq (f(\alpha))^n (\alpha - c)$

et montrons que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq (f(\alpha))^{n+1} (\alpha - c)$

On a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq |u_n - \alpha| \times f(\alpha)$ et $|u_n - \alpha| f(\alpha) \leq (f(\alpha))^{n+1} (\alpha - c)$

Donc : $|u_{n+1} - \alpha| \leq (f(\alpha))^{n+1} (\alpha - c)$

• Conclusion :

D'après le principe de récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq (f(\alpha))^n (\alpha - c)$

• Dédution :

Comme $|f(\alpha)| < 1$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(\alpha))^n = 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq (f(\alpha))^n (\alpha - c)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(\alpha))^n (\alpha - c) = 0$

Ainsi, d'après les critères de convergence :

La suite (u_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 28

1) a- Montrons que la fonction f_n est dérivable à droite en 0

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2

On a : $f_n(x) = x^n \cdot \ln(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$ et $f_n(0) = 0$

$$\text{Donc : } \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = x^{n-1} \cdot \ln(x)$$

$$\text{Et comme } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{n-1} \cdot \ln(x) = 0 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = 0$$

c'est-à-dire la fonction f_n est dérivable à droite en 0 et que $(f_n)'_d(0) = 0$

b- • Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \cdot \ln(x) = +\infty$$

$$\text{c'est-à-dire } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-1} \cdot \ln(x) = +\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-1} = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

• Interprétation graphique

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = +\infty$, alors la courbe (C_n) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

2) • Calcul de $f'_n(x)$ où $x \in]0; +\infty[$:

La fonction f_n est dérivable sur $]0; +\infty[$, en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$, qui sont $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \ln(x)$

$$\text{Et on a : } (\forall n \in]0; +\infty[) ; f'_n(x) = nx^{n-1} \cdot \ln(x) + x^{n-1}$$

• Signe de $f'_n(x)$ pour $x > 0$:

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $f'_n(x) = nx^{n-1} \cdot \left(\ln(x) + \frac{1}{n}\right)$, donc :

$$\bullet f'_n(x) = 0 \iff x = e^{-\frac{1}{n}} \quad \bullet f'_n(x) > 0 \iff x \in]e^{-\frac{1}{n}}; +\infty[$$

$$\bullet f'_n(x) < 0 \iff x \in]0; e^{-\frac{1}{n}}[$$

• Tableau de variations de f_n :

x	0	$e^{-\frac{1}{n}}$	1	x_n	$+\infty$
$f'_n(x)$	0	-	0	+	
f_n	0	$\searrow$	$-\frac{1}{ne}$	$\nearrow$	$+\infty$

b- Positon relative de (C_n) et (C_{n+1}) :

Soit $n \geq 2$ et $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} \cdot \ln(x) - x^n \cdot \ln(x) = x^n \cdot \ln(x)(x - 1)$$

Donc le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ est celui de $\ln(x)(x - 1)$ sur $]0; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$		0	+
$x - 1$		0	+
$(x - 1) \ln(x)$		0	+

Par suite : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$

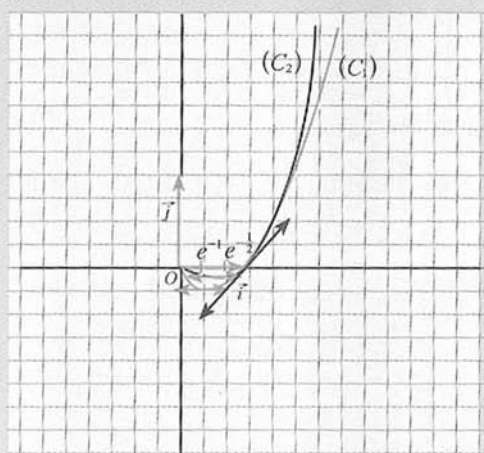
et $f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$

Ainsi la courbe (C_{n+1}) se trouve en dessous de la courbe (C_n) sur $]0; +\infty[$, et se coupent en O et $A(1;0)$

• La tangente au point $A(1;0)$ a pour équation : $y = x - 1$

• La demi-tangente au point O a pour équation: $\begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

• Courbe (C_1) et (C_2)



3) a- Montrons que : $(\forall n \geq 2)(\exists ! x_n \in]0; +\infty[) ; f_n(x_n) = 1$

La fonction f_n est continue et strictement décroissante sur $[0; e^{-\frac{1}{n}}]$ donc

$$f\left([0; e^{-\frac{1}{n}}]\right) = \left[-\frac{1}{ne}, 0\right]$$

il s'ensuit que $(\forall x \in [0; e^{-\frac{1}{n}}]) ; f_n(x) \leq 0$

Par conséquent l'équation $f_n(x) = 1$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[0; e^{-\frac{1}{n}}]$

D'autre part la fonction f_n est continue et strictement croissante sur $]e^{-\frac{1}{n}}; +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]e^{-\frac{1}{n}}; +\infty[$ sur $f(]e^{-\frac{1}{n}}; +\infty[) =]-\frac{1}{ne}; +\infty[$

Puisque : $1 \in]-\frac{1}{ne}; +\infty[$ alors $(\exists! x_n \in]e^{-\frac{1}{n}}; +\infty[) ; f_n(x_n) = 1$

Ainsi : $(\forall n \geq 2)(\exists! x_n \in]0; +\infty[) ; f_n(x_n) = 1$

b- Montrons que : $(\forall n \geq 2) ; f_{n+1}(x_n) > 1$

Soit $n \geq 2$; on a : $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} \cdot \ln(x_n) = x_n \cdot x_n^n \cdot \ln(x_n) = x_n \cdot f(x_n) = x_n$

Et comme $f_n(1) < f_n(x_n)$ alors $x_n > 1$, (car la fonction f est strictement croissante sur $]e^{-\frac{1}{n}}; +\infty[$)

Donc $f_{n+1}(x_n) > 1$ pour tout $n \geq 2$

c- • Dédution :

Soit $n \geq 2$; on a : $f_{n+1}(x_n) > 1$ et $f_{n+1}(x_{n+1}) = 1$ donc :

$f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$. Et comme la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $]e^{-\frac{1}{n+1}}; +\infty[$, alors : $x_n > x_{n+1}$

Ainsi : $(\forall n \geq 2) ; x_{n+1} < x_n$

c'est-à-dire la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante

• Convergence de la suite $(x_n)_{n \geq 2}$:

La suite (x_n) est décroissante minorée par la réel 1, donc elle est convergente

4) a- Montrons que : $(\forall n \geq 2) ; b_n \cdot \ln(b_n) = n$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on a :

$$b_n = x_n^n \text{ alors } \ln(b_n) = \ln(x_n^n) = n \ln(x_n)$$

$$\text{Or } f(x_n) = 1 \iff x_n^n \cdot \ln(x_n) = 1$$

$$\iff b_n \cdot \ln(b_n) = 1$$

Donc $b_n \cdot \ln(b_n) = n$ pour tout entier naturel $n \geq 2$

b- Montrons que : $(\forall x \in [1; +\infty[) ; x - 1 \leq x \ln(x)$

On considère la fonction φ définie sur $[1; +\infty[$ par : $\varphi(x) = x \cdot \ln(x) - x + 1$

La fonction φ est dérivable sur $[1; +\infty[$, et que : $(\forall x \geq 1) ; \varphi'(x) = \ln(x)$

Donc : $(\forall x \geq 1) ; \varphi'(x) \geq 0$

Par suite la fonction φ est croissante sur $[1; +\infty[$

D'où : $(\forall x \geq 1) ; \varphi(x) \geq \varphi(1)$

Et comme $\varphi(1) = 0$ alors $\varphi(x) \geq 0$ pour tout réel $x \geq 1$

Ainsi : $(\forall x \in [1; +\infty[) ; x - 1 \leq x \ln(x)$

c- **Déduction :**

Soit $n \geq 2$; on a $x_n > 1$ alors $x_n^n > 1$, c'est-à-dire : $b_n > 1$

Donc : $b_n - 1 \leq b_n \cdot \ln(b_n)$ d'après la question précédente

Et on a $b_n \cdot \ln(b_n) = n$ donc $b_n - 1 \leq n$

Il s'ensuit que : $1 < b_n \leq 1 + n$ pour tout entier naturel $n \geq 2$

5) a- Montrons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$

Soit $n \geq 2$, on a : $\sqrt[n]{n+1} = (n+1)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln(n+1)}$

Or $\frac{1}{n} \ln(n+1) = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+n)}{n} = 0$ par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n+1} = e^0 = 1$

b- Montrons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$

Soit $n \geq 2$; on a : $1 < b_n \leq n+1 \Rightarrow 1 < x_n \leq \sqrt[n]{n+1}$

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ alors, d'après les critères de convergence $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$

Exercice 29

1) a) Montrons que la fonction est continue à droite en $x_0 = 0$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $\ln x = 4 \ln(\sqrt[4]{x})$, donc :

$$f(x) = \sqrt{x} (\ln x)^2 = (\sqrt[4]{x} \ln(x))^2 = (4\sqrt[4]{x} \ln(\sqrt[4]{x}))^2$$

On pose : $t = \sqrt[4]{x}$, donc $x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$

Il s'ensuit $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[4]{x} \ln(\sqrt[4]{x}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0$

Par suite $\lim_{x \rightarrow 0^+} (4\sqrt[4]{x} \ln(\sqrt[4]{x}))^2 = 0$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (4 \cdot \sqrt[4]{x} \ln(\sqrt[4]{x}))^2 = 0$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ signifie que la fonction f est continue à droite en $x_0 = 0$

b- Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\ln x)^2 = +\infty$

c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} = \left(\frac{4 \ln(\sqrt[4]{x})}{\sqrt[4]{x}} \right)^2$

On pose $t = \sqrt[4]{x}$, donc $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$

Il s'ensuit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$

Par suite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4 \ln(\sqrt[4]{x})}{\sqrt[4]{x}} \right)^2 = 0$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4 \ln(\sqrt[4]{x})}{\sqrt[4]{x}} \right)^2 = 0$

• **Nature de la branche infinie :**

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ donc la courbe ($\mathcal{C}$) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2) a- • étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$:

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $f(0) = 0$ et $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} = 0$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} = +\infty$

signifie que la fonction f n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 0$

• **Interprétation géométrique :**

La courbe ($\mathcal{C}$) admet une demi-tangente verticale à droite en son point d'abscisse 0, dirigée vers le haut

b- • Montrons que f est dérivable sur $]0; +\infty[$

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$, en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ qui sont : $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \ln(x)$

• Montrons que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = \frac{\ln(x) \cdot (\ln(x) + 4)}{2\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^2 + \frac{2\sqrt{x}}{x} \ln x \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^2 + \frac{2}{\sqrt{x}} \ln x \\
 &= \frac{(\ln x)^2 + 4 \ln x}{2\sqrt{x}} \\
 &= \frac{\ln(x) \cdot (\ln x + 4)}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

c- Tableau de variations de f :

Le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln(x)(\ln(x) + 4)$ sur $]0; +\infty[$, alors :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \text{ ou } \ln x = -4$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = e^{-4}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -4 < \ln(x) < 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-4} < x < 1$$

par suite le tableau de variations de f est comme suit :

x	0	e^{-4}		1	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+
f	0	$\left(\frac{4}{e}\right)^2$		0	$+\infty$	

d- Montrons que : $(\forall x \in [0; 1]) ; 0 \leq f(x) \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2$

• La fonction f est croissante sur $[0; e^{-4}]$ donc :

$$0 \leq x \leq e^{-4} \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(e^{-4})$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2$$

• La fonction f est décroissante sur $[e^{-4}; 1]$ donc :

$$e^{-4} \leq x \leq 1 \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(e^{-4})$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2$$

Ainsi : $(\forall x \in [e^{-4}; 1]) ; 0 \leq f(x) \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2$

3) a- Montrons que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f''(x) = \frac{1}{4x\sqrt{x}}(8 - (\ln x)^2)$

$$\text{Soit } x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } f'(x) = \frac{\ln^2(x) + 4 \ln(x)}{2\sqrt{x}},$$

$$\begin{aligned}\text{alors : } f''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x} \left(\frac{2 \ln x}{x} + \frac{4}{x} \right) - \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln^2(x) + 4 \ln(x))}{x} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4 \ln(x) + 8 - \ln^2(x) - 4 \ln(x)}{2x\sqrt{x}} = \frac{8 - \ln^2(x)}{4x\sqrt{x}}\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } (\forall x \in]0; +\infty[) ; f''(x) = \frac{1}{4x\sqrt{x}} (8 - (\ln x)^2)$$

b- étude de la concavité de la courbe (C) :

$$\text{On a : } f''(x) = 0 \iff 8 - (\ln x)^2 = 0$$

$$\iff \ln(x) = 2\sqrt{2} \text{ ou } \ln(x) = -2\sqrt{2}$$

$$\iff x = e^{2\sqrt{2}} \text{ ou } x = e^{-2\sqrt{2}}$$

- $f''(x) > 0 \iff 8 - (\ln x)^2 > 0$
 $\iff -2\sqrt{2} < \ln x < 2\sqrt{2}$
 $\iff e^{-2\sqrt{2}} < x < e^{2\sqrt{2}}$
- $f''(x) < 0 \iff x \in]0; e^{-2\sqrt{2}}[\cup]e^{2\sqrt{2}}; +\infty[$

Par conséquent on a le tableau suivant :

x	0	$e^{-2\sqrt{2}}$	$e^{2\sqrt{2}}$	$+\infty$	
$f''(x)$	-	0	+	0	-
La concavité					

• **Les points d'inflexions de la courbe (C) :**

On a : $f''(x)$ s'annule en $e^{-2\sqrt{2}}$ et $e^{2\sqrt{2}}$ en changeant de signe, donc les points : $A(e^{-2\sqrt{2}}; 8e^{-\sqrt{2}})$ et $B(e^{2\sqrt{2}}; 8e^{\sqrt{2}})$ sont des points d'inflexion de (C)

4) a- La fonction g est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur l'intervalle $g([1; +\infty[)$ où $g([1; +\infty[) = [g(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[= [0; +\infty[$

Par conséquent g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $[0; +\infty[$

• Calcul de $(g^{-1})'(\sqrt{e})$

$$\text{On a : } g(e) = \sqrt{e} \text{ et } g'(e) = \frac{5}{2\sqrt{e}} \text{ donc : } (g^{-1})'(\sqrt{e}) = \frac{2\sqrt{e}}{5}$$

b- Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists ! \alpha_n \in]0; +\infty[) ; g^{-1}(\alpha_n) = \frac{1}{n} + e$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

La fonction g^{-1} est une bijection de $]0; +\infty[$ dans $]1; +\infty[$

Puisque : $\frac{1}{n} + e \in]1; +\infty[$ alors : $(\exists! \alpha_n \in]0; +\infty[) ; g^{-1}(\alpha_n) = \frac{1}{n} + e$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! \alpha_n \in]0; +\infty[) ; g^{-1}(\alpha_n) = \frac{1}{n} + e$

c- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $\frac{1}{n+1} + e < \frac{1}{n} + e$ c'est-à-dire : $g^{-1}(\alpha_{n+1}) < g^{-1}(\alpha_n)$,

puisque la fonction g^{-1} est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ alors

$$\alpha_{n+1} < \alpha_n$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_{n+1} < \alpha_n$ signifie que la suite (α_n) est strictement décroissante

Et comme la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est minorée par 0 donc elle est convergente

d- Montrons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \sqrt{e}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $g^{-1}(\alpha_n) = \frac{1}{n} + e$ donc $g\left(\frac{1}{n} + e\right) = \alpha_n$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n = g\left(\frac{1}{n} + e\right)$

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + e = e$ et la fonction g est continue en 2 alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(\frac{1}{n} + e\right) = g(e) = \sqrt{e}$$

Par conséquent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \sqrt{e}$

Exercice 30

1) a- Montrons que la fonction f est continue sur $[0; +\infty[$

• Continuité de la fonction f sur $]0; +\infty[$

La fonction $\ln$ est continue sur $]0; +\infty[$, donc la fonction $f :$

$x \mapsto x(1 + \ln^2(x))$ est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions continues sur $]0; +\infty[$

• Continuité de la fonction f à droite on a :

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $f(x) = x + x(\ln x)^2 = x + (2\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2$

On pose : $X = \sqrt{x}$, alors : $x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) = \lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln(X) = 0$ par suite $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2 = 0$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + (2\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2 = 0$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, c'est-à-dire la fonction f est continue à droite en 0

Par conséquent la fonction f est continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$

b- Étudions la dérivabilité de f à droite en 0

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 + \ln^2(x)$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \ln^2(x) = +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$, c'est-à-dire la fonction f n'est pas dérivable à droite en 0

• **Interprétation géométrique :**

La courbe (C) admet une demi-tangente verticale à droite en son point d'abscisse 0, dirigée vers le haut

c- Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \ln^2(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 + \ln^2(x)) = +\infty$ c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \ln^2(x) = +\infty$

• La nature de la branche infinie

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

2) a- • Montrons que f est dérivable sur $]0; +\infty[$

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ qui sont $x \mapsto x$ et $x \mapsto x \ln^2(x)$

• Montrons que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = (1 + \ln x)^2$

Soit $x \in]0; +\infty[$; on a :

$$f'(x) = 1 + \ln^2(x) + 2x \times \frac{1}{x} \ln(x) = 1 + \ln^2(x) + 2 \ln(x) = (1 + \ln(x))^2$$

Donc : $(\forall x > 0) ; f'(x) = (1 + \ln x)^2$

b- Dressons le tableau de variations de f :

On a : $f'(x) = 0 \iff \ln(x) + 1 = 0$

$$\iff x = e^{-1}$$

Et $(\forall x > 0) ; f'(x) \geq 0$

Donc le tableau de variations de f est comme suit :

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
f	0		

c- Une équation de la tangente (T) :

On a : $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$ donc une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $y = 1 \times (x - 1) + 1$

Ainsi : (T) : $y = x$

d- Montrons que : $f([e^{-1}; 1]) \subset [e^{-1}; 1]$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[e^{-1}; 1]$

Donc : $f([e^{-1}; 1]) = [f(e^{-1}); f(1)]$

Puisque : $f(1) = 1$ et $f(e^{-1}) = e^{-1} \times (1 + 1) = \frac{2}{e}$ et $\frac{1}{e} < \frac{2}{e}$

alors : $[\frac{2}{e}; 1] \subset [\frac{1}{e}; 1]$

D'où : $f([e^{-1}; 1]) \subset [e^{-1}; 1]$

3) • étudions la concavité de (C)

La fonction f est deux fois dérivables sur $]0; +\infty[$

Soit $x \in]0; +\infty[$; on a : $f'(x) = (1 + \ln x)^2$

Donc : $f''(x) = 2(1 + \ln x) \times \frac{1}{x} = \frac{2(1 + \ln x)}{x}$

Ainsi : $(\forall x > 0) ; f''(x) = \frac{2(1 + \ln x)}{x}$

Puisque le signe $f''(x)$ est celui de $1 + \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$ alors on a le tableau suivant :

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
Concavité			

• $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en e^{-1} donc le point $I(e^{-1}; \frac{2}{e})$ est un point d'inflexion de la courbe (C)

b- étude de la position (C) par rapport à (Δ)

Soit $x \in]0; +\infty[$; on a : $f(x) - x = x(1 + \ln^2(x)) - x = x \ln^2(x)$

Alors : $f(x) - x = 0 \iff x = 1$ ou $x = 0$

Et $(\forall x \in [0; +\infty[) ; f(x) \geq x$

Donc la courbe (C) se trouve au dessus de la droite (Δ)

4) a- Montrons que f admet une fonction réciproque :

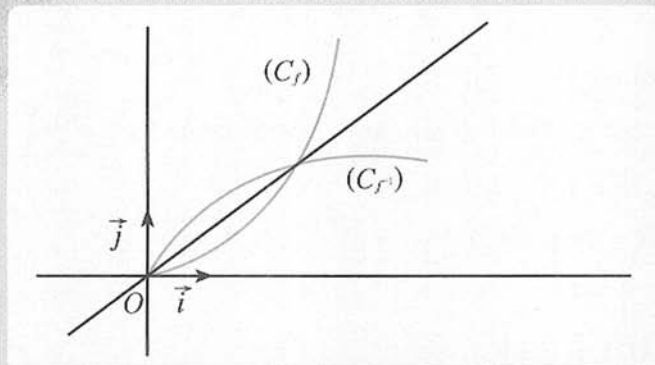
La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$

donc f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $f([0; +\infty[)$

où $f([0; +\infty[) = [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [0; +\infty[$

Ainsi f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0; +\infty[$

b- Tracé



5) Montrons que : $-1 + \ln^2(ea) < \frac{b \ln^2(b) - a \ln^2(a)}{b-a} < -1 + \ln^2(eb)$

La fonction f est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$

donc, d'après le théorème des accroissements finis, on a :

$(\exists c \in]a; b[) ; \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

Puisque $f(b) - f(a) = b + b \ln^2(b) - a - a \ln^2(a) = b - a + b \ln^2(b) - a \ln^2(a)$

alors $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 1 + \frac{b \ln^2(b) - a \ln^2(a)}{b - a}$

Et comme la fonction f' est strictement croissante sur $[a; b]$

alors $a < c < b \Rightarrow f'(a) < f'(c) < f'(b)$

Par suite $f'(a) < 1 + \frac{b \ln^2(b) - a \ln^2(a)}{b - a} < f'(b)$

équivalent à $-1 + f'(a) < \frac{b \ln^2(b) - a \ln^2(a)}{b - a} < -1 + f'(b)$

Et on a : $f'(a) = (1 + \ln(a))^2 = \ln^2(ea)$ et $f'(b) = \ln^2(eb)$

Ainsi : $-1 + \ln^2(ea) < \frac{b \ln^2(b) - a \ln^2(a)}{b - a} < -1 + \ln^2(eb)$

Initialisation :

II) 1) Montrons, par récurrence, que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; e^{-1} \leq u_n < 1$

- Pour $n = 0$, on a : $u_0 = e^{-1}$ et $e^{-1} \leq e^{-1} < 1$ donc : $e^{-1} \leq u_0 < 1$
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $e^{-1} \leq u_n < 1$ et montrons que $e^{-1} \leq u_{n+1} < 1$

Hérédité :

On a : $u_n \in [e^{-1}; 1[$ et $f([e^{-1}; 1[) \subset [e^{-1}; 1[$ donc $f(u_n) \in [e^{-1}; 1[$ ainsi $e^{-1} \leq u_{n+1} < 1$

- Conclusion : D'après le principe de récurrence on a :
 $(\forall n \in \mathbb{N}) ; e^{-1} \leq u_n < 1$

2) Montrons que la suite (u_n) est strictement croissante :

On a : $(\forall x \in [e^{-1}; 1[) ; f(x) > x$

Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; f(u_n) > u_n$ (car $u_n \in [e^{-1}; 1[$)

c'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} > u_n$

Signifie que la suite (u_n) est strictement croissante

Déduction : La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, donc elle est convergente

3) Montrons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

La fonction f est continue sur $[e^{-1}; 1]$ telle que $f([e^{-1}; 1]) \subset [e^{-1}; 1]$ et $u_0 \in [e^{-1}; 1]$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$. Comme la suite (u_n) est convergente

alors sa limite ℓ vérifie : $f(\ell) = \ell$ et $\ell \in [e^{-1}; 1]$

Or $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell = 1$. Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Exercice 31

Partie 1 :

1) Montrons que f est continue sur $] -1; +\infty[$ où $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

La fonction f est continue sur les intervalles $] -1; 0[$ et $] 0; +\infty[$ en tant que produit de deux fonctions continues en tout point de $] -1; +\infty[- \{0\}$ qui sont $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \ln(1+x)$

Et on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ signifie que la fonction f est continue en 0

Finalement la fonction f est continue sur $]-1; +\infty[$

2) a- • Montrons que la fonction g est dérivable sur I

La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur l'intervalle $]-1; +\infty[$

Et comme $[-|k|; |k|] \subset]-1; +\infty[$ (car $[-|k|; |k|] \subset [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$)

Alors elle est dérivable sur I

Par suite la fonction g est dérivable sur I en tant que somme de deux fonctions dérivables sur I

• Montrons que : $(\forall x \in I) ; g'(x) = \frac{x^2}{1+x}$

On a : $(\forall x \in I) ; g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{1 + (x-1)(1+x)}{x+1} = \frac{x^2}{1+x}$

b- Déduisons que : $(\forall x \in I) ; |g'(x)| \leq 2k^2$

Soit $x \in I$; on a : $|g'(x)| = \left| \frac{x^2}{1+x} \right| = \frac{x^2}{|1+x|}$

comme $x \in I \Leftrightarrow |x| \leq |k|$ alors $x^2 \leq k^2$

Et on a : $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x+1 \leq \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} \leq 2$$

Donc : $\frac{x^2}{|1+x|} = \frac{x^2}{1+x} \leq 2k^2$ c'est-à-dire $|g'(x)| \leq 2k^2$

Ainsi : $(\forall x \in I) ; |g'(x)| \leq 2k^2$

c- Montrons que : $\left| \ln(1+k) - k + \frac{k^2}{2} \right| \leq 2|k^3|$

k étant un réel non nul tel que $|k| \leq \frac{1}{2}$

La fonction g est continue sur $[0; k]$ (ou sur $[k; 0]$) et dérivable sur $]0; k[$ telle

que : $(\forall x \in I) ; |g'(x)| \leq 2k^2$

Donc; d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|g(k) - g(0)| \leq |k - 0| \times 2k^2$$

c'est-à-dire $\left| \ln(1+k) - k + \frac{k^2}{2} \right| \leq 2|k^3|$

3) Montrons que f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$

Soit $x \in]-1; +\infty[$ et $x \neq 0$, on a : $f(0) = 1$

$$\text{et } \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

Pour $|x| \leq \frac{1}{2}$ et $x \neq 0$, on a d'après la question précédente :

$$\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq 2|x|^3 \text{ par suite } \left| \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} + \frac{1}{2} \right| \leq 2|x|$$

b- La fonction f est dérivable en tout point de $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[) ; f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$$

$$\text{Or } (\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[) ; \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) < 0$$

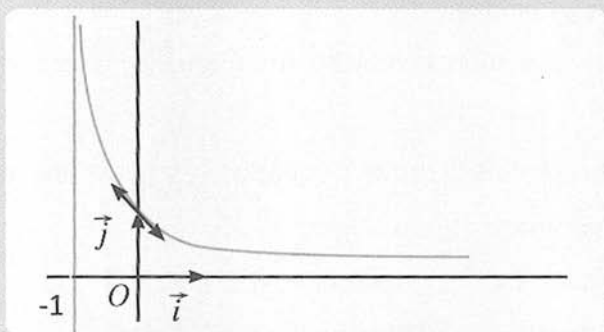
$$\text{Donc } (\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[) ; f'(x) < 0$$

Par conséquent la fonction f est strictement décroissante sur $]-1; +\infty[$

D'où le tableau de variations de f est comme suit :

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$
f	$+\infty$	0

6) Le tracé



Partie 2 :

1) Montrons que : $(\forall t \in]-1; +\infty[) ; (1+t)^n \geq 1+nt$:

On considère la fonction φ définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$\varphi(t) = (1+t)^n - 1 - nt$$

La fonction φ est dérivable sur $]-1; +\infty[$ et que :

$$(\forall t > -1) ; \varphi'(t) = n(1+t)^{n-1} - n = n[(1+t)^{n-1} - 1]$$

$$\text{Puisque : } \bullet \varphi'(t) = 0 \iff t = 0$$

$$\bullet \varphi'(t) > 0 \iff t > 0$$

$$\bullet \varphi'(t) < 0 \iff -1 < t < 0$$

Alors la fonction φ est croissante sur $[0; +\infty[$ et décroissante sur $]-1; 0]$

$$\text{Donc : } (\forall t \in [0; +\infty[) ; \varphi(t) \geq \varphi(0)$$

Et $(\forall t \in]-1; 0]) ; \varphi(t) \geq \varphi(0)$

D'où : $(\forall t \in]-1; +\infty[) ; \varphi(t) \geq 0$ (car $\varphi(0) = 0$)

Ainsi : $(\forall t \in]-1; +\infty[) ; (1+t)^n \geq 1+nt$

2) a- Montrons que : $(\forall n \geq 2) ; \ln(u_n) = f\left(\frac{1}{n}\right)$

Soit $n \geq 2$; on a : $\ln(u_n) = \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$\text{Or : } f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{Donc : } \ln(u_n) = f\left(\frac{1}{n}\right)$$

b- Montrons que la suite (u_n) est croissante

$$\text{Soit } n \geq 2 ; \text{ on a : } n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{n+1}\right) > f\left(\frac{1}{n}\right)$$

car la fonction f est strictement décroissante sur $] -1; +\infty[$

$$\text{Donc : } \ln(u_{n+1}) > \ln(u_n) \Rightarrow u_{n+1} > u_n$$

$$\text{Ainsi : } (\forall n \geq 2) ; u_n \leq u_{n+1}$$

signifie que la suite (u_n) est croissante

c- Montrons que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est décroissante

$$\text{Soit } n \geq 2 ; \text{ on a : } v_n > 0$$

$$\text{et } \ln(v_n) = \ln\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}\right) = -n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n}} = f\left(-\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{Et comme : } n+1 > n \Rightarrow -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{n}\right) > f\left(-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\text{Alors } \ln(v_n) > \ln(v_{n+1}), \text{ d'où } v_n \geq v_{n+1} \text{ pour tout } n \geq 2$$

signifie que la suite (v_n) est décroissante

Et puisque qu'elle minorée par 0, alors elle est convergente

3) a- Montrons que : $(\forall n \geq 2) ; 0 \leq v_n - u_n \leq \frac{v_n}{n}$

$$\text{Soit } n \geq 2 ; \text{ on a :}$$

$$v_n - u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right) = v_n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n\right)$$

$$\text{Puisque } 1 - \frac{1}{n^2} \leq 1 \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

Alors $v_n \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n\right) \geq 0$ c'est-à-dire $0 \leq v_n - u_n$

D'autre part on a : $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n}$, d'après la partie 2 question 1)

Donc : $1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq \frac{1}{n}$ par suite $v_n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n\right) \leq \frac{v_n}{n}$

c'est-à-dire $v_n - u_n \leq \frac{v_n}{n}$

D'où : $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{v_n}{n}$

Ainsi : $(\forall n \geq 2) ; 0 \leq v_n - u_n \leq \frac{v_n}{n}$

b- Dédution :

On a : $(\forall n \geq 2) ; 0 \leq v_n - u_n \leq \frac{v_n}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} = 0$ (car (v_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$) donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$

Et comme la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante

Alors les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes

Par conséquent elles sont convergentes et ont la même limite

4) a- Montrons que : $L \geq \frac{9}{4}$

La suite (u_n) est croissante, donc $u_2 \leq u_n$ pour tout $n \geq 2$

$$\text{Or } u_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Par suite $\frac{9}{4} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, c'est-à-dire $L \geq \frac{9}{4}$

b- Déterminons la valeur de L

On a : $(\forall n \geq 2) ; \ln(u_n) = f\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

et puisque la fonction f est continue en 0 alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) = 1$, par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = 1$

Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$, c'est-à-dire : $L = e$

Exercice 32

Partie 1 :

1) a- Montrons que g est continue à droite en $-\frac{1}{2}$:

Soit $x \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$, on a : $g(x) = 2x - (1 + 2x) \ln(1 + 2x)$

On pose : $X = 1 + 2x$, donc $x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+ \iff X \rightarrow 0^+$

Par suite $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} (1 + 2x) \ln(1 + 2x) = \lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln(X) = 0$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} (2x - (1+2x)\ln(1+2x)) = -1$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} g(x) = g(-\frac{1}{2})$, signifie que la fonction g est continue à droite en $-\frac{1}{2}$

b- Étudions la dérivabilité de g à droite en $-\frac{1}{2}$:

Soit $x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[$, on a :

$$\frac{g(x) - g(-\frac{1}{2})}{x + \frac{1}{2}} = \frac{2x + 1 - (1+2x)\ln(1+2x)}{\frac{1}{2}(2x+1)} = 2(1 - \ln(1+2x))$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} 1+2x = 0^+$ et $\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \ln(1+2x) = -\infty$

Par suite $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} 2(1 - \ln(1+2x)) = +\infty$

$$\text{c'est-à-dire } \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \frac{g(x) - g(-\frac{1}{2})}{x + \frac{1}{2}} = +\infty$$

signifie que g n'est pas dérivable à droite en $-\frac{1}{2}$

Interprétation géométrique : La courbe (C) admet une demi-tangente verticale à droite en son point d'abscisse $-\frac{1}{2}$, dirigée vers le haut

c- Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$:

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $g(x) = x(2 - (\frac{1}{x} + 2)\ln(1+2x))$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \frac{1}{x}) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2x) = +\infty$ alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - (2 + \frac{1}{x})\ln(1+2x) = -\infty \text{ par suite } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - (2 + \frac{1}{x})\ln(1+2x) = -\infty$$

Interprétation graphique : On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -\infty$

Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

2) a- • Montrons que g est dérivable sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$:

La fonction $u : x \mapsto 1+2x$ est dérivable et strictement positive sur

$$]-\frac{1}{2}; +\infty[$$

alors la fonction $(\ln \circ u)$ est dérivable sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$

Donc la fonction $f : x \mapsto 2x - (1 + 2x)\ln(1 + 2x)$ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables

• Calcul de $g'(x)$ où $x > -\frac{1}{2}$:

Soit $x \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2x - (1 + 2x)\ln(1 + 2x))' = 2 - 2\ln(1 + 2x) - (1 + 2x) \times \frac{2}{1 + 2x} \\ &= -2\ln(1 + 2x) \end{aligned}$$

Ainsi : $(\forall x \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[) ; g'(x) = -2\ln(1 + 2x)$

b- Tableau de variations de g :

• Signe de $g'(x)$:

Soit $x > -\frac{1}{2}$; on a :

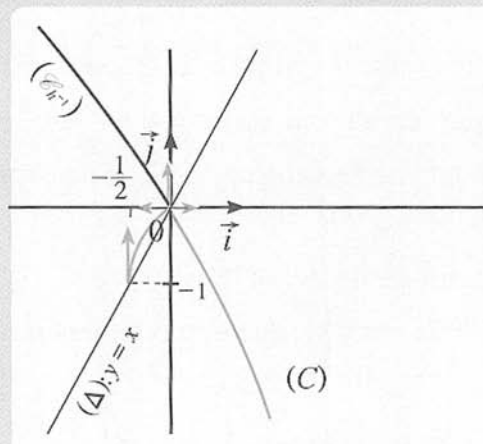
$$\begin{aligned} \bullet \quad g'(x) = 0 &\Leftrightarrow \ln(1 + 2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad g'(x) > 0 &\Leftrightarrow \ln(1 + 2x) < 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < 1 + 2x < 1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 0 \end{aligned}$$

Donc le tableau de variations de g est :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$	$+\infty$	+	0	-	
g	-1	$\nearrow$		0	$\searrow -\infty$

c- La tracé



3) a- Montrons que h est une bijection de $]0; +\infty[$ vers $]-\infty; 0]$

La fonction h est la restriction de g sur $]0; +\infty[$, donc h est une fonction continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

Par conséquent elle réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers

$$h([0; +\infty[) = \bigcup_{x \rightarrow +\infty} \lim h(x); h(0) =]-\infty; 0]$$

b- Montrons que h^{-1} est dérivable sur $]-\infty; 0[$:

La fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$ telle que $h'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$, donc la fonction h^{-1} est dérivable sur $h([0; +\infty[) =]-\infty; 0[$

c- Étude de la dérivabilité de h^{-1} à gauche en 0 :

$$\text{Soit } x \in]-\infty; 0[; \text{ on a : } h^{-1}(0) = 0 \text{ et } \frac{h^{-1}(x) - h^{-1}(0)}{x - 0} = \frac{h^{-1}(x)}{x}$$

On pose : $t = h^{-1}(x)$ équivaut à $x = h(t)$

$$\text{Et on a : } x \rightarrow 0^- \iff t \rightarrow 0^+ (x < 0 \implies h^{-1}(x) > h^{-1}(0))$$

$$\text{Par suite : } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h^{-1}(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{h(t)} = -\infty \text{ (car } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h(t)}{t} = 0 \text{ et } \frac{h(t)}{t} < 0)$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h^{-1}(x) - h^{-1}(0)}{x - 0} = -\infty$ signifie que h^{-1} n'est pas dérivable à gauche en 0

d- Le tracé: voir figure précédente ((c_h) et $c_{h^{-1}}$ sont symétrique par rapport à la droite $(\Delta): y = x$)

4) a- Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! \alpha_n \in]-\infty; 0[)$ tel que : $h^{-1}(\alpha_n) = \frac{1}{n}$

La fonction h^{-1} est une bijection de $]-\infty; 0[$ dans $]0; +\infty[$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $\frac{1}{n} \in]0; +\infty[$ donc, il existe un unique réel α_n de $]-\infty; 0[$ tel que $h^{-1}(\alpha_n) = \frac{1}{n}$

$$\text{Ainsi : } (\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! \alpha_n \in]-\infty; 0[) \text{ tel que : } h^{-1}(\alpha_n) = \frac{1}{n}$$

b- La monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$:

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*; \text{ on a : } n+1 > n \implies \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$\text{Et comme } h^{-1}(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \text{ et } h^{-1}(\alpha_n) = \frac{1}{n} \text{ alors } h^{-1}(\alpha_{n+1}) < h^{-1}(\alpha_n)$$

Puisque la fonction h est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{alors : } h^{-1}(\alpha_{n+1}) < h^{-1}(\alpha_n) &\implies h(h^{-1}(\alpha_{n+1})) > h(h^{-1}(\alpha_n)) \\ &\implies \alpha_{n+1} > \alpha_n \end{aligned}$$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n < \alpha_{n+1}$

signifie que la suite (α_n) est strictement croissante

- Convergence de $(\alpha_n)_{n \geq 1}$

La suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est croissante et majorée par 0, donc elle est convergente

c- Calcul de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $h^{-1}(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ équivaut à $\alpha_n = h\left(\frac{1}{n}\right)$

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et la fonction h est continue en 0

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} h\left(\frac{1}{n}\right) = h(0) = 0$. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$

Partie 2 :

1) Montrons que f est continue en 0 :

Soit $x \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et $x \neq 0$, on a : $f(x) = 2 \times \frac{\ln(1+2x)}{2x}$

On pose : $X = 2x$, donc $x \rightarrow 0$ équivaut à $X \rightarrow 0$

Alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \times \frac{\ln(1+2x)}{2x} = 2 = f(0)$

c'est-à-dire la fonction f est continue en 0

2) a- On a : $a \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[- \{0\}$ et

$\left(\forall x \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[; h_a(x) = (\ln(1+2a) - 2a) \cdot x^2 - (\ln(1+2x) - 2x) \cdot a^2\right.$

- Calcul de $h_a(0)$ et $h_a(a)$:

On a : $h_a(0) = (\ln(1+2a) - 2a) \times 0 - (\ln(1) - 0) \times a^2 = 0$

et $h_a(a) = (\ln(1+2a) - 2a) \times a^2 - (\ln(1+2a) - 2a) \times a^2 = 0$

Donc : $h_a(0) = h_a(a) = 0$

- Montrons qu'il existe un réel b compris entre a et 0

tel que : $\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$

La fonction h_a est continue sur $[0; a]$ (ou sur $[a; 0]$) et dérivable sur $]0; a[$ (ou sur $]a; 0[$) telle que $h_a(0) = h_a(a)$

Donc, d'après le théorème de Rolle :

Il existe un réel b compris strictement entre 0 et a tel que $h'_a(b) = 0$

$$\begin{aligned}\text{Or : } (\forall x \in I) ; h'_a(x) &= 2x(\ln(1+2a) - 2a) - \left(\frac{2}{1+2x} - 2\right)a^2 \\ &= 2x(\ln(1+2a) - 2a) + \frac{4a^2x}{1+2x}\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } h_a(b) = 0 \iff \ln(1+2a) - 2a = \frac{-2a^2}{1+2b} \quad (\text{car } b \neq 0)$$

$$\iff \frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$$

Ainsi, il existe un réel b compris strictement entre 0 et a tel que :

$$\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$$

b-Déduction

Soit x un élément de $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et $x \neq 0$, on a : $f(0) = 2$

$$\text{et } \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} \left(\frac{\ln(1+2x)}{x} - 2 \right) = \frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2}$$

$$\bullet \text{ Si } x \in]0; +\infty[\text{ alors } (\exists b \in]0; x[) \text{ tel que : } \frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} = \frac{-2}{1+2b}$$

Comme $0 < b < x \iff 1 < 1+2b < 1+2x$ (d'après la question précédente)

$$\iff -2 < \frac{-2}{1+2b} < \frac{-2}{1+2x}$$

$$\text{Alors : } (\forall x > 0) ; -2 < \frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} < \frac{-2}{1+2x}$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-2}{1+2x} \right) = -2, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} = -2$$

c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2$, signifie que f est dérivable à droite en 0

$$\text{et } f'_d(0) = -2$$

$$\bullet \text{ Si } x \in \left]-\frac{1}{2}; 0\right[\text{ alors : } (\exists b \in]x; 0[) \text{ tel que : } \frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} = \frac{-2}{1+2b}$$

Comme $x < b < 0 \iff 0 < 1+2x < 1+2b < 1$

$$\iff \frac{-2}{1+2x} < \frac{-2}{1+2b} < -2$$

$$\text{Ainsi : } \left(\forall x \in \left]-\frac{1}{2}; 0\right[\right) \frac{-2}{1+2x} < \frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} < -2$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{-2}{1+2x} \right) = -2, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} = -2$$

c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2$, signifie que la fonction f est dérivable à

gauche en 0 et $f'_g(0) = -2$

Par conséquent la fonction f est dérivable à droite et à gauche en 0 avec

$$f'_g(0) = f'_d(0) = -2$$

D'où la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = -2$

3) a- • Montrons que f est dérivable en tout $x \in I - \{0\}$

La fonction $u : x \mapsto 1 + 2x$ est dérivable et strictement positive sur les deux intervalles $]-\frac{1}{2}; 0[$ et $]0; +\infty[$, par suite la fonction $(\ln \circ u)$ est dérivable en tout point de $I - \{0\}$

Donc la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(1+2x)}{x}$ est dérivable sur les intervalles $]-\frac{1}{2}; 0[$ et $]0; +\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables en tout point de $I - \{0\}$, qui sont $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \ln(1+2x)$

• Montrons que : $(\forall x \in I - \{0\}) ; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$

Soit $x \in I - \{0\}$; on a :

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(1+2x)}{x} \right)' = \frac{\frac{2x}{1+2x} - \ln(1+2x)}{x^2} = \frac{2x - (1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}$$

Ainsi : $(\forall x \in I - \{0\}) ; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$

• Calcul de $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

On a : $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} (1+2x) = 0^+$ et $\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \ln(1+2x) = -\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \frac{\ln(1+2x)}{x} = +\infty$; c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} f(x) = +\infty$

Et pour $x > 0$; on a : $f(x) = \frac{\ln\left(x\left(\frac{1}{x} + 2\right)\right)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(\frac{1}{x} + 2\right)}{x}$

Et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x} + 2\right)}{x} = 0$

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

• **Interprétation graphique :**

On a : $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est une asymptote verticale à la courbe (Γ)

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe (Γ) au voisinage de $+\infty$

b- Tableau de variations de f

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ sur $I - \{0\}$, et on a :

$$(\forall x \in I - \{0\}) ; g(x) < 0$$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$

D'où le tableau de variations de f est :

x	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	0

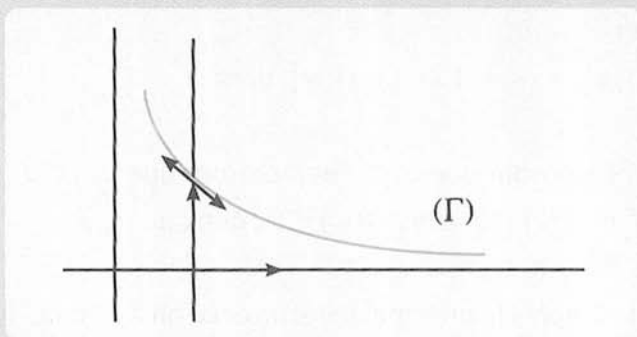
c- Montrons que : $(\exists ! \alpha \in [1; 2]) ; f(\alpha) = 1$

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1; 2]$

Et on a $f(1) = \ln(3)$ et $f(2) = \frac{\ln(5)}{2}$ et comme $3 > e \Rightarrow \ln(3) > 1$ et $5 < e^2 \Rightarrow \ln(5) < 2$ alors $f(2) < 1 < f(1)$

Donc d'après T.V.I $(\exists ! \alpha \in [1; 2]) ; f(\alpha) = 1$

d- Le tracé



Partie 3 :

1) a- • Montrons que φ est dérivable sur I :

la fonction $u : x \mapsto 1 + 2x$ est dérivable et strictement positive sur I

Donc la fonction $\varphi = (\ln \circ u)$ est dérivable sur I

• Montrons que : $(\forall x \geq 1) ; 0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$

$$\text{On a : } (\forall x \geq 1) ; \varphi'(x) = \frac{2}{1+2x}$$

Donc : $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \in [1; +\infty[$

$$\begin{aligned}\text{Et on a : } x \geq 1 &\Rightarrow 2x + 1 \geq 3 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \varphi'(x) \leq \frac{2}{3} \text{ pour tout } x \in [1; +\infty[$$

$$\text{D'où : } (\forall x \in [1; +\infty[) ; 0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$$

b- • Vérifions que : $\varphi(\alpha) = \alpha$

$$\begin{aligned}\text{On a : } f(\alpha) = 1 &\Leftrightarrow \frac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha} = 1 \\ &\Leftrightarrow \ln(1+2\alpha) = \alpha \\ &\Leftrightarrow \varphi(\alpha) = \alpha\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \varphi(\alpha) = \alpha$$

• Vérifions que : $\varphi(J) \subset J$

Comme la fonction φ est continue et strictement croissante sur J

$$\text{alors } \varphi(J) = \varphi([1; \alpha]) = [\varphi(1); \varphi(\alpha)] = [\varphi(1); \alpha]$$

$$\text{Or } \varphi(1) = \ln(3) \text{ et } 3 > e \text{ alors } \ln(3) > 1 \text{ donc } [\ln(3); \alpha] \subset [1; \alpha]$$

$$\text{D'où : } \varphi(J) \subset J$$

2) a- Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in J$

Initialisation :

• Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1$ et $1 \in [1; \alpha]$, donc $u_0 \in J$

Hérédité :

• Soit $n \in J$, supposons que $u_n \in J$ et montrons que $u_{n+1} \in J$

$$\text{On a : } u_n \in J \text{ et } \varphi(J) \subset J \text{ alors } \varphi(u_n) \in J, \text{ donc } u_{n+1} \in J$$

$$\text{D'où : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in J \Rightarrow u_{n+1} \in J$$

• **Conclusion :** D'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in J$

b- Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$

puisque la fonction φ est continue sur $J = [1; \alpha]$ et dérivable sur $]1; \alpha[$ tel que $0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$ pour tout $x \in]1; \alpha[$, alors d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$(\forall (a; b) \in J^2) ; |\varphi(a) - \varphi(b)| \leq \frac{2}{3}|a - b|$$

En prenant : $a = u_n$ et $b = \alpha$, on obtient alors :

$$|\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$$

$$\text{Comme } \varphi(u_n) = u_{n+1} \text{ et } \varphi(\alpha) = \alpha \text{ alors } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$

• Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Initialisation :

• Pour $n = 0$, on a : $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| = \alpha - 1$ et $\alpha - 1 \leq 1$

en plus $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$. Donc $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0$

Hérédité :

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et montrons que :
 $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

On a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow \frac{2}{3}|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

Et on a, d'après la question précédente $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$

Donc : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

• **Conclusions :** D'après le principe de récurrence, on a :

$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

• **Déduction :**

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Et comme $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Par suite la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

Résumé

Forme algébrique d'un nombre complexe - opérations dans $\mathbb{C}$

$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$ tel que i est un nombre imaginaire vérifiant $i^2 = -1$.

- i est une solution l'équation $x^2 + 1 = 0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$.
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + bi$ où a et b sont deux nombres réels. Cette forme : $a + bi$ est appelée la forme algébrique du nombre complexe z .
- Le réel a est appelé la partie réelle de z et notée : $\text{Re}(z)$
- Le réel b est appelé la partie imaginaire de z et notée : $\text{Im}(z)$
- Si $a = 0$ alors $z = bi$, on dit dans ce cas : z est imaginaire pur.
- L'ensemble des nombres imaginaires purs se note $i\mathbb{R}$ et on a :

$$i\mathbb{R} = \{bi \mid b \in \mathbb{R}\}$$

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$ • $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$
- Égalité de deux nombres complexes: soit z et z' deux nombres complexes :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(z') \end{cases}$$

- En particulier : $a + bi = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

(où a et b sont deux nombres réels)

C'est-à-dire : $z = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$ et $\text{Im}(z) = 0$

- Opérations dans l'ensemble $\mathbb{C}$

L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.

Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ où $a ; b ; a'$ et b' sont des réels.

$z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$	(L'addition)
$-z = -(a + bi) = -a - bi$	(L'opposé)
$z \times z' = (a + bi) \times (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$	(Le produit)
$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$	(L'inverse)
$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} = (a + bi) \times \left(\frac{a' - b'i}{a'^2 + b'^2}\right) = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}i$	(Le quotient)

$$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2 \\ = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$$

$$(z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$$

$$z^2 - z'^2 = (z - z')(z + z')$$

$$(z + z')^3 = z^3 + 3z^2z' + 3zz'^2 + z'^3$$

$$(z - z')^3 = z^3 - 3z^2z' + 3zz'^2 - z'^3$$

$$z^3 - z'^3 = (z - z')(z^2 + zz' + z'^2)$$

$$z^3 + z'^3 = (z + z')(z^2 - zz' + z'^2)$$

**Identités
remarquables**

Exercices d'application

Exercice 1

On pose: $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -1 + 3i$ et $z_3 = 1 - i$

Écrire sous forme algébrique chacun des nombres suivants:

$$z_4 = z_1 + z_2 + z_3, z_5 = z_1 - 3z_2, z_6 = iz_1^2, z_7 = -iz_3^3, z_8 = z_1 \times z_2, z_9 = z_2^4, \\ z_{10} = \frac{1}{z_2} \text{ et } z_{11} = \frac{z_1}{z_3}$$

Exercice 2

Déterminer les valeurs du nombre réel λ pour que le nombre $z = (\lambda + i)(\lambda + 5 - i(\lambda - 7))$ soit un imaginaire pur.

Exercice 3

On pose: $A(z) = z^2 + 2z + 2$ avec $z \in \mathbb{C}$.

1) Écrire sous forme algébrique chacun des nombres suivants: $A(i)$; $A(1 + i)$ et $A(2i - 3)$.

2) On pose: $z = x + yi$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Déterminer, en fonction de x et y , les nombres $\operatorname{Re}(A(z))$ et $\operatorname{Im}(A(z))$.

b) Montrer que: $A(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x = -1 \text{ ou } y = 0)$

Exercice 4

On pose: $S_n = 1 + i + i^2 + \dots + i^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); S_n - iS_n = 1 - i^{n+1}$.

b) En déduire que : $S_n = \frac{1-i^{n+1}}{1-i}$

2) Déterminer la valeur de S_n dans chacun des cas suivants :

$$n = 4p ; n = 4p + 1 ; n = 4p + 2 \text{ et } n = 4p + 3 \text{ avec } p \in \mathbb{N}.$$

Solutions

Exercice 1

On a : $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -1 + 3i$ et $z_3 = 1 - i$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } z_4 &= z_1 + z_2 + z_3 \\ &= (3 + 2i) + (-1 + 3i) + (1 - i) \\ &= (3 - 1 + 1) + (2 + 3 - 1)i \\ &= 3 + 4i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Et } z_5 &= z_1 - 3z_2 \\ &= (3 + 2i) - 3(-1 + 3i) \\ &= 3 + 2i + 3 - 9i \\ &= (3 + 3) + (2i - 9i) \\ &= 6 - 7i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Et } z_6 &= iz_1^2 \\ &= i(3 + 2i)^2 \\ &= i(9 + 2 \times 3 \times 2i + (2i)^2) \\ &= i(9 + 12i - 4) \\ &= i(5 + 12i) \\ &= 5i + 12i^2 \\ &= 5i - 12 = -12 + 5i\end{aligned}$$

info:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\begin{aligned}\text{Et } z_7 &= -iz_3^3 \\ &= -i(1 - i)^3 \\ &= -i(1^3 - 3 \times 1^2 \times i + 3 \times 1 \times i^2 - i^3) \\ &= -i(1 - 3i - 3 + i) \\ &= -i(-2 - 2i) \\ &= 2i + 2i^2 \\ &= -2 + 2i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Et } z_8 &= z_1 \times z_2 \\ &= (3 + 2i) \times (-1 + 3i) \\ &= -3 + 9i - 2i + 6i^2 \\ &= -3 + 7i - 6 \\ &= -9 + 7i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Et } z_9 &= z_2^4 \\
 &= (-1 + 3i)^4 \\
 &= (-1 + 3i)^2 \times (-1 + 3i)^2 \\
 &= (1 - 2 \times 3i + (3i)^2) \times (1 - 6i + (3i)^2) \\
 &= (1 - 6i - 9)(1 - 6i - 9) \\
 &= (-8 - 6i) \times (-8 - 6i) \\
 &= (8 + 6i)^2 \\
 &= 8^2 + 2 \times 8 \times 6i + (6i)^2 \\
 &= 64 + 96i - 36 \\
 &= 28 + 96i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Et } z_{10} &= \frac{1}{z_2} \\
 &= \frac{1}{-1 + 3i} \\
 &= \frac{-1 - 3i}{(-1 + 3i)(-1 - 3i)} \\
 &= \frac{-1 - 3i}{(-1)^2 + 3^2} = \frac{-1 - 3i}{1 + 9} = -\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Et } z_{11} &= \frac{z_1}{z_3} \\
 &= \frac{3 + 2i}{1 - i} \\
 &= \frac{(3 + 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} \\
 &= \frac{3 + 3i + 2i + (2i \times i)}{1^2 + 1^2} \\
 &= \frac{3 + 5i - 2}{1 + 1} \\
 &= \frac{1 + 5i}{2} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i
 \end{aligned}$$

info:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Exercice 2

Soit λ un réel,

• Écrivons z sous forme algébrique :

$$\begin{aligned}
 z &= (\lambda + i)(\lambda + 5 - i(\lambda - 7)) \\
 &= \lambda(\lambda + 5) + (\lambda - 7) - i\lambda(\lambda - 7) + i(\lambda + 5) \\
 &= (\lambda^2 + 6\lambda - 7) + i(-\lambda^2 + 8\lambda + 5)
 \end{aligned}$$

Puisque $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\text{Re}(z) = \lambda^2 + 6\lambda - 7$

et $\text{Im}(z) = -\lambda^2 + 8\lambda + 5$.

$$\begin{aligned} \bullet z \in (i\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + 6\lambda - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 7) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -7 \end{aligned}$$

Donc : z est un imaginaire pur si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = -7$.

Exercice 3

1) Forme algébrique de $A(i)$; $A(1+i)$ et $A(2i-3)$:

On a : $A(z) = z^2 + 2z + 2$

Donc :

$$\begin{aligned} \bullet A(i) &= i^2 + 2i + 2 = -1 + 2i + 2 = 1 + 2i \\ \bullet A(1+i) &= (1+i)^2 + 2(1+i) + 2 \\ &= (1 + 2i + i^2) + 2 + 2i + 2 \\ &= 2i + 2i + 4 \\ &= 4 + 4i \\ \bullet A(2i-3) &= (2i-3)^2 + 2(2i-3) + 2 \\ &= (-4 - 12i + 9) + 4i - 4 \\ &= 1 - 8i \end{aligned}$$

2) a) Exprimons $\text{Re}(A(z))$ et $\text{Im}(A(z))$ en fonction de x et y :

$$\begin{aligned} A(z) &= (x + yi)^2 + 2(x + yi) + 2 \\ &= x^2 + 2xyi - y^2 + 2x + 2yi + 2 \\ &= (x^2 - y^2 + 2x + 2) + i(2xy + 2y) \end{aligned}$$

Puisque x et y sont des réels, alors :

$$(x^2 - y^2 + 2x + 2) \in \mathbb{R} \text{ et } (2xy + 2y) \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \text{Re}(A(z)) = x^2 - y^2 + 2x + 2 \\ \text{Im}(A(z)) = 2xy + 2y \end{cases}$$

b) Montrons que : $A(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } y = 0$

$$\begin{aligned} A(z) \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \text{Im}(A(z)) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2xy + 2y = 0 \\ &\Leftrightarrow 2y(x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{aligned}$$

Donc : $A(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } y = 0$.

Exercice 4

1) a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n - iS_n = 1 - i^{n+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$;

$$\text{On a : } S_n = 1 + i + i^2 + \dots + i^{n-1} + i^n$$

$$\text{Donc : } iS_n = i + i^2 + i^3 + \dots + i^n + i^{n+1}$$

D'où : $S_n - iS_n = 1 - i^{n+1}$, après simplification.

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n - iS_n = 1 - i^{n+1}$$

b) Déduisons S_n en fonction de n :

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N} ; S_n - iS_n = 1 - i^{n+1} \Rightarrow (1 - i)S_n = 1 - i^{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i}$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n = \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i}$$

2) Déterminons les valeurs de S_n dans les cas : $n = 4p$; $n = 4p + 1$; $n = 4p + 2$ et $n = 4p + 3$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N} ; S_n = \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$;

• Si $n = 4p$, alors : $i^{n+1} = i^{4p+1} = (i^4)^p \times i = i$

$$\text{Dans ce cas : } S_n = \frac{1 - i}{1 - i} = 1$$

• Si $n = 4p + 1$, alors : $i^{n+1} = i^{4p+2} = (i^4)^p \times i^2 = -1$

$$\text{Dans ce cas : } S_n = \frac{1 + 1}{1 - i} = \frac{2}{1 - i} = \frac{2(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2(1 + i)}{2} = 1 + i$$

• Si $n = 4p + 2$, alors : $i^{n+1} = i^{4p+3} = i^{4p+2} \times i = -1 \times i = -i$

$$\text{Dans ce cas : } S_n = \frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2i}{2} = i$$

• Si $n = 4p + 3$, alors : $i^{n+1} = i^{4p+4} = i^{4p+3} \times i = -i \times i = 1$

$$\text{Dans ce cas : } S_n = \frac{1 - 1}{1 - i} = 0$$

Résumé : Pour $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_n = 1 \text{ si } n = 4p$$

$$S_n = 1 + i \text{ si } n = 4p + 1$$

$$S_n = i \text{ si } n = 4p + 2$$

$$S_n = 0 \text{ si } n = 4p + 3$$

Définition:

z est un nombre complexe de forme algébrique $z = x + iy$ (où x et y sont des réels), le nombre complexe $x - iy$, noté $\bar{z}$ est appelé le conjugué de z .

$$\bar{\bar{z}} = \overline{x + yi} = x - yi$$

Propriétés:

Pour tous z et z' de $\mathbb{C}$ on a :

$$\overline{\bar{z}} = z \quad ; \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad ; \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad ; \quad z \neq 0; \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}; z' \neq 0 \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{Z}) \quad z \neq 0 \quad ; \quad \overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$$

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \quad ; \quad z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z) \quad ; \quad \bar{\bar{z}} = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2$$

$$z + \bar{z} \in \mathbb{R} \quad (z - \bar{z}) \in i\mathbb{R} \quad z \times \bar{z} \in \mathbb{R}^+$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$$

Remarque:

Soit $z = x + iy$ tel que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$; $z + \bar{z} = 2x$; $z - \bar{z} = 2yi$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 0$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x = 0$$

Exercices d'application**Exercice 5**

Soit z un nombre complexe.

Écrire en fonction de z et $\bar{z}$ le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = iz + 1 \quad ; \quad Z_2 = z^2 + i\bar{z} - 5 \quad ; \quad Z_3 = (3\bar{z} - 1)(z + i) \quad ; \quad Z_4 = \frac{2z - i}{1 - \bar{z}} \quad ; \quad \text{avec } z \neq 1.$$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$1) (1 - i\bar{z})(z^2 + 2z + 1)(z - \bar{z}) = 0 \quad 2) 2z + i\bar{z} = 5 - 4i$$

$$3) \frac{2\bar{z} - 1}{z + i} = 1 + i \quad 4) \frac{\bar{z} + i}{z - 2} = \frac{z - i}{z + 1}$$

Exercice 7

Soit z un nombre complexe.

- 1) a) Montrer que le nombre $A = z^2 - \bar{z}^2$ est un imaginaire pur.
 b) Montrer que le nombre $B = z^n + (\bar{z})^n$ est un réel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, et $a \in \mathbb{R}^*$, on pose :

$$X = (1 + ia)^n + (1 - ia)^n$$

$$Y = (a + i)^n - (a - i)^n$$

- a) Montrer que X est un réel.
 b) Montrer que Y est un imaginaire pur.

Exercice 8

Soit $z \in \mathbb{C}$.

On pose : $A(z) = z^2 + 2z + 2$

Montrer que : $(A(z) \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (z \in \mathbb{R} \text{ ou } \operatorname{Re}(z) = -1)$

Exercice 9

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

Montrer que : $\frac{2z-1}{z^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z = \bar{z} \text{ ou } z + \bar{z} = 2z\bar{z})$

Solutions**Exercice 5**

Exprimons en fonction de z et $\bar{z}$ le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

• $Z_1 = iz + 1$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \overline{Z_1} &= \overline{iz + 1} \\ &= \bar{i} \times \bar{z} + \bar{1} \\ &= -i\bar{z} + 1 \end{aligned}$$

• $Z_2 = z^2 + i\bar{z} - 5$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \overline{Z_2} &= \overline{z^2 + i\bar{z} - 5} \\ &= \bar{z}^2 + \bar{i}\bar{\bar{z}} - \bar{5} \\ &= (\bar{z})^2 + \bar{i} \times \bar{\bar{z}} - 5 \\ &= (\bar{z})^2 - iz - 5 \end{aligned}$$

• $Z_3 = (3\bar{z} - 1)(z + i)$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } \overline{Z_3} &= \overline{(3\overline{z}-1)(z+i)} \\ &= \overline{(3\overline{z}-1)} \times \overline{(z+i)} \\ &= (3z-1)(\overline{z}-i)\end{aligned}$$

$$\bullet Z_4 = \frac{2z-i}{1-z}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } \overline{Z_4} &= \overline{\left(\frac{2z-i}{1-z}\right)} \\ &= \frac{\overline{2z-i}}{\overline{1-z}} \\ &= \frac{2\overline{z}+i}{1-\overline{z}}\end{aligned}$$

Exercice 6

Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$1) (E_1): (1-i\overline{z})(z^2+2z+1)(z-\overline{z}) = 0$$

$$(E_1) \Leftrightarrow (1-i\overline{z} = 0 \text{ ou } z^2+2z+1 = 0 \text{ ou } z-\overline{z} = 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(\overline{z} = \frac{1}{i} = -i \text{ ou } (z+1)^2 = 0 \text{ ou } z = \overline{z}\right)$$

$$\Leftrightarrow (z = i \text{ ou } z = -1 \text{ ou } z \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \cup \{i\}$$

$$\text{Donc : } S = \mathbb{R} \cup \{i\}$$

$$2) (E_2): 2z + i\overline{z} = 5 - 4i$$

On pose : $z = x + yi$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$(E_2) \Leftrightarrow 2x + 2yi + i(x - yi) = 5 - 4i$$

$$\Leftrightarrow (2x + y) + (2y + x)i = 5 - 4i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{14}{3} \text{ et } y = -\frac{13}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{14}{3} - \frac{13}{3}i$$

$$\text{Donc : } S = \left\{\frac{14}{3} - \frac{13}{3}i\right\}$$

$$3) (E_3): \frac{2\overline{z}-1}{z+i} = 1+i$$

• Cette équation n'est définie que si $z \neq -i$.

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ Résolution : } \frac{2\bar{z}-1}{z+i} &= 1+i \Leftrightarrow 2\bar{z}-1 = (1+i)(z+i) \\
 &\Leftrightarrow 2\bar{z} - (1+i)z = 1+i(1+i) \\
 &\Leftrightarrow 2(x-yi) - (1+i)(x+yi) = i
 \end{aligned}$$

(avec $z = x + yi$; $(x; y) \in \mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow (x+y) + (-3y-x-1)i = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ -3y-x-1=0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i
 \end{aligned}$$

Donc : $S = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$

4) (E_4): $\frac{\bar{z}+i}{z-2} = \frac{z-i}{z+1}$

• Cette équation n'est définie que si $z \neq 2$ et $z \neq -1$.

• Résolution : soit $z \in \mathbb{C} - \{-1; 2\}$

On pose : $z = x + yi$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
 (E_4) &\Leftrightarrow (\bar{z}+i)(z+1) = (\bar{z}-2)(z-i) \\
 &\Leftrightarrow \bar{z} + i\bar{z} + iz + 2z = i \\
 &\Leftrightarrow (1+i)\bar{z} + (2+i)z = i \\
 &\Leftrightarrow (1+i)(x-yi) + (2+i)(x+yi) = i \\
 &\Leftrightarrow 3x + (2x+y)i = i \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ 2x+y = 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow (x=0 \text{ et } y=1) \\
 &\Leftrightarrow z = i
 \end{aligned}$$

Donc : $S = \{i\}$

Exercice 7

1) a) Montrons que : $A \in i\mathbb{R}$

Méthode 1: ($A \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{A} = -A$)

$$\begin{aligned}
 A = z^2 - \bar{z}^2 &\Rightarrow \overline{A} = \overline{z^2 - \bar{z}^2} \\
 &\Rightarrow \overline{A} = \overline{z}^2 - z^2 \\
 &\Rightarrow \overline{A} = -A
 \end{aligned}$$

$\overline{A} = -A$, donc A est un imaginaire pur.

Méthode 2: $A = z^2 - \bar{z}^2$

$$\begin{aligned}
 &= (z - \bar{z})(z + \bar{z}) \\
 &= (2i \operatorname{Im}(z)) \times (2 \operatorname{Re}(z)) \\
 &= 4i \operatorname{Im}(z) \times \operatorname{Re}(z)
 \end{aligned}$$

et puisque $\operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$ et $\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$, alors A est un imaginaire pur.

b) Montrons que B est un réel.

Méthode 1: $B = z^n + (\bar{z})^n$

$$\begin{aligned}
 &= z^n + \overline{z^n} \\
 &= 2 \operatorname{Re}(z^n)
 \end{aligned}$$

Donc : B est un réel.

Méthode 2: ($B \in \mathbb{R} \iff \overline{B} = B$)

$$\begin{aligned}
 B = z^n + \bar{z}^n &\Rightarrow \overline{B} = \overline{z^n + \bar{z}^n} \\
 &\Rightarrow \overline{B} = \overline{z}^n + z^n \\
 &\Rightarrow \overline{B} = B
 \end{aligned}$$

$\overline{B} = B$, donc B est un réel tout $n \in \mathbb{N}$.

2) a) Montrons que : $X \in \mathbb{R}$

$$X = (1 + ia)^n + (1 - ia)^n \text{ avec } a \in \mathbb{R}^+.$$

Méthode 1: $X = (1 + ia)^n + \overline{(1 + ia)^n} = 2 \operatorname{Re}((1 + ia)^n)$

Donc : X est un réel.

Méthode 2: $\overline{X} = \overline{(1 + ia)^n + (1 - ia)^n}$

$$\begin{aligned}
 &= \overline{(1 + ia)^n} + \overline{(1 - ia)^n} \\
 &= (1 - ia)^n + (1 + ia)^n \\
 &= X
 \end{aligned}$$

$\overline{X} = X$, donc X est un réel.

b) Montrons que $Y \in i\mathbb{R}$:

$$Y = (a + i)^n - (a - i)^n$$

Méthode 1: $Y = (a + i)^n - \overline{(a + i)^n} = 2i \operatorname{Im}((a + i)^n)$

Donc Y est un imaginaire pur.

$$\begin{aligned}
 \text{Méthode 2: } \bar{Y} &= \overline{(a+i)^n - (a-i)^n} \\
 &= \overline{(a+i)^n} - \overline{(a-i)^n} \\
 &= (a-i)^n - (a+i)^n \\
 &= -[(a+i)^n - (a-i)^n] \\
 &= -Y
 \end{aligned}$$

$\bar{Y} = -Y$, donc Y est un imaginaire pur.

Exercice 8

$$A(z) = z^2 + 2z + 2; \quad z \in \mathbb{C}$$

Montrons que : $(A(z) \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (z \in \mathbb{R} \text{ ou } \operatorname{Re}(z) = -1)$

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } z \in \mathbb{C}; \quad A(z) \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{A(z)} = A(z) \\
 &\Leftrightarrow \overline{z^2 + 2z + 2} = z^2 + 2z + 2 \\
 &\Leftrightarrow \overline{z^2} + 2\overline{z} = z^2 + 2z \\
 &\Leftrightarrow z^2 - \overline{z^2} + 2z - 2\overline{z} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (z - \overline{z})(z + \overline{z}) + 2(z - \overline{z}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (z - \overline{z})(z + \overline{z} + 2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow z = \overline{z} \text{ ou } z + \overline{z} = -2 \\
 &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } 2\operatorname{Re}(z) = -2 \\
 &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } \operatorname{Re}(z) = -1
 \end{aligned}$$

Donc : $(A(z) \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (z \in \mathbb{R} \text{ ou } \operatorname{Re}(z) = -1)$

Exercice 9

Montrons que : $\frac{2z-1}{z^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z = \overline{z} \text{ ou } z + \overline{z} = 2z\overline{z})$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$; on pose : $Z = \frac{2z-1}{z^2}$

$$\begin{aligned}
 Z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{Z} = Z \\
 &\Leftrightarrow \frac{2\overline{z}-1}{\overline{z}^2} = \frac{2z-1}{z^2} \\
 &\Leftrightarrow (2\overline{z}-1)z^2 = \overline{z}^2(2z-1) \\
 &\Leftrightarrow 2\overline{z}z^2 - z^2 = 2z\overline{z}^2 - \overline{z}^2 \\
 &\Leftrightarrow 2z\overline{z}(z - \overline{z}) - (z - \overline{z})(z + \overline{z}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (z - \overline{z})[2z\overline{z} - (z + \overline{z})] = 0 \\
 &\Leftrightarrow z = \overline{z} \text{ ou } 2z\overline{z} = z + \overline{z}
 \end{aligned}$$

Donc : $\frac{2z-1}{z^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z = \overline{z} \text{ ou } z + \overline{z} = 2z\overline{z})$



Définition:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$

• À tout nombre complexe $z = x + yi$, avec x et y des réels, on associe le point M de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ du plan, appelé plan complexe.

On dit que M est le point image du nombre complexe z (ou le point M est l'image du nombre complexe z) et on écrit: $M(z)$,

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z , et on écrit $\overrightarrow{OM}(z)$

• Inversement, à tout point $M(x; y)$ du plan, on associe le nombre complexe $z = x + iy$.

On dit que z est l'afixe du point M , et on note z_M . On dit aussi que z est l'afixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$, et on note $z_{\overrightarrow{OM}}$.

• Si A et B sont deux points du plan, alors l'afixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$ on écrit: $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

• L'afixe du point S tel que: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ est $z_S = z_M + z_{M'}$ (le quadrilatère $OMSM'$ est un parallélogramme).

• $(ABCD \text{ est un parallélogramme}) \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
 $\iff (z_B - z_A = z_C - z_D)$

• L'afixe du point P tel que: $\overrightarrow{OP} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ avec k réel, est $z_P = k z$.

• Les deux points $M(z)$ et $M'(-z)$ sont symétriques par rapport au point O (l'origine du repère).

• Les deux points $M(z)$ et $M''(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe réel (l'axe des abscisses).

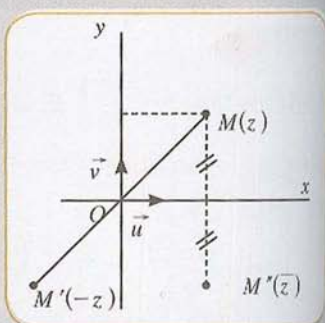
• L'afixe du point I milieu du segment $[AB]$ est le nombre complexe:

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

• Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ est un réel.

$(A, B \text{ et } C \text{ sont alignés}) \iff (\exists k \in \mathbb{R}) ; \overrightarrow{BA} = k \cdot \overrightarrow{CA}$

$$\iff (\exists k \in \mathbb{R}) ; z_A - z_B = k(z_A - z_C)$$



Exercices d'application

Exercice 10

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 3 + 2i; \quad z_B = -2 + 5i \quad \text{et} \quad z_C = -5 + 2i.$$

- Placer les points A , B et C .
- Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs : $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
- a) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
b) Déterminer l'affixe du centre I de ce parallélogramme.
- Déterminer l'affixe du point G barycentre des points $(A, 2)$; $(B, 3)$ et $(C, -1)$.

Exercice 11

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Soit z un nombre complexe non nul.

On considère les points $M(z)$; $N(\bar{z})$; $P(-z)$ et $Q(-\bar{z})$.

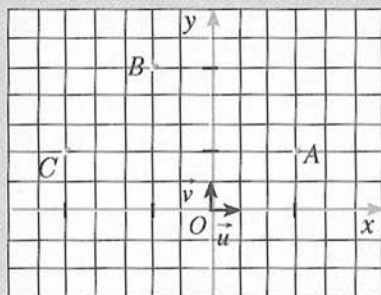
- Quelle est la nature du quadrilatère $MNPQ$?
- Donner, en fonction de z l'affixe du point K défini par :

$$2\overrightarrow{MK} - 3\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{PM} = 5\overrightarrow{OP}.$$

Solutions

Exercice 10

- Figure :



- Affixe des vecteurs : $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$\bullet \quad z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (-2 + 5i) - (3 + 2i) = -5 + 3i$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{AB}(-5 + 3i)$$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-5; 3)$.

- $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = (-5 + 2i) - (3 + 2i) = -8$

Donc : -8 est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-8; 0)$.

- De même on montre que $\overrightarrow{BC}(-3 - 3i)$

donc : $\overrightarrow{BC}(-3; -3)$

3) a) Affixe du point D :

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_D - z_A = z_{\overrightarrow{BC}}$$

$$\Leftrightarrow z_D = z_A - 3 - 3i$$

$$\Leftrightarrow z_D = 3 + 2i - 3 - 3i$$

$$\Leftrightarrow z_D = -i$$

Donc le point D a pour affixe $-i$, ses coordonnées sont $(0; -1)$.

b) Affixe du point I :

$ABCD$ est un parallélogramme, donc son centre I est le milieu de ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

$$I \text{ milieu de } [AC] \Leftrightarrow z_I = \frac{z_A + z_C}{2}$$

$$\Rightarrow z_I = \frac{3 + 2i - 5 + 2i}{2}$$

$$\Rightarrow z_I = -1 + 2i$$

Donc le point I a pour affixe $-1 + 2i$, ses coordonnées sont $(-1; 2)$.

4) Affixe du point G :

G est le barycentre des points $(A, 2)$; $(B, 3)$ et $(C, -1)$,

$$\text{donc : } z_G = \frac{2z_A + 3z_B - z_C}{2 + 3 - 1} = \frac{5 + 17i}{4}$$

$$\text{Donc : } G\left(\frac{5}{4} + \frac{17}{4}i\right).$$

Exercice 11

1) Nature du quadrilatère $MNPQ$:

- $z_{\overrightarrow{MN}} = z_N - z_M = \overline{z} - z$

- $z_{\overrightarrow{QP}} = z_P - z_Q = -z - (-\overline{z}) = \overline{z} - z$

$$\text{Donc : } z_{\overrightarrow{MN}} = z_{\overrightarrow{QP}},$$

d'où : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ et par conséquent $MNPQ$ est un parallélogramme.

De plus : $(MN) \perp (NP)$ (car $(MN) \parallel (O; \vec{v})$ et $(NP) \parallel (O; \vec{u})$
et $(O; \vec{u}) \perp (O; \vec{v})$)

Donc : $MNPQ$ est un rectangle.

2) Affixe du point K : $2\overline{MK} - 3\overline{KN} + \overline{PM} = 5\overline{OP}$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow 2(z_K - z_M) - 3(z_N - z_K) + z_M - z_P = 5z_P$$

$$\Leftrightarrow 5z_K = z_M + 6z_P + 3z_N$$

$$\Leftrightarrow z_K = \frac{1}{5}(z - 6z + 3\overline{z})$$

$$\Leftrightarrow z_K = -z + \frac{3}{5}\overline{z}$$

Donc : $K\left(-z + \frac{3}{5}\overline{z}\right)$.



Module d'un nombre complexe

Définition:

Soit z un nombre complexe tel que: $z = x + yi$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

- Le nombre réel positif $\sqrt{z\overline{z}}$ est appelé le module de z noté: $|z|$; et on a:
 $|z| = |x + yi| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = OM$ où M est le point d'affixe z .

Propriétés:

Pour tous z et z' de $\mathbb{C}$, on a :

- $|\overline{z}| = |z| = |-z| = |z|$ et $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$; $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ avec $z \neq 0$; $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ et $z \neq 0$
- $z \neq 0$; $(\forall n \in \mathbb{Z})$; $|z^n| = |z|^n$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ et $|z - z'| \leq |z| + |z'|$ (Inégalité triangulaire).

Remarque :

- Pour tous z et z' de $\mathbb{C}$ avec $z \neq 0$, on a : $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ et $\frac{z'}{z} = \frac{z' \times \overline{z}}{|z|^2}$
- $AB = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|$

Exercices d'application

Exercice 12

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = -\sqrt{3} + 2i$$

$$z_3 = \cos \theta + i \sin \theta \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}$$

$$z_4 = z_1 \times z_2$$

$$z_5 = z_3^{2020}; \quad z_6 = \frac{1}{z_4}; \quad z_7 = \frac{z_2}{z_1}; \quad z_8 = \overline{z_1} \times (-z_2)^3 \times \overline{z_3}^2$$

Exercice 13

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Déterminer les ensembles suivants :

$$E_1 = \{M(z) / |z + 3i + 2| = |1 + i|\}$$

$$E_2 = \{M(z) / |\overline{z} - 1 + 2i| = |z + 1 - i|\}$$

$$E_3 = \{M(z) / |z + \overline{z}| = |z|\}$$

$$E_4 = \{M(z) / (z - 2i)(\overline{z} + 2i) = 9\}$$

$$E_5 = \{M(z) / |z - 2 + i| \leq 2\}$$

$$E_6 = \left\{M(z) / \frac{z+i}{z-i} \in i\mathbb{R}\right\}$$

$$E_7 = \left\{M(z) / \frac{z-2+i}{z+1-3i} \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice 14

Soit z un nombre complexe tel que : $\overline{z} \neq z$.

Soit u un nombre complexe de module 1 tel que : $u \neq 1$.

Montrer que : $\frac{z - u\overline{z}}{1 - u}$ est un réel.

Exercice 15

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que :

$$|z_1| = |z_2| = 1 \text{ et } z_1 \times z_2 \neq -1$$

$$\text{On pose : } Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$$

Montrer que Z est un réel.

Exercice 16

Montrer que : $\forall (z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{1}{2}(|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2)$

Exercice 17

Montrer que : $(\forall z \in \mathbb{C}); \frac{|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$

Exercice 18

Montrer que : $(\forall z \in \mathbb{C}); |z| \leq 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(3 + 4z + z^2) \geq 0$

Solutions

Exercice 12

Calculons le module de chacun des nombres complexes suivants :

$$\bullet |z_1| = \left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\bullet |z_2| = |-\sqrt{3} + 2i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 4} = \sqrt{7}$$

$$\bullet |z_3| = |\cos \theta + i \sin \theta| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$$

$$\bullet |z_4| = |z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| = \sqrt{7}$$

$$\bullet |z_5| = |z_3^{2020}| = |z_3|^{2020} = 1$$

$$\bullet |z_6| = \left| \frac{1}{z_4} \right| = \frac{1}{|z_4|} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

$$\bullet |z_7| = \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \sqrt{7}$$

$$\begin{aligned} \bullet |z_8| &= |\bar{z}_1 \times (-z_2)^3 \times \bar{z}_3^2| \\ &= |\bar{z}_1| \times |-z_2|^3 \times |\bar{z}_3|^2 \\ &= |z_1| \times |z_2|^3 \times |z_3|^2 \\ &= 7\sqrt{7} \quad (\text{car } |\bar{z}| = |z| = |-z|) \end{aligned}$$

Exercice 13

Déterminons les ensembles suivants :

$$\bullet E_1 = \{M(z) / |z + 3i + 2| = |1 + i|\}$$

Méthode géométrique :

$$\begin{aligned} \text{Soit } z \in \mathbb{C}; \quad M(z) \in E_1 &\Leftrightarrow |z - (-2 - 3i)| = |1 + i| \\ &\Leftrightarrow AM = \sqrt{2} \text{ avec } A(-2 - 3i) \\ &\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}(A; \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Donc : E_1 est le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

Méthode algébrique :

Soit $z \in \mathbb{C}$; on pose : $z = x + yi$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} M(z) \in E_1 &\Leftrightarrow |z + 3i + 2| = |1 + i| \\ &\Leftrightarrow |(x + 2) + (y + 3)i| = \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}(A(-2; -3); \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Rappel :

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ est l'équation réduite du cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon r .

Donc : E_1 est le cercle de centre $A(-2; -3)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

$$\bullet E_2 = \{M(z) / |\bar{z} - 1 + 2i| = |z + 1 - i|\}$$

Méthode géométrique :

Soit $z \in \mathbb{C}$;

$$\begin{aligned} M(z) \in E_2 &\Leftrightarrow |\bar{z} - (1 - 2i)| = |z - (-1 + i)| \\ &\Leftrightarrow |\overline{z - (1 + 2i)}| = |z - (-1 + i)| ; (\text{car } |z| = |\bar{z}|) \\ &\Leftrightarrow |z - (1 + 2i)| = |z - (-1 + i)| \\ &\Leftrightarrow AM = BM ; (\text{avec } A(1 + 2i) \text{ et } B(-1 + i)) \end{aligned}$$

Donc : E_2 est la médiatrice du segment $[AB]$.

Méthode algébrique :

Soit $z \in \mathbb{C}$; $\exists!(x; y) \in \mathbb{R}^2 / z = x + yi$

$$\begin{aligned} M(z) \in E_2 &\Leftrightarrow |\bar{z} - 1 + 2i| = |z + 1 - i| \\ &\Leftrightarrow |(x - 1) + (2 - y)i| = |(x + 1) + (y - 1)i| \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (2 - y)^2 = (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \\ &\Leftrightarrow 4x + 2y - 3 = 0 \end{aligned}$$

Donc : E_2 est la droite d'équation $4x + 2y - 3 = 0$.

On peut vérifier que cette équation est bien celle de la médiatrice de $[AB]$.

$$\bullet E_3 = \{M(z) / |z + \bar{z}| = |z|\}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z = x + yi$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} M(z) \in E_3 &\Leftrightarrow |z + \bar{z}| = |z| \\ &\Leftrightarrow |2x| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow 4x^2 = x^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3}x + y) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = \sqrt{3}x \text{ ou } y = -\sqrt{3}x \end{aligned}$$

Donc : E_3 est l'union de deux droites $(D_1): y = \sqrt{3}x$ et $(D_2): y = -\sqrt{3}x$.

$$\bullet E_4 = \{M(z) / (z - 2i)(\bar{z} + 2i) = 9\}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$; $M(z) \in E_4 \Leftrightarrow (z - 2i)(\bar{z} + 2i) = 9$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (z - 2i)(\overline{z - 2i}) = 9 \\ &\Leftrightarrow |z - 2i|^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow |z - 2i| = 3 \\ &\Leftrightarrow IM = 3 ; \text{avec } I(2i) \\ &\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}(I; 3) \end{aligned}$$

Donc : E_4 est le cercle de centre I et de rayon 3.

$$\bullet E_5 = \{M(z) / |z - 2 + i| \leq 2\}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$; $M(z) \in E_5 \Leftrightarrow |z - 2 + i| \leq 2$

$$\Leftrightarrow \Omega M \leq 2; \text{ avec } \Omega(2 - i)$$

Donc : E_5 est le disque de centre $\Omega(2 - i)$ et de rayon 2. (Frontière comprise : Disque fermé)

$$\bullet E_6 = \left\{M(z) / \frac{z+i}{z-i} \in i\mathbb{R}\right\}$$

Soit $z \in \mathbb{C} - \{i\}$; $M(z) \in E_6 \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} \in i\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z+i}{z-i}\right)} = -\frac{z+i}{z-i}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}-i}{z+i} = \frac{-z-i}{z-i} \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow (\bar{z}-i)(z-i) = (\bar{z}+i)(-z-i)$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}z - i\bar{z} - iz - 1 = -\bar{z}z - i\bar{z} - iz + 1$$

$$\Leftrightarrow 2\bar{z}z = 2$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} = 1$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow |z| = 1 \text{ et } z \neq i$$

$$\Leftrightarrow OM = 1 \text{ et } M \neq A(i)$$

$$\Leftrightarrow M \in (\mathcal{C}(O;1) - \{A\})$$

Donc : E_6 est le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $A(i)$.

$$\bullet E_7 = \left\{M(z) / \frac{z-2+i}{z+1-3i} \in \mathbb{R}\right\}$$

Soit $z \in \mathbb{C} - \{-1+3i\}$; $M(z) \in E_7 \Leftrightarrow \frac{z-2+i}{z+1-3i} \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z-2+i}{z+1-3i}\right)} = \frac{z-2+i}{z+1-3i}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}-2-i}{z+1+3i} = \frac{z-2+i}{z+1-3i}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{z}-2-i)(z+1-3i) = (\bar{z}+1+3i)(z-2+i)$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}z + (1-3i)\bar{z} + (-2-i)z + (-2-i)(1-3i) = \bar{z}z + (-2+i)\bar{z} + (1+3i)z + (1+3i)(-2+i)$$

$$\Leftrightarrow (3-4i)\bar{z} + (-3-4i)z = -10i$$

On pose : $z = x + yi$, avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $(x; y) \neq (-1; 3)$

$$\begin{aligned}
 M(z) \in E_7 &\Leftrightarrow (3-4i)(x-yi) + (-3-4i)(x+yi) = -10i \\
 &\Leftrightarrow (-8x-6y)i = -10i \\
 &\Leftrightarrow -8x-6y = -10 \\
 &\Leftrightarrow 4x+3y-5 = 0
 \end{aligned}$$

Donc : E_7 est la droite d'équation $4x+3y-5=0$ privée du point $A(-1+3i)$.

Exercice 14

Montrons que : $\frac{z-\bar{u}\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R}$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $\bar{z} \neq z$ et $u \in \mathbb{C} - \{1\}$ tel que $|u|=1$.

On pose : $A = \frac{z-\bar{u}\bar{z}}{1-u}$

$$\begin{aligned}
 \text{Méthode 1: } \bar{A} &= \overline{\left(\frac{z-\bar{u}\bar{z}}{1-u}\right)} = \frac{\bar{z}-\bar{\bar{u}}\bar{\bar{z}}}{1-\bar{u}} \\
 &= \frac{\bar{u}\bar{u}\bar{z}-\bar{u}\bar{z}}{\bar{u}\bar{u}-\bar{u}} \quad ; (\text{car } u\bar{u}=|u|^2=1) \\
 &= \frac{\bar{u}(\bar{u}\bar{z}-\bar{z})}{\bar{u}(\bar{u}-1)} = \frac{z-\bar{u}\bar{z}}{1-u} = A
 \end{aligned}$$

Rappel :

$$A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{A} = A$$

Donc : A est un réel.

Méthode 2:

• On a : $|u|=1 \Leftrightarrow u\bar{u}=1$

$$\Leftrightarrow u = \frac{1}{\bar{u}}$$

$$\bullet \text{ Donc: } A = \frac{z-\bar{u}\bar{z}}{1-u} = \frac{z-\frac{1}{\bar{u}}\bar{z}}{1-\frac{1}{\bar{u}}} = \frac{\bar{u}z-\bar{z}}{\bar{u}-1} = \bar{A}$$

Donc A est un réel.

Exercice 15

Montrons que : $Z = \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est un réel.

$$\begin{aligned}
 \bar{Z} &= \overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2}{1+\bar{z}_1\bar{z}_2} \\
 &= \frac{\frac{1}{\bar{z}_1}+\frac{1}{\bar{z}_2}}{1+\frac{1}{\bar{z}_1}\times\frac{1}{\bar{z}_2}} \quad ; (\text{car } |z|=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}) \\
 &= \frac{\frac{z_2+z_1}{z_1z_2}}{\frac{z_1z_2+1}{z_1z_2}} = \frac{z_2+z_1}{z_1z_2+1} = Z
 \end{aligned}$$

Puisque $\bar{Z}=Z$, alors : Z est un réel.

Exercice 16

Montrons que : $\forall (z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2 ; |z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{1}{2}(|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2)$

Soit $(z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} \bullet |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_1} \end{aligned}$$

Donc : $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

D'où : $|z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{1}{2}(|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2)$

Exercice 17

Soit $z \in \mathbb{C}$

Montrons que : $\frac{|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$

On pose : $z = x + yi$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

On a :

$$\bullet |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\bullet \frac{|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|}{\sqrt{2}} = \frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}}$$

$$\bullet \text{ Montrons que : } \frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

Nous allons utiliser un raisonnement par équivalence successive :

$$\begin{aligned} \frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2} &\Leftrightarrow (|x| + |y|)^2 \leq 2(x^2 + y^2) \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2|x| \times |y| + y^2 \leq 2(x^2 + y^2) \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2|x| \times |y| \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (|x| - |y|)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Puisque la proposition $(|x| - |y|)^2 \geq 0$ est vraie pour tous réels x et y ,

alors la proposition $\frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ est aussi vraie.

Donc : $\frac{|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z|$

* Montrons que : $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$ C'est-à-dire : $\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$
 $(\sqrt{x^2 + y^2})^2 = x^2 + y^2 = |x|^2 + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 - 2|x| \times |y|$
 or $-2|x| \times |y| \leq 0$, donc : $(\sqrt{x^2 + y^2})^2 \leq (|x| + |y|)^2$

D'où : $\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$

Donc : $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$

Conclusion : $(\forall z \in \mathbb{C}) ; \frac{|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$

Exercice 18

Soit $z \in \mathbb{C}$; montrons que : $|z| \leq 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(3 + 4z + z^2) \geq 0$

On pose : $z = x + yi$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \bullet \quad z^2 + 4z + 3 &= (x + yi)^2 + 4(x + yi) + 3 \\ &= (x^2 - y^2 + 4x + 3) + (2xy + 4y)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \operatorname{Re}(3 + 4z + z^2) &= x^2 - y^2 + 4x + 3 \\ &= 2x^2 - x^2 - y^2 + 4x + 2 + 1 \\ &= 2(x^2 + 2x + 1) + 1 - (x^2 + y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad |z| \leq 1 &\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \Rightarrow 2(x + 1)^2 + 1 - (x^2 + y^2) \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow 1 - (x^2 + y^2) \geq 0 \\ &\Rightarrow 2(x + 1)^2 + 1 - (x^2 + y^2) \geq 0 \\ &\Rightarrow \operatorname{Re}(3 + 4z + z^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Donc : $(\forall z \in \mathbb{C}) ; |z| \leq 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(3 + 4z + z^2) \geq 0$



Argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

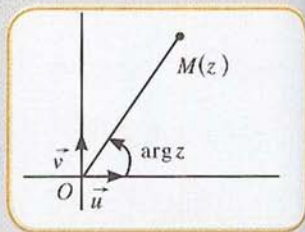
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

Définition:

Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z .

On appelle argument de z et on note $\arg z$, toute mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}; \widehat{OM})$.

On écrit : $\arg z \equiv (\vec{u}; \widehat{OM}) [2\pi]$



Remarque : 0 est l'unique nombre complexe qui n'a pas d'argument.

Soit z un nombre complexe et b un nombre réel. On a :

- $(z \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } \arg(z) = k\pi ; (k \in \mathbb{Z}))$
- $(z \in \mathbb{R}^{++}) \Leftrightarrow \arg(z) = 2k\pi ; (k \in \mathbb{Z})$
- $(z \in \mathbb{R}^{-}) \Leftrightarrow \arg(z) = \pi + 2k\pi ; (k \in \mathbb{Z})$
- $(z \in i\mathbb{R}) \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z})$
- Si : $b > 0$, alors : $\arg(bi) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$
- Si : $b < 0$, alors : $\arg(bi) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$
- (Argument de $-z$) : $\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$
- (Argument de $\bar{z}$) : $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul :

Soit z un nombre complexe non nul tel que : $z = a + bi$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a; b) \neq (0; 0)$ et $|z| = r$ ($r \in \mathbb{R}^{+}$)

On pose $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ on a :
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{r} \\ \sin \theta = \frac{b}{r} \end{cases}$$

donc : $z = a + bi = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

L'écriture : $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$ est appelée forme trigonométrique du nombre complexe non nul z .

Si z est un nombre complexe non nul tel que : $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

avec $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\arg(z) \equiv \alpha[2\pi]$

Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls

alors : $z = z' \Leftrightarrow (|z| = |z'| \text{ et } \arg z \equiv \arg z'[2\pi])$

Remarque :

$$\cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$$

$$-\cos \theta + i \sin \theta = \cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta)$$

$$-\cos \theta - i \sin \theta = \cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta)$$

$$\sin \theta + i \cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

Propriétés :

1 $\arg(z \times z') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi] : (\text{pour tous } z \text{ et } z' \text{ de } \mathbb{C}^*)$

2 $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z [2\pi] : (\text{pour tout } z \text{ de } \mathbb{C}^*)$

3 $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' [2\pi] : (\text{pour tous } z \text{ et } z' \text{ de } \mathbb{C}^*)$

4 $\arg(z^n) \equiv n \arg z [2\pi] \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{Z} \text{ et } z \text{ de } \mathbb{C}^*$

Propriétés : Si $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = r'(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ avec $r > 0$ et $r' > 0$ alors : $z \times z' = rr'(\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha))$

et $\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$

et $\frac{z'}{z} = \frac{r'(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} = \frac{r'}{r}(\cos(\alpha - \theta) + i \sin(\alpha - \theta))$

et $z^n = (r(\cos \theta + i \sin \theta))^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$

et $-z = -r(\cos \theta + i \sin \theta) = r(\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta))$

et $\overline{z} = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$

Propriété :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ soit $A(z_A); B(z_B); C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points du plan.

On a : $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$ et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

Alignement de trois points:

• $A; B$ et C sont alignés si et seulement si $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = k\pi; k \in \mathbb{Z}$
($A; B$ et C sont 2 à 2 distincts)

• parallélisme et orthogonalité de deux droites:

$(AB) \parallel (CD) \iff \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = k\pi; k \in \mathbb{Z}$

$(AB) \perp (CD) \iff \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \text{ (telque } A \neq B \text{ et } C \neq D)$

Remarque :

- L'écriture $z = [r; \theta]$ ne représente plus une forme trigonométrique!
- Toute forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul doit s'écrire forcément: $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ où r est un réel strictement positif (le module) et θ un réel (un argument).

Exercices d'application

Dans tous les exercices suivants, le plan complexe est muni d'un repère ortho-normé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Exercice 19

Donner un argument de chacun des nombres suivants :

$$\begin{array}{lll} z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} & ; & z_2 = -\sqrt{7} & ; & z_3 = i \\ z_4 = -\frac{i}{5} & ; & z_5 = i^{2019} & ; & z_6 = 1 + i \\ z_7 = 1 - i & ; & z_8 = \sqrt{3} - i & ; & z_9 = -1 - \sqrt{3}i \\ z_{10} = z_8 \times z_9 & ; & z_{11} = \frac{z_7}{z_8} & ; & z_{12} = z_7^{2020} \end{array}$$

Exercice 20

Soit A , B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 1 + 3i \quad ; \quad b = 7 - i \quad \text{et} \quad c = 5 + 9i.$$

- 1) Montrer que : $\frac{c-a}{b-a} = i$
- 2) En déduire la nature du triangle ABC .

Exercice 21

Écrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{l} z_1 = \sqrt{3} + i \quad ; \quad z_2 = -2\sqrt{3}i - 2 \quad ; \quad z_3 = (i - \sqrt{3})(1 - \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)i) \\ z_4 = \frac{2 + \sqrt{3} + (2\sqrt{3} + 3)i}{2 - \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})i} \quad ; \quad z_5 = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3} - \frac{1 - 2\sqrt{3}}{2}i \right)^{2020} \end{array}$$

Exercice 22

On considère le nombre complexe $z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

- 1) Calculer z^2 puis $|z^2|$ et $\arg(z^2)$.
- 2) En déduire une forme trigonométrique de z .
- 3) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$ puis celles de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
- 4) Construire les points A , B et C d'affixes respectives z ; $-z$ et z^2 .

Exercice 23

On pose : $\alpha = -\sqrt{2 + \sqrt{3}} - i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

- 1) Calculer α^2 puis en déduire $|\alpha|$ et $\arg(\alpha)$.
- 2) Déterminer chacun des ensembles suivants :

$$E_1 = \{M(z) / i\alpha z \in \mathbb{R}^+\} \quad ; \quad E_2 = \{M(z) / \alpha^2 z \in i\mathbb{R}\}$$

Exercice 19

- $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{R}^+$, donc : $\arg(z_1) \equiv 0[2\pi]$
- $z_2 = -\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7} \in \mathbb{R}^-$, donc : $\arg(z_2) \equiv \pi[2\pi]$
- $z_3 = i$ donc : z_3 est un imaginaire pur avec $\text{Im}(z_3) > 0$,
d'où : $\arg(z_3) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
- $z_4 = -\frac{i}{5}$ donc : z_4 est un imaginaire pur avec $\text{Im}(z_4) < 0$;
d'où : $\arg(z_4) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$
- $z_5 = i^{2019}$

Méthode 1 :

$$\begin{aligned}
 \arg(z_5) &\equiv \arg(i^{2019})[2\pi] \\
 &\equiv 2019 \arg(i)[2\pi] \\
 &\equiv 2019 \times \frac{\pi}{2}[2\pi] \\
 &\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]
 \end{aligned}$$

Méthode 2 : $z_5 = i^{2019} = i^{2018} \times i = (i^2)^{1009} \times i = -i$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc : } \arg(z_5) &\equiv \arg(-i)[2\pi] \\
 &\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]
 \end{aligned}$$

• $z_6 = 1 + i$ • $|z_6| = |1 + i| = \sqrt{2}$

• Soit θ un argument de z_6 .

$$\left. \begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{\text{Re}(z_6)}{|z_6|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \sin \theta &= \frac{\text{Im}(z_6)}{|z_6|} = \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Donc : $\arg(z_6) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

• $z_7 = 1 - i$

Méthode 1 : $z_7 = \bar{z}_6 \Rightarrow \arg(z_7) \equiv -\arg(z_6)[2\pi]$
 $\Rightarrow \arg(z_7) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Méthode 2:

$$\bullet |z_7| = |1 - i| = \sqrt{2} \quad \bullet \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{Donc : } \arg(z_7) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\bullet z_8 = \sqrt{3} - i$$

$$\ast |z_8| = |\sqrt{3} - i| = 2$$

$$\ast z_8 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\text{Donc : } \arg(z_8) \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$\bullet z_9 = -1 - \sqrt{3}i$$

$$\ast |z_9| = |-1 - \sqrt{3}i| = 2$$

$$\ast \begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta \equiv \frac{4\pi}{3} [2\pi]$$

$$\text{Donc : } \arg(z_9) \equiv \frac{4\pi}{3} [2\pi]$$

$$\begin{aligned} \bullet z_{10} &= z_8 \times z_9 \Rightarrow \arg(z_{10}) \equiv \arg(z_8 \times z_9) [2\pi] \\ &\Rightarrow \arg(z_{10}) \equiv \arg(z_8) + \arg(z_9) [2\pi] \\ &\Rightarrow \arg(z_{10}) \equiv -\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} [2\pi] \\ &\Rightarrow \arg(z_{10}) \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi] \end{aligned}$$

$$\text{On peut écrire aussi : } \arg(z_{10}) \equiv -\frac{5\pi}{6} [2\pi]$$

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{z_7}{z_8} \Rightarrow \arg(z_{11}) \equiv \arg\left(\frac{z_7}{z_8}\right) [2\pi] \\ &\Rightarrow \arg(z_{11}) \equiv \arg(z_7) - \arg(z_8) [2\pi] \\ &\Rightarrow \arg(z_{11}) \equiv -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} [2\pi] \\ &\Rightarrow \arg(z_{11}) \equiv -\frac{\pi}{12} [2\pi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet z_{12} &= z_7^{2020} \Rightarrow \arg(z_{12}) \equiv \arg(z_7^{2020}) [2\pi] \\ &\Rightarrow \arg(z_{12}) \equiv 2020 \arg(z_7) [2\pi] \\ &\Rightarrow \arg(z_{12}) \equiv 2020 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) [2\pi] \\ &\Rightarrow \arg(z_{12}) \equiv -505\pi [2\pi] \\ &\Rightarrow \arg(z_{12}) \equiv -\pi [2\pi] \\ &\Rightarrow \arg(z_{12}) \equiv \pi [2\pi] \end{aligned}$$

Exercice 20

1) Montrons que : $\frac{c-a}{b-a} = i$

$$\begin{aligned}\frac{c-a}{b-a} &= \frac{(5+9i)-(1+3i)}{(7-i)-(1+3i)} \\ &= \frac{4+6i}{6-4i} \\ &= \frac{i(-4i+6)}{6-4i} \\ &= i\end{aligned}$$

2) Dédudons la nature du triangle ABC :

- $\frac{c-a}{b-a} = i \Rightarrow \left| \frac{c-a}{b-a} \right| = |i| = 1$
 $\Rightarrow |c-a| = |b-a|$
 $\Rightarrow AC = AB$
- $\frac{c-a}{b-a} = i \Rightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \arg(i) [2\pi]$
 $\Rightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$
 $\Rightarrow (AB) \perp (AC)$

Donc le triangle ABC est rectangle isocèle en A .

Exercice 21

Écrivons sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

- $z_1 = \sqrt{3} + i$

On a : $|z_1| = |\sqrt{3} + i| = 2$

Soit θ un argument de z_1 .

$$\left. \begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\operatorname{Re}(z_1)}{|z_1|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{\operatorname{Im}(z_1)}{|z_1|} = \frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

Donc : $z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

- $z_2 = -2 - 2\sqrt{3}i$

* $|z_2| = |-2(1 + \sqrt{3}i)| = 2|1 + \sqrt{3}i| = 2 \times 2 = 4$

$$\begin{aligned}
 * z_2 &= -2 - 2\sqrt{3}i \\
 &= 4\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
 &= 4\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\
 &= 4\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } z_2 = 4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

$$* z_3 = (i - \sqrt{3})(1 - \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)i)$$

$$\text{On a alors : } z = i - \sqrt{3} \text{ et } z' = 1 - \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)i$$

$$\text{On a alors : } z_3 = z \times z'$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} |z_3| = |z| \times |z'| \\ \arg(z_3) \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi] \end{cases}$$

$$* |z| = |i - \sqrt{3}| = 2$$

$$\begin{aligned}
 z = i - \sqrt{3} &= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\
 &= 2\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\
 &= 2\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) \\
 &= 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \arg(z) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$$

$$\begin{aligned}
 * |z'| &= |1 - \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)i| \\
 &= |1 - \sqrt{3}| \times |1 - i| = (\sqrt{3} - 1) \times \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z' &= (\sqrt{3} - 1)(-1 + i) \\
 &= (\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\
 &= (\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
 &= (\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } |z_3| = 2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2} = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

$$\text{et : } \arg(z_3) \equiv \frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

$$\equiv -\frac{5\pi}{12} [2\pi]$$

$$\text{D'où : } z_3 = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

$$\bullet z_4 = \frac{2 + \sqrt{3} + (2\sqrt{3} + 3)i}{2 - \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})i}$$

$$\text{On pose : } \begin{cases} X = 2 + \sqrt{3} + (2\sqrt{3} + 3)i \\ Y = 2 - \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})i \end{cases}$$

$$\text{On a alors : } z_4 = \frac{X}{Y}$$

$$\begin{aligned} * X &= (2 + \sqrt{3}) + \sqrt{3}(2 + \sqrt{3})i \\ &= (2 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}i) \\ &= (2 + \sqrt{3}) \times 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= (4 + 2\sqrt{3})\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } |X| = 4 + 2\sqrt{3} \text{ et } \arg(X) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\begin{aligned} * Y &= (2 - \sqrt{2})(1 + i) \\ &= (2 - \sqrt{2})\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= (2\sqrt{2} - 2)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } |Y| = 2\sqrt{2} - 2 \text{ et } \arg(Y) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{Or } z_4 = \frac{X}{Y}, \text{ donc :}$$

$$* |z_4| = \left|\frac{X}{Y}\right| = \frac{|X|}{|Y|} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{2} - 2} = (2 + \sqrt{3})(\sqrt{2} + 1)$$

$$\begin{aligned} * \arg(z_4) &\equiv \arg\left(\frac{X}{Y}\right) [2\pi] \\ &\equiv \arg(X) - \arg(Y) [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{12} [2\pi] \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } z_4 = (2 + \sqrt{3})(\sqrt{2} + 1)\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\bullet z_5 = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3} - \frac{1 - 2\sqrt{3}}{2}i\right)^{2020}$$

$$\text{On pose : } Z = \frac{1}{2} - \sqrt{3} - \frac{1 - 2\sqrt{3}}{2}i. \text{ On a alors : } z_5 = Z^{2020}$$

$$* |Z| = \left| \frac{1 - 2\sqrt{3}}{2} \right| \times |1 - i| = \left(\frac{2\sqrt{3} - 1}{2} \right) \times \sqrt{2}$$

$$Z = \left(\frac{2\sqrt{3} - 1}{2} \right) \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \sqrt{2} \left(\frac{2\sqrt{3} - 1}{2} \right) \left(-\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ = \left(\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \right) \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$\text{Donc : } \arg(Z) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

$$* z_5 = Z^{2020} \Rightarrow \begin{cases} |z_5| = |Z|^{2020} = \left(\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \right)^{2020} \\ \arg(z_5) \equiv 2020 \arg(Z) [2\pi] \end{cases}$$

$$\arg(z_5) \equiv 2020 \times \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

$$\equiv 1515\pi [2\pi]$$

$$\equiv \pi [2\pi]$$

$$\text{Donc : } z_5 = \left(\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \right)^{2020} (\cos \pi + i \sin \pi)$$

Exercice 22

$$z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$1) \text{ Calculons } z^2 : * z^2 = 2 - \sqrt{3} - 2i\sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} - (2 + \sqrt{3}) \\ = -2\sqrt{3} - 2i$$

$$* |z^2| = |-2\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{16} = 4$$

$$* z^2 = -2\sqrt{3} - 2i = 4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right) = 4 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$$

$$\text{Donc : } \arg(z^2) \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi]$$

2) Dédudons une forme trigonométrique de z :

$$* |z^2| = |z|^2 = 4 \Rightarrow |z| = \sqrt{4} = 2$$

$$* \arg(z^2) \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi] \Rightarrow 2 \arg(z) \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z) \equiv \frac{7\pi}{12} [\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z) \equiv \frac{7\pi}{12} [2\pi] \text{ ou } \arg(z) \equiv -\frac{5\pi}{12} [2\pi]$$

$$\text{or } \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = |z| \cos \theta \\ \operatorname{Im}(z) = |z| \sin \theta \end{cases} ; (\text{où } \theta \equiv \arg(z) [2\pi])$$

Donc : $\cos \theta > 0$. Or $\cos \frac{7\pi}{12} < 0$ et $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) > 0$

$$\text{Donc : } \theta = -\frac{5\pi}{12}$$

$$\text{Par conséquent : } z = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

3) Déduisons les valeurs exactes de : $\cos \frac{5\pi}{12}$; $\sin \frac{5\pi}{12}$; $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

$$\text{On a : } \begin{cases} z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}} \\ z = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) \end{cases}$$

Donc :

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \text{ et } \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\text{Or } \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{12}$$

$$\text{et } \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{12}$$

$$\text{Donc : } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

4) Construisons les points A , B et C :

$$\bullet z_A = z \Rightarrow \begin{cases} OA = |z| = 2 \\ (\vec{u}; \overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} [2\pi] \end{cases}$$

Donc le point A appartient au cercle de centre O et de rayon 2; de plus $(\vec{u}; \overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} [2\pi]$ on peut donc placer le point A avec précision (voir figure).

$\bullet z_B = -z = -z_A$, donc B est le symétrique de A par rapport à O (origine du repère).

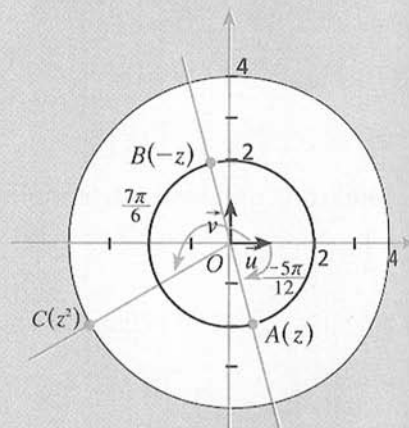
$$\bullet z_C = z^2 \Rightarrow \begin{cases} OC = |z^2| = 4 \\ (\vec{u}; \overrightarrow{OC}) \equiv \pi + \frac{\pi}{6} [2\pi] \end{cases}$$

Donc : C appartient au cercle de

centre O et de rayon 4, de plus

$$(\vec{u}; \overrightarrow{OC}) \equiv \pi + \frac{\pi}{6} [2\pi], \text{ on peut donc}$$

placer le point C avec précision. (voir figure)



$$\alpha = -\sqrt{2+\sqrt{3}} - i\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

1) • Calculons α^2 :

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= 2 + \sqrt{3} + 2i\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} - 2 + \sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} + 2i\end{aligned}$$

• Calculons $|\alpha|$ et $\arg(\alpha)$:

$$\begin{aligned}*\ |\alpha^2| &= |2(\sqrt{3} + i)| = 2|\sqrt{3} + i| = 2 \times 2 = 4 \\ |\alpha^2| &= 4 \Rightarrow |\alpha| = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}*\ \alpha^2 &= 2\sqrt{3} + 2i \\ &= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \arg(\alpha^2) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$\arg(\alpha^2) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \Rightarrow 2\arg(\alpha) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(\alpha) \equiv \frac{\pi}{12} [\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(\alpha) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi] \text{ ou } \arg(\alpha) \equiv \pi + \frac{\pi}{12} [2\pi]$$

$$\text{Or : } \operatorname{Re}(\alpha) < 0, \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0 \text{ et } \cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) < 0, \text{ donc : } \arg(\alpha) \equiv \frac{13\pi}{12} [2\pi]$$

2) Déterminons les ensembles E_1 et E_2 :

$$\bullet E_1 = \{M(z) / i\alpha z \in \mathbb{R}^+\}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$M(z) \in E_1 \Leftrightarrow i\alpha z \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow i\alpha z = 0 \text{ ou } \arg(i\alpha z) \equiv 0 [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } \arg(i) + \arg(\alpha) + \arg(z) \equiv 0 [2\pi]$$

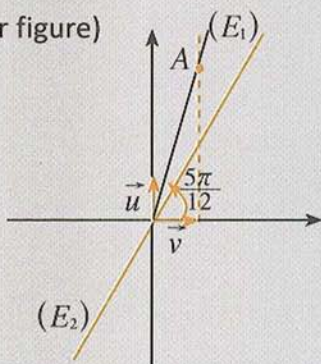
$$\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2} - \frac{13\pi}{12} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } \arg(z) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow M = O \text{ ou } (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$$

Donc E_1 est la demi-droite $[OA)$ où A est le point d'abscisse 1 tel que :

$$(\vec{u}; \vec{OA}) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi] \text{ (voir figure)}$$



Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

Définition:

Soit z un nombre complexe non nul;

Si : $|z| = r$ et $\arg z \equiv \theta [2\pi]$ alors z s'écrit sous forme : $z = re^{i\theta}$; cette écriture est appelée **forme exponentielle** du nombre complexe z .

Et on a : $r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$.

1) Notation exponentielle et opérations

Soit $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ tels que $r > 0$ et $r' > 0$

On a : $z \times z' = re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \quad \text{et} \quad \frac{z}{z'} = \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$$

$$\overline{z} = \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta} \quad \text{et} \quad -z = -re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)}$$

2) Formules d'Euler

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ et $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

3) Formule de Moivre

$(\forall \theta \in \mathbb{R}); (\forall n \in \mathbb{N}); (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

C'est-à-dire : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Exercices d'application

Exercice 24

Mettre sous forme exponentielle chacun des nombres suivants:

1) $z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5})$

2) $z_2 = 3(-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7})$

$$3) z_3 = \sqrt{2}(-\cos \frac{\pi}{9} - i \sin \frac{\pi}{9})$$

$$4) z_4 = -\sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{11} + i \sin \frac{\pi}{11})$$

$$5) z_5 = \frac{3}{2}i$$

$$6) z_6 = -7$$

$$7) z_7 = 2 + 2i$$

$$8) z_8 = -\sqrt{3} - 3i$$

Exercice 25

Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe z dans chacun des cas suivants :

$$1) z = \frac{-2}{\sqrt{3} + i}$$

$$4) z = (3 - \sqrt{3}i)(-1 + i)$$

$$2) z = \frac{2 + 2i}{\sqrt{3} + i}$$

$$5) z = i(1 + \sqrt{3}i)(-1 - i)^3$$

$$3) z = (1 - \sqrt{3}i)^{2016}$$

$$6) z = \frac{\sqrt{3} - i}{(-2 + 2i)^2}$$

Exercice 26

I- 1) Montrer que :

$$a) (\forall \alpha \in \mathbb{R}); 1 + e^{i\alpha} = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

$$b) \text{ Montrer que : } (\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2); e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2); e^{ia} - e^{ib} = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\left(\frac{a+b}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

II- On pose : $u = 1 + i\sqrt{3}$ et $v = \sqrt{2}(1 + i)$

1) Écrire sous forme exponentielle les nombres u et v

2) On pose $t = (\sqrt{2} + 1) + i(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

Écrire t sous forme exponentielle.

III- Soit $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$

On pose : $z = re^{i\theta}$

Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $Z = z - e^{i\frac{\pi}{3}} \bar{z}$

Exercice 27

1) Soit x un nombre réel tel que $0 < x < 2\pi$

Déterminer, suivant les valeurs de x , une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = 1 + \cos x + i \sin x ; Z_2 = 1 - \cos x + i \sin x ; Z_3 = 1 - \sin x + i \cos x$$

2) Application

Écrire chacun des nombres complexes suivants sous forme trigonométrique

$$z_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad ; \quad z_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad ; \quad z_3 = 2 + \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

3) Soit θ un nombre réel tel que : $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe : $X = \frac{\tan \theta}{1 + i \tan \theta}$

Exercice 28

Soit α un réel de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{4}[$.

$$\text{On pose : } Z = \frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{\sqrt{1 + \sin(2\alpha)} + i\sqrt{1 - \sin(2\alpha)}}$$

Déterminer $|Z|$ et $\arg Z$

Exercice 29

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$$\text{On pose : } u = e^{i\frac{\pi}{n}} \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$1) \text{ Calculer } T = \sum_{k=0}^{n-1} u^k$$

$$2) \text{ En déduire que : } S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

Exercice 30

Linéariser chacune des expressions suivantes :

$$f(x) = \sin^3(x) \quad ; \quad g(x) = \cos^3(x) \times \sin^2(x)$$

Solutions

Exercice 24

$$\begin{aligned} 1) \text{ On a : } z_1 &= 2\left(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}\right) \\ &= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{5}} \end{aligned}$$

$$\text{donc : } z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{5}}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ On a : } z_2 &= 3\left(-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right) \\ &= 3\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)\right) \\ &= 3\left(\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)\right) = 3e^{i\frac{6\pi}{7}} \end{aligned}$$

donc : $z_2 = 3e^{i\frac{6\pi}{7}}$

$$\begin{aligned} 3) \text{ On a : } z_3 &= \sqrt{2}(-\cos \frac{\pi}{9} - i \sin \frac{\pi}{9}) \\ &= \sqrt{2}(\cos(\pi + \frac{\pi}{9}) + i \sin(\pi + \frac{\pi}{9})) \\ &= \sqrt{2}(\cos(\frac{10\pi}{9}) + i \sin(\frac{10\pi}{9})) = \sqrt{2}e^{i\frac{10\pi}{9}} \end{aligned}$$

donc : $z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{10\pi}{9}}$

$$\begin{aligned} 4) \text{ On a : } z_4 &= -\sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{11} + i \sin \frac{\pi}{11}) \\ &= \sqrt{3}(-\cos(\frac{\pi}{11}) - i \sin(\frac{\pi}{11})) \\ &= \sqrt{3}(\cos(\pi + \frac{\pi}{11}) + i \sin(\pi + \frac{\pi}{11})) \\ &= \sqrt{3}(\cos(\frac{12\pi}{11}) + i \sin(\frac{12\pi}{11})) \\ &= \sqrt{3}e^{i\frac{12\pi}{11}} \end{aligned}$$

donc : $z_4 = \sqrt{3}e^{i\frac{12\pi}{11}}$

$$5) \text{ On a : } z_5 = \frac{3}{2}i = \frac{3}{2}(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$6) z_6 = -7 = 7(\cos \pi + i \sin \pi) = 7e^{i\pi}$$

donc : $z_6 = 7e^{i\pi}$

$$\begin{aligned} 7) \text{ On a : } z_7 &= 2 + 2i = 2\sqrt{2}(\frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}}i) \\ z_7 &= 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ z_7 &= 2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

donc : $z_7 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$8) \text{ On a : } z_8 = -\sqrt{3} - 3i$$

Alors : $|z_8| = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } z_8 &= 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2\sqrt{3}}i\right) \\ &= 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= 2\sqrt{3}(\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) + i \sin(\pi + \frac{\pi}{3})) \\ &= 2\sqrt{3}(\cos(\frac{4\pi}{3}) + i \sin(\frac{4\pi}{3})) \end{aligned}$$

D'où : $z_8 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Exercice 25

$$1) \text{ On a : } z = \frac{-2}{\sqrt{3} + i} \text{ et } -2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2e^{i\pi}$$

$$\text{Et : } \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\text{Alors : } z = \frac{2e^{i\pi}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i(\pi - \frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\text{Donc : } z = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$2) \text{ On a : } z = \frac{2+2i}{\sqrt{3}+i} \text{ et } 2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{et } \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\text{donc : } z = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})} \text{ d'où : } z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$3) z = (1 - \sqrt{3}i)^{2016}$$

$$\text{On a : } |1 - i\sqrt{3}| = 2$$

$$\text{Donc : } 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{D'où : } z = (2e^{-i\frac{\pi}{3}})^{2016} = 2^{2016}e^{-i\frac{2016}{3}\pi} = 2^{2016}e^{-i(672\pi)}$$

$$\text{Ainsi : } z = 2^{2016}e^{i0} \text{ ou } z = 2^{2016}e^{i2\pi}$$

$$4) z = (3 - \sqrt{3}i)(-1 + i)$$

$$\text{On a : } |3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } 3 - i\sqrt{3} &= 2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} - i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) \\ &= 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\ &= 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$\text{Et on a : } |-1 + i| = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } -1 + i &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } z &= (3 - \sqrt{3}i)(-1 + i) = 2\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{6}} \times \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ &= 2\sqrt{6} e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4})} = 2\sqrt{6} e^{i\frac{7\pi}{12}} \end{aligned}$$

$$5) z = i(1 + i\sqrt{3})(-1 - i)^3$$

$$\text{On a : } i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\bullet 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\bullet -1 - i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } z &= i(1 + \sqrt{3}i)(-1 - i)^3 \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2 e^{i\frac{\pi}{3}} \times (\sqrt{2})^3 e^{i\frac{15\pi}{4}} \\ &= 4\sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{15\pi}{4})} \\ &= 4\sqrt{2} e^{i\frac{55\pi}{12}} \quad \left(\text{car } \left(\frac{55\pi}{12} - 4\pi = \frac{7\pi}{12}\right)\right) \\ &= 4\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}} \end{aligned}$$

$$6) z = \frac{\sqrt{3} - i}{(-2 + 2i)^2}$$

$$\text{On a : } \bullet \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2 e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$\bullet (-2 + 2i)^2 = 4(1 - i)^2 = -8i = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Donc : } z = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{8e^{-i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{4} e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Exercice 26

I- Soit α un réel ;

$$\begin{aligned} \bullet 1 + e^{i\alpha} &= e^{i\frac{\alpha}{2}} \times e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}} \times e^{i\frac{\alpha}{2}} \\ &= e^{i\frac{\alpha}{2}} (e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}}) \\ &= e^{i\frac{\alpha}{2}} \times \left(2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } 1 + e^{i\alpha} = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

$$\begin{aligned} \bullet * 1 - e^{i\alpha} &= e^{i\frac{\alpha}{2}} \times e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}} \times e^{i\frac{\alpha}{2}} \\ &= e^{i\frac{\alpha}{2}} (e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}}) \\ &= e^{i\frac{\alpha}{2}} \left(-2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times e^{-i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\alpha}{2}} \\ &= 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times e^{i(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

Rappel :

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$$

Donc : $1 - e^{ia} = \left(2 \sin \frac{\alpha}{2}\right) \times e^{i\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}$

2) Soit a et b deux nombres réels.

$$\begin{aligned} \bullet e^{ia} + e^{ib} &= e^{ib} (e^{i(a-b)} + 1) \\ &= e^{ib} \times \left(2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)}\right) \quad (\text{d'après la question 1}) \\ &= 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\left(b + \frac{a-b}{2}\right)} \end{aligned}$$

Donc : $e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

$$\begin{aligned} \bullet e^{ia} - e^{ib} &= e^{ia} + e^{i\pi} \times e^{ib} ; (\text{car } -1 = e^{i\pi}) \\ &= e^{ia} + e^{i(\pi+b)} \\ &= 2 \cos\left(\frac{a-(b+\pi)}{2}\right) e^{i\left(\frac{a+b+\pi}{2}\right)} \end{aligned}$$

Donc : $e^{ia} - e^{ib} = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\left(\frac{a+b}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}$

II- 1) Écrivons u et v sous forme exponentielle

$$\begin{aligned} \bullet u &= 1 + i\sqrt{3} \\ &= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Donc $u = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\begin{aligned} \bullet v &= \sqrt{2}(1 + i) \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Donc : $v = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) Écrivons t sous forme exponentielle

$$\begin{aligned} t &= (\sqrt{2} + 1) + i(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \\ &= \sqrt{2} + 1 + i\sqrt{2} + i\sqrt{3} \\ &= (1 + i\sqrt{3}) + \sqrt{2}(1 + i) \\ &= u + v \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= 2(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{4}}) \\ &= 4 \cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}}{2}\right) e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}}{2}\right)} \end{aligned}$$

Donc : $t = 4 \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) e^{i\frac{7\pi}{24}}$

III- Écrivons Z sous forme exponentielle

On a : $z = re^{i\theta}$ et $Z = z - e^{i\frac{\pi}{3}} \bar{z}$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } Z &= re^{i\theta} - e^{i\frac{\pi}{3}} \times re^{-i\theta} \\ &= r(e^{i\theta} - e^{i(\frac{\pi}{3}-\theta)}) \\ &= r \left(2 \sin\left(\frac{\theta - (\frac{\pi}{3} - \theta)}{2}\right) e^{i(\frac{\theta + \frac{\pi}{3} - \theta}{2} + \frac{\pi}{2})} \right) \end{aligned}$$

D'où : $Z = 2r \cdot \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$

• Vérifions si $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3} &\Rightarrow \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \\ &\Rightarrow \frac{\pi}{6} < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Donc : $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) > 0$; et comme $2r > 0$

Alors : $2r \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est une écriture de Z sous forme exponentielle.

Exercice 27

1) Déterminons une forme trigonométrique de Z_1 ; Z_2 et Z_3

$$\begin{aligned} \bullet Z_1 &= 1 + \cos x + i \sin x ; 0 < x < 2\pi \\ &= 1 + e^{ix} \\ &= e^{i\frac{x}{2}} (e^{-i\frac{x}{2}} + e^{i\frac{x}{2}}) \\ &= e^{i\frac{x}{2}} \times 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + i \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

• Étudions le signe de $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$$0 < x < 2\pi \Rightarrow 0 < \frac{x}{2} < \pi$$

• Si $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire $0 < x < \pi$; alors $\cos\left(\frac{x}{2}\right) > 0$

Donc une forme trigonométrique de Z_1 est :

$$Z_1 = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + i \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right)$$

• si $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire $x = \pi$, alors $\cos\frac{x}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc $z_1 = 0$

Dans le cas Z_1 n'admet pas de forme trigonométrique

• Si $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \pi$ c'est-à-dire $\pi < x < 2\pi$, alors $\cos\left(\frac{x}{2}\right) < 0$, donc

$$|Z_1| = -2 \cos \frac{x}{2}$$

$$Z_1 = -2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \left(-\cos\left(\frac{x}{2}\right) - i \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$Z_1 = -2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right)\right)$$

Cette dernière expression est une forme trigonométrique de Z_1

$$\bullet Z_2 = 1 - \cos x + i \sin x$$

$$= 1 - (\cos x - i \sin x)$$

$$= 1 - e^{-ix}$$

$$= e^{-i\frac{x}{2}} (e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}})$$

$$= e^{-i\frac{x}{2}} \times (2i \sin\left(\frac{x}{2}\right))$$

$$= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{-i\frac{x}{2}}$$

$$= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \times e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2})}$$

or $0 < \frac{x}{2} < \pi$, donc $\sin\left(\frac{x}{2}\right) > 0$, d'où $|Z_2| = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

et par conséquent, $Z_2 = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\right)$

Cette expression est une forme trigonométrique de Z_2 .

$$\bullet Z_3 = 1 - \sin x + i \cos x$$

$$= 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$= 1 + e^{i(\frac{\pi}{2} + x)}$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right)$$

$$0 < \frac{x}{2} < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} < \frac{5\pi}{4}$$

• Si $\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$; c'est-à-dire $0 < x < \frac{\pi}{2}$

alors $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) > 0$, donc $|Z_3| = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$, et par suite

$$Z_3 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right)$$

Cette expression est une forme trigonométrique de Z_3 .

• Si $\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{2}$ alors $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 0$, donc $Z_3 = 0$; dans ce cas Z_3 n'admet pas de forme trigonométrique.

Si $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} < \frac{5\pi}{4}$ c'est-à-dire : $\frac{\pi}{2} < x < 2\pi$; alors $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) < 0$

$$\text{donc } |Z_3| = -2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } Z_3 &= -2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \right) \\ &= -2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{5\pi}{4}\right) \right)\end{aligned}$$

Cette expression est une forme trigonométrique de Z_3 .

2) Application : Écrivons chacun des nombres complexes suivants sous forme trigonométrique

$$\begin{aligned}\bullet z_1 &= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ &= 1 + \cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} \\ &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right) \quad (\text{d'après 1) car } 0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet z_2 &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ &= 1 - \cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

(même forme que z_2 de la question 1) avec $x = \frac{\pi}{6}$ et $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$)

$$\begin{aligned}\text{Donc : } z_2 &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet z_3 &= 2 + \sqrt{2} - i\sqrt{2} \\ &= 2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 2 \left(1 + \cos\frac{\pi}{4} - i \sin\frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2 \left(1 + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= 2 \left[2 \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) \left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) \right) \right] \\ &= 4 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) \right)\end{aligned}$$

3) Écrivons X sous forme trigonométrique

$$X = \frac{\tan \theta}{1 + i \tan \theta} \text{ avec } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \bullet 1 + i \tan \theta &= 1 + i \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{1}{\cos \theta} (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= \frac{1}{\cos \theta} e^{i\theta} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } X = \frac{\tan \theta}{\frac{1}{\cos \theta} e^{i\theta}} = \sin \theta e^{-i\theta}$$

$$\bullet \text{ Si } -\frac{\pi}{2} < \theta < 0 ; \text{ alors } \sin \theta < 0, \text{ donc } |X| = -\sin \theta$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } X &= -\sin \theta (-\cos(-\theta) - i \sin(-\theta)) \\ &= -\sin \theta (\cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta)) \end{aligned}$$

Dans ce cas, $-\sin \theta (\cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta))$ est une forme trigonométrique de X .

$$\bullet \text{ Si } \theta = 0, \text{ alors } \sin \theta = 0, \text{ donc } X = 0$$

dans ce cas X n'admet pas de forme trigonométrique.

$$\bullet \text{ Si } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \text{ alors } \sin \theta > 0, \text{ donc } |X| = \sin \theta, \text{ d'où } \sin \theta (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \text{ est une forme trigonométrique de } X.$$

Exercice 28

$$\text{Calculons } |Z| \text{ et } \arg(Z) \text{ où } Z = \frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{\sqrt{1 + \sin 2\alpha} + 4\sqrt{1 - \sin 2\alpha}}$$

$$\begin{aligned} \bullet 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha &= 1 + e^{i\alpha} \\ &= 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \sqrt{1 + \sin 2\alpha} &= \sqrt{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} \\ &= \sqrt{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} \\ &= \sqrt{2} \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \alpha \in]0; \frac{\pi}{4}[&\Rightarrow \frac{-\pi}{4} < -\alpha < 0 \\ &\Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - \alpha < \frac{\pi}{4} \\ &\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \sqrt{1 + \sin 2\alpha} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

$$\text{De même : } \sqrt{1 - \sin 2\alpha} = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \sqrt{1 + \sin 2\alpha} + i\sqrt{1 - \sin 2\alpha} &= \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right) \\ &= \sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } Z &= \frac{2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}} \\ &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} + \alpha\right)} \\ &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\left(\frac{3\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \alpha \in]0; \frac{\pi}{4}[&\Rightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{8} \\ &\Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } |Z| = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ et } \arg(Z) \equiv \left(\frac{3\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$$

Exercice 29

$$1) \text{ Calculons } T = \sum_{k=0}^{n-1} u^k$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

$$\text{On a : } T = 1 + u + u^2 + \dots + u^{n-2} + u^{n-1}$$

$$uT = u + u^2 + u^3 + \dots + u^{n-1} + u^n$$

$$\text{Donc : } T - uT = 1 - u^n$$

$$\text{or : } u \neq 1, \text{ donc } T = \frac{1 - u^n}{1 - u}$$

On a :

$$\bullet 1 - u^n = 1 - \left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^n = 1 - e^{i\pi} = 2$$

$$\bullet \quad 1 - u = 1 - e^{i\frac{\pi}{n}} \\ = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{2}\right)} \quad (\text{voir l'exercice 26 - I})$$

$$\text{Donc : } T = \frac{2}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{2}\right)}}$$

$$\text{D'où : } T = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)}$$

$$2) \text{ D\u00e9duisons que } S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$u^k = e^{i\frac{k\pi}{n}} = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\text{Donc : } T = \sum_{k=1}^{n-1} u^k = \sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + i \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\text{D'o\u00f9 : } S_n = \text{Im}(T)$$

$$\text{or, d'apr\u00e8s la question 1), } T = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)}$$

$$\text{Donc : } \text{Im}(T) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)$$

$$\text{Donc : } S_n = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \times \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$\text{D'o\u00f9 : } S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \quad ((\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}); \text{ car } \frac{\pi}{2n} \neq \frac{\pi}{2} [2\pi])$$

Exercice 30

• Lin\u00e9arisons $f(x) = \sin^3 x$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \sin^3(x) &= \frac{1}{8i^3} (e^{ix} - e^{-ix})^3 \\ &= \frac{i}{8} ((e^{ix})^3 - 3(e^{ix})^2 e^{-ix} + 3e^{ix} (e^{-ix})^2 - (e^{-ix})^3) \\ &= \frac{i}{8} [e^{i3x} - e^{-i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix}] \end{aligned}$$

$$= \frac{i}{8} [2i \sin(3x) - 3 \times 2i \sin x]$$

$$= -\frac{1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin x$$

D'où : $f(x) = -\frac{1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x)$

• Linéarisons $g(x)$: $g(x) = \cos^5 x \times \sin^2 x$; $x \in \mathbb{R}$

• On a : $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

Donc : $\sin^2(x) = \frac{1}{(2i)^2} (e^{i2x} - 2 + e^{-i2x})$
 $= -\frac{1}{4} (e^{i2x} + e^{-i2x} - 2)$

• $\cos^5(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^5$
 $= \frac{1}{2^5} [e^{i5x} + 5e^{i4x} \times e^{-ix} + 10e^{i3x} \times e^{-i2x} + 10e^{i2x} \times e^{-i3x} + 5e^{ix} \times e^{-i4x} + e^{-i5x}]$
 $= \frac{1}{2^5} [e^{i5x} + e^{-i5x} + 5(e^{i3x} + e^{-i3x}) + 10(e^{ix} + e^{-ix})]$

Donc :

$$\begin{aligned} \cos^5 x \times \sin^2 x &= -\frac{1}{2^7} (e^{i2x} + e^{-i2x} - 2) [e^{i5x} + e^{-i5x} + 5(e^{i3x} + e^{-i3x}) + 10(e^{ix} + e^{-ix})] \\ &= -\frac{1}{2^7} [e^{i7x} + e^{-i7x} + 5(e^{i5x} + e^{-i5x}) + 10(e^{i3x} + e^{-i3x}) + e^{i3x} + 5e^{ix} + 10e^{-ix} + e^{-i3x} \\ &\quad + 5e^{-ix} + 10e^{ix} - 2(e^{i5x} + e^{-i5x}) - 10(e^{i3x} + e^{-i3x}) - 20(e^{ix} + e^{-ix})] \\ &= -\frac{1}{2^7} [e^{i7x} + e^{-i7x} + 3(e^{i5x} + e^{-i5x}) + (e^{i3x} + e^{-i3x}) - 5(e^{ix} + e^{-ix})] \\ &= -\frac{1}{2^7} [2 \cos(7x) + 6 \cos(5x) + 2 \cos(3x) - 10 \cos x] \\ &= -\frac{1}{2^6} \cos(7x) - \frac{3}{2^6} \cos(5x) - \frac{1}{2^6} \cos(3x) + \frac{5}{2^6} \cos(x) \end{aligned}$$

Donc : $g(x) = -\frac{1}{64} \cos(7x) - \frac{3}{64} \cos(5x) - \frac{1}{64} \cos(3x) + \frac{5}{64} \cos(x)$.



Racines nième d'un nombre complexe non nul -
Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

1) Racines nième d'un complexe non nul

Définition:

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$

On appelle racine $n^{\text{ième}}$ de z , tout nombre complexe X vérifiant : $X^n = z$

- Cas particulier : Racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$

- Tout nombre complexe vérifiant $z^n = 1$ est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité (c'est-à-dire 1)
- L'ensemble des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité est : $u_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}}; k \in \{0; 1; \dots; n-1\}\}$
 $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}; u_k = (e^{i\frac{2\pi}{n}})^k = u_1^k$ avec $u_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$
- Les racines cubiques de l'unité sont : 1; j et $\bar{j}$ avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Remarques :

- $\bar{j} = j^2$ • $j^3 = 1$ • $1 + j + j^2 = 0$
- Les points $A_1(1)$; $A_2(j)$ et $A_3(j^2)$ sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre O (origine du repère) et de rayon 1.
- Si z est un nombre complexe non nul de forme trigonométrique $re^{i\theta}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, alors les racines $n^{\text{ième}}$ de z sont les nombres complexes :
 $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$ avec $k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$

2) Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

a) Racines carrées d'un complexe non nul

- Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées (et elles sont opposées)
- Si $z = re^{i\theta}$; ($r > 0$) alors les racines carrées de z sont :
 $z_1 = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = -z_1 = -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{r} e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)}$
- Si $z = a + bi$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors on cherche des réels x et y tels que : $(x + yi)^2 = a + bi$ pour déterminer les racines carrées de z .

b) Résolution d'équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit a , b et c des nombres complexes tels que $a \neq 0$

Pour résoudre l'équation : $az^2 + bz + c = 0$

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta = 0$ l'équation admet une racine double : $z = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta \neq 0$, soit δ une racine carrée de Δ : $\delta^2 = \Delta$

L'équation admet dans ce cas deux solutions :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$$

Exercices d'application

Exercice 31

- 1) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $a = 4(-1 + i\sqrt{3})$
- 2) Déterminer les racines quatrièmes du nombre complexe $b = 8\sqrt{2}(1 + i)$

Exercice 32

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$ et écrire les solutions sous forme algébrique.
- 2) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

Exercice 33

Déterminer les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -\frac{1}{2} \quad ; \quad z_2 = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad z_3 = 2i \quad ; \quad z_4 = -2i$$
$$z_5 = -5 - 12i \quad ; \quad z_6 = 1 + 2\sqrt{2}i \quad ; \quad z_7 = -1 - 4\sqrt{3}i \quad ; \quad z_8 = \frac{73}{36} - \sqrt{2}i$$

Exercice 34

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : z^2 - 2z + 2 = 0$$
$$(E_2) : z^2 + (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$$
$$(E_3) : z^2(1 - z^2) = 16$$
$$(E_4) : z^2 - 2(1 + \cos \alpha)z + 2(1 + \cos \alpha) = 0$$
$$(E_5) : z + 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z|$$

Exercice 35

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
 $(E_1) : z^3 + (1 + 2i)z^2 + (-1 + 5i)z - 2i - 6 = 0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
 $(E_2) : z^3 + 2(1 + i)z^2 + (-6 + 5i)z - 9 - 3i = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.
- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
 $(E_3) : z^4 - 2(1 - i)z^3 - 4z^2 - 2(1 + 9i)z + 15 = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle et une solution imaginaire pure.

Exercice 36

- 1) Déterminer les racines 7ième de l'unité
- 2) On pose : $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$; $u = z + z^2 + z^4$ et $v = z^3 + z^5 + z^6$

- a) Montrer que les nombres complexes u et v sont conjugués
 b) Montrer que $\text{Im}(u) > 0$
 c) Calculer $u + v$ et $u \times v$
 d) En déduire la valeur de u et de v
 e) En utilisant les questions précédentes, déterminer la valeur de chacune des sommes :

$$s = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} \quad \text{et} \quad S = \sum_{k=4}^{10} \sin\left(\frac{2k\pi}{7}\right)$$

Solutions

Exercice 31

1) Déterminons les racines cubiques de $a = 4(-1 + i\sqrt{3})$

- Écrivons a sous forme exponentielle

On a : $|a| = 4|-1 + i\sqrt{3}| = 4 \times 2 = 8$, donc :

$$\begin{aligned} a &= 8\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 8\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 8\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &= 8e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

$a = 8e^{i\frac{2\pi}{3}}$, donc les racines cubiques de a sont les nombres :

$$z_k = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \quad \text{avec } k \in \{0; 1; 2\} \quad (\text{car } \sqrt[3]{8} = 2)$$

$$\text{c'est-à-dire : } z_0 = 2e^{i\frac{2\pi}{9}}; z_1 = 2e^{i\frac{8\pi}{9}} \text{ et } z_2 = 2e^{i\frac{14\pi}{9}} = 2e^{-i\frac{4\pi}{9}}$$

2) Déterminons les racines quatrièmes de b

$$\begin{aligned} b &= 8\sqrt{2}(1 + i) \\ &= 8\sqrt{2} \times \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= 16\left(\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 16e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Les racines 4ième de b sont les nombres $z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{16} + \frac{2k\pi}{4}\right)}$ avec $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

$$\text{c'est-à-dire } z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{16}}; z_1 = 2e^{i\frac{9\pi}{16}}; z_2 = 2e^{i\frac{17\pi}{16}} \text{ et } z_3 = 2e^{i\frac{25\pi}{16}}$$

Exercice 32

1) Résolvons l'équation :

$$(E) : z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$$

Résoudre cette équation revient à déterminer les racines cubiques du nombre

complexe $A = 4\sqrt{2}(-1 + i)$

$$\text{On a : } A = 4\sqrt{2} \times \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

$$= 8 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$$

$$= 8e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Donc les racines cubiques de A sont les nombres complexes :

$$z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \text{ avec } k \in \{0; 1; 2\}$$

Les solutions de cette équation sont donc :

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}; z_1 = 2e^{i\frac{11\pi}{12}} \text{ et } z_2 = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}$$

Écrivons ces solutions sous forme algébrique.

étant donné que $\frac{11\pi}{12}$ et $\frac{19\pi}{12}$ ne sont pas des valeurs remarquables dont on connaît le cos et le sin, nous allons procéder autrement :

Puisque $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ est une solution de (E) , alors : $z_0^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$

$$\text{Donc } (E) \Leftrightarrow z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$$

$$\Leftrightarrow z^3 = z_0^3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^3 = 1 \text{ (car } z_0 \neq 0)$$

Donc $\frac{z}{z_0}$ est une racine cubique de l'unité. Or les racines cubiques de l'unité sont $1; j$ et $\bar{j}$ avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$; donc $\frac{z}{z_0} = 1$ ou $\frac{z}{z_0} = j$ ou $\frac{z}{z_0} = \bar{j}$

D'où : $z = z_0$ ou $z = jz_0$ ou $z = \bar{j}z_0$

$$\text{Donc : } z = z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$\begin{aligned} \text{ou } z &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\sqrt{2} + \sqrt{2}i) \\ &= \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ou } z &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\sqrt{2} + \sqrt{2}i) \\ &= \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} + i\left(\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}\right) \end{aligned}$$

2) Dédudons les valeurs exactes de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$

d'après la question 1) le nombre complexe $2e^{i\frac{11\pi}{12}}$ est une solution de l'équation (E)

$$2e^{i\frac{11\pi}{12}} = 2\left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12}\right) \text{ comme } \cos \frac{11\pi}{12} < 0 \text{ et } \sin \frac{11\pi}{12} > 0$$

alors cette solution correspond à $\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

$$\text{Donc } \begin{cases} \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Exercice 33

Déterminons les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants :

- $z_1 = -\frac{1}{2}$

$z_1 \in \mathbb{R}^+$, donc les racines carrées de z_1 sont : $i\sqrt{-z_1}$ et $-i\sqrt{-z_1}$

c'est-à-dire : $i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

- $z_2 = \frac{\pi}{4}$

$z_2 \in \mathbb{R}^+$, donc les racines carrées de z_2 sont $\sqrt{z_2}$ et $-\sqrt{z_2}$ c'est-à-dire $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

- $z_3 = 2i$

Déterminons Z tel que : $Z^2 = z_3$

Méthode 1 :

On pose $Z = x + yi$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} Z^2 = z_3 &\Leftrightarrow (x + yi)^2 = 2i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi = 2i \\ |x + yi|^2 = |2i| \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (1) \\ 2xy = 2 & (2) \\ x^2 + y^2 = 2 & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

En additionnant les équations (1) et (3), on obtient : $2x^2 = 2$

Donc : $x = 1$ ou $x = -1$

D'où : $y = 1$ ou $y = -1$

Or x et y sont de même signe car $xy > 0$ d'après (3), donc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$
 ou $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

D'où : $Z = 1 + i$ ou $Z = -1 - i$

Donc les racines carrées $2i$ sont $1 + i$ et $-1 - i$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned} z_3 &= 2i \\ &= 1 + 2i - 1 \\ &= 1 + 2i + i^2 \\ &= (1 + i)^2 = (-1 - i)^2 \end{aligned}$$

Donc $1 + i$ et $-1 - i$ sont les racines carrées de z_3

• $z_4 = -2i$

On peut utiliser la méthode 1 ou la méthode 2 et on peut aussi utiliser le résultat précédent :

$$\begin{aligned} 2i = (1 + i)^2 &\Rightarrow -2i = -(1 + i)^2 \\ &\Rightarrow -2i = i^2(1 + i)^2 \\ &\Rightarrow -2i = (i - 1)^2 \end{aligned}$$

Donc $-1 + i$ et $1 - i$ sont les racines carrées de $-2i$

• $z_5 = -5 - 12i$

On peut utiliser la méthode 1 ou la méthode 2 pour faire apparaître une identité remarquable

$$\begin{aligned} z_5 &= -5 - 12i \\ &= -5 - 2 \times 2 \times 3i \\ &= -9 + 4 - 2 \times 2 \times 3i \\ &= (3i)^2 - 2 \times 2 \times 3i + 2^2 \\ &= (2 - 3i)^2 \end{aligned}$$

Donc $2 - 3i$ et $-2 + 3i$ sont les racines carrées de $-5 - 12i$

• $z_6 = 1 + 2\sqrt{2}i$

$$\begin{aligned} &= 2 - 1 + 2\sqrt{2}i \\ &= (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}i + i^2 \\ &= (\sqrt{2} + i)^2 \end{aligned}$$

Donc $\sqrt{2} + i$ et $-\sqrt{2} - i$ sont les racines carrées de $1 + 2\sqrt{2}i$

$$\begin{aligned}
 \bullet z_7 &= -1 - 4\sqrt{3}i \\
 &= -1 - 2 \times 2\sqrt{3}i \\
 &= 3 - 4 - 2 \times 2\sqrt{3}i \\
 &= (\sqrt{3})^2 - 2 \times 2\sqrt{3}i + (2i)^2 \\
 &= (\sqrt{3} - 2i)^2
 \end{aligned}$$

Donc $\sqrt{3} - 2i$ et $-\sqrt{3} + 2i$ sont les racines carrées du nombre $-1 - 4\sqrt{3}i$

$$\bullet z_8 = \frac{73}{36} - \sqrt{2}i$$

Déterminons Z tel que $Z^2 = z_8$

On pose $Z = x + yi$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$Z^2 = z_8 \Leftrightarrow (x + yi)^2 = \frac{73}{36} - \sqrt{2}i$$

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{73}{36} & (1) \\ xy = -\frac{\sqrt{2}}{2} & (2) \\ x^2 + y^2 = \left| \frac{73}{36} - \sqrt{2}i \right| = \frac{89}{36} & (3) \end{cases}
 \end{aligned}$$

En additionnant (1) et (3), on obtient : $2x^2 = \frac{9}{2}$

$$\text{Donc : } x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2}$$

De (3) - (1) on obtient : $2y^2 = \frac{4}{9}$

$$\text{Donc } y = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ ou } y = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Or x et y sont de signes contraires d'après (2), donc :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

D'où : $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}i$ et $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}i$ sont les racines carrées du nombre complexe z_8

Exercice 34

Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\bullet (E_1) : z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 4 - 8 = -4 = (2i)^2. \text{ On peut choisir } \delta = 2i$$

$$\text{Donc } z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{2-2i}{2} = 1-i \text{ et } z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$$

$$\text{Donc } S = \{1-i; 1+i\}$$

$$\bullet (E_2) : z^2 + (3+4i)z - 1 + 5i = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (3+4i)^2 - 4(-1+5i)$$

$$= 9 + 24i - 16 + 4 - 20i$$

$$= -3 + 4i$$

$$= -4 + 1 + 2 \times 2i$$

$$= (2i)^2 + 1 + 2 \times 2i$$

$$= (1+2i)^2 = \delta^2$$

$$\text{avec } \delta = 1+2i$$

Donc les solutions de l'équation (E_2) sont :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{-3-4i-1-2i}{2} = -2-3i$$

$$z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} = -1-i$$

$$\text{Donc } S = \{-2-3i; -1-i\}$$

$$\bullet (E_3) : z^2(1-z^2) = 16$$

$$(E_3) \Leftrightarrow z^2 - z^4 - 16 = 0$$

$$\text{On pose } z^2 = Z$$

$$\text{l'équation } (E_3) \text{ devient : } Z^2 - Z + 16 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \times 16 = -63$$

$$\text{Donc : } Z_1 = \frac{1-i\sqrt{63}}{2} \text{ et } Z_2 = \frac{1+i\sqrt{63}}{2}$$

$$\text{D'où : } z^2 = \frac{1-i\sqrt{63}}{2} \text{ ou } z^2 = \frac{1+i\sqrt{63}}{2}$$

Déterminons les racines carrées de chacun des nombres complexes :

$$\frac{1-i\sqrt{63}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1+i\sqrt{63}}{2}$$

$$\bullet \text{ Déterminons } u \text{ tel que } u^2 = \frac{1-i\sqrt{63}}{2}$$

$$\text{On pose : } u = x + yi \text{ avec } (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

$$u^2 = \frac{1 - i\sqrt{63}}{2} \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{63}}{2}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = -\frac{\sqrt{63}}{4} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad (3)$$

$$\bullet \quad (1) + (3) \Rightarrow 2x^2 = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2}$$

$$\bullet \quad (3) - (1) \Rightarrow 2y^2 = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ ou } y = -\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Or $xy < 0$ (d'après (2)), donc : $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{7}}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{\sqrt{7}}{2} \end{cases}$

D'où : $u = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$ ou $u = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$

Donc $z^2 = \frac{1 - i\sqrt{63}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i \\ \text{ou} \\ z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i \end{cases}$

$$\bullet \quad z^2 = Z_2 = \bar{Z}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i\right) \\ \text{ou} \\ z = \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i \\ \text{ou} \\ z = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i \end{cases}$$

Donc l'ensemble de solutions de l'équation (E_3)

$$\text{est : } S = \left\{ \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i; -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i; \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i; -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i \right\}$$

$$\bullet \quad (E_4) : z^2 - 2(1 + \cos \alpha)z + 2(1 + \cos \alpha) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (-2(1 + \cos \alpha))^2 - 4 \times 2(1 + \cos \alpha) \\
 &= 4[1 + 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 2 - 2 \cos \alpha] \\
 &= 4(\cos^2 \alpha - 1) \\
 &= -4 \sin^2 \alpha \\
 &= (2i \sin \alpha)^2
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } z_1 = \frac{2(1 + \cos \alpha) + 2i \sin \alpha}{2} = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$\text{et } z_2 = \frac{2(1 + \cos \alpha) - 2i \sin \alpha}{2} = 1 + \cos \alpha - i \sin \alpha$$

$$\text{Donc : } S = \{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha; 1 + \cos \alpha - i \sin \alpha\}$$

$$\bullet (E_5) : z + 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z|$$

On remarque que cette équation contient z ; $\bar{z}$ et $|z|$ ce qui nous incite à poser $z = x + yi$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$(E_5) \Leftrightarrow (x + yi) + 3(x - yi) = (2 + i\sqrt{3})\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow 4x - 2iy = 2\sqrt{x^2 + y^2} + i\sqrt{3}(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2\sqrt{x^2 + y^2} \\ -2y = \sqrt{3} \times \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \sqrt{x^2 + y^2} \\ 2y = -\sqrt{3} \times 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{3}x \\ 2x = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2|x| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{3}x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } z = x - \sqrt{3}xi \text{ avec } x \geq 0$$

l'ensemble des solutions de l'équation (E_5)

$$\text{est : } S = \{z \in \mathbb{C} / z = (1 - \sqrt{3}i)x ; x \in \mathbb{R}^+\}$$

Exercice 35

Dans cet exercice, nous allons utiliser la propriété suivante :

Soit $P(z)$ un polynôme dans $\mathbb{C}$ de degré n : $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ avec $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres complexes et $a_n \neq 0$

• Si α est une racine de $P(z)$ c'est-à-dire : $P(\alpha) = 0$, alors il existe un unique polynôme $Q(z)$ de degré $n - 1$ tel que : $(\forall z \in \mathbb{C}) ; P(z) = (z - \alpha)Q(z)$

1) Résolvons l'équation (E_1) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } z_0 \text{ la solution imaginaire pure de } (E_1), \text{ donc: } \exists y \in \mathbb{R} / z_0 = yi \\
 (z_0 \text{ solution de } (E_1)) &\Leftrightarrow z_0^3 + (1+2i)z_0^2 + (-1+5i)z_0 - 2i - 6 = 0 \\
 &\Leftrightarrow -y^3i - (1+2i)y^2 + (-1+5i)yi - 2i - 6 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (-y^2 - 5y - 6) + i(-y^3 - 2y^2 - y - 2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 5y + 6 = 0 & (1) \\ y^3 + 2y^2 + y + 2 = 0 & (2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Il est plus simple de résoudre l'équation (1) : c'est une équation du second degré qui admet pour solution -2 et -3

Parmi les nombres -2 et -3 , seul -2 vérifie aussi l'équation (2)

Donc -2 est l'unique solution du système précédent et par suite $z_0 = -2i$ est l'unique solution imaginaire pure de l'équation (E_1)

On pose : $P(z) = z^3 + (1+2i)z^2 + (-1+5i)z - 2i - 6$

On a : $P(-2i) = 0$, donc $\exists (b, c) \in \mathbb{C}^2, \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z+2i)(z^2 + bz + c)$

Calculons b et c

On a :

$$\bullet (z+2i)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b+2i)z^2 + (c+2ib)z + 2ic$$

Donc; par identification,

$$\begin{aligned}
 P(z) = (z+2i)(z^2 + bz + c) &\Leftrightarrow \begin{cases} b+2i = 1+2i \\ c+2ib = -1+5i \\ 2ic = -6-2i \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow (b=1 \text{ et } c=-1+3i)
 \end{aligned}$$

Donc : $\forall z \in \mathbb{C} ; P(z) = (z+2i)(z^2 + z - 1 + 3i)$

$$\bullet (E_1) \Leftrightarrow P(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow z+2i=0 \text{ ou } z^2 + z - 1 + 3i = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -2i \text{ ou } z^2 + z - 1 + 3i = 0$$

$$\bullet \text{ Résolvons dans } \mathbb{C} \text{ l'équation : } z^2 + z - 1 + 3i = 0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= 1 - 4(-1+3i) = 5 - 12i \\
 &= 9 - 4 - 2 \times 3 \times 2i \\
 &= 3^2 + (2i)^2 - 2 \times 3 \times 2i \\
 &= (3-2i)^2
 \end{aligned}$$

Les solutions de cette équation sont $z_1 = \frac{-1-3+2i}{2} = -2+i$

et $z_2 = \frac{-1+3-2i}{2} = 1-i$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est : $S = \{2i; -2+i; 1-i\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_2) sachant qu'elle admet une solution réelle a
 Déterminons a

$$\begin{aligned} (a \text{ solution de } E_2) &\Leftrightarrow a^3 + 2(1+i)a^2 + (-6+5i)a - 9 - 3i = 0 \\ &\Leftrightarrow (a^3 + 2a^2 - 6a - 9) + (2a^2 + 5a - 3)i = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + 2a^2 - 6a - 9 = 0 & (1) \\ 2a^2 + 5a - 3 = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation (2) sont -3 et $\frac{1}{2}$; parmi ces deux valeurs, seule -3 vérifie aussi l'équation (1) donc -3 est l'unique solution de ce système et par suite $z_0 = -3$ est la solution réelle de l'équation (E_2) .

Déterminons les deux autres solutions

On pose : $P(z) = z^3 + 2(1+i)z^2 + (-6+5i)z - 9 - 3i$

$P(-3) = 0 \Rightarrow (\exists (b; c) \in \mathbb{C}^2) / (\forall z \in \mathbb{C}); P(z) = (z+3)(z^2 + bz + c)$

Or : $(z+3)(z^2 + bz + c) = z^3 + (3+b)z^2 + (3b+c)z + 3c$

Donc par identification :
$$\begin{cases} 3+b = 2(1+i) \\ 3b+c = -6+5i \\ 3c = -9-3i \end{cases}$$

D'où : $b = -1 + 2i$ et $c = -3 - i$

Donc $P(z) = (z+3)(z^2 + (-1+2i)z - 3 - i)$

$(E_2) \Leftrightarrow P(z) = 0$

$\Leftrightarrow z = -3 \text{ ou } z^2 + (-1+2i)z - 3 - i = 0$

Le discriminant de cette dernière équation est $\Delta = (-1+2i)^2 + 12 + 4i = 9$

Ses solutions sont : $z_1 = \frac{1-2i-3}{2} = -1-i$ et $z_2 = \frac{1-2i+3}{2} = 2-i$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est :

$$S = \{-3; -1-i; 2-i\}$$

3) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_3) sachant qu'elle admet une solution réelle et une solution imaginaire pure

$(E_3) : z^4 - 2(1-i)z^3 - 4z^2 - 2(1+9i)z + 15 = 0$

On pose : $P(z) = z^4 - 2(1-i)z^3 - 4z^2 - 2(1+9i)z + 15$

On a : $(E_3) \Leftrightarrow P(z) = 0$

• Soit z_0 un imaginaire pur, donc il existe un réel y tel que : $z_0 = yi$

$(z_0 \text{ solution de } (E_3)) \Leftrightarrow P(z_0) = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (yi)^4 - 2(1-i)(yi)^3 - 4(yi)^2 - 2(1+9i)yi + 15 = 0 \\
&\Leftrightarrow (y^4 + 2y^3 + 4y^2 + 18y + 15) + (2y^3 - 2y)i = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y^4 + 2y^3 + 4y^2 + 18y + 15 = 0 & (1) \\ 2y^3 - 2y = 0 & (2) \end{cases}
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation (2) sont 0 ; 1 et -1 ; parmi ces nombres, seul -1 vérifie aussi l'équation (1)

Donc $z_0 = -i$ est la seule solution imaginaire pure de l'équation (E_3)

• Soit z_1 une solution réelle de (E_3)

On pose $z_1 = x$ avec $x \in \mathbb{R}$

(z_1 solution de (E_3)) $\Leftrightarrow P(x) = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x^4 - 2(1-i)x^3 - 4x^2 - 2(1+9i)x + 15 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 2x + 15) + i(2x^3 - 18x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 2x + 15 = 0 & (1) \\ 2x^3 - 18x = 0 & (2) \end{cases}
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation (2) sont : 0 ; 3 et -3 ; parmi ces valeurs, seule 3 vérifie aussi l'équation (1)

Donc : $z_1 = 3$ est la seule solution réelle de l'équation (E_3)

• On a : $P(3) = 0$ et $P(-i) = 0$, donc il existe un polynôme $Q(z)$ de degré 2 tel que :

$\forall z \in \mathbb{C} ; P(z) = (z-3)(z+i)Q(z)$ avec $Q(z) = z^2 + bz + c ; (b, c) \in \mathbb{C}^2$

Or :

$$\begin{aligned}
(z-3)(z+i)(z^2 + bz + c) &= (z^2 + (i-3)z - 3i)(z^2 + bz + c) \\
&= z^4 + (b-3+i)z^3 + (c+bi-3b-3i)z^2 + (ic-3c-3ib)z - 3ic
\end{aligned}$$

Donc, par identification,

$$\begin{cases} b-3+i = -2(1-i) \\ c-3b+(b-3)i = -4 \\ -3c+(c-3b)i = -2(1+9i) \\ -3ic = 15 \end{cases}$$

On obtient : $b = 1+i$ et $c = 5i$

Donc $P(z) = (z-3)(z+i)(z^2 + (1+i)z + 5i)$

• $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-3 = 0 \text{ ou } z = -i \text{ ou } z^2 + (1+i)z + 5i = 0)$

Réolvons l'équation : $z^2 + (1+i)z + 5i = 0$

$$\Delta = (1+i)^2 - 20i = -18i$$

$$\Delta = -18i = -2i \times 9 = (1-i)^2 \times 3^2$$

$$\text{Les solutions de cette équation sont : } \begin{cases} z_3 = \frac{-1-i+3-3i}{2} = 1-2i \\ z_4 = \frac{-1-i-3+3i}{2} = -2+i \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) est : $S = \{3; -i; 1-2i; -2+i\}$

Exercice 36

1) Déterminons les racines 7^{ième} de 1

Les racines 7^{ième} de l'unité sont les nombres complexes $u_k = e^{i\frac{2k\pi}{7}}$ avec $k \in \{0; 1; 2; \dots; 6\}$

2) a) Montrons que $\bar{v} = u$

Méthode 1 :

$$\text{On a : } u = z + z^2 + z^4 = e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}}$$

$$\begin{aligned} \text{et : } v &= z^3 + z^5 + z^6 \\ &= e^{i\frac{6\pi}{7}} + e^{i\frac{10\pi}{7}} + e^{i\frac{12\pi}{7}} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \bar{v} = e^{-i\frac{6\pi}{7}} + e^{-i\frac{10\pi}{7}} + e^{-i\frac{12\pi}{7}}$$

$$\text{Or : } \frac{-6\pi}{7} \equiv \frac{8\pi}{7} [2\pi]; \quad \frac{-10\pi}{7} \equiv \frac{4\pi}{7} [2\pi]$$

$$\text{et } \frac{-12\pi}{7} \equiv \frac{2\pi}{7} [2\pi]$$

$$\text{Donc : } \bar{v} = e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}} = u$$

$\bar{v} = u$; donc u et v sont conjugués

Méthode 2 :

$$\begin{aligned} v &= z^3 + z^5 + z^6 \implies \bar{v} = \bar{z}^3 + \bar{z}^5 + \bar{z}^6 \\ &\implies \bar{v} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^6}; \quad (\text{car } |z| = 1) \\ &\implies \bar{v} = \frac{z^7}{z^3} + \frac{z^7}{z^5} + \frac{z^7}{z^6}; \quad (\text{car } z^7 = 1) \\ &\implies \bar{v} = z^4 + z^2 + z \\ &\implies \bar{v} = u \end{aligned}$$

Donc u et v sont conjugués :

b) Montrons que $\text{Im}(u) > 0$

$$\text{On a : } u = e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } \operatorname{Im}(u) &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\end{aligned}$$

Puisque la fonction sinus est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\text{et } 0 \leq \frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} \leq \frac{\pi}{2} \text{ alors : } \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) < \sin\frac{2\pi}{7}$$

$$\text{Donc : } \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} > 0 \text{ et comme } \sin\frac{4\pi}{7} > 0; \text{ (car } 0 < \frac{4\pi}{7} < \pi)$$

$$\text{alors : } \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} > 0$$

$$\text{Donc : } \operatorname{Im}(u) > 0$$

c) Calculons $u + v$ et $u \times v$

$$\bullet u + v = z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$$

$$\text{Donc : } z \times (u + v) = z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7$$

$$\text{D'où : } (u + v) - z(u + v) = z - z^7$$

$$\text{Donc : } u + v = \frac{z - z^7}{1 - z}; \text{ (car } z \neq 1)$$

$$= \frac{z - 1}{1 - z}; \text{ (car } z^7 = 1)$$

$$= -1$$

$$\text{Donc : } u + v = -1$$

$$\bullet u \times v = (z + z^2 + z^4)(z^3 + z^5 + z^6)$$

$$= z^4 + z^6 + z^7 + z^5 + z^7 + z^8 + z^7 + z^9 + z^{10}$$

$$= z^4(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6) + 2z^7$$

$$= z^4\left(\frac{1 - z^7}{1 - z}\right) + 2z^7$$

$$\text{Or : } z^7 = 1, \text{ donc : } u \times v = 2$$

d) Dédisons u et v

$$\text{On a : } \begin{cases} u + v = -1 \\ u \times v = 2 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } u \text{ et } v \text{ sont les solutions de l'équation : } X^2 - SX + P = 0$$

$$\text{c'est-à-dire : } X^2 + X + 2 = 0$$

$$\text{Le discriminant de cette équation est } \Delta = -7 = (i\sqrt{7})^2$$

$$\text{donc ses solutions sont } \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2} \text{ et } \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$$

Or $\text{Im}(u) > 0$, donc : $u = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$ et $v = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$

e) Dédisons les sommes s et S

$$\bullet s = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7}$$

$$\text{On a : } u = e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}}$$

$$\text{Donc : } s = R_e(u)$$

$$\text{On a : } u + v = u + \bar{u} = 2R_e(u)$$

$$\text{Donc : } s = \frac{1}{2}(u + v) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \bullet S &= \sum_{k=4}^{10} \sin\left(\frac{2k\pi}{7}\right) \\ &= \sum_{k=4}^{10} \text{Im}(z^k) \\ &= \text{Im}\left(\sum_{k=4}^{10} z^k\right) \end{aligned}$$

$$\text{On a : } u \times v = z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8 + z^9 + z^{10} + 2z^7$$

$$\text{Donc : } 2 = \sum_{k=4}^{10} z^k + 2; \text{ (car } z^7 = 1 \text{ et } u \times v = 2)$$

$$\text{D'où : } \sum_{k=4}^{10} z^k = 0$$

$$\text{Par conséquent } \text{Im}\left(\sum_{k=4}^{10} z^k\right) = 0$$

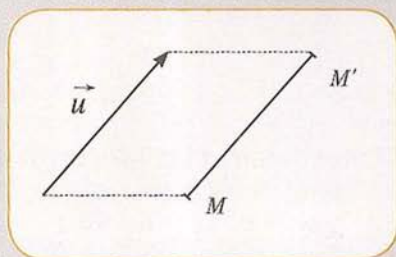
$$\text{Donc : } S = 0$$

VIII Écriture complexe des transformations usuelles

1) Translation

Soit t la translation de vecteur $\vec{u}(z_{\vec{u}})$. Soit $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan complexe.

$$\begin{aligned} t(M(z)) = M'(z') &\iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \\ &\iff z' - z = z_{\vec{u}} \\ &\iff z' = z + z_{\vec{u}} \end{aligned}$$



L'écriture $z' = z + z_{\vec{u}}$ est appelée l'écriture (ou expression) complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}(z_{\vec{u}})$; avec $M(z)$; $M'(z')$ et $t(M) = M'$

2) Homothétie

Soit h l'homothétie de centre le point $\Omega(\omega)$ et de rapport k (tel que k un réel non nul)

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ on a :

$$\begin{aligned} h_{(\Omega, k)}(M(z)) = M'(z') &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \\ &\Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega) \\ &\Leftrightarrow z' = kz + \omega(1 - k) \end{aligned}$$

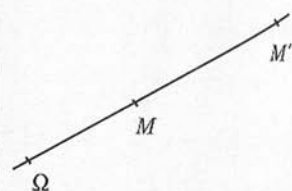
$z' = kz + \omega(1 - k)$ est appelée l'écriture (ou expression) complexe de l'homothétie $h_{(\Omega, k)}$.

cas particulier : (le centre de l'homothétie est l'origine du repère).

L'écriture de l'homothétie de centre O (l'origine du repère) et de rapport k est : $z' = kz$

Remarque : Le centre Ω d'une homothétie est l'unique point fixe ou invariant (c'est-à-dire $h(\Omega) = \Omega$ pour $k \neq 1$ (où k est le rapport de h)).

$k > 0$

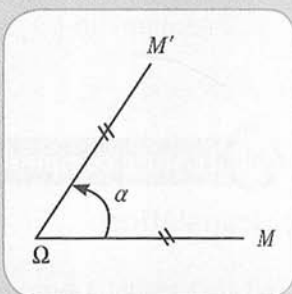


3) Rotation

Soit r la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α on a : $r(\Omega) = \Omega$.

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ tels que $M \neq \Omega$, on a :

$$\begin{aligned} r_{(\Omega, \alpha)}(M(z)) = M'(z') &\Leftrightarrow \begin{cases} M\Omega = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z - \omega| = |z' - \omega| \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\alpha} \\ &\Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega) \\ &\Leftrightarrow z' = e^{i\alpha}z + \omega(1 - e^{i\alpha}) \end{aligned}$$



Cette dernière écriture est valable pour $M = \Omega$

$z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$ ou $z' = e^{i\alpha}z + \omega(1 - e^{i\alpha})$ est appelée l'écriture (ou expression) complexe de la rotation r de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α

où : $r(M(z)) = M'(z')$

Cas particulier: (le centre de la rotation est l'origine du repère).

L'écriture complexe de la rotation r de centre O l'origine du repère, et d'angle α est : $z' = e^{i\alpha} z$.

Remarque : Le centre Ω d'une rotation r est l'unique point invariant (c'est-à-dire $r(\Omega) = \Omega$) (dans le cas $\alpha \not\equiv 0[2\pi]$ où α est l'angle de la rotation).

Exercices d'application

Exercice 37

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$

1) Déterminer dans chacun des cas suivants:

la nature de la transformation f qui transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' tel que :

a) $z' = z - 1 + 3i$

b) $z' = \frac{5}{2}z + 6i - 3$

c) $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + 1 - \sqrt{3}i$

d) $z' = -z$

e) $z' = \bar{z}$

f) $z' = -\bar{z}$

2) Soit S la transformation qui, à tout point $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que :

$$z' = i\bar{z} - 1 + i$$

a) Montrer que l'ensemble des points invariants par la transformation S est une droite (D) dont on déterminera une équation.

b) Montrer que : $((D) \text{ est la médiatrice de } [MM']) \Leftrightarrow S(M) = M'$

en déduire la nature de la transformation S .

Exercice 38

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$

On considère l'application F qui à tout $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = u^2 z + u - 1 \text{ où } u \text{ est un nombre complexe.}$$

1) Déterminer l'ensemble E_1 des valeurs de u pour lesquelles F est une translation.

2) Déterminer l'ensemble E_2 des valeurs de u pour lesquelles F est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

3) Déterminer l'ensemble E_3 des valeurs de u pour lesquelles F est une homothétie de rapport -2

4) On pose : $u = 1 - i$

Montrer que F est la composée d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et une homothétie que l'on déterminera.

Solutions

Exercice 37

1) Déterminons la nature de chacune des transformations suivantes :

a) $f : M(z) \mapsto M'(z') / z' = z - 1 + 3i$

Soit $M(z)$ un point du plan

$$\begin{aligned} f(M(z)) = M'(z') &\Leftrightarrow z' = z - 1 + 3i \\ &\Leftrightarrow z' - z = -1 + 3i \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{w} \text{ avec } \vec{w}(-1 + 3i) \end{aligned}$$

Donc f est la translation de vecteur $\vec{w}(-1 + 3i)$

b) $f : M(z) \mapsto M'(z') / z' = \frac{5}{2}z + 6i - 3$

Soit $M(z)$ un point du plan

• $f(M(z)) = M'(z') \Leftrightarrow z' = \frac{5}{2}z + 6i - 3$

Info :

si $z' = az + b$ et $z_\Omega = az_\Omega + b$

alors $z' - z_\Omega = a(z - z_\Omega)$

Puisque z' est de la forme $az + b$ avec $a = \frac{5}{2} \in \mathbb{R}$, alors f est une homothétie de rapport $k = \frac{5}{2}$

• Déterminons le centre Ω de cette homothétie

$$\begin{aligned} (\Omega(z) \text{ centre de } f) &\Leftrightarrow f(\Omega) = \Omega \\ &\Leftrightarrow z = \frac{5}{2}z + 6i - 3 \\ &\Leftrightarrow z = 2 - 4i \end{aligned}$$

Donc $\Omega(2 - 4i)$ est le centre de l'homothétie f .

On peut vérifier que: $f(M(z)) = M'(z') \Leftrightarrow z' - z_\Omega = \frac{5}{2}(z - z_\Omega)$

c) $f : M(z) \mapsto M'(z') / z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + 1 - \sqrt{3}i$

z' est de la forme $az + b$ avec $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; puisque $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$, alors f est une rotation d'angle $\arg(a)$ c'est-à-dire d'angle $\frac{\pi}{3}$

• Déterminons le point fixe de f

$$\begin{aligned}
 f(M) = M &\Leftrightarrow z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + 1 - \sqrt{3}i \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z = 1 - \sqrt{3}i \\
 &\Leftrightarrow z = 2
 \end{aligned}$$

$$f(M(z)) = M'(z') \Leftrightarrow z' - 2 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - 2)$$

Donc f est la rotation de centre $\Omega(2)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

d) $f : M(z) \mapsto M'(z') / z' = -z$

• Puisque les points $M(z)$ et $M'(-z)$ sont symétriques par rapport à O (origine du repère), alors f est la symétrie centrale de centre O : $f = S_O$

• Remarques :

• z' est de la forme $az + b$ avec $a = -1 \in \mathbb{R}$ et $b = 0$

donc f est l'homothétie de centre O et de rapport -1

• $z' = e^{i\pi}z$, donc f est la rotation de centre O et d'angle π

Donc cette transformation f peut être considérée:

- une symétrie centrale de centre O
- une homothétie de centre O et de rapport -1
- une rotation de centre O et d'angle π

e) $f : M(z) \mapsto M'(z') / z' = \bar{z}$

Puisque les points $M(z)$ et $M'(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, alors la transformation f est la symétrie d'axe l'axe des abscisses :

$$f = S_{(Ox)}$$

f) $f : M(z) \mapsto M'(z') / z' = -\bar{z}$

Puisque les points $M(z)$ et $M'(-\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, alors la transformation f est la symétrie d'axe (Oy) (l'axe des ordonnées) : $f = S_{(Oy)}$

2) $S : M(z) \mapsto M'(z') / z' = i\bar{z} - 1 + i$

a) Montrons que l'ensemble des points invariants (ou fixes) par S est une droite

Soit $M(z)$; on pose $z = x + yi$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$(M \text{ est invariant par } S) \Leftrightarrow S(M) = M$$

$$\Leftrightarrow z = i\bar{z} - 1 + i$$

$$\Leftrightarrow x + yi = i(x - yi) - 1 + i$$

$$\Leftrightarrow (x - y + 1) + i(y - x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y - x - 1 = 0 \end{cases}$$

Donc l'ensemble des points invariants par f est la droite (D) d'équation :
 $y = x + 1$

b) Montrons que : $(S(M) = M') \Leftrightarrow ((D) \text{ est la médiatrice de } [MM'])$

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan. On pose : $z = x + yi$ et $z' = x' + y'i$ avec $(x; x'; y; y') \in \mathbb{R}^4$

Soit $\vec{w}(1; 1)$ un vecteur directeur de la droite (D) : $y = x + 1$

Soit I le milieu de $[MM']$; alors $I\left(\frac{x+x'}{2}; \frac{y+y'}{2}\right)$

$$\begin{aligned} ((D) \text{ est la médiatrice de } [MM']) &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{w} = 0 \\ I \in (D) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - x') + (y - y') = 0 \\ \frac{y+y'}{2} = \frac{x+x'}{2} + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x' + y' = x + y \\ x' - y' = -x + y - 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x' + iy' = y - 1 + i(x + 1) \\ &\Leftrightarrow x' + iy' = i(x - yi) - 1 + i \\ &\Leftrightarrow z' = i\bar{z} - 1 + i \\ &\Leftrightarrow M' = S(M) \end{aligned}$$

Donc : $(S(M) = M') \Leftrightarrow ((D) \text{ est la médiatrice de } [MM'])$

• Dédoublons la nature de la transformation S

Puisque :

- L'ensemble des points invariants par S est la droite (D)
- $(S(M) = M') \Leftrightarrow ((D) \text{ est la médiatrice de } [MM'])$

Alors la transformation S est la symétrie d'axe la droite (D) .

Solutions

Exercice 38

1) Déterminons les valeurs de u pour lesquelles F est une translation

$$F: M(z) \mapsto M'(z')/z' = u^2 z + u - 1$$

$$(F \text{ est une translation}) \Leftrightarrow u^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow u = 1 \text{ ou } u = -1$$

$$\text{Donc : } E_1 = \{-1; 1\}$$

$$2) \text{ Déterminons l'ensemble } E_2$$

$$(F \text{ est une rotation d'angle } \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \begin{cases} |u^2| = 1 \\ \arg(u^2) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |u^2| = 1 \\ 2 \arg(u) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |u| = 1 \\ \arg(u) \equiv \frac{\pi}{4} [\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } u = e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$\text{Donc : } E_2 = \{e^{i\frac{\pi}{4}}; e^{i\frac{5\pi}{4}}\}$$

$$3) \text{ Déterminons l'ensemble } E_3$$

$$(F \text{ est une homothétie de rapport } -2) \Leftrightarrow u^2 = -2$$

$$\Leftrightarrow u^2 = (\sqrt{2}i)^2$$

$$\Leftrightarrow u = i\sqrt{2} \text{ ou } u = -i\sqrt{2}$$

$$\text{Donc : } E_3 = \{i\sqrt{2}; -i\sqrt{2}\}$$

4) Montrons que F est la composée d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'une homothétie de rapport -2

$$\text{On a : } u = 1 - i$$

$$\text{Donc : } u^2 = (1 - i)^2 = -2i \text{ et } u - 1 = -i$$

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan

$$F(M) = M' \Leftrightarrow z' = u^2 z + u - 1$$

$$\Leftrightarrow z' = -2iz - i$$

• Soit Ω un point du plan

Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2

Si $F = roh$, alors le point Ω est invariant par F

• Déterminons les points invariants par F

Soit $M(z)$ un point du plan

$$\begin{aligned}
 (M \text{ est invariant par } F) &\Leftrightarrow F(M) = M \\
 &\Leftrightarrow z = -2iz - i \\
 &\Leftrightarrow z = \frac{-2-i}{5}
 \end{aligned}$$

Donc le point $\Omega\left(\frac{-2-i}{5}\right)$ est le seul point fixe de F .

• Montrons que $F = roh$

(où h est l'homothétie de centre Ω et de rapport -2 et r est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$)

Soit $M(z)$ un point du plan

$$\text{On pose : } \begin{cases} h(M) = M_1(z_1) \\ r(M_1(z_1)) = M_2(z_2) \\ F(M) = M'(z') \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc : } roh(M) &= r(h(M)) \\
 &= r(M_1) \\
 &= M_2
 \end{aligned}$$

Montrons que $M' = M_2$

$$\begin{aligned}
 \bullet h(M) = M_1(z_1) &\Leftrightarrow z_1 - z_\Omega = -2(z - z_\Omega) \\
 \bullet r(M_1) = M_2(z_2) &\Leftrightarrow z_2 - z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_1 - z_\Omega)
 \end{aligned}$$

Or $r(M_1) = roh(M)$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc : } roh(M) = M_2(z_2) &\Leftrightarrow z_2 - z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_1 - z_\Omega) \\
 &\Leftrightarrow z_2 - z_\Omega = -2e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_\Omega) \\
 &\Leftrightarrow z_2 + \frac{2+i}{5} = -2i\left(z + \frac{2+i}{5}\right) \\
 &\Leftrightarrow z_2 = -2iz - i \\
 &\Leftrightarrow z_2 = z' \\
 &\Leftrightarrow M_2 = M' \\
 &\Leftrightarrow roh(M) = M' \\
 &\Leftrightarrow F(M) = M'
 \end{aligned}$$

Donc, pour tout point M du plan, $F(M) = r(h(M))$

D'où : $F = roh$

Exercices de synthèse

Exercice 39

Soit F l'application définie sur $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ par : $F(z) = \frac{iz-1}{z-i}$.

- 1) a) Vérifier que : $(\sqrt{3} - i\sqrt{3})^2 = -6i$.
- b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $F(z) = iz$.
- c) Écrire les solutions de cette équation sous forme trigonométrique.
- d) Soit A et B les points images des solutions de (E), dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Montrer que les points O , A et B sont alignés.

2) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

a) Montrer que : $F(z) = -\frac{z + \bar{z}}{|z - i|^2} + i \frac{z\bar{z} - 1}{|z - i|^2}$.

b) En déduire que : $|z| = 1 \Rightarrow F(z) \in \mathbb{R}$.

Exercice 40

Soit $m \in \mathbb{C}^*$;

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (3m - 2i)z + 2m^2 - 4mi = 0$; (E)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) On suppose dans cette question que $m = 1 + i$.

Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) telles que $|z_1| < |z_2|$.

a) Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

b) Vérifier que $-3z_1$ est une racine cubique du nombre complexe z_2 , puis en déduire les deux autres racines cubiques de z_2 sous forme algébrique.

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Soit A , B et C les points d'affixes respectives i ; $2m$ et $m - 2i$. On suppose que m n'est pas un imaginaire pur.

a) Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

b) On construit à l'extérieur du triangle ABC le point D tel que le triangle BCD soit rectangle isocèle en D . Soit d l'afixe du point D .

Montrer que : $d = \frac{3m - im + 2 - 2i}{2}$ ou $d = \frac{3m + im - 2 - 2i}{2}$

c) Déterminer m pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un carré.

Exercice 41

Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Partie 1 :

1) Placer les points $A(-4 - 6i)$; $B(14)$; $C(-4 + 6i)$; $A_1(3 - 7i)$; $B_1(9 + 5i)$ et $C_1(-3 - i)$.

2) Déterminer l'afixe de chacun des points I ; J et K milieux respectifs des segments $[AB]$; $[BC]$ et $[CA]$

3) Montrer que les points A_1 ; I et B_1 sont alignés.

On admet que les points B_1 ; J et C_1 sont alignés ainsi que les points C_1 ; K et A_1 .

4) Déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{IB;IB_1})$.

On admet que : $(\overrightarrow{KA};\overrightarrow{KA_1}) \equiv (\overrightarrow{JC};\overrightarrow{JC_1}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

5) Quelle est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{4}$?

Partie 2 :

Soit f la transformation qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel

que : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 2 - 2i$

1) Déterminer $f(A)$; $f(B)$ et $f(C)$.

2) Montrer que la transformation f admet un point fixe Ω dont on déterminera l'abscisse.

3) Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$; et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Montrer que : $f = roh$.

Exercice 42

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points $A(1)$; $A'(-1)$; $B(i)$ et $B'(-i)$.

À tout point $M(z)$ distinct de O ; A ; A' ; B et B' , on associe les points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ tels que: les triangles BMM_1 et AMM_2 soient rectangles isocèles et que:

$$(\overrightarrow{M_1B}; \overrightarrow{M_1M}) \equiv (\overrightarrow{M_2M}; \overrightarrow{M_2A}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi].$$

1) a) Vérifier que : $z - z_1 = i(i - z_1)$ et $1 - z_2 = i(z - z_2)$

b) Vérifier que : $z_1 = \frac{1+i}{2}(z+1)$ et $z_2 = \frac{1-i}{2}(z+i)$

2) Dans cette question on cherche à déterminer les points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est isocèle.

a) Montrer que : $OM_1 = OM_2 \iff |z+1| = |z+i|$

En déduire l'ensemble des points M tels que $OM_1 = OM_2$ et construire cet ensemble.

b) Montrer que : $OM_1 = M_1M_2 \iff |z+1|^2 = 2|z|^2$

c) Montrer que : $|z+1|^2 = 2|z|^2 \iff |z-1|^2 = 2$

En déduire l'ensemble des points M tels que $OM_1 = M_1M_2$ et construire cet ensemble.

d) En déduire l'ensemble des points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est équilatéral et construire cet ensemble.

Exercice 43

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^2 - 4z + 8 = 0$

b) Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) telles que $\text{Im}(z_1) > 0$.

- Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

- Placer les points $A(z_1)$ et $B(z_2)$.

2) Soit f la transformation qui à tout point $M(z)$ (avec $z \in \mathbb{C}^*$) associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \frac{1}{z}$.

a) Déterminer l'affixe de chacun des points A' et B' tels que : $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

b) Montrer que pour tout point M distinct de O ; les points O ; M et M' sont alignés et que : $OM' \times OM = 1$

3) a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $|z - 2| = 2 \iff \left| \frac{1 - 2\bar{z}'}{z'} \right| = 2$

En déduire que : $|z - 2| = 2 \iff \left| \frac{1}{2} - z' \right| = |z'|$

b) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $I(2)$ et de rayon 2

- Montrer que $[AB]$ est un diamètre du cercle $(\mathcal{C})$

- Montrer que $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$ si et seulement si M' appartient à une droite (D) dont on donnera une équation.

- Construire $(\mathcal{C})$ et (D) .

- En déduire une méthode géométrique pour construire M' image de M par la transformation f si $M \in (\mathcal{C}) \setminus \{O\}$.

Exercice 44

Partie 1 : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose : $P(z) = z^3 - (4 - i)z^2 + 4(2 - i)z + 8i$

1) a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

b) Déterminer les nombres réels b et c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = (z + i)(z^2 + bz + c).$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Partie 2 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

1) Construire les points A , B et C d'affixes respectives $2 + 2i$; $2 - 2i$ et $-mi$ où $m \in \mathbb{R}^*$ (pour placer le point C , prendre $m = 1$)

2) Déterminer en fonction de m l'affixe du point C' symétrique du point C par rapport à B .

3) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer, en fonction de m , l'affixe de chacun des points K et H images respectives des points C et C' par la rotation R .

4) Soit t la translation de vecteur $\vec{W}(4i)$.

On pose $t(C) = N$ et $t(C') = L$.

Déterminer en fonction de m les affixes z_N et z_L des points N et L (respectivement).

5) a) Montrer que A est le milieu des segments $[LN]$ et $[KH]$.

b) Montrer que : $\frac{z_H - z_A}{z_L - z_A} = i$

c) En déduire la nature du quadrilatère $KLHN$.

Exercice 45

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives :

$$a = -1 + i\sqrt{3}; b = -1 - i\sqrt{3} \text{ et } c = 2.$$

1) a) Vérifier que : $\frac{b-c}{a-c} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) En déduire la nature du triangle ABC .

2) Déterminer le centre et le rayon du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABC .

3) Soit (Γ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $2(z + \bar{z}) + \bar{z} \times z = 0$.

a) Montrer que (Γ) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b) Vérifier que les points A et B appartiennent à (Γ) .

4) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer l'image du point B par la rotation r .

b) Construire le point C_1 image du point C par la rotation r puis déterminer l'affixe de C_1 .

Exercice 46

On considère la suite complexe (z_n) définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_n ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On note A_n le point d'affixe z_n .

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $d_n = |z_{n+1} - z_n|$

a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_n - z_{n-1})$

b) En déduire d_n en fonction de n .

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $L_n = \sum_{k=0}^n A_k A_{k+1}$

-Exprimer L_n en fonction de n .

-Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n \equiv \arg(z_n)[2\pi]$.

a) Déterminer a_{n+1} en fonction de a_n .

b) En déduire a_n en fonction de n .

c) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles les points O , A_0 et A_n sont alignés.

Exercice 47

Partie 1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$

On considère l'application t définie par : $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$t : z \mapsto z^2 + z + 1$$

1) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tel que $t(z)$ soit un réel.

2) Soit z un nombre complexe.

Soit M et M' les points d'affixes z et $t(z)$ respectivement.

Déterminer l'ensemble F des points $M(z)$ tel que les points O , M et M' sont alignés.

Partie 2 :

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^2 + z + 1 = 0$.

b) Soit u et v les solutions de l'équation (E) .

Vérifier que : $(\forall (n; m) \in \mathbb{N}^2) ; u^{3m} = v^{3m} = 1$ et $(1+u)^{6n} = (1+v)^{6n}$

2) Soit z un nombre complexe tel que :

$$\exists (p; q) \in (\mathbb{N}^*)^2 ; (1+z)^q = 1 \text{ et } z^p = 1.$$

a) Montrer que : $|z| = |1+z| = 1$

b) Soit θ un argument de z tel que $-\pi < \theta < \pi$

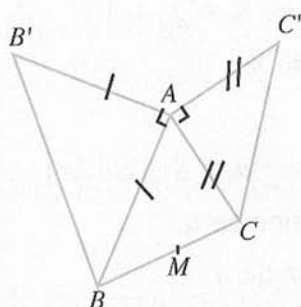
Montrer que : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}$, puis déterminer z

Exercice 48

Soit ABC un triangle direct et M le milieu du segment $[BC]$.

Soit $a; b; c$ et m les affixes respectives des points $A; B; C$ et M .

On construit deux triangles BAB' et $C'AC$ rectangles isocèles en A (voir figure)



Soit b' et c' les affixes respectives des points B' et C' .

L'objectif de l'exercice est de prouver que $(AM) \perp (B'C')$.

1) a) Déterminer b' et c' en fonction de a, b et c .

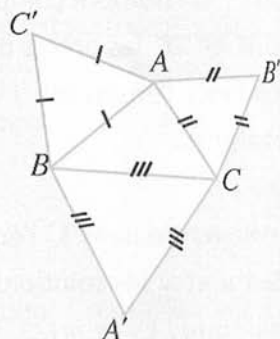
b) Déterminer m en fonction de b et c .

2) a) Écrire $c' - b'$ en fonction de a et m .

b) En déduire que : $B'C' = 2AM$ et que les droites $(B'C')$ et (AM) sont perpendiculaires.

Exercice 49

Soit ABC un triangle direct. On construit à l'extérieur de ce triangle trois triangles équilatéraux directs $AC'B; BA'C$ et $CB'A$ (voir figure)



Soit $a; b; c; a'; b'$ et c' les affixes respectives des points $A; B; C; A'; B'$ et C' .

1) Déterminer a' en fonction de b et c .

Puis calculer b' et c' en fonction de a, b et c .

2) Montrer que : $a' - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(aj + b + cj^2)$

Calculer de même $b' - b$ et $c' - c$; où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

3) a) Montrer que : $AA' = BB' = CC'$

b) Montrer que les triangles $A'B'C'$ et ABC ont le même centre de gravité.

Exercice 50

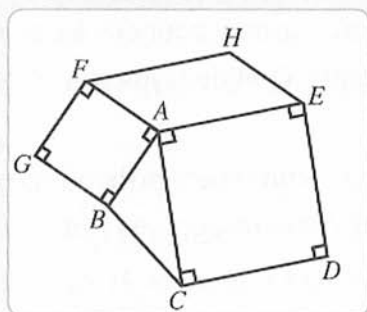
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points $A(a); B(b)$ et $C(c)$ tels que: a et b sont des nombres complexes non nuls et $c = -b$.

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les points A, B et C soient alignés.

2) Dans cette question, on suppose que les points $A; B$ et C ne sont pas alignés, et que $(\vec{AB}; \vec{AC})$ est une base directe.

On construit à l'extérieur du triangle ABC les carrés $AFGB$ et $ACDE$ et le parallélogramme $AEHF$. (voir figure)



tels que les deux bases $(\vec{AC}; \vec{AE})$ et $(\vec{AF}; \vec{AB})$ soient directes.

a) Soit r la rotation de centre A qui transforme C en E .

Montrer que : $e = -ib + a(1 - i)$ où e est l'affixe du point E .

b) Soit $\alpha; \beta$ et γ les affixes respectives des points $D; H$ et F .

Déterminer $\alpha; \beta$ et γ en fonction de a et b .

c) En déduire que : $EF = 2.OA$; $(EF) \perp (OA)$; $BD = CH$ et $(BD) \perp (CH)$.

Exercice 51

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points B ; C ; D et E d'affixes respectives $b = 1 - i$; $c = -1 - i$; $d = -1 - 3i$ et $e = 1 - 3i$

1) Vérifier que : $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BE}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et que le quadrilatère $BCDE$ est un carré.

2) Calculer $|b|$; $|c|$; $|d|$ et $|e|$.

3) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O passant par le point B .

Donner une équation du cercle $(\mathcal{C})$.

4) Soit Q un autre point de $\mathcal{C}$ tel que $Q \neq B$ et $Q \neq C$.

On pose : $q = x + yi$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ où q est l'affixe du point Q .

Soit F et G deux points du plan tels que le quadrilatère $QBFG$ soit un carré

et $(\overrightarrow{QB}; \overrightarrow{QG}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On pose : $z = \frac{g - q}{b - q}$ où g est l'affixe du point G .

a) Donner une interprétation géométrique du module et d'argument de z .

b) En déduire z .

5) a) Montrer que : $g = (1 + x + y) + i(1 - x + y)$.

b) En déduire $|g|$ en fonction de x et y .

6) Exprimer $|z|$ en fonction de y seulement.

7) Montrer géométriquement que : $|g| = |f|$ où f est l'affixe du point F .

8) Déterminer les valeurs de x et y pour que les points E ; D ; G et F appartiennent au cercle de centre O et de rayon r à déterminer.

Exercice 52

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Soit A et B les points d'affixes respectives i et $-2i$.

Soit f la transformation qui à tout point M distinct de A et d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{2z - i}{iz + 1}$.

1) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On pose : $z - i = re^{i\theta}$ où $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Donner une interprétation géométrique de r et θ .

b) Montrer que : $(z' + 2i)(z - i) = 1$.

c) On pose : $z' + 2i = r'e^{i\theta'}$ où $r' > 0$ et $\theta' \in \mathbb{R}$.

Déterminer r' et θ' en fonction de r et θ et donner une interprétation géométrique de r' et θ'

2) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A et de rayon 1.

a) Montrer que si $M \in (\mathcal{C})$, alors le point M' appartient à un cercle $(\mathcal{C}')$ que l'on précisera.

b) Le cercle $(\mathcal{C}')$ est-il image de $(\mathcal{C})$ par la transformation f ?

3) Soit N un point d'affixe $n = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$

a) Montrer que $N \in (\mathcal{C})$.

b) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \widehat{AN})$ puis construire $(\mathcal{C})$ et N .

c) En déduire la construction du point $N' = f(N)$.

Exercice 53

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On pose : $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1) Montrer que : $1 + \omega + \omega^2 = 0$ et $\overline{\omega} = \omega^2$.

2) On considère l'ensemble : $E = \{z \in \mathbb{C} / |z| = |1+z| = 1\}$

a) Montrer que $\omega \in E$.

b) Soit $z = x + yi$ un nombre complexe où x et y sont des nombres réels.

Montrer que : $z \in E \iff \left(x = -\frac{1}{2} \text{ et } |y| = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) En déduire que : $E = \{\omega; \overline{\omega}\}$.

3) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon r .

Soit $A(a)$; $B(b)$ et $C(c)$ trois points du cercle $(\mathcal{C})$.

On suppose que O est le centre de gravité du triangle ABC .

On pose : $p = \frac{b}{a}$ et $q = \frac{c}{a}$.

a) Montrer que : $|p| = |q| = 1$ et $1 + p = -q$.

b) En utilisant la question 2) b), montrer que : $p = \omega$ ou $p = \overline{\omega}$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $p = \omega$.

c) Montrer que :

$$\begin{cases} c - a = (\overline{\omega} - 1)a \\ c - b = (\omega - 1)b \\ b - a = (\omega - 1)a \end{cases}$$

d) En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 54

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E_\theta) : z^2 - 2z + \frac{1}{\cos^2 \theta} = 0$

où θ est un paramètre réel de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) .

b) Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E_θ) telles que $\operatorname{Im}(z_1) = \tan \theta$.

Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

2) Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 .

Montrer que le triangle OM_1M_2 est isocèle en O.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^{2n} - 2z^n + \frac{1}{\cos^2 \theta} = 0$

Déterminer les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

Exercice 55

Partie 1 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A ; B ; M et M' d'affixes respectives : 1; -1; z et Z ,

tels que $Z = \frac{z+1}{z-1}$ avec $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1; 1\}$.

1) Montrer que : $|z| = 1 \Leftrightarrow Z \in i\mathbb{R}$

2) On pose : $z = e^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$ et $\theta \neq 0$.

a) Montrer que : $Z = \frac{-i}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et en déduire $|Z|$ et $\arg(Z)$.

b) Montrer que : $(\overrightarrow{M'A}; \overrightarrow{M'B}) \equiv \theta[2\pi]$, puis construire M et M' dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Partie 2 :

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

On considère l'équation : $(E) : \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = \sqrt{2}$

1) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{z_k; k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}\} \cup \{\bar{z}_k; k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}\}$$

où $z_k = \frac{-i}{\tan(\theta_k)}$ avec $\theta_k = \frac{\pi}{8n} + \frac{k\pi}{n}$

2) On considère donc $\mathbb{C}$ le polynôme complexe :

$$P(z) = \sqrt{2}(z^2 - 1)^n - (z+1)^{2n} - (z-1)^{2n}; \quad z \in \mathbb{C}.$$

a) Montrer que : $(E) \Leftrightarrow P(z) = 0$.

b) Montrer que : $P(z) = (\sqrt{2} - 2) \prod_{k=0}^{n-1} \left(z^2 + \frac{1}{\tan^2(\theta_k)} \right)$.

En déduire la valeur du produit : $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{8n} + \frac{k\pi}{n}\right)}$.

Exercice 56

Soit m un entier naturel non nul.

Soit $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_m) \in \mathbb{C}^m$.

On considère le polynôme : $P(z) = z^m + \alpha_m z^{m-1} + \alpha_{m-1} z^{m-2} + \dots + \alpha_2 z + \alpha_1$
avec $z \in \mathbb{C}$.

Soit $z_1; z_2; \dots; z_m$ les racines de $P(z)$.

1) Montrer que : $\prod_{k=1}^m z_k = (-1)^m P(0)$.

2) Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère l'application $P_{n,\theta}$ définie par :

$$P_{n,\theta} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto (z+1)^n - e^{i2n\theta}$$

a) Déterminer les solutions de l'équation $P_{n,\theta}(z) = 0$ et calculer le produit des solutions de cette équation.

b) On pose : $f_n(\theta) = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + k\frac{\pi}{n}\right)$

Montrer que : $f_n(\theta) = \frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}$

Calculer $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f_n(\theta)}{\sin \theta}$

c) En déduire la valeur du produit $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \dots \times \sin\left((n-1)\frac{\pi}{n}\right)$.

Exercice 57

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 1$.

Pour tout $k \in \{1; 2; \dots; n-1\}$, on pose : $u_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ et $v_k = e^{-i\frac{k\pi}{n}}$

1) Montrer que : $\prod_{k=1}^{n-1} v_k = (-1)^{n-1} \times (i)^{n-1}$.

2) a) Exprimer $u_k - 1$ en fonction de v_k .

b) Calculer : $\prod_{k=1}^{n-1} (u_k - 1)$

c) En déduire que : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$

Exercice 58

Partie A :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$(E): z^2 - (1 + 2i)z + 1 + 7i = 0$$

1) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = (3 - 4i)^2$ 2) Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E).(On note z_1 la solution telle que $\operatorname{Re}(z_1) > 0$)3) Montrer que : $\frac{z_2}{z_1} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Partie B:

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2 - i$ et $b = -1 + 3i$.

Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et soit T la translation qui transforme le point A au point O .

1) a) Soit c l'affixe du point C ; image du point A par la rotation R .Déterminer le nombre complexe c .b) Montrer que : $T(C) = B$ 2) Soit D le point du plan complexe pour lequel $OCDB$ est un parallélogramme.

Déterminer d l'affixe du point D et vérifier que le point C est le milieu du segment $[AD]$.

3) Montrer que le nombre $\left(\frac{a-d}{b-d}\right) \times \frac{b}{a}$ est réel puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.**Exercice 59**On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E): z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i = 0$$

1) a) Vérifier que $(1 - 3i)^2$ est le discriminant de l'équation (E).

b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ (on prendra z_1 le nombre complexe imaginaire pur).

c) Montrer que : $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$ 2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère le point A d'affixe z_1 et le point B d'affixe z_2 .

a) Déterminer le nombre complexe e , affixe du point E milieu du segment $[AB]$.

b) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et soit c l'affixe du point C image du point E par la rotation r . Montrer que : $c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$.

c) On considère D le point d'affixe $d = 1 + \frac{3}{2}i$. Montrer que le nombre $\frac{z_2 - d}{c - d} \times \frac{c - z_1}{z_2 - z_1}$ est réel puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice 60

Partie A:

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + i = 0$.

(On note a la solution telle que : $\operatorname{Re}(a) > 0$).

2) a) Déterminer le module et un argument de $1 + a$.

b) En déduire que : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$

c) Vérifier que : $(1 + a)(1 - a) = 1 + i$ puis en déduire une forme trigonométrique de $1 - a$.

Partie B:

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, M et M' d'affixes respectives $a, -a, z$ et z' . On suppose de plus que : $zz' + i = 0$

1) Soit N le point d'affixe $\bar{z}$ ($\bar{z}$ étant le conjugué de z).

Montrer que : $(ON) \perp (OM')$

2) a) Montrer que : $z' - a = i\left(\frac{z - a}{az}\right)$

b) Montrer que si $z \neq -a$ alors $z' \neq -a$ et $\frac{z' - a}{z' + a} = -\left(\frac{z - a}{z + a}\right)$

3) On suppose que les points A, B, M ne sont pas alignés.

Montrer que le point M' appartient au cercle circonscrit au triangle ABM .

Exercice 61

Soit m un nombre complexe non nul.

Partie 1:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation dans laquelle z est l'inconnue telle que :

$$(E): z^3 + (2 - i)z^2 + (m^2 + 1 - 2i)z - i(1 + m^2) = 0$$

1) a) Vérifier que le nombre complexe i est une solution de (E) puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

b) Déterminer sous la forme algébrique, les valeurs de m pour que le produit des solutions de l'équation (E) soit égal à 1.

2) On pose : $z_1 = -1 + im$, $z_2 = -1 - im$ et $m = e^{i\alpha}$ où $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

Partie 2:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points M , M_1 et M_2 d'affixes respectives : m , $z_1 = -1 + im$ et $z_2 = -1 - im$.

1) Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ tels que les points M , M_1 et M_2 soient alignés.

2) On suppose que : $m\overline{m} + \operatorname{Re}(m) \neq 0$

a) Soit R la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = iz - 1$

Montrer que R est une rotation dont on déterminera l'affixe de son centre Ω et une mesure de son angle.

b) Montrer que : $\frac{z_2 - m}{z_2 - z_1} \in i\mathbb{R} \iff m\overline{m} - \operatorname{Im}(m) = 0$

c) En déduire l'ensemble des points $M(m)$ pour lesquels les points Ω , M , M_1 et M_2 soient cocycliques.

Exercice 62 Session Normale 2017

Soit m un nombre complexe non nul.

Partie I:

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$(E): 2z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0$$

1) Vérifier que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta = (2im)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m)

Partie II:

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

On suppose que $m \in \mathbb{C} - \{0, 1, i\}$ et on pose:

$$z_1 = \frac{1+i}{2}(m+1) \text{ et } z_2 = \frac{1-i}{2}(m+i)$$

On considère les points A, B, M, M_1, M_2 d'affixes respectives $1, i, m, z_1$ et z_2 .

1) a) Vérifier que: $z_1 = iz_2 + 1$

b) Montrer que M_1 est l'image de M_2 par la rotation de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{1+i}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

2) a) Vérifier que: $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i \frac{m-1}{m-i}$

b) Montrer que si les points M, M_1 et M_2 sont alignés, alors le point M appartient au cercle (Γ) dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$.

c) Déterminer l'ensemble des points M tels que les points Ω, M, M_1 et M_2 sont Cocycliques.

(remarquer que: $\frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} = i$)

Exercice 63 Session de Rattrapage 2017

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Soit M le point d'affixe le nombre complexe non nul z et M' le point d'affixe

$$z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

1) Déterminer le nombre complexe z tel que les deux points M et M' soient confondus.

2) On suppose que le point M est différent des deux points A et B d'affixes respectifs 1 et -1.

Montrer que: $\frac{z' + 1}{z' - 1} = \left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)^2$

3) Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$

Montrer que: Si le point M appartient à (Δ) , alors le point M' appartient à (Δ) .

4) Soit (Γ) le cercle dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$.

Montrer que: Si le point M appartient à (Γ) , alors le point M' appartient à (AB) .

Exercice 64 Session Normale 2018

Soit m un nombre complexe

Partie I:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation:

$$(E_m): z^2 + (im + 2)z + im + 2 - m = 0$$

1) a) Vérifier que $\Delta = (im - 2i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_m)

b) Donner, suivant les valeurs de m , l'ensemble des solutions de l'équation (E_m)

2) Pour $m = i\sqrt{2}$, écrire les deux solutions de l'équation (E_m) sous la forme exponentielle.

Partie II:

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

On considère les points A, Ω, M et M' d'affixes respectives $a = -1 - i$, $\omega = i$, m et $m' = -im - 1 + i$

1) Soit R la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme M en M' .

a) Vérifier que Ω est le centre de la rotation R

b) Déterminer l'affixe b de B , où B est le point tel que $A = R(B)$.

2) a) Vérifier que: $m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$

b) En déduire que les points A, M et M' sont alignés si et seulement si les points A, B, Ω , et M sont Cocycliques.

c) Montrer que l'ensemble des points M tels que les points A, M et M' sont alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 65 Session de Rattrapage 2018

1) Pour tout nombre complexe non nul z différent de i on pose: $h(z) = i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)$

a) Vérifier que: $h(z) = z \Leftrightarrow z^2 - 2iz - 2 = 0$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: (E); $z^2 - 2iz - 2 = 0$

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

On désigne par a et b les solutions de l'équation (E) tel que $\operatorname{Re}(a) = 1$

Soit z un nombre complexe différent de i de a et de b et les points $M(z)$, $M'(h(z))$, $A(a)$ et $B(b)$.

a) Montrer que: $\frac{h(z)-a}{h(z)-b} = -\frac{z-a}{z-b}$

b) En déduire que: $(\widehat{M'B}, \widehat{M'A}) \equiv \pi + (\widehat{MB}, \widehat{MA}) [2\pi]$

3) a) Montrer que si les points M , A et B sont alignés alors les points M , A , B et M' sont alignés.

b) Montrer que si les points M , A et B ne sont pas alignés alors les points M , A , B et M' sont cocycliques.

Exercice 66 Session Normal Juin 2019

Soit m un nombre complexe non réel ($m \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$)

I. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z définie par:

$$(E): z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$$

1) a- Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

b- Déterminer z_1 et z_2 , les deux solutions de l'équation (E)

2) On suppose dans cette question que $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

a- Déterminer le module et un argument de $z_1 + z_2$

b- Montrer que si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2 = 2i$

II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

On considère les points suivants:

A le point d'affixe $a = 1 + i$, B le point d'affixe $b = (1+i)m$, C le point d'aff-

fixe $c = 1 - i$, D l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et Ω le milieu du segment $[CD]$

1) a- Montrer que l'affixe du point Ω est $\omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$

b- Calculer $\frac{b-a}{\omega}$

c- En déduire que $(O\Omega) \perp (AB)$ et que $AB = 2O\Omega$

2) La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'affixe h

a- Montrer que $\frac{h-a}{b-a}$ est un réel et que $\frac{h}{b-a}$ est un imaginaire pur.

b- En déduire h en fonction de m

Exercice 67 Session de Rattrapage Juillet 2019

Soit α un nombre complexe non nul.

I. On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E_\alpha): z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$$

1) a- Vérifier que le discriminant de (E_α) est $\Delta = \alpha^2$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α)

2) Sachant que $\alpha = |\alpha|e^{i\lambda}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), mettre les deux solutions de l'équation (E_α) sous forme exponentielle.

II. On suppose que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points Ω, M_1 et M_2 d'affixes respectives α , $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1) a- Montrer que $R(\Omega) = M_1$ et que $R(M_1) = M_2$

b- En déduire que les deux triangles $O\Omega M_1$ et $OM_1 M_2$ sont équilatéraux.

2) a- Vérifier que: $z_1 - z_2 = \alpha$

b- Montrer que les deux droites (ΩM_2) et (OM_1) sont perpendiculaires.

c- En déduire que $O\Omega M_1 M_2$ est un losange.

3) Montrer que pour tout réel θ , le nombre: $Z = \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \frac{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}}$ est un réel.

Exercice 39

1) a) Vérifions que $(\sqrt{3} - i\sqrt{3})^2 = -6i$

On a:

$$(\sqrt{3} - i\sqrt{3})^2 = \sqrt{3}^2(1 - i)^2 = 3 \times (-2i) = -6i$$

Donc: $(\sqrt{3} - i\sqrt{3})^2 = -6i$

b) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $F(z) = iz$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$;

$$\begin{aligned} F(z) = iz &\Leftrightarrow \frac{iz - 1}{z - i} = iz \\ &\Leftrightarrow iz - 1 = iz(z - i) \\ &\Leftrightarrow iz^2 + (1 - i)z + 1 = 0 \end{aligned}$$

- Le discriminant de cette équation est $\Delta = (1 - i)^2 - 4i = -6i = (\sqrt{3} - i\sqrt{3})^2$

- Les solutions de cette équation sont:

$$z_1 = \frac{-1 + i + \sqrt{3} - i\sqrt{3}}{2i} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)i$$

$$z_2 = \frac{-1 + i - \sqrt{3} + i\sqrt{3}}{2i} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)i$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est:

$$S = \left\{ \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)i; \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)i \right\}$$

c) Écrivons les solutions de (E) sous forme trigonométrique

• $z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}(1 + i)$

• On a: $|z_1| = \left| \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right| \times |1 + i| = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Donc: } z_1 &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

• On a: $|z_2| = \left| \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right| \times |1+i| = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

Donc: $z_2 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$
 $= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

d) Montrons que les points O, A et B sont alignés.

On a: $A(z_1)$; $B(z_2)$ et $O(0)$

et $\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)}{\frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i)} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \in \mathbb{R}$

Puisque $\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} \in \mathbb{R}$, alors les points O, A et B sont alignés.

2) a) Montrons que: $F(z) = -\frac{z+\bar{z}}{|z-i|^2} + i \frac{z\bar{z}-1}{|z-i|^2}$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{iz-1}{z-i} \\ &= \frac{(iz-1)(\bar{z}+i)}{(z-i)(\bar{z}+i)} \\ &= \frac{iz\bar{z}-z-\bar{z}-i}{|z-i|^2} \\ &= -\frac{z+\bar{z}}{|z-i|^2} + i \left(\frac{z\bar{z}-1}{|z-i|^2} \right) \end{aligned}$$

Donc: $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$; $F(z) = -\frac{z+\bar{z}}{|z-i|^2} + i \left(\frac{z\bar{z}-1}{|z-i|^2} \right)$

b) Dédudons que: $|z|=1 \Rightarrow F(z) \in \mathbb{R}$.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$

Si $|z|=1$, alors $z\bar{z}=1$, donc $z\bar{z}-1=0$

D'où $F(z) = -\frac{z+\bar{z}}{|z-i|^2}$

Or: $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}(z)$ et $|z-i|^2 \in \mathbb{R}^+$

Donc $F(z)$ est un réel.

Conclusion: $|z|=1 \Rightarrow F(z) \in \mathbb{R}$

Exercice 40

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation:

$$(E): z^2 - (3m - 2i)z + 2m^2 - 4mi = 0$$

- Le discriminant de cette équation est $\Delta = (3m - 2i)^2 - 4(2m^2 - 4mi)$
 $= m^2 + 4mi - 4 = (m + 2i)^2$

- Les solutions de cette équation sont:

$$z = \frac{3m - 2i + m + 2i}{2} = 2m \text{ et } z' = \frac{3m - 2i - m - 2i}{2} = m - 2i$$

$$\text{Donc } S = \{2m; m - 2i\}$$

2) Dans cette question $m = 1 + i$

donc les solutions de l'équation (E) dans ce cas sont:

$$z = 2 + 2i \text{ et } z' = 1 - i$$

comme $|z_1| < |z_2|$ et $|2 + 2i| = 2\sqrt{2}$ et $|1 - i| = \sqrt{2}$, alors:

$$z_1 = z' = 1 - i \text{ et } z_2 = z = 2 + 2i$$

a) Écrivons z_1 et z_2 sous forme trigonométrique

$$* |z_1| = |1 - i| = \sqrt{2}$$

$$* z_1 = 1 - i$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$* |z_2| = |2 + 2i| = 2\sqrt{2}$$

$$* z_2 = 2 + 2i$$

$$= 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

b) Vérifions que $-z_1$ est une racine cubique de z_2

Méthode 1:

$$(-z_1)^3 = (-1 + i)^3 = (-1 + i)^2(-1 + i)$$

$$= -2i(-1 + i)$$

$$= 2i + 2$$

$$= z_2$$

Puisque $(-z_1)^3 = z_2$, alors $-z_1$ est une racine cubique de z_2 .

Méthode 2:

$$\begin{aligned}
-z_1 &= -\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \\
&= -\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \\
&= \sqrt{2} \times e^{i\pi} \times e^{-i\frac{\pi}{4}} \\
&= \sqrt{2} \times e^{i\frac{3\pi}{4}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } (-z_1)^3 &= (\sqrt{2})^3 \times e^{i\frac{9\pi}{4}} \\
&= 2\sqrt{2} \times e^{i\frac{\pi}{4}} \\
&= z_2
\end{aligned}$$

Donc $-z_1$ est une racine cubique de z_2 .

• Déterminons les deux autres racines cubiques de z_2 .

$$\begin{aligned}
Z^3 = z_2 &\Leftrightarrow Z^3 = (-z_1)^3 \\
&\Leftrightarrow \left(-\frac{Z}{z_1}\right)^3 = 1 \quad ; (\text{car } z_1 \neq 0)
\end{aligned}$$

Donc $-\frac{Z}{z_1}$ est une racine cubique de l'unité ; or les racines cubiques de l'unité sont : 1, j et $\bar{j}$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$\text{Donc : } -\frac{Z}{z_1} = 1 \text{ ou } -\frac{Z}{z_1} = j \text{ ou } -\frac{Z}{z_1} = \bar{j}$$

$$\text{D'où : } Z = -z_1 \text{ ou } Z = -jz_1 \text{ ou } Z = -\bar{j}z_1$$

Donc les deux autres racines cubiques de z_2 sont :

$$\begin{aligned}
j \times (-z_1) &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \times (-1 + i) \\
&= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} - i\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et } \bar{j} \times (-z_1) &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \times (-1 + i) \\
&= \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}$$

3) a) Montrons que les points A, B et C ne sont pas alignés.

On a : $A(i)$; $B(2m)$ et $C(m-2i)$ • Puisque $m \notin (i\mathbb{R})$, alors $A \neq B$

Calculons le quotient : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{m - 2i - i}{2m - i} = \frac{m - 3i}{2m - i}$$

$$(A, B \text{ et } C \text{ sont alignés}) \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{m-3i}{2m-i} = \overline{\left(\frac{m-3i}{2m-i}\right)} \\
&\Leftrightarrow \frac{m-3i}{2m-i} = \frac{\overline{m}+3i}{2\overline{m}+i} \\
&\Leftrightarrow (m-3i)(2\overline{m}+i) = (2m-i)(\overline{m}+3i) \\
&\Leftrightarrow 5i(m+\overline{m}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \overline{m} = -m \\
&\Leftrightarrow m \in i\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Or $m \notin i\mathbb{R}$, donc $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \notin \mathbb{R}$, et par conséquent les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Montrons que:

$$d = \frac{3m - im + 2 - 2i}{2} \quad \text{ou} \quad d = \frac{3m + im - 2 - 2i}{2}$$

(Le triangle BCD est rectangle isocèle en D) si et seulement si:

$$\left(\begin{cases} DB = DC \\ (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} DB = DC \\ (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DB}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_D - z_B}{z_D - z_C} = i \text{ ou } \frac{z_D - z_B}{z_D - z_C} = -i \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d - 2m}{d + 2i - m} = i \text{ ou } \frac{d - 2m}{d + 2i - m} = -i$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{2m - 2 - mi}{1 - i} \text{ ou } d = \frac{2m + 2 + mi}{1 + i}$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{3m + mi - 2 - 2i}{2} \text{ ou } d = \frac{3m - mi - 2i + 2}{2}$$

c) Déterminons m pour que $ABCD$ soit un carré

Le triangle BCD est rectangle isocèle en D , donc, pour que $ABCD$ soit un carré, il suffit que le triangle ABC soit rectangle isocèle en A .

$$(ABC \text{ rectangle isocèle en } A) \Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i \text{ ou } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m - i}{m - 3i} = i \text{ ou } \frac{2m - i}{m - 3i} = -i$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{3+i}{2-i} \text{ ou } m = \frac{-3+i}{2+i}$$

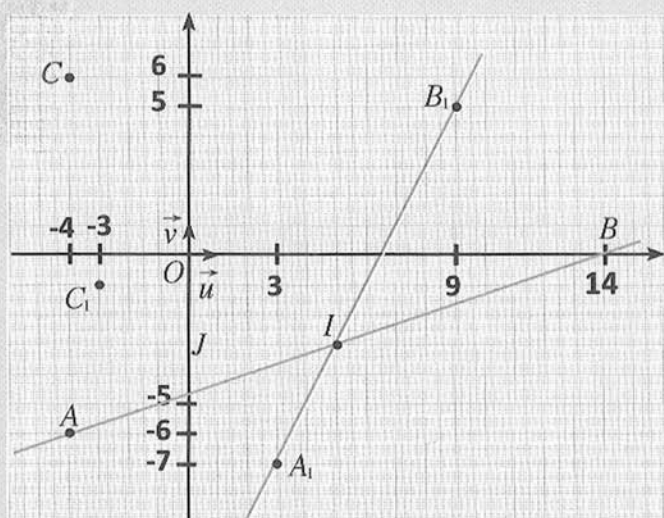
$$\Leftrightarrow m = 1+i \text{ ou } m = -1+i$$

Donc, pour que $ABCD$ soit un carré il faut et il suffit que $m = 1 + i$ ou $m = -1 + i$.

Exercice 41

Partie 1:

- 1) Plaçons les points $A(-4-6i)$; $B(14)$; $C(-4+6i)$; $A_1(3-7i)$; $B_1(9+5i)$ et $C_1(-3-i)$



- 2) Déterminons les affixes des points I, J et K

* I milieu de $[AB]$, donc: $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

D'où: $z_I = 5 - 3i$

* J milieu de $[BC]$, donc: $z_J = \frac{z_B + z_C}{2}$

D'où: $z_J = 5 + 3i$

* K milieu de $[CA]$, donc $z_K = -4$

- 3) Montrons que les points A_1, I et B_1 sont alignés

$$\frac{z_I - z_{A_1}}{z_{B_1} - z_{A_1}} = \frac{5 - 3i - 3 + 7i}{9 + 5i - 3 + 7i} = \frac{2 + 4i}{6 + 12i} = \frac{2(1 + 2i)}{6(1 + 2i)} = \frac{1}{3}$$

Puisque $\frac{z_I - z_{A_1}}{z_{B_1} - z_{A_1}} \in \mathbb{R}$, alors les points A_1, I et B_1 sont alignés.

- 4) Déterminons une mesure de l'angle $(\widehat{IB;IB_1})$

$$(\widehat{IB;IB_1}) \equiv \arg\left(\frac{z_{B_1} - z_I}{z_B - z_I}\right)[2\pi]$$

$$\begin{aligned}
 \frac{z_{B_1} - z_I}{z_B - z_I} &= \frac{9 + 5i - 5 + 3i}{14 - 5 + 3i} \\
 &= \frac{4 + 8i}{9 + 3i} \\
 &= \frac{2}{3}(1 + i) \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)
 \end{aligned}$$

Donc: $\arg\left(\frac{z_{B_1} - z_I}{z_B - z_I}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

D'où: $(\overline{IB}; \overline{IB_1}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

5) Déterminons l'image de la droite (AB) par la rotation R de centre I et d'angle $\frac{\pi}{4}$

* I est le centre de R , donc $R(I) = I$

* Puisque $(\overline{IB}; \overline{IB_1}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$, alors $R((IB)) = (IB_1)$

Or $A \in (IB)$ et $A_1 \in (IB_1)$

Donc: $R((AB)) = (A_1B_1)$

Donc l'image de la droite (AB) par R est la droite (A_1B_1) .

Partie 2:

1) Déterminons $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$

$$\begin{aligned}
 * f(A) = A' &\Leftrightarrow z_{A'} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z_A + 2 - 2i \\
 &\Leftrightarrow z_{A'} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(-4 - 6i) + 2 - 2i \\
 &\Leftrightarrow z_{A'} = 3 - 7i = z_{A_1}
 \end{aligned}$$

Donc $f(A) = A_1$

* On montre de même que:

$$f(B) = B_1 \quad \text{et} \quad f(C) = C_1$$

2) Montrons que f admet un seul point fixe

Soit $M(z)$ un point du plan.

$$\begin{aligned}
 (M(z) \text{ est invariant par } f) &\Leftrightarrow f(M) = M \\
 &\Leftrightarrow z = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 2 - 2i \\
 &\Leftrightarrow z = 4
 \end{aligned}$$

Donc le point $\Omega(4)$ est le seul point invariant par f .

3) Montrons que $f = roh$

Soit $M(z)$ un point du plan.

$$\bullet (roh)(M) = r(h(M))$$

On pose: $f(M) = M'$; $h(M) = M_1(z_1)$ et $r(M_1) = M_2(z_2)$

$$\bullet h(M) = M_1(z_1) \Leftrightarrow z_1 - \omega = \frac{\sqrt{2}}{2}(z - \omega)$$

$$\bullet r(M_1) = M_2(z_2) \Leftrightarrow z_2 - \omega = e^{i\frac{\pi}{4}}(z_1 - \omega)$$

$$\bullet (roh)(M) = M_2 \Leftrightarrow r(h(M)) = M_2$$

$$\Leftrightarrow r(M_1) = M_2$$

$$\Leftrightarrow z_2 - \omega = e^{i\frac{\pi}{4}}(z_1 - \omega)$$

$$\Leftrightarrow z_2 - \omega = e^{i\frac{\pi}{4}} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(z - \omega)$$

$$\Leftrightarrow z_2 - 4 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(z - 4)$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 2 - 2i$$

$$\Leftrightarrow z_2 = z'$$

$$\Leftrightarrow (roh)(M) = f(M)$$

Donc, pour tout point M du plan, $(roh)(M) = f(M)$, d'où $f = roh$.

Exercice 42

1) a) Vérifions que $z - z_1 = i(i - z_1)$ et $1 - z_2 = i(z - z_2)$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1; -1; -i; i\}$

• Le triangle BMM_1 est rectangle isocèle en M_1 tel que $(\overrightarrow{M_1B}; \overrightarrow{M_1M}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$,
donc M est l'image de B par la rotation de centre M_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$;

donc: $z - z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_1)$; c'est-à-dire: $z - z_1 = i(i - z_1)$

• Le triangle AMM_2 est rectangle isocèle en M_2 tel que:

$$(\overrightarrow{M_2M}; \overrightarrow{M_2A}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Donc: A est l'image de M par la rotation de centre M_2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

d'où: $z_A - z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_2)$ C'est-à-dire: $1 - z_2 = i(z - z_2)$

b) Vérifions que: $z_1 = \frac{1+i}{2}(z+1)$ et $z_2 = \frac{1-i}{2}(z+i)$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1; -1; -i; i\}$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad z - z_1 &= i(i - z_1) \Leftrightarrow -z_1 + iz_1 = -1 - z \\
 &\Leftrightarrow z_1 = \frac{-1 - z}{-1 + i} \\
 &\Leftrightarrow z_1 = \frac{1 + i}{2}(1 + z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad 1 - z_2 &= i(z - z_2) \Leftrightarrow (-1 + i)z_2 = i(z + i) \\
 &\Leftrightarrow z_2 = \frac{1 - i}{2}(z + i)
 \end{aligned}$$

2) a) Montrons que: $OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow |z + 1| = |z + i|$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1; -1; i; -i\}$

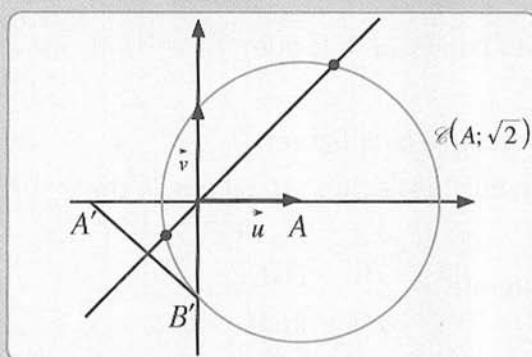
$$\begin{aligned}
 OM_1 = OM_2 &\Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \\
 &\Leftrightarrow \left| \frac{1+i}{2}(1+z) \right| = \left| \frac{1-i}{2}(z+i) \right| \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}|1+i| \times |1+z| = \frac{1}{2}|1-i| \times |z+i| \\
 &\Leftrightarrow |1+z| = |z+i|
 \end{aligned}$$

Déduisons l'ensemble des points M tels que $OM_1 = OM_2$

$$\begin{aligned}
 OM_1 = OM_2 &\Leftrightarrow |1+z| = |z+i| \\
 &\Leftrightarrow A'M = B'M \\
 &\Leftrightarrow (M \text{ appartient à la médiatrice du segment } [A'B'])
 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points M tels que $OM_1 = OM_2$ est la médiatrice du segment $[A'B']$.

• Construisons cet ensemble (voir figure)



b) Montrons que: $OM_1 = M_1M_2 \Leftrightarrow |z + 1|^2 = 2|z|^2$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0; -1; 1; i; -i\}$

$$\begin{aligned}
 OM_1 = M_1 M_2 &\Leftrightarrow |z_1| = |z_2 - z_1| \\
 &\Leftrightarrow \left| \frac{1+i}{2}(z+1) \right| = \left| \frac{1-i}{2}(z+i) - \frac{1+i}{2}(1+z) \right| \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}|z+1| = |-iz| \\
 &\Leftrightarrow |z+1|^2 = 2|z|^2
 \end{aligned}$$

Donc: $OM_1 = M_1 M_2 \Leftrightarrow |z+1|^2 = 2|z|^2$

c) Montrons que: $|z+1|^2 = 2|z|^2 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 2$

Soit $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
 \bullet |z+1|^2 = 2|z|^2 &\Leftrightarrow (z+1)(\bar{z}+1) = 2z\bar{z} \\
 &\Leftrightarrow z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 = 2z\bar{z} \\
 &\Leftrightarrow z\bar{z} - z - \bar{z} - 1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet |z-1|^2 = 2 &\Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) = 2 \\
 &\Leftrightarrow z\bar{z} - z - \bar{z} - 1 = 0
 \end{aligned}$$

Donc: $|z+1|^2 = 2|z|^2 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 2$.

• Dédudons l'ensemble des points M tels que: $OM = M_1 M_2$

$$\begin{aligned}
 OM_1 = M_1 M_2 &\Leftrightarrow |z+1|^2 = 2|z|^2 \\
 &\Leftrightarrow |z-1|^2 = 2 \\
 &\Leftrightarrow |z-1| = \sqrt{2} \\
 &\Leftrightarrow AM = \sqrt{2} \\
 &\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}(A; \sqrt{2})
 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points M tels que $OM_1 = M_1 M_2$ est le cercle de centre A de rayon $\sqrt{2}$.

Construisons cet ensemble (voir figure).

d) Dédudons l'ensemble des points M tel que le triangle $OM_1 M_2$ est équilatéral.

$$\begin{aligned}
 (OM_1 M_2 \text{ est équilatéral}) &\Leftrightarrow \begin{cases} OM_1 = OM_2 \\ OM_1 = M_1 M_2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ appartient à la médiatrice du segment } [A'B'] \\ M \in \mathcal{C}(A; \sqrt{2}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points M tel que le triangle $OM_1 M_2$ est équilatéral est l'intersection du cercle $\mathcal{C}(A; \sqrt{2})$ et de la médiatrice de $[A'B']$.

Exercice 43

1) a) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - 4z + 8 = 0$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = -16 = (4i)^2$

Donc les solutions de cette équation sont: $z = \frac{4+4i}{2} = 2+2i$

$$z' = \frac{4-4i}{2} = 2-2i$$

Donc: $S = \{2+2i; 2-2i\}$

b) Écrivons z_1 et z_2 sous forme trigonométrique

$$\text{on a: } \begin{cases} \operatorname{Im}(2+2i) = 2 \\ \operatorname{Im}(2-2i) = -2 \end{cases}$$

Puisque $\operatorname{Im}(z_1) > 0$; alors $z_1 = 2+2i$ et $z_2 = 2-2i$

$$\bullet |z_1| = |2+2i| = 2\sqrt{2}$$

$$z_1 = 2+2i$$

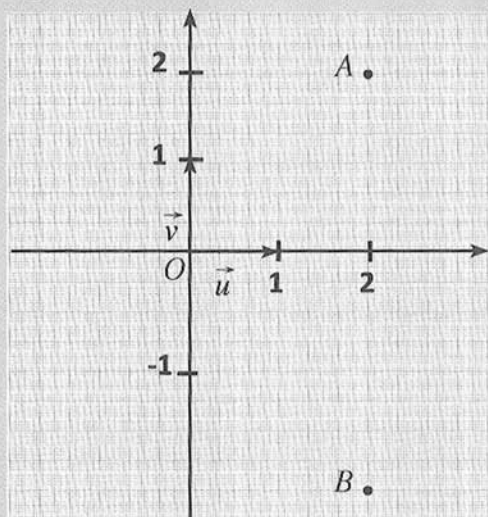
$$= 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\bullet z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

* Plaçons les points $A(z_1)$ et $B(z_2)$

Puisque $z_2 = \overline{z_1}$, alors les points A et B sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. (voir figure)



2) a) Déterminons $z_{A'}$ et $z_{B'}$

On a: $A(2+2i)$ et $A' = f(A)$.

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad A' = f(A) &\Leftrightarrow z_{A'} = \frac{1}{z_A} \\
 &\Leftrightarrow z_{A'} = \frac{1}{2-2i} \\
 &\Leftrightarrow z_{A'} = \frac{2+2i}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad B' = f(B) &\Leftrightarrow z_{B'} = \frac{1}{z_B} \\
 &\Leftrightarrow z_{B'} = \frac{1}{2+2i} \\
 &\Leftrightarrow z_{B'} = \frac{2-2i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i
 \end{aligned}$$

b) Montrons que les points $O; M$ et M' sont alignés

Soit $M(z)$ un point du plan tel que $M \neq O$. $M' = f(M)$

$$M'(z') = f(M) \Leftrightarrow z' = \frac{1}{z}$$

$$\bullet \quad \frac{z_{M'} - z_O}{z_M - z_O} = \frac{z'}{z} = \frac{1}{z} = \frac{1}{zz} = \frac{1}{|z|^2}$$

Puisque $|z|^2 \in \mathbb{R}$, alors $\frac{z'}{z} \in \mathbb{R}$; donc les points $O; M$ et M' sont alignés.

• Montrons que $OM' \times OM = 1$

$$\begin{aligned}
 OM' \times OM &= |z'| \times |z| \\
 &= \left| \frac{1}{z} \right| \times |z| \\
 &= \frac{1}{|z|} \times |z| \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Donc: $OM' \times OM = 1$

$$3) \text{ a) Montrons que: } |z-2|=2 \Leftrightarrow \left| \frac{1-2\bar{z}'}{z'} \right| = 2$$

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } z \in \mathbb{C}^*; \quad \left| \frac{1-2\bar{z}'}{z'} \right| = 2 &\Leftrightarrow \left| \frac{1-\frac{2}{z}}{\frac{1}{z}} \right| = 2 \\
 &\Leftrightarrow |z| \times \left| \frac{z-2}{z} \right| = 2 \\
 &\Leftrightarrow |z-2| = 2
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } |z-2|=2 \Leftrightarrow \left| \frac{1-2\bar{z}'}{z'} \right| = 2$$

• Dédudons que: $|z - 2| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{2} - z' \right| = |z'|$.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$

$$\begin{aligned} |z - 2| = 2 &\Leftrightarrow \left| \frac{1 - 2\bar{z}'}{\bar{z}'} \right| = 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{\left| 2\left(\frac{1}{2} - \bar{z}'\right) \right|}{|\bar{z}'|} = 2 \\ &\Leftrightarrow 2\left| \frac{1}{2} - \bar{z}' \right| = 2|\bar{z}'| \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{1}{2} - \bar{z}' \right| = |\bar{z}'| \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{1}{2} - z' \right| = |z'| \end{aligned}$$

Donc: $|z - 2| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{2} - z' \right| = |z'|$

b) • Montrons que $[AB]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}(I; 2)$

Pour montrer que $[AB]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}(I; 2)$; il suffit de mon-

trer que: $\begin{cases} A \in (\mathcal{C}) \\ B \in (\mathcal{C}) \\ I \text{ milieu de } [AB] \end{cases}$

* On a: $A(2 + 2i)$ et $I(2)$,

donc $IA = |z_A - z_I| = |2i| = 2$; d'où $A \in (\mathcal{C})$

* On a: $B(2 - 2i)$, donc $IB = |-2i| = 2$; d'où $B \in (\mathcal{C})$

* $\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2 + 2i + 2 - 2i}{2} = 2 = z_I$; Donc I est le milieu de $[AB]$

Conclusion: $[AB]$ est un diamètre du cercle $(\mathcal{C})$

• Montrons que:

$$(M \in (\mathcal{C}) \setminus \{O\}) \Leftrightarrow (M' \in (D))$$

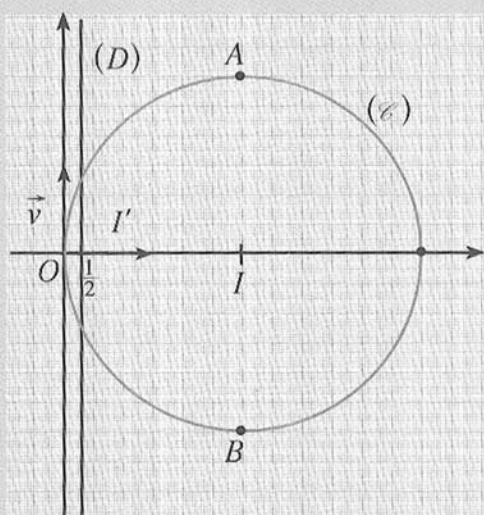
Soit $M(z)$ un point du plan tel que $M \neq O$ ($z \neq 0$).

$$\begin{aligned} M \in (\mathcal{C}) &\Leftrightarrow IM = 2 \\ &\Leftrightarrow |z - 2| = 2 \\ &\Leftrightarrow \left| z' - \frac{1}{2} \right| = |z'| \\ &\Leftrightarrow I'M' = OM' ; \text{ où } I'\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow (M' \text{ appartient à la médiatrice de } [OI']) \end{aligned}$$

* Déterminons une équation de la droite (D) médiatrice de $[OI']$

On a: $O(0;0)$ et $I'(\frac{1}{2};0)$; Donc $(D):x = \frac{x_I + x_O}{2} = \frac{1}{4}$

• Construisons $(\mathcal{C})$ et (D) dans le même repère. (voir figure)



• Dédons une méthode pour construire M' connaissant $M \in (\mathcal{C})$

Soit $M \in (\mathcal{C}) \setminus \{O\}$ et $M' = f(M)$

- d'après la question 2) b) ; $M' \in (OM)$

- d'après la question 3) b) ; $M' \in (D)$

Donc M' est le point d'intersection des droites (OM) et (D) . (voir figure)

Exercice 44

Partie 1: $P(z) = z^3 - (4-i)z^2 + 4(2-i)z + 8i$; $z \in \mathbb{C}$

1)a) Montrons que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pur

On pose: $z = bi$ avec $b \in \mathbb{R}$.

$(z = bi \text{ solution de } P(z) = 0) \Leftrightarrow P(bi) = 0$

$$\Leftrightarrow (bi)^3 - (4-i)(bi)^2 + 4(2-i)(bi) + 8i = 0$$

$$\Leftrightarrow (4b^2 + 4b) + i(-b^3 - b^2 + 8b + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2 + 4b = 0 : (E_1) \\ -b^3 - b^2 + 8b + 8 = 0 : (E_2) \end{cases}$$

$$(E_1) \Leftrightarrow b = 0 \text{ ou } b = -1$$

$b = 0$ ne vérifie pas l'équation (E_2)

$b = -1$ vérifie l'équation (E_2)

Donc: $z_0 = -i$ est la seule solution imaginaire pure de l'équation $P(z) = 0$

b) Déterminons les réels b et c tels que: $P(z) = (z+i)(z^2 + bz + c)$

On a: $(z+i)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b+i)z^2 + (c+ib)z + ic$

Donc, par identification:

$$\begin{cases} b+i = -4+i \\ c+ib = 8-4i \\ ic = 8i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ c = 8 \end{cases}$$

D'où: $P(z) = (z+i)(z^2 - 4z + 8)$

2) Résolvons l'équation $P(z) = 0$

$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\Leftrightarrow (z+i)(z^2 - 4z + 8) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = -i \text{ ou } z^2 - 4z + 8 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$ est $\Delta = -16 = (4i)^2$

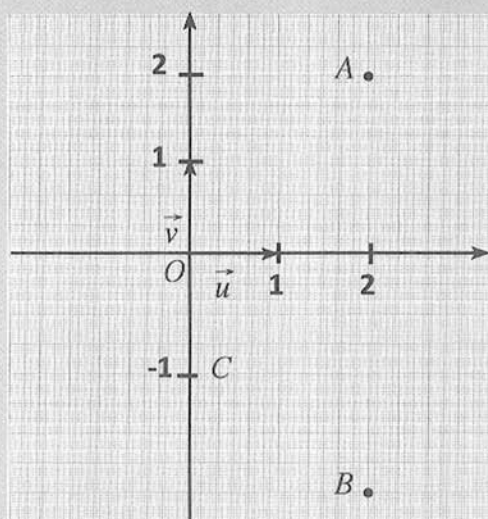
Donc les solutions de cette équation sont:

$$z_1 = \frac{4+4i}{2} = 2+2i \text{ et } z_2 = 2-2i$$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation est: $S = \{-i; 2+2i; 2-2i\}$

Partie 2:

1) Plaçons les points $A(2+2i)$; $B(2-2i)$ et $C(-mi)$ dans le cas $m = 1$



2) Déterminons l'affixe de C'

C' est le symétrique de C par rapport à B , donc B est le milieu de $[CC']$

d'où: $\frac{z_C + z_{C'}}{2} = z_B$; donc: $z_{C'} = 2z_B - z_C = 4 - 4i + mi$

3) Déterminons les affixes des points K et H

- $R(C) = K \Leftrightarrow z_K = e^{i\frac{\pi}{2}} z_C$
 $\Leftrightarrow z_K = i(-mi) = m$ donc $\boxed{K(m)}$

- $R(C') = H \Leftrightarrow z_H = e^{i\frac{\pi}{2}} z_{C'}$
 $\Leftrightarrow z_H = i(4 - 4i + mi)$
 $\Leftrightarrow z_H = 4 - m + 4i$

Donc: $\boxed{H(4 - m + 4i)}$

4) Déterminons z_N et z_L

- $t(C) = N \Leftrightarrow z_N = z_C + 4i$
 $\Leftrightarrow z_N = i(4 - m)$

Donc: $\boxed{N(i(4 - m))}$

- $t(C') = L \Leftrightarrow z_L = z_{C'} + 4i$
 $\Leftrightarrow z_L = 4 + i(m - 4) + 4i$
 $\Leftrightarrow z_L = 4 + im$

Donc: $L(4 + im)$

5) a) Montrons que A est le milieu des segments $[LN]$ et $[KH]$

- $\frac{z_N + z_L}{2} = \frac{i(4 - m) + 4 + im}{2} = 2 + 2i = z_A$

- $\frac{z_K + z_H}{2} = \frac{m + 4i - (m - 4)}{2} = 2 + 2i = z_A$

Donc A est le milieu de $[LN]$ et $[KH]$

b) Montrer que: $\frac{z_H - z_A}{z_L - z_A} = i$

$$\begin{aligned} \frac{z_H - z_A}{z_L - z_A} &= \frac{4i - (m - 4) - 2 - 2i}{4 + im - 2 - 2i} = \frac{2 - m + 2i}{2 + i(m - 2)} \\ &= \frac{i(2 + i(m - 2))}{2 + i(m - 2)} \\ &= i \end{aligned}$$

Donc: $\frac{z_H - z_A}{z_L - z_A} = i$

c) Dédisons la nature de $KLHN$

$$\begin{aligned} \frac{z_H - z_A}{z_L - z_A} = i &\Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{z_H - z_A}{z_L - z_A} \right| = |i| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_H - z_A}{z_L - z_A}\right) \equiv \arg(i)[2\pi] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} AH = AL \\ (\overrightarrow{AL}; \overrightarrow{AH}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

Donc: $AH = AL$ et $(AH) \perp (AL)$

Or les diagonales $[LN]$ et $[KH]$ du quadrilatère $KLHN$ ont le même milieu A , donc $KLHN$ est un parallélogramme; de plus $AH = AL$ et $(AH) \perp (AL)$ donc les diagonales de $KLHN$ sont orthogonales et de même longueur ; donc $KLHN$ est un carré.

Exercice 45

1) a) Vérifions que: $\frac{b-c}{a-c} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\begin{aligned} \frac{b-c}{a-c} &= \frac{-1 - i\sqrt{3} - 2}{-1 + i\sqrt{3} - 2} = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}} \\ &= \frac{(3 + i\sqrt{3})^2}{12} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \\ &= e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

Donc $\frac{b-c}{a-c} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) Dédisons la nature du triangle ABC

$$\begin{aligned} \frac{b-c}{a-c} = e^{i\frac{\pi}{3}} &\Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{b-c}{a-c} \right| = |e^{i\frac{\pi}{3}}| = 1 \\ \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \equiv \arg(e^{i\frac{\pi}{3}})[2\pi] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} |b-c| = |a-c| \\ (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} BC = AC \\ (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

Donc le triangle ABC est un triangle équilatéral.

2) Déterminons le centre et le rayon du cercle $(\mathcal{C})$.

Puisque le triangle ABC est équilatéral alors le centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABC est le centre de gravité du triangle ABC .

On remarque que: $z_A + z_B + z_C = 0$ alors: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

Donc O est le centre de gravité du triangle ABC .

D'où O est le centre du cercle $(\mathcal{C})$.

Puisque: $|a| = |b| = |c| = 2$; alors: $OA = OB = OC = 2$

Donc: $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O et de rayon 2.

3) a) Montrons que (Γ) est un cercle.

Soit $z \in \mathbb{C}$; on pose: $z = x + yi$; $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} M(z) \in (\Gamma) &\Leftrightarrow 2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(2x) + x^2 + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 4 \end{aligned}$$

Donc (Γ) est le cercle de centre $I(-2; 0)$ et de rayon $r = 2$.

b) Vérifions que $A \in (\Gamma)$ et $B \in (\Gamma)$

• $IA = |z_A - z_I| = |1 + i\sqrt{3}| = 2 = r$, donc $A \in (\Gamma)$

• $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ donc $\bar{z}_B = -1 + i\sqrt{3}$

$$2(z_B + \bar{z}_B) + z_B \bar{z}_B = -4 + 4 = 0$$

Donc $\boxed{B \in (\Gamma)}$

4) a) Déterminons $r(B)$

Puisque le triangle ABC est équilatéral direct

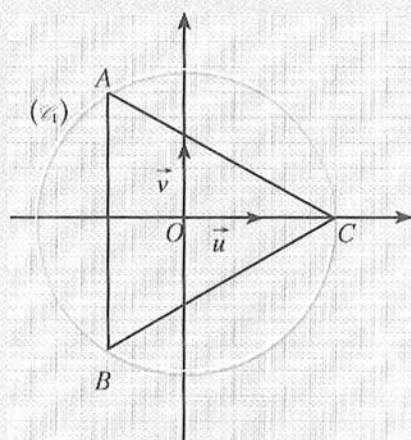
$$\text{alors: } \begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [3\pi] \end{cases}$$

Donc: $\boxed{r(B) = C}$

b) • Construisons $C_1 = r(C)$ (voir figure)

$$C_1 = r(C) \Leftrightarrow \begin{cases} AC = AC_1 \\ (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AC_1}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

On peut donc placer le point C_1 .



• Déterminons l'afixe de C_1

$$\begin{aligned} C_1 = r(C) &\Leftrightarrow z_{C_1} - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C - z_A) \\ &\Leftrightarrow z_{C_1} = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C - z_A) + z_A \\ &\Leftrightarrow z_{C_1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3 - i\sqrt{3}) - 1 + i\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow z_{C_1} = 2 + 2i\sqrt{3} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{C_1(2 + 2i\sqrt{3})}$

Exercice 46

1) a) Vérifions que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(z_n - z_{n-1})$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$;

$$\text{On a: } z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_n \quad \text{donc } z_n = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_{n-1}$$

$$\text{D'où: } z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(z_n - z_{n-1})$$

$$\text{Donc: } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(z_n - z_{n-1})$$

b) Déduisons d_n en fonction de n

soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{On a: } z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(z_n - z_{n-1})$$

Donc: $|z_{n+1} - z_n| = \left| \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} \right| \times |z_n - z_{n-1}|$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; d_n = \frac{\sqrt{3}}{2} d_{n-1}$

Donc (d_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme

$$d_0 = |z_1 - z_0| = \left| -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} \right| = \frac{1}{2}$$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; d_n = d_0 q^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n$

c) • Déterminons L_n en fonction de n .

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \in \mathbb{N}, \quad L_n &= \sum_{K=0}^n A_K A_{K+1} \\ &= \sum_{K=0}^n |z_{K+1} - z_K| \\ &= \sum_{K=0}^n d_K \\ &= \sum_{K=0}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^K \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \right] = \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1}}{2 - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

• Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n$

On a: $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n = 0$

D'où: $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

2) a) Déterminons a_{n+1} en fonction de a_n

Soit $n \in \mathbb{N}$;

$$a_{n+1} \equiv \arg(z_{n+1})[2\pi]$$

Or $z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) z_n$ et $\arg \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

Donc: $\arg(z_{n+1}) \equiv \frac{\pi}{6} + \arg(z_n) [2\pi]$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_{n+1} = \frac{\pi}{6} + a_n$

b) Dédisons a_n en fonction de n

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_{n+1} = \frac{\pi}{6} + a_n$

Donc (a_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{\pi}{6}$ et de premier terme $a_0 = 0$ (car $z_0 = 1$ et $\arg(1) \equiv 0[2\pi]$)

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n = \frac{n\pi}{6}$

c) Déterminons les valeurs de n pour lesquelles les points O, A_0 et A_n sont alignés

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; puisque les points O, A_0 et A_n sont deux à deux distincts, alors:

$$(O, A_0 \text{ et } A_n \text{ sont alignés}) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_{A_n} - z_O}{z_{A_0} - z_O}\right) \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_n}{z_0}\right) \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(z_n) - \arg(z_0) \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow a_n - a_0 \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; \frac{n\pi}{6} = k\pi$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; n = 6k$$

Or $n \in \mathbb{N}$, donc les points O, A_0 et A_n sont alignés si et seulement si $n = 6k$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice 47

1) Déterminons l'ensemble $E = \{M(z)/t(z) \in \mathbb{R}\}$

Soit $z \in \mathbb{C}$, on pose $z = x + yi$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\bullet t(z) = z^2 + z + 1$$

$$= (x + yi)^2 + (x + yi) + 1$$

$$= (x^2 + x - y^2 + 1) + i(2xy + y)$$

$$M(z) \in E \Leftrightarrow t(z) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im}(t(z)) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2xy + y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

Donc E est l'union des deux droites $(D_1): y = 0$ et $(D_2): x = -\frac{1}{2}$

2) Déterminons l'ensemble

$$F = \{M(z)/O; M \text{ et } M' \text{ alignés}\}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$;

- Si $z = 0$, alors $M = O$ donc les points O, M et M' sont alignés (car dans ce cas on a juste deux points).

- Si $z \neq 0$, alors $M \neq O$

$$\frac{z_{M'} - z_O}{z_M - z_O} = \frac{t(z)}{z} = z + 1 + \frac{1}{z}$$

On pose $z = x + yi$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tel que: $(x; y) \neq (0; 0)$

On a:

$$\bullet \quad z + 1 + \frac{1}{z} = \left(x + 1 + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

$$\text{Donc: } \frac{t(z)}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{t(z)}{z}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{y}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 = 1)$$

$$\Leftrightarrow M \in ((Ox) \cup \mathcal{C}(O; 1)) \setminus \{O\}$$

Donc l'ensemble F est l'union de l'axe des abscisses (privé de O) et du cercle de centre O et de rayon 1: $F = (Ox) \cup \mathcal{C}(O; 1)$

Partie 2:

1) a) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation:

$$z^2 + z + 1 = 0 : (E)$$

- Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1 - 4 = -3 = (\sqrt{3}i)^2$

- Les solutions de cette équation sont: $z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Donc } S = \left\{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

b) • Vérifions que $u^{3m} = v^{3m} = 1$

u et v sont les solutions de l'équation (E) , alors $u = z_1$ et $v = z_2$ (par exemple)

$$\text{Donc: } u = e^{i\frac{4\pi}{3}} \text{ et } v = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Soit $m \in \mathbb{N}$,

$$* u^{3m} = (e^{i\frac{4\pi}{3}})^{3m} = e^{i4m\pi} = 1$$

$$* v^{3m} = (\bar{u})^{3m} = (\bar{u^{3m}}) = 1$$

$$\text{Donc: } \boxed{\forall m \in \mathbb{N}; u^{3m} = v^{3m} = 1}$$

$$\bullet \text{ Vérifions que: } (\forall n \in \mathbb{N}); (1+u)^{6n} = (1+v)^{6n}$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}$$

$$* 1+u = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Donc } (1+u)^{6n} = (e^{-i\frac{\pi}{3}})^{6n} = e^{-i2n\pi} = 1$$

$$* 1+v = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Donc: } (1+v)^{6n} = (e^{i\frac{\pi}{3}})^{6n} = e^{i2n\pi} = 1$$

$$\text{Donc: } \boxed{(\forall n \in \mathbb{N}); (1+u)^{6n} = (1+v)^{6n} = 1}$$

$$2) a) \text{ Montrons que: } |z| = |1+z| = 1$$

$$\text{D'après l'énoncé, } \exists (p; q) \in (\mathbb{N}^*)^2 / (1+z)^q = 1 \text{ et } z^p = 1$$

$$* z^p = 1 \Rightarrow |z^p| = |z|^p = 1$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt[p]{1} = 1$$

$$* (1+z)^q = 1 \Rightarrow |(1+z)^q| = 1$$

$$\Rightarrow |1+z| = 1$$

$$\text{Donc: } |z| = 1 = |1+z|$$

$$b) \bullet \text{ Montrons que } \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \text{ On a: } \left. \begin{array}{l} \arg(z) \equiv \theta[2\pi] \\ |z| = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow z = e^{i\theta}$$

$$\text{Donc: } 1+z = 1+e^{i\theta}$$

$$= e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\text{Or } -\pi < \theta < \pi, \text{ donc } -\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{D'où } \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0 \text{ et par conséquent } |1+z| = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Or, d'après 2) a), $|1+z|=1$, donc $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=1$, d'où $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}$

• Déterminons z

$$\left. \begin{array}{l} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{\theta}{2} = -\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \theta = -\frac{2\pi}{3}$$

de plus, $|z|=1$, donc: $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $z = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

Donc: $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 48

1) a) Exprimons b' et c' en fonction de a, b et c

Le fait que les triangles BAB' et $C'AC$ ont un sommet commun A et sont rectangles isocèles en A , nous incite à considérer la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

* On a: $\begin{cases} AC = AC' \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$, donc $r(C) = C'$

$$\begin{aligned} r(C) = C' &\Rightarrow c' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(c - a) \\ &\Rightarrow c' = i(c - a) + a \\ &\Rightarrow c' = ic + (1 - i)a \end{aligned}$$

* De même $r(B') = B$

$$\begin{aligned} r(B') = B &\Rightarrow b - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(b' - a) \\ &\Rightarrow b - a = i(b' - a) \\ &\Rightarrow b' = -i(b - a) + a \\ &\Rightarrow b' = -ib + (1 + i)a \end{aligned}$$

b) Déterminons m en fonction de b et c

M est le milieu de $[BC]$, donc: $z_M = \frac{z_B + z_C}{2}$; d'où: $m = \frac{b+c}{2}$

2) a) Exprimons $c' - b'$ en fonction de a et m

$$\text{On a: } \begin{cases} c' = ic + (1-i)a \\ b' = -ib + (1+i)a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc: } c' - b' &= i(c+b) - 2ia \\ &= 2i\left(\frac{c+b}{2} - a\right) \\ &= 2i(m-a) \end{aligned}$$

$$\text{D'où: } \boxed{c' - b' = 2i(m-a)}$$

b) • Dédudons que $B'C' = 2AM$

$$c' - b' = 2i(m-a)$$

$$\text{Donc: } |c' - b'| = |2i| \times |m-a|$$

$$\text{D'où: } B'C' = 2AM$$

• Montrons que $(B'C') \perp (AM)$

$$\text{On a: } c' - b' = 2i(m-a)$$

$$\text{Donc: } \frac{c' - b'}{m-a} = 2i$$

$$\text{D'où: } \arg\left(\frac{c' - b'}{m-a}\right) \equiv \arg(2i)[2\pi]$$

$$\text{Donc: } (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{B'C'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ et par conséquent } (AM) \perp (B'C')$$

Exercice 49

1) • Déterminons a' en fonction de c et b

Le fait que les triangles $AC'B$, $BA'C$ et $CB'A$ sont équilatéraux directs nous incite à considérer des rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$.

• Soit r_1 la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Puisque le triangle $BA'C$ est équilatéral direct, alors: $r_1(B) = A'$

$$\text{Donc: } a' - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - c)$$

$$\text{D'où: } a' = c + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(b - c)$$

$$a' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)c + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)b$$

$$\text{Remarque: } * e^{i\frac{2\pi}{3}} = j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$* j^2 = \bar{j} ; j^3 = \bar{j}^3 = 1$$

$$* 1 + j + j^2 = 0$$

* j est une racine cubique de l'unité

On peut alors écrire: $a' = -j^2b - jc$

• Exprimons b' et c' en fonction de a, b et c .

* Le triangle $CB'A$ est équilatéral direct, on considère la rotation r_2 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On a: $r_2(C) = B'$

$$\text{Donc: } b' - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a)$$

$$\text{D'où: } b' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)a + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)c$$

$$b' = -ja - j^2c$$

* Le triangle $AC'B$ est équilatéral direct, on considère la rotation r_3 de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$, alors: $r_3(A) = C'$ et on obtient: $c' = -j^2a - jb$

2) • Montrons que: $a' - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(aj + b + cj^2)$

$$* a' = -j^2b - jc \Rightarrow a' - a = -j^2b - jc - a$$

$$\text{Donc } a' - a = -j^2b - j^4c - j^3a \quad (\text{car: } j^3 = 1 \text{ et } j^4 = j)$$

$$= -j^2(b + j^2c + ja)$$

$$\text{or } -j^2 = -\bar{j} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Donc: } a' - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b + j^2c + ja)$$

• Calculons de même $b' - b$ et $c' - c$

$$* b' = -ja - j^2c \Rightarrow b' - b = -ja - b - j^2c$$

$$\Rightarrow b' - b = -j^4a - j^3b - j^2c$$

$$\Rightarrow b' - b = -j^2(c + bj + j^2a)$$

$$\Rightarrow b' - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(c + bj + j^2a)$$

$$* c' = -j^2a - jb \Rightarrow c' - c = -j^2a - jb - c$$

$$\Rightarrow c' - c = -j^2c - j^4b - j^3a$$

$$\Rightarrow c' - c = -j^2(a + j^2b + jc)$$

$$\Rightarrow c' - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(a + j^2b + jc)$$

3) a) Montrons que: $AA' = BB' = CC'$

$$* a' - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b + j^2c + ja)$$

$$\text{Donc: } |a' - a| = |e^{i\frac{\pi}{3}}| \times |b + j^2c + ja|. \text{ D'où: } AA' = |b + j^2c + ja|$$

$$\begin{aligned} * \text{ De même } BB' &= |c + bj + j^2a| \\ &= |j(b + ja + j^2c)| \\ &= |j| \times |b + j^2c + ja| \\ &= |b + j^2c + ja| \\ &= AA' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \text{ De même } CC' &= |a + j^2b + jc| \\ &= |j^2(ja + b + j^2c)| \\ &= |j|^2 \times |ja + b + j^2c| \\ &= |b + j^2c + ja| \\ &= AA' \end{aligned}$$

$$\text{Donc } AA' = BB' = CC'$$

b) Montrons que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité.

Soit G le centre de gravité du triangle ABC et G' celui du triangle $A'B'C'$

$$\text{On a: } z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{a + b + c}{3} \text{ et } z_{G'} = \frac{a' + b' + c'}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } z_{G'} - z_G &= \frac{1}{3}(a' - a + b' - b + c' - c) \\ &= \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}(a + b + c)(1 + j + j^2) \end{aligned}$$

Or: $1 + j + j^2 = 0$, donc $z_{G'} = z_G$ et par conséquent $G' = G$, les deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont donc le même centre de gravité.

Exercice 50

1) Déterminons une condition nécessaire et suffisante pour que A, B et C soient alignés.

$$\begin{aligned} (A, B \text{ et } C \text{ sont alignés}) &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} A = B \text{ ou } A = C \\ \text{ou } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv 0[\pi] \end{array} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} a = b \text{ ou } a = c \\ \text{ou } \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R} \end{array} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} a = b \text{ ou } a = -b \\ \text{ou } \frac{-b-a}{b-a} \in \mathbb{R} \end{array} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(a^2 = b^2 \text{ ou } \frac{a+b}{a-b} \in \mathbb{R} \right) \end{aligned}$$

Donc: A, B et C sont alignés si et seulement si $a^2 = b^2$ ou $\frac{a+b}{a-b} \in \mathbb{R}$.

2) a) Montrons que: $e = -ib + a(1-i)$

r est la rotation de centre A qui transforme C en E .

Puisque $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ alors $\frac{\pi}{2}$ est l'angle de la rotation r .

$$r(C) = E \Leftrightarrow e - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(c - a)$$

$$\Leftrightarrow e = a + i(c - a)$$

$$\Leftrightarrow e = a + i(-b - a)$$

$$\text{Donc } e = -ib + a(1-i)$$

b) Déterminons α, β et γ en fonction de a et b .

* $ACDE$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$, d'où $z_D - z_C = z_E - z_A$

$$\text{Donc: } \alpha - c = e - a$$

$$\text{D'où: } \alpha = e - a + c = -ib + a(1-i) - a - b$$

$$\text{Donc: } \alpha = -ia - (1+i)b$$

* On a: $AF = AB$ et $(\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$$\text{donc } r(F) = B$$

$$r(F) = B \Rightarrow b - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(\gamma - a)$$

$$\Rightarrow \gamma - a = -i(b - a)$$

$$\Rightarrow \gamma = a - i(b - a)$$

$$\text{Donc } \gamma = -ib + (1+i)a$$

* $AEHF$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FH}$, d'où: $e - a = \beta - \gamma$

$$e - a = \beta - \gamma \Rightarrow \beta = \gamma + e - a$$

$$\Rightarrow \beta = -ib + (1+i)a + i(-b - a)$$

$$\Rightarrow \beta = -2ib + a$$

c) • Dédisons que: $EF = 2OA$

$$\text{On a: } z_F - z_E = \gamma - e$$

$$= -ib + (1+i)a + ib - a(1-i)$$

$$= 2ai$$

$$\text{Donc: } |z_F - z_E| = |2ai|$$

$$= |2i| \times |a|$$

$$= 2 \times OA$$

Donc $EF = 2 \times OA$

• Montrons que: $(EF) \perp (OA)$

On a: $\gamma - e = 2ai \Rightarrow \frac{\gamma - e}{a} = 2i$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{\gamma - e}{a}\right) \equiv \arg(2i)[2\pi]$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{EF}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Rightarrow (OA) \perp (EF)$$

Donc les droites (EF) et (OA) sont perpendiculaires.

• Montrons que: $BD = CH$

On a: $\alpha - b = -ia - (1+i)b - b$
 $= -ia - b(2+i)$

• $\beta - c = -2ib + a + b$

Donc: $i(\beta - c) = 2b + ia + ib$
 $= ia + b(2+i)$

Donc: $\alpha - b = -i(\beta - c)$

D'où: $\left\{ \begin{array}{l} \arg\left(\frac{\alpha - b}{\beta - c}\right) \equiv \arg(-i)[2\pi] \\ \text{et} \\ |\alpha - b| = |-i| \times |\beta - c| \end{array} \right.$

Donc: $\left\{ \begin{array}{l} (\overrightarrow{CH}; \overrightarrow{BD}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ BD = CH \end{array} \right.$

Conclusion: $BD = CH$ et $(CH) \perp (BD)$

Exercice 51

1) Vérifions que $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BE}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et que $BCDE$ est un carré.

• $\frac{z_E - z_B}{z_C - z_B} = \frac{e - b}{c - b}$
 $= \frac{1 - 3i - 1 + i}{-1 - i - 1 + i}$
 $= i$

Donc: $\arg\left(\frac{z_E - z_B}{z_C - z_B}\right) \equiv \arg(i)[2\pi]$

D'où: $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BE}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

- $z_B - z_C = b - c = 1 - i + 1 + i = 2$
- $z_E - z_D = e - d = 1 - 3i + 1 + 3i = 2$

Donc: $z_B - z_C = z_E - z_D$

D'où: $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DE}$ et par suite $BCDE$ est parallélogramme de plus $(BC) \perp (BE)$
donc $BCDE$ est un rectangle.

- $BC = |b - c| = 2$ et $BE = |e - b| = |-2i| = 2$

Donc $BC = BE$ et par suite $BCDE$ est un carré.

2) Calculons: $|b|$; $|c|$; $|d|$ et $|e|$

- $|b| = |1 - i| = \sqrt{2}$
- $|c| = |-1 - i| = \sqrt{2}$
- $|d| = |-1 - 3i| = \sqrt{10}$
- $|e| = |1 - 3i| = \sqrt{10}$

On remarque que: $|b| = |c|$ et $|d| = |e|$.

3) Déterminons une équation de $(\mathcal{C})$

$(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O passant par le point B , donc son rayon est:

$$r = OB = \sqrt{2}$$

Donc: $(\mathcal{C}): x^2 + y^2 = 2$

4) a) Interprétons géométriquement $|z|$ et $\arg(z)$.

$$z = \frac{g - q}{b - q} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \left| \frac{g - q}{b - q} \right| \\ \arg(z) \equiv \arg\left(\frac{g - q}{b - q}\right)[2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z| = \frac{QG}{QB} \\ \arg(z) \equiv (\overrightarrow{QB}; \overrightarrow{QG})[2\pi] \end{cases}$$

b) Dédudons z

- $(\overrightarrow{QB}; \overrightarrow{QG}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

• $QBFG$ est un carré, donc $QG = QB$

d'où: $\frac{QG}{QB} = 1$ et par suite $|z| = 1$

$$\left. \begin{array}{l} \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ |z| = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{z = e^{i\frac{\pi}{2}} = i}$$

5) a) Montrons que: $g = (1 + x + y) + i(1 - x + y)$

$$z = i = \frac{g - q}{b - q} \Rightarrow g - q = i(b - q)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc: } g &= ib + (1 - i)q \\ &= i(1 - i) + (1 - i)(x + yi) \\ &= (x + y + 1) + i(1 + y - x) \end{aligned}$$

b) Dédisons $|g|$ en fonction de x et y

$$\begin{aligned} |g| &= |(x + y + 1) + i(1 - x + y)| \\ &= \sqrt{(x + y + 1)^2 + (1 - x + y)^2} \\ &= \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 4y + 2} \end{aligned}$$

6) Exprimons $|g|$ en fonction de y seul.

On a: $Q \in (\mathcal{C})$ et $q = x + yi$

donc $x^2 + y^2 = 2$; d'où $2x^2 + 2y^2 = 4$ et par suite $|g| = \sqrt{4y + 6}$.

7) Montrons géométriquement que:

$$|g| = |f|$$

On a: $B \in (\mathcal{C})$ et $Q \in (\mathcal{C})$, donc $OB = OQ$ et par suite le point O appartient à la médiatrice du segment $[BQ]$. Or $QBFG$ est un carré, donc les segments $[QB]$ et $[GF]$ ont la même médiatrice, et par conséquent le point O appartient à la médiatrice de $[GF]$, donc $OG = OF$, d'où $|g| = |f|$.

8) Déterminons les valeurs de x et y pour que les points $E; D; G$ et F appartiennent à $\mathcal{C}(O; r)$.

• On a: $|d| = \sqrt{10} = |e|$ donc $OD = OE$ et par suite O appartient au cercle

(Γ) de centre O et de rayon $\sqrt{10}$.

• On a: $|g| = \sqrt{4y+6}$

$$\begin{aligned} G \in (\Gamma) &\Leftrightarrow |g| = \sqrt{10} \\ &\Leftrightarrow 4y+6 = 10 \\ &\Leftrightarrow y = 1 \end{aligned}$$

• $Q \in (\mathcal{C}) \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$
 $\Rightarrow x^2 = 2 - y^2$

$$\begin{aligned} G \in (\Gamma) &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x^2 = 2 - y^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x^2 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{cases} \\ &\quad \begin{cases} x = 1 \text{ et } y = 1 \\ x = -1 \text{ et } y = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou} \\ x = -1 \text{ et } y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Or: $|f| = |g| = \sqrt{10}$, donc $F \in (\Gamma)$

Conclusion: Les points E, D, G et F appartiennent au cercle (Γ) de centre O et de rayon $\sqrt{10}$ si et seulement si $(x = 1 \text{ et } y = 1)$ ou $(x = -1 \text{ et } y = 1)$

Exercice 52

1) a) Interprétons géométriquement r et θ

On a: $z - i = re^{i\theta}$

Donc: • $|z - i| = |re^{i\theta}|$, donc $\boxed{AM = r}$

• $\arg(z - i) \equiv \arg(re^{i\theta})[2\pi]$

Donc $\boxed{(\vec{u}; \vec{AM}) \equiv \theta[2\pi]}$

D'où θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{AM})$.

b) Montrons que: $(z' + 2i) \times (z - i) = 1$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$

$$\begin{aligned} z' + 2i &= \frac{2z-i}{iz+1} + 2i \\ &= \frac{2z-i-2z+2i}{iz+1} \\ &= \frac{i}{iz+1} \\ &= \frac{i}{i(z-i)} \\ &= \frac{1}{z-i} \end{aligned}$$

Donc: $(z' + 2i) \times (z - i) = 1$

c) Déterminons r' et θ' en fonction de r et θ

soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$

$$\begin{aligned} (z' + 2i) \times (z - i) = 1 &\Rightarrow \begin{cases} |z' + 2i| \times |z - i| = 1 \\ \arg(z' + 2i) + \arg(z - i) \equiv 0[2\pi] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} r' \times r = 1 \\ \theta' + \theta \equiv 0[2\pi] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} r' = \frac{1}{r} \\ \theta' \equiv -\theta[2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

Interprétons géométriquement r' et θ'

- $r' = |z' + 2i| = |z_{M'} - z_B|$ donc: $r' = BM'$
- $\arg(z' + 2i) \equiv \theta'[2\pi]$ et $\arg(z' + 2i) \equiv (\vec{u}; \overrightarrow{BM'})[2\pi]$

Donc θ' est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \widehat{BM'})$.

- Donc: $BM' = \frac{1}{AM}$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{BM'}) \equiv -(\vec{u}; \overrightarrow{AM})[2\pi]$

2) a) Montrons que si $M \in (\mathcal{C})$ alors $M' \in (\mathcal{C}')$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$

$$M(z) \in (\mathcal{C}) \Rightarrow AM = 1$$

$$\Rightarrow r = 1$$

$$\Rightarrow r' = 1 \quad (\text{car } r' = \frac{1}{r})$$

$$\Rightarrow BM' = 1$$

Donc si $M \in (\mathcal{C})$, alors le point $M' = f(M)$ appartient au cercle $(\mathcal{C}')$ de

centre B et de rayon 1.

b) • Vérifions si $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

D'après la question 2) a); pour tout point M du plan, si $M \in (\mathcal{C})$ alors $M' \in (\mathcal{C}')$

Donc $f((\mathcal{C})) \subset (\mathcal{C}')$ (1)

• Vérifions si $(\mathcal{C}') \subset f(\mathcal{C})$

Soit $M'(z')$ un point du cercle $(\mathcal{C}')$; existe-t-il un point $M(z)$ de $(\mathcal{C})$ tel que $f(M) = M'$?

$$\begin{aligned}(\exists M(z) \in (\mathcal{C})) ; f(M) = M' &\Leftrightarrow (\exists z \in \mathbb{C}) ; \frac{2z-i}{iz+1} = z' \text{ et } |z-i|=1 \\&\Leftrightarrow (\exists z \in \mathbb{C}) ; 2z-i = z'(iz+1) \text{ et } |z-i|=1 \\&\Leftrightarrow (\exists z \in \mathbb{C}) ; (2-iz')z = z' + i \text{ et } |z-i|=1\end{aligned}$$

Puisque $M' \in (\mathcal{C}')$; alors $|z' + 2i| = 1$

donc $z' \neq -2i$ d'où $2-iz' \neq 0$

$$\text{Donc: } (2-iz')z = z' + i \Leftrightarrow z = \frac{z' + i}{2-iz'}$$

- Vérifions que $|z-i|=1$

$$\begin{aligned}|z-i| &= \left| \frac{z' + i}{2-iz'} - i \right| \\&= \left| \frac{z' + i + 2i - z'}{2-iz'} \right| \\&= \left| \frac{-i}{2-iz'} \right| \\&= \frac{1}{|2-iz'|} \\&= \frac{1}{|-i(z' + 2i)|} \\&= \frac{1}{|z' + 2i|}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M'(z') \in (\mathcal{C}') &\Rightarrow |z' + 2i| = 1 \\&\Rightarrow |z-i| = 1 \\&\Rightarrow M(z) \in (\mathcal{C})\end{aligned}$$

Donc: $(\forall M' \in (\mathcal{C}')) ; (\exists M \in (\mathcal{C})) ; f(M) = M'$

D'où $\boxed{(\mathcal{C}') \subset f(\mathcal{C})}$ (2)

De (1) et (2) on conclut que $(\mathcal{C}') = f(\mathcal{C})$

3) a) Montrons que $N \in (\mathcal{C})$

$$\begin{aligned} AN &= |z_N - z_A| \\ &= \left| \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i - i \right| \\ &= \left| \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right| = 1 \end{aligned}$$

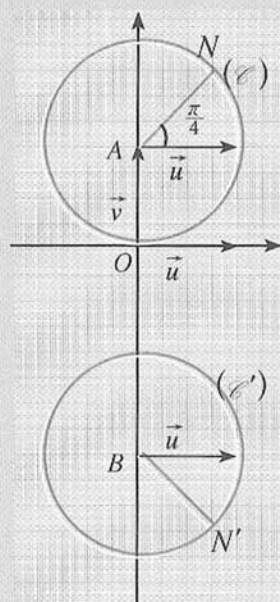
$$AN = 1 \Rightarrow N \in (\mathcal{C})$$

b) Déterminons une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \widehat{AN})$

$$* (\vec{u}; \widehat{AN}) \equiv \arg(z_N - z_A)[2\pi]$$

$$* z_N - z_A = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \text{ Donc: } (\vec{u}; \widehat{AN}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Construisons $(\mathcal{C})$ et N (voir figure)



c) Dédudons la construction du point $N' = f(N)$

- On a: $N \in (\mathcal{C})$ et $f(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}')$ donc $N' \in (\mathcal{C}')$ (3)

- D'après la question 1) c) $(\vec{u}; \widehat{BN'}) \equiv -(\vec{u}; \widehat{AN})[2\pi]$ et $(\vec{u}; \widehat{AN}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

$$\text{Donc: } (\vec{u}; \widehat{BN'}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi] \quad (4)$$

On peut alors construire le point N' (grâce à (3) et (4)).

Exercice 53

1) Montrons que: $1 + \omega + \omega^2 = 0$ et $\overline{\omega} = \omega^2$

On a: $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$\begin{aligned}\text{Donc: } 1 + \omega + \omega^2 &= 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}i = 0\end{aligned}$$

Donc: $1 + \omega + \omega^2 = 0$

$$\bullet \omega^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \overline{\omega} \quad (\text{car } \frac{4\pi}{3} \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi])$$

Donc $\omega^2 = \overline{\omega}$.

2) a) Montrons que $\omega \in E$

$$E = \{z \in \mathbb{C} / |z| = |1+z| = 1\}$$

$$\bullet |\omega| = |e^{i\frac{2\pi}{3}}| = 1$$

$$\begin{aligned}\bullet |1 + \omega| &= |-\omega^2| \\ &= |\omega|^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc: $|\omega| = |1 + \omega| = 1$

D'où: $\boxed{\omega \in E}$

b) Montrons que: $z \in E \Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{2} \text{ et } |y| = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

On a: $x + yi$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}z \in E &\Leftrightarrow |z| = |1+z| = 1 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 = |1+z|^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (1+x)^2 + y^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 + x^2 + y^2 + 2x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{2} \text{ et } |y| = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

Donc: $z \in E \Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{2} \text{ et } |y| = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) Dédudisons que $E = \{\omega; \overline{\omega}\}$

Soit $z = x + yi$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

d'après 2) b) ;

$$z \in E \Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{2} \text{ et } |y| = \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \text{ et } y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{1}{2} \text{ et } y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \omega \\ \text{ou} \\ z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \bar{\omega} \end{cases}$$

Donc $E = \{\omega; \bar{\omega}\}$

3) a) Montrons que: $|p| = |q| = 1$ et $1 + p = -q$

On a: $p = \frac{b}{q}$ et $q = \frac{c}{a}$

• Puisque les points $A(a)$; $B(b)$ et $C(c)$ appartiennent au cercle $\mathcal{C}(O, r)$,

alors $OA = OB = OC = r$; donc:

$$|a| = |b| = |c| = r \text{ d'où: } |p| = \frac{|b|}{|a|} = 1 \text{ et } |q| = \frac{|c|}{|a|} = 1$$

Donc: $|p| = |q| = 1$

• Montrons que $1 + p = -q$

Puisque O est le centre de gravité du triangle ABC , alors:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

Donc: $a + b + c = 0$

D'où: $1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 0$; (car $a \neq 0$)

et par suite: $1 + p + q = 0$

Donc $1 + p = -q$

b) Montrons que: $p = \omega$ ou $p = \bar{\omega}$

On a: $\begin{cases} |p| = 1 \\ |1 + p| = |-q| = |q| = 1 \end{cases}$

Donc: $p \in E$.

Or: $E = \{\omega; \bar{\omega}\}$

Donc $p = \omega$ ou $p = \bar{\omega}$.

c) Montrons que: $c - a = (\bar{\omega} - 1)a$ avec $p = \omega$ (dans cette question).

$$\bullet p = \omega \Rightarrow \frac{b}{a} = \omega$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} - 1 = \omega - 1$$

$$\Rightarrow b - a = a(\omega - 1)$$

$$\bullet 1 + p = -q = -\frac{c}{a} \Rightarrow 1 + \omega = -\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} = \bar{\omega}$$

$$\text{car } 1 + \omega = -\omega^2 = -\bar{\omega}$$

$$\text{Donc: } \frac{c}{a} - 1 = \bar{\omega} - 1$$

$$\text{D'où: } \boxed{c - a = (\bar{\omega} - 1)a}$$

$$\bullet a + b + c = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} = 0 \text{ (car } b \neq 0)$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} = -1 - \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} = -1 - \frac{1}{\omega}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} = -1 - \frac{\bar{\omega}}{\omega\bar{\omega}} \quad (\text{car } \omega\bar{\omega} = |\omega|^2 = 1)$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} = -1 - \bar{\omega}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} = \omega \quad (\text{car } 1 + \omega = -\bar{\omega})$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} - 1 = \omega - 1$$

$$\boxed{\Rightarrow c - b = (\omega - 1)b}$$

d) Dédudons que le triangle ABC est équilatéral.

On a:

$$\bullet c - a = (\bar{\omega} - 1)a \Rightarrow |c - a| = |\bar{\omega} - 1| \times |a|$$

$$\Rightarrow |c - a| = |\omega - 1| \times r$$

$$\Rightarrow \boxed{AC = |\omega - 1| \times r}$$

$$(\text{car } |\bar{\omega} - 1| = |\omega - 1| \text{ et } |a| = OA = r)$$

$$\bullet c - b = (\omega - 1)b \Rightarrow |c - b| = |\omega - 1| \times |b|$$

$$\Rightarrow |c - b| = |\omega - 1| \times r$$

$$\Rightarrow BC = |\omega - 1| \times r$$

$$\bullet \quad b - a = (\omega - 1)a \Rightarrow |b - a| = |\omega - 1| \times |a| \\ \Rightarrow |b - a| = |\omega - 1| \times r$$

$$\Rightarrow AB = |\omega - 1| \times r$$

Donc: $AC = BC = AB$ et par conséquent le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 54

1) a) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ)

$$(E_\theta): z^2 - 2z + \frac{1}{\cos^2 \theta} = 0 ; \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

- Le discriminant de cette équation est:

$$\Delta = 4 - \frac{4}{\cos^2 \theta} = -\frac{4 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = (2i \tan \theta)^2$$

- Les solutions de cette équation sont:

$$z = \frac{2 + 2i \tan \theta}{2} = 1 + i \tan \theta$$

$$\text{ou } z = 1 - i \tan \theta$$

Donc l'ensemble des solutions de cette équation est:

$$E = \{1 + i \tan \theta; 1 - i \tan \theta\}$$

Autre méthode:

$$\text{Remarque: } \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$$

$$\text{Donc: } (E_\theta) \Leftrightarrow z^2 - 2z + 1 + \tan^2 \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - 1)^2 - (i \tan \theta)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - 1 - i \tan \theta)(z - 1 + i \tan \theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 1 + i \tan \theta \text{ ou } z = 1 - i \tan \theta$$

b) Écrivons z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

z_1 et z_2 sont les solutions de (E_θ) .

$$\operatorname{Im}(z_1) = \tan \theta \text{ donc } z_1 = 1 + i \tan \theta \text{ et } z_2 = 1 - i \tan \theta = \overline{z_1}$$

$$\bullet \quad z_1 = 1 + i \tan \theta = 1 + i \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ = \frac{1}{\cos \theta} (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Puisque $\theta =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$; alors $\cos \theta > 0$

donc $|z_1| = \frac{1}{\cos \theta}$ et $\arg(z_1) \equiv \theta[2\pi]$

Donc $z_1 = \frac{1}{\cos \theta}(\cos \theta + i \sin \theta)$ est une forme trigonométrique de z_1 .

• Puisque $z_2 = \bar{z}_1$, alors une forme trigonométrique de z_2 est:

$$z_2 = \frac{1}{\cos \theta}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

2) Montrons que le triangle OM_1M_2 est isocèle en O .

On a: $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$.

- $OM_1 = |z_1| = \frac{1}{\cos \theta}$
- $OM_2 = |z_2| = |\bar{z}_1| = |z_1| = \frac{1}{\cos \theta}$

Donc $OM_1 = OM_2$ et par conséquent le triangle OM_1M_2 est isocèle en O

3) Déterminons les solutions de (E) sous forme exponentielle.

$$(E): z^{2n} - 2z^n + \frac{1}{\cos^2(\theta)} = 0 ; n \in \mathbb{N}^*$$

On pose $Z = z^n$, l'équation (E) devient ; $Z^2 - 2Z + \frac{1}{\cos^2 \theta} = 0$

D'après 1) b)

$$Z = \frac{1}{\cos \theta} e^{i\theta} \text{ ou } Z = \frac{1}{\cos \theta} e^{-i\theta}$$

$$\text{Donc } z^n = \frac{1}{\cos \theta} e^{i\theta} \text{ ou } z^n = \frac{1}{\cos \theta} e^{-i\theta}$$

• Les solutions de l'équation $z^n = \frac{1}{\cos \theta} e^{i\theta}$ sont les nombres complexes:

$$z_K = \frac{1}{\sqrt[n]{\cos \theta}} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2K\pi}{n})} ; K \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}$$

• Les solutions de l'équation $z^n = \frac{1}{\cos \theta} e^{-i\theta}$ sont les nombres complexes:

$$z'_K = \frac{1}{\sqrt[n]{\cos \theta}} e^{i(-\frac{\theta}{n} + \frac{2K\pi}{n})}$$

$$K \in \{0; 1; 2; \dots; (n-1)\}$$

Donc: l'ensemble des solutions de (E) est: $S = S_1 \cup S_2$ où:

$$S_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{\cos \theta}} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2K\pi}{n})} ; K \in \{0; 1; \dots; (n-1)\} \right\}$$

$$\text{et } S_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{\cos \theta}} e^{i(-\frac{\theta}{n} + \frac{2K\pi}{n})} ; K \in \{0; 1; \dots; (n-1)\} \right\}$$

Exercice 55

Partie 1:

1) Montrer que: $|z| = 1 \Leftrightarrow Z \in i\mathbb{R}$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1; 1\}$; $Z = \frac{z+1}{z-1}$

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{Z} = -Z$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = -\frac{z+1}{z-1}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{z}+1)(z-1) = (\bar{z}-1)(-z-1)$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}z - \bar{z} + z - 1 = -\bar{z}z - \bar{z} + z + 1$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}z = 1$$

$$\Leftrightarrow |z| = 1$$

Donc: $|z| = 1 \Leftrightarrow Z \in i\mathbb{R}$

2) a) Montrer que: $Z = \frac{-i}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

On a: $z = e^{i\theta}$, donc:

$$\begin{aligned} \bullet \quad z+1 &= 1 + e^{i\theta} \\ &= e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) \\ &= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad z-1 &= -1 + e^{i\theta} \\ &= e^{i\frac{\theta}{2}}(-e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) \\ &= 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } Z = \frac{z+1}{z-1} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{1}{i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\text{D'où: } Z = -\frac{i}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

• Dédoublons le module de Z et $\arg(Z)$

$$\text{On a: } Z = \frac{-i}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\text{Or: } -\pi < \theta < \pi, \text{ donc } -\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\bullet \text{ si: } 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ (c'est-à-dire: } 0 < \theta < \pi)$$

alors $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$.

donc: $|Z| = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et $\arg(Z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

* Si: $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < 0$ (c'est-à-dire: $-\pi < \theta < 0$)

alors: $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0$ donc: $Z = \frac{-1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times e^{i\frac{\pi}{2}}$

D'où: $|Z| = \frac{-1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et $\arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) Montrons que: $(\overrightarrow{M'A}; \overrightarrow{M'B}) \equiv \theta[2\pi]$

On a: $M'(Z)$; $A(1)$; $B(-1)$

Donc: $(\overrightarrow{M'A}; \overrightarrow{M'B}) \equiv \arg\left(\frac{z_B - z_{M'}}{z_A - z_{M'}}\right)[2\pi]$

On a: $\frac{z_B - z_{M'}}{z_A - z_{M'}} = \frac{-1 - \frac{z+1}{z-1}}{1 - \frac{z+1}{z-1}} = z$

Donc: $\arg\left(\frac{z_B - z_{M'}}{z_A - z_{M'}}\right) \equiv \arg(z)[2\pi]$

D'où: $(\overrightarrow{M'A}; \overrightarrow{M'B}) \equiv \theta[2\pi]$.

* Construisons M et M' dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{3}$

On a: $z = e^{i\theta}$ donc $|z| = 1$ d'où $OM = 1$

Le point M appartient donc au cercle $\mathcal{C}(O; 1)$.

D'après la question 1), on a: $Z \in i\mathbb{R}$

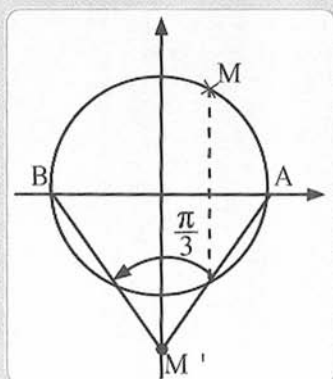
donc $M'(Z)$ appartient à l'axe des imaginaires purs donc $\overline{M'A} = M'B$ (1)

(car $A(1)$ et $B(-1)$ et le repère est orthogonal, donc l'axe des imaginaires purs est la médiatrice de $[AB]$).

Or $\theta = \frac{\pi}{3}$, donc $(\overrightarrow{M'A}; \overrightarrow{M'B}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ (2)

Des relations (1) et (2) on conclut que le triangle ABM' est équilatéral.

On peut donc placer M' avec précision. (voir figure)



Partie 2:

1) Déterminons l'ensemble des solutions de l'équation (E)

$$(E): \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = \sqrt{2}$$

On pose: $u = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$

alors, l'équation (E) devient: $u + \frac{1}{u} = \sqrt{2}$

C'est-à-dire: $u^2 - \sqrt{2}u + 1 = 0$

Le discriminant de cette équation est: $\Delta = -2 = (i\sqrt{2})^2$

Donc: $u = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$ ou $u = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$

D'où: $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$ ou $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$

• Pour: $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

Les solutions de cette équation sont les nombres z_k tels que:

$$\frac{z_k + 1}{z_k - 1} = e^{i\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}$$

C'est-à-dire: $z_k = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} + 1}{e^{i\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} - 1}$

Donc, d'après la question 2) a) $z_k = \frac{-i}{\tan\left(\frac{\pi}{8n} + \frac{k\pi}{n}\right)}$

• Pour $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ qui peut s'écrire aussi: $\left(\frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1}\right)^n = e^{i\frac{\pi}{4}}$

Les solutions de cette équation sont les nombres complexes $\bar{z}_k$ avec

$k \in \{0; 1; \dots, n-1\}$ et par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équa-

tion (E) est: $S = \{z_k; K \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}\} \cup \{\bar{z}_n; K \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}\}$

avec: $z_k = \frac{-i}{\tan \theta_k}$ où $\theta_k = \frac{\pi}{8n} + \frac{K\pi}{n}$

2) a) Montrons que: $(E) \Leftrightarrow P(z) = 0$

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}(z^2 - 1)^n - (z+1)^{2n} - (z-1)^{2n} = 0$$

Puisque $P(1) = -2^{2n}$ et $P(-1) = -2^{2n}$, alors $P(1) \neq 0$ et $P(-1) \neq 0$

Donc: $z \neq 1$ et $z \neq -1$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } P(z) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{2} - \frac{(z+1)^{2n}}{(z^2-1)^n} - \frac{(z-1)^{2n}}{(z^2-1)^n} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(z+1)^{2n}}{(z-1)^n(z+1)^n} + \frac{(z-1)^{2n}}{(z-1)^n(z+1)} = \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow (E) \end{aligned}$$

Donc: $(E) \Leftrightarrow P(z) = 0$

b) Montrons que: $P(z) = (\sqrt{2} - 2) \prod_{K=0}^{n-1} \left(z^2 + \frac{1}{\tan^2(\theta_n)}\right)$

Rappel: Soit $P(z)$ un polynôme de degré n .

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

avec $a_n \in \mathbb{C}^*$; $a_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}$ et $z \in \mathbb{C}$

si: $z_1; z_2; \dots; z_n$ sont les racines de $P(z)$,

$$\text{alors: } (\forall z \in \mathbb{C}); P(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$$

• Soit $Q(z)$ un polynôme de degré $2n$:

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{2n} a_k z^k \text{ avec } a_{2n} \in \mathbb{C}^* \text{ et } z \in \mathbb{C}.$$

Si $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$ et $\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_n$ sont les racines de $Q(z)$, alors:

$$(\forall z \in \mathbb{C}); Q(z) = a_{2n} \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i)(z - \beta_i)$$

On a: $P(z) = 0 \Leftrightarrow (E)$

Donc les équations $P(z) = 0$ et (E) ont le même ensemble de solution.

Le coefficient de z^{2n} du polynôme $P(z)$ est $(\sqrt{2} - 2)$; les racines de $P(z)$

sont : $z_0; z_1; \dots; z_{n-1}$ et $\bar{z}_0; \bar{z}_1; \dots; \bar{z}_n$,

$$\begin{aligned} \text{donc : } (\forall z \in \mathbb{C}) ; P(z) &= (\sqrt{2} - 2) \prod_{k=0}^{n-1} (z - z_k)(z - \bar{z}_k) \\ &= (\sqrt{2} - 2) \prod_{k=0}^{n-1} \left(z + \frac{i}{\tan \theta_k} \right) \left(z - \frac{i}{\tan \theta_k} \right) \\ &= (\sqrt{2} - 2) \prod_{k=0}^{n-1} \left(z^2 + \frac{1}{\tan^2 \theta_k} \right) \end{aligned}$$

• Dédudons la valeur du produit : $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\tan^2 \left(\frac{\pi}{8n} + \frac{k\pi}{n} \right)}$

Pour $z = 0$, on a : $P(0) = (\sqrt{2} - 2) \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\tan^2(\theta_k)}$

Donc : $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\tan^2(\theta_k)} = \frac{P(0)}{\sqrt{2} - 2}$

On a : $P(0) = \sqrt{2}(-1)^n - 1^{2n} - (-1)^{2n}$
 $= (-1)^n \sqrt{2} - 1 - 1$
 $= (-1)^n \sqrt{2} - 2$

Donc : $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\tan^2 \left(\frac{\pi}{8n} + \frac{k\pi}{n} \right)} = \frac{(-1)^n \times \sqrt{2} - 2}{\sqrt{2} - 2}$
 $= \frac{(-1)^n - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$

D'où : $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\tan^2 \left(\frac{\pi}{8n} + \frac{k\pi}{n} \right)} = (1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - (-1)^n)$

Exercice 56

1) Montrons que : $\prod_{k=1}^m z_k = (-1)^m \times P(0)$

On a : $P(z) = z^m + \alpha_m z^{m-1} + \dots + \alpha_2 z + \alpha_1$

Puisque : $z_1; z_2; \dots; z_m$ sont les racines de $P(z)$, alors :

$(\forall z \in \mathbb{C}) ; P(z) = \prod_{k=1}^m (z - z_k)$. Donc : $P(0) = \prod_{k=1}^m (-z_k) = (-1)^m \prod_{k=1}^m z_k$

D'où : $\prod_{k=1}^m z_k = \frac{P(0)}{(-1)^m} = (-1)^m P(0)$

2) a) Déterminons les solutions de l'équation $P_{n,\theta}(z) = 0$:

Soit : Soit $z \in \mathbb{C}$, soit $\theta \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$P_{n,\theta}(z) = (z+1)^n - e^{i2n\theta}$$

$$P_{n,\theta}(z) = 0 \iff (z+1)^n = e^{i2n\theta}$$

Les solutions de cette équation se déduisent des racines $n^{\text{ième}}$ de $e^{i2n\theta}$, c'est-à-dire les nombres complexes z_k tels que : $z_k + 1 = e^{i(2\theta + \frac{2k\pi}{n})}$

$$\text{Donc } z_k = e^{i(2\theta + \frac{2k\pi}{n})} - 1 \text{ avec } k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}$$

• Calculons le produit de ces solutions :

$$\text{On a : } e^{i\alpha} - 1 = e^{i\frac{\alpha}{2}}(e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}})$$

$$\text{Donc : } e^{i\alpha} - 1 = 2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{D'où : } z_k = 2i \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right) e^{i(\theta + \frac{k\pi}{n})} \text{ avec } k \in \{0; 1; 2; \dots; (n-1)\}$$

$$\text{D'après la question 1): } \prod_{k=0}^{n-1} z_k = (-1)^n \times P_{n,0}(0)$$

$$\text{Or : } P_{n,0}(0) = 1 - e^{i2n\theta}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \prod_{k=0}^{n-1} z_k &= (-1)^n \times (1 - e^{i2n\theta}) \\ &= (-1)^n \times (-2i \sin(n\theta) e^{in\theta}) \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \prod_{k=0}^{n-1} z_k = 2i(-1)^{n+1} \times \sin(n\theta) e^{in\theta}$$

$$\text{b) • Montrons que : } f_n(\theta) = \frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^* \text{ et soit } \theta \in \mathbb{R}^* ; \text{ on a : } f_n(\theta) = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\text{d'après la question 2)a), on a : } z_k = 2i \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right) e^{i(\theta + \frac{k\pi}{n})}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \prod_{k=0}^{n-1} z_k &= \prod_{k=0}^{n-1} 2i \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right) e^{i(\theta + \frac{k\pi}{n})} \\ &= 2^n \times i^n \times \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right) \times \prod_{k=0}^{n-1} e^{i(\theta + \frac{k\pi}{n})} \\ &= 2^n \times i^n \times f_n(\theta) \times e^{i \sum_{k=0}^{n-1} (\theta + \frac{k\pi}{n})} \\ &= 2^n \times i^n \times f_n(\theta) \times e^{i(n\theta + \frac{\pi}{n} \times \frac{n(n-1)}{2})} \\ &= 2^n \times i^n \times f_n(\theta) \times e^{i(n\theta + \frac{(n-1)\pi}{2})} \\ &= 2^n \times i^n \times f_n(\theta) \times e^{in\theta} \times (e^{i\frac{\pi}{2}})^{n-1} \\ &= 2^n \times i^n \times e^{i2n-1} \times f_n(\theta) \times e^{in\theta} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \prod_{k=0}^{n-1} z_k = 2i(-1)^{n+1} \times \sin(n\theta) \times e^{in\theta}$$

$$\text{Donc : } 2i(-1)^{n+1} \times \sin(n\theta) \times e^{in\theta} = 2^n \times i^{2n-1} \times f_n(\theta) \times e^{in\theta}$$

$$\text{D'où : } f_n(\theta) = \frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Calculons } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f_n(\theta)}{\sin \theta} : \frac{f_n(\theta)}{\sin \theta} &= \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{\sin(n\theta)}{\theta} \times \frac{\theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

$$\text{Or : } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \text{ et } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(n\theta)}{\theta} = n. \text{ Donc : } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f_n(\theta)}{\sin \theta} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

c) Dédudons la valeur du produit $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$:

$$\begin{aligned} \text{On a : } f_n(\theta) &= \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + k\frac{\pi}{n}\right) \\ &= \sin \theta \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\theta + k\frac{\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\theta + k\frac{\pi}{n}\right) = \frac{f_n(\theta)}{\sin \theta}. \text{ D'où : } \lim_{\theta \rightarrow 0} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\theta + k\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f_n(\theta)}{\sin \theta}$$

$$\text{Or : } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f_n(\theta)}{\sin \theta} = \frac{n}{2^{n-1}} \text{ et } \lim_{\theta \rightarrow 0} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\theta + k\frac{\pi}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\text{Donc : } \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$\text{C'est-à-dire : } \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \dots \times \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Exercice 57

1) Montrons que : $\prod_{k=1}^{n-1} v_k = (-1)^{n-1} \times i^{n-1}$

On a : $v_k = e^{-i\frac{k\pi}{n}}$ pour tout $k \in \{1; 2; \dots; (n-1)\}$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \prod_{k=1}^{n-1} v_k &= \prod_{k=1}^{n-1} e^{-i\frac{k\pi}{n}} \\ &= e^{-i\frac{\pi}{n}(1+2+\dots+(n-1))} \\ &= e^{-i\frac{\pi}{n} \frac{n(n-1)}{2}} \\ &= e^{-i\frac{(n-1)\pi}{2}} \\ &= (e^{-i\frac{\pi}{2}})^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-i)^{n-1} \\
 &= (-1)^{n-1} \times i^{n-1}
 \end{aligned}$$

D'où : $\prod_{k=1}^{n-1} v_k = (-1)^{n-1} \times i^{n-1}$

2) a) Exprimons $u_k - 1$ en fonction de v_k

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } u_k - 1 &= e^{i \frac{2k \times \pi}{n}} - 1 \\
 &= e^{i \frac{k\pi}{n}} (e^{i \frac{k\pi}{n}} - e^{-i \frac{k\pi}{n}}) \\
 &= e^{i \frac{k\pi}{n}} \times 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)
 \end{aligned}$$

Donc : $u_n - 1 = 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \times \frac{1}{v_k}$

b) Calculons $\prod_{k=1}^{n-1} (u_k - 1)$

On remarque que les nombres u_k ; pour $k \in \{0; 1; 2; \dots; (n-1)\}$ sont les racines nième de l'unité.

On considère le polynôme : $P(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 ; z \in \mathbb{C}$

On a : $P(1) = n$ donc $P(1) \neq 0$ (car $n \in \mathbb{N}^*$)

Donc $z = 1$ n'est pas une racine de $P(z)$.

• On a : $\forall z \in (\mathbb{C} \setminus \{1\}) ; 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$

Donc $P(z) = \frac{1 - z^n}{1 - z}$.

• $P(z) = 0 \Leftrightarrow 1 - z^n = 0$

$$\Leftrightarrow z^n = 1 \text{ et } z \neq 1$$

$$\Leftrightarrow z = u_k ; k \in \{1; 2; \dots; (n-1)\}$$

Donc : $(\forall z \in \mathbb{C}) ; P(z) = \prod_{k=1}^{n-1} (z - u_k)$. D'où : $P(1) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - u_k)$

or : $P(1) = n$, donc : $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - u_k) = n$

Puisque : $u_k - 1 = -(1 - u_k)$,

alors : $\prod_{k=1}^{n-1} (u_k - 1) = (-1)^{n-1} \times \prod_{k=1}^{n-1} (1 - u_k) = (-1)^{n-1} \times n$

c) Déduisons $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

On a : $u_k - 1 = 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i \frac{k\pi}{n}} = 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \times \frac{1}{v_k}$

$$\text{Donc : } \prod_{k=1}^{n-1} (u_k - 1) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} 2i \right) \times \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right) \times \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{v_k}$$

$$\text{D'où : } (-1)^{n-1} \times n = 2^{n-1} \times (i)^{n-1} \times \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \times \frac{1}{(-1)^{n-1} \times (i)^{n-1}}$$

$$\text{On en déduit que : } \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 58

Partie A :

1) Vérifions que : $\Delta = (3 - 4i)^2$

$$\text{On a : } (E): z^2 - (1 + 2i)z + 1 + 7i = 0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = (1 + 2i)^2 - 4(1 + 7i) = 1 + 4i - 4 - 4 - 28i = -7 - 24i$$

$$\text{Or } (3 - 4i)^2 = 9 - 24i - 16 = -7 - 24i$$

Donc le discriminant de (E) est : $\Delta = (3 - 4i)^2$

2) Déterminons z_1 et z_2 :

On a : $\Delta = (3 - 4i)^2$ donc : $8 = 3 - 4i$ est une racine carrée de Δ , par suite les solutions de (E) sont :

$$z_1 = \frac{1 + 2i + (3 - 4i)}{2} = 2 - i \text{ et } z_2 = \frac{1 + 2i - (3 - 4i)}{2} = -1 + 3i$$

3) Montrons que : $\frac{z_2}{z_1} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$\text{On a : } \frac{z_2}{z_1} = \frac{-1 + 3i}{2 - i} = \frac{(-1 + 3i)(2 + i)}{5} = \frac{-5 + 5i}{5} = -1 + i$$

Donc : $\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = |-1 + i| = \sqrt{2}$, par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} = -1 + i &= \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \frac{z_2}{z_1} = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Partie B :

1) a) Déterminons le complexe c :

R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, donc :

$$r(A) = C \iff OA = OC \text{ et } (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow c = ia$$

$$\Leftrightarrow c = i(2 - i) = 1 + 2i$$

Ainsi l'affixe du point $C = R(A)$ est : $c = 1 + 2i$

b) Montrons que : $T(C) = B$

T est la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$, car $T(A) = O$, donc :

$$T(C) = B \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AO}$$

$$\Leftrightarrow z_B - z_C = z_O - z_A$$

$$\text{Or } z_C - z_A = c - a = -1 + 3i \Rightarrow z_B = z_C - z_A$$

D'où : $T(C) = B$

2) • Déterminons le nombre d :

Le quadrilatère $OCDB$ est un parallélogramme signifie que :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BD} \text{ par suite : } \text{aff}(\overrightarrow{OC}) = \text{aff}(\overrightarrow{BD})$$

Donc : $d = b + c = 5i$

• Vérifions C est le milieu du segment $[AD]$:

On a : $A(2 - i)$ et $D(5i)$ donc l'affixe du milieu du segment $[AD]$ est :

$$\frac{1}{2}(2 - i + 5i) = 1 + 2i = \text{aff}(C)$$

Ainsi le point C est le milieu du segment $[AD]$.

3) Montrons que $\left(\frac{a-d}{b-d}\right) \times \frac{b}{a} \in \mathbb{R}$:

On a : $a - d = 2 - 6i$ et $b - d = -1 - 2i$

$$\text{donc : } \frac{a-d}{b-d} = \frac{-2(1-3i)}{1+2i} = \frac{-2(1-3i)(1-2i)}{5} = 2(1+i)$$

$$\text{Et comme : } \frac{b}{a} = \frac{z_2}{z_1} = -1 + i \text{ alors : } \left(\frac{a-d}{b-d}\right) \times \frac{b}{a} = 2(1+i)(-1+i) = -4$$

Donc la nombre $\left(\frac{a-d}{b-d}\right) \times \frac{b}{a}$ est réel.

• Interprétation géométrique :

On a : $\left(\frac{a-d}{b-d}\right) \times \frac{b}{a} = \left(\frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}\right) \times \left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) \in \mathbb{R}$, donc les points O, A, B et D sont alignés ou cocycliques.

Et puisque : $\frac{a-d}{b-d} \notin \mathbb{R}$ alors les points A, B et D ne sont pas alignés.

Ainsi les points O, A, B et D sont cocycliques.

Exercice 59

1) a) Vérifions que : $\Delta = (1 - 3i)^2$

On a : $(E): z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i = 0$, alors le discriminant de cette équation est : $\Delta = (1 + i)^2 - 4(2 + 2i) = 2i - 8 - 8i = -8 - 6i$

Or $(1 - 3i)^2 = 1 - 6i - 9 = -8 - 6i$

Donc le discriminant de (E) est : $\Delta = (1 - 3i)^2$

b) Déterminons z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) :

On a : $\Delta = (1 - 3i)^2$ donc : $\delta = 1 - 3i$ est une racine carrée de Δ .

Par suite les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = \frac{1 + i - 1 + 3i}{2} = 2i \text{ et } z_2 = \frac{1 + i + 1 - 3i}{2} = 1 - i$$

c) Montrons que : $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$\text{On a : } \frac{z_1}{z_2} = \frac{2i}{1 - i} = \frac{2i(1 + i)}{2} = -1 + i$$

Comme $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = |-1 + i| = \sqrt{2}$ alors :

$$\begin{aligned} -1 + i &= \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \right) \end{aligned}$$

C'est-à-dire : $-1 + i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$. Ainsi : $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2) a) Déterminons le nombre complexe e :

On a : $A(z_1)$ et $B(z_2)$ alors l'abscisse e du milieu E du segment $[AB]$ est le nombre complexe : $e = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

b) Montrons que : $c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$

L'écriture complexe de la rotation de centre $A(2i)$ est d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ est :

$$z' = 2i + e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - 2i) \text{ C'est-à-dire : } z' = -iz - 2 + 2i$$

Et on a : $r(E) = C$ donc : $c = -ie - 2 + 2i = -i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) - 2 + 2i$

$$\text{Ainsi : } c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

c) • Montrons que $\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) \in \mathbb{R}$

$$\text{On a : } z_2 - d = 1 - i - 1 - \frac{3}{2}i = -\frac{5}{2}i \text{ et } c - d = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i - 1 - \frac{3}{2}i = -\frac{5}{2}$$

Donc : $\frac{z_2 - d}{c - d} = i$

Et on a : $c - z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i - 2i = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$ et $z_2 - z_1 = 1 - i - 2i = 1 - 3i$

Donc : $\frac{c - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{(-3 - i)}{2(1 - 3i)} = \frac{-i(1 - 3i)}{2(1 - 3i)} = -\frac{1}{2}i$

D'où : $\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) = (i)\left(-\frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}$

Ainsi le nombre $\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right)$ est réel.

• Interprétation géométrique :

On a : $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(c)$ et $D(d)$ et $\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right)\left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) \in \mathbb{R}$

Donc les points A , B , C et D sont alignés ou cocycliques.

Puisque : $\frac{z_2 - d}{c - d} = i$ c'est-à-dire : $\frac{z_2 - d}{c - d} \notin \mathbb{R}$

alors les points B , C et D ne sont pas alignés.

D'où : les points A , B , C et D sont cocycliques.

Exercice 60

Partie A:

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + i = 0$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a : $z^2 + i = 0 \Leftrightarrow z^2 = -i$

$$\Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{2}(-2i)$$

$$\Leftrightarrow z^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)\right)^2$$

Donc : $S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i); -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) \right\}$

2) a) Déterminons le module et un argument de $1 + a$:

On note a la solution de l'équation $z^2 + i = 0$ telle que : $\operatorname{Re}(a) > 0$

alors : $a = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$, donc :

$$|a + 1| = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

Et on a : $a + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 1 = 1 + e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Comme $1 + e^{-i\frac{\pi}{4}} = (e^{-i\frac{\pi}{8}})(e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{\pi}{8}})$

d'après les formules d'Euler, on a : $e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{\pi}{8}} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Alors : $a + 1 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-i\frac{\pi}{8}}$

Puisque : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ alors : $2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-i\frac{\pi}{8}}$ est l'écriture exponentielle du nombre $1 + a$.

Ainsi : $\arg(1 + a) \equiv -\frac{\pi}{8} [2\pi]$ et $|1 + i| = 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

b) Dédution :

On a : $1 + a = 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-i\frac{\pi}{8}}$ donc : $|1 + a| = 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

D'autre part : $|1 + a| = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

c) Vérifions que : $(1 + a)(1 - a) = 1 + i$

Le nombre a est une solution de l'équation $z^2 + i = 0$

Donc : $a^2 + i = 0$ c'est-à-dire : $i = -a^2$

Par suite : $1 + i = 1 - a^2 = (1 + a)(1 - a)$

• Dédisons une forme trigonométrique de $1 - a$:

On a : $(1 + a)(1 - a) = 1 + i$ alors : $1 - a = \frac{1 + i}{1 + a}$

Comme $1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

et $1 + a = \sqrt{2 + \sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{8}}$ alors : $1 - a = \frac{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{8}}} = \sqrt{\frac{2}{2 + \sqrt{2}}} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right)}$

Ainsi : $1 - a = \sqrt{2 - \sqrt{2}} e^{i\frac{3\pi}{8}}$

C'est-à-dire : $1 - a = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \right)$

Partie B :

1) Montrons que : $(ON) \perp (OM')$

On a : $zz' + i = 0$ c'est-à-dire : $zz' = -i$ alors : $\arg(zz') \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

Comme $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$ et $\arg(z) \equiv -\arg(\bar{z}) [2\pi]$

alors : $\arg(zz') \equiv \arg(z') - \arg(\bar{z}) [2\pi]$

Donc : $\arg(z') - \arg(\bar{z}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ c'est-à-dire : $\arg\left(\frac{z'}{\bar{z}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Et on a : $N(z)$ et $M'(z')$ alors : $\arg\left(\frac{\bar{z}}{z'}\right) \equiv (\overrightarrow{OM'}; \overrightarrow{ON}) [2\pi]$

Donc : $(\overrightarrow{OM'}; \overrightarrow{ON}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, ainsi : $(OM') \perp (ON)$

2) a) Montrons que : $z' - a = -i\left(\frac{z-a}{az}\right)$

$$\begin{aligned} \text{On a : } i\left(\frac{z-a}{az}\right) &= i\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{z}\right) = -zz'\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{z}\right) \text{ car } zz' = -i \\ &= z' - \frac{zz'}{a} = z' + \frac{i}{a} = z' + \frac{ia}{a^2} \end{aligned}$$

Comme : $a^2 = -i$ alors : $i\left(\frac{z-a}{az}\right) = z' - a$

Ainsi : $z' - a = i\left(\frac{z-a}{az}\right)$

b) Supposons que $z \neq -a$:

• Montrons que : $z' \neq -a$

$$\text{On a : } zz' + i = 0 \Rightarrow z' = -\frac{i}{z} \text{ et } a^2 = -i$$

$$\text{Donc : } z' + a = -\frac{i}{z} + a = \frac{a^2}{z} + a = \frac{a}{z}(a + z)$$

Comme : $z + a \neq 0$ alors : $\frac{a}{z}(z + a) \neq 0$, donc : $z' + a \neq 0$

Ainsi : $z \neq -a \Rightarrow z' \neq -a$

• Montrons que : $\frac{z' - a}{z' + a} = -\left(\frac{z - a}{z + a}\right)$

$$\text{On a : } z' = -\frac{i}{z} \text{ et } a^2 = -i,$$

$$\text{donc : } \frac{z' - a}{z' + a} = \frac{-\frac{i}{z} - a}{-\frac{i}{z} + a} = \frac{-\frac{ia}{z} - a^2}{-\frac{ia}{z} + a^2} = \frac{-ia + iz}{-ia - iz} = \frac{z - a}{-(z + a)}$$

Ainsi : $\frac{z' - a}{z' + a} = -\left(\frac{z - a}{z + a}\right)$

3) Supposons que les points A, B, M ne sont pas alignés :

Montrons que le point M' appartient au cercle circonscrit au triangle ABM

Les points A, B, M ne sont pas alignés, soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABM .

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{z' - a}{z' + a} &= -\frac{z - a}{z + a} \iff \frac{z_{M'} - z_A}{z_{M'} - z_B} = -\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B} \\ &\iff \frac{z_{M'} - z_A}{z_{M'} - z_B} \times \frac{z_M - z_B}{z_M - z_A} = -1 \end{aligned}$$

C'est-à-dire : $\frac{z_{M'} - z_A}{z_{M'} - z_B} \times \frac{z_M - z_B}{z_M - z_A} \in \mathbb{R}$, donc les points A, B, M et M' sont cocycliques, par conséquent le point M' appartient au cercle (Γ) .

Exercice 61

1) a) • Vérifions que le nombre i est une solution de l'équation (E) :

On a :

$$(i)^3 + (2-i)(i)^2 + (m^2 + 1 - 2i)i - i(1 + m^2) = -i - 2 + i + im^2 + i + 2 - i - im^2 = 0$$

Donc le nombre i est une solution de l'équation (E) .

• Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

On considère le polynôme $P(z)$ où $z \in \mathbb{C}$ défini par :

$$P(z) = z^3 + (2-i)z^2 + (m^2 + 1 - 2i)z - i(1 + m^2)$$

On a i est une racine du polynôme $P(z)$ donc il existe deux nombres complexes b et c tels que :

$$(\forall z \in \mathbb{C}); P(z) = (z-i)(z^2 + bz + c)$$

Donc : Pour tout z de $\mathbb{C}$, on a : $P(z) = z^3 + (b-i)z^2 + (c-ib)z - ic$

$$\text{Par identification, on a : } \begin{cases} b-i = 2-i \\ c-ib = m^2 + 1 - 2i \\ -ic = -i(1+m^2) \end{cases}$$

Donc : $b = 2$ et $c = 1 + m^2$

Par suite : $(\forall z \in \mathbb{C}); P(z) = (z-i)(z^2 + 2z + 1 + m^2)$

Ainsi : $P(z) = 0 \iff z = i$ ou $z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0$ (2)

Résolvons l'équation (2) : $z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0$

Son discriminant est : $\Delta = 4 - 4(1 + m^2) = -4m^2 = (2im)^2$

Les solutions de l'équation (2) sont :

$$z_1 = \frac{-2 - 2im}{2} = -1 - im \text{ et } z_2 = \frac{-2 + 2im}{2} = -1 + im$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{i; -1 - im; -1 + im\}$$

b) Déterminons les valeurs de m pour que le produit des solutions de l'équation (E) soit égal à 1:

$$\begin{aligned}\text{On a : } i(-1 - im) \times (-1 + im) &= 1 \Leftrightarrow i(1 + m^2) = 1 \\ &\Leftrightarrow m^2 = -1 - i\end{aligned}$$

Pour cela, on détermine m' et m'' les racines carrées de $-1 - i$.

On pose : $m = X + iY$ avec $X \in \mathbb{R}$ et $Y \in \mathbb{R}$

$$\text{On a : } m^2 = -1 - i \Leftrightarrow X^2 - Y^2 + 2iXY = -1 - i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - Y^2 = -1 \\ X^2 + Y^2 = \sqrt{2} \\ XY < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2X^2 = \sqrt{2} - 1 \\ 2Y^2 = \sqrt{2} + 1 \\ XY < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ Y = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} X = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ Y = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \end{cases}$$

$$\text{D'où : } m' = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}-2}{2}} - i\sqrt{\frac{2\sqrt{2}+2}{2}} \text{ ou } m'' = -\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-2}{2}} + i\sqrt{\frac{2\sqrt{2}+2}{2}}$$

2) Écrivons z_1 et z_2 sous forme exponentielle :

$$\begin{aligned}\text{On a : } z_1 &= -1 + im = -1 + e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\alpha} \\ &= e^{i\pi} + e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} \\ &= e^{i(\frac{\alpha}{2}+\frac{3\pi}{4})} (e^{i(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4})} + e^{-i(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4})}) \\ &= 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i(\frac{\alpha}{2}+\frac{3\pi}{4})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{On a : } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} &\Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4} \\ &\Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0\end{aligned}$$

Donc l'écriture $z_1 = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i(\frac{\alpha}{2}+\frac{3\pi}{4})}$ est une forme exponentielle de z_1 .

$$\begin{aligned}\text{et } z_2 &= -1 - im = e^{i\pi} - e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} \\ &= e^{i(\frac{\alpha}{2}+\frac{3\pi}{4})} (e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})} - e^{-i(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})}) \\ &= 2i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) e^{i(\frac{\alpha}{2}+\frac{3\pi}{4})} \\ &= 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})}\end{aligned}$$

On a : $0 < \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ donc : $\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0$

d'où l'écriture $z_2 = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$ est une forme exponentielle de z_2 .

Partie 2:

1) Déterminons l'ensemble des points $M(m)$ tels que les points M , M_1 et M_2 soient alignés :

Soit $m \in \mathbb{C}^*$. On a : $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = \frac{-1 - im - m}{-1 + im - m} = \frac{1 + m(1 + i)}{1 + m(1 - i)}$

Donc : (Les points M , M_1 et M_2 sont alignés) $\Leftrightarrow \frac{z_2 - m}{z_1 - m} \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1 + m(1 + i)}{1 + m(1 - i)} \right) = \frac{1 + m(1 + i)}{1 + m(1 - i)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \overline{m}(1 - i)}{1 + \overline{m}(1 + i)} = \frac{1 + m(1 + i)}{1 + m(1 - i)}$$

$\Leftrightarrow (1 + \overline{m}(1 - i))(1 + m(1 - i)) = (1 + \overline{m}(1 + i))(1 + m(1 + i))$

$\Leftrightarrow 1 + m(1 - i) + \overline{m}(1 - i) - 2im\overline{m} = 1 + m(1 + i) + \overline{m}(1 + i) + 2im\overline{m}$

$\Leftrightarrow 4im\overline{m} + 2im + 2i\overline{m} = 0$

$\Leftrightarrow 4im\overline{m} + 2i(m + \overline{m}) = 0$

$\Leftrightarrow 2m\overline{m} + \operatorname{Re}(m) = 0$ (*)

On pose : $m = x + iy$ avec $(x; y) \neq (0; 0)$

On a : (*) $\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) + 2x = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Donc l'ensemble des points $M(m)$ tel que les points M , M_1 et M_2 sont alignés est le cercle (Γ) de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé du point O .

2) a) Montrons que R est une rotation :

Soit $M(m)$ un point du plan complexe et $M'(m')$ son image par R :

On a : $R(M) = M' \Leftrightarrow z' = iz - 1$

Déterminons le point invariant par R :

On a : $R(M) = M \Leftrightarrow z = iz - 1$

$\Leftrightarrow z(1 - i) = -1$

$\Leftrightarrow z = \frac{-1}{1 - i} = \frac{-1(1 + i)}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

On pose : $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et $\Omega(\omega)$

On a donc : $R(M) = M' \Leftrightarrow z' = iz - 1$ et $\omega = i\omega - 1$ (car $R(\Omega) = \Omega$)

$$\Leftrightarrow z' - \omega = i(z - \omega)$$

$$\Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - \omega)$$

D'où : R est la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) Montrons que : $\frac{z_2 - m}{z_2 - z_1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow m \times \bar{m} - \text{Im}(m) = 0$

$$\text{On a : } \frac{z_2 - m}{z_2 - z_1} = \frac{-1 - im - m}{-1 - im + 1 - im} = \frac{1 + m(1 + i)}{2im}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \frac{z_2 - m}{z_2 - z_1} \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \left(\frac{z_2 - m}{z_2 - z_1} \right) = -\frac{z_2 - m}{z_2 - z_1} \\ &\Leftrightarrow \frac{1 + \bar{m}(1 - i)}{-2im} = \frac{1 + m(1 + i)}{-2im} \\ &\Leftrightarrow m(1 + \bar{m}(1 - i)) = \bar{m}(1 + m(1 + i)) \\ &\Leftrightarrow m + m\bar{m} - imm = \bar{m} + m\bar{m} + imm \\ &\Leftrightarrow 2im\bar{m} + \bar{m} - m = 0 \\ &\Leftrightarrow 2im\bar{m} - 2i\text{Im}(m) = 0 \\ &\Leftrightarrow m\bar{m} - \text{Im}(m) = 0 \end{aligned}$$

c) Dédution :

Soit $M(z)$ tel que : $z \in \mathbb{C}^*$; on a : $z_1 = im - 1$

donc : $R(M) = M_1$ d'où : $\frac{z_1 - \omega}{m - \omega} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, C'est-à-dire : $\frac{z_1 - \omega}{m - \omega} \notin \mathbb{R}$,

donc les points M , M_1 et Ω ne sont pas alignés, par suite :

$$\begin{aligned} (\text{Les points } \Omega, M, M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont cocycliques}) &\Leftrightarrow \frac{z_2 - m}{z_2 - z_1} \div \frac{\omega - m}{\omega - z_1} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \frac{z_2 - m}{z_2 - z_1} \times \frac{z_1 - \omega}{m - \omega} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \frac{z_2 - m}{z_2 - z_1} \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

$$(\text{car } \frac{z_1 - \omega}{m - \omega} = i) \Leftrightarrow m \times \bar{m} - \text{Im}(m) = 0 (*)$$

En posant : $m = x + y$, on a : $(*) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - y = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Donc l'ensemble des points $M(m)$ tel que les points Ω , M , M_1 et M_2 sont cocycliques est le cercle (Γ') de centre $\Omega'(\frac{1}{2}i)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Exercice 62 Session normale (Juin 20017)

Partie I

1) Vérifions que le discriminant de l'équation (E_m) est : $\Delta = (2im)^2$

$$\text{On a : } (E_m): 2z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0$$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } \Delta &= 4(m+1+i)^2 - 8(m^2 + (1+i)m + i) \\ &= 4m^2 + 4 - 4 + 8m + 8i + 8mi - 8m^2 - 8m - 8im - 8i \\ &= -4m^2 = (2im)^2\end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \Delta = (2im)^2$$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m)

L'équation (E_m) admet deux solutions z' et z'' qui sont :

$$\begin{aligned}z' &= \frac{2(m+1+i) - 2im}{4} = \frac{m+1+i(1-m)}{2} \\ \text{et } z'' &= \frac{2(m+1+i) + 2im}{4} = \frac{m+1+i(1+m)}{2}\end{aligned}$$

Partie II

1) a) Vérifions que : $z_1 = iz_2 + 1$

$$\begin{aligned}\text{On a : } iz_2 + 1 &= i\left(\frac{1-i}{2}(m+i)\right) + 1 \\ &= \frac{1+i}{2}(m+i) + 1 \\ &= \frac{(1+i)(m+i) + 2}{2} \\ &= \frac{m+i+im+1}{2} \\ &= \frac{m+1+i(m+1)}{2} \\ &= \frac{(1+i)(m+1)}{2} \\ &= z_1\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } z_1 = iz_2 + 1$$

b) Montrons que : $R(M_2) = M_1$ où R est la rotation de centre $\Omega\left(\frac{1+i}{2}\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } z_1 = iz_2 + 1 &\Leftrightarrow z_1 - \frac{1+i}{2} = iz_2 + 1 - \frac{1+i}{2} \\
 &\Leftrightarrow z_1 - \frac{1+i}{2} = iz_2 + \frac{1-i}{2} \\
 &\Leftrightarrow z_1 - \frac{1+i}{2} = i\left(z_2 - \frac{1+i}{2}\right) \\
 &\Leftrightarrow z_1 - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_2 - \omega)
 \end{aligned}$$

Donc : $R(M_2) = M_1$

2) a) Vérifions que : $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i \frac{m-1}{m-i}$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } \frac{z_2 - m}{z_1 - m} &= \frac{\frac{1-i}{2}(m+i) - m}{\frac{1+i}{2}(m+1) - m} = \frac{m+i - im + 1 - 2m}{m+1 + im + i - 2m} \\
 &= \frac{1-m+i(1-m)}{1-m+im+i} = \frac{(1-m)(1+i)}{1+im-(m-i)} \\
 &= \frac{(1-m)(1+i)}{i(m-i) - (m-i)} = \frac{(1-m)(1+i)}{(m-i)(-1+i)} \\
 &= \frac{-i(1-m)(-1+i)}{(m-i)(-1+i)} = i \frac{m-1}{m-i}
 \end{aligned}$$

Donc : $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i \frac{m-1}{m-i}$

b) Supposons que les points M , M_1 et M_2 sont alignés

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } \frac{z_2 - z_M}{z_1 - z_M} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow i \frac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow \frac{m-1}{m-i} \in i\mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow \frac{z_M - z_A}{z_M - z_B} \in i\mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (AM) \perp (BM)$$

donc M appartient au cercle (Γ) de diamètre $[AB]$

c) Déterminons (E) l'ensemble des points $M(m)$ tels que les points Ω , M , M_1 et M_2 soient cocycliques.

Si $m = i$ alors $M = B = M_1$ et dans ce cas, on a :

$$\frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} = \frac{i - \frac{1+i}{2}}{1+i - \frac{1+i}{2}} = \frac{2(-1+i)}{1+i} = 2i$$

On a : $\frac{z_1 - w}{z_2 - w} \notin \mathbb{R}$ donc les points M_1 , M_2 et Ω ne sont pas alignés d'où ils sont cocycliques.

• Si $m \neq i$, on a :

$$\begin{aligned} M(m) \in (E) &\Leftrightarrow \left(\frac{z_2 - m}{z_1 - m} \div \frac{z_2 - \omega}{z_1 - \omega} \right) \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{z_2 - m}{z_1 - m} \times \frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} \right) \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \left(i \times \frac{m-1}{m-i} \times i \right) \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \frac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow (\text{les points } M, A \text{ et } B \text{ sont alignés}) \\ &\Leftrightarrow M \in (AB) \setminus \{B\} \end{aligned}$$

D'où (E) est la droite (AB)

Exercice 63 Session de rattrapage (2017)

1) Déterminons le nombre complexe z tel que les points M et M' soient confondus (c'est-à-dire $z' = z$)

$$\begin{aligned} \text{Soit } z \in \mathbb{C}, \text{ on a : } z' = z &\Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \\ &\Leftrightarrow 2z = z + \frac{1}{z} \\ &\Leftrightarrow z^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = -1 \end{aligned}$$

Donc les points $M(z)$ et $M'(z')$ sont confondus si $z = 1$ ou $z = -1$

2) Montrons que $\frac{z' + 1}{z' - 1} = \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right)^2$ pour $z \neq 1$ et $z \neq -1$

Soit $z \in \mathbb{C} - \{1; -1\}$ on a :

$$\begin{aligned} z' + 1 &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) + 1 = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} + 2 \right) = \frac{1}{2z} (z^2 + 2z + 1) = \frac{1}{2z} (z + 1)^2 \\ \text{et } z' - 1 &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) - 1 = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} - 2 \right) = \frac{1}{2z} (z^2 - 2z + 1) = \frac{1}{2z} (z - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \frac{z' + 1}{z' - 1} = \frac{(z + 1)^2}{(z - 1)^2} = \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right)^2$$

3) Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$

On a $M \in (\Delta) \Rightarrow MA = MB$

$$\Rightarrow \frac{MB}{MA} = 1 \text{ (car } M \neq A \text{ et } M \neq B)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{z+1}{z-1} \right| = 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{z+1}{z-1} \right|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{z'+1}{z'-1} \right| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{M'B}{M'A} = 1$$

$$\Rightarrow M'B = M'A$$

$$\Rightarrow M' \in (\Delta)$$

4) Soit (Γ) le cercle dont $[AB]$ est l'un de ses diamètres.

Soit $M(z)$ un point du plan complexe tel que $z \neq 0$

- Si $z = 1$ alors $M' = M = A$ et dans ce cas $M' \in (AB)$

- Si $z = -1$ alors $M' = M = B$ et dans ce cas $M' \in (AB)$

- Si $z \neq 1$ et $z \neq -1$ alors $M \neq A$ et $M \neq B$

On a : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow$ Le triangle MAB est rectangle en M

$$\Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{z'+1}{z'-1} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Les points A , B et M' sont alignés.

$$\Rightarrow M' \in (AB)$$

D'où Si le point M appartient au cercle (Γ) alors le point M' appartient à la droite (AB)

Exercice 64 Bac 2018 session Normale

Partie I

1) a) Vérifions que : $\Delta = (im - 2i)^2$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } \Delta &= (im + 2)^2 - 4(im + 2 - m) \\
 &= (im)^2 + 4im + 4 - 4im - 8 + 4m \\
 &= (im)^2 + 4m - 4 \\
 &= (im)^2 - 2(im)(2i) + (2i)^2 = (im - 2i)^2
 \end{aligned}$$

b) Les solutions de l'équation (E_m) sont :

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \frac{-(im + 2) - (im - 2i)}{2} = -im - 1 + i = -1 + i(1 - m) \\
 \text{et } z_2 &= \frac{-(im + 2) + (im - 2i)}{2} = -1 - i
 \end{aligned}$$

2) Ecrivons z_1 et z_2 sous forme exponentielle sachant que : $m = i\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } z_1 &= -1 + \sqrt{2} + i = \sqrt{2} + \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
 &= \sqrt{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \sqrt{2}\left(2\sin^2\frac{\pi}{8} + 2i\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\right) \\
 &= 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}\right) \\
 &= 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right) \\
 &= 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)
 \end{aligned}$$

Puisque : $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ alors $\sin\frac{\pi}{8} > 0$

$$\text{Donc : } z_1 = 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

$$\text{et on a : } z_2 = -1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

Partie II

1) a) Vérifions que Ω est le centre de la rotation R

Soit $\Omega'(\omega')$ le centre de la rotation R

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } R(M) = M' &\Leftrightarrow m' - \omega' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(m - \omega') \\
 &\Leftrightarrow -im - 1 + i - \omega' = -im + i\omega' \\
 &\Leftrightarrow \omega'(1 + i) = -1 + i \\
 &\Leftrightarrow \omega' = \frac{-1 + i}{1 + i} = \frac{i(1 + i)}{1 + i} = i = \omega
 \end{aligned}$$

Donc le centre de la rotation R est Ω

b) Déterminons l'affixe b du point B où $A = R(B)$

On a : R^{-1} est la rotation réciproque de la rotation R , donc son angle est $\frac{\pi}{2}$

et Ω est son centre, d'où : $R(B) = A \iff B = R^{-1}(A)$

$$\iff b - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(a - \omega)$$

$$\iff b = i(-1 - i - i) + i = 2$$

Donc : $b = 2$ est l'affixe du point B

2) a) Vérifions que : $m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$

$$\begin{aligned}\text{On a : } \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b) &= \frac{i + 1 + i}{i - 2} \times (m - 2) \\ &= \frac{1 + 2i}{-2 + i} \times (m - 2) \\ &= \frac{-i(-2 + i)}{-2 + i}(m - 2) \\ &= 2i - im\end{aligned}$$

$$\text{et : } m' - a = -im - 1 + i + 1 + i = 2i - im$$

$$\text{donc : } m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$$

b) Montrons que les points A , M et M' sont alignés si et seulement si les points A , B , Ω et M sont cocycliques.

• Si $m = -1 - i$ alors $M = A$ et dans ce cas les points A , B et Ω ne sont pas alignés (car le triangle est rectangle en Ω) et par suite, ils sont cocycliques

• Si $m \neq -1 - i$, on a :

$$(\text{Les points } A, M \text{ et } M' \text{ sont alignés}) \iff \frac{m' - a}{m - a} \in \mathbb{R}$$

$$\iff \frac{(\omega - a)(m - b)}{(\omega - b)(m - a)} \in \mathbb{R}$$

$$\iff \frac{\omega - a}{\omega - b} \cdot \frac{m - a}{m - b} \in \mathbb{R}$$

$$\iff \text{Les points } A, B, \Omega \text{ et } M \text{ sont co-}$$

cyliques

c) Soit (E) l'ensemble des points $M(m)$ tels que les points A , M et M' sont alignés.

$$M(m) \in (E) \iff \text{Les points } A, M \text{ et } M' \text{ sont alignés}$$

$$\iff \text{Les points } A, B, \Omega \text{ et } M \text{ sont cocycliques}$$

$\Leftrightarrow M \in (\mathcal{C})$ où $(\mathcal{C})$ est le cercle circonscrit au triangle $AB\Omega$

Puisque $R(B) = A$ alors le triangle est rectangle en Ω et par suite le centre I du cercle $(\mathcal{C})$ est le milieu du segment $[AB]$ et son rayon $r = \frac{AB}{2}$

$$\text{On a : } z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-1 - i + 2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\text{et } r = \frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|2 + 1 + i|}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Exercice 65 Session de rattrape (2018)

1) a) Vérifions que : $\forall z \in \mathbb{C}^* - \{i\}$; $h(z) = z \Leftrightarrow z^2 - 2iz - 2 = 0$

Soit $z \in \mathbb{C}^* - \{i\}$, on a : $h(z) = z \Leftrightarrow i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right) = z$

$$\Leftrightarrow \frac{z-2i}{z-i} = -iz$$

$$\Leftrightarrow z - 2i = -iz^2 - z$$

$$\Leftrightarrow iz^2 + 2z - 2i = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2iz - 2 = 0$$

b) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2iz - 2 = 0$

Le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = -4 + 8 = 4$

Les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = \frac{2i-2}{2} = -1+i \text{ et } z_2 = \frac{2i+2}{2} = 1+i \text{ Donc : } S = \{1+i; -1+i\}$$

2) a) Montrons que : $\frac{h(z)-a}{h(z)-b} = -\frac{z-a}{z-b}$ où $z \in \mathbb{C}^* - \{i; a; b\}$

Soit $z \in \mathbb{C}^* - \{i; a; b\}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{h(z)-a}{h(z)-b} &= \frac{i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)-a}{i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)-b} = \frac{iz+2-az+ia}{iz+2-bz+ib} \\ &= \frac{ia-az+ia+a^2-2ia}{iz-bz+ib+b^2-2ib} \quad (\text{car } a \text{ et } b \text{ sont les solutions de (E)}) \\ &= \frac{z(i-a)-a(i-a)}{z(i-b)-b(i-b)} \quad (\text{c'est-à-dire : } a^2-2ia=2 \text{ et } b^2-2ib=2) \\ &= \frac{(i-a)(z-a)}{(i-b)(z-b)} \end{aligned}$$

$$\text{or } \frac{i-a}{i-b} = \frac{i-(2i-b)}{i-b} = \frac{b-i}{i-b} = -1 \quad (\text{car } a+b=2i)$$

Donc : $\frac{h(z)-a}{h(z)-b} = -\frac{z-a}{z-b}$

b) Dédution : $(\overrightarrow{M'B}; \overrightarrow{M'A}) \equiv \arg\left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right)[2\pi]$
 $\equiv \arg\left(-\frac{z-a}{z-b}\right)[2\pi]$
 $\equiv \pi + \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)[2\pi]$
 $\equiv \pi + (\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA})[2\pi]$

3) a) Si les points M , A et B sont alignés alors :

$$(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA}) \equiv 0[2\pi] \text{ où } (\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA}) \equiv \pi[2\pi]$$

donc : $(\overrightarrow{M'B}; \overrightarrow{M'A}) \equiv 0[2\pi]$ ou $(\overrightarrow{M'B}; \overrightarrow{M'A}) \equiv \pi[2\pi]$

D'où les points A , B et M' sont alignés.

b) Si les points M , A et B ne sont pas alignés alors on a :

$$\frac{h(z)-a}{h(z)-b} = -\frac{z-a}{z-b} \Rightarrow \frac{h(z)-a}{h(z)-b} \times \frac{z-b}{z-a} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{h(z)-a}{h(z)-b} \div \frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Les points M , A , B et M' sont cocycliques.

Exercice 66 BAC 2019 (Solution) Normale

I- 1) a) Montrons que le discriminant de l'équation (E)

$$\begin{aligned} \text{On a : } \Delta &= (1+i)^2(1+m)^2 - 8im \\ &= 2i(1+m)^2 - 8im \\ &= 2i(m^2 + 2m + 1 - 4m) \\ &= 2i(m-1)^2 \end{aligned}$$

Puisque $m \notin \mathbb{R}$ alors $m \neq 1$; donc Δ est non nul

b) Déterminons les solutions de l'équation (E)

$$\text{On a : } \Delta = 2i(m-1)^2 = (1+i)^2(m-1)^2 = ((1+i)(m-1))^2$$

$$\text{Donc : } z_1 = \frac{(1+i)(1+m) - (1+i)(m-1)}{2} = \frac{(1+i)(1+m-m+1)}{2} = 1+i$$

$$\text{et } z_2 = \frac{(1+i)(1+m) + (1+i)(m-1)}{2} = \frac{(1+i)(1+m+m-1)}{2} = m+im$$

$$\text{D'où : } S = \{1+i; m+im\}$$

2) On suppose que : $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

a) Déterminons le module et un argument de $z_1 + z_2$

$$\text{On a : } z_1 + z_2 = (1+i)(1+m)$$

$$\text{Puisque : } 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } 1+m = e^{i\theta} + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos\frac{\theta}{2} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\text{Alors } z_1 + z_2 = 2\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$$

$$\text{On a : } 0 < \theta < \pi \text{ donc } 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ d'où } \cos\frac{\theta}{2} > 0$$

$$\text{Ainsi : } |z_1 + z_2| = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } \arg(z_1 + z_2) \equiv \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

b) Montrons que si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2 = 2i$

$$\text{On a : } z_1 z_2 = 2im \text{ donc : } z_1 z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow 2im \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow m \in i\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow e^{i\theta} \in i\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \text{ (car } 0 < \theta < \pi)$$

$$\Rightarrow m = i$$

$$\text{et par suite : } z_1 + z_2 = (1+i)(1+m) = (1+i)^2 = 2i$$

$$\text{D'où : si } z_1 z_2 \in \mathbb{R} \text{ alors } z_1 + z_2 = 2i$$

$$\text{II- 1) a) Montrons que l'axe de } \Omega \text{ est } \omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$$

On a D est l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$,

$$\text{donc : } d = e^{i\frac{\pi}{2}}(b-0) + 0 = ib = (-1+i)m$$

D'autre part, on a : Ω est le milieu du segment $[CD]$, donc :

$$\omega = \frac{c+d}{2} = \frac{1-i + (-1+i)m}{2} = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$$

$$\text{b) Calculons } \frac{b-a}{\omega}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{b-a}{\omega} &= \frac{(1+i)m - (1+i)}{\frac{(1-i)(1-m)}{2}} = \frac{2(1+i)(m-1)}{(1-i)(1-m)} = \frac{-2(1+i)}{1-i} \\ &= \frac{-2i(1-i)}{1-i} = -2i \end{aligned}$$

c) Dédution :

$$\text{On a : } \frac{b-a}{\omega} = -2i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Donc : $\left| \frac{b-a}{\omega-0} \right| = 2$ et $\arg\left(\frac{b-a}{\omega-0}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

D'où : $AB = 2\Omega O$ et $(\overrightarrow{O\Omega}; \overrightarrow{AB}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

c'est-à-dire : $AB = 2\Omega O$ et $(O\Omega) \perp (AB)$

2) a) Montrons que $\frac{h-a}{b-a} \in \mathbb{R}$ et $\frac{h}{b-a} \in i\mathbb{R}$

On a : les points A , B et H sont alignés car $H \in (AB)$

donc : $\frac{h-a}{b-a} \in \mathbb{R}$

• On a : $(O\Omega) \perp (AB)$ et $H \in (O\Omega)$ donc $(OH) \perp (AB)$

d'où : $\frac{h-0}{b-a} \in i\mathbb{R}$ c'est-à-dire : $\frac{h}{b-a} \in i\mathbb{R}$

b) Déduisons h en fonction de m

On a : $\frac{h-a}{b-a} \in \mathbb{R}$ donc : $\frac{\bar{h}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}} = \frac{h-a}{b-a}$

et $\frac{h}{b-a} \in i\mathbb{R}$ donc : $\frac{\bar{h}}{\bar{b}-\bar{a}} = \frac{-h}{b-a}$

D'où : $\frac{\bar{h}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}} + \frac{\bar{h}}{\bar{b}-\bar{a}} = \frac{h-a}{b-a} + \frac{-h}{b-a}$ c'est-à-dire : $\frac{2\bar{h}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}} = \frac{-a}{b-a}$

Par suite : $\bar{h} = \frac{a\bar{b}-\bar{a}b}{2(a-b)}$

On a d'autre part : $a\bar{b}-\bar{a}b = (1+i)(1-i)\bar{m} - (1-i)(1+i)m$
 $= 2(\bar{m}-m)$

et $a-b = (1+i) - (1+i)m = (1+i)(1-m)$

donc : $\bar{h} = \frac{2(\bar{m}-m)}{2(1+i)(1-m)} = \frac{\bar{m}-m}{(1+i)(1-m)}$

D'où : $h = \frac{(m-\bar{m})}{(1-i)(1-\bar{m})} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(\frac{m-\bar{m}}{1-\bar{m}}\right)$

Exercice 67 BAC 2019 Session de rattrapage

I-1) a) Vérifions que le discriminant de (E_a) est $\Delta = \alpha^2$

On a : $\Delta = (i\alpha\sqrt{3})^2 + 4\alpha^2 = -3\alpha^2 + 4\alpha^2 = \alpha^2$

b) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_a) :

On a : $\Delta = \alpha^2$

Donc les solutions de l'équation (E_α) sont :

$$z_1 = \frac{i\alpha\sqrt{3} + \alpha}{2} = \alpha\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \text{ et } z_2 = \frac{i\alpha\sqrt{3} - \alpha}{2} = \alpha\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

2) Écrivons z_1 et z_2 sous forme exponentielle :

$$\text{On a : } -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Donc : } z_2 = |\alpha|e^{i\lambda}.e^{i\frac{2\pi}{3}} = |\alpha|e^{i(\lambda+\frac{2\pi}{3})} \text{ et } z_1 = |\alpha|e^{i\lambda}.e^{i\frac{\pi}{3}} = |\alpha|e^{i(\lambda+\frac{\pi}{3})}$$

II- 1) a) Montrons que $R(\Omega) = M_1$ et $R(M_1) = M_2$

L'écriture complexe de la rotation R est : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - 0) + 0$

c'est-à-dire : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$

$$\text{- On a : } e^{i\frac{\pi}{3}}.\alpha = \alpha\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \alpha\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = z_1$$

Donc : $R(\Omega) = M_1$

$$\begin{aligned} \text{- On a : } e^{i\frac{\pi}{3}}z_1 &= e^{i\frac{\pi}{3}}|\alpha|e^{i(\lambda+\frac{\pi}{3})} = |\alpha|e^{i(\lambda+\frac{2\pi}{3})} = |\alpha|e^{i\lambda}.e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ &= \alpha\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \alpha\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = z_2 \end{aligned}$$

Donc : $R(M_1) = M_2$

b) Dédution :

$$\bullet \text{ On a : } R(\Omega) = M_1 \iff O\Omega = OM_1 \text{ et } (\overline{O\Omega}; \overline{OM_1}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

Donc le triangle $O\Omega M_1$ est équilatéral

$$\bullet \text{ On a : } R(M_1) = M_2 \iff OM_1 = OM_2 \text{ et } (\overline{OM_1}; \overline{OM_2}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

Donc le triangle $OM_1 M_2$ est équilatéral

2) a) Vérifions que : $z_1 - z_2 = \alpha$

$$\text{On a : } z_1 - z_2 = \alpha\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \alpha$$

b) Montrons que les deux droites (ΩM_2) et (OM_1) sont perpendiculaires.

$$\text{On a : } \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - 0} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}i(1 + i\sqrt{3})}{1 + i\sqrt{3}} = i\sqrt{3}$$

$$\text{Donc : } \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - 0} \in i\mathbb{R} \text{ d'où : } (\Omega M_2) \perp (OM_1)$$

c) Dédudons que $O\Omega M_1 M_2$ est un losange

$$\text{On a : } z_1 - z_2 = \alpha \text{ et } z_\Omega - z_0 = \alpha \text{ donc : } \overrightarrow{M_2 M_1} = \overrightarrow{z_\Omega z_0}$$

c'est-à-dire : $\overrightarrow{M_2 M_1} = \overrightarrow{O\Omega}$ d'où : $O\Omega M_1 M_2$ est un parallélogramme et puisque les diagonales $[OM_1]$ et $[\Omega M_2]$ sont perpendiculaires, alors le quadrilatère $O\Omega M_1 M_2$ est un losange.

3) Montrons que pour tout réel θ , on a : $Z = \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \cdot \frac{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}}$ est un réel

$$\text{On a : } \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}{2\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}{e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\text{et on a : } \frac{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}} = \frac{|\alpha|e^{i(\lambda + \frac{2\pi}{3})} - |\alpha|e^{i\theta}}{|\alpha|e^{i(\lambda + \frac{\pi}{3})} - |\alpha|e^{i\theta}} = \frac{e^{i(\lambda + \frac{2\pi}{3})} - e^{i\theta}}{e^{i(\lambda + \frac{\pi}{3})} - e^{i\theta}}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \frac{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}} &= \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \frac{e^{i(\lambda + \frac{\pi}{3})}e^{i\theta}}{e^{i(\lambda + \frac{2\pi}{3})} - e^{i\theta}} \\ &= \sqrt{3} \frac{e^{i(\lambda + \frac{\pi}{3})} - e^{i(\theta + \frac{\pi}{6})}}{e^{i(\lambda + \frac{2\pi}{3})} - e^{i\theta}} \\ &= \sqrt{3} \cdot \frac{e^{i(\frac{\lambda}{2} - \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6})} [e^{i(\frac{\lambda}{2} + \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6})} - e^{-i(\frac{\lambda}{2} - \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6})}]}{e^{i(\frac{\lambda}{2} + \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3})} [e^{i(\frac{\lambda}{2} - \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3})} - e^{-i(\frac{\lambda}{2} - \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3})}]} \\ &= \sqrt{3} \cdot \frac{2i \sin\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}{2i \sin\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right)} \end{aligned}$$

D'où : $(\forall \theta \in \mathbb{R}); Z \in \mathbb{R}$

Sommaire

Chapitre 01	Continuité d'une fonction numérique	4
	I/ Continuité en un point - Continuité sur un intervalle	4
	II/ Image d'un intervalle par une fonction continue	5
	III/ Continuité de la composée de deux fonctions	6
	Exercices d'application	6
	IV/ Fonction réciproque d'une fonction continue	29
	et strictement monotone	
	V/ Fonction racine nième	29
	VI/ Fonction arctan	30
	Exercices d'application	30
	Exercices de synthèse	62
Chapitre 02	Dérivation et étude de fonctions	84
	I/ Dérivée de la composée de deux fonctions	84
	II/ Dérivabilité d'une fonction réciproque	84
	III/ Dérivés des fonctions : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ et $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$	84
	IV/ Dérivées des fonctions : $x \mapsto x^r$ et $x \mapsto (u(x))^r$ ou $r \in \mathbb{Q}^*$	84
	Exercices d'application	85
	V/ Dérivée de la fonction Arctangente	99
	Exercices d'application	99
	VI/ Théorème de Rolle	112
	VII/ Théorème des accroissements finis	112
	VIII/ Inégalité des accroissements finis	112
	Exercices d'application	113
	Exercices de synthèse	143
Chapitre 03	Les suites	206
	I/ Suite majorée ; suite minorée ; suite bornée.	206
	II/ Sens de variations d'une suite	206
	III/ Suites arithmétiques - suites géométriques	207
	Exercices d'application	207
	IV/ Limites usuelles	214
	V/ Convergence d'une suite	215
	VI/ Critères de convergence d'une suite	215
	Exercices d'application	216

Chapitre 03	VII/ Suites (u_n) de type $u_{n+1} = f(u_n)$	247
	Exercices d'application	247
	VIII/ Suites adjacentes	254
	Exercices d'application	255
	Exercices de synthèse	277
Chapitre 04	Fonctions logarithmiques	326
	I/ Fonction logarithme népérien	326
	II/ Fonction logarithme de base a ($a > 0$ et $a \neq 1$)	328
	III/ Fonction logarithme décimale	328
	IV/ Variations de la fonction logarithme de base a	328
	Exercices d'application	329
	Exercices de synthèse	353
Chapitre 05	Nombres complexes	440
	I/ Forme algébrique d'un nombre complexe - opérations dans $\mathbb{C}$	440
	Exercices d'application	441
	II/ Conjugué d'un nombre complexe	446
	Exercices d'application	446
	III/ Représentation géométrique d'un nombre complexe	452
	Exercices d'application	453
	VI/ Module d'un nombre complexe	455
	Exercices d'application	455
	V/ Argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul	462
	Exercices d'application	465
	VI/ Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul	474
	Exercices d'application	474
	VII/ Racines nième d'un nombre complexe non nul - Équations du second degré dans $\mathbb{C}$	487
	Exercices d'application	489
	VIII/ Écriture complexe des transformations usuelles	503
	Exercices d'application	505
	Exercices de synthèse	510

Tous droits réservés

ÉDITIONS *Plus*
إديشون بلس

Maxi.Maths - SC MATH 2BAC TOME (1) - Exercices résolus

Édition 2020

Dépôt légal: 2020MO2109

ISBN: 978-9920-670-07-4

Imprimerie Najah Al Jadida (CTP) - Casablanca

maxi.maths



مكتبة السلام الجديدة

31/34 Place My Youssef - Habouss - Casablanca

Tel.: 05-22-30-40-16 / 05-22-30-37-11

Fax: 05-22-44-10-47

lib.essalam@gmail.com

lib.essalam@hotmail.fr - E-mail: lib.essalam@menara.ma

www.librairieessalam.com

Prix de vente public:
120,00 DH

Dépôt Légal 2020MO2109

ISBN 978-9920-670-07-4

