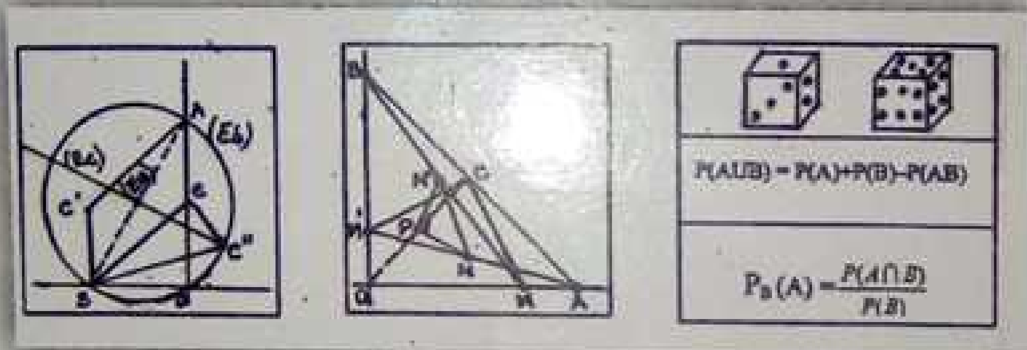
MATHEMATIQUES

COLLECTION K²

RECUEIL D'EXERCICES ET PROBLEMES DE SYNTHESE AVEC LEURS CORRIGES DETAILLES

Première partie	Deuxième partie	Troisième partie
NOMBRES COMPLEXES 50 EXERCICES	**SIMILITUDES DIRECTES 15 EXERCICES**	**PROBABILITÉS 40 EXERCICES**

COURS + EXERCICES CORRIGÉS



Tome 1

Classes : Terminales : C-D-E-F-Ti /1

Rédigé par :

KOUEVIDJIN Mawoulé Kankoé
Professeur de MATHEMATIQUES
Tél : (+228) 90 16 93 00 / 99 54 56 40
(+228) 91 82 84 61 / 99 09 43 63
(+228) 92 74 97 70
E-mail: koehyppo@yahoo.fr

K² AU SERVICE DES ELEVES

PREMIERE EDITION : Janvier 2005

Enregistré a BUTODRA sous le numero : OL 1309

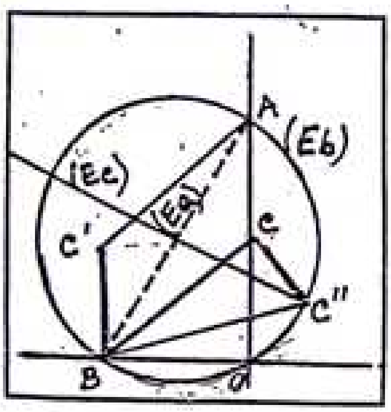
MATHEMATIQUES

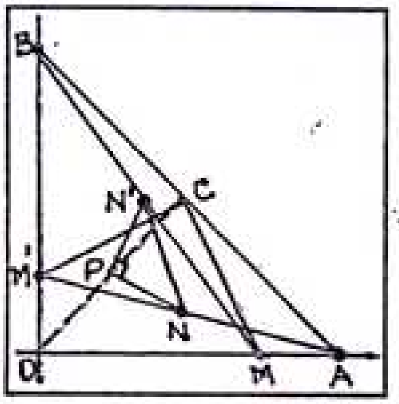
COLLECTION K²

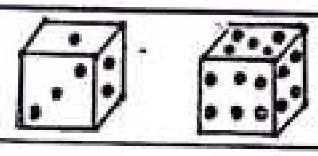
RECEUIL D'EXERCICES ET PROBLEMES DE SYNTHESE AVEC LEURS CORRIGES DETAILLES

PREMIERE PARTIE	DEUXIEME PARTIE	TROISIEME PARTIE
NOMBRES COMPLEXES 50 EXERCICES	SIMILITUDES DIRECTES 15 EXERCICES	PROBABILITES 40 EXERCICES

COURS + EXERCICES CORRIGES







$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

CLASSES : TERMINALES : C-D-E-F- Ti/1

TOME 1

Rédigé par : M. KOUEVIDJIN Mawoulé Kankoé.
Professeur de MATHEMATIQUES
CEL : 90-16-93-00 / 22-34-63-10 / 99-54-56-40

K² AU SERVICE DES ELEVES

PREMIERE EDITION : Janvier 2005

ENREGISTRE À BUTODRA SOUS LE NUMERO OL 1309

PREMIERE PARTIE

NOMBRES COMPLEXES

COURS + EXERCICES CORRIGES

COURS

NOMBRES COMPLEXES

1/ INTRODUCTION

Les équations du second degré telles que : $x^2+1=0$, $x^2+x+1=0$ par exemple n'ont pas de solution dans $\mathbb{R}$. Cet ensemble, c'est-à-dire $\mathbb{R}$ est devenu par conséquent insuffisant. Les mathématiciens, ont donc été amenés à "inventer" un nombre i tel que $i^2=-1$.

A l'origine ce n'était qu'une curiosité mathématique; mais plus tard il est devenu un outil indispensable, aussi bien en mathématiques qu'en physique.

2/ DEFINITIONS

- On appelle nombre complexe, tout nombre de la forme $a+ib$ où a et b sont des nombres réels et $i^2=-1$
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C}=\{z / z=a+ib,\ (a;b)\in\mathbb{R}^2\}$$

- L'écriture $z=a+ib$ est appelée forme algébrique de z, $(a;b)\in\mathbb{R}^2$
  - le nombre réel a est appelé partie réelle de z et noté $Re(z)$
  - le nombre réel b est appelé partie imaginaire de z et noté $Im(z)$
  - si $b=0$, alors $z=a$; z est un nombre réel; tout nombre réel est un nombre complexe : $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$
  - $a=0$ et $b\neq 0$, alors $z=ib$; le nombre z est dit imaginaire pur.

PROPRIETES ⚠

P1 : Un complexe est réel ssi sa partie imaginaire est nulle.

$$z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z)=0$$

P2 : Un complexe est dit imaginaire pur si et seulement si, sa partie réelle est nulle et sa partie imaginaire différente de zéro.

$$z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z)=0 \\ \text{et} \\ Im(z)\neq 0 \end{cases}$$

P3 : Un nombre complexe est nul si et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

$$z=0 \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z)=0 \\ \text{et} \\ Im(z)=0 \end{cases}$$

P4 : Deux complexes sont égaux si et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Soit z et z' deux nombres complexes

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ \text{et} \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$$

3-/ CONJUGUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit $z = a+ib$, $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, un nombre complexe. On appelle conjugué de z, le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que :

$$\bar{z} = a - ib.$$

PROPRIETES

P_1 : $\bar{\bar{z}} = z$

P_2 : $\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z'}$

P_3 : $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$

P_4 : si $z' \neq 0$ alors $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

P_5 : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$

P_6 : z imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$.

Remarque :

Soit $z = a+ib$, $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe ; $\bar{z} = a - ib$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

4-/ REGLES DE CALCUL DANS $\mathbb{C}$

Soit $z = a+ib$, $z' = a'+ib'$ deux complexes où a, a', b et b' sont des réels

$z+z' = (a+a') + i(b+b')$

$z-z' = (a-a') + i(b-b')$

Soit z'' un troisième nombre complexe :

$z(z'+z'') = zz' + zz''$;

$z(z'-z'') = zz' - zz''$.

$(z+z')^2 = z^2 + z'^2 + 2zz'$

$(z-z')^2 = z^2 + z'^2 - 2zz'$

$\frac{1}{z^p} = \left(\frac{1}{z}\right)^p$; $z^0 = 1$; $(zz')^p = z^p . z'^p$

$z^p . z^q = z^{p+q}$; $(z^p)^q = z^{p.q}$

En particulier :

$(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$

$(a-ib)^2 = a^2 - b^2 - 2iab$.

Remarque importante ⚠

Soit z un nombre complexe on a :

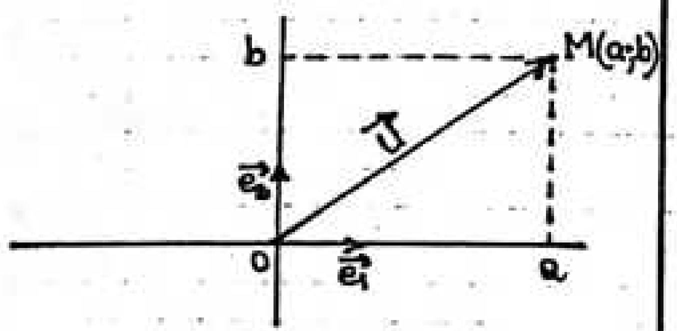
$z + \bar{z} = 2Re(z)$; $z - \bar{z} = 2i\, Im(z)$

5-/ REPRESENTATION GEOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Ramenons le plan à un repère orthonormal $(0, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

A tout complexe $z = a+ib$, $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ on associe un point $M(a;b)$ et un seul appelé point image de z ; on associe un vecteur unique $\vec{U}(a;b)$.

z est appelé affixe du point M ou du vecteur $\vec{U}$.



Remarques

1- Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives Z_A et Z_B.
Le vecteur $\vec{AB}$ a pour affixe $Z_B - Z_A$

$$Z_{\vec{AB}} = Z_B - Z_A.$$

2- Soit M un point du plan d'affixe z. Soit M_1, M_2 et M_3 les images de M par S_{ox}, S_O et S_{oy} respectivement. Les points M_1, M_2, M_3 ont respectivement pour affixes:
$\bar{z}$, $-z$ et $-\bar{z}$.

6-/ MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

a-/ Définition

Pour tout nombre complexe z, écrit sous la forme $z = a+ib$ où a et b sont des réels, on a:

$$z\bar{z} = a^2+b^2$$

Le produit $z\bar{z}$ est donc un réel positif.
On appelle module d'un nombre complexe z, le nombre réel positif, noté $|z|$ et défini par:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$ ou encore:

$$|z| = \sqrt{[Re(z)]^2+[Im(z)]^2}$$

b-/ Interprétation géométrique du module

Soit M le point image du complexe $z = a+ib$, $(a;b)\in\mathbb{R}^2$, on a:
$M(a;b)$ et $OM = \sqrt{a^2+b^2}$
On en déduit : $|z| = OM$.
Le module d'un nombre complexe est la distance entre l'origine du repère et le point image du complexe.

Remarques : ⚠

1- Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives Z_A et Z_B on a:

$$AB = |Z_B - Z_A| = BA.$$

2- Soit A un point du plan d'affixe Z_A et r un réel strictement positif.
L'ensemble $E = \{M\in\mathcal{P} / |z - Z_A| = r\}$ est le cercle de centre A et de rayon r, z étant l'affixe du point M.

c-/ Propriétés du module.

P_1: Pour tout $z\in\mathbb{C}$,
- $|\bar{z}| = |-\bar{z}| = |-z| = |z|$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $Re(z) \leq |z|$ et $Im(z) \leq |z|$

P_2 : $\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

- $|zz'| = |z||z'|$
- $|z^n| = |z|^n$
- si $z' \neq 0$ alors $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

P_3 : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall z' \in \mathbb{C}$

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{z'})$$

P_4 : Inégalité triangulaire

$\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall z' \in \mathbb{C}'$ on a :

$$||z| - |z'|| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|$$

Remarque : ⚠

Soit A et B deux points du plan, d'affixes respectives z_A et z_B. L'ensemble des points M du plan tel que $\left|\frac{z - z_A}{z - z_B}\right| = 1$ est la médiatrice de [AB]

L'ensemble des points M du plan tel que $\left|\frac{z - z_A}{z - z_B}\right| = k$ est la ligne de niveau k de l'application :

$$M \longmapsto \frac{AM}{BM}. \text{ (Voir 1ère)}$$

Rappelons que l'affixe du point G barycentre de $\{(A, \alpha)\ (B, \beta)\ (C; \gamma)\}$ avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ où A, B et C sont les points du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C est $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$.

α, β et γ étant des réels.

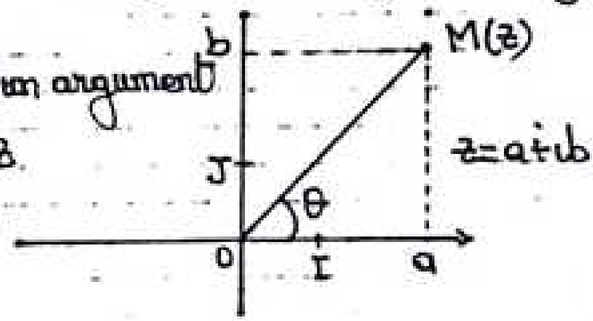
7/ ARGUMENT D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

a-/ Définition

Soit z un nombre complexe non nul, M le point image de z dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

On appelle argument du nombre complexe z toute mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{OI}, \vec{OM}})$. On le note arg(z)

θ est un argument de z.



- On appelle argument principal de z la mesure principal de l'angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$. Il est noté ARG(z)

b-/ Détermination algébrique de l'argument d'un complexe non nul

Soit $z = a + ib$ $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ où $z \neq 0$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Soit $\theta = \mathrm{Arg}\, z$ on a :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

Théorème :

Soit z et z' deux complexes non nuls

on a :

$$z = z' \text{ ssi } \begin{cases} |z| = |z'| \\ \text{et} \\ \exists k \in \mathbb{Z} / \arg(z) = \arg z' + 2k\pi \end{cases}$$

c-/ Propriétés de l'argument.

Soit z et z' deux complexes non nuls

P_1 : $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

P_2 : $\arg(-z) = \pi + \arg(z)$

P_3 : $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$

P_4 : $\arg(z^n) = n \arg(z)$

P_5 : $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$

P_6 : $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$.

P_7 : Soit a un nombre réel non nul

$$\arg(a) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Arg}(a) = \begin{cases} 0 \text{ si } a > 0 \\ \pi \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

$$\arg(ai) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Arg}(ai) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \text{ si } a < 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ si } a > 0 \end{cases}$$

P_8 : Soit A et B deux points distincts du plan d'affixes respectives z_A et z_B

on a : $\arg(z_B - z_A) = (\widehat{\vec{OI}, \vec{AB}})\ (2\pi)$

P_9 : Soit M un point distinct de A et B, d'affixe z on démontre que

$$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = (\widehat{\vec{BM}, \vec{AM}})\ (2\pi)$$

Démontrons P_9.

$$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \arg(z - z_A) - \arg(z - z_B)$$
$$= (\vec{OI}, \vec{AM}) - (\vec{OI}, \vec{BM})$$
$$= (\vec{BM}, \vec{OI}) + (\vec{OI}, \vec{AM})$$
$$= (\widehat{\vec{BM}, \vec{AM}})\ (2\pi)$$

T.D. N°1

Déterminer le module et un argument de chacun des complexes suivants : $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_3 = \sqrt{3} + i$

Resolution

$|z_1| = \sqrt{2}$ $\quad |z_2| = 2$ $\quad |z_3| = 2$

Posons $\theta_1 = \text{Arg } z_1$ $\quad \theta_2 = \text{Arg } z_2$

$\theta_3 = \text{Arg } z_3$ on a :

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} \cos\theta_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_3 = \frac{\pi}{6}$$

On a donc :

$|z_1| = \sqrt{2}$	$\text{Arg } z_1 = \frac{\pi}{4}$
$|z_2| = 2$	$\text{Arg } z_2 = \frac{\pi}{3}$
$|z_3| = 2$	$\text{Arg } z_3 = \frac{\pi}{6}$.

TD N°2

Utiliser les résultats de l'exercice précédent pour remplir les tableaux ci-dessous

Tableau 1

z	$1+i$	$1-i$	$-1+i$	$-1-i$
$\text{Arg}\, z$	$\frac{\pi}{4}$			

Tableau 2

z	$1+i\sqrt{3}$	$1-i\sqrt{3}$	$-1+i\sqrt{3}$	$-1-i\sqrt{3}$
$\text{Arg}\, z$	$\frac{\pi}{3}$			

Tableau 3.

z	$\sqrt{3}+i$	$\sqrt{3}-i$	$-\sqrt{3}+i$	$-\sqrt{3}-i$
$\text{Arg}\, z$	$\frac{\pi}{6}$			

Résolution

$1-i = \overline{1+i}$ $\quad \text{Arg}(1-i) = -\text{Arg}(1+i)$

car $\arg(\bar{z}) = -\arg z$. $\quad = -\frac{\pi}{4}$

$-1+i = -(1-i)$. or $\arg(-z) = \pi + \arg z$

$\text{Arg}(-1+i) = \pi + \text{Arg}(1-i)$

$= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$-1-i = -(1+i)$

$\text{Arg}(-1-i) = \pi + \text{Arg}(1+i)$

$= \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Remplissons alors le tableau 1

z	$1+i$	$1-i$	$-1+i$	$-1-i$
$\text{Arg}\, z$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$

En procédant comme précédemment on pourra remplir les tableaux 2 et 3.

z	$1+i\sqrt{3}$	$1-i\sqrt{3}$	$-1+i\sqrt{3}$	$-1-i\sqrt{3}$
$\text{Arg}\, z$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$2\pi/3$	$4\pi/3$

z	$\sqrt{3}+i$	$\sqrt{3}-i$	$-\sqrt{3}+i$	$-\sqrt{3}-i$
$\text{Arg}\, z$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$

TRAVAUX DIRIGES N°3

Soit A et B deux points distincts du plan d'affixes respectives z_A et z_B.

Soit M le point d'affixe z et f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par:

$$f(z) = \frac{z - z_A}{z - z_B}.$$

1/ Interpréter géométriquement $|f(z)|$ et $\arg(f(z))$

2/ Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $|f(z)| = 1$

3/ Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $|f(z)| = k$, $k \in \mathbb{R}$.

4/ Déterminer les ensembles:

a/ $E_1 = \{M \in \mathcal{P} / f(z) \in \mathbb{R}\}$

b/ $E_2 = \{M \in \mathcal{P} / f(z) \in \mathbb{R}^+\}$

c/ $E_3 = \{M \in \mathcal{P} / f(z) \in \mathbb{R}_-\}$

5/ Déterminer les ensembles:

a/ $E_4 = \{M \in \mathcal{P} / f(z) \in i\mathbb{R}\}$

b/ $E_5 = \{M \in \mathcal{P} / f(z) \in i\mathbb{R}_+\}$

c/ $E_6 = \{M \in \mathcal{P} / f(z) \in i\mathbb{R}_-\}$

d/ $E_7 = \{M \in \mathcal{P} / \text{Arg}(f(z)) = \frac{\pi}{3}\}$

Résolution

$f(z) = \frac{z - z_A}{z - z_B}$.

1·/ Interprétons géométriquement $|f(z)|$ et $\arg(f(z))$

Ramenons le plan à un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

$$|f(z)| = \left|\frac{z - z_A}{z - z_B}\right| = \frac{|z - z_A|}{|z - z_B|} = \frac{AM}{BM}$$

$$\begin{aligned}\arg(f(z)) &= \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right)\\ &= \arg(z - z_A) - \arg(z - z_B)\\ &= (\widehat{\vec{e_1}, \vec{AM}})(2\pi) - (\widehat{\vec{e_1}, \vec{BM}})(2\pi)\\ &= (\widehat{\vec{BM}, \vec{e_1}})2\pi + (\widehat{\vec{e_1}, \vec{AM}})2\pi\\ &= (\widehat{\vec{BM}, \vec{AM}})(2\pi)\end{aligned}$$

$\boxed{|f(z)| = \frac{AM}{BM}}$ $\boxed{\arg(f(z)) = (\widehat{\vec{BM}, \vec{AM}})(2\pi)}$

2·/ Déterminons l'ensemble (Δ) des points M tels que $|f(z)| = 1$

$|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \frac{AM}{BM} = 1 \Leftrightarrow AM = BM$.

$\boxed{(\Delta) \text{ est donc la médiatrice du segment } [AB]}$

3·/ Déterminons l'ensemble (L_K) des points M tels que $|f(z)| = k$, $k \in \mathbb{R}$

$|f(z)| = k \Leftrightarrow \frac{AM}{BM} = k \ (1)$

1er cas $k < 0$

(1) est impossible car $\frac{AM}{BM} \geq 0$ d'où $L_K = \emptyset$

2e cas $k = 0$

(1) $\Rightarrow AM = 0 \Leftrightarrow$ M confondu à A; $L_0 = \{A\}$

3e cas $k = 1$

(1) $\Leftrightarrow AM = BM$.

(L_1) est la médiatrice du segment $[AB]$

4e cas $k > 0$ et $k \neq 1$

$|f(z)| = k \Leftrightarrow \frac{AM}{BM} = k \Leftrightarrow AM = kBM$

$\Leftrightarrow AM^2 - k^2BM^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\vec{AM} - k\vec{BM})(\vec{AM} + k\vec{BM}) = 0 \ (2)$

Soit I bar$\{(A,1)(B,-k)\}$ et J bar$\{(A,1)(B,k)\}$

on a: $\vec{AI} - k\vec{BI} = \vec{0}$ et $\vec{AJ} + k\vec{BJ} = \vec{0}$

$(2) \Leftrightarrow (\vec{AI} + \vec{IM} - k\vec{BI} - k\vec{IM})(\vec{AJ} + k\vec{JM} + k\vec{BJ} + k\vec{JM}) = 0$

$\Leftrightarrow (1-k)\vec{IM} \cdot (1+k)\vec{JM} = 0$

$\Leftrightarrow (1-k^2)\vec{IM} \cdot \vec{JM} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{IM} \cdot \vec{JM} = 0$ car $k > 0$ et $k \neq 1$

(L_K) est le cercle de diamètre $[IJ]$

avec $z_I = \frac{z_A - kz_B}{1 - k}$ $z_J = \frac{z_A + kz_B}{1 + k}$.

4·/ a·/ Déterminons l'ensemble :

$E_1 = \{M \in \mathcal{P} / f(z) \in \mathbb{R}\}$

$f(z) \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} f(z) = 0 & (a) \\ \text{ou} \\ f(z) \in \mathbb{R}^* & (b) \end{cases}$

(a) $\Rightarrow z = z_A \Rightarrow$ M confondu à A

(b) $\Leftrightarrow \arg(f(z)) = k\pi \Leftrightarrow (\widehat{\vec{BM}, \vec{AM}}) = k\pi$

$\Rightarrow \vec{BM}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires $\Rightarrow$ A, B et M sont alignés

(b) $\Rightarrow$ M appartient à (AB) privée de A et B

En définitive :

$\boxed{(E_1) \text{ est la droite } (AB) \text{ privée de } B}$

b-/ <u>Déterminons l'ensemble</u>

$E_2 = \{ M \in \mathcal{P} / f(z) \in \mathbb{R}^+ \}$

$f(z) \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \begin{cases} f(z) = 0 \ (a) \\ \text{ou} \\ f(z) \in \mathbb{R}^*_+ \ (b) \end{cases}$

(a) $\Leftrightarrow$ M confondu à A

(b) $\Rightarrow \operatorname{Arg}(f(z)) = 0 \Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires de m̂ sens

(b) $\Rightarrow$ M appartient à (AB) privée de [AB]

En définitive :

$\boxed{(E_2) \text{ est la droite (AB) privée de }]AB]}$

c-/ <u>Déterminons l'ensemble</u>

$E_3 = \{ M \in \mathcal{P} / f(z) \in \mathbb{R}_- \}$

$f(z) \in \mathbb{R}_- \Rightarrow \begin{cases} f(z) = 0 \ (a) \\ \text{ou} \\ f(z) \in \mathbb{R}^*_- \ (b) \end{cases}$

(a) $\Leftrightarrow$ M confondu à A

(b) $\Leftrightarrow \operatorname{Arg}(f(z)) = \pi \Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}}) = \pi$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires de sens opposés $\Rightarrow$ M appartient à]AB[

En définitive :

$\boxed{(E_3) = [AB[}$

5-/ a-/ <u>Déterminons l'ensemble</u>

$E_4 = \{ M \in \mathcal{P} / f(z) \in i\mathbb{R} \}$

$f(z) \in i\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} f(z) = 0 \ (a) \\ \text{ou} \\ f(z) \in i\mathbb{R}^* \ (b) \end{cases}$

(a) $\Leftrightarrow$ M confondu à A

(b) $\Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

(b) $\Rightarrow$ M appartient au cercle de diamètre [AB] privé des points A et B

En définitive :

$\boxed{(E_4) \text{ est le cercle de diamètre [AB] privé du point B.}}$

Pour les questions b-/ et c-/ on montre que (E_5) est l'un des deux demi-cercles de diamètre [AB] privé de B et que (E_6) est l'autre demi-cercle.

d-/ E_7 est l'arc capable d'angle $\frac{\pi}{3}$, d'extrémités A et B.

<u>Remarques</u> ⚠

1- Pour montrer que trois points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C sont alignés il suffit de montrer que

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$$

2- Pour montrer que le triangle ABC est rectangle en B il suffit de montrer que $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur

3- Pour montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B il suffit de montrer que

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = -i \text{ ou } \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = i$$

8/ FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

a-/ Définition

Soit z un nombre complexe de module r et d'argument α.

On appelle forme trigonométrique de z l'écriture : $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

Remarques :

- l'écriture $z = [r;\alpha]$ est aussi appelée forme trigonométrique de z
- l'écriture $z = re^{i\alpha}$ est appelée forme exponentielle de z.

b-/ Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que : $z = re^{i\alpha}$ et $z' = r'e^{i\alpha'}$, n un entier relatif. On a :

P_1 : $zz' = rr'e^{i(\alpha+\alpha')}$

P_2 : $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\alpha}$

P_3 : $z^n = r^n e^{in\alpha}$

P_4 : $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\alpha-\alpha')}$

c-/ Formules de Moivre et d'Euler

On sait que $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = re^{i\alpha}$

$$z^n = r^n(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = r^n e^{in\alpha}$$

$$= r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

On en déduit la formule suivante : $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$, n étant un entier relatif. On a donc :

$$\boxed{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.}$$

$$\boxed{(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha - i\sin n\alpha.}$$

De : $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ et $e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$

il résulte deux formules :

$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$

dites formules d'Euler.

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} \quad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}}$$

D'une façon générale, $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\boxed{\cos n\alpha = \frac{e^{in\alpha}+e^{-in\alpha}}{2} \quad \sin n\alpha = \frac{e^{in\alpha}-e^{-in\alpha}}{2i}}$$

TRAVAUX DIRIGES N°4

1-/ Calculer $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1946}$

2-/ Calculer $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{1991}$

3-/ Calculer $(1+i)^{1999}$

Résolution

1-/ $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1946} = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{1946}$$

$$= \cos\frac{1946\pi}{3} + i\sin\frac{1946\pi}{3}$$

$$= \cos\left(648\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(648\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1946} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

2/ $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{1991} = \left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{1991}$$

$$= \cos\frac{1991\pi}{6} + i\sin\frac{1991\pi}{6}$$

$$= \cos\left(331\pi+\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(331\pi+\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\boxed{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{1991} = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$$

3/ $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$(1+i)^{1999} = (\sqrt{2})^{1999}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{1999}$$

$$= (\sqrt{2})^{1999}\left(\cos\frac{1999\pi}{4}+i\sin\frac{1999\pi}{4}\right)$$

$$= (\sqrt{2})^{1999}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2^{999}(1-i)$$

$$\boxed{(1+i)^{1999} = 2^{999}(1-i)}$$

9/ LINEARISATION

C'est l'opération qui consiste à exprimer $\cos^p x \sin^q x$ comme somme des termes de la forme $a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

On utilise à cet effet les formules d'Euler et la formule du binôme de Newton :

$$\cos^p x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^p \text{ et } \sin^q x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^q$$

TRAVAUX DIRIGES N°5

Linéariser $\cos^6 x$ et $\sin^5 x$

Resolution

Utilisons le triangle de PASCAL

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

$$\cos^6 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^6$$

$$= \frac{1}{2^6}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^6$$

$$= \frac{1}{2^6}\left(e^{6ix}+6e^{4ix}+15e^{2ix}+20+15e^{-2ix}+6e^{-4ix}+e^{-6ix}\right)$$

$$= \frac{1}{2^5}\left(\frac{e^{6ix}+e^{-6ix}}{2}+6\,\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2}+10+15\,\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{32}\left(\cos 6x+6\cos 4x+10+15\cos 2x\right)$$

$$\boxed{\cos^6 x = \frac{1}{32}\cos 6x+\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{15}{32}\cos 2x+\frac{5}{16}}$$

On procède comme précédemment pour montrer que :

$$\sin^5 x = \frac{1}{16}\sin 5x-\frac{5}{16}\sin 3x+\frac{5}{8}\sin x$$

Pour s'entraîner :

Linéariser $\cos^7 x$ et $\sin^6 x$.

On montrera que:

$$\cos^7 x = \frac{1}{64}\left(\cos 7x+7\cos 5x+21\cos 3x+35\cos x\right)$$

$$\sin^6 x = \frac{-1}{32}\left(\cos 6x-6\cos 4x+15\cos 2x-10\right)$$

10-/ RACINES N-ièmes D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

a-/ Racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique

Soit $z = a+ib$ un nombre complexe $(a;b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminons les complexes $z_0 = x+iy$, $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z_0^2 = z$.

$z_0^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$|z_0^2| = |z_0|^2 = x^2 + y^2$

$$z_0^2 = z_1 \Rightarrow \begin{cases} Re(z_0^2) = Re(z_1) \\ Im(z_0^2) = Im(z_1) \\ |z_0^2| = |z_1| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ x^2 + y^2 = |z| & (2) \\ 2xy = b & (3) \end{cases}$$

les relations (1) et (2) donnent :

(4) $x^2 = \frac{1}{2}(a + |z_1|)$ et $y^2 = \frac{1}{2}(-a + |z_1|)$

- si $b=0$ et $a>0$ les deux racines carrées sont : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$
- si $b=0$ et $a<0$ les deux racines carrées sont : $-i\sqrt{-a}$ et $i\sqrt{-a}$
- si $b \neq 0$, x et y sont déterminés par les relations (4) : ils ont même signe si $b>0$ (d'après 3) et sont de signes contraires si $b<0$

TRAVAUX DIRIGES N°6

1-/ Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-7-24i$

2-/ En déduire les solutions de l'équation (E) : $z^2 + (1+2i)z + 1+7i = 0$

Résolution

1-/ Déterminons les racines carrées du nombre complexe $-7-24i$

Posons $z_0 = x+iy$ $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$z_0^2 = -7-24i \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ 2xy = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 16 \\ xy = -12 < 0 \end{cases}$$

On a : $\begin{cases} x = 3 \text{ et } y = -4 \\ \text{ou} \\ x = -3 \text{ et } y = 4 \end{cases}$

Les racines carrées de $-7-24i$ sont : $3-4i$ et $-3+4i$

2-/ Résolvons l'équation :

(E) : $z^2 + (1+2i)z + 1+7i = 0$

$$\Delta = (1+2i)^2 - 4(1+7i)$$

$$\Delta = -7-24i = (3-4i)^2$$

$$z_1 = \frac{-1-2i-3+4i}{2} = -2+i$$

$$z_2 = \frac{-1-2i+3-4i}{2} = 1-3i$$

$$\boxed{S = \{-2+i \,;\, 1-3i\}}$$

b-/ Racines cubiques de l'unité

Soit z un nombre complexe tel que $z^3=1$. Posons $z=re^{i\theta}$ $r\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

$$z^3=1 \iff r^3e^{i3\theta}=1$$

$$\iff \begin{cases} r^3=1 \\ 3\theta=2k\pi \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{2}{3}k\pi \end{cases}$$

Pour $k=0$, $\theta=0$ et $z_0=1$

Pour $k=1$, $\theta=\frac{2\pi}{3}$ et $z_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

Pour $k=2$, $\theta=\frac{4\pi}{3}$ et $z_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$

$z_0=1$, $z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Le nombre complexe z_1 est noté j

Remarquons que $z_2=j^2=\bar{j}$

Les racines cubiques de l'unité sont : 1, j et j^2

Propriétés :

* $1+j+j^2=0$; * $\frac{1}{j}=\bar{j}=j^2$

c-/ Racines $n^{ièmes}$ de l'unité

Déterminons à présent les nombres complexes z tels que $z^n=1$, $n>3$.

Pour cela posons $z=re^{i\theta}$, $r\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

$$z^n=1 \iff r^ne^{in\theta}=1 \iff \begin{cases} r^n=1 \\ n\theta=2k\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{2k\pi}{n} \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Il y a au total n racines $n^{ièmes}$ distinctes : $z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$

$k\in\{0;1;2;\dots;n-1\}$

Propriétés

Pour $k=1$, $z_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$

- Les autres racines $n^{ièmes}$ de l'unité sont $z_k=z_1^k$.
- La somme des n racines $n^{ièmes}$ de l'unité est égale à 0.

$\boxed{\text{TRAVAUX DIRIGES N}^\circ 7}$

Voir EXERCICE 22

d-/ Racines $n^{ièmes}$ d'un complexe non nul.

Soit $z_0=r_0(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)$ un nombre complexe non nul écrit sous forme trigonométrique.

Déterminons tous les nombres complexes z tels que $z^n=z_0$ où n est un entier ≥ 2.

Posons $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ avec $r\in\mathbb{R}_+^*$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$z^n=z_0 \iff r^ne^{in\alpha}=r_0e^{i\theta_0}$$

$$\iff \begin{cases} r^n=r_0 \\ n\alpha=\theta_0+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r=\sqrt[n]{r_0} \\ \alpha=\frac{\theta_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}, \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

d'où

$$z = \sqrt[n]{r_0}\left[\cos\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

Il y a au total n racines n^{iemes} distinctes :

$$z_k = \sqrt[n]{r_0}\, e^{i\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)},\ k\in\{0;1;\dots;n-1\}$$

Remarques:

$$z_k = \sqrt[n]{r_0}\, e^{i\frac{\theta_0}{n}} \cdot e^{\frac{i2k\pi}{n}}$$

1- Pour obtenir les racines n^{iemes} d'un complexe $z = r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$ il suffit de multiplier les racines n^{iemes} de l'unité par le complexe

$$\sqrt[n]{r_0}\, e^{i\frac{\theta_0}{n}}$$

2- La somme des n racines n^{iemes} d'un complexe non nul est égale à 0

II-/ EQUATIONS DE LA FORME

(1) $a\cos x + b\sin x = c$ où a, b et c sont des réels donnés

1^{ere} méthode:

Posons $z = \cos x + i\sin x$, on a:

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \sin x = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

On est alors amené à résoudre l'équation :

$$a\left(z+\frac{1}{z}\right) + \frac{b}{i}\left(z-\frac{1}{z}\right) = 2c$$

avec $|z| = 1$

Ce qui conduit à l'équation du second degré de la forme: $(a-ib)z^2 - 2cz + a + ib = 0$ (2)

Soit z_1 et z_2 les solutions de (2)

* si $|z_1| \neq 1$ ou $|z_2| \neq 1$ alors (1) n'a pas de solution
* si $|z_1| = 1$ alors, on est ramené à résoudre

$$\begin{cases}\cos x + i\sin x = z_1 \\ \text{ou} \\ \cos x + i\sin x = z_2\end{cases} \iff \begin{cases} x = \arg z_1 \\ \text{ou} \\ x = \arg z_2\end{cases}$$

Deuxième méthode: (Factorisation)

Posons $z_0 = a + ib$ et ecrivons z_0 sous sa forme trigonométrique :

$z_0 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

L'équation (1) devient:

$$r\cos(x-\theta) = c \quad (3)$$

Nous savons résoudre (3) depuis la classe de 1^{ere}

TRAVAUX DIRIGES N°8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\cos 2x + \sin 2x = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (1)$$

Résolution

Première méthode.

Posons $z = \cos 2x + i\sin 2x$

$$\frac{1}{z} = \cos 2x - i\sin 2x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \sin 2x = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

$$(1) \iff \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Leftrightarrow (1-i)z^2-\sqrt{6}\,z+1+i=0$

$\Delta = 6-4(1-i)(1+i) = 6-8 = -2$

$z_1 = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}$ $\quad z_2 = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2(1-i)}$

$|z_1| = \dfrac{\sqrt{8}}{2\sqrt{2}} = 1$ et $|z_2| = \dfrac{\sqrt{8}}{2\sqrt{2}} = 1$

$\arg z_1 = \arg(\sqrt{6}-i\sqrt{2}) - \arg(1-i)$

$= -\dfrac{\pi}{6} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi$

$\arg z_1 = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\arg z_2 = \arg(\sqrt{6}+i\sqrt{2}) - \arg(1-i)$

$= \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

$= \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi$

$\arg z_2 = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$(1) \Rightarrow \begin{cases} 2x = \arg z_1 \\ \text{ou} \\ 2x = \arg z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{24} + k\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{5\pi}{24} + k\pi \end{cases}$

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{24} + k\pi\ ;\ \frac{5\pi}{24} + k\pi\right\},\ k\in\mathbb{Z}}$$

__Deuxième méthode.__

Posons $z_0 = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x-\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{24} + k\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{5\pi}{24} + k\pi \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{24} + k\pi,\ \frac{5\pi}{24} + k\pi\right\},\ k\in\mathbb{Z}}$$

FIN DU COURS

__E-mail__ :

koehyppolite@hotmail.com.

ENONCES DES EXERCICES

EXERCICE 1

Calculer et écrire sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants:

a) $z_1 = 5-12i$ b) $z_2 = -8i$ c) $z_3 = 7+24i$

EXERCICE 2

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

a) $iz^2 + z - 3 + i = 0$

b) $(-2+i)z^2 + (4-5i)z + 3 - i = 0$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation:

$z^2 - 2iz - 2 = 0$

b) On désigne par z_1 et z_2 les solutions de cette équation, avec $Re(z_1) > Re(z_2)$

Calculer: $2z_1 + 3z_2$; $(z_1 - z_2)^2$; z_1^8; z_2^{10}.

EXERCICE 3

Soit P le polynôme défini par:

$P(z) = z^3 - (11+2i)z^2 + 2(17+7i)z - 42$.

1) Démontrer qu'il existe un nombre réel α solution de l'équation $P(z) = 0$

2) Déterminer le polynôme Q tel que:

$P(z) = (z-\alpha)Q(z)$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

EXERCICE 4

Soit P le polynôme défini par:

$P(z) = z^4 + (5-2i)z^3 + (8-10i)z^2 + (6-16i)z - 12i$

1) Vérifier que: $P(2i) = P(-3) = 0$

2) Déterminer un polynôme Q du second dégré tel que pour tout nombre complexe z on a: $P(z) = [z^2 + (3-2i)z - 6i]\,Q(z)$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

EXERCICE 5

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations:

$z^2 - 4z + 5 + i(z+1) = 0$ (1)

$(z^2 - 4z + 5)^2 + (z+1)^2 = 0$ (2)

2) En déduire qu'il existe quatre nombres réels a, b, c et d que l'on précisera tels que pour tout nombre réel x on a:

$(x^2 - 4x + 5)^2 + (x+1)^2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$

EXERCICE 6

1) Etant donné une équation du quatrième dégré à coefficients réels, montrer que si elle admet z_0 pour solution, elle admet aussi pour solution le conjugué de z_0.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation:

$2z^4 + 3z^2 + 3\sqrt{3}z + 9 = 0$ sachant qu'elle admet une solution de la forme $a(1+i)$ $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer le module et un argument de chacune des solutions

EXERCICE 7

On considère l'équation (E):

$z \in \mathbb{C}$, $z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i = 0$

1) a) Montrer que (E) admet une unique solution imaginaire pure z_0.

b) Résoudre (E).

c) Ecrire les solutions de (E) sous forme trigonométrique.

2) On désigne par M_0, M_1 et M_2 les points images des solutions de (E) (z_1 étant la solution dont la partie imaginaire est négative)

a) Représenter dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ M_0, M_1 et M_2.

Montrer que ces points appartiennent à un même cercle.

b) Calculer $z_2 - z_1$ et $z_2 - z_0$.

c) Démontrer que le quadrilatère $OM_1M_2M_0$ est un losange.

EXERCICE 8

1) Exprimer $1 - \cos 2\theta$ en fonction de $\sin\theta$, puis $\sin 2\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et $\cos\theta$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$2z^2(1-\cos 2\theta) - 2z\sin 2\theta + 1 = 0$ où z est l'inconnue et θ un réel non nul de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

3) Déterminer le module et l'argument de chacune des solutions z_1 et z_2.

4) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes z_1 et z_2. Déterminer l'ensemble des nombres réels θ tels que le triangle OM_1M_2 est isocèle et rectangle en O

EXERCICE 9

On considère la fonction polynôme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par:

$P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8$.

1) Comparer $P(\bar{z})$ et $\overline{P(z)}$, $\bar{z}$ étant le conjugué de z et $\overline{P(z)}$ le conjugué de $P(z)$

Calculer $P(i)$

En déduire une, puis deux solutions de l'équation : (E) $P(z) = 0$

2) Mettre $P(z)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Calculer la somme et le produit des solutions de l'équation (E).

EXERCICE 10

1) Soit l'équation (E_1) : $x^3 - 6x - 6 = 0$

a) Vérifier graphiquement que cette

équation admet une unique solution réelle, dont on précisera un encadrement à 10^{-1} près.

b) Démontrer que si u et v sont deux nombres tels que $u^3+v^3=6$ et $uv=2$ alors $u+v$ est solution de (E_1).

c) Démontrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation : $X^2-6X+8=0$

Résoudre cette équation et en déduire la solution réelle de l'équation (E_1)

2). Soit l'équation (E_2) : $x^3-15x-4=0$

a) Vérifier graphiquement que cette équation admet trois solutions réelles.

b) Démontrer que si u et v sont deux nombres tels que $u^3+v^3=4$ et $uv=5$, alors $u+v$ est solution de (E_2)

c) Démontrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $X^2-4X+125=0$

Cette équation a-t-elle des solutions dans $\mathbb{R}$? La résoudre dans $\mathbb{C}$

d) Calculer $(2+i)^3$ et $(2-i)^3$. En déduire les solutions de l'équation (E_2)

EXERCICE 11

Soit l'équation (E) :

$z^4+2z^3+2z^2-2z+1=0$ $(z\in\mathbb{C})$

1) Démontrer que si z_0 est solution de (E) alors $\overline{z_0}$ est solution de (E)

2) a) Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$(E) \Leftrightarrow z^2\left[\left(z-\frac{1}{z}\right)^2+a\left(z-\frac{1}{z}\right)+b\right]=0$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2+aZ+b=0$, puis l'équation (E).

3) Démontrer que les images des quatres solutions de (E) appartiennent à un même cercle $(\mathscr{C})$ dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 12

Dans chacun des cas suivants :

- déterminer le module et un argument de z
- en déduire la forme algébrique de z.

a) $z=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

b) $z=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $z=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

d) $z=(1+i)^2$ e) $z=(1-i)^4$

f) $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ g) $z=\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-1+i}\right)^3$

EXERCICE 13

Soit $z_1=\frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$ et $z_2=\frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$

a) Ecrire sous forme exponentielle z_1 et z_2

b) En déduire la forme algébrique des nombres complexes :

$z_1 . z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $(z_1)^3$ et $\frac{z_2^6}{z_1^3}$

EXERCICE 14

Soit $\theta \in]-\pi ; \pi[$, mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$z_1 = 1 + \cos\theta - i\sin\theta$; $z_2 = \frac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}$

$z_3 = \frac{1 - \cos\theta - i\sin\theta}{1 + \cos\theta + i\sin\theta}$; $z_4 = \frac{1}{1 + i\tan\theta}$.

$z_5 = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\sin\theta - i\cos\theta}$

EXERCICE 15

Soient les nombres complexes

$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$

1) Mettre sous forme trigonométrique z_1, z_2 et $Z = \frac{z_1}{z_2}$

2) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

3) On considère l'équation d'inconnue réelle x :

$(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin x = 2$

a) Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.

b) Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE 16

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes ci-dessous :

a) $(1 + i\sqrt{3})^{10}$ b) $(1 - i)^{12}(\sqrt{3} - 3i)$

c) $\left(\frac{3 - 2i}{-2 - 3i}\right)^{12}$ d) $\left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 + i}\right)^{20}$

EXERCICE 17

On pose $a = \sqrt{2}(1 + i)$ $b = \sqrt{3} + i$

$c = a^2 b$.

1) Déterminer le module et un argument pour chacun des nombres complexes a et b.

En déduire le module et un argument de c.

2) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

EXERCICE 18

On donne le nombre complexe

$u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

1) Calculer u^2 et u^4. Calculer le module et un argument de u^4.

En déduire le module et un argument de u.

2) On considère un plan muni d'un repère orthonormé. A tout point M de coordonnées $(x ; y)$ dans P on associe

son affixe $z = x+iy$.
Déterminer l'ensemble des points M de P pour lesquels le module du produit uz est égal à 8.

EXERCICE 19

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + 2i\bar{z} - 6 = 0$$

2) Calculer $A = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$

3) Comment faut-il choisir l'entier relatif n pour que $(\sqrt{3}+i)^n$ soit :

a) réel ? b) imaginaire pur ?

EXERCICE 20

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 2z + 4 = 0$$

On désigne par z_1 la solution de partie imaginaire positive et par z_2 l'autre solution.

b) Donner un argument et le module de chacune des solutions z_1 et z_2, puis écrire ces deux nombres sous forme trigonométrique.

2) a) Placer dans le plan complexe les points A, B, A' et B' d'affixes respectives : $1+i\sqrt{3}$, $1-i\sqrt{3}$, $-2+2i\sqrt{3}$ et $-2-2i\sqrt{3}$.

b) Déterminer la nature du quadrilatère AA'B'B.

c) Montrer que le triangle AA'B' est isocèle et qu'il en est de même du triangle BB'A

EXERCICE 21

1) On pose $z = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$.

a) Calculer z^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculer les racines n-ièmes de z

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\bar{z} = z^7$

3) Résoudre le système d'inconnues complexes z et Z : $\begin{cases} z^2 = Z \\ Z^2 = z. \end{cases}$

EXERCICE 22

Soit l'équation (E) : $z^5 = 1$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) et représenter les images des solutions

2) Démontrer que la somme des solutions de (E) est nulle et en déduire que : $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$

3) Démontrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation : $4x^2 + 2x - 1 = 0$

En déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$

4) Soit l'équation

(E') : $(z-1)^5 = (z+1)^5$ $(z \in \mathbb{C})$

a) Démontrer que si z_0 est solution de (E') alors $\left|\frac{z_0-1}{z_0+1}\right| = 1$

En déduire que les solutions de (E')

sont imaginaires purs.

b). Résoudre (E')

EXERCICE 23

Soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

On pose : $a = z + z^2 + z^4$ et $b = z^3 + z^5 + z^6$

1) Démontrer que a et b sont deux nombres complexes conjugués et que la partie imaginaire de a est positive.

2) Calculer $a+b$ et ab. En déduire a et b.

EXERCICE 24

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$z^4 = 1$ (1) $\quad \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4 = 1$ (2)

2) Soit n un entier naturel non nul, a un nombre complexe et l'équation (E) : $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = a$.

On désigne par P, Q et M les points d'affixes respectives i, $-i$ et z.

a) Démontrer que si z est solution de (E) alors $\frac{MP}{MQ} = \sqrt[n]{|a|}$

b) Démontrer que si (E) admet au moins une solution réelle alors $|a| = 1$

c) En déduire que si (E) admet au moins une solution réelle alors toutes les solutions sont réelles.

EXERCICE 25

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes et $\mathbb{C}'$ le sous-ensemble des nombres dont la partie réelle est non nulle.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit l'application :

$f : \mathbb{C}' \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$f(z) = \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}$, $\bar{z}$ étant le conjugué de z.

1) Soit $z \in \mathbb{C}'$ et $Z = f(z)$ avec $z = x + iy$ et $Z = X + iY$

Calculer X et Y en fonction de x et y.

2). Calculer $f(1)$ et $f(1+i)$

3). Déterminer l'ensemble E des points M du plan d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

4) Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z tels que la partie imaginaire Y de Z, soit une constante k réelle donnée.

5) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}'$, on a :

$$f(z) = f\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)$$

EXERCICE 26

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f de (P) dans (P) qui au point M d'affixe z associe le point

M' d'affixe Z avec:

$$Z=\left(2+\frac{3}{2}i\right)z-\frac{5}{2}i\bar{z}$$

1) Calculer les coordonnées X et Y de M' en fonction des coordonnées x et y de M.

2) Calculer le module de Z en fonction de x et y.

Trouver et dessiner l'ensemble des points M tels que $|Z|=\sqrt{5}$.

3) Trouver et dessiner l'ensemble des points M tels que O, M et M' soient alignés.

EXERCICE 27

On considère un plan (P) rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

Soit A le point d'affixe 1.

Soit φ l'application de $\mathbb{C}-\{1\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par: $\varphi(z)=\frac{1+z}{1-z}$.

On appelle M le point de P d'affixe $z=x+iy$ et M' le point de P d'affixe $Z=\varphi(z)=X+iY$ avec x, y, X et Y réels.

1) a) Exprimer X et Y en fonction de x et y.

b) Déterminer l'ensemble des points M tels que Z soit réel.

c) Déterminer l'ensemble des points M tels que Z soit imaginaire pur.

2) a) Quelles distances représentent $|1-z|$ et $|1+z|$? Déterminer l'ensemble des points M tels que $|Z|=1$

b) Démontrer que l'ensemble (C_k) des points M tels que $|Z|=k$ où k est un réel strictement positif et différent de 1, est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

3) Retrouver géométriquement les résultats des questions 1°b) et 1°c)

EXERCICE 28

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. Soit $A(1;0)$ et $B(-1;0)$

A tout point M d'affixe $z\neq 0$ on associe le point M' d'affixe z' défini par:

$$zz'=1$$

1) a) Construire M' quand $z=1+i$

b) Dans le cas général montrer que la droite (AB) est bissectrice de l'angle $(\widehat{\vec{OM},\vec{OM'}})$ et que $OM.OM'=OA^2$

2) a) Vérifier que:

$$\forall z\in\mathbb{C}^*, \left(\frac{z+z'}{2}-1\right)\left(\frac{z+z'}{2}+1\right)=\left(\frac{z-z'}{2}\right)^2$$

b) Soit I le milieu de [MM'].

En utilisant ce qui précède, montrer que

$IA \cdot IB = IM'^2$ et que, pour M distinct de A et B, la droite (MM') est bissectrice de l'angle $(\widehat{\vec{IA}, \vec{IB}})$

3) a) Montrer que

$$\left|\frac{z+z'}{2}-1\right|+\left|\frac{z+z'}{2}+1\right| = |z|+|z'|$$

On pourra introduire des nombres complexes t et t' tels que $t^2 = z$ et $t'^2 = z'$.

b) En déduire une nouvelle propriété de la configuration A, B, M, M'.

EXERCICE 29

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, soit les points A, I et B d'affixes respectives 1, 2 et 3. Soit P' le plan P privé de I et f l'application de P' dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe

$$z' = \frac{1}{z-2} + 2$$

1) Déterminer les points M de P' vérifiant $f(M) = M$.

2) Calculer en fonction de z, les affixes des vecteurs $\vec{IM}$ et $\vec{IM'}$. En déduire une relation entre IM et IM' puis une relation entre les angles : $(\widehat{\vec{e_1}, \vec{IM}})$ et $(\widehat{\vec{e_1}, \vec{IM'}})$.

Placer le point M_0 d'affixe

$$z_0 = 2+2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

dans le repère puis le point M'_0 en utilisant ce qui précède.

3) On suppose que M est un point de P' distinct de A et de B. Calculer $z'-1$ et $z'-3$ en fonction de z.

Vérifier que $\frac{1-z'}{3-z'} = -\frac{1-z}{3-z}$.

En déduire une relation entre $\frac{M'A}{M'B}$ et $\frac{MA}{MB}$ puis une relation les angles $(\widehat{\vec{M'B}, \vec{M'A}})$ et $(\widehat{\vec{MB}, \vec{MA}})$

Démontrer que si M appartient à la médiatrice de [AB] il en est de même pour M'.

EXERCICE 30

Soit l'application $f(z) = \frac{z-2i}{z+1}$ définie $\forall z \in \mathbb{C} - \{-1\}$

On désigne par A, B, M et M' les points du plan complexe d'affixes respectives -1, $2i$, z et $f(z)$.

1) Calculer le module et un argument de $f(i)$

2) Interpréter géométriquement $|f(z)|$ et $\mathrm{Arg}(f(z))$

Déterminer et représenter l'ensemble E_1 des points M du plan tel que $|f(z)| = 1$

3) Déterminer et représenter :

a) l'ensemble E_2 des points M du

plan d'affixe z tels que $f(z)$ soit un réel strictement négatif.

b) l'ensemble E_3 des points M du plan d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

4) a) Calculer, pour tout $z \neq -1$,
$|f(z)-1| \times |z+1|$

b) On suppose que M décrit le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
Montrer que M' appartient à un cercle $(\mathcal{C})$ que l'on déterminera.

EXERCICE 31

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout réel x, associe

$$f(x) = \frac{-1-2ix}{2+ix}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par M le point d'affixe $f(x)$.

1) Déterminer l'ensemble E des réels x tels que $|f(x)| \leq 1$ où $|f(x)|$ désigne le module du nombre complexe $f(x)$.

2) Démontrer que :
$\forall x \in \mathbb{R}, \ \frac{1}{2} \leq |f(x)| \leq 2$

3) a) Calculer $f(x) + \frac{5}{4}$ et en déduire que lorsque x parcourt $\mathbb{R}$ les points M appartiennent à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

b) Retrouver à l'aide de la question 3°a) le résultat du 2).

c) On désigne par θ l'argument de $f(x)$ appartenant à $[0, 2\pi[$
A l'aide de la question 3°a) démontrer que $|\sin\theta| \leq \frac{3}{5}$

EXERCICE 32

Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z telle que:
$\frac{z+1-2i}{z+2+i}$ soit

1) réel 2) réel négatif
3) réel positif. 4) imaginaire pur.
5) imaginaire pur à partie imaginaire strictement négative
6) imaginaire pur à partie imaginaire strictement positive.
7) Déterminer l'ensemble des points d'affixe z telle que:
$\frac{z+1-2i}{z+2+i}$ ait pour module 1

EXERCICE 33

Soit A le point d'affixe $2i$ et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{2iz-5}{z-2i}$$

1) Démontrer que f admet deux points invariants.

2) Démontrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.

3) Démontrer que la droite $(O, \vec{e_2})$ privée de A est globalement invariante par f.

4) a) Démontrer que : $|z'-2i||z-2i| = 9$

b) En déduire l'image par f du cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon R.

Déterminer R pour que $(\mathscr{C})$ soit globalement invariant par f.

EXERCICE 34

Soit a et b deux nombres complexes non nuls, A et B leurs images respectives.

1) a) Démontrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $\bar{a}b$ est un nombre réel.

b) Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un nombre réel si et seulement si les points O, A et B sont alignés ou si OA = OB.

2) On suppose dans cette question que les points O, A et B ne sont pas alignés et que les nombres complexes a et b ont pour module 1.

Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un nombre réel strictement positif.

3) Application.

Soit M_1 et M_2 deux points d'affixes respectives z_1 et z_2 tels que les points O, M_1 et M_2 ne sont pas alignés.

a) Calculer, en fonction de z_1 et z_2, l'affixe Z du barycentre I du système $\{(M_1, |z_2|) ; (M_2, |z_1|)\}$

b) Démontrer que $\frac{Z^2}{z_1 z_2}$ est un nombre réel.

c) En déduire que $\vec{OI}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\widehat{M_1OM_2}$

EXERCICE 35

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ unité graphique 2cm, on considère le point A d'affixe $3i$, le point B d'affixe $-\sqrt{3}$ et le point C d'affixe $\sqrt{3}$. A tout point M d'affixe z distinct de B, on associe le point N d'affixe : $Z = \frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}}$

1/ On pose $z = x+iy$ et $Z = X+iY$ avec x, y, X et Y réels. Exprimer X et Y à l'aide de x et y.

2/ a/ Soit $u = s+it$ un nombre complexe non nul, s et t réels. Montrer que $\frac{\pi}{3}$ est un argument de u si et seulement si $t>0$ et $s=\frac{t}{\sqrt{3}}$.

b/ Utiliser a/ pour préciser les conditions auxquelles doivent satisfaire les parties réelle x et imaginaire y de $z = x+iy$ afin que $\frac{\pi}{3}$ soit un argument de Z

3/ a/ Quelles sont les interprétations géométriques du module et de l'argument de Z (On notera que Z est le quotient des affixes des vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MB}$)

b/ Ecrire Z sous forme trigonométrique lorsque $z = 3i$. Que peut-on déduire quand à la nature du triangle ABC ?

c/ Utiliser a/ et b/ pour caractériser l'ensemble (E) des points M distincts de B et C tels que $\frac{\pi}{3}$ soit une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}})$.

Construire (E) dans (P).

EXERCICE 36

Soit le nombre complexe $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$

1/ On pose : $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$

a/ Démontrer que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$ et en déduire que α et β sont solutions de l'équation (E) : $X^2 + X - 1 = 0$

b/ Exprimer α en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$

c/ Résoudre (E) et en déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$

2/ On désigne par A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les points d'affixes respectives : 1, z_0, z_0^2, z_0^3 et z_0^4.

a/ Soit H le point d'intersection de la droite (A_1A_4) avec la droite de repère $(O, \vec{e_1})$. Démontrer que l'affixe du point H est $\cos\frac{2\pi}{5}$.

b/ Soit (Γ) le cercle de centre le point Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ et passant par le point B d'affixe i. (Γ) coupe la droite de repère $(O, \vec{e_1})$ en M et N, M étant le point d'abscisse positive.

Démontrer que M et N ont pour affixes respectives α et β et que H est le milieu de [OM].

c/ En déduire une construction simple d'un pentagone régulier dont on connait le centre O et un sommet A_0.

EXERCICE 37

On définit de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ l'application f telle que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall z' \in \mathbb{C}$

$f(z, z') = xx' + i(xy' + yx')$ si

$z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

1/ Montre que $f(z, z') = f(z', z)$.

2/ Démontrer que :

$\overline{f(z, z')} = f(\bar{z}, \bar{z'})$ où $\bar{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

3/ a/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$f(z, 2i) = 0$

b/ On considère l'équation

(E_θ) : $f(z, z) + f[2\sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta), z] + 1 + 2i\sin 2\theta = 0$

où z est l'inconnue complexe et θ un paramètre réel de l'intervalle $[0 ; \pi]$

- Discuter suivant les valeurs du paramètre θ, l'existence et le nombre de solutions de (E_θ)

- lorsque (E_θ) admet deux solutions z_1, z_2, vérifier que : $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{\cos 2\theta}$

EXERCICE 38

Soit α un nombre réel appartenant à $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$. On considère l'équation d'inconnue complexe z :

(E) : $(1 + iz)^3(1 - i\tan\alpha) = (1 - iz)^3(1 + i\tan\alpha)$

1/ Soit z une solution de (E).

a/ Montrer que $|1 + iz| = |1 - iz|$

b/ En déduire que z est réel.

2/ a/ Exprimer $\frac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.

b/ Soit z un nombre réel, on pose $z = \tan\varphi$, où $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Ecrire l'équation portant sur φ traduisant (E) et la résoudre.

c/ Déterminer les solutions z_1, z_2 et z_3 de (E).

EXERCICE 39

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $\mathbb{C}_1$ l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ et f l'application telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}_1, \; f(z) = \frac{z}{z^2 +}$$

1/ Résoudre l'équation : $f(z) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

2/ a/ Montrer que :

$\forall (z, z') \in \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_1$,

$f(z) = f(z') \iff z = z'$ ou $zz' = 1$

b/ Soit $(z, z') \in \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_1$ tel que $|z| < 1$ et $|z'| < 1$; montrer que :

$f(z) = f(z') \Rightarrow z = z'$

3/ Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z \in \mathbb{C}_1$ et $f(z)$ soit réel.

plan d'affixe z tels que $f(z)$ soit un réel strictement négatif.

b) l'ensemble E_3 des points M du plan d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

4) a) Calculer, pour tout $z \neq -1$,
$|f(z)-1| \times |z+1|$

b) On suppose que M décrit le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
Montrer que M' appartient à un cercle $(\mathscr{C})$ que l'on déterminera.

EXERCICE 31

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout réel x, associe

$$f(x) = \frac{-1-2ix}{2+ix}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par M le point d'affixe $f(x)$.

1) Déterminer l'ensemble E des réels x tels que $|f(x)| \leq 1$ où $|f(x)|$ désigne le module du nombre complexe $f(x)$.

2) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \frac{1}{2} \leq |f(x)| < 2$$

3) a) Calculer $f(x) + \frac{5}{4}$ et en déduire que lorsque x parcourt $\mathbb{R}$ les points M appartiennent à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

b) Retrouver à l'aide de la question 3°a) le résultat du 2°/.

c) On désigne par θ l'argument de $f(x)$ appartenant à $[0; 2\pi[$

A l'aide de la question 3°/a) démontrer que $|\sin\theta| \leq \frac{3}{5}$

EXERCICE 32

Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z telle que:

$\frac{z+1-2i}{z+2+i}$ soit

1) réel 2) réel négatif

3) réel positif. 4) imaginaire pur.

5) imaginaire pur à partie imaginaire strictement négative

6) imaginaire pur à partie imaginaire strictement positive.

7) Déterminer l'ensemble des points d'affixe z telle que:

$\frac{z+1-2i}{z+2+i}$ ait pour module 1

EXERCICE 33

Soit A le point d'affixe $2i$ et f l'application du plan dans lui-même

4/ Dans cette question :

$z = e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi] \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$

a/ Montrer que $f(z)$ est réel et calculer $f(z)$ en fonction de $\cos\theta$.

b/ Soit U la suite réelle telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 1 + f(z) + [f(z)]^2 + \dots + [f(z)]^n$

Pour quelles valeurs de θ, cette suite converge-t-elle ?

EXERCICE 40

Soit f l'application de $E = \mathbb{C} - \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$\forall z \in E$, $f(z) = \dfrac{1 z}{z + i}$.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(0, \vec{u}, \vec{v})$, on note M le point d'affixe z.

1/ Déterminer les coordonnées du point B dont l'affixe z_0 est telle que :

$$f(z_0) = 1 + 2i$$

2/ Soit z un élément de E. On note r le module de $z + i$ et α une mesure de son argument.

Exprimer la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et de α.

3/ Soit A le point d'affixe $-i$.

a/ Déterminer l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$ puis l'ensemble $(\mathcal{D})$ des points M tels que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure de l'argument de $f(z) - i$.

b/ Montrer que B appartient à $(\mathcal{C})$ et à $(\mathcal{D})$ et construire $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$.

EXERCICE 41

Soit z un nombre complexe de module 1 et d'argument $\theta \neq 2k\pi$. On considère la somme S telle que :

$S = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$.

1/ Mettre $S - zS$ sous forme trigonométrique. Déduire S.

2/ S est un nombre complexe de la forme $S = \alpha + i\beta$ avec α et β réels. Calculer α et β.

3/ En déduire :

$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta$ et

$\sin\theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta$ en fonction de n et θ.

EXERCICE 42

Soit z un nombre complexe non nul, et A, B, C les points du plan complexe d'affixes respectives :

$a = z$, $b = \bar{z}$ et $c = \dfrac{z^2}{\bar{z}}$.

1°/ On note $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$, exprimer le module et l'argument de b et c.

2°/ Comment faut-il choisir z pour que les points A, B et C soient deux à deux distincts ?

On suppose dans la suite de l'exercice que cette condition est réalisée.

3°/ a°/ Démontrer que les points A, B et C appartiennent à un même cercle.

b°/ Démontrer que $AB = AC$.

c°/ Le point A étant donné, indiquer une construction géométrique des points B et C.

4°/ a°/ Démontrer que : $mes(\vec{CB}, \vec{CA}) = \theta + k\pi$

b°/ En déduire l'ensemble des points A tel que le triangle ABC soit équilatéral.

EXERCICE 43

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct, ayant comme unité graphique 4cm. On note A, B et C les points d'affixes respectives $2i$, -1 et i. On considère l'application f de $P - \{A\}$ dans P qui à tout point M de $P-\{A\}$ d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{z+1}{z-2i}$$

1°/ a°/ Faire une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.

b°/ Déterminer l'affixe du point C' image de C. Quelle est la nature du quadrilatère ACBC' ?

c°/ Montrer que le point C admet un unique antécédent par f que l'on notera C''. Quelle est la nature du triangle BCC'' ?

2°/ Donner une interprétation géométrique de l'argument et du module de z'.

3°/ Déterminer, en utilisant les questions précédentes, quels sont les ensembles suivants :

a°/ L'ensemble Ea des points M dont les images par f ont pour affixe un nombre réel strictement négatif.

b°/ L'ensemble Eb des points M dont les images par f ont pour affixe un nombre imaginaire pur non nul.

c°/ L'ensemble Ec des points M dont les images appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1

EXERCICE 44

On se propose de déterminer tous les nombres complexes z qui vérifient :

(1) $z - u\bar{z} = 0$ u désigne un nombre complexe donné non nul, $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.

1°/ On suppose $u = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$.
Résoudre alors l'équation (1) et donner la forme trigonométrique des solutions distinctes de zéro.

2°/ On pose $u = a + ib$, a et b réels quelconques. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) admette au moins une solution distincte de zéro.
Quel est alors l'ensemble des complexes u vérifiant cette condition ?

3/ Dans le cas où $u = \cos\alpha + i\sin\alpha$, résoudre l'équation (1)

EXERCICE 45

1/ A tout nombre complexe z distinct de $3+3i$ on associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = \frac{z - 1 - i}{z - 3 - 3i}$$

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer puis construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a/ $f(z)$ soit réel.

b/ $f(z)$ soit imaginaire pur.

c/ le module de $f(z)$ soit égal à 1

d/ l'argument de $f(z)$ ait pour mesure $-\frac{\pi}{2}$.

2°/ Deux dés cubiques, l'un blanc l'autre rouge ont leurs faces numérotées de 1 à 6. On jette ces deux dés et l'on note x le nombre obtenu par le dé blanc et par y celui obtenu par le dé rouge (les jets sont équiprobables).
A chaque jet on associe le nombre complexe $x + iy = z$.
A l'aide de la question 1°/ déterminer la probabilité des événements suivants :

a/ $f(z)$ est réel.

b/ la partie réelle de $f(z)$ est strictement négative

c/ Le module de $f(z)$ est strictement supérieur à 1

EXERCICE 46

1/ Montrer que l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe $z = x+iy$ (où x et y sont des réels) vérifie la relation :

$$(2+3i)z + (-2+3i)\bar{z} - 12i = 0 \quad (1)$$

est une droite (D) que l'on déterminera par une équation cartésienne et aussi par un point et un vecteur directeur. Représenter cette droite dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, l'unité graphique étant 1cm.

2/ Montrer qu'il existe un seul réel z_0 et un seul imaginaire z_1 qui vérifie la relation (1).

Calculer z_0 et z_1

3/ Soit A et B les points du plan complexe d'affixes respectives $-\frac{4}{3}i$ et $4+\frac{4}{3}i$.

Montrer que la droite (D) est médiatrice du segment [AB].

4/ Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie la relation :

$$\left|-\frac{4}{3}i - z\right| = \left|4+\frac{4}{3}i - z\right|$$

5/ Déterminer et représenter sur le graphique précédent l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie :

$$\arg\left(\frac{-4i-3z}{12+4i-3z}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

k étant un entier relatif.

EXERCICE 47

Soit l'application

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto z' = (1+i)z + 3$$

M et M' désignent, dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points d'affixes respectives z et z' (Unité 2cm).

1/ Soit le nombre complexe $a = \sqrt{2}+i$

Calculer f(a) et placer sur une figure les points A d'affixe a et A' d'affixe f(a).

2/ Montrer que l'équation $z = f(z)$ possède dans $\mathbb{C}$ une unique solution z_0.

3/ Soit K le point d'affixe $3i$

a/ Calculer $\frac{z-z'}{z-3i}$ pour $z \neq 3i$

b/ Montrer que pour tout point M différent de K, le triangle KMM' est un triangle rectangle isocèle dont on précisera le sommet de l'angle droit.

En déduire une construction du point M' connaissant un point M du plan. Faire cette construction.

4-/ a-/ Démontrer que l'ensemble (C) des points M du plan P tels que O, M et M' sont alignés est le cercle de diamètre [OK].

b-/ Vérifier que le point défini au 1-/ appartient à (C).

Tracer (C) dans le repère précédent.

EXERCICE 48

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A d'affixe $2i$, B d'affixe 2 et I milieu de [AB].

On considère la fonction f qui, à tout point M distinct de A d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{2z}{z-2i}$

1-/ a-/ Montrer que f admet comme points invariants le point O et un deuxième point dont on précisera l'affixe.

b-/ Déterminer les images par f des points B et I.

2-/ Soit M un point quelconque distinct de A et de O. Etablir que :

$$\begin{cases} (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ OM' = 2\dfrac{MO}{MA} \end{cases}$$

3-/ Soit Δ la médiatrice de [OA]. Montrer que les transformés par f des points de (Δ) appartiennent à un cercle (𝒞) que l'on précisera.

4-/ Soit (Γ) le cercle de diamètre [OA], privé du point A. Montrer que les transformés par f des points de (Γ) appartiennent à une droite (𝒟) que l'on précisera.

5-/ Tracer (Δ), (Γ), (𝒞) et (𝒟) sur une même figure. (Unité : 2cm)

EXERCICE 49

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M_n d'affixes :

$$z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (1 + i\sqrt{3})$$ où n est un entier naturel.

1-/ Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n puis z_n en fonction de z_0 et n

Donner z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

2-/ Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 (unité : 4cm).

3-/ Déterminer la distance OM_n en fonction de n.

4-/ a-/ Montrer $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b-/ On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$

Déterminer L_n en fonction de n, puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.

5-/ Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_n})$ en fonction de n.

Pour quelles valeurs de n les points O, M_0 et M_n sont-ils alignés ?

EXERCICE 50

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2cm).

On note f l'application du plan $\mathcal{P}$ privé du point O dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe :

$z' = \frac{1}{\bar{z}}$, où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z. On a donc aussi $z' = \frac{z}{|z|^2}$, où $|z|$ désigne le module de z.

1-/ Montrer que les points O, M et M' sont alignés.

2-/ Déterminer l'ensemble (Γ) des points invariants par f. Vérifier que l'ensemble (Γ) contient les points A et B d'affixes respectives -1 et i.

3-/ Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$, E le milieu de $[AB]$ et $E' = f(E)$.

a-/ Déterminer une équation de $(\mathcal{C})$

b-/ Montrer que E' appartient à $(\mathcal{C})$.

4-/ Le point M d'affixe z étant un point quelconque de la droite (AB), on se propose de construire son image M' d'affixe z' par l'application f.

a-/ Déterminer une équation de la droite (AB).

On pose $k = OM^2$, $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ avec x, y, x' et y' réels.

b-/ Exprimer k en fonction de x

c-/ Montrer que M' appartient à $(\mathcal{C})$ (On pourra exprimer x' et y' en fonction de x et k)

d-/ Déduire des questions précédentes une construction géométrique du point M' connaissant le point M.

CORRIGES DES EXERCICES

EXERCICE 1

Calculons et écrivons sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = 5-12i$.

Posons $z_0 = x+iy$, $(x;y)\in\mathbb{R}^2 / z_0^2 = z_1$

$z_0^2 = x^2-y^2+2ixy$

$|z_1| = \sqrt{5^2+(-12)^2} = 13$

$|z_0^2| = |z_0|^2 = x^2+y^2$

$z_0^2 = z_1 \Rightarrow \begin{cases} Re(z_0^2) = Re(z_1) \\ Im(z_0^2) = Im(z_1) \\ |z_0^2| = |z_1| \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = 5 \\ x^2+y^2 = 13 \\ 2xy = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 \\ 2y^2 = 8 \\ xy = -6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \Leftrightarrow x=-3 \text{ ou } x=3 \\ y^2 = 4 \Leftrightarrow y=-2 \text{ ou } y=2 \\ xy = -6 < 0 \end{cases}$

Pour $x=-3$, $y=2$; Pour $x=3$, $y=-2$

$\boxed{\text{Les racines carrées de } z_1 = 5-12i \text{ sont : } z_{01} = -3+2i \text{ et } z_{02} = 3-2i.}$

b) $z_2 = -8i$

On sait que $(1-i)^2 = 1-2i-1 = -2i$

$z_2 = -8i = 4.(-2i) = 4(1-i)^2$

$\boxed{\text{Les racines carrées de } z_2 = -8i \text{ sont } z_{01} = 2-2i \text{ et } z_{02} = -2+2i}$

c) $z_3 = 7+24i$

Posons $z_0 = x+iy$, $(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid z_0^2 = z_3$

$z_0^2 = x^2-y^2+2ixy$; $|z_3| = \sqrt{7^2+24^2} = 25$

$|z_0^2| = |z_0|^2 = x^2+y^2$

$z_0^2 = z_3 \Rightarrow \begin{cases} Re(z_0^2) = Re(z_3) \\ |z_0^2| = |z_3| \\ Im(z_0^2) = Im(z_3) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = 7 \\ x^2+y^2 = 25 \\ 2xy = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 32 \\ 2y^2 = 18 \\ xy = 12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \Leftrightarrow x=-4 \text{ ou } x=4 \\ y^2 = 9 \Leftrightarrow y=-3 \text{ ou } y=3 \\ xy = 12 > 0 \end{cases}$

Pour $x=-4$, $y=-3$; Pour $x=4$, $y=3$

$\boxed{\text{Les racines carrées de } z_3 = 7+24i \text{ sont : } z_{01} = -4-3i \text{ et } z_{02} = 4+3i}$

EXERCICE 2

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $iz^2+z-3+i = 0$ (1)

$\Delta = 1-4i(-3+i) = 5+12i$

Déterminons les racines carrées de Δ

Posons $\delta = x+iy$, $(x;y)\in\mathbb{R}^2 / \delta^2 = \Delta$

$\delta^2 = x^2-y^2+2ixy$; $|\Delta| = \sqrt{5^2+12^2} = 13$.

$|\delta^2| = |\delta|^2 = x^2+y^2$

$\delta^2 = \Delta \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = 5 \\ x^2+y^2 = 13 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3 \\ y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \\ xy = 6 > 0 \end{cases}$

Pour $x=-3$, $y=-2$; Pour $x=3$, $y=2$

On a donc $\delta_1 = -3-2i$ et $\delta_2 = 3+2i$

$z_1 = \dfrac{-1-3-2i}{2i} = -1+2i$

$z_2 = \dfrac{-1+3+2i}{2i} = 1-i$

$\boxed{S = \{-1+2i ; 1-i\}}$

3) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$

$P(z)=0 \Leftrightarrow (z-7)[z^2-(4+2i)z+6]=0$

$\Leftrightarrow z-7=0$ (1) ou $z^2-(4+2i)z+6=0$ (2)

(1) $\Leftrightarrow z=7$

(2) $\Leftrightarrow z^2-2(2+i)z+6=0$

$\Delta'=(2+i)^2-6=-3+4i$

On montre rapidement que les racines carrées de Δ' sont :

$\delta_1=-1-2i$; et $\delta_2=1+2i$

$z_1=2+i-1-2i=1-i$

$z_2=2+i+1+2i=3+3i$

$$\boxed{S=\{7;1-i;3+3i\}}$$

EXERCICE 4.

Soit P le polynôme défini par :

$P(z)=z^4+(5-2i)z^3+(8-10i)z^2+(6-16i)z-12i$

1) Vérifions que $P(2i)=P(-3)=0$

$P(2i)=16-8i(5-2i)-4(8-10i)+2i(6-16i)-12i$

$=16-40i-16-32+40i+12i+32-12i=0$

$P(2i)=0$

$P(-3)=81-27(5-2i)+9(8-10i)-3(6-16i)-12i$

$=81-135+54i+72-90i-18+48i-12i$

$=153-153+102i-102i=0$

$P(-3)=0$

$$\boxed{P(2i)=P(-3)=0}$$

2) Déterminons un polynôme Q du second degré tel que pour tout complexe z on a :

$P(z)=[z^2+(3-2i)z-6i]Q(z)$

Par division euclidienne on obtient

$P(z)=[z^2+(3-2i)z-6i][z^2+2z+2]$

On en déduit :

$$\boxed{Q(z)=z^2+2z+2}$$

3) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$

$P(z)=0 \Leftrightarrow z^2+(3-2i)z-6i=0$ (1)

ou

$z^2+2z+2=0$ (2)

(1) $\Leftrightarrow z_1=2i$ $z_2=-3$.

(2) $\Leftrightarrow z^2+2z+2=0$

$\Delta'=1-2=-1=i^2$

$z_3=-1-i$ $z_4=-1+i$

$$\boxed{S=\{-1-i,-1+i;2i;-3\}}$$

EXERCICE 5

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations

$z^2-4z+5+i(z+1)=0$ (1)

$(z^2-4z+5)^2+(z+1)^2=0$ (2)

- Résolvons (1)

$z^2-4z+5+i(z+1)=0$

$\Leftrightarrow z^2+(-4+i)z+5+i=0$

$\Delta=(-4+i)^2-4(5+i)=-5-12i$

On montre aisément que les racines carrées de Δ sont : $\delta_1=2-3i$ et $\delta_2=-2+3i$

$z_1=\frac{4-i+2-3i}{2}=3-2i$

$z_2=\frac{4-i-2+3i}{2}=1+i$

$$\boxed{S=\{3-2i;1+i\}}$$

- Résolvons (2)

$(z^2-4z+5)^2+(z+1)^2=0$

$\Leftrightarrow (z^2-4z+5)^2-i^2(z+1)^2=0$

$\Leftrightarrow [z^2-4z+5+i(z+1)][z^2-4z+5-i(z+1)]=0$

$\Leftrightarrow z^2-4z+5+i(z+1)=0$ (a)

ou

$z^2-4z+5-i(z+1)=0$ (b)

(a) $\Leftrightarrow$ (1) Déjà résolu.

(b) $\Leftrightarrow z^2-(4+i)z+5-i=0$

$\Delta=(4+i)^2-4(5-i)=-5+12i$

On montre aisément que les racines carrées de Δ sont : $\delta_1=-2-3i$ et $\delta_2=2+3i$

$z_1=\dfrac{4+i-2-3i}{2}=1-i$

$z_2=\dfrac{4+i+2+3i}{2}=3+2i$

l'ensemble solution de l'equation (2) est : $\boxed{S=\{1-i; 1+i; 3-2i; 3+2i\}}$

2) <u>Déduisons-en qu'il existe quatre nombres réels a, b, c et d que nous déterminerons tels que pour tout nombre réels x on a :</u>

$(x^2-4x+5)^2+(x+1)^2=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

Posons $P(z)=(z^2-4z+5)^2+(z+1)^2$

$P(z)=[z^2-4z+5+i(z+1)][z^2-4z+5-i(z+1)]$

$=(z-3+2i)(z-1-i)(z-1+i)(z-3-2i)$

$=[(z-1-i)(z-1+i)][(z-3+2i)(z-3-2i)]$

$=(z^2-2z+2)(z^2-6z+13)$

$\forall z\in\mathbb{C}, P(z)=(z^2-2z+2)(z^2-6z+13)$

or $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ donc

$\forall x\in\mathbb{R}, (x^2-4x+5)^2+(x+1)^2=(x^2-2x+2)(x^2-6x+13)$

d'où : $\boxed{a=-2}\ \boxed{b=2}\ \boxed{c=-6}\ \boxed{d=13}$

EXERCICE 6

1) Etant donné une équation du quatrième degré à coefficients réels, montrons que si elle admet z_0 pour solution elle admet aussi $\bar{z}_0$ pour solution

Soit l'équation (E) :

$z\in\mathbb{C},\ az^4+bz^3+cz^2+dz+e=0$ où a, b, c, d et e sont des réels avec $a\neq0$

z_0 solution de l'équation (E) équivaut à : $az_0^4+bz_0^3+cz_0^2+dz_0+e=0$ (1)

$\Leftrightarrow \overline{az_0^4+bz_0^3+cz_0^2+dz_0+e}=0$

$\Leftrightarrow \overline{az_0^4}+\overline{bz_0^3}+\overline{cz_0^2}+\overline{dz_0}+\bar{e}=0$

$\Leftrightarrow \bar{a}\,\overline{z_0^4}+\bar{b}\,\overline{z_0^3}+\bar{c}\,\overline{z_0^2}+\bar{d}\,\bar{z}_0+\bar{e}=0$ (2)

or $\forall x\in\mathbb{R}, \bar{x}=x$ et $\forall z\in\mathbb{C}, \overline{z_0^n}=(\bar{z}_0)^n$

(2) $\Leftrightarrow a(\bar{z}_0)^4+b(\bar{z}_0)^3+c(\bar{z}_0)^2+d\bar{z}_0+e=0$

$\Leftrightarrow \bar{z}_0$ solution de (E).

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation :

(E') $2z^4+3z^2+3\sqrt{3}z+9=0$ sachant que $z_0=a(1+i), a\in\mathbb{R}$ est solution de (E')

z_0 solution de (E') entraine :

$2a^4(1+i)^4+3a^2(1+i)^2+3a\sqrt{3}(1+i)+9=0$

$\Leftrightarrow -8a^4+6a^2i+3a\sqrt{3}+3ai\sqrt{3}+9=0$

$\Leftrightarrow -8a^4+3a\sqrt{3}+9+3ai(2a+\sqrt{3})=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a(2a+\sqrt{3})=0 \quad (1) \\ \text{et} \\ -8a^4+3a\sqrt{3}+9=0 \quad (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow a=0$ ou $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a=0$ n'est pas solution de (2) car $9\neq 0$

$-8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4+3\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+9=-\frac{9}{2}-\frac{9}{2}+9=0$

On retient $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$z_0=-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i)$ est solution de (E')

or (E') est une équation à coefficients réels. D'après 1), $\overline{z_0}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-i)$ est aussi solution de (E').

Déterminons le polynôme Q tel que

$2z^4+3z^2+3\sqrt{3}z+9=(z-z_0)(z-\overline{z_0})Q(z)$

En procédant par division euclidienne on a : $Q(z)=2z^2-2z\sqrt{3}+6$

$(E') \Leftrightarrow z=z_0$ ou $z=\overline{z_0}$ ou $Q(z)=0$

$Q(z)=0 \Leftrightarrow z^2-z\sqrt{3}+3=0$

$\Delta=3-12=-9=(3i)^2$

$z_1=\sqrt{3}-3i \qquad z_2=\sqrt{3}+3i$

$$\boxed{S=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i)\,;\,-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-i)\,;\,\sqrt{3}-3i\,;\,\sqrt{3}+3i\right\}}$$

Déterminons le module et un argument de chacune des solutions

Posons $z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i) \qquad z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-i)$

$z_3=\sqrt{3}-3i \qquad z_4=\sqrt{\ }+3i$

$|z_1|=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2} \qquad |z_2|=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$|z_3|=2\sqrt{3} \qquad |z_4|=2\sqrt{3}$

$\text{Arg}(z_1)=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4} \qquad \text{Arg}(z_2)=\pi-\frac{\pi}{4}$

$\text{Arg}(z_2)=\frac{3\pi}{4}$.

$\text{Arg}(z_4)=\frac{\pi}{3} \qquad \text{Arg}(z_3)=-\frac{\pi}{3}$.

$\lvert z_1\rvert=\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\text{Arg}(z_1)=\frac{5\pi}{4}$
$\lvert z_2\rvert=\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\text{Arg}(z_2)=\frac{3\pi}{4}$
$\lvert z_3\rvert=2\sqrt{3}$	$\text{Arg}(z_3)=-\frac{\pi}{3}$
$\lvert z_4\rvert=2\sqrt{3}$	$\text{Arg}(z_4)=\frac{\pi}{3}$

EXERCICE 7

On considère l'équation (E):

$z\in\mathbb{C},\ z^3-2(\sqrt{3}+i)z^2+4(1+i\sqrt{3})z-8i=0$

1) a) Montrons que (E) admet une unique solution imaginaire pur z_0.

Posons $z_0=ai$, $a\in\mathbb{R}^*$

z_0 solution de (E) équivaut à :

$(ai)^3-2(\sqrt{3}+i)(ai)^2+4(1+i\sqrt{3})ai-8i=0$

$\Leftrightarrow -a^3i+2a^2(\sqrt{3}+i)+4a(-\sqrt{3}+i)-8i=0$

$\Leftrightarrow 2a^2\sqrt{3}-4a\sqrt{3}+i(-a^3+2a^2+4a-8)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2\sqrt{3}-4a\sqrt{3}=0 \quad (1) \\ \text{et} \\ -a^3+2a^2+4a-8=0 \quad (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow 2a\sqrt{3}(a-2)=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $a=2$

$a=0$ n'est pas solution de (2) car $-8\neq 0$

$-2^3+2\cdot 2^2+4\times 2-8=-8+8+8-8=0$

On choisit $a=2$

$z_0=2i$ est donc solution de (E).

b) Résolvons (E) :

Après factorisation on a:

$(E) \Leftrightarrow (z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$

$\Leftrightarrow z=2i$ ou $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

$\Delta' = 3-4 = -1 = i^2$

$z_1=\sqrt{3}-i \quad z_2=\sqrt{3}+i$

$$\boxed{S=\{2i\,;\ \sqrt{3}-i\,;\ \sqrt{3}+i\}}$$

c) Écrivons les solutions de (E) sous forme trigonométrique:

Posons $z_0 = 2i \quad z_1=\sqrt{3}-i \quad z_2=\sqrt{3}+i$

$|z_0| = 2 \quad Arg(z_0) = \frac{\pi}{2}$.

$|z_1| = \sqrt{3+1} = 2 \qquad |z_2| = \sqrt{3+1} = 2$

Posons $\theta_1 = Arg(z_1)$ et $\theta_2 = Arg(z_2)$

on a: $\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{6}$

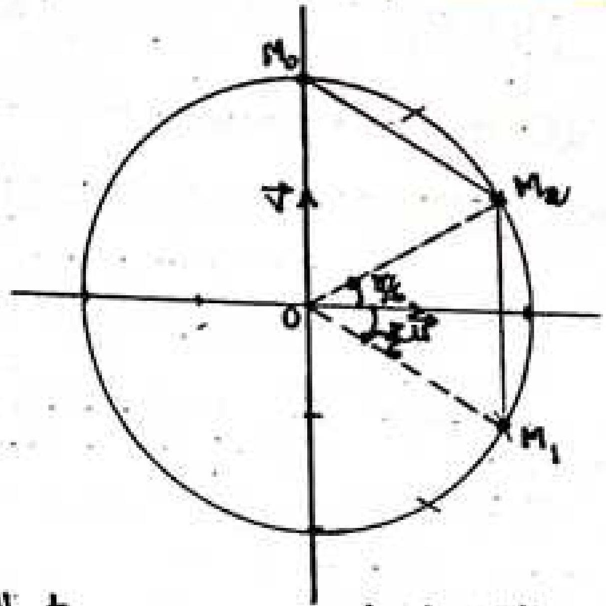
$\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6}$

$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right]$
$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$

2) On désigne par M_0, M_1 et M_2 les points images des solutions de (E).

a) Représentons M_0, M_1, M_2 dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Voir figure ci-contre



Montrons que ces points appartiennent à un même cercle.

$|z_0| = |z_1| = |z_2| = 2$

$\Leftrightarrow OM_0 = OM_1 = OM_2 = 2$

Les points M_0, M_1 et M_2 appartiennent donc au cercle de centre O et de rayon 2

b) Calculons $z_2 - z_1$ et $z_2 - z_0$

$z_2 - z_1 = \sqrt{3}+i-(\sqrt{3}-i) = 2i$

$z_2 - z_0 = \sqrt{3}+i-2i \ = \sqrt{3}-i$

$z_2 - z_1 = 2i$	$z_2 - z_0 = \sqrt{3}-i$

c) Démontrons que le quadrilatère $OM_1M_2M_0$ est un losange

$|z_2 - z_1| = |2i| = 2 \qquad |z_2 - z_0| = |\sqrt{3}-i| = 2$

or $|z_1| = |z_0| = 2$ On en déduit que

$M_1M_2 = M_0M_2 = OM_0 = OM_1$

Conclusion:

Le quadrilatère $OM_1M_2M_0$ est donc un losange.

EXERCICE 8

1) Exprimons $1-\cos 2\theta$ en fonction de $\sin\theta$ puis $\sin 2\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et $\cos\theta$

On sait que $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ d'où

$$1-\cos 2\theta = 2\sin^2\theta$$

$1-\cos 2\theta = 2\sin^2\theta$
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$2z^2(1-\cos 2\theta) - 2z\sin 2\theta + 1 = 0$ où z est l'inconnue et θ un réel non nul de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$\Delta' = \sin^2 2\theta - 2(1-\cos 2\theta)$

$= 4\sin^2\theta\cos^2\theta - 4\sin^2\theta$

$= 4\sin^2\theta(\cos^2\theta - 1) = 4\sin^2\theta(-\sin^2\theta)$

$\Delta' = -4\sin^4\theta = (2i\sin^2\theta)^2$

$z_1 = \frac{\sin 2\theta - 2i\sin^2\theta}{4\sin^2\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta - 2i\sin^2\theta}{4\sin^2\theta}$

$z_1 = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{2\sin\theta}$

$z_2 = \frac{\sin 2\theta + 2i\sin^2\theta}{4\sin^2\theta} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{2\sin\theta}$

$$\boxed{S = \left\{ \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{2\sin\theta} ; \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{2\sin\theta} \right\}}$$

3) Déterminons le module et l'argument de chacune des solutions z_1 et z_2

$z_1 = \frac{1}{2\sin\theta}(\cos\theta - i\sin\theta)$; $z_2 = \frac{1}{2\sin\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$

$|z_1| = \frac{1}{2|\sin\theta|}$ $\quad |z_2| = \frac{1}{2|\sin\theta|}$

1er cas $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right[$ $\sin\theta < 0$

$|z_1| = -\frac{1}{2\sin\theta}$ $\quad |z_2| = -\frac{1}{2\sin\theta}$

$\operatorname{Arg}(z_1) = \pi - \theta$ $\quad \operatorname{Arg}(z_2) = \pi + \theta$

2e cas $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin\theta > 0$

$|z_1| = \frac{1}{2\sin\theta}$ $\quad |z_2| = \frac{1}{2\sin\theta}$

$\operatorname{Arg}(z_1) = -\theta$ $\quad \operatorname{Arg}(z_2) = \theta$.

4) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes z_1 et z_2.

Déterminons l'ensemble des nombres réels θ tels que le triangle OM_1M_2 est isocèle et rectangle en O

$\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow OM_1 = OM_2$

OM_1M_2 est donc isocèle en O

OM_1M_2 est rectangle en O ssi :

$OM_1^2 + OM_2^2 = M_1M_2^2$ d'après Pythagore.

$M_1M_2 = |z_2 - z_1| = |i| = 1$

$OM_1^2 + OM_2^2 = M_1M_2^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sin^2\theta} = 1$

$\Leftrightarrow \sin^2\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\begin{cases} \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$

$\begin{cases} \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

> L'ensemble A des valeurs de θ pour lesquelles OM_1M_2 est isocèle et rectangle en O est $A = \left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\}$

EXERCICE 9

On considère la fonction polynôme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par:

$P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8.$

1) Comparons $P(\bar{z})$ et $\overline{P(z)}$; $\bar{z}$ étant le conjugué de z et $\overline{P(z)}$ le conjugué de $P(z)$.

$\overline{P(z)} = \overline{z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8}$

$= \overline{z^4} - \overline{4z^3} + \overline{9z^2} - \overline{4z} + \overline{8}$

$= (\bar{z})^4 - 4(\bar{z})^3 + 9(\bar{z})^2 - 4\bar{z} + 8$

$\boxed{\overline{P(z)} = P(\bar{z})}$

Calculons $P(i)$

$P(i) = i^4 - 4i^3 + 9i^2 - 4i + 8$

$= 1 + 4i - 9 - 4i + 8 = 0$

$\boxed{P(i) = 0}$

Déduisons-en une, puis deux solutions de l'équation (E): $P(z) = 0$

$P(i) = 0 \Leftrightarrow \overline{P(i)} = 0$

or $\overline{P(i)} = P(\bar{i}) = P(-i)$

$\Leftrightarrow P(-i) = 0$

$\boxed{\text{(E) admet deux solutions } z_1 = -i \text{ et } z_2 = i}$

2) Mettons $P(z)$ sous la forme d'un produit de deux polynomes du second degré à coefficients réels

$P(-i) = P(i) = 0$ $P(z)$ peut se mettre sous la forme: $P(z) = (z-i)(z+i)\,Q(z)$ où Q est un polynôme du second degré

$\Leftrightarrow P(z) = (z^2+1)\,Q(z)$

Par division euclidienne on a:

$\boxed{P(z) = (z^2+1)(z^2-4z+8)}$

Résolvons (E) dans $\mathbb{C}$.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z^2+1)(z^2-4z+8) = 0$

$\Leftrightarrow z^2+1 = 0$ (1) ou $z^2-4z+8 = 0$ (2)

(1) $\Leftrightarrow z_1 = -i$ $z_2 = i$

(2) $\Leftrightarrow z^2-4z+8 = 0$

$\Delta' = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$

$z_3 = 2-2i$ $z_4 = 2+2i$

$\boxed{S = \{-i; i; 2-2i; 2+2i\}}$

Calculons la somme et le produit des solutions de l'équation (E).

$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -i + i + 2 - 2i + 2 + 2i = 4$

$z_1 . z_2 . z_3 . z_4 = -i . i (2-2i)(2+2i)$

$= 8$

$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 4$
$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = 8$

EXERCICE 10

1) Soit l'équation

(E_1): $x^3 - 6x - 6 = 0$

a) Vérifions graphiquement que cette admet une unique solution réelle.

Posons $f(x) = x^3 - 6x - 6$

Etudions les variations de f.

$D_f = \mathbb{R}$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

f étant une fonction polynôme, elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2-6 = 3(x^2-2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$

$f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}-6$ $f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}-6$

Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

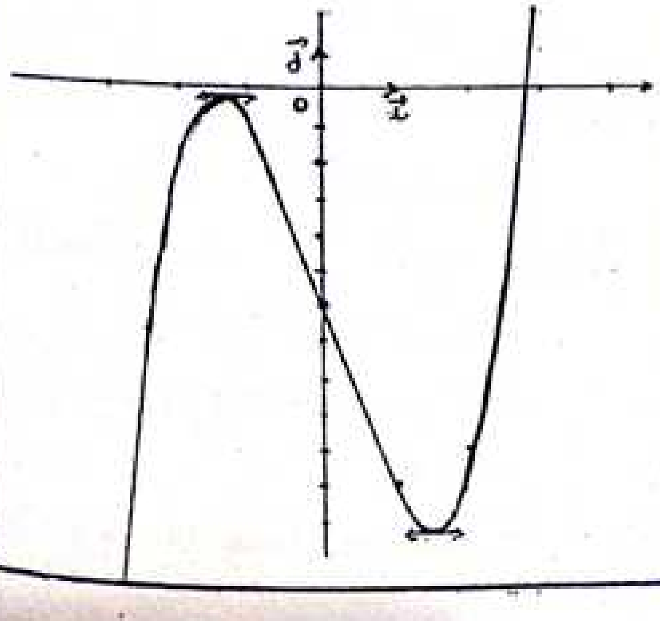
f est croissante sur $]-\infty ; -\sqrt{2}]$ et sur $[\sqrt{2} ; +\infty[$

f est décroissante sur $[-\sqrt{2} ; \sqrt{2}]$

Tableau de variation

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$4\sqrt{2}-6$	↘	$-4\sqrt{2}-6$	↗	$+\infty$

Construction de la courbe C_f de f.



Graphiquement la courbe C_f coupe l'axe (Ox) en un seul point A d'abscisse α telle que $2,8 < \alpha < 2,9$

$f(2,8) = -0,848$ $f(2,9) = 0,989$

$\boxed{\text{L'équation } (E_1) \text{ admet donc une unique solution réelle } \alpha \text{ telle que } 2,8 < \alpha < 2,9}$

b) <u>Démontrons que si U et V sont deux nombres tels que $U^3+V^3 = 6$ et $UV = 2$ alors $U+V$ est solution de (E_1)</u>

$(U+V)^3 - 6(U+V) - 6 = U^3+V^3+3UV(U+V) - 6(U+V) - 6$

$= 6 + 6(U+V) - 6(U+V) - 6$

$(U+V)^3 - 6(U+V) - 6 = 0$

$U+V$ est solution de (E_1) si $U^3+V^3 = 6$ et $UV = 2$

c). <u>Démontrons que U^3 et V^3 sont solution de l'équation : $X^2-6X+8=0$</u>

$\begin{cases} U^3+V^3 = 6 \\ UV = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U^3+V^3 = 6 \\ U^3 \cdot V^3 = 8 \end{cases}$

U^3 et V^3 sont donc solutions de l'équation

$X^2-6X+8 = 0$ (1)

Résolvons l'équation (1).

$X^2-6X+8 = 0$ $\Delta' = 9-8 = 1$

$X_1 = 3-1 = 2$ $X_2 = 3+1 = 4$

$S = \{2 ; 4\}$

<u>Déduisons-en la solution réelle de (E_1)</u>

$U^3 = 2$ et $V^3 = 4 \Rightarrow U = \sqrt[3]{2}$ et $V = \sqrt[3]{4}$

or $U+V$ est solution de (E_1).

La solution réelle de (E_1) est donc $\alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$

2) Soit l'équation (E_2): $x^3-15x-4=0$

a) Vérifions graphiquement que cette équation admet trois solutions réelles.

Posons $g(x) = x^3-15x-4$

Comme précédemment on étudie g puis on construit sa courbe (C_g). On remarquera que (C_g) coupe (Ox) en trois points dont les abscisses sont solutions de (E_2)

b) Démontrons que si u et v sont deux nombres tels que $u^3+v^3=4$ et $uv=5$ alors $u+v$ est solutions de (E_2).

$(u+v)^3-15(u+v)-4=(u^3+v^3)+3uv(u+v)-15(u+v)-4$

$= 4+15(u+v)-15(u+v)-4$

$(u+v)^3-15(u+v)-4=0$

$$\boxed{\begin{array}{l}u+v \text{ est donc solution de } (E_2) \text{ lorsque:}\\ u^3+v^3=4 \text{ et } u.v=5.\end{array}}$$

c) Démontrons que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $X^2-4X+125=0$.

$$\begin{cases}u^3+v^3=4\\ u.v=5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u^3+v^3=4\\ u^3.v^3=125\end{cases}$$

u^3 et v^3 sont donc solutions de l'équat°

$$X^2-4X+125=0\ (2)$$

Résolvons (2) dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$

$$X^2-4X+125=0$$

$$\Delta'=4-125=-121<0$$

$$\Delta'=(11i)^2$$

(2) n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

Dans $\mathbb{C}$ on a:

$X_1=2-11i \qquad X_2=2+11i$

d) Calculons $(2+i)^3$ et $(2-i)^3$.

$(2+i)^3=(3+4i)(2+i)$

$= 6-4+11i = 2+11i$

$(2-i)^3=(3-4i)(2-i)$

$=6-4-11i = 2-11i$

$(2+i)^3=2+11i$	$(2-i)^3=2-11i$

$u+v = 2+i+2-i=4$

On en déduit que 4 est solut° de (E_2)

Par division euclidienne on a:

$(E_2) \Leftrightarrow (x-4)(x^2+4x+1)=0$

$x=4$ ou $x^2+4x+1=0$

$\Delta'=4-1=3$

$x_1=-2-\sqrt{3}$ et $x_2=-2+\sqrt{3}$

$$\boxed{S=\{-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3};4\}}$$

EXERCICE 11

Soit l'équation (E):

$z^4+2z^3+2z^2-2z+1=0 \quad z\in\mathbb{C}$

1) Démontrons que si z_0 est solution de (E) alors $\bar{z}_0$ est solution de (E)

z_0 solution de (E) équivaut à:

$z_0^4+2z_0^3+2z_0^2-2z_0+1=0$

$\Leftrightarrow \overline{z_0^4+2z_0^3+2z_0^2-2z_0+1}=\bar{0}$

$\Leftrightarrow \overline{z_0^4} + 2\overline{z_0^3} + 2\overline{z_0^2} - 2\overline{z_0} + \overline{1} = 0$

$\Leftrightarrow (\bar{z}_0)^4 + 2(\bar{z}_0)^3 + 2(\bar{z}_0)^2 - 2\bar{z}_0 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \bar{z}_0$ solution de (E)

Conclusion:

$\boxed{\text{si } z_0 \text{ est solution de (E) alors } \bar{z}_0 \text{ est solution de (E).}}$

2) a) Déterminons les nombres réels a et b tels que:

(E) $\Leftrightarrow z^2\left[\left(z-\frac{1}{z}\right)^2 + a\left(z-\frac{1}{z}\right) + b\right] = 0$

(E) $\Leftrightarrow z^2\left(z^2 + 2z + 2 - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow z^2\left[\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right) + 2\left(z-\frac{1}{z}\right) + 2\right] = 0$ (1)

or $\left(z-\frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} - 2$

Ce qui entraîne : $z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z-\frac{1}{z}\right)^2 + 2$

(1) $\Leftrightarrow z^2\left[\left(z-\frac{1}{z}\right)^2 + 2\left(z-\frac{1}{z}\right) + 4\right] = 0$

On en déduit que: $a = 2$ et $b = 4$

b) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + aZ + b = 0$ (E')

(E') $\Leftrightarrow Z^2 + 2Z + 4 = 0$

$\Delta' = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$

$Z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ $\quad Z_2 = -1 + i\sqrt{3}$

$\boxed{S = \{-1 - i\sqrt{3}\,;\ -1 + i\sqrt{3}\}}$

Résolvons (E)

0 n'est pas solution de (E) car $1 \neq 0$

(E) $\Leftrightarrow \left(z-\frac{1}{z}\right)^2 + 2\left(z-\frac{1}{z}\right) + 4 = 0$ (2)

Posons $Z = z - \frac{1}{z}$

(2) $\Leftrightarrow Z^2 + 2Z + 4 = 0$

Z est solution de (E')

$Z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ $\quad Z_2 = -1 + i\sqrt{3}$.

$z - \frac{1}{z} = Z_1 \Leftrightarrow z^2 - Z_1 z - 1 = 0$

$\Leftrightarrow z^2 + (1 + i\sqrt{3})z - 1 = 0$

$\Delta = (1 + i\sqrt{3})^2 + 4 = 2 + 2i\sqrt{3}$

On montre que les racines carrées de Δ sont: $\delta_1 = -\sqrt{3} - i$ et $\delta_2 = \sqrt{3} + i$

$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3} - \sqrt{3} - i}{2} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}(1+i)$

$z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3} + \sqrt{3} + i}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}(1-i)$

$z - \frac{1}{z} = Z_2 \Leftrightarrow z^2 - Z_2 z - 1 = 0$

$\Leftrightarrow z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - 1 = 0$

$\Delta = (1 - i\sqrt{3})^2 + 4 = 2 - 2i\sqrt{3}$

On montre que les racines carrées de Δ sont: $\delta' = \sqrt{3} - i$ et $\delta'' = -\sqrt{3} + i$

$z_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3} + \sqrt{3} - i}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$

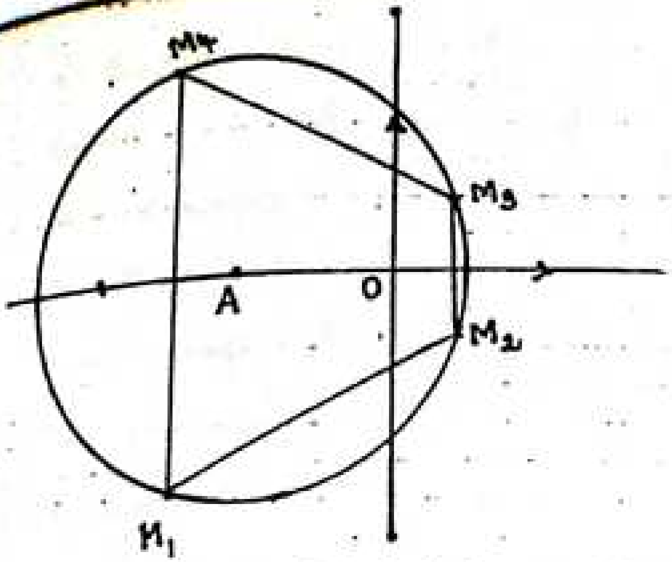
$z_4 = \frac{-1 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} + i}{2} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}(1-i)$

L'ensemble solution de l'équation (E) est:

$\boxed{S = \left\{\frac{-1-\sqrt{3}}{2}(1+i)\,;\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2}(1-i)\,;\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2}(1+i)\,;\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2}(1-i)\right\}}$

3) Démontrons que les images des quatres solutions de (E) appartiennent à un même cercle dont nous préciserons le centre et le rayon

Soit M_1, M_2, M_3 et M_4 les images respectives de z_1, z_2, z_3 et z_4



le quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ est convexe

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_4}) = Arg\left(\frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1}\right)$$

$$= Arg\left[\frac{(1+\sqrt{3})i}{\sqrt{3}+i}\right]$$

$$= Arg[(1+\sqrt{3})i] - Arg(\sqrt{3}+i)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$mes(\widehat{M_2M_1M_4}) = 60°$

$$(\overrightarrow{M_3M_2}, \overrightarrow{M_3M_4}) = Arg\left[\frac{z_2 - z_3}{z_4 - z_3}\right]$$

$$= Arg\left[\frac{(1-\sqrt{3})i}{-\sqrt{3}+i}\right]$$

$$= Arg[(1-\sqrt{3})i] - Arg(-\sqrt{3}+i)$$

$$= \frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

$mes(\widehat{M_2M_3M_4}) = 120°$

$\widehat{M_2M_1M_4}$ et $\widehat{M_2M_3M_4}$ sont supplémentaires

On conclut donc que M_1, M_2, M_3 et M_4 appartiennent à un même cercle $(\mathscr{C})$

Précisons le centre et le rayon de $(\mathscr{C})$

Soit A le centre et r le rayon.

Soit (Δ) la médiatrice de $[M_1M_2]$. On sait de plus que (Ox) est la médiatrice de $[M_2M_3]$ car $z_2 = \overline{z_3}$

$A = \Delta \cap (Ox)$. On montre que $z_A = -1$ et que $r = \frac{3}{2}$

EXERCICE 12

Dans chacun des cas suivants : déterminons le module et un argument de z et déduisons-en la forme algébrique de z.

a) $z = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$; posons $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

On sait que $|z_1| = 1$ et $Arg\, z_1 = -\frac{\pi}{3}$

$|z| = |z_1|^3 = 1$ $Arg\, z = 3\, Arg\, z_1 = -\pi$

$|z| = 1$ $Arg\, z = -\pi$.

$z = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$

$z = -1$

b) $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Posons $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$|z_1| = 1$ $|z_2| = 1$

$Arg(z_1) = \frac{\pi}{3}$ $Arg\, z_2 = \frac{2\pi}{3}$

$|z| = |z_1||z_2| = 1 \times 1 = 1$

$Arg\, z = Arg\, z_1 + Arg\, z_2$

$= \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$.

$|z| = 1$ $Arg(z) = \pi$

On en déduit que $z = -1$

c) $z=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Posons $z_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$|z_1|=1$ et $\operatorname{Arg} z_1=\frac{\pi}{3}$; $|z_2|=1$ et $\operatorname{Arg} z_2=-\frac{\pi}{3}$

$|z|=|z_1|.|z_2|=1\times 1=1$

$\operatorname{Arg}(z)=\operatorname{Arg}(z_1)+\operatorname{Arg}(z_2)=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=0$

$|z|=1 \quad \operatorname{Arg} z=0$

On en déduit que $z=1$

d) $z=(1+i)^2$

Posons $z_1=1+i$

$|z_1|=\sqrt{2} \quad \operatorname{Arg} z_1=\frac{\pi}{4}$

$|z|=|z_1|^2=(\sqrt{2})^2=2$

$\operatorname{Arg} z=2\operatorname{Arg} z_1=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

$|z|=2 \quad \operatorname{Arg} z=\frac{\pi}{2}$

On en déduit que $z=2i$

e) $z=(1-i)^4$

Posons $z_1=1-i$ $|z_1|=\sqrt{2}$; $\operatorname{Arg} z_1=-\frac{\pi}{4}$

$|z|=|z_1|^4=(\sqrt{2})^4=4$

$\operatorname{Arg} z=4\operatorname{Arg} z_1=4\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\pi$

$|z|=4 \quad \operatorname{Arg} z=-\pi$

On en déduit que $z=-4$

f) $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$

Posons $z_1=-1+i\sqrt{3}$ $\quad z_2=\sqrt{3}+i$

$|z_1|=2 \quad \operatorname{Arg} z_1=\frac{2\pi}{3}$

$|z_2|=2 \quad \operatorname{Arg} z_2=\frac{\pi}{6}$

$|z|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{2}{2}=1$

$\operatorname{Arg} z=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$

$|z|=1 \quad \operatorname{Arg} z=\frac{3\pi}{2}$

On en déduit que $z=-i$

g) $z=\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-1+i}\right)^3$

Posons $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ $\quad z_2=-1+i$

$|z_1|=2 \quad \operatorname{Arg} z_1=\frac{\pi}{4}$

$|z_2|=\sqrt{2} \quad \operatorname{Arg} z_2=\frac{3\pi}{4}$

$|z|=\left(\frac{|z_1|}{|z_2|}\right)^3=2\sqrt{2}$

$\operatorname{Arg} z=3(\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2)$

$\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{3\pi}{2}$

$|z|=2\sqrt{2} \quad \operatorname{Arg} z=-\frac{3\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

On en déduit que $z=(2\sqrt{2})i$

EXERCICE 13.

Soit $z_1=\frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$ et $z_2=\frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$

a) Ecrivons sous forme exponentielle z_1 et z_2

Posons $z_1'=\sqrt{3}+i$ $\quad z_2'=-\sqrt{3}+i$

$z_1''=4i \quad z_2''=1-i\sqrt{3}$.

$z_1=\frac{z_1'}{z_2'} \quad z_2=\frac{z_1''}{z_2''}$

$|z_1'|=2$; $|z_2'|=2$; $|z_1''|=4$ $\;|z_2''|=2$

$\operatorname{Arg} z_1'=\frac{\pi}{6}$; $\operatorname{Arg} z_2'=\frac{5\pi}{6}$; $\operatorname{Arg} z_1''=\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{Arg} z_2''=-\frac{\pi}{3}$

$|z_1| = \frac{|z_1'|}{|z_2'|} = 1 \qquad |z_2| = \frac{|z_1''|}{|z_2''|} = 2$

$Arg(z_1) = Arg\, z_1' - Arg\, z_2' = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$

$Arg(z_2) = Arg\, z_1'' - Arg\, z_2'' = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

On en déduit que :

$\boxed{z_1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}} \quad \boxed{z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$

b) Déduisons-en la forme algébrique des nombres complexes :

$z_1 z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; z_1^3 et $\frac{z_2^6}{z_1^3}$.

$z_1 . z_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} . 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$= 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$

$\boxed{z_1 z_2 = \sqrt{3} + i}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{2\pi}{3}} \times e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \frac{1}{2} e^{-3i\pi} = -\frac{1}{2}$

$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2}}$.

$z_1^3 = \left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{-i2\pi} = 1$

$\boxed{z_1^3 = 1}$

$\frac{z_2^6}{z_1^3} = \frac{\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^6}{1} = e^{i5\pi} = -1$

$\boxed{\frac{z_2^6}{z_1^3} = -1}$

EXERCICE 14

Soit $\theta \in]-\pi ; \pi[$, mettons sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants

• $z_1 = 1 + \cos\theta - i\sin\theta$.

On sait que $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ et que

$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$z_1 = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$= 2\cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$\forall\ -\pi < \theta < \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} > 0$

La forme trigonométrique de z_1 est :

$z_1 = 2\cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right]$

• $z_2 = \frac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}$

- Pour $\theta \in \left\{-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right\}$, $\tan\theta$ n'est pas définie

z_2 n'existe donc pas

- $\theta \in]-\pi ; \pi[- \left\{-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right\}$

$z_2 = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$

$|z_2| = 1 \quad Arg\, z_2 = \theta - (-\theta) = 2\theta$.

$z_2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

La forme trigonométrique de z_2 est :

$z_2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

• $z_3 = \frac{1 - \cos\theta - i\sin\theta}{1 + \cos\theta + i\sin\theta}$

$z_3 = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$

$= \tan\frac{\theta}{2}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}}\right)$

$= -i\tan\frac{\theta}{2}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}}\right) = -i\tan\frac{\theta}{2}$

1er cas $-\pi < \theta < 0$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < 0 \Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} < 0$

$|z_3| = -\tan\frac{\theta}{2}$ et $\operatorname{Arg} z_3 = \frac{\pi}{2}$

$$z_3 = -\tan\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

2ᵉ cas $0 < \theta < \pi$

$\Rightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} > 0$

$|z_3| = \tan\frac{\theta}{2}$ et $\operatorname{Arg} z_3 = -\frac{\pi}{2}$

$$z_3 = \tan\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

3ᵉ cas $\theta = 0$

$z_3 = 0$

* $z_4 = \dfrac{1}{1 + i\tan\theta}$

$$z_4 = \frac{\cos\theta}{\cos\theta + i\sin\theta}$$

1ᵉʳ cas $\theta \in \left]-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$

$\cos\theta < 0$

$|z_4| = -\cos\theta$ et $\operatorname{Arg} z_4 = \pi - \theta$.

$$z_4 = -\cos\theta\left[\cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta)\right]$$

2ᵉ cas $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

$\cos\theta > 0$

$|z_4| = \cos\theta \quad \operatorname{Arg} z_4 = -\theta$

$$z_4 = \cos\theta\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$$

* $z_5 = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{\sin\theta - i\cos\theta}$

$$z_5 = \frac{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)}{-i(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$|z_5| = 1 \quad \operatorname{Arg} z_5 = -\theta - \left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\pi}{2} - 2\theta$

$$z_5 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$$

EXERCICE 15

Soient les nombres complexes :

$z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$

1) Mettons sous forme trigonométrique z_1, z_2 et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - i)$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$\boxed{z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]}$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\boxed{z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}$$

$Z = \dfrac{z_1}{z_2}$

$|Z| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = 1$

$\operatorname{Arg} Z = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$

$= -\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}$

$$\boxed{Z = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}}$$

2) Déduisons-en les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1-i)}$$
$$= \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1+i)}{4}$$

$$Z = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

a $z = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$ on en déduit que:

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3) On considère l'équation d'inconnue réelle x:

$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x = 2 \quad (1)$$

a) <u>Résolvons cette équation dans $\mathbb{R}$.</u>

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos x + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{12} + \sin x\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}$$

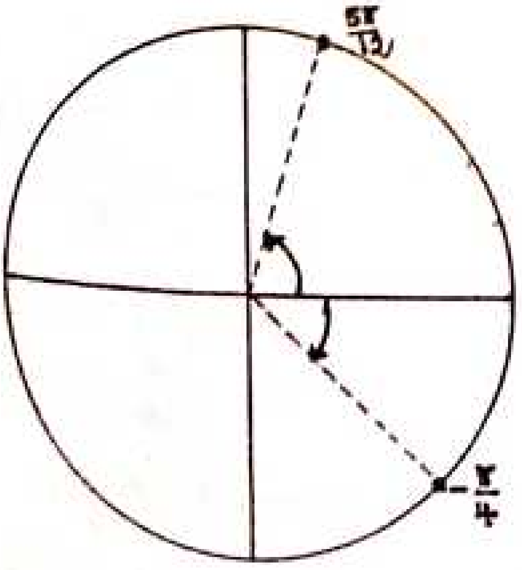
$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-\frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x-\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{12}+2k\pi \end{cases}$$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{4}+2k\pi \,;\, \frac{5\pi}{12}+2k\pi\right\} \ k\in\mathbb{Z}}$$

b) Plaçons les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.



EXERCICE 16

Déterminons la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants:

a) $z_1 = (1+i\sqrt{3})^{10}$

$$z_1 = 2^{10}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$$

$$= 2^{10}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= -2^{10}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) = -2^{9}(1+i\sqrt{3})$$

$$\mathrm{Re}(z_1) = -2^9 \qquad \mathrm{Im}(z_1) = -2^9\sqrt{3}$$

b) $z_2 = (1-i)^{12}(\sqrt{3}-3i)$

$$(1-i)^{12} = \left(\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{12} = 64\,e^{-i3\pi} = -64$$

$$z_2 = -64(\sqrt{3}-3i)$$

$$\mathrm{Re}(z_2) = -64\sqrt{3} \qquad \mathrm{Im}(z_2) = 192$$

c) $z_3 = \left(\frac{3-2i}{-2-3i}\right)^{12}$

$$z_3 = \left[\frac{i(-2-3i)}{-2-3i}\right]^{12} = i^{12} = (i^4)^3 = 1^3 = 1$$

$$\mathrm{Re}(z_3) = 1 \qquad \mathrm{Im}(z_3) = 0$$

d) $z_4 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{20}$

$$z_4 = \left(\sqrt{2}\,e^{-i\frac{5\pi}{12}}\right)^{20} = 2^{10}e^{-i\frac{25\pi}{3}}$$

$$= 2^{10}e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2^{10}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\mathrm{Re}(z_4) = 2^9 \qquad \mathrm{Im}(z_4) = -2^9\sqrt{3}.$$

EXERCICE 17

On pose $a = \sqrt{2}(1+i)$ $b = \sqrt{3}+i$

$c = a^2 b.$

1) Déterminons le module et un argument pour chacun des nombres complexes a et b.

$|a| = \sqrt{2}.\sqrt{2} = 2$ $|b| = 2$

$\text{Arg}\, a = \frac{\pi}{4}$ $\text{Arg}\, b = \frac{\pi}{6}$

$$\boxed{|a| = 2 \quad \text{Arg}\, a = \frac{\pi}{4}}$$

$$\boxed{|b| = 2 \quad \text{Arg}\, b = \frac{\pi}{6}}$$

Déduisons-en le module et un argument de c.

$|c| = |a|^2.|b| = 4 \times 2 = 8$

$\text{Arg}\, c = 2\text{Arg}\, a + \text{Arg}\, b$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

$$\boxed{|c| = 8 \quad \text{Arg}\, c = \frac{2\pi}{3}}$$

2) Déduisons des questions précédentes les valeurs exactes de

$\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

Posons $z = \frac{a}{b}$ on a :

$|z| = \frac{|a|}{|b|} = 1$

$\text{Arg}\, z = \text{Arg}\, a - \text{Arg}\, b = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$

$z = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$

$z = \cos\left(\pi - \frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{11\pi}{12}\right)$

$z = -\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}$

or $z = \frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\sqrt{3}-i)}{4}$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

On en déduit que :

$-\cos\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

soit

$\cos\frac{11\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\sin\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

EXERCICE 18

On donne le nombre complexe :

$u = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$

1) Calculons u^2 et u^4

$u^2 = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2$

$= 2-\sqrt{2} - (2+\sqrt{2}) - 2i\sqrt{4-2}$

$= -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2} = -2\sqrt{2}(1+i)$

$u^4 = (u^2)^2 = 8(1+i)^2 = 16i$

$$\boxed{u^2 = -2\sqrt{2}(1+i) \quad u^4 = 16i}$$

Calculons le module et un argument de u^4

$|u^4| = |16i| = 16$ $\text{Arg}\, u^4 = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{|u^4| = 16 \quad \text{Arg}(u^4) = \frac{\pi}{2}}$$

Déduisons-en le module et un argument de u.

$|U^4| = 16 \Leftrightarrow |U|^4 = 16 \Rightarrow |U| = 2$

$\text{Arg}(U^4) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 4\,\text{Arg}(U) = \frac{\pi}{2}$

soit $\theta = \text{Arg}\,U$ on a $\tan\theta < 0$

d'où $\text{Arg}\,U = -\frac{\pi}{8}$.

$$\boxed{|U| = 2 \quad \text{Arg}\,U = -\frac{\pi}{8}}$$

2) Déterminons l'ensemble des points M du plan pour lesquels le module du produit UZ est égal à 8.

$|UZ| = 8 \Leftrightarrow |U||Z| = 8$

$\Leftrightarrow 2|Z| = 8 \Leftrightarrow |Z| = 4$ (1)

or $|Z| = OM$ donc (1) $\Leftrightarrow OM = 4$

l'ensemble des points M est donc le cercle de centre O et de rayon 4

EXERCICE 19

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + 2i\bar{z} - 6 = 0 \quad (1)$$

Posons $z = x+iy$, $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

On a: $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $\bar{z} = x - iy$

(1) $\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy + 2i(x - iy) - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2y - 6 + i(2xy + 2x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2y - 6 = 0 \\ 2x(y+1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2y - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x^2 - y^2 + 2y - 6 = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 + 2y - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x^2 - 9 = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

L'équation $y \in \mathbb{R}$, $-y^2 + 2y - 6 = 0$ n'a pas de solution car $\Delta' = 1 - 6 = -5 < 0$

$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 3$

Les solutions de (1) sont donc:

$z_1 = -3 - i$ et $z_2 = 3 - i$

$$\boxed{S = \{-3-i\,;\,3-i\}}$$

2) Calculons $A = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$

Posons $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ $\quad z_2 = 1 + i$

et $z = \frac{z_1}{z_2}$ on a: $A = z^{30}$

$|z_1| = 2 \quad |z_2| = \sqrt{2} \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$

$\text{Arg}\,z_1 = \frac{\pi}{3} \quad \text{Arg}\,z_2 = \frac{\pi}{4}$

$\text{Arg}\,z = \text{Arg}\,z_1 - \text{Arg}\,z_2 = \frac{\pi}{12}$

$\Rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$A = z^{30} = 2^{15}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{30}$

$= 2^{15}\left(\cos\frac{30\pi}{12} + i\sin\frac{30\pi}{12}\right)$

$= 2^{15}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2^{15}i$

$$\boxed{A = 2^{15}i}$$

3) Posons $z = (\sqrt{3} + i)^n$, $n \in \mathbb{Z}$

$\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow z = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$

a) Choix de n pour que z soit réel

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{n\pi}{6} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{6} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow$ $n = 6k$, $k \in \mathbb{Z}$

Pour que $(\sqrt{3}+i)^n$ soit réel, il suffit que n soit un multiple de 6

b) Choix de n pour z soit imaginaire pur.

z imaginaire pur ssi $Re(z) = 0$

$\Leftrightarrow \cos\frac{n\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow n = 3 + 6k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow n - 3 = 6k$, $k \in \mathbb{Z}$

Pour que $(\sqrt{3}+i)^n$ soit imaginaire pur, il suffit que n-3 soit un multiple de 6.

EXERCICE 20

1) a) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation ;

$$z^2 - 2z + 4 = 0$$

$\Delta' = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ $\quad$ $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

$S = \{1 + i\sqrt{3} ; 1 - i\sqrt{3}\}$

b) Donnons l'argument et le module de chacune des solutions z_1 et z_2 puis écrivons z_1 et z_2 sous forme trigonométrique :

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ $\quad$ $|z_1| = 2$; $Arg\, z_1 = \frac{\pi}{3}$

$z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ $\quad$ $|z_2| = 2$; $Arg\, z_2 = -\frac{\pi}{3}$

$|z_1| = 2$ $\quad$ $Arg\, z_1 = \frac{\pi}{3}$

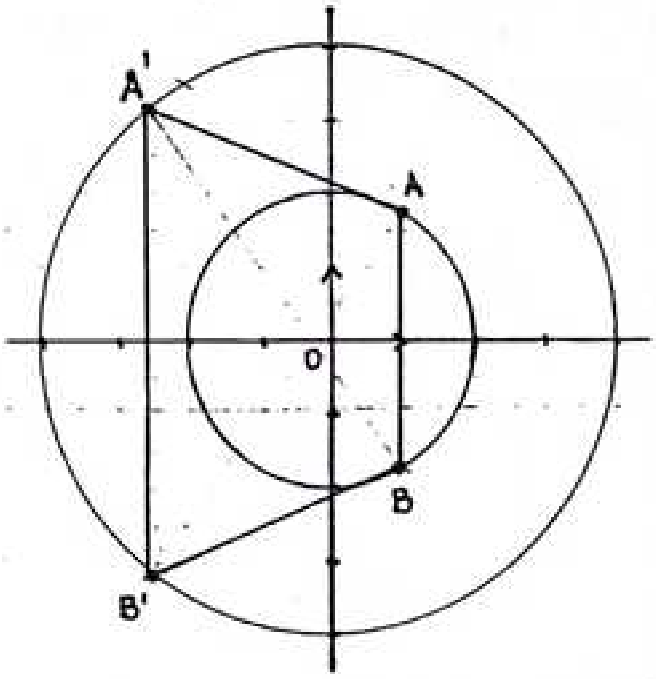
$|z_2| = 2$ $\quad$ $Arg\, z_2 = -\frac{\pi}{3}$

Forme trigonométrique de z_1 et z_2

$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$z_2 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

2) a) Plaçons dans le plan complexe les points A, B, A' et B' d'affixes respectives : $1+i\sqrt{3}$; $1-i\sqrt{3}$; $-2+2i\sqrt{3}$ et $-2-2i\sqrt{3}$



b) Nature du quadrilatère AA'B'B

$z_A = \overline{z_B}$ et $z_{A'} = \overline{z_{B'}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} B = S_{Ox}(A) \\ B' = S_{Ox}(A') \end{cases} \Rightarrow (AB) \parallel (A'B')$ (1)

De plus $AB = |z_B - z_A| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

$A'B' = |z_{B'} - z_{A'}| = |-4i\sqrt{3}| = 4\sqrt{3}$

$AB \neq A'B'$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ AA'B'B est un trapèze.

c) Montrons que les triangle $AA'B'$ et $BB'A$ sont isocèles.

$AA' = |z_{A'} - z_A| = |-3+i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

$AB = |z_B - z_A| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

$BB' = |z_{B'} - z_B| = |-3-i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

Conclusion

Les triangles $AA'B'$ et $BB'A$ sont isocèles respectivement en A et B.

EXERCICE 21

1) On pose $z = \dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$

a) Calculons z^n, $n \in \mathbb{N}^*$

$|z| = \frac{4}{2} = 2 \quad \operatorname{Arg} z = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z^n = 2^n\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n$$
$$= 2^n\left(\cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$

$$\boxed{z^n = 2^n\left(\cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}\right)}$$

b) Calculons les racines n-ièmes de z

Posons $z_1 = [r;\theta]$ tel que $z_1^n = z$

$$z_1^n = z \Leftrightarrow [r^n; n\theta] = \left[2; \frac{2\pi}{3}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^n = 2 \\ n\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{2} \\ \theta = \frac{2\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Les racines n-ièmes de z sont de la forme :

$$z_k = \sqrt[n]{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \text{ avec } k \in \{0;1;\dots n-1\}}$$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\overline{z} = z^7 \ (1)$$

Posons $z = [r;\theta]$ on a :

$\overline{z} = [r;-\theta]$ et $z^7 = [r^7; 7\theta]$

$(1) \Leftrightarrow [r;-\theta] = [r^7; 7\theta]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^7 = r \\ 7\theta = -\theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{k\pi}{4} \end{cases}$$

$$\boxed{S = \left\{\cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4}\right\} \text{ avec } k \in \{0;1;2;\dots 7\}}$$

3) Résolvons le système d'inconnues complexes $(z; Z)$: $(S)\begin{cases} z^2 = Z \\ Z^2 = z \end{cases}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} z = Z^2 \ (a) \\ Z^4 = Z \ (b) \end{cases}$$

$(b) \Leftrightarrow Z(Z^3 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow Z = 0$ ou $Z = 1$ ou $Z = j$ ou $Z = j^2$

avec $j = \left[1; \frac{2\pi}{3}\right] = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

– Pour $Z = 0$, $z = Z^2 = 0$

c) Montrons que les triangle $AA'B'$ et $BB'A$ sont isocèles.

$AA' = |z_{A'} - z_A| = |-3+i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

$AB = |z_B - z_A| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

$BB' = |z_{B'} - z_B| = |-3-i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

Conclusion

Les triangles $AA'B'$ et $BB'A$ sont isocèles respectivement en A et B.

EXERCICE 21

1) On pose $z = \dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$

a) Calculons z^n, $n \in \mathbb{N}^*$

$|z| = \frac{4}{2} = 2 \quad \operatorname{Arg} z = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z^n = 2^n\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n = 2^n\left(\cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$

$$\boxed{z^n = 2^n\left(\cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}\right)}$$

b) Calculons les racines n-ièmes de z

Posons $z_1 = [r;\theta]$ tel que $z_1^n = z$

$$z_1^n = z \Leftrightarrow [r^n; n\theta] = \left[2; \frac{2\pi}{3}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^n = 2 \\ n\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{2} \\ \theta = \frac{2\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Les racines n-ièmes de z sont de la forme:

$$z_k = \sqrt[n]{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \text{ avec } k \in \{0; 1; \dots n-1\}}$$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $\bar{z} = z^7$ (1)

Posons $z = [r;\theta]$ on a:

$\bar{z} = [r; -\theta]$ et $z^7 = [r^7; 7\theta]$

(1) $\Leftrightarrow [r; -\theta] = [r^7; 7\theta]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^7 = r \\ 7\theta = -\theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{k\pi}{4} \end{cases}$$

$$\boxed{S = \left\{\cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4}\right\} \text{ avec } k \in \{0; 1; 2; \dots 7\}}$$

3) Résolvons le système d'inconnues complexes $(z; Z)$: (S) $\begin{cases} z^2 = Z \\ Z^2 = z \end{cases}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} z = Z^2 \text{ (a)} \\ Z^4 = Z \text{ (b)} \end{cases}$$

(b) $\Leftrightarrow Z(Z^3 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow Z = 0$ ou $Z = 1$ ou $Z = j$ ou $Z = j^2$

avec $j = \left[1; \frac{2\pi}{3}\right] = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- Pour $Z = 0$, $z = Z^2 = 0$

- Pour $Z=1$, $z=Z^2=1$
- Pour $Z=j$, $z=j^2$
- Pour $Z=j^2$; $z=j^4=j$ car $j^3=1$

$$\boxed{S=\{(0;0);(1;1);(j;j^2);(j^2;j)\}}$$

EXERCICE 22

Soit l'équation (E) : $z^5=1$

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

Posons $z=re^{i\theta}$, $r\in\mathbb{R}^*_+$ et $\theta\in\mathbb{R}$

$z^5=r^5e^{i5\theta}$; $1=e^{i0}$

$z^5=1 \Leftrightarrow r^5e^{i5\theta}=e^{i0}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r^5=1 \\ 5\theta=2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{2k\pi}{5},\ k\in\{0;1;2;3;4\}\end{cases}$

$$\boxed{S=\left\{1;e^{i\frac{2\pi}{5}};e^{i\frac{4\pi}{5}};e^{i\frac{6\pi}{5}};e^{i\frac{8\pi}{5}}\right\}}$$

Représentons les images des solutions

Posons $z_0=1$ $z_1=e^{i\frac{2\pi}{5}}$; $z_2=e^{i\frac{4\pi}{5}}$

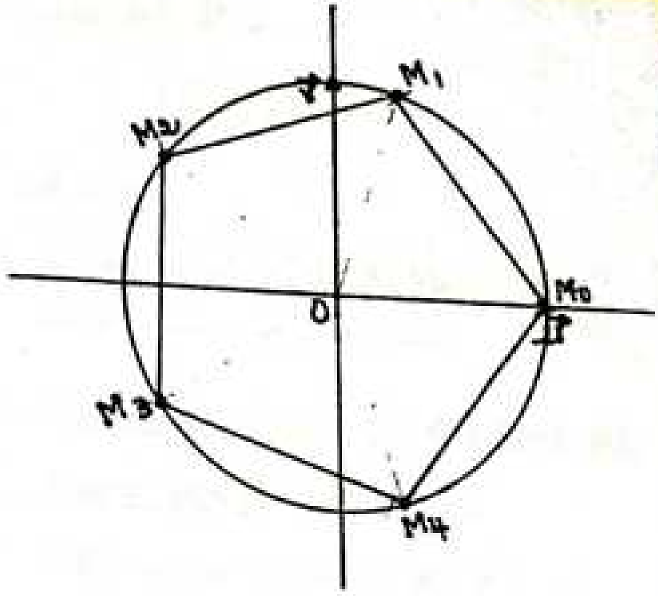
$z_3=e^{i\frac{6\pi}{5}}$; $z_4=e^{i\frac{8\pi}{5}}$

Désignons par M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 les images respectives de z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4.

M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 sont sur le cercle trigonométrique avec :

$(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM_0}})=0$; $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM_1}})=\frac{2\pi}{5}$; $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM_2}})=\frac{4\pi}{5}$

$(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM_3}})=\frac{6\pi}{5}$; $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM_4}})=\frac{8\pi}{5}$



2) Démontrons que la somme des solutions de (E) est nulle

On remarque que : $z_2=z_1^2$; $z_3=z_1^3$

$z_4=z_1^4$

$z_0+z_1+z_2+z_3+z_4=1+z_1+z_1^2+z_1^3+z_1^4$

$=\frac{1-z_1^5}{1-z_1}$ or $z_1^5=1$

$=\frac{1-1}{1-z_1}=0$

$$\boxed{z_0+z_1+z_2+z_3+z_4=0} \quad (1)$$

Déduisons-en que : $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}$

On remarque que : $\frac{8\pi}{5}-2\pi=-\frac{2\pi}{5}$ et

$\frac{6\pi}{5}-2\pi=-\frac{4\pi}{5}$

$\Rightarrow z_4=\overline{z_1}$ et $z_3=\overline{z_2}$

(1) $\Leftrightarrow 1+z_1+z_2+\overline{z_2}+\overline{z_1}=0$

$\Leftrightarrow 1+2\mathrm{Re}(z_1)+2\mathrm{Re}(z_2)=0$

$\Leftrightarrow 1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}=0$

On en déduit que :

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}} \quad (2)$$

3) Démontrons que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation : $4X^2+2X-1=0$

On sait que : $\forall\, \theta\in\mathbb{R},\ \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$$\Rightarrow \cos\frac{4\pi}{5} = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$$

$$(2) \Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{2\pi}{5} - 2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{2\pi}{5} - 1 = 0$$

$\cos\frac{2\pi}{5}$ est donc solution de l'équation

$$4X^2+2X-1=0$$

- Déduisons-en la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$

Résolvons l'équation $4X^2+2X-1=0$

$$\Delta' = 1+4 = 5$$

$$X_1 = \frac{-1-\sqrt5}{4}\ ;\ X_2 = \frac{-1+\sqrt5}{4}$$

or $\frac{2\pi}{5}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\frac{2\pi}{5} > 0$

d'où $\cos\frac{2\pi}{5} = X_2$

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt5}{4}}$$

4) Soit l'équation :

(E') : $(z-1)^5 = (z+1)^5$, $(z\in\mathbb{C})$

a) Démontrons que si z_0 est solution de (E') alors $\left|\frac{z_0-1}{z_0+1}\right| = 1$

z_0 solution de $(E') \Rightarrow (z_0-1)^5 = (z_0+1)^5$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_0-1}{z_0+1}\right)^5 = 1$$

D'après 1), toutes les solutions de (E) ont pour module 1 ; or $\frac{z_0-1}{z_0+1}$ est solution de (E) d'où

$$\left|\frac{z_0-1}{z_0+1}\right| = 1$$

Conclusion

$$\boxed{\text{Si } z_0 \text{ est solution de } (E') \text{ alors } \left|\frac{z_0-1}{z_0+1}\right| = 1}$$

Déduisons-en que les solutions de (E') sont imaginaires purs

D'après ce qui précède on a :

$$z \text{ solution de } (E') \Rightarrow \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1 \quad (3)$$

Soit A et B les points du plan, d'affixes respectives 1 et -1 et M le point d'affixe z ; (3) $\Rightarrow \frac{AM}{BM} = 1 \Leftrightarrow AM = BM$

$\Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice du segment [AB] ; or cette médiatrice est l'axe des ordonnées ou axe des imaginaires purs ; l'affixe z, de M est donc imaginaire pur.

Conclusion

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E') \text{ sont imaginaires purs.}}$$

b) Résolution de (E').

Posons $\frac{z-1}{z+1} = u$ (a)

(E') devient $u^5 = 1$; u est solution de (E)

$$(a) \Leftrightarrow z = \frac{1+u}{1-u},\ u\neq 1$$

$u = e^{i\theta}$ avec $\theta\in\left\{\frac{2\pi}{5};\frac{4\pi}{5};\frac{6\pi}{5};\frac{8\pi}{5}\right\}$

On démontre que

$$z = \frac{i}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

Les solutions de (E') sont donc:

$$z_1 = \frac{i}{\tan\frac{\pi}{5}}\ ;\ z_2 = \frac{i}{\tan\frac{2\pi}{5}}\ ;\ z_3 = \frac{i}{\tan\frac{3\pi}{5}}$$

$$z_4 = \frac{i}{\tan\frac{4\pi}{4}}$$

$$\boxed{S = \left\{ \frac{i}{\tan\frac{\pi}{5}}\ ;\ \frac{i}{\tan\frac{2\pi}{5}}\ ;\ \frac{i}{\tan\frac{3\pi}{5}}\ ;\ \frac{i}{\tan\frac{4\pi}{5}} \right\}}$$

EXERCICE 23.

Soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

On pose : $a = z + z^2 + z^4$ et $b = z^3 + z^5 + z^6$

1/ Démontrons que a et b sont deux nombres complexes conjugués

On sait que : $\begin{cases} \frac{6\pi}{7} - 2\pi = -\frac{8\pi}{7} \\ \frac{10\pi}{7} - 2\pi = -\frac{4\pi}{7} \\ \frac{12\pi}{7} - 2\pi = -\frac{2\pi}{7} \end{cases}$

On en déduit que:

$z^3 = \overline{z^4}$; $z^5 = \overline{z^2}$; $z^6 = \overline{z}$

$a = z + z^2 + z^4$; $b = z^3 + z^5 + z^6$

$b = \overline{z} + \overline{z^2} + \overline{z^4} = \overline{z + z^2 + z^4} = \overline{a}$

a et b sont donc deux nombres complexes conjugués

- Démontrons que $\mathrm{Im}(a) > 0$

$\mathrm{Im}(a) = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$

$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = 2\sin\frac{5\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$.

$\mathrm{Im}(a) = \sin\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{5\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$

* $\sin\frac{4\pi}{7}$ et $\sin\frac{5\pi}{7}$ sont positifs car : $\left\{\frac{4\pi}{7} ; \frac{5\pi}{7}\right\} \subset [0 ; \pi]$ (1)

* $\cos\frac{3\pi}{7} > 0$ car $\frac{3\pi}{7} \subset [0 ; \frac{\pi}{2}]$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow \sin\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{5\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} > 0$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(a) > 0$

$$\boxed{\mathrm{Im}(a) > 0}$$

2/ Calculons $a+b$ et ab

$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = \frac{1 - z^7}{1 - z}$

or $z^7 = e^{i2\pi} = 1$

$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$

$\Leftrightarrow 1 + a + b = 0 \Leftrightarrow a + b = -1$

$ab = (z + z^2 + z^4)(z^3 + z^5 + z^6)$

$= z^4 + z^6 + z^7 + z^5 + z^7 + z^8 + z^7 + z^9 + z^{10}$

$= z^4 + z^6 + 1 + z^5 + 1 + z + 1 + z^2 + z^3$

$= 3 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 3 - 1 = 2$

$a + b = -1$	$ab = 2$

Déduisons-en a et b

a et b sont solutions de l'équation

$x \in \mathbb{C}$, $x^2 + x + 2 = 0$

$\Delta = 1 - 8 = -7 = (i\sqrt{7})^2$ or $\mathrm{Im}(a) > 0$

d'où :

$a = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$	$b = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$

EXERCICE 24

1/ Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations

$z^4=1$ (1) et $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4=1$ (2)

- Résolvons (1)

$z^4=1 \Leftrightarrow z^4-1=0 \Leftrightarrow (z^2-1)(z^2+1)=0$

$\Leftrightarrow z^2-1=0$ ou $z^2+1=0$

$\Leftrightarrow z=\pm 1$ ou $z=\pm i$.

$$\boxed{S=\{-1;1;-i;i\}}$$

- Résolvons (2).

Posons $u=\frac{z-i}{z+i}$ (a)

(2) $\Leftrightarrow u^4=1$

$\Leftrightarrow u=1$ ou $u=-1$ ou $u=-i$ ou $u=i$

(a) $\Leftrightarrow z=\frac{i(1+u)}{1-u}$, $u\neq 1$

Pour $u=-1$, $z=0$

Pour $u=i$, $z=\frac{i(1+i)}{1-i}=-1$

Pour $u=-i$, $z=\frac{i(1-i)}{1+i}=1$

$$\boxed{S=\{-1;0;1\}}$$

2/ Soit n un entier naturel non nul, a un nombre complexe et l'équation : (E) : $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n=a$

On désigne par P, Q et M les points d'affixes respectives i, $-i$ et z.

a/ Démontrons que si z est solut° de (E) alors $\frac{MP}{MQ}=\sqrt[n]{|a|}$.

z solution de (E) entraîne

$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n=a \Rightarrow \left|\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n\right|=|a|$

$\Rightarrow \left|\frac{z-i}{z+i}\right|^n=|a|$

$\Rightarrow \frac{|z-i|}{|z+i|}=\sqrt[n]{|a|}$ (b)

or $|z-i|=MP$ et $|z+i|=MQ$

(b) $\Leftrightarrow \frac{MP}{MQ}=\sqrt[n]{|a|}$

Conclusion

Si z est solution de (E) alors $\frac{MP}{MQ}=\sqrt[n]{|a|}$

b/ Démontrons que si (E) admet au moins une solution réelle alors $|a|=1$

Soit z la solution de (E)

$z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow M\in(Ox)$ or (Ox) est la médiatrice de [PQ] $\Rightarrow MP=MQ$

$\Leftrightarrow \frac{MP}{MQ}=1 \Rightarrow \sqrt[n]{|a|}=1$

$\Leftrightarrow |a|=1$

Si (E) admet au moins une solution réelle alors $|a|=1$

c/ Déduisons-en que si (E) admet au moins une solution réelle alors toutes les solutions sont réelles

(E) admet au moins une solution réelle alors $|a|=1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{|a|}=1$

$\Leftrightarrow \frac{MP}{MQ}=1 \Leftrightarrow MP=MQ$

$\Rightarrow M \in (Ox)$ car (Ox) est la médiatrice de $[PQ]$ ((Ox) = axe des réels)

$\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Conclusion

$\boxed{\text{si (E) admet au moins une solution réelle alors toutes les solutions sont réelles}}$

EXERCICE 25

On pose $\mathbb{C}'$ le sous ensemble de $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est non nulle.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit l'application : $f : \mathbb{C}' \longrightarrow \mathbb{C}$

définie par : $f(z) = \dfrac{(z-1)(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}$, $\bar{z}$ étant le conjugué de z.

1) Soit $z \in \mathbb{C}'$ et $Z = f(z)$ avec $z = x+iy$ et $Z = X+iY$

Calculons X et Y en fonction de x et y.

$$Z = f(z)$$

$$\Leftrightarrow X+iY = \frac{(x-1+iy)(x+1-iy)}{(x+iy)+(x-iy)}$$

$$= \frac{x^2-1+y^2+iy(x+1-x+1)}{2x}$$

$$= \frac{x^2+y^2-1+2iy}{2x}$$

$\Leftrightarrow$

$X = \dfrac{x^2+y^2-1}{2x}$	$Y = \dfrac{y}{x}$

2) Calculons $f(1)$ et $f(1+i)$

$$f(1) = \frac{(1-1)(1+1)}{1+1} = 0$$

$$f(1+i) = \frac{(1+i-1)(1-i+1)}{1+i+1-i} = \frac{i(2-i)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + i$$

$f(1) = 0$	$f(1+i) = \frac{1}{2} + i$

3) Déterminons l'ensemble E des points M du plan d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

Z est imaginaire pur ssi $X = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-1}{2x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1=0 \ (1) \\ x \neq 0 \end{cases}$$

si $x=0$ alors $(1) \Rightarrow y^2-1=0 \Leftrightarrow y = \pm 1$

L'ensemble E des points M du plan d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur est le cercle de centre $O(0,0)$, de rayon $r=1$ privé des points $A(0;-1)$ et $B(0;1)$

4) Déterminons l'ensemble F des points M du plan d'affixe z tels que la partie imaginaire Y de Z, soit une constante k réelle donnée

$$Y = k \Leftrightarrow \frac{y}{x} = k \Leftrightarrow \begin{cases} y = kx \\ x \neq 0 \end{cases}$$

L'ensemble F est donc la droite Δ d'équation $y = kx$ privée du point $O(0,0)$

5) Montrons que pour tout $z \in \mathbb{C}'$, on a:

$$f(z) = f\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)$$

$\forall z \in \mathbb{C}'$, $f(z) = \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}$

$$f\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{\bar{z}}-1\right)\left(-\frac{1}{z}+1\right)}{-\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{z}}$$

$$= \frac{(-1-\bar{z})(-1+z)}{-z-\bar{z}}$$

$$= \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}} = f(z)$$

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}',\ f(z) = f\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

EXERCICE 26

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f de (P) dans (P) qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe Z avec:

$$Z = \left(2+\frac{3}{2}i\right)z - \frac{5}{2}i\bar{z}$$

1) Calculons les coordonnées X et Y de M' en fonction des coordonnées x et y de M

$Z = X+iY \qquad z = x+iy.$

$Z = \left(2+\frac{3}{2}i\right)z - \frac{5}{2}i\bar{z}$

$\Leftrightarrow X+iY = \left(2+\frac{3}{2}i\right)(x+iy) - \frac{5}{2}i(x-iy)$

$= 2x-4y+i(-x+2y)$

$\Leftrightarrow \boxed{X = 2x-4y} \ \boxed{Y = -x+2y}.$

2) Calculons le module de Z en fonction de x et y.

$|Z| = \sqrt{X^2+Y^2} = \sqrt{(2x-4y)^2+(-x+2y)^2}$

$= \sqrt{4(x-2y)^2+(x-2y)^2}$

$= \sqrt{5(x-2y)^2} = |x-2y|\cdot\sqrt{5}$

$$\boxed{Z = |x-2y|\sqrt{5}}$$

Trouvons et dessinons l'ensemble E des points M tels que $|Z| = \sqrt{5}$

$|Z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |x-2y|\sqrt{5} = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow |x-2y| = 1$

$\Leftrightarrow x-2y = -1$ ou $x-2y = 1$

$\boxed{\text{(E) est la réunion des droites: } (\Delta): x-2y+1=0 \text{ et } (\Delta'): x-2y-1=0}$

Construction de (E): Voir figure suivante

3) Trouvons et dessinons l'ensemble (F) des points M tels que O, M et M' soient alignés

$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{OM'}\begin{vmatrix} 2x-4y \\ -x+2y. \end{vmatrix}$

O, M et M' sont alignés ssi:

$\det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 2x-4y \\ y & -x+2y \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x(-x+2y) - y(2x-4y) = 0$

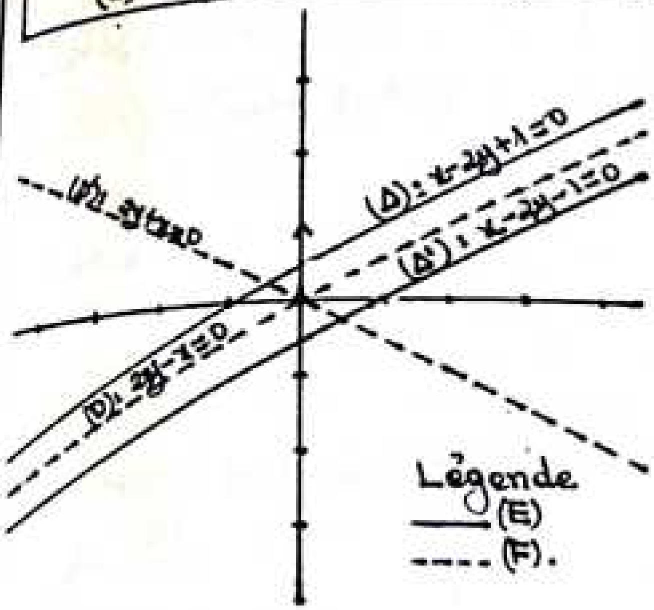
$\Leftrightarrow -x^2+2xy-2xy+4y^2 = 0$

$\Leftrightarrow 4y^2-x^2 = 0 \Leftrightarrow (2y-x)(2y+x) = 0$

$\Leftrightarrow 2y-x=0$ ou $2y+x=0$

(F) est la réunion des droites :

(D) : $2y - x = 0$ et (D') : $2y + x = 0$



EXERCICE 27

On considère un plan (P) rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Soit A le point d'affixe 1. Soit φ l'application de $\mathbb{C} - \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $\varphi(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$

On appelle M le point de P d'affixe $z = x + iy$ et M' le point de P d'affixe $Z = \varphi(z) = X + iY$ avec x, y, X et Y réels

1) a) Exprimons X et Y en fonction de x et y.

$$Z = \varphi(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

$$\Leftrightarrow X + iY = \frac{1+x+iy}{1-x-iy}$$

$$X + iY = \frac{(1+x+iy)(1-x+iy)}{(1-x)^2 + y^2}$$

$$= \frac{1-x^2-y^2+iy(1-x+1+x)}{(1-x)^2+y^2}$$

$$X + iY = \frac{1-x^2-y^2+2iy}{(1-x)^2+y^2}$$

On en déduit que :

$X = \dfrac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2}$	$Y = \dfrac{2y}{(1-x)^2+y^2}$

b) Déterminons l'ensemble des points M tels que Z soit réel

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(Z) = 0$$

$$\Leftrightarrow Y = 0 \Leftrightarrow \frac{2y}{(1-x)^2+y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

L'ensemble des points M tels que Z soit réel est la droite d'équation $y = 0$ privé du point $A(1;0)$

c) Déterminons l'ensemble des points M tels que Z soit imaginaire pur.

Z imaginaire pur ssi $\operatorname{Re}(Z) = 0$

$$\Leftrightarrow X = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ (x;y) \neq (1;0) \end{cases}$$

L'ensemble des points M tels que Z soit imaginaire pur est le cercle de centre $O(0;0)$, de rayon $r = 1$ privé du point $A(1;0)$

2) a) Distances représentées par : $|1-z|$ et $|1+z|$

$|1-z| = |z_A - z| = MA$

Soit A' le symétrique de A par rapport à O. On a : $z_{A'} = -1$

$|1+z| = |z-(-1)| = |z - z_{A'}| = A'M = MA'$

$\|1-z\| = MA$	$\|1+z\| = MA'$

Déterminons l'ensemble des points M tels que $|Z| = 1$

$|Z| = 1 \iff \left|\frac{1+z}{1-z}\right| = 1$

$\iff \frac{|1+z|}{|1-z|} = 1 \iff \frac{MA'}{MA} = 1$

$\iff MA' = MA \iff$ M appartient à la médiatrice du segment [A'A] qui n'est rien d'autre ici que l'axe (Oy).

$\boxed{\text{L'ensemble des points M tels que } |Z|=1 \text{ est l'axe des ordonnées}}$

b) Démontrons que l'ensemble (Ck) des points M tels que $|Z| = k$ où $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ est un cercle dont nous déterminons le centre et le rayon

$|Z| = k \iff \frac{MA'}{MA} = k \iff MA' = kMA$

$\iff MA'^2 - k^2MA^2 = 0$ (E)

$\iff (\overrightarrow{MA'} - k\overrightarrow{MA})(\overrightarrow{MA'} + k\overrightarrow{MA}) = 0$

Soit I bar$\{(A', 1); (A, -k)\}$ ①

et J bar$\{(A', 1); (A, k)\}$ ②

① $\iff \overrightarrow{A'I} - k\overrightarrow{AI} = \vec{0}$ ② $\iff \overrightarrow{A'J} + k\overrightarrow{AJ} = \vec{0}$

(E) $\iff (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA'} - k\overrightarrow{MI} - k\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA'} + k\overrightarrow{MJ} + k\overrightarrow{JA}) = 0$

$\iff (1-k)\overrightarrow{MI} \cdot (1+k)\overrightarrow{MJ} = 0$

$\iff (1-k^2)\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$ or $1-k^2 \neq 0$

$\iff \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$

(Ck) est le cercle de diamètre [IJ]

$\boxed{\text{(Ck) est donc le cercle de centre } \Omega \text{ milieu du segment [IJ] et de rayon } r = \frac{1}{2} IJ}$

3) Retrouvons géométriquement les résultats des questions 1°b) et 1°c)

Pour $M \in P - \{A'; A\}$,

$Arg(Z) = (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'}})$

* $Z \in \mathbb{R} \iff Z = 0$ ou $Z \in \mathbb{R}^*$

$Z = 0 \iff$ M confondu à A'

$Z \in \mathbb{R}^* \Rightarrow Arg(Z) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'}}) = k\pi$

$\iff \overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MA'}$ sont colinéaires

Les points A, M et A' sont donc alignés

$\boxed{\text{L'ensemble des points M tels que } Z \text{ soit réel est la droite (AA') privée du point A.}}$

• Z imaginaire pur soi

$M = A'$ ou $M \in P - \{A';A\}$ et $\operatorname{Arg} Z = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'}}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MA'}$.

> L'ensemble des points M tels que Z soit imaginaire pur est le cercle de diamètre $[A'A]$ privé du point A.

EXERCICE 28

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(0, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Soit $A(1;0)$ et $B(-1;0)$

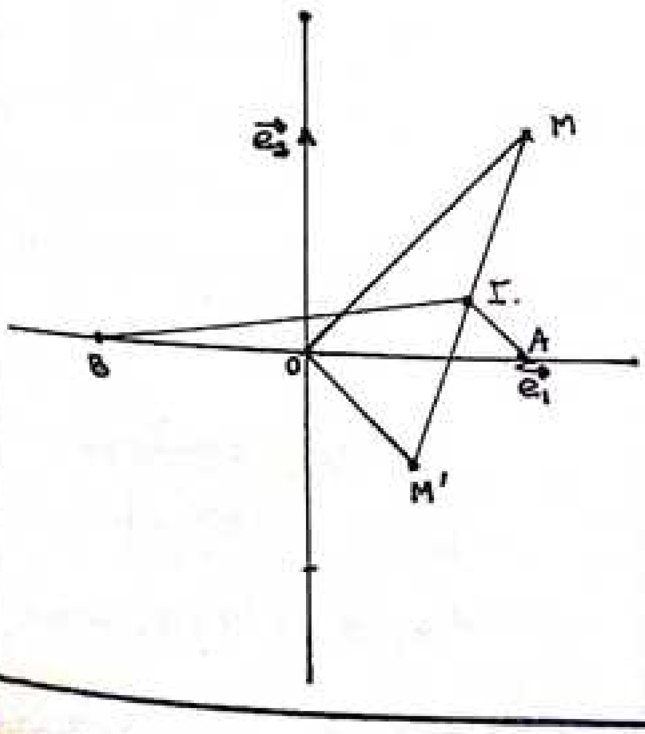
A tout point M d'affixe $z \neq 0$ on associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$zz' = 1$$

1) a) Construisons M' quand $z = 1+i$

$zz' = 1 \Leftrightarrow z' = \frac{1}{z}$

Pour $z = 1+i$, $z' = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$



b) Dans le cas général, montrons que la droite (AB) est bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}})$ et $OM.OM' = OA^2$

$zz' = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Arg}(zz') = \operatorname{Arg} 1$

$\Leftrightarrow \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z' = 0$

$\Leftrightarrow (\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}) + (\vec{e_1}, \overrightarrow{OM'}) = 0$

$\Leftrightarrow (\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OM'}, \vec{e_1})$

or $\vec{e_1} = \overrightarrow{OA}$ et $O \in [AB]$

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) = (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OA})$

> (AB) est donc bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}})$ car $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}})$

$zz' = 1 \Leftrightarrow |zz'| = 1$

$\Leftrightarrow |z|.|z'| = 1$

or $|z| = OM$, $|z'| = OM'$ et $OA^2 = 1$

donc : $\boxed{OM.OM' = OA^2}$

2) a) Vérifions que :

$\forall z \in \mathbb{C}^*, \left(\frac{z+z'}{2} - 1\right)\left(\frac{z+z'}{2} + 1\right) = \left(\frac{z-z'}{2}\right)^2$

$\forall z \in \mathbb{C}^*, \left(\frac{z+z'}{2} - 1\right)\left(\frac{z+z'}{2} + 1\right) = \left(\frac{z+z'}{2}\right)^2 - 1$

$= \frac{z^2 + z'^2 + 2zz'}{4} - 1$ or $zz' = 1$

$= \frac{z^2 + z'^2 + 2zz' - 4zz'}{4}$

$= \frac{z^2 + z'^2 - 2zz'}{4} = \left(\frac{z-z'}{2}\right)^2$

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}^*, \left(\frac{z+z'}{2} - 1\right)\left(\frac{z+z'}{2} + 1\right) = \left(\frac{z-z'}{2}\right)^2}$$

b) Soit I le milieu de $[MM']$

En utilisant ce qui précède, montrons que :

- $IA.IB = IM^2$

I milieu de $[MM'] \Leftrightarrow z_I = \frac{z+z'}{2}$

On sait aussi que $z_A = 1$, $z_B = -1$

$$z - z_I = z - \frac{z+z'}{2} = \frac{z-z'}{2}$$

$$\left(\frac{z+z'}{2}-1\right)\left(\frac{z+z'}{2}+1\right) = \left(\frac{z-z'}{2}\right)^2$$

$\Leftrightarrow (z_I - z_A)(z_I - z_B) = (z - z_I)^2$ (2)

$\Leftrightarrow |(z_I - z_A)(z_I - z_B)| = |z - z_I|^2$

$\Leftrightarrow |z_I - z_A||z_I - z_B| = |z - z_I|^2$

$\Leftrightarrow \boxed{IA.IB = IM^2}$

- Montrons que pour M distinct de A et B, la droite (MM') est bissectrice de l'angle $(\vec{IA}, \vec{IB})$

(2) $\Leftrightarrow (z_I - z_A)(z_I - z_B) = (z - z_I)^2$

$\Rightarrow \operatorname{Arg}[(z_I - z_A)(z_I - z_B)] = \operatorname{Arg}[z - z_I]^2$

$\Leftrightarrow \operatorname{Arg}(z_I - z_A) + \operatorname{Arg}(z_I - z_B) = 2\operatorname{Arg}(z - z_I)$

$\Leftrightarrow (\vec{e_1}, \vec{IA}) + (\vec{e_1}, \vec{IB}) = 2(\vec{e_1}, \vec{IM})$

$\Leftrightarrow (\vec{IM}, \vec{e_1}) + (\vec{e_1}, \vec{IA}) = (\vec{IB}, \vec{e_1}) + (\vec{e_1}, \vec{IM})$

$\Leftrightarrow (\widehat{\vec{IM}, \vec{IA}}) = (\widehat{\vec{IB}, \vec{IM}})$; $I \in [MM']$

$\Leftrightarrow (\vec{IB}, \vec{MM'}) = (\vec{MM'}, \vec{IA})$

On conclut que:

(MM') est bissectrice de l'angle $(\widehat{\vec{IA}, \vec{IB}})$

3) a) Montrons que:

$$\left|\frac{z+z'}{2}-1\right| + \left|\frac{z+z'}{2}+1\right| = |z|+|z'|$$

Posons $z = t^2$ et $z' = t'^2$

on a: $\begin{cases} |z| = |t|^2, \ |z'| = |t'|^2 \\ zz' = 1 \Leftrightarrow (tt')^2 = 1 \Rightarrow tt' = -1 \end{cases}$

$$\left|\frac{z+z'}{2}-1\right| = \left|\frac{t^2+t'^2}{2} - tt'\right| = \left|\frac{t^2+t'^2-2tt'}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}|(t-t')^2| = \frac{1}{2}|t-t'|^2$$

$$= \frac{1}{2}(t-t')(\bar{t}-\bar{t'})$$

$$= \frac{1}{2}(t\bar{t} + t'\bar{t'} - t\bar{t'} - \bar{t}t')$$

$$= \frac{1}{2}\left[|t|^2+|t'|^2 - (t\bar{t'}+\bar{t}t')\right]$$

$$\left|\frac{z+z'}{2}-1\right| = \frac{1}{2}(|z|+|z'|) - \operatorname{Re}(t\bar{t'}) \ (1)$$

On montre de manière analogue que:

$$\left|\frac{z+z'}{2}+1\right| = \frac{1}{2}(|z|+|z'|) + \operatorname{Re}(t\bar{t'}) \ (2)$$

(1) et (2) $\Leftrightarrow \left|\frac{z+z'}{2}-1\right| + \left|\frac{z+z'}{2}+1\right| = |z|+|z'|$

$$\boxed{\left|\frac{z+z'}{2}-1\right| + \left|\frac{z+z'}{2}+1\right| = |z|+|z'|} \ (3)$$

b) Déduisons-en une nouvelle propriété de la configuration A, B, M et M'.

(3) $\Leftrightarrow \boxed{IA + IB = OM + OM'}$

EXERCICE 29

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, soit les points A, I et B d'affixes respectives 1, 2 et 3 . Soit P' le plan P privé de I et f l'application de

P' dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe
$$z' = \frac{1}{z-2} + 2$$

1) Déterminer les points M de P' vérifiant $f(M) = M$

$f(M) = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \frac{1}{z-2} + 2 = z$

$\Leftrightarrow \frac{1}{z-2} = z-2 \Leftrightarrow (z-2)^2 = 1$

$\Leftrightarrow z-2 = 1$ ou $z-2 = -1$

$\Leftrightarrow z = 3$ ou $z = 1$

$\boxed{\text{les points M de P' vérifiant } f(M)=M \text{ sont A et B}}$

2) Calculons en fonction de z, les affixes des vecteurs $\vec{IM}$ et $\vec{IM'}$

$Z_{\vec{IM}} = z - z_I = z - 2$

$Z_{\vec{IM'}} = z' - 2 = \frac{1}{z-2} + 2 - 2 = \frac{1}{z-2}$

$$\boxed{Z_{\vec{IM}} = z-2 \qquad Z_{\vec{IM'}} = \frac{1}{z-2}}$$

Déduisons-en une relation entre les angles : $(\widehat{\vec{e_1}, \vec{IM}})$ et $(\widehat{\vec{e_1}, \vec{IM'}})$

$(\widehat{\vec{e_1}, \vec{IM}}) = \text{Arg}(z-2)$

$(\widehat{\vec{e_1}, \vec{IM'}}) = \text{Arg}(z'-2) = \text{Arg}\left(\frac{1}{z-2}\right)$

$= -\text{Arg}(z-2)$

$= -(\widehat{\vec{e_1}, \vec{IM}})$

$$\boxed{(\widehat{\vec{e_1}, \vec{IM'}}) = -(\widehat{\vec{e_1}, \vec{IM}})}$$

Déduisons-en une relation entre IM et IM'

$IM = |z-2| \qquad IM' = |z'-2| = \left|\frac{1}{z-2}\right|$

$IM' = \frac{1}{|z-2|} = \frac{1}{IM}$

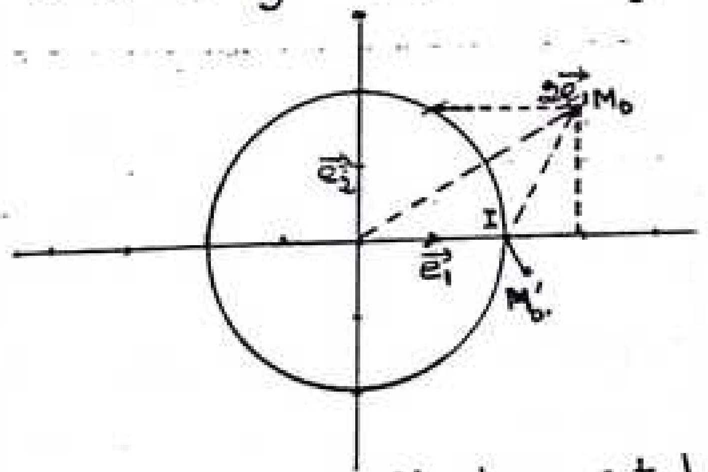
$$\boxed{IM' = \frac{1}{IM}}$$

Plaçons le point M_0 d'affixe
$$z_0 = 2 + 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
puis le point M'_0 en utilisant ce qui précède.

$IM_0 = |z_0 - 2| = 2$

$IM'_0 = \frac{1}{IM_0} = \frac{1}{2}$

$(\widehat{\vec{e_1}, \vec{IM_0}}) = \frac{\pi}{3} \qquad (\widehat{\vec{e_1}, \vec{IM'_0}}) = -\frac{\pi}{3}$



3) On suppose que M est un point de P' distinct de A et de B.

Calculons $z'-1$ et $z'-3$ en fonction de z

$z'-1 = \frac{1}{z-2} + 2 - 1 = \frac{1}{z-2} + 1 = \frac{z-1}{z-2}$

$z'-3 = \frac{1}{z-2} + 2 - 3 = \frac{1}{z-2} - 1 = \frac{3-z}{z-2}$

$$\boxed{z'-1=\frac{z-1}{z-2}} \quad \boxed{z'-3=\frac{3-z}{z-2}}$$

Vérifions que : $\frac{1-z'}{3-z'}=-\frac{1-z}{3-z}$

$1-z'=\frac{1-z}{z-2}$ $\quad 3-z'=-\frac{3-z}{z-2}$

$$\frac{1-z'}{3-z'}=\left(\frac{1-z}{z-2}\right)\left(-\frac{z-2}{3-z}\right)=-\frac{1-z}{3-z}$$

$$\boxed{\frac{1-z'}{3-z'}=-\frac{1-z}{3-z}} \quad (1)$$

Déduisons-en une relation entre $\frac{M'A}{M'B}$ et $\frac{MA}{MB}$ puis une relation entre les angles $(\widehat{\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}})$

$(1) \Leftrightarrow \left|\frac{1-z'}{3-z'}\right|=\left|-\frac{1-z}{3-z}\right|=\left|\frac{1-z}{3-z}\right|$

or $\left|\frac{1-z'}{3-z'}\right|=\frac{|1-z'|}{|3-z'|}=\frac{M'A}{M'B}$

$\left|\frac{1-z}{3-z}\right|=\frac{|1-z|}{|3-z|}=\frac{MA}{MB}$

On en déduit que : $\boxed{\frac{M'A}{M'B}=\frac{MA}{MB}}$

$(1) \Leftrightarrow Arg\left(\frac{1-z'}{3-z'}\right)=Arg\left(-\frac{1-z}{3-z}\right)$

$$=\pi+Arg\left(\frac{1-z}{3-z}\right)$$

or $Arg\left(\frac{1-z'}{3-z'}\right)=(\widehat{\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}})$ et

$Arg\left(\frac{1-z}{3-z}\right)=(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}})$

On en déduit que :

$$\boxed{(\widehat{\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}})=\pi+(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}})}$$

Démontrons que si M appartient à la médiatrice de [AB], il en est de même pour M'

M appartient à la médiatrice du segment [AB] équivaut à :

$MA=MB \Leftrightarrow \frac{MA}{MB}=1$

$\Leftrightarrow \frac{M'A}{M'B}=1$ car $\frac{M'A}{M'B}=\frac{MA}{MB}$

$\Leftrightarrow M'A=M'B \Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice du segment [AB].

Si M appartient à la médiatrice de [AB], il en est de même pour M'

EXERCICE 30

Soit l'application $f(z)=\frac{z-2i}{z+1}$ définie sur $\mathbb{C}-\{-1\}$

On désigne par A, B, M et M' les points du plan complexe d'affixes respectives -1, $2i$, z et $f(z)$

1) Calculons le module et un argument de $f(i)$

$f(i)=\frac{i-2i}{i+1}=-\frac{1}{2}(1+i)$

$|f(i)|=\frac{1}{2}|1+i|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$Arg(f(i))=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$

$$\boxed{|f(i)|=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad Arg(f(i))=\frac{5\pi}{4}}$$

2) Interprétons géométriquement $|f(z)|$ et $Arg(f(z))$

$|f(z)| = \left|\frac{z-2i}{z+1}\right| = \frac{|z-2i|}{|z+1|} = \frac{BM}{AM}$

$$\begin{aligned} Arg(f(z)) &= Arg(z-2i) - Arg(z+1) \\ &= (\vec{e_1}, \overrightarrow{BM}) - (\vec{e_1}, \overrightarrow{AM}) \\ &= (\overrightarrow{AM}, \vec{e_1}) + (\vec{e_1}, \overrightarrow{BM}) \\ &= (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \end{aligned}$$

$\lvert f(z)\rvert = \frac{BM}{AM}$	$Arg(f(z)) = (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}})$

Déterminons et représentons l'ensemble E_1 des points M du plan tel que $|f(z)| = 1$

$|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \frac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow BM = AM$

> L'ensemble E_1 des points M du plan tel que $|f(z)| = 1$ est la médiatrice du segment $[AB]$

3) Déterminons et représentons :

a) L'ensemble E_2 des points M du plan d'affixe z tels que $f(z)$ soit un réel strictement négatif.

$f(z) \in \mathbb{R}^*_- \Leftrightarrow Arg(f(z)) = \pi$

$\Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}}) = \pi$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires de sens contraires $\Leftrightarrow M \in]AB[$

> L'ensemble E_2 des points M du plan d'affixe z tels que $f(z)$ soit un réel strictement négatif est $]AB[$

b) L'ensemble E_3 des points M du plan d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

Pour $M \notin \{A; B\}$, $f(z)$ imaginaire pur entraîne que : $Arg(f(z)) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Rightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$

> L'ensemble E_3 des points M du plan d'affixe z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A.

4) a) Calculons, pour tout $z \neq -1$, $|f(z)-1| \times |z+1|$

$f(z) - 1 = \frac{z-2i}{z+1} - 1 = \frac{-1-2i}{z+1}$

$|f(z) - 1| = \frac{\sqrt{5}}{|z+1|}$

$$\boxed{|f(z)-1| \times |z+1| = \sqrt{5}}$$

b) On suppose que M décrit le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Montrons que M' appartient à un cercle $(\mathscr{C})$ que l'on déterminera.

M décrit le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow |z+1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

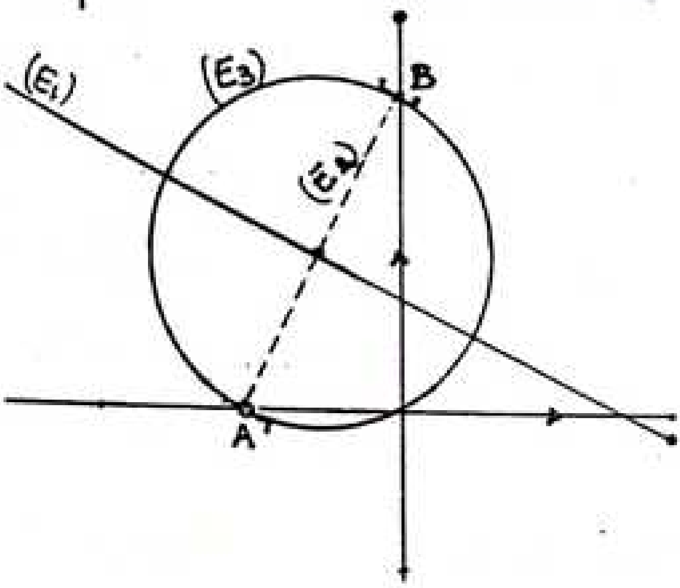
or $|f(z)-1| \times |z+1| = \sqrt{5}$

$\Rightarrow |f(z)-1| \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |f(z)-1| = 2$

$\Leftrightarrow A'M' = 2$, Soit $A' = S_O(A)$, $z_{A'} = 1$

$\boxed{\text{M' décrit donc le cercle } (\mathscr{C}) \text{ de centre A' et de rayon } r = 2}$

Représentation de E_1, E_2 et E_3



EXERCICE 31

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout réel x, associe

$$f(x) = \frac{-1-2ix}{2+ix}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par M le point d'affixe $f(x)$.

1) Déterminons l'ensemble E des réels x tels que $|f(x)| \leq 1$ où $|f(x)|$ désigne le module du nombre complexe $f(x)$

$|f(x)| \leq 1 \Leftrightarrow |f(x)|^2 \leq 1$ (a)

$|f(x)|^2 = \frac{1+4x^2}{4+x^2}$

(a) $\Leftrightarrow 1+4x^2 \leq 4+x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 \leq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

$\boxed{\text{L'ensemble des réels } x \text{ tels que } |f(x)| \leq 1 \text{ est } E = [-1;1].}$

2) Démontrons que :

$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2} \leq |f(x)| < 2$

* $|f(x)|^2 - 4 = \frac{1+4x^2}{4+x^2} - 4 = \frac{-15}{4+x^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{-15}{4+x^2} < 0 \Leftrightarrow |f(x)|^2 - 4 < 0$

$\Leftrightarrow |f(x)|^2 < 4 \Leftrightarrow |f(x)| < 2$ (a)

* $|f(x)|^2 - \frac{1}{4} = \frac{1+4x^2}{4+x^2} - \frac{1}{4} = \frac{15x^2}{4(4+x^2)}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{15x^2}{4(4+x^2)} \geq 0 \Leftrightarrow |f(x)|^2 - \frac{1}{4} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq |f(x)|^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq |f(x)|$ (b)

(a) et (b) nous permettent de conclure :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2} \leq |f(x)| < 2}$$

3) a) Calculons $f(x) + \frac{5}{4}$

$f(x) + \frac{5}{4} = \frac{-1-2ix}{2+ix} + \frac{5}{4} = \frac{-4-8ix+10+5ix}{4(2+ix)}$

$$f(x)+\frac{5}{4}=\frac{6-3ix}{4(2+ix)}=\frac{3(2-ix)}{4(2+ix)}$$

$$\boxed{f(x)+\frac{5}{4}=\frac{3}{4}\left(\frac{2-ix}{2+ix}\right)}$$

Déduisons-en que lorsque x parcourt $\mathbb{R}$, les points M appartiennent à un cercle dont nous déterminerons le centre et le rayon

$$f(x)+\frac{5}{4}=\frac{3}{4}\left(\frac{2-ix}{2+ix}\right)$$

$$\left|f(x)+\frac{5}{4}\right|=\frac{3}{4}\,\frac{|2-ix|}{|2+ix|}$$

$$=\frac{3}{4} \text{ car } |2-ix|=|2+ix|$$

$$\left|f(x)+\frac{5}{4}\right|=\frac{3}{4} \quad (1).$$

Soit A le point du plan d'affixe $z_A=-\frac{5}{4}$

$(1) \Leftrightarrow |z_M-z_A|=\frac{3}{4} \Leftrightarrow AM=\frac{3}{4}$.

> Lorsque x parcourt $\mathbb{R}$, les points M appartiennent au cercle de centre $A\left(-\frac{5}{4};0\right)$ et de rayon $r=\frac{3}{4}$

b) Retrouvons à l'aide de la question 3°a) le résultat du 2°)

D'après l'inégalité triangulaire on a:

$$\big||z|-|z'|\big|\le|z-z'| \quad (2)$$

Posons $z=f(x)$ et $z'=-\frac{5}{4}$

$(2) \Leftrightarrow \left||f(x)|-\left|\frac{-5}{4}\right|\right|\le\left|f(x)+\frac{5}{4}\right|$

$\Leftrightarrow \left||f(x)|-\frac{5}{4}\right|\le\frac{3}{4}$ car $\left|f(x)+\frac{5}{4}\right|=\frac{3}{4}$

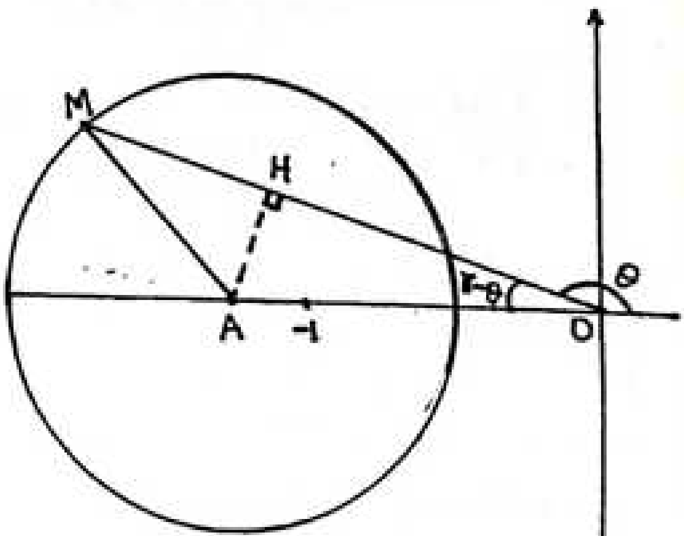
$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\le|f(x)|-\frac{5}{4}\le\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\le|f(x)|\le\frac{3}{4}+\frac{5}{4}$ On a donc

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{1}{2}\le|f(x)|\le 2}$$

c) On désigne par θ l'argument de $f(x)$ appartenant à $[0;2\pi[$

A l'aide de la question 3°a) démontrons que $|\sin\theta|\le\frac{3}{5}$



Soit H le projeté orthogonal de A sur (OM)

On a: $AH\le AM \Leftrightarrow \frac{AH}{OA}\le\frac{AM}{OA}$

$\Leftrightarrow |\sin(\pi-\theta)|\le\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{3}{5}$

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

Finalement on a:

$$\boxed{|\sin\theta|\le\frac{3}{5}}$$

EXERCICE 32

Posons $f(z)=\frac{z+1-2i}{z+2+i}$

Posons $z=x+iy$ On montre que:

$$f(z)=\frac{(x+1)+i(y-2)}{(x+2)+i(y+1)}$$

$$=\frac{[(x+1)+i(y-2)][(x+2)-i(y+1)]}{(x+2)^2+(y+1)^2}$$

$$f(z)=\frac{x^2+y^2+3x-y}{(x+2)^2+(y+1)^2}+i\,\frac{-3x+y-5}{(x+2)^2+(y+1)^2}$$

Désignons par A et B les points du plan d'affixes respectives :

$z_A = -1+2i \quad z_B = -2-i$

$f(z) = \frac{z-z_A}{z-z_B} \quad |f(z)| = \frac{AM}{BM}$

$\arg(f(z)) = (\widehat{\vec{BM}, \vec{AM}})\ (2\pi)$

1) Déterminons l'ensemble E_1 des points M d'affixe telle que $f(z)$ soit réel.

1ère méthode : méthode algébrique.

$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{-3x+y-5}{(x+2)^2+(y+1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x+y-5=0 \\ (x;y) \neq (-2;-1) \end{cases}$

$\boxed{\text{(E}_1\text{) est la droite d'équation } y=3x+5 \text{ privé du point } B(-2;-1)}$

2e méthode : méthode géométrique

$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ confondu à } A \ (a) \\ \text{ou} \\ M \notin \{A;B\},\ \arg(f(z)) = k\pi \ (b) \end{cases}$

(b) $\Rightarrow (\vec{BM}, \vec{AM}) = k\pi \Leftrightarrow \vec{BM}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires $\Rightarrow$ A, M et B sont alignés

$\boxed{\text{(E}_1\text{) est la droite (AB) privée du point B}}$

2) Déterminons l'ensemble (E_2) des points M d'affixe z telle que $f(z)$ soit réel négatif.

1ère méthode : méthode algébrique

$f(z) \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Im}(f(z)) = 0 \\ \operatorname{Re}(f(z)) \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x+5 \\ x^2+y^2+3x-y \leq 0 \\ (x;y) \neq (-2;-1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x+5 \\ x^2+(3x+5)^2+3x-(3x+5) \leq 0 \\ x \neq -2 \text{ et } y \neq -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x+5 \\ x^2+3x+2 \leq 0 \\ x \neq -2 \text{ et } y \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x+5 \\ -2 < x \leq -1 \end{cases}$

$\boxed{\text{(E}_2\text{) est le segment d'équation : } \begin{cases} y = 3x+5 \\ -2 < x \leq -1 \end{cases}}$

2e méthode : méthode géométrique

$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ confondu à } A \ (c) \\ \text{ou} \\ M \notin \{A;B\},\ \operatorname{Arg}(f(z)) = \pi \ (d) \end{cases}$

(d) $\Rightarrow (\vec{BM}, \vec{AM}) = \pi \Leftrightarrow \vec{BM}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires de sens opposés.

On pourra verifier que $M \in [AB[$

$\boxed{\text{(E}_2\text{) est le segment } [AB[}$

3) Déterminons l'ensemble (E_3) des points M d'affixe z telle que $f(z)$ soit réel positif.

1ère méthode : méthode algébrique :

$f(z) \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Im}(f(z)) = 0 \\ \text{et} \\ \operatorname{Re}(f(z)) \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x+5 \\ x^2+y^2+3x-y \geq 0 \\ x \neq -2 \text{ et } y \neq -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x+5 \\ x^2+3x+2 \geq 0 \\ x \neq -2 \text{ et } y \neq -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x+5 \\ x < -2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = 3x+5 \\ x \geq -1 \end{cases}$

(E3) est la réunion des deux demi-droites d'équations : $\begin{cases} y=3x+5 \\ x<-2 \end{cases}$ et $\begin{cases} y=3x+5 \\ x\geq -1 \end{cases}$

2e méthode : méthode géométrique.

$f(z) \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ confondu à } A \ (e) \\ M \notin \{A;B\},\ \operatorname{Arg}(f(z)) = 0 \ (f) \end{cases}$

$(f) \Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires de même sens.

On verifie rapidement que M appartient à la droite privé du segment]AB]

(E3) est la droite (AB) privée du segment]AB].

4) **Déterminons l'ensemble (E4) des points M d'affixe z telle que : f(z) soit imaginaire pur.**

1ère méthode : algébrique

f(z) imaginaire pur ssi $Re(f(z)) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+3x-y=0 \\ x \neq -2 \text{ et } y \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+\frac{3}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{2} \\ x \neq -2 \text{ et } y \neq -1 \end{cases}$

(E4) est le cercle centre $\Omega(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$ et rayon $r = \sqrt{\frac{5}{2}}$ privé du point $B(-2;-1)$

2e méthode : méthode géométrique

f(z) imaginaire pur

$\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ confondu à } A \ (g) \\ \text{ou} \\ M \notin \{A;B\} \text{ et } \arg(f(z)) = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (h) \end{cases}$

$(h) \Rightarrow (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

(E4) est le cercle de diamètre [AB] privé du point B.

5) **Déterminons l'ensemble (E5) des points M d'affixe z telle que f(z) soit imaginaire pur à partie imaginaire strictement négative :**

1ère méthode : algébrique

f(z) verifie la condition ci-dessus ssi

$\begin{cases} Re(f(z)) = 0 \\ \text{et} \\ Im(f(z)) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+3x-y=0 \\ -3x+y-5<0 \\ x \neq -2 \text{ et } y \neq -1 \end{cases}$

(E5) est l'arc de cercle d'équation $x^2+y^2+3x-y=0$ situé dans le demi-plan de frontière la droite (Δ) d'équation $y = 3x+5$ contenant le point $C(-2;0)$

2e méthode : méthode géométrique.

$f(z) \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \operatorname{Arg}(f(z)) = -\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = -\frac{\pi}{2}$

(E5) est le demi-cercle [AB], contenu dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas l'origine du repère, privé des points A et B

6) **Déterminons l'ensemble (E6) des points M d'affixe z telle que f(z) soit imaginaire pur avec $Im(f(z)) > 0$**

1ère méthode : méthode algébrique

$f(z) \in \mathbb{R}_+^* \iff \begin{cases} x^2+y^2+3x-y=0 \\ -3x+y-5>0 \\ x\neq -2 \text{ et } y\neq -1 \end{cases}$

(E_6) est l'arc de cercle d'équation $x^2+y^2+3x-y=0$ situé dans le demi-plan de frontière contenant l'origine du repère

7) Déterminons l'ensemble (E_7) des points M d'affixe z telle que $|f(z)|=1$

1ère méthode : méthode algébrique :

$|f(z)|=1 \iff |f(z)|^2=1$

$\iff (x+1)^2+(y-2)^2=(x+2)^2+(y+1)^2$

$\iff 2x+6y=0 \iff x+3y=0$

(E_7) est la droite d'équation $x+3y=0$

2e méthode : méthode géométrique

$|f(z)|=1 \iff \dfrac{AM}{BM}=1 \iff AM=BM$

(E_7) est la médiatrice de $[AB]$

EXERCICE 33

Soit A le point d'affixe $2i$ et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=\dfrac{2iz-5}{z-2i}$.

1) Démontrons que f admet deux points invariants.

Un point M est invariant par f ssi son affixe z est solution de l'équation

$\dfrac{2iz-5}{z-2i}=z \iff z^2-4iz+5=0$

$\Delta'=(2i)^2-5=-9=(3i)^2$

$z_1=2i-3i=-i \qquad z_2=2i+3i=5i$

f admet donc deux points invariants A et B d'affixes respectives $z_A=-i$ et $z_B=5i$

2) Démontrons que f est bijective et déterminons sa bijection réciproque

Soit $z_1 \in \mathbb{C}-\{2i\}$, résolvons l'équation (E) : $z\in\mathbb{C}-\{2i\}$, $f(z)=z_1$

$(E) \Rightarrow \dfrac{2iz-5}{z-2i}=z_1 \iff 2iz-5=zz_1-2iz_1$

$\iff z(2i-z_1)=5-2iz_1$

$\iff z=\dfrac{2iz_1-5}{z_1-2i}$

(E) admet une seule solution pour tout z_1 élément de $\mathbb{C}-\{2i\}$. L'application f est donc bijective

Soit f^{-1} sa bijection réciproque :

$f^{-1}: \mathbb{C}-\{2i\} \longrightarrow \mathbb{C}-\{2i\}$

$z \longmapsto \dfrac{2iz-5}{z-2i}$

3) Démontrons que la droite $(O,\vec{e_2})$ privée de A est globalement invariante par f

$M \in (O,\vec{e_2})$ privée de $A \Leftrightarrow z = ai$

avec $a \in \mathbb{R} - \{2\}$

$\Leftrightarrow z' = f(ai) = \frac{2i(ai)-5}{ai-2i} = \frac{-2a-5}{i(a-2)} = i\frac{2a-5}{a-2}$

$\forall a \in \mathbb{R}-\{2\}, \frac{2a-5}{a-2} \in \mathbb{R}-\{2\}$

$\Leftrightarrow M' \in (O;\vec{e_2})$ privée de A

> La droite $(O,\vec{e_2})$ privée de A est donc globalement invariante par f.

4) a) Démontrons que $|z'-2i||z-2i| = 9$

$z'-2i = \frac{2iz-5}{z-2i} - 2i = \frac{-9}{z-2i}$

$|z'-2i| = \left|\frac{-9}{z-2i}\right| = \frac{9}{|z-2i|}$

$|z'-2i| \times |z-2i| = \frac{9}{|z-2i|} \times |z-2i| = 9$

$\boxed{|z'-2i||z-2i| = 9}$ (1)

b) Déduisons-en l'image par f du cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon R

$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow AM = R \Leftrightarrow |z-2i| = R$

(1) devient $|z'-2i| \times R = 9 \Leftrightarrow |z'-2i| = \frac{9}{R}$

$\Leftrightarrow AM' = \frac{9}{R}$

> L'image de $(\mathscr{C})$ par f est le cercle $(\mathscr{C}')$ de centre A et de rayon $R' = \frac{9}{R}$

Déterminons R pour que $(\mathscr{C})$ soit globalement invariant par f.

$(\mathscr{C})$ globalement invariant par f entraine $(\mathscr{C}')$ confondu à $(\mathscr{C})$

Or $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont concentriques en A; ils sont donc confondus ssi $R' = R$

$\Leftrightarrow \frac{9}{R} = R \Leftrightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$

$\boxed{R = 3}$

EXERCICE 34

Soit a et b deux nombres complexes non nuls, A et B leurs images respectives.

1) a) Démontrons que les points O, A et B sont alignés ssi $\bar{a}b \in \mathbb{R}$.

O, A et B sont alignés ssi $(\widehat{\vec{OA},\vec{OB}}) = k\pi$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{b}{a}\right) = k\pi \Leftrightarrow \frac{b}{a} \in \mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow \frac{\bar{a}b}{\bar{a}a} \in \mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow \bar{a}b \in \mathbb{R}^*$ car $\bar{a}a \in \mathbb{R}^*_+$

> Les points O, A et B sont alignés ssi $\bar{a}b \in \mathbb{R}$

b) Démontrons que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un nombre réel si et seulement si les points O, A et B sont alignés ou si $OA = OB$

$\frac{(a+b)^2}{ab} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\left[\frac{(a+b)^2}{ab}\right]} = \frac{(a+b)^2}{ab}$

$\Leftrightarrow \frac{\bar{a}}{\bar{b}} + \frac{\bar{b}}{\bar{a}} + 2 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2$

$\Leftrightarrow \frac{\bar{a}}{\bar{b}} + \frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\bar{a}^2+\bar{b}^2}{\bar{a}\bar{b}} = \dfrac{a^2+b^2}{ab}$

$\Leftrightarrow ab(\bar{a}^2+\bar{b}^2) = \bar{a}\bar{b}(a^2+b^2)$

$\Leftrightarrow ab\bar{a}^2 + ab\bar{b}^2 - \bar{a}\bar{b}a^2 - \bar{a}\bar{b}b^2 = 0$

$\Leftrightarrow a\bar{a}(\bar{a}b - a\bar{b}) - b\bar{b}(\bar{a}b - a\bar{b}) = 0$

$\Leftrightarrow (\bar{a}b - a\bar{b})(a\bar{a} - b\bar{b}) = 0$

$\Leftrightarrow \bar{a}b - a\bar{b} = 0$ (1) ou $a\bar{a} - b\bar{b} = 0$ (2)

(1) $\Leftrightarrow \bar{a}b = a\bar{b} = \overline{\bar{a}b} \Leftrightarrow \bar{a}b \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ O, A et B sont alignés.

(2) $\Leftrightarrow |a|^2 = |b|^2 \Leftrightarrow OA^2 = OB^2 \Leftrightarrow OA = OB$

Conclusion :

$\boxed{\dfrac{(a+b)^2}{ab}$ est un réel si et seulement si les points O, A et B sont alignés ou si $OA = OB$.$}$

2) On suppose dans cette question que les points O, A et B ne sont pas alignés et que $|a| = |b| = 1$

Démontrons que $\dfrac{(a+b)^2}{ab}$ est un nombre réel strictement positif

Posons $\alpha = \operatorname{Arg} a$ et $\beta = \operatorname{Arg} b$.

$\dfrac{(a+b)^2}{ab} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + 2$

$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \left|\dfrac{b}{a}\right| = 1$; $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{a}{b}\right) = -\operatorname{Arg}\left(\dfrac{b}{a}\right)$
$= \alpha - \beta$.

$\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{b}{a}$ sont donc des complexes conjugués

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 2\operatorname{Re}\left(\dfrac{a}{b}\right) = 2\cos(\alpha-\beta)$

$\dfrac{(a+b)^2}{ab} = 2\left[1 + \cos(\alpha-\beta)\right]$

or $-1 < \cos(\alpha-\beta) < 1$ car les points O, A et B ne sont pas alignés

$\Leftrightarrow 0 < 1 + \cos(\alpha-\beta) < 2$

$\Leftrightarrow 0 < 2\left[1+\cos(\alpha-\beta)\right] < 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{(a+b)^2}{ab} \in \mathbb{R}_*^+$.

3) <u>Application</u>

Soit M_1 et M_2 deux points d'affixes respectives z_1 et z_2 tels que les points O, M_1 et M_2 ne sont pas alignés

a) <u>Calculons, en fonction de z_1 et z_2, l'affixe Z du barycentre I du système</u> $\{(M_1, |z_2|); (M_2, |z_1|)\}$

$$\boxed{Z = \frac{z_1|z_2| + z_2|z_1|}{|z_1| + |z_2|}}$$

Démontrons que $\dfrac{Z^2}{z_1 z_2}$ est un nombre réel.

$\dfrac{Z^2}{z_1z_2} = \dfrac{1}{(|z_1|+|z_2|)^2} \times \dfrac{z_1^2|z_2|^2 + z_2^2|z_1|^2 + 2z_1z_2|z_1||z_2|}{z_1z_2}$

$= \dfrac{1}{(|z_1|+|z_2|)^2}\left(z_1\dfrac{|z_2|^2}{z_2} + z_2\dfrac{|z_1|^2}{z_1} + 2|z_1||z_2|\right)$

$= \dfrac{|z_1||z_2|}{(|z_1|+|z_2|)^2}\left(\dfrac{z_1|z_2|}{z_2|z_1|} + \dfrac{z_2|z_1|}{z_1|z_2|} + 2\right)$

Posons $a = \dfrac{z_1|z_2|}{z_2|z_1|}$ $b = \dfrac{|z_1|z_2}{z_1|z_2|}$

Posons $\operatorname{Arg} z_1 = \alpha_1$ et $\operatorname{Arg} z_2 = \alpha_2$

$|a| = |b| = 1$ $\operatorname{Arg} a = \alpha_1 - \alpha_2 = -\operatorname{Arg} b$

$\Rightarrow a = \bar{b} \Leftrightarrow a + b = 2Re(a) = 2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$

$$\frac{z^2}{z_1 z_2} = \frac{|z_1||z_2|}{(|z_1|+|z_2|)^2}\left[2\cos(\alpha_1-\alpha_2)+2\right]$$

O, M_1 et M_2 ne sont pas alignés

$\Leftrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 \neq k\pi$

$\Leftrightarrow -1 < \cos(\alpha_1 - \alpha_2) < 1$

$\Leftrightarrow -2 < 2\cos(\alpha_1 - \alpha_2) < 2$

$\Leftrightarrow 0 < 2\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + 2 < 4$ (1)

or $\frac{|z_1||z_2|}{(|z_1|+|z_2|)^2} \in \mathbb{R}_*^+$ (2)

$\Leftrightarrow$ (1) et (2) $\Rightarrow \frac{z^2}{z_1 z_2} \in \mathbb{R}_*^+$

$\frac{z^2}{z_1 z_2}$ est un nombre réel strictement positif.

c) <u>Déduisons-en que $\vec{OI}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\widehat{M_1OM_2}$</u>

$$\frac{z^2}{z_1 z_2} \in \mathbb{R}_*^+ \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z^2}{z_1 z_2}\right) = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow 2\arg z - \arg z_1 - \arg z_2 = 2k\pi$

$\Leftrightarrow 2(\widehat{\vec{e_1}, \vec{OI}}) - (\widehat{\vec{e_1}, \vec{OM_1}}) - (\widehat{\vec{e_1}, \vec{OM_2}}) = 2k\pi$

$\Leftrightarrow (\widehat{\vec{OM_1}, \vec{e_1}}) + (\widehat{\vec{e_1}, \vec{OI}}) = (\widehat{\vec{OI}, \vec{e_1}}) + (\widehat{\vec{e_1}, \vec{OM_2}}) + 2k\pi$

$\Leftrightarrow (\widehat{\vec{OM_1}, \vec{OI}}) = (\widehat{\vec{OI}, \vec{OM_2}}) + 2k\pi$

On en déduit que (OI) est trice de l'angle $\widehat{M_1OM_2}$

$\vec{OI}$ est donc un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\widehat{M_1OM_2}$

EXERCICE 35

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ unité graphique 2cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $3i$, $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

A tout point M d'affixe z distinct de B, on associe le point N d'affixe :

$$Z = \frac{z - \sqrt{3}}{z + \sqrt{3}}$$

1) On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ avec x, y, X, Y réels.

<u>Exprimons X et Y en fonction de x et y</u>

$$Z = \frac{x - \sqrt{3} + iy}{x + \sqrt{3} + iy}$$

$$= \frac{(x - \sqrt{3} + iy)(x + \sqrt{3} - iy)}{(x+\sqrt{3})^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 3 + 2iy\sqrt{3}}{(x+\sqrt{3})^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow X + iY = \frac{x^2 + y^2 - 3}{(x+\sqrt{3})^2 + y^2} + i\frac{2y\sqrt{3}}{(x+\sqrt{3})^2 + y^2}$$

On en déduit que:

$X = \frac{x^2 + y^2 - 3}{(x+\sqrt{3})^2 + y^2}$	$Y = \frac{2y\sqrt{3}}{(x+\sqrt{3})^2 + y^2}$

2) a) Soit $u = s + it$ un nombre complexe non nul, s et t réels.

<u>Montrons que $\frac{\pi}{3}$ est un argument de u ssi $t > 0$ et $s = \frac{t}{\sqrt{3}}$</u>

On sait que $|u| > 0$

$$\arg u = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{3} = \frac{s}{|u|} \\ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{t}{|u|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{s} = \tan\frac{\pi}{3} \\ \frac{t}{|u|} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{s} = \sqrt{3} \\ t > 0 \text{ car } |u| > 0 \end{cases}$

Conclusion:

$\boxed{\frac{\pi}{3} \text{ est un argument de } u \text{ si et seulement si } t > 0 \text{ et } s = \frac{t}{\sqrt{3}}.}$

b) Utilisons a) pour préciser les conditions auxquelles doivent satisfaire x et y afin que $\frac{\pi}{3}$ soit un argument de Z.

D'après ce qui précède, $\frac{\pi}{3}$ est un argument de Z ssi $\begin{cases} y > 0 \\ \text{et} \\ x = \frac{y}{\sqrt{3}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ \text{et} \\ x^2+y^2-3 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0\,;\ x \neq -\sqrt{3} \text{ et } y \neq 0 \\ x^2+y^2-2y-3 = 0 \end{cases}$

$\frac{\pi}{3}$ est un argument de Z ssi :

$$\boxed{\begin{cases} x^2+y^2-2y-3 = 0 \\ y > 0 \\ x \neq -\sqrt{3}. \end{cases}}$$

3) a) Interprétations géométriques de $|Z|$ et $\arg Z$

$\lvert Z\rvert = \frac{MC}{MB}$	$\arg Z = (\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}})(2\pi)$

b) Ecrivons Z sous forme trigonométrique lorsque $z = 3i$

$z = 3i, \Rightarrow Z = \frac{3i - \sqrt{3}}{3i+\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}(1-i\sqrt{3})}{\sqrt{3}(1+i\sqrt{3})}$

$Z = -\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$

$|Z| = 1 \quad \operatorname{Arg} Z = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$\boxed{\text{Pour } z = 3i,\ Z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}$

Déduisons-en la nature du triangle ABC

Pour $z = 3i$, M est confondu à A

$|Z| = 1 \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \Leftrightarrow AC = AB$ (1)

(1) $\Leftrightarrow$ ABC est isocèle en A.

$\arg Z = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ (2)

(1) et (2) $\Leftrightarrow$ ABC est équilatéral.

c) Utilisons a) et b pour caractériser l'ensemble (E) des points M distincts de B et C tels que $\frac{\pi}{3}$ soit une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$

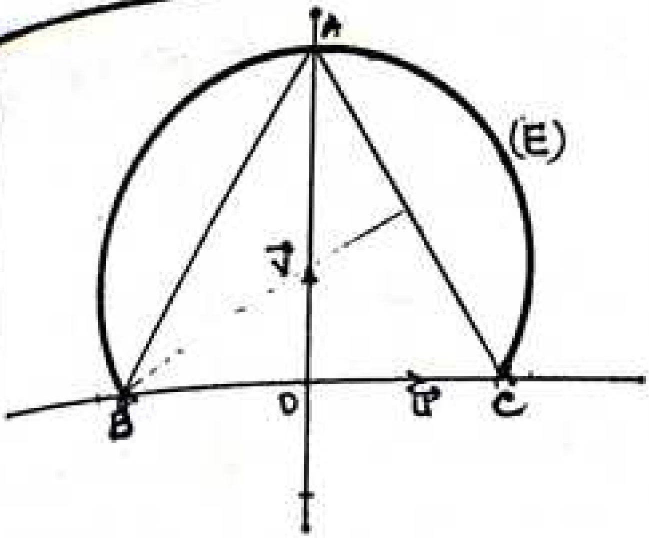
Soit $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC.

Soit (P_1) le demi-plan de bord (BC) contenant le point A.

$(E) = (\mathscr{C}) \cap (P_1)$ privé des points B et C

Construction de (E) dans (P)

Voir figure à la page suivante



EXERCICE 36

Soit le nombre complexe $z_0 = e^{\frac{i2\pi}{5}}$

1) On pose : $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$

a) Démontrons que : $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$

$1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = \frac{1 - z_0^5}{1 - z_0}$, $z_0^5 = 1$

$= \frac{1-1}{1-z_0} = 0$

$$\boxed{1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0}$$

Déduisons-en que α et β sont solut° de l'équation (E): $X^2 + X - 1 = 0$

$1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0 \iff 1 + \alpha + \beta = 0$

$\iff \alpha + \beta = -1$

$\alpha \beta = (z_0 + z_0^4)(z_0^2 + z_0^3)$

$= z_0^3 + z_0^4 + z_0^6 + z_0^7$

$= z_0^3 + z_0^4 + z_0^5 . z_0 + z_0^5 . z_0^2$, $z_0^5 = 1$

$\alpha . \beta = z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = \alpha + \beta = -1$

$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha . \beta = -1 \end{cases}$ On en déduit que α et β sont solutions de l'équat° (E): $X^2 + X - 1 = 0$

b) Exprimons α en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$

$\alpha = z_0 + z_0^4$ or $z_0^4 = \bar{z}_0$

$\iff \alpha = z_0 + \bar{z}_0 = 2Re(z_0) = 2\cos\frac{2\pi}{5}$

$$\boxed{\alpha = 2\cos\frac{2\pi}{5}}$$

c) Résolvons (E) et déduisons-en la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$

(E) $\iff X^2 + X - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5$

$X_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ $X_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$\boxed{S = \left\{ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}}$$

On sait que $\cos\frac{2\pi}{5} > 0 \Rightarrow \alpha > 0$

α solution de (E) $\iff \alpha = X_2$

$\iff 2\cos\frac{2\pi}{5} = X_2 \iff \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{X_2}{2}$

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$$

2) On désigne par A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les points d'affixes respectives 1, z_0, z_0^2, z_0^3 et z_0^4.

a) Soit H le point d'intersection de la droite $(A_1 A_4)$ avec la droite du repère $(O, \vec{e_1})$.

Démontrons que l'affixe du point H est $\cos\frac{2\pi}{5}$

$z_0^4 = \bar{z}_0 \iff A_4 = S_{(O,\vec{e_1})}(A_1)$

$(O, \vec{e_1})$ est médiatrice de $[A_1 A_4]$

$\Rightarrow$ H est milieu de $[A_1 A_4]$

$\Leftrightarrow z_H = \frac{z_0 + \overline{z_0}}{2} = \frac{2Re(z_0)}{2} = Re(z_0)$

$$\boxed{z_H = \cos\frac{2\pi}{5}}$$

b) Soit (Γ) le cercle de centre le point Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ et passant par le point B d'affixe i. (Γ) coupe la droite de repère $(O, \vec{e_1})$ en M et N, M étant le point d'abscisse positive

Démontrons que M et N ont pour affixes respectives α et β.

(Γ) a pour équation :

$$(\Gamma) : \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}$$

$M(x;y) \in (\Gamma) \cap (O, \vec{e_1}) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4} \\ y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$z_M = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \alpha \qquad z_N = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = \beta$

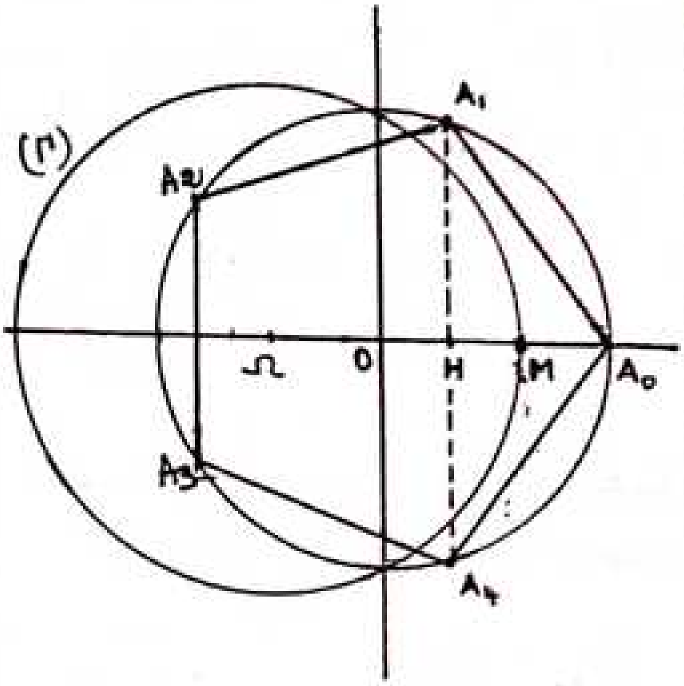
$$\boxed{\text{les points M et N ont pour affixes respectives } \alpha \text{ et } \beta.}$$

Montrons que H est milieu de [OM]

$\frac{z_O + z_M}{2} = \frac{\alpha}{2} = \cos\frac{2\pi}{5} = z_H$

$$\boxed{\text{H est donc milieu de [OM]}}$$

c) Déduisons une construction simple d'un pentagone régulier dont on connait le centre O et un sommet A_0.



EXERCICE 37

On définit de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ l'application f telle que: $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}$,
$f(z, z') = xx' + i(xy' + yx')$ avec
$z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$.

1) Montrons que $f(z, z') = f(z', z)$

$f(z, z') = xx' + i(xy' + yx')$

$f(z', z) = x'x + i(x'y + y'x)$

or $xx' = x'x$ et $xy' + yx' = x'y + y'x$

d'où $\boxed{f(z, z') = f(z', z)}$

2) Démontrons que :

$\overline{f(z, z')} = f(\bar{z}, \bar{z'})$ où $\bar{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

$\overline{f(z, z')} = xx' - i(xy' + yx')$

$f(\bar{z},\bar{z}') = xx' + i\left[x(-y') + (-y)x'\right]$

$= xx' - i(xy' + yx')$

$f(\bar{z},\bar{z}') = \overline{f(z,z')}$

$$\boxed{\overline{f(z,z')} = f(\bar{z},\bar{z}')}$$

3) a) <u>Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation</u>

<u>$f(z,2i) = 0$</u> (1)

(1) $\Leftrightarrow$ $x \times 0 + i(2x + y \times 0) = 0$

$\Leftrightarrow$ $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$z = ia,\ a \in \mathbb{R}$

$$\boxed{S = \{ia\}\ a \in \mathbb{R}}$$

b) On considère l'équation (E_θ) :

$f(z,\bar{z}) + f\left[2\sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta), \bar{z}\right] + 1 + 2i\sin 2\theta = 0$

où z désigne l'inconnue complexe et θ un paramètre réel de l'intervalle $[0,\pi]$

<u>Discutons suivant les valeurs du paramètre θ, l'existence et le nombre de solutions de (E_θ)</u>

Posons $z = x + iy$, $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ (E_θ) devient

$x^2 + 2ixy + 2x\sqrt{2}\cos\theta + i(2y\sqrt{2}\cos\theta + 2x\sqrt{2}\sin\theta) + 1 + 2i\sin 2\theta = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{2}\cos\theta + 1 + 2i(xy + y\sqrt{2}\cos\theta + x\sqrt{2}\sin\theta + 2\cos\theta\sin\theta) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{2}\cos\theta + 1 + 2i\left[x(y + \sqrt{2}\sin\theta) + \sqrt{2}\cos\theta(y + \sqrt{2}\sin\theta)\right] = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{2}\cos\theta + 1 + 2i(x + \sqrt{2}\cos\theta)(y + \sqrt{2}\sin\theta) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0 \\ \text{et} \\ (x + \sqrt{2}\cos\theta)(y + \sqrt{2}\sin\theta) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ (a) $\begin{cases} x^2 + 2x\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0 \\ x + \sqrt{2}\cos\theta = 0 \end{cases}$

ou

(b) $\begin{cases} x^2 + 2x\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0 \\ \text{et} \\ y + \sqrt{2}\sin\theta = 0 \end{cases}$

Résolvons (a)

(a) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2}\cos\theta \\ x^2 + 2x\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2}\cos\theta \\ 1 - 2\cos^2\theta = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 1 - 2\cos^2\theta = 0 \\ \theta \in [0,\pi] \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{4}$

Donc : – si $\theta \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$, (a) admet une infinité de solutions

– si $\theta \in [0;\pi] - \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$, (a) n'a pas de solution

Résolvons (b)

(b) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0 \ (1) \\ y = -\sqrt{2}\sin\theta \quad (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

$\Delta' = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta.$

<u>Signe de Δ' suivant θ</u>

θ	0		$\pi/4$		$3\pi/4$		π
Δ'		+	0	−	0	+	

– si $\theta \in \left]\pi/4; \frac{3\pi}{4}\right[$ (b) n'a pas de solution

– si $\theta \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$, (b) admet une seule solution

- si $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$, (b) admet deux solutions.

Recapitulons dans le tableau ci-dessous le nombre de solutions de E_θ suivant les valeurs de θ.

θ	0		$\pi/4$		$3\pi/4$		π
nbre de solut° de (E_θ)		2	infinité de solut°	Pas de solution	infinité de solut°	2	

- lorsque E_θ admet deux solutions z_1 et z_2, vérifions que :

$$|z_1 - z_2| = 2\sqrt{\cos 2\theta}$$

Posons $z_1 = x_1 + iy_1 \quad z_2 = x_2 + iy_2$

x_1 et x_2 sont solutions de l'équation

$x^2 + 2x\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$ avec $\cos 2\theta > 0$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = -2\sqrt{2}\cos\theta$ et $x_1 x_2 = 1$

$y_1 = y_2 = -\sqrt{2}\sin\theta$

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 0} \\ &= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \sqrt{(-2\sqrt{2}\cos\theta)^2 - 4} \\ &= \sqrt{8\cos^2\theta - 4} \\ &= 2\sqrt{2\cos^2\theta - 1} \end{aligned}$$

$$|z_1 - z_2| = 2\sqrt{\cos 2\theta}$$

> Lorsque E_θ admet deux solutions z_1 et z_2 on a : $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{\cos 2\theta}$

EXERCICE 38

Soit α un nombre réel appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation d'inconnue z :

$(E) : (1+iz)^3(1 - i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$

1) Soit z une solution de (E).

a) Montrons que $|1+iz| = |1-iz|$

z solution de (E)

$\Leftrightarrow (1+iz)^3(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$

$\Leftrightarrow \dfrac{(1+iz)^3}{(1-iz)^3} = \dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{(1+iz)^3}{(1-iz)^3}\right| = \left|\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right| = \dfrac{|1+i\tan\alpha|}{|1-i\tan\alpha|}$

or $|1+i\tan\alpha| = |1-i\tan\alpha|$ car ils sont conjugués.

$\Leftrightarrow |1+iz|^3 = |1-iz|^3$

$\Leftrightarrow |1+iz| = |1-iz|$

> Si z est une solution de (E) alors
> $|1+iz| = |1-iz|$

b) Déduisons-en que z est réel.

Posons $z = x + iy \quad (x;y) \in \mathbb{R}^2$

$|1+iz| = |1-y+ix| = \sqrt{(1-y)^2 + x^2}$

$|1-iz| = |1+y-ix| = \sqrt{(1+y)^2 + x^2}$

$|1+iz| = |1-iz| \Leftrightarrow |1+iz|^2 = |1-iz|^2$

$\Leftrightarrow (1-y)^2 + x^2 = (1+y)^2 + x^2 \Leftrightarrow 4y = 0 \Leftrightarrow y = 0$

$\Rightarrow z = x \in \mathbb{R}$

d'où z est réel.

2) a) Exprimons $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.

$1+i\tan\alpha = 1+i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}e^{i\alpha}$

$1-i\tan\alpha = 1-i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}e^{-i\alpha}$.

On a donc

$\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = e^{2i\alpha} = (e^{i\alpha})^2$

$$\boxed{\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = (e^{i\alpha})^2}$$

b) Soit z nombre réel ; on pose $z=\tan\varphi$ où $\varphi\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Ecrivons l'équation portant sur φ traduisant (E) et résolvons la

z solution de (E) $\Leftrightarrow \frac{(1+i\tan\varphi)^3}{(1-i\tan\varphi)^3} = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$

$\Leftrightarrow e^{i6\varphi} = e^{i2\alpha} \Leftrightarrow 6\varphi = 2\alpha + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \varphi = \frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2}<\alpha+k\pi<\frac{3\pi}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2}-\alpha<k\pi<\frac{3\pi}{2}-\alpha$

or $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2}<-\alpha<\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow -2\pi<k\pi<2\pi$ soit $-2<k<2$

$k\in\{-1;0;1\}$

Pour $k=-1$, $\varphi=\frac{\alpha-\pi}{3}$

Pour $k=0$, $\varphi=\frac{\alpha}{3}$

Pour $k=1$, $\varphi=\frac{\alpha+\pi}{3}$

$$S=\left\{\frac{\alpha-\pi}{3};\frac{\alpha}{3};\frac{\alpha+\pi}{3}\right\}$$

c) Déterminons les solutions z_1, z_2 et z_3 de (E).

$z=\tan\varphi$ d'où

$$\boxed{z_1=\tan\left(\frac{\alpha-\pi}{3}\right);\ z_2=\tan\left(\frac{\alpha}{3}\right);\ z_3=\tan\frac{\alpha+\pi}{3}}$$

EXERCICE 39

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit $\mathbb{C}_1$ l'ensemble $\mathbb{C}-\{-i,i\}$ et f l'application telle que : $\forall z\in\mathbb{C}_1$, $f(z)=\frac{z}{z^2+1}$

1) Résoudre l'équation : $f(z)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f(z)=\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{z}{z^2+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow z^2-z\sqrt{3}+1=0$

$\Delta = 3-4=-1=i^2$

$z_1=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$ $\quad z_2=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$

$$\boxed{S=\left\{\frac{\sqrt{3}-i}{2};\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right\}}$$

2) a) Montrons que :

$\forall(z;z')\in\mathbb{C}_1\times\mathbb{C}_1$, $f(z)=f(z')\Leftrightarrow z=z'$ ou $zz'=1$

$\forall(z;z')\in\mathbb{C}_1\times\mathbb{C}_1$,

$f(z)=f(z')\Leftrightarrow\frac{z}{z^2+1}=\frac{z'}{z'^2+1}$

$\Leftrightarrow z(z'^2+1)=z^2z'+z'$

$\Leftrightarrow zz'^2+z-z^2z'-z'=0$

$\Leftrightarrow zz'(z'-z)+z-z'=0$

$\Leftrightarrow (z-z')(1-zz')=0$

$\Leftrightarrow z=z'$ ou $zz'=1$

$\boxed{\forall (z,z') \in \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_1, \quad f(z)=f(z') \Leftrightarrow z=z' \text{ ou } zz'=1}$

b) Soit $(z,z') \in \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_1$ tel que : $|z|<1$ et $|z'|<1$

<u>Montrons que : $f(z)=f(z') \Rightarrow z=z'$</u>

$|z|<1$ et $|z'|<1 \Rightarrow |z||z'|<1$

$\Rightarrow |zz'|<1$

$\Rightarrow zz' \neq 1$

or $f(z)=f(z') \Leftrightarrow (z-z')(1-zz')=0$

$\Rightarrow z-z'=0$ car $zz' \neq 1$

$\Rightarrow z=z'$

$\boxed{\text{Si } |z|<1 \text{ et } |z'|<1 \text{ alors } f(z)=f(z') \Rightarrow z=z'}$

3) <u>Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z \in \mathbb{C}_1$ et $f(z)$ soit réel.</u>

Posons $z=x+iy$

$$f(z)=\frac{x+iy}{x^2-y^2+1+2ixy}$$

$$=\frac{(x+iy)(x^2-y^2+1-2ixy)}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$$

$$f(z)=\frac{x(x^2+y^2+1)}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}+i\,\frac{y(1-x^2-y^2)}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$$

$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}[f(z)]=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(1-x^2-y^2)=0 \\ (x;y) \notin \{(0;-1);(0;1)\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ \ \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Soit (Δ) la droite d'équation $y=0$ et $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O, de rayon $r=1$ privé des points $A(0;-1)$ et $B(0;1)$

$\boxed{\text{L'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que } f(z) \text{ soit réel est la réunion de } (\Delta) \text{ et } (\mathscr{C}) \text{ privée de A et B}}$

4) Dans cette question : $z=e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi;\pi] \setminus \{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\}$

a) <u>Montrons que $f(z)$ est réel et calculons le en fonction de $\cos\theta$</u>

$z=e^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\pi;\pi] \setminus \{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\}$

$\Rightarrow M \in \mathscr{C} \Rightarrow f(z)$ est réel.

$$f(z)=\frac{e^{i\theta}}{e^{2i\theta}+1}=\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}=\frac{1}{2\cos\theta}$$

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{2\cos\theta}}$$

b) Soit U la suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n=1+f(z)+(f(z))^2+\dots+(f(z))^n$

<u>Valeurs de θ pour lesquelles cette suite converge.</u>

U_n est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de 1er terme 1 et de raison $q=f(z)=\frac{1}{2\cos\theta}$

(U_n) converge donc ssi $|q|<1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2|\cos\theta|} < 1 \Leftrightarrow 2|\cos\theta| > 1$

$\Leftrightarrow |\cos\theta| > \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\theta < -\frac{1}{2}$ ou $\cos\theta > \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \theta \in [-\pi ; -\frac{2\pi}{3}[\cup]\frac{2\pi}{3} ; \pi]$ ou $\theta \in]-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}[$

L'ensemble I des valeurs de θ pour lesquelles (U) est convergente est : $\boxed{I = [-\pi ; -\frac{2\pi}{3}[\cup]-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}[\cup]\frac{2\pi}{3} ; \pi]}$

EXERCICE 40

Soit f l'application de $E = \mathbb{C} - \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$\forall z \in E$, $f(z) = \frac{iz}{z+i}$. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on note M le point d'affixe z.

1) Déterminons les coordonnées du point B dont l'affixe z_0 est telle que $f(z_0) = 1+2i$

$f(z_0) = 1+2i \Leftrightarrow \frac{iz_0}{z_0+i} = 1+2i$

$\Leftrightarrow iz_0 = z_0(1+2i) - 2+i$

$\Leftrightarrow z_0 = \frac{2-i}{1+i} = \frac{1-3i}{2}$

$$\boxed{B\left(\frac{1}{2} ; -\frac{3}{2}\right)}$$

2) Soit z un élément de E. On note r le module de $z+i$ et α une mesure de son argument.

Exprimons la forme trigonométrique de $f(z)-i$ en fonction de r et de α.

$|z+i| = r \quad \arg(z+i) = \alpha$

$f(z) - i = \frac{iz}{z+i} - i = \frac{1}{z+i}$

$|f(z)-i| = \frac{1}{|z+i|} = \frac{1}{r}$

$\arg(f(z)-i) = -\arg(z+i) = -\alpha$

On a donc :

$$\boxed{f(z) - i = \frac{1}{r}\left[\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)\right]}$$

3) Soit A le point d'affixe $-i$

a) - Déterminons l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M vérifiant $|f(z)-i| = \sqrt{2}$

$|f(z)-i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \sqrt{2} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow |z+i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow AM = \frac{\sqrt{2}}{2}$

L'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M vérifiant $|f(z)-i| = \sqrt{2}$ est le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Déterminons l'ensemble $(\mathscr{D})$ des points M tels que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure de l'argument de $f(z)-i$

$\arg(f(z)-i) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arg(z+i) = -\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = -\frac{\pi}{4}$

$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

L'ensemble (D) des points M tels que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure de l'argument de $f(z)-i$ est la droite passant par A et de coefficient directeur -1 privée de A

Remarque : (D) a pour équat° : $y=-x-1$

b) Montrons que B appartient à $(\mathscr{C})$ et à $(\mathscr{D})$ et construisons $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.

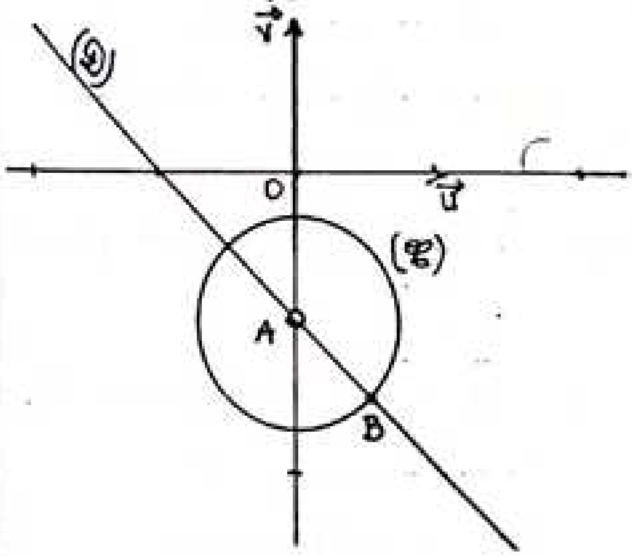
$AB=|z_0+i|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right|=\frac{1}{2}|1-i|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$AB=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow B\in(\mathscr{C})$.

$-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}-1 \Leftrightarrow y_B=-x_B-1 \Leftrightarrow B\in(\mathscr{D})$.

$$\boxed{B\in(\mathscr{C}) \text{ et } B\in(\mathscr{D})}$$

Construction de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.



EXERCICE 41

Soit z un nombre complexe de module 1 et d'argument $\theta \neq 2k\pi$. On considère la somme S telle que :

$S=1+z+z^2+\dots+z^n$

1) Mettons $S-zS$ sous forme trigonométrique.

$$S-zS=1-z^{n+1}$$
$$=1-(\cos\theta+i\sin\theta)^{n+1}$$
$$=1-\cos(n+1)\theta-i\sin(n+1)\theta$$
$$=2\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta-2i\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta\cos\frac{n+1}{2}\theta$$
$$=2\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta\left[\sin\frac{n+1}{2}\theta-i\cos\frac{n+1}{2}\theta\right]$$

$$S-zS=2\sin\frac{n+1}{2}\theta\left[\cos\left(\frac{(n+1)\theta-\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{(n+1)\theta-\pi}{2}\right)\right]$$

$$\boxed{S-zS=2\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\left[\cos\left(\frac{(n+1)\theta-\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{(n+1)\theta-\pi}{2}\right)\right]}$$

$$S-zS=2\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)e^{i\left(\frac{(n+1)\theta-\pi}{2}\right)}$$

Déduisons S.

$$S=\frac{2\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)e^{i\left(\frac{(n+1)\theta-\pi}{2}\right)}}{1-e^{i\theta}}$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)e^{i\left(\frac{(n+1)\theta-\pi}{2}\right)}}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}}\right)}$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)e^{i\left(\frac{(n+1)\theta-\pi}{2}\right)}}{2\sin\frac{\theta}{2}\,e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}e^{i\left(\frac{(n+1)\theta-\pi-\theta+\pi}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{n\theta}{2}}$$

$$\boxed{S=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)}$$

2/ S est un nombre complexe de la forme $S = \alpha + i\beta$ avec α et β réels.

Calculons α et β.

$$S = \alpha + i\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = Re(S) \\ \beta = Im(S) \end{cases}$$

D'après ce qui précède c'est-à-dire la question 1/ On a :

$$\boxed{\alpha = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\cos\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}}$$

$$\boxed{\beta = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}}$$

3/ Déduisons-en :

$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta$ et $\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta$ en fonction de n et θ

Posons $S_n = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta$

$S'_n = \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta$

$$S_n + iS'_n = 1 + (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \cdots + (\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$= 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = S$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S_n = Re(S) = \alpha \\ \text{et} \\ S'_n = Im(S) = \beta. \end{cases}$$ donc :

$$\boxed{1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\cos\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}}$$

$$\boxed{\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}}$$

EXERCICE 42

Soit z un nombre complexe non nul et A, B, C les points du plan complexe d'affixes respectives :

$$a = z, \quad b = \bar{z} \text{ et } c = \frac{z^2}{\bar{z}}$$

1/ On note $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$

Exprimons le module et l'argument de b et c

$|b| = |\bar{z}| = |z| = r$

$\arg(b) = \arg(\bar{z}) = -\arg(z) = -\theta$

$$\boxed{|b| = r \quad \arg(b) = -\theta}$$

$$|c| = \left|\frac{z^2}{\bar{z}}\right| = \frac{|z^2|}{|\bar{z}|} = \frac{|z|^2}{|z|} = |z| = r$$

$\arg(c) = \arg(z^2) - \arg\bar{z} = 3\arg(z) = 3\theta$

$$\boxed{|c| = r \quad \arg(c) = 3\theta}$$

2/ Choix de z pour que les points A, B et C soient deux à deux distincts

A, B et C sont deux à deux distincts

ssi $\begin{cases} a \neq b \\ \text{et} \\ b \neq c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq \bar{z} \\ \text{et} \\ \bar{z} \neq \frac{z^2}{\bar{z}} \end{cases}$

Posons $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

$\frac{z^2}{\bar{z}} = \bar{z} \Leftrightarrow z^2 - \bar{z}^2 = 0$

$\Rightarrow z = \bar{z}$ ou $z = -\bar{z}$

$\Rightarrow z \in \mathbb{R}$ ou $z \in i\mathbb{R}$.

Pour que les points A, B et C soient deux à deux distincts il suffit que z ne soit ni réel ni imaginaire pur.

On suppose dans la suite de l'exercice que cette condition est réalisée.

3/ a/ Démontrons que les points A, B et C appartiennent à un même cercle.

$|a| = |b| = |c| = r \Leftrightarrow OA = OB = OC = r$

donc A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon r.

b/ Démontrons que AB = AC.

$AB = |b - a| \quad AC = |c - a|$

$= \left|\frac{z^2}{\bar{z}} - \bar{z}\right|$

$= \frac{|z|}{|\bar{z}|}|z - \bar{z}|$

$= |a - b| = |b - a| = AB$

$\boxed{AB = AC}$

c/ Le point A étant donné, indiquons une construction géométrique des points B et C

$b = \bar{a} \Leftrightarrow B = S_{(Ox)}(A)$

$\begin{cases} OC = OA = r \\ AB = AC. \end{cases}$

C est l'intersection du cercle de centre O et de rayon $r = OA$ et du cercle de centre A et de rayon AB.

4/ a/ Démontrons que $mes(\vec{CB}, \vec{CA}) = \theta$

$mes(\vec{CB}, \vec{CA}) = \arg\left(\frac{a - c}{b - c}\right)$

or $\frac{a-c}{b-c} = \frac{z - \frac{z^2}{\bar{z}}}{\bar{z} - \frac{z^2}{\bar{z}}} = \frac{z\bar{z} - z^2}{\bar{z}^2 - z^2}$

$= \frac{z(\bar{z} - z)}{(\bar{z} + z)(\bar{z} - z)} = \frac{z}{\bar{z} + z}$

$mes(\vec{CB}, \vec{CA}) = \arg\left(\frac{z}{\bar{z} + z}\right)$

$= \arg(z) - \arg\left[2Re(z)\right]$

$\boxed{mes(\vec{CB}, \vec{CA}) = \theta + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}}$

b/ Déduisons l'ensemble des points A tel que le triangle ABC soit équilatéral

ABC équilatéral $\Rightarrow mes(\vec{CB}, \vec{CA}) = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow (\vec{i}, \vec{OA}) = \frac{\pi}{3}$

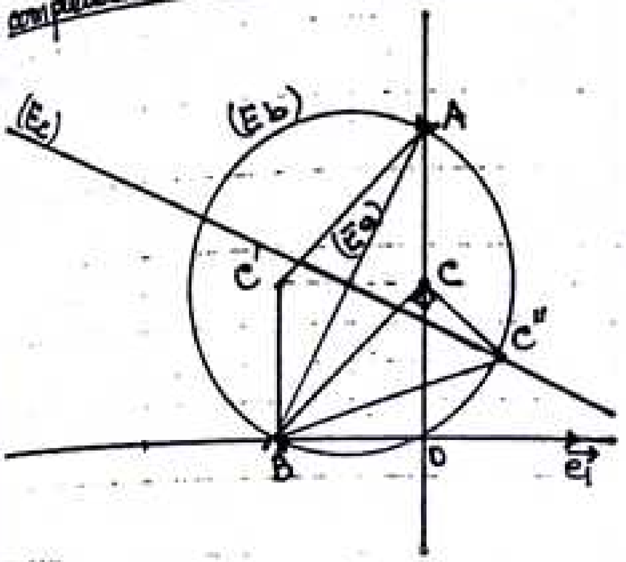
L'ensemble des points A tel que ABC soit équilatéral est la droite (Δ) d'équation $y = x\tan\frac{\pi}{3}$ privée de l'origine O du repère.

EXERCICE 43

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct, ayant comme unité graphique 4cm. On note A, B et C les points d'affixes respectives $2i$, -1 et i

On considère l'application f de $P-\{A\}$ dans P qui à tout point M de $P-\{A\}$ d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{z+1}{z-2i}$

1/ a/ Faisons une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.



b/ Déterminons l'affixe du point C' image de C.

$$z_{C'} = f(z_C) = f(i) = \frac{i+1}{i-2i}$$

$$= -\frac{1}{i}(1+i)$$

$$= i(1+i) = -1+i$$

$$\boxed{z_{C'} = -1+i}$$

- Nature du quadrilatère ACBC'

$z_{C'} - z_B = -1+i+1 = i$ (a)

$z_A - z_C = 2i - i \quad = i$ (b)

(a) et (b) $\Rightarrow$ $z_{C'} - z_B = z_A - z_C \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$

Le quadrilatère ACBC' est donc un parallélogramme.

c/ Montrons que le point C admet un unique antécédent par f que nous noterons C''

C'' antécédent de C par f entraîne que C est l'image de C'' par f. L'affixe z de C'' est donc solution de l'équation

$$f(z) = z_C \Leftrightarrow f(z) = i$$

$$\Leftrightarrow \frac{z+1}{z-2i} = i \Leftrightarrow z+1 = iz+2$$

$$\Leftrightarrow z(1-i) = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{1-i}$$

$$z = \frac{1}{2}(1+i)$$

$$\boxed{z_{C''} = \frac{1}{2}(1+i)}$$

- Nature du triangle BCC''

$$\frac{z_C - z_B}{z_C - z_{C''}} = \frac{i+1}{i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{2(1+i)}{-1+i}$$

$$= (1+i)(-1-i) = -2i$$

$\frac{z_C - z_B}{z_C - z_{C''}} = -2i$ imaginaire pur

Le triangle BCC'' est rectangle en C

2/ Donnons une interprétation géométrique de l'argument et du module de z'

$$Arg(z') = Arg\left(\frac{z+1}{z-2i}\right)$$

$$= Arg(z+1) - Arg(z-2i)$$

$$= Arg(z-z_B) - Arg(z-z_A)$$

$$= (\vec{e_1}, \overrightarrow{BM}) - (\vec{e_1}, \overrightarrow{AM})$$

$\text{Arg}(z') = (\widehat{\vec{AM}, \vec{e_1}}) + (\widehat{\vec{e_1}, \vec{BM}})$
$= (\widehat{\vec{AM}, \vec{BM}}) = (\vec{MA}, \vec{MB})$

$$\boxed{\text{Arg}(z') = (\vec{MA}, \vec{MB})}$$

L'argument de z' est l'angle entre les vecteurs $\vec{MA}$ et $\vec{MB}$

$|z'| = \frac{|z+1|}{|z-2i|} = \frac{|z-z_A|}{|z-z_B|} = \frac{M}{BM} = \frac{MA}{MB}$

$$\boxed{|z'| = \frac{MA}{MB}}$$

le module de z' est le rapport des distances MA : MB

3/ Déterminons, en utilisant les questions précédentes, les ensembles :

a/ (Ea) des points M tel que z' soit un réel strictement négatif

$z' \in \mathbb{R}^*_- \Leftrightarrow \text{Arg}$

$\Leftrightarrow (\vec{MA}, \vec{MB}) = \pi$

$\Leftrightarrow \vec{MA}$ et $\vec{MB}$ sont colinéaires de sens opposés ; M appartient donc à $]AB[$

> (Ea) est le segment [AB] privé des points A et B

b/ (Eb) des points M tel que z' soit imaginaire pur non nul.

z' est un imaginaire pur non nul ssi

$\text{Arg}(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow (\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

> (Eb) est donc le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

c/ (Ec) des points M tel que $|z'| = 1$

$|z'| = 1 \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = 1 \Leftrightarrow MA = MB$.

> (Ec) est la médiatrice du segment [AB]

EXERCICE 44

On se propose de déterminer tous les nombres complexes z qui vérifient :

(1) : $z - u\bar{z} = 0$, u désigne un nombre complexe donné non nul, $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.

1/ On suppose $u = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$.

Résolvons alors l'équation (1) et donnons la forme trigonométrique des solutions distinctes de zéro

Posons $z = x+iy$, $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$\bar{z} = x - iy$

z solution de (1) $\Leftrightarrow x+iy - \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})(x-iy) = 0$

$\Leftrightarrow x+iy - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}iy - \frac{\sqrt{3}}{2}ix - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y\right) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y\sqrt{3}$.

On a donc : $z = y\sqrt{3} + iy = y(\sqrt{3}+i)$

$$\boxed{S = \{y(\sqrt{3}+i)\}\ y \in \mathbb{R}}$$

<u>Donnons la forme trigonométrique des solutions distinctes de zéro</u>

$z = y(\sqrt{3}+i)$ avec $y \neq 0$

$= 2y\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$, $|z| = 2|y|$

1er cas $y > 0$

$|z| = 2y$ $\quad \text{Arg}\, z = \frac{\pi}{6}$.

$$\boxed{z = 2y\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$$

<u>2e cas $y < 0$</u>

$|z| = -2y$; $\text{Arg}\, z = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$$\boxed{z = -2y\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)}$$

2/ On pose $U = a + ib$, a et b réels quelconques.

<u>Trouvons une condition nécessaire et suffisante pour que (1) admette au moins une solution</u>

Posons $z = x + iy$ $\quad (x;y) \in \mathbb{R}^2$

$\bar{z} = x - iy$

z solution de (1) $\Leftrightarrow x + iy - (a+ib)(x-iy) = 0$

$\Leftrightarrow x + iy - ax + iay - ibx - by = 0$

$\Leftrightarrow (1-a)x - by + i[-bx + (1+a)y] = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)x - by = 0 \\ -bx + (1+a)y = 0 \end{cases}$ (S)

(1) admet au moins une solution non nulle ssi le déterminant de (S) est nul $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-a & -b \\ -b & 1+a \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (1-a)(1+a) - b^2 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$

Pour que (1) admette au moins une solution il faut et il suffit que : $a^2+b^2=1$

<u>Autre méthode</u>

z solution de (1) $\Leftrightarrow z - U\bar{z} = 0$

$\Leftrightarrow U = \frac{z}{\bar{z}}$, $z \neq 0$

$\Rightarrow |U| = \left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = \frac{|z|}{|\bar{z}|} = 1$ car $|z| = |\bar{z}|$

$\Rightarrow |U| = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$

L'ensemble des nombres complexes U vérifiant cette condition est :

$U = \cos\theta + i\sin\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$.

ou encore l'ensemble des complexes U de module 1

3/ <u>Dans le cas où $U = \cos\alpha + i\sin\alpha$, résolvons l'équation (1).</u>

Posons $z = x + iy$, $(x;y) \in \mathbb{R}^2$; $\bar{z} = x - iy$

z solution de (1) $\Leftrightarrow x + iy - (\cos\alpha + i\sin\alpha)(x - iy) = 0$

$\Leftrightarrow (1-\cos\alpha)x - \sin\alpha + i[-x\sin\alpha + (1+\cos\alpha)y] = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\cos\alpha)x - y\sin\alpha = 0 \\ -x\sin\alpha + (1+\cos\alpha)y = 0 \end{cases}$

le déterminant de ce système est nul

le système est donc équivalent à :

$(1-\cos\alpha)x - y\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}x$

$y = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}x = x\tan\frac{\alpha}{2}$

On a donc $z = x + ix\tan\frac{\alpha}{2} = x\left(1+i\tan\frac{\alpha}{2}\right)$

avec $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ soit

$\alpha \neq (2k+1)\pi$

$\boxed{S = \left\{x\left(1+i\tan\frac{\alpha}{2}\right)\right\} \; x \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha \neq (2k+1)\pi}$

– si $\alpha = 2k\pi$ (1) $\Leftrightarrow z = \bar{z} \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

$S = \mathbb{R}$

– si $\alpha = (2k+1)\pi$, (1) $\Leftrightarrow z = -\bar{z} \Rightarrow z \in i\mathbb{R}$

$S = i\mathbb{R}$.

EXERCICE 45

1/ A tout nombre complexe z distinct de $3+3i$ on associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = \frac{z-1-i}{z-3-3i}$$

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Posons $z = x+iy$ $(x;y) \in \mathbb{R}^2$,

$f(z) = \frac{(x-1)+i(y-1)}{(x-3)+i(y-3)}$

$f(z) = \frac{[(x-1)+i(y-1)][(x-3)-i(y-3)]}{(x-3)^2+(y-3)^2}$

$= \frac{x^2+y^2-4x-4y+6}{(x-3)^2+(y-3)^2} + i\frac{2(x-y)}{(x-3)^2+(y-3)^2}$

a./ <u>Déterminons l'ensemble (E_a) des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel</u>

$f(z)$ est réel ssi $\text{Im}(f(z)) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y) = 0 \\ (x;y) \neq (3;3). \end{cases}$

$\boxed{(E_a) \text{ est la droite d'équation } y = x \text{ privée du point } B(3;3)}$

Construction de (E_a) : Voir figure

b./ <u>Déterminons l'ensemble (E_b) des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur</u>

$f(z)$ imaginaire pur ssi $\begin{cases} \text{Re}(f(z)) = 0 \\ \text{et} \\ \text{Im}(f(z)) \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x-4y+6 = 0 \\ (x;y) \neq (1;1) \\ (x;y) \neq (3;3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2 = 2$

$\boxed{(E_b) \text{ est le cercle de centre } I(2;2) \text{ de rayon } r = \sqrt{2} \text{ privé des points } A(1;1) \text{ et } B(3;3)}$

Construction de (E_b) : Voir figure

c./ <u>Déterminons l'ensemble (E_c) des points M d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$</u>

$|f(z)|=1 \Leftrightarrow |f(z)|^2=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2+(y-1)^2}{(x-3)^2+(y-3)^2}=1$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-2y+2=x^2+y^2-6x-6y+18$

$\Leftrightarrow 4x+4y-16=0 \Leftrightarrow x+y-4=0$

$\boxed{(Ec) \text{ est la droite d'équation } x+y-4=0}$

Construction de (Ec) : Voir figure

d-/ Déterminons l'ensemble (Ed) des points M d'affixe z tel que Arg f(z) ait pour mesure $-\frac{\pi}{2}$

$\operatorname{Arg}(f(z))=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(f(z))=0 \\ \text{et} \\ \operatorname{Im}(f(z))<0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x-4y+6=0 \\ x-y<0 \\ (x;y)\neq(1;1) \\ (x;y)\neq(3;3) \end{cases}$

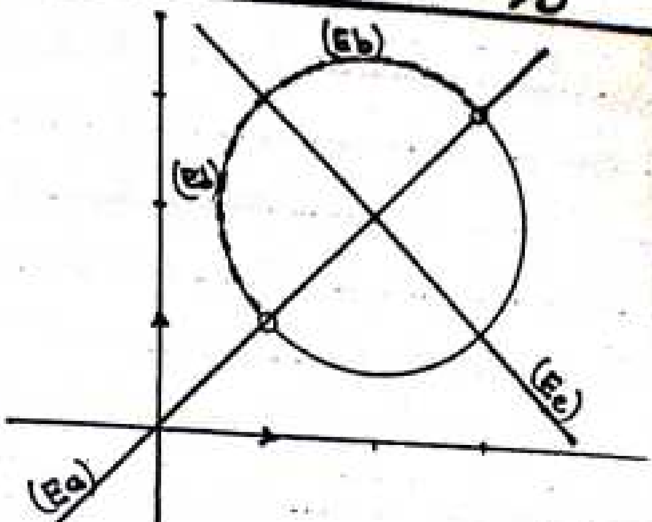
(Ed) est le demi-cercle de diamètre [AB] avec A(1;1) et B(3;3), situé dans le demi plan de frontière la première bissectrice contenant J(0;1), privé des points A et B

Construction de (Ed) : Voir figure

2/ À l'aide de la question 1-/ déterminons la probabilité des événements suivants :

a-/ f(z) est réel

f(z) réel $\Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ \text{et} \\ x\neq 3. \end{cases}$ les couples à obtenir sont :



(1;1), (2;2), (4;4), (5;5) et (6;6).

Soit P_1 cette probabilité on a :

$$P_1=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times 5=\frac{5}{36}$$

$$\boxed{P_1=\frac{5}{36}}$$

b-/ La partie réelle de f(z) est strictement négative

Pour réaliser cette condition il faut que le point M(x;y) appartiennent à l'intérieur du disque de diamètre [AB] $\Leftrightarrow$ $(x;y)\in\{(1;2)(2;1)(2;3)(3;2)(2;2)\}$

Soit P_2 la probabilité recherchée on a : $\boxed{P_2=\frac{5}{36}}$

c-/ $|f(z)|>1$

Cet événement contient tous les points M(x;y) privé des points de coordonnées :

(1;1) (2;2) (3;3) (1;2) (2;1) (3;2) (2;3)

d'où la probabilité P_3 est

$$\boxed{P_3=\frac{29}{36}}$$

EXERCICE 46

1/ Montrons que l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe $z = x+iy$ (où x et y sont des réels) vérifie la relation :

$(2+3i)z + (-2+3i)\bar{z} - 12i = 0$ (1)

est une droite (D) que nous déterminerons

En posant $z = x+iy$ (1) devient

$(2+3i)(x+iy) + (-2+3i)(x-iy) - 12i = 0$

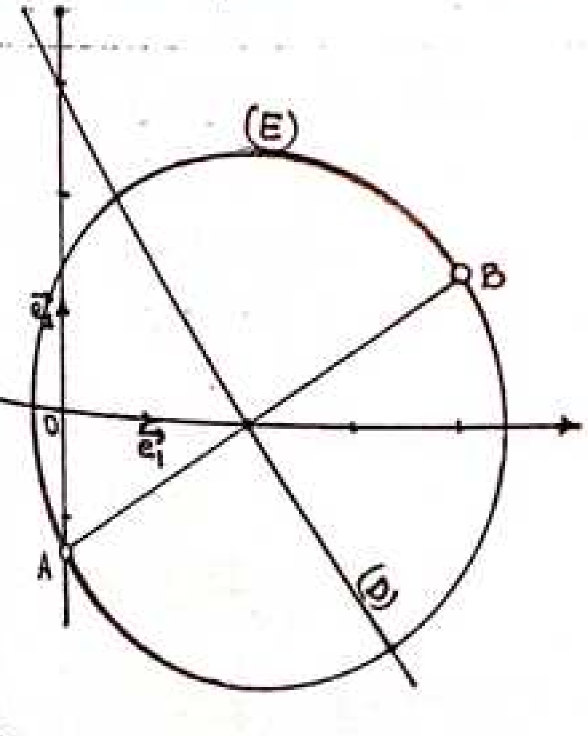
$\Leftrightarrow 2i(3x+2y-6) = 0 \Leftrightarrow 3x+2y-6 = 0$

$\boxed{\text{(D) a donc pour équation : } 3x+2y-6=0}$

Soit $\vec{V}$ un vecteur directeur de (D) et K un point de (D) on a :

$\vec{V}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ $K(0;3)$

Représentons (D) dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$



2/ Montrons qu'il existe un seul réel z_0 et un seul imaginaire pur z_1 qui vérifient la relation (1).

Première méthode :

$\vec{V}$ n'est colinéaire ni à $\vec{e}_1$ ni à $\vec{e}_2$ et $O \notin (D)$ donc (D) coupe chacun des axes en un seul point. Par conséquent il existe un seul $z_0 \in \mathbb{R}$ et un seul z_1 imaginaire vérifiant (1)

Calculons z_0 et z_1

Graphiquement $= M_0(2;0)$

$(D) \cap (Oy) = M_1(0;3)$

donc :

$z_0 = 2 \qquad z_1 = 3i$

Deuxième méthode

z_0 solution de (1)

$\Rightarrow (2+3i)z_0 + (-2+3i)\bar{z}_0 - 12i = 0$

$z_0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z}_0 = z_0$ ce qui donne

$6iz_0 = 12i$ soit $z_0 = 2$

z_1 imaginaire pur solution de (1)

$\Leftrightarrow (2+3i)z_1 + (-2+3i)\bar{z}_1 - 12i = 0$

$\Leftrightarrow 4z_1 = 12i$ soit $z_1 = 3i$

z_0 et z_1 existent et sont uniques

$z_0 = 2 \qquad z_1 = 3i$

3/ Soit A et B les points du plan complexe d'affixes respectives :

$-\frac{4}{3}i$ et $4+\frac{4}{3}i$

Montrons que la droite (D) est médiatrice du segment [AB]

$\vec{AB}\begin{vmatrix} 4 \\ \frac{8}{3} \end{vmatrix}$ $\vec{V}\begin{vmatrix} -2 \\ 3 \end{vmatrix}$

$\vec{V}.\vec{AB} = -2\times4+\frac{8}{3}\times3 = -8+8=0.$

$\vec{V}.\vec{AB} = 0 \Leftrightarrow (D)\perp(AB)$ (1)

soit I milieu de [AB] on a $I(2;0)$

$I\in(D)$ (2).

$\boxed{\text{(1) et (2) nous permettent de conclure que (D) est médiatrice du segment [AB]}}$

4/ Déterminons l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie la relation $\left|-\frac{4}{3}i-z\right|=\left|4+\frac{4}{3}i-z\right|$

la relation précédente peut se mettre sous la forme : $|z_A-z|=|z_B-z| \Leftrightarrow MA=MB$

M appartient à la médiatrice de [AB]

$\boxed{\text{l'ensemble cherché est la droite (D)}}$

5/ Déterminons et représentons l'ensemble (E) des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$$\arg\left(\frac{-4i-3z}{12+4i-3z}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

la relation ci-dessus peut se mettre sous la forme :

$$\arg\left(\frac{-\frac{4}{3}i-z}{4+\frac{4}{3}i-z}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_A-z}{z_B-z}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$\Leftrightarrow (\widehat{\vec{MB},\vec{MA}})=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\Leftrightarrow \vec{MA}\perp\vec{MB}$

l'ensemble cherché est le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

Voir figure précédente pour la représentation

EXERCICE 47

Soit l'application

$$f:\ \mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$$
$$z\longmapsto z'=(1+i)z+3$$

M et M' désignent, dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points d'affixes respectives z et z' (Unité 2cm)

1°/ Soit le nombre complexe $a=\sqrt{2}+i$

Calculons f(a) et plaçons sur une figure les points A d'affixe a et A' d'affixe f(a)

$f(a)=(1+i)(\sqrt{2}+i)+3$

$\boxed{f(a)=(2+\sqrt{2})+i(1+\sqrt{2})}$

Soit $A(a)$ et $A'(f(a))$

Plaçons A et A' sur une figure

(Voir figure ci-contre)

2/ Montrons que l'équation $z=f(z)$ possède dans $\mathbb{C}$ une solution unique z_0

$z = f(z) \iff z = (1+i)z + 3$

$\iff z = \dfrac{3}{1-(1+i)} = 3i$

$\boxed{z_0 = 3i}$

Autre méthode :

$f(z) = az+b$, $a = 1+i$ $b = 3$

$f(z)$ est l'écriture complexe d'une similitude plane directe dont l'affixe du seul point invariant est solution de l'équation $z = f(z)$.

3/ Soit K le point d'affixe $3i$

a-/ Calculons $\dfrac{z-z'}{z-3i}$ pour $z \neq 3i$

$$\frac{z-z'}{z-3i} = \frac{z-(1+i)z-3}{z-3i} = \frac{-i(z-3i)}{z-3i} = -i$$

$$\frac{z-z'}{z-3i} = -i$$

b/ Montrons que pour tout $M \neq K$, le triangle KMM' est un triangle rectangle isocèle

$\dfrac{z-z'}{z-3i} = -i \Rightarrow \dfrac{z_M - z_{M'}}{z_M - z_K} = -i$

$\left|\dfrac{z_M - z_{M'}}{z_M - z_K}\right| = |-i| = 1 \Rightarrow \dfrac{MM'}{MK} = 1$

$\iff MM' = MK \Rightarrow$

le triangle KMM' est isocèle en M

$\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_M - z_{M'}}{z_M - z_K}\right) = \operatorname{Arg}(-i) = -\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \operatorname{mes}(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{M'M}) = -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow (KM) \perp (M'M)$

$\Rightarrow$ le triangle $KM'M$ est rectangle en M.

On conclut donc que :

$KM'M$ est un triangle rectangle isocèle en M.

- Déduisons-en une construction du point M' connaissant M et K

Comme M et K sont donnés et que le triangle KMM' est rectangle isocèle en M alors M' appartient à la perpendiculaire à (KM) en M et au cercle de centre M passant par K tel que le triangle MKM' soit indirect.

4-/ a-/ Démontrons que l'ensemble (C) des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que O, M et M' sont alignés est le cercle de diamètre [OK]

Première méthode

Posons $z = x+iy$, $z' = x'+iy'$

$z' = (1+i)(x+iy)+3$

$\iff x'+iy' = (x-y+3)+i(x+y)$

$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ $\overrightarrow{OM'}\begin{vmatrix} x-y+3 \\ x+y. \end{vmatrix}$

O, M et M' alignés $\iff \det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} x & x-y+3 \\ y & x+y \end{vmatrix} = 0$

$x(x+y) - y(x-y+3) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2-3y=0 \Leftrightarrow x^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$
l'ensemble $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $\Omega(0;\frac{3}{2})$ et de rayon $r=\frac{3}{2}$. Or Ω est le milieu de $[OK]$ et $r=\frac{1}{2}OK$.

$(\mathscr{C})$ est donc le cercle de diamètre $[OK]$

Autre méthode

- si M confondu à O, $M'(3;0) \Leftrightarrow$ O, M et M' alignés.
- si M confondu à K, M' confondu à M $\Rightarrow$ O, M et M' alignés
- si $M \notin \{O;K\}$

O, M, M' alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MM'}) = k\pi$

$\Leftrightarrow Arg\left(\frac{z-z'}{z}\right) = k\pi \Leftrightarrow Arg\left(\frac{-i(z-3i)}{z}\right) = k\pi$

$\Leftrightarrow Arg(-i) + Arg\left(\frac{z-3i}{z}\right) = k\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MK}) = k\pi$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MK}) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MK} = 0 \Rightarrow$ M appartient au cercle de diamètre $[OK]$.

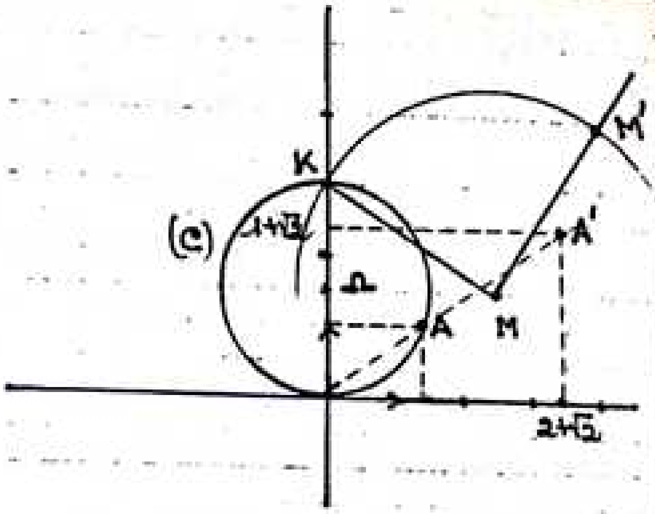
b/ Vérifions que A est élément de $(\mathscr{C})$

$A(\sqrt{2};1)$ $(\mathscr{C})$: $x^2+y^2-3y=0$

On a: $(\sqrt{2})^2+1^2-3\times1 = 2+1-3=0$

d'où $A \in (\mathscr{C})$.

(Ou bien montrer que O, A et A' sont alignés $\Rightarrow A \in (\mathscr{C})$)



EXERCICE 48

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A d'affixe $2i$, B d'affixe 2 et J milieu de $[AB]$.

On considère la fonction f qui, à tout point M distinct de A, d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{2z}{z-2i}$$

1-/ a-/ Montrons que f admet comme points invariants le point O et un deuxième point dont nous préciserons l'affixe

Un point M d'affixe z est invariant par f ssi $z'=z \Leftrightarrow \frac{2z}{z-2i} = z$

$\Leftrightarrow 2z = z(z-2i) \Leftrightarrow z(z-2-2i)=0$

$\Leftrightarrow z=0$ ou $z=2+2i$

f admet donc comme points invariants le point O et le point J d'affixe $2+2i$

b/ Déterminons les images par f des points B et I.

Soit B' et I' les images respectives des points B et I par f on a :

$z_{B'} = f(z_B) = \frac{2\times 2}{2-2i} = \frac{2}{1-i} = 1+i$

$z_{I'} = f(z_I)$, $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 1+i$

$z_{I'} = \frac{2(1+i)}{1+i-2i} = \frac{2(1+i)}{1-i} = (1+i)^2 = 2i$

On remarque que $z_{B'} = z_I$ et $z_{I'} = z_B$

$\boxed{\text{Les images par } f \text{ des points B et I sont respectivement les points I et B.}}$

2/ Soit M un point quelconque distinct de A et de O. Etablissons que :

$$\begin{cases} (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ OM' = 2\,\frac{MO}{MA} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) &= \arg(z') \\ &= \arg\left(\frac{2z}{z-2i}\right) \\ &= \arg(2) + \arg z - \arg(z-2i) \\ &= 2k\pi + (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \\ &= (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OM}) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

$(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$OM' = |z'| = \left|\frac{2z}{z-2i}\right| = \frac{2|z|}{|z-2i|} = 2\,\frac{MO}{MA}$

Pour tout point M distinct de A et O on a :

$$\begin{cases} (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ OM' = 2\,\frac{MO}{MA}. \end{cases}$$

3/ Soit Δ la médiatrice de [OA].

Montrons que les transformés par f des points de (Δ) appartiennent à un cercle (𝒞) que nous préciserons

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow MO = MA \Leftrightarrow \frac{MO}{MA} = 1$

$\Leftrightarrow OM' = 2$

$\boxed{\text{Les transformés par } f \text{ des points de } (\Delta) \text{ appartiennent donc au cercle } (\mathcal{C}) \text{ de centre O et de rayon 2 privé de B.}}$

4/ Soit (Γ) le cercle de diamètre [OA] privé du point A.

Montrons que les transformés par f des points de (Γ) appartiennent à une droite (𝒟) que nous préciserons

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

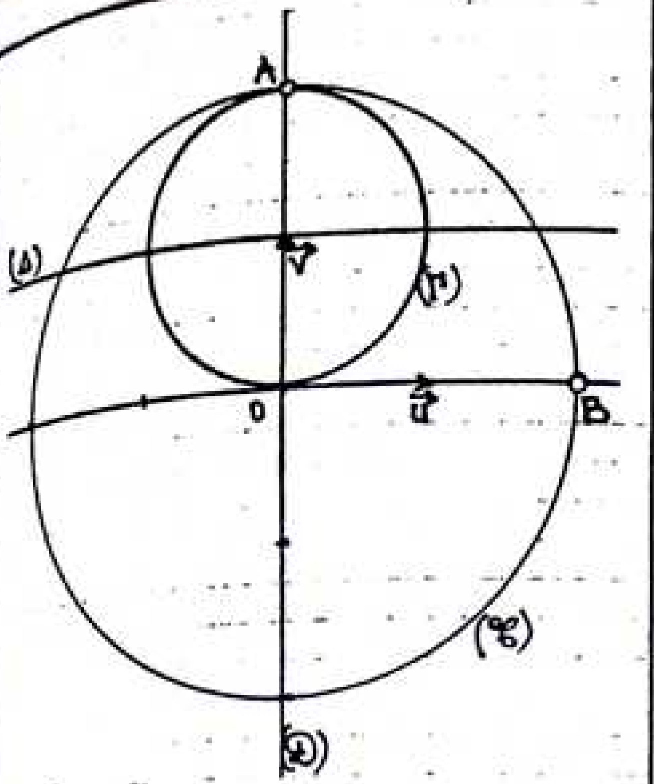
$\Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow \vec{u} \perp \overrightarrow{OM'} \Leftrightarrow (OM') = (Oy)$

$\boxed{\text{Les transformés par } f \text{ des points de } (\Gamma) \text{ appartiennent à la droite } (\mathcal{D}) \text{ qui est l'axe des ordonnées} \quad (\mathcal{D}) : x = 0}$

5/ Traçons (Δ), (Γ), (𝒞) et (𝒟) sur une même figure (Unité 2cm)

(Voir page suivante.)



EXERCICE 49

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M_n d'affixes :

$$z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (1+i\sqrt{3}) \text{ où } n \text{ est un}$$

entier naturel.

1./ Exprimons z_{n+1} en fonction de z_n puis z_n en fonction de z_0 et n

$$z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1}(1+i\sqrt{3})$$

$$= \left(\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}i\right)^n(1+i\sqrt{3}) = \left(\frac{1}{2}i\right) z_n$$

$$\boxed{z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}i\right) z_n}$$

(z_n) est donc une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}i$ · donc :

$$\boxed{z_n = (z_0)\left(\frac{1}{2}i\right)^n}$$

Donnons z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

$z_0 = 1+i\sqrt{3}$ $\quad z_1 = \left(\frac{1}{2}i\right)(1+i\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$z_2 = \left(\frac{i}{2}\right)^2(1+i\sqrt{3}) = -\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})$

$z_3 = \left(\frac{1}{2}i\right)^3(1+i\sqrt{3}) = -\frac{1}{8}(-\sqrt{3}+i)$

$z_4 = \frac{1}{16}(1+i\sqrt{3})$

$z_0 = 1+i\sqrt{3}$	$z_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	$z_2 = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$
$z_3 = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$	$z_4 = \frac{1}{16} + i\frac{\sqrt{3}}{16}$	

$|z_0| = 2$ $\quad \text{Arg}\, z_0 = \frac{\pi}{3}$ $\quad |z_2| = \frac{1}{2}$ $\quad \text{Arg}\, z_2 = \frac{4\pi}{3}$

$|z_1| = 1$ $\quad \text{Arg}\, z_1 = \frac{5\pi}{6}$ $\quad |z_3| = \frac{1}{4}$ $\quad \text{Arg}\, z_3 = \frac{11\pi}{6}$

$|z_4| = \frac{1}{8}$ $\quad \text{Arg}\, z_4 = \frac{\pi}{3}$

$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$	$z_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$
$z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$	$z_3 = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$
$z_4 = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$	

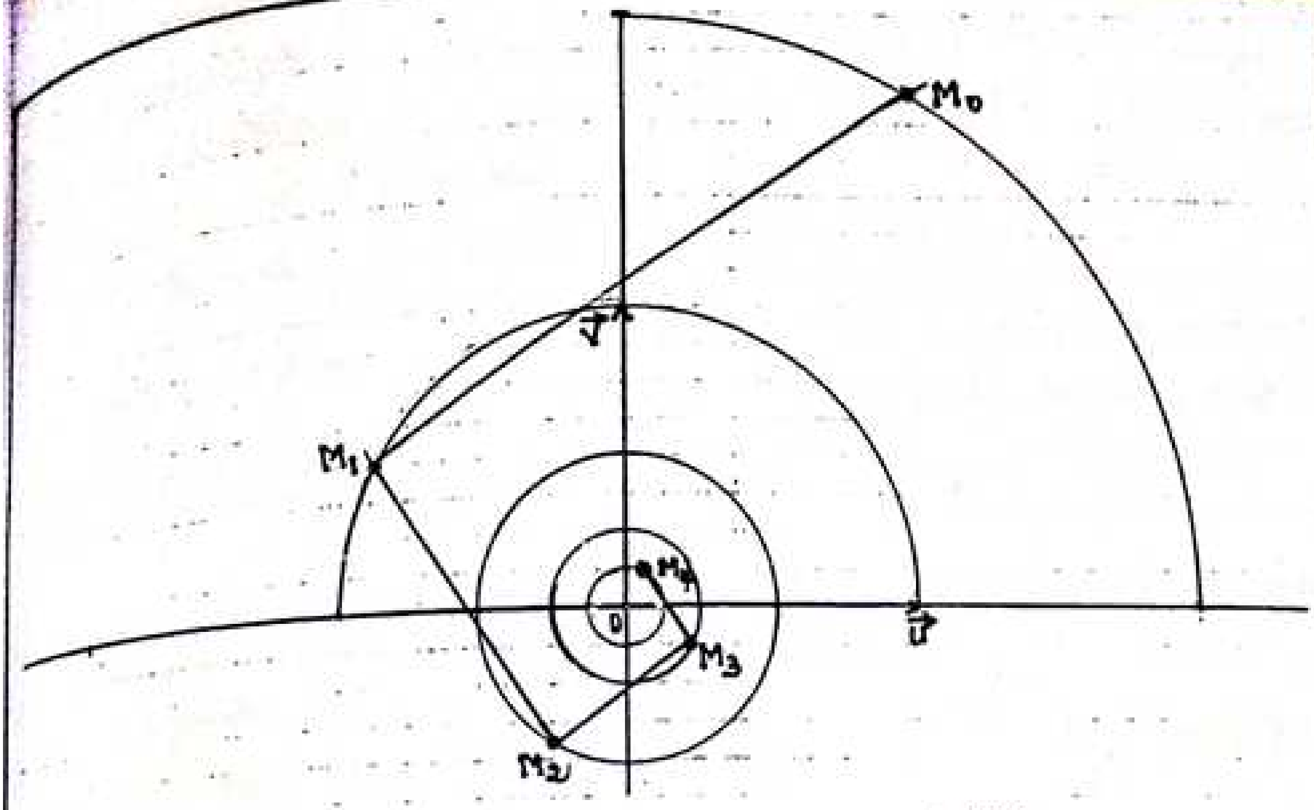
2./ Plaçons les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 (unité 4cm)

(Voir figure à la page suivante)

3./ Déterminons la distance OM_n en fonction de n.

$$OM_n = |z_n| = \frac{1}{2^n} \times 2 = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\boxed{OM_n = \frac{1}{2^{n-1}}}$$



4/ a/ <u>Montrons que</u> $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$M_nM_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = |z_0(\frac{1}{2}i)^{n+1} - z_0(\frac{1}{2}i)^n|$

$= |z_0(\frac{1}{2}i)^n(\frac{1}{2}i - 1)|$

$= |z_0(\frac{1}{2}i)^n| \times |\frac{-2+i}{2}|$

$= |z_n| \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$

$$\boxed{M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}}$$

b/ On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$

<u>Déterminons L_n en fonction de n.</u>

Posons $V_n = M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$

(V_n) est une suite géométrique de premier terme $V_0 = 1$ et de raison q $\frac{1}{2}$

$L_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$

$L_n = V_0 \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{5}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

$$\boxed{L_n = 2\sqrt{5}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}$$

<u>Déterminons</u> $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} L_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 2\sqrt{5}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

$= 2\sqrt{5}$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} L_n = 2\sqrt{5}}$$

5/ <u>Déterminons une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_n})$ en fonction de n</u>

$(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_n}) = Arg\left(\frac{z_n}{z_0}\right) = Arg\left(\frac{1}{2}i\right)^n$

$= n\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_n}) = \frac{n\pi}{2}}$$

Valeurs de n pour lesquelles O, M_0 et M_n sont alignés

O, M_0 et M_n sont alignés ssi :

$(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_n}) = k\pi \Leftrightarrow \frac{n\pi}{2} = k\pi \Leftrightarrow n = 2k$

$\boxed{\text{Les points O, } M_0 \text{ et } M_n \text{ sont alignés pour } n \text{ pair}}$

EXERCICE 50

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

(Unité graphique 2cm).

On note f l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe :

$z' = \frac{1}{\bar{z}}$ ou $z' = \frac{z}{|z|^2}$

1/ Montrons que les points O, M et M' sont alignés

$\arg z' = \arg\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = -\arg \bar{z} = \arg z$

$\Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) + 2k\pi$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}) = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\text{Les points O, M et M' sont donc alignés}}$

2/ Déterminons l'ensemble (Γ) des points invariants par f.

Un point M d'affixe z non nulle est invariant par f ssi

$z' = z \Leftrightarrow \frac{1}{\bar{z}} = z \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$

$\Leftrightarrow |z|^2 = 1$

$\Leftrightarrow OM^2 = 1 \Leftrightarrow OM = 1$

$\boxed{\text{L'ensemble } (\Gamma) \text{ des points invariants par } f \text{ est le cercle de centre O et de rayon } r = 1}$

Soit A et B les points d'affixes respectives -1 et i.

Vérifions que (Γ) contient les points A et B

$|-1| = |i| = 1 \Rightarrow OA = OB = 1$ d'où A et B appartiennent à (Γ).

3/ Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [AB], E le milieu de [AB] et $E' = f(E)$

a/ Déterminons une équation de $(\mathscr{C})$

$(\mathscr{C})$ est le cercle de centre E et de rayon $r = \frac{AB}{2}$

$z_E = \frac{-1+i}{2} \quad E\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$AB = |i+1| = \sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{\text{Le cercle } (\mathscr{C}) \text{ a donc pour équation : } \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}}$

b/ Montrons que E' appartient à $(\mathscr{C})$.

$z_{E'} = \frac{1}{\bar{z}_E} = \frac{2}{-1-i} = -1+i$

$z_{E'} = -1+i \Rightarrow E'(-1; 1)$.

$$\left(x_{E'}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y_{E'}-\frac{1}{2}\right)^2=\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

d'où $E'\in(\mathscr{C})$.

4/ Le point M d'affixe z étant un point quelconque de la droite (AB), on se propose de construire son image M' d'affixe z' par l'application f.

a/ <u>Déterminons une équation de la droite (AB)</u>

$A(-1;0)$ $B(0;1)$ $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$

Posons (AB) : $y=ax+b$ $a=\frac{1}{1}=1$

$\Rightarrow y=x+b$

$A\in(AB)\Leftrightarrow 0=-1+b \Leftrightarrow b=1$

d'où $\boxed{(AB): y=x+1}$

On pose $k=OM^2$, $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ avec x, y, x' et y' réels.

b/ <u>Exprimons k en fonction de x</u>

$k=OM^2 \Leftrightarrow k=x^2+y^2$

$k=x^2+(x+1)^2=2x^2+2x+1$

$$\boxed{k=2x^2+2x+1}$$

c/ Montrons que M' appartient à $(\mathscr{C})$.

- Exprimons x' et y' en fonction de x et k

$$z'=\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{x-iy}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$x'=\frac{x}{x^2+y^2}$ $y'=\frac{y}{x^2+y^2}$

avec $k=x^2+y^2$ $y=x+1$

On a donc :

$x'=\frac{x}{k}$	$y'=\frac{x+1}{k}$

$$\left(x'+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y'-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{x}{k}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{x+1}{k}-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=\frac{x^2}{k^2}+\frac{x}{k}+\frac{1}{4}+\frac{x^2+2x+1}{k^2}-\frac{x+1}{k}+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{2x^2+2x+1}{k^2}-\frac{1}{k}+\frac{1}{2} \quad \text{or } k=2x^2+2x+1$$
$$=\frac{k}{k^2}-\frac{1}{k}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$\left(x'+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y'-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ d'où :

M' appartient à $(\mathscr{C})$

d/ <u>Déduisons des questions précédentes une construction géométrique du point M' connaissant le point M</u>

D'après 1/ O, M et M' sont alignés. De plus si $M\in(AB)$, $M'\in(\mathscr{C})$.

M' est donc le point d'intersection entre (OM) et le cercle $(\mathscr{C})$.

DEUXIEME PARTIE

SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN

COURS + EXERCICES CORRIGES

COURS

SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN

I/ RAPPELS SUR LES TRANSFORMATIONS DU PLAN

Voir K^2 classe de $1^{ère}$ dans le document dont le titre est : Trigonométrie et Transformation du plan.

II/ ECRITURE COMPLEXE D'UNE TRANSFORMATION DU PLAN

1/ Définition

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A toute transformation T du plan qui transforme un point M d'affixe z en un point M' d'affixe z', on peut associer une application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto z' = f(z)$

Cette égalité : $z' = f(z)$ est appelée écriture complexe de T dans le repère orthonormal considéré.

2/ Ecriture complexe d'une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b

Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b, M et M' deux points du plan d'affixes respectives z et z'.

$t(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$\Leftrightarrow z' - z = b \Leftrightarrow z' = z + b$

$$\boxed{z' = z + b} \quad (1)$$

(1) est l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.

TRAVAUX DIRIGES N°1

1/ Soit T_1 la transformation du plan dont l'écriture complexe associée est :

$$z' = z + 2 - 3i$$

Caractériser T_1 et préciser son élément géométrique

2/ Soit T_2 la transformation du plan qui au point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

a/ Calculer z' en fonction de z

b/ En déduire la nature de T_2 et préciser son élément géométrique.

Résolution

1/ Soit T_1 la transformation du plan

dont l'écriture complexe associée est:

$$z' = z + 2 - 3i$$

Caractérisons T_1 et précisons son élément géométrique.

$z' = az + b$ avec $a = 1$ $b = 2 - 3i$

T_1 est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2 - 3i$

2/ Soit T_2 la transformation du plan qui au point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que: $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

a/ Calculons z' en fonction de z

$$z' = x' + iy' = x + 3 + i(y - 1)$$
$$= x + iy + 3 - i$$

$$\boxed{z' = z + 3 - i}$$

b/ Déduisons-en la nature de T_2 et ses éléments géométrique

Comme précédemment on montre que T_2 est la translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe $3 - i$.

3/ Ecriture complexe d'une rotation

Soit r la rotation de centre Ω d'affixe z_0, d'angle θ; M et M' deux points du plan d'affixes respectives z et z'.

$$r(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z' - z_0}{z - z_0}\right| = 1 \\ \operatorname{Arg}\left(\dfrac{z' - z_0}{z - z_0}\right) = \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{z' - z_0}{z - z_0} = e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)} \quad (2)$$

(2) est l'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe z_0 et d'angle θ.

TRAVAUX DIRIGES N°2

1/ Soit r_1 la transformation du plan dont l'écriture complexe est:

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 - i$$

Caractériser r_1 et préciser ses éléments géométriques

2/ Déterminer l'écriture complexe de la rotation r_2 de centre A d'affixe $z_A = 2 + i$ et d'angle $\pi/2$.

3/ Soit la transformation r_3 qui au point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 3 \end{cases}$

a/ Déterminer l'écriture complexe de r_3

b/ En déduire la nature et les éléments caractéristiques de r_3.

Résolution

1/ Soit r_1 la transformation du plan dont l'écriture complexe est :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 - i$$

<u>Caractérisons r_1 et précisons ses éléments géométriques</u>

$z' = az + b$ avec $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $b = 1 - i$

$|a| = 1$ $\text{Arg}\, a = \frac{\pi}{3}$ $a = e^{i\pi/3}$.

Soit Ω_1 un point invariant par r_1, d'affixe z_0 on a : $z_0 = \frac{b}{1-a}$

$$z_0 = \frac{1-i}{1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2(1-i)}{1 - i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

r_1 est la rotation de centre Ω_1 d'affixe $z_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

2/ <u>Déterminons l'écriture complexe de la rotation r_2 de centre A d'affixe $z_A = 2 + i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$</u>

Soit M et M' deux points du plan d'affixes respectives z et z' on a :

$r_2(M) = M' \Leftrightarrow z' - z_A = e^{i\pi/2}(z - z_A)$

$\Leftrightarrow z' - 2 - i = i(z - 2 - i)$

$\Leftrightarrow z' = iz - 2i + 1 + 2 + i$

L'écriture complexe de r_2 est :

$$z' = iz + 3 - i.$$

3/ Soit la transformation r_3 qui au point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que :
$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 3 \end{cases}$$

a/ <u>Déterminons l'écriture complexe de r_3</u>

Soit z l'affixe de M et z' celle de M' on a :

$$z' = x' + iy' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1\right) + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 3\right)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)y + 1 + 3i$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)y + 1 + 3i$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x + iy) + 1 + 3i$$

$$\boxed{z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z + 1 + 3i}$$

b/ <u>Déduisons-en la nature et les éléments caractéristiques de r_3</u>

Posons $z' = az + b$ avec $a = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ $b = 1 + 3i$

$|a| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1$ $\text{Arg}\, a = -\frac{\pi}{4}$

Soit Ω_3 d'affixe z_0 le centre de r_3

on a : $z_0 = \frac{b}{1-a} = \frac{1+3i}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$z_0 = \frac{4+3\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

> r_3 est donc la rotation de centre Ω_3 d'affixe $z_0 = \frac{4+3\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\theta = -\frac{\pi}{4}$

1/ Ecriture complexe d'une homothétie

Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe z_0 et de rapport $k \neq 0$ et 1

Soit M et M' deux points du plan d'affixes respectives z et z' on a:

$h(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

$\Leftrightarrow z'-z_0 = k(z-z_0)$

$\Leftrightarrow \boxed{z' = kz+(1-k)z_0}$ (3).

(3) est l'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω d'affixe z_0 et de rapport k.

Remarque:

si $k=-1$, l'écriture complexe devient $z'=-z+2z_0$. Il s'agit là de la symétrie centrale de centre le point d'affixe z_0

TRAVAUX DIRIGES N°3

1/ Caractériser la transformation h_1 du plan dont l'écriture complexe est

$z' = -3z+4-2i$

2/ Soit S_2 la transformation du plan dans lui-même qui au point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que: $\begin{cases} x'=-x+6 \\ y'=-y-4 \end{cases}$

a/ Déterminer l'écriture complexe de S_2. En déduire sa nature et préciser son élément géométrique.

Résolution

1/ Caractérisons la transformation h_1 du plan dont l'écriture complexe est $z'=-3z+4-2i$

L'écriture complexe est sous la forme $z'=az+b$ avec $a\in\mathbb{R}-\{-1;0;1\}$ $b=4-2i$

h_1 est donc une homothétie de rapport $k=-3$ soit Ω_1 d'affixe z_1 son centre

on a: $z_1 = \frac{4-2i}{1-(-3)} = 1-\frac{1}{2}i$

h_1 est donc l'homothétie de centre Ω_1 d'affixe $1-\frac{1}{2}i$ et de rapport -3

2/ Soit S_2 la transformation du plan dans lui-même qui au point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que:

$\begin{cases} x'=-x+6 \\ y'=-y-4 \end{cases}$

a/ Déterminons l'écriture complexe de S_2

Soit z et z' les affixes respectives des points M et M' on a:

$z' = x'+iy' = -x+6+i(-y-4)$

$= -x-iy+6-4i$

$= -(x+iy)+6-4i$

$\boxed{z' = -z+6-4i}$

Déduisons-en la nature et l'élément géométrique de S_2.

$z' = -z + 6 - 4i \iff z' + z = 6 - 4i$

$\iff \dfrac{z' + z}{2} = 3 - 2i$

S_2 est donc la symétrie centrale de centre Ω_2 d'affixe $3 - 2i$

III/ SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN

1/ Définition

Soit Ω un point du plan, θ et k deux réels avec $k > 0$.

On appelle similitude de centre Ω de rapport k et d'angle θ, l'application S de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M associe le point M' tel que :

$$\begin{cases} \Omega M' = k\, \Omega M \\ \widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})} = \theta \end{cases}$$

Exemple : Soit $ABCD$ un carré de sens direct et de centre O.

$$\begin{cases} AC = \sqrt{2}\, AB \\ \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

La similitude directe S_1 de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ transforme B en C.

$$\begin{cases} DO = \dfrac{\sqrt{2}}{2} DC \\ \widehat{(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DO})} = -\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

La similitude directe S_2 de centre D, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ transforme C en O.

2/ Eléments caractéristiques d'une similitude directe

* Le centre Ω, le rapport k et l'angle θ sont appelés éléments caractéristiques de la similitude.
* Une similitude est totalement définie lorsqu'on connaît son centre, un point et l'image du point. En effet si Ω est le centre de la similitude M le point d'image M' alors :

$k = \dfrac{\Omega M'}{\Omega M}$ $\quad \theta = \widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})}$

Remarques.

* Une homothétie de centre Ω et de rapport $k > 0$ est une similitude de centre Ω, de rapport k et d'angle nul.
* La rotation de centre Ω et d'angle θ est la similitude de centre Ω, de rapport 1 et d'angle θ.

3/ Décomposition canonique d'une similitude

Théorème 1 : Soit S la similitude

de centre Ω, de rapport k et d'angle θ, r la rotation de centre Ω, d'angle θ, h l'homothétie de centre Ω, de rapport k. On a:

$$\boxed{S = h\circ r = r\circ h}$$

Théorème 3: La composée d'une rotation de centre Ω et d'angle θ et d'une homothétie de centre Ω de rapport $k>0$ est la similitude de centre Ω, de rapport k et d'angle θ.

5/ Réciproque d'une similitude directe

Soit S la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ.
La réciproque de S est la similitude directe de centre Ω, de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.

6/ Composée de deux similitudes directes

Soit S la similitude de rapport k et d'angle θ, S' la similitude de rapport k' et d'angle θ'.
La composée $S'\circ S$ est la similitude directe de rapport kk' et d'angle $\theta+\theta'$.

7/ Similitudes et configurations

Toute similitude directe étant la composée d'une homothétie et d'un déplacement et compte tenu des propriétés de ces transformations il en résulte que toute similitude directe de rapport k:

• conserve:
l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, les angles orientés, les barycentres, le contact.

• multiplie:
les distances par k, les aires par k^2

• transforme:
les droites en droites, les demi-droites en demi-droites, les segments en segments, les cercles en cercles.

IV/ ECRITURE COMPLEXE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE

Soit S la similitude directe de centre Ω d'affixe z_0, de rapport k et d'angle θ.
Soient M et M' deux points du plan d'affixes respectives z et z'.

$$S(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\,\Omega M \\ (\widehat{\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}}) = \theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = k \\ (\widehat{\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}}) = \theta \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right| = k \\ \text{Arg}\left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right) = \theta \end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{z'-z_0}{z-z_0} = ke^{i\theta}$

$\Leftrightarrow z'-z_0 = ke^{i\theta}(z-z_0)$ (1)

$\Leftrightarrow z' = ke^{i\theta}z + (1-ke^{i\theta})z_0$ (2)

(1) et (2) sont équivalentes : ce sont les écritures complexes de la similitude S de centre Ω d'affixe z_0, de rapport k et d'angle θ.

En posant $a = ke^{i\theta}$ $b = (1-ke^{i\theta})z_0$

(2) devient $z' = az+b$ $z_0 = \frac{b}{1-a}$.

METHODES

Soit f une transformation du plan dont l'écriture complexe est :

$$z' = az+b \quad a\in\mathbb{C}^*, b\in\mathbb{C}$$

- Si $a=1$ et $b\neq 0$ alors f est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b
- Si $a=-1$ alors f est la symétrie centrale de centre le point Ω d'affixe $z_0 = \frac{b}{2}$.
- Si $a\in\mathbb{R}^*-\{-1;1\}$ alors f est l'homothétie de rapport $k=a$ et de centre le point Ω d'affixe $z_0=\frac{b}{1-a}$
- $|a|=1$ avec $a\in\mathbb{C}-\{-1;1\}$ alors f est la rotation d'angle $\theta=\text{Arg}a$ et de centre Ω d'affixe $z_0=\frac{b}{1-a}$
- $|a|\neq 1$ et $a\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$ alors f est la similitude directe de centre Ω d'affixe $z_0=\frac{b}{1-a}$, d'angle $\theta=\text{Arg}a$ et de rapport $k=|a|$.

TRAVAUX DIRIGES N°4

1/ Soit S l'application du plan dans lui même d'écriture complexe :

$$z' = -2iz+1+3i.$$

a/ Justifier que S est une similitude directe et préciser ses éléments caractéristiques

b-/ Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = 1+i$

- Déterminer l'équation de l'image par S de la droite (AB)
- Déterminer l'équation de l'image du cercle de centre A et de rayon $r=1$.

2-/ Soit f l'application du plan dans lui-même d'expression analytique

$$\begin{cases} x' = x-y-3 \\ y' = x+y+1 \end{cases}$$

a-/ Déterminer l'écriture complexe de f.

b-/ En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

c/ Déterminer la nature, les éléments caractéristiques et l'écriture complexe de f^{-1}

Résolution

1/ Soit S l'application du plan dans lui-même dont l'écriture complexe est

$z' = -2iz + 1 + 3i$

a/ Justifions que S est une similitude précisons ses éléments caractéristiques

L'écriture complexe de S est de la forme $z' = az + b$ $(a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C})$ donc, S est une similitude directe

• l'équation $z = -2iz + 1 + 3i$ a pour solution $z = \frac{7+i}{5}$

• $-2i = 2e^{-i\pi/2}$.

Donc S est la similitude directe de centre $\Omega\left(\frac{7}{5}; \frac{1}{5}\right)$, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

b/ $z_A = i$ $\quad z_B = 1+i$

- Déterminons l'équation de l'image par S de la droite (AB)

Soit $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$ On a:

$z_{A'} = (-2i)z_A + 1 + 3i = 3 + 3i$

$z_{B'} = -2iz_B + 1 + 3i = 3 + i$

L'image par S de la droite (AB) est la droite $(A'B')$ d'équation $x = 3$.

- Déterminons l'équation de l'image par S du cercle de centre A et de rayon 1

L'image par S du cercle de centre A et de rayon 1 est le cercle de centre A' d'affixe $z_{A'} = -2iz_A + 1 + 3i = 3 + 3i$ et de rayon $r' = 2 \times 1 = 2$

Ce cercle a donc pour équation

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$$

2/ Soit f l'application du plan dans lui-même d'expression analytique:

$$\begin{cases} x' = x - y - 3 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$$

a/ Déterminons l'écriture complexe de f.

Posons $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$

$z' = (x - y - 3) + i(x + y + 1)$

$= (1+i)x + (i-1)y - 3 + i$

$= (1+i)x + i(1+i)y - 3 + i$

$= (1+i)(x+iy) - 3 + i = (1+i)z - 3 + i$

$$\boxed{z' = (1+i)z - 3 + i}$$

b/ Nature et éléments caractéristiques de f.

On montre aisément que f est la similitude directe de centre $\Omega\binom{-1}{-3}$, d'angle $\pi/4$ et de rapport $\sqrt{2}$

c/ $f^{-1} = S\left[\Omega\binom{-1}{-3}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

ENONCES DES EXERCICES

EXERCICE 1

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation
(E): $z^3-(6+4i)z^2+(8+14i)z-12i=0$

1) Montrer que (E) admet une unique solution réelle.

2) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$. On note z_1 la solution réelle, z_2 et z_3 les deux autres solutions, avec $|z_2|<|z_3|$.

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points M_1, M_2, M_3 d'affixes respectives z_1, z_2, z_3.
Déterminer la similitude directe de centre M_2 qui transforme M_1 en M_3; donner ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$; unité graphique 5cm. A, B, C désignent les points d'affixes respectives a, i et -1.
On note g l'application qui à tout point M du plan, d'affixe z, associe le point $g(M)$ d'affixe:

$$z'=\frac{a+z+iz}{3}$$

1) a) A tout point M d'affixe z, on fait correspondre le point M_1 d'affixe iz.
On note M' l'isobarycentre des points A, B et M_1. Exprimer l'affixe de M' en fonction de a et z.

b) Montrer que $g(B)=O$ ssi $a=1-i$ et que, dans ces conditions les points O, A, I sont alignés, I désignant le milieu de [BC].

Placer les points O, A, B, C et I sur une figure.

Dans toute la suite de l'exercice on prend $a=1-i$

2) a) Prouver que g est une similitude directe dont on déterminera le centre Ω, le rapport et l'angle.

b) Prouver que les A, B, Ω sont alignés

3) a) Déterminer la mesure de l'angle $(\widehat{\vec{OB},\vec{OI}})$. Montrer que l'image de la droite (OB) par g est la droite (OI)

b) Soit O' l'image de O par g. Montrer que la droite (OO') est l'image par g de la droite (BO).

c) En déduire que les points I, O, O' et A sont alignés.

4) Montrer que les points I et Ω appartiennent au cercle de diamètre [BO']

EXERCICE 3.

On considère le plan affine euclidien (P) rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Soit S_1 l'application de P dans P qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x\sqrt{3} - y + 2 \\ y' = x + y\sqrt{3} + 1 \end{cases}$$

Calculer l'affixe $z' = x' + iy'$ de M' en fonction de l'affixe $z = x + iy$ de M. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de S_1.

2) On considère le point A d'affixe $z_A = 1 + i$ et le point B d'affixe $z_B = 1$.

Démontrer qu'il existe une similitude directe plane unique, S_2, telle que $S_2(A) = A'$ d'affixe $z_{A'} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}(\sqrt{3}+1)$ et $S_2(B) = B'$ d'affixe $z_{B'} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donner les éléments caractéristiques de S_2.

Déterminer les éléments caractéristiques de $S = S_1 \circ S_2$

EXERCICE 4

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$f(z) = z^4 - 4(1+i)z^3 + 12i z^2 + 8(1-i)z - 20$$

1) Déterminer les nombres complexes p et q pour que, pour tout z de $\mathbb{C}$ on ait : $f(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + pz + q)$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

2) Dans le plan complexe P, rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A, B, C, D dont les affixes sont solutions de l'équation $f(z) = 0$.

A est le point d'ordonnée négative, B le point d'abscisse négative, C le point de même abscisse que A.

Montrer que ABCD est un carré.

3) On considère dans le plan P les points B_1, C_1 et D_1 ayant respectivement pour affixes i, $1+i$ et 1.

Montrer qu'il existe une similitude directe S du plan P telle que $S(O) = A$ et $S(B_1) = B$. Déterminer les éléments géométriques de S et montrer que le quadrilatère $OB_1C_1D_1$ a pour image ABCD. Quelle est alors la nature de $OB_1C_1D_1$?

EXERCICE 5

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

on considère l'application F qui, au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$z' = t^3 z + t(t+1)$ où t désigne un nombre complexe.

1/ Déterminer l'ensemble des nombres complexes t pour lesquels F est une translation ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

2/ Déterminer l'ensemble des nombres complexes t pour lesquels F est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

3/ Caractériser F lorsque $t = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

EXERCICE 6

Dans le plan complexe, on considère l'application T_k qui au point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe $z' = kiz + 1 + k^2$, k étant un paramètre réel strictement positif.

1/ Quelle est la nature de la transformation T_k ?

Montrer que T_k possède un point invariant Ω_k et un seul, que l'on déterminera. Préciser les éléments caractéristiques de T_k.

2/ Déterminer l'ensemble des points Ω_k lorsque k décrit l'ensemble des réels strictement positifs.

3/ k_1 et k_2 étant deux réels strictement positifs, on considère les transformations $T_{k_1} \circ T_{k_2}$ et $T_{k_2} \circ T_{k_1}$

Montrer que $T_{k_1} \circ T_{k_2} = T_{k_2} \circ T_{k_1}$ si, et seulement si, $k_1 = k_2$.

4/ Quelle est la nature de la transformation $T_k \circ T_k$?

EXERCICE 7

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on donne les points A(1; 0) et B(-1; 0). A tout point M du plan de coordonnées (x; y) on associe le nombre complexe $z = x + iy$ affixe de M.

1/ Soit T l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à tout M associe le point M_1 d'affixe $z_1 = x_1 + iy_1$ telle que :

$$z_1 = iz - (1+i)$$

a/ Montrer que l'on a :

$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM_1}) = \frac{\pi}{2}$ et $\|\overrightarrow{BM_1}\| = \|\overrightarrow{AM}\|$.

b/ Préciser la nature de T et ses

éléments caractéristiques.

c/ Calculer les coordonnées de M_1 en fonction de celles de M.

d/ Quel est l'ensemble des points M_1 lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$?

2/ Le nombre réel λ étant fixé, mais quelconque, on considère l'application $T\lambda$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout M, associe le point M', barycentre de M affecté du coefficient λ, de M_1 affecté de $-\lambda$ et de A affecté de 1. On note $z' = x'+iy'$ l'affixe du point M'.

a/ Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de λ, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OA}$.
En déduire, entre z et z' la relation : $z' = \lambda(1-i)z + \lambda(1+i) + 1$.

b/ Démontrer que $T\lambda$ est une similitude directe et déterminer l'affixe de son centre, son rapport et son angle.

c/ Préciser pour quelles valeurs de λ l'application $T\lambda$ est une rotation et donner dans ce cas son angle et l'affixe de son centre.

EXERCICE 8

1/ Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère complexe et soit la transformation S par laquelle, tout point M d'affixe z a pour image M' d'affixe z' définie par : $\begin{cases} x' = ax - by + 1 \\ y' = bx + ay + 1 \end{cases}$

avec $M(x;y)$ et $M'(x';y')$.

a/ Montrer que $z' = z_0 z + 1 + i$ avec $z_0 = a + ib$ $(a;b) \in \mathbb{R}^2$.

b/ Déterminer le nombre complexe z_0 pour que S soit une translation. Donner alors l'élément géométrique de cette translation.

c/ Déterminer z_0 pour que S soit une rotation d'angle de mesure $-\frac{\pi}{4}$. Trouver l'autre élément géométrique.

d/ Peut-on déterminer z_0 pour que S soit une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$? Si oui, donner l'autre élément géométrique.

e/ Caractériser la transformation S si $z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2/ On considère un cercle de centre O, A un point de ce cercle et M un point décrivant ce cercle mais distinct de A.

Soit N le point du plan tel que AMN soi un triangle équilatéral de sens indirect.

a/ Considérons la similitu.e directe S' de centre A transformant le point M en I (I étant le milieu de [MN])

Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe S'

Placer l'image O_1 du centre O de ce cercle par S'.

b/ Déterminer l'ensemble (E) décrit par le point I lorsque M décrit tout le cercle sauf le point A.

Construire cet ensemble.

EXERCICE 9

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 1cm), placer les points A, B et C d'affixes respectives :

$a = 8$, $b = -4+4i$ et $c = -4i$

1/ a/ Ecrire a, b et c sous forme trigonométrique.

b/ Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

2/ La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme A en A', B en B' et C en C'.

a/ Construire les points A', B' et C'.

b/ Soit a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'.

Etablir que :

$b' = -2(1+\sqrt{3}) + 2(1-\sqrt{3})i$.

Calculer a' et c'.

3/ a/ Déterminer les affixes p, q, r des points P, Q, R milieux respectifs des segments [A'B], [B'C], [C'A].

b/ Démontrer que $r-p = e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p)$

En déduire la nature du triangle PQR.

EXERCICE 10

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points M, M' et M'' d'affixes respectives z, $z+i$ et iz, où z est un nombre complexe différent de zéro.

1/ Caractériser la transformation qui, à M, associe M', puis celle qui, à M, associe M''.

2/ Pour quel nombre z a-t-on $M'=O$?

Pour quel nombre z a-t-on $M'=M''$?

3/ Dans cette question, on suppose z distinct de 0, de $-i$ et de $\frac{1-i}{2}$.

a/ Prouver que les points O, M' et M'' sont alignés si et seulement si $\frac{z+i}{iz}$ est un nombre réel.

b/ On pose $x = Re(z)$ et $y = Im(z)$ avec $z \neq 0$.
Calculer $Im\left(\frac{z+i}{iz}\right)$ en fonction de x et y.

c/ Déterminer et représenter l'ensemble (E) des points M tels que O, M' et M'' soient deux à deux distincts et alignés.

4/ a/ Soit A le point d'affixe $-i$
Exprimer $\left|\frac{z+i}{iz}\right|$ en fonction de AM et OM.

b/ Déterminer et représenter l'ensemble (F) des points M tels que OM'M'' soit un triangle isocèle en O

EXERCICE 11

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 4cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que :

$a = 1-i$, $b = 1+i$, $c = -1+i = -a$

On note (Γ) le cercle de diamètre [AB].

1/ a/ Placer sur une figure les points A, B et C et le cercle (Γ).

b/ Mettre les nombres complexes a, b et c sous forme trigonométrique.

c/ Soit r la rotation de centre O telle que $r(A) = B$.
Déterminer l'angle de r et le point $r(B)$, image de B par r.

d/ Déterminer l'image (Γ') du cercle (Γ) par r ; Construire (Γ') sur la figure

2/ On considère un nombre θ de l'intervalle $]0; 2\pi[$ distinct de π ; on note M le point d'affixe $z = 1+ie^{i\theta}$
On désigne par M' l'image de M par r et on appelle z' l'affixe de M'.

a/ Montrer que M est un point de (Γ) distinct de A et de B.

b/ Exprimer z' en fonction de z.
Calculer en fonction de θ les affixes u et u' des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$.

c/ Etablir la relation $u = u' \tan\frac{\theta}{2}$

d/ Prouver que les points B, M et M' sont alignés. Placer sur la figure un point M et son transformé M'.

EXERCICE 12

Dans le plan orienté on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel que l'angle $(\vec{AB}, \vec{AC})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$. Soit I le milieu du segment [BC].

On note R_B la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$, R_C la rotation de centre C et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\vec{BC}$.

On se propose de trouver par deux méthodes la nature et les éléments caractéristiques de la transformation

$$S = R_C \circ T \circ R_B.$$

1ère méthode : Utilisation des nombres complexes.

On rapporte le plan au repère orthonormal direct $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$.

a/ Donner l'écriture complexe des transformations R_B, R_C, T puis S.

b/ Caractériser alors S.

2e méthode : Utilisation des propriétés des transformations

a/ Déterminer, sans calcul, la nature de S.

b/ Préciser l'image de B par S.

c/ Caractériser S.

EXERCICE 13

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de centre O. On suppose que ce carré est direct, c'est-à-dire que $(\vec{AB}, \vec{AD})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$. On désigne par :

r le quart de tour direct de centre A,
t la translation de vecteur $\vec{AB}$,
h l'homothétie de centre C, de rapport $\sqrt{3}$.

1/ a/ Prouver que $r' = t \circ r$ est une rotation, dont on précisera l'angle.

b/ Déterminer les images de A et B par r'. En déduire le centre de r'.

2/ On se propose d'étudier la transformation $f = r' \circ h$.

a/ Montrer que f est une similitude dont on précisera l'angle et le rapport.

b/ Soit I le centre de f. Déterminer l'image de C par f.

Prouver que $(\vec{IC}, \vec{ID}) = \frac{\pi}{2}$ et que $ID = \sqrt{3}\, IC$.

c/ Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = \frac{\pi}{2}$.

Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{CI})$. Placer I sur la figure.

d/ Prouver que l'ensemble (Γ') des points M du plan tels que :

$MD^2 - 3MC^2 = 0$ est un cercle dont on précisera le centre G et le rayon.

Construire (Γ').

EXERCICE 14

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Unité graphique : 8cm. On note C le milieu du segment [AB]. Soit r la rotation de centre C et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$. Pour tout point M du plan d'affixe z, on note M' le transformé de M par r.

1/ a/ Placer sur une figure les points O, A, B, M et M' lorsque $z = \frac{3}{4}$

b/ Déterminer l'image du segment [OA] par r.

c/ Calculer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M.

2/ On note P le milieu du segment [OC]. Soit N le milieu de [BM] et N' le milieu de [AM'].

a/ Exprimer en fonction de z les affixes U et U' des vecteurs $\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{PN'}$

b/ Prouver que le triangle PNN' est rectangle et isocèle.

c/ Dans le cas où $z = \frac{3}{4}$, placer le triangle PNN' sur la figure précédente.

EXERCICE 15

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, (unité 4cm), on définit l'application f qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = -jz + i$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1/ Montrer que f admet exactement un point invariant, dont on donnera l'affixe. Caractériser géométriquement f.

2/ On définit dans P la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} M_0 = O \\ \text{Pour tout } n,\ M_{n+1} = f(M_n). \end{cases}$

a/ Construire Ω, M_0, M_1, M_2.

b/ Pour tout n, on note z_n l'affixe de M_n et on pose $Z_n = z_n - e^{i\frac{\pi}{6}}$. Déterminer un nombre complexe a tel que $Z_{n+1} = aZ_n$. Mettre a sous forme trigonométrique et déterminer un entier naturel p tel que $a^p =$

c/ Calculer Z_n puis z_n en fonction de n. Placer M_{1989} sur le dessin.

CORRIGES DES EXERCICES

EXERCICE 1

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation

$(E): z^3-(6+4i)z^2+(8+14i)z-12i=0$

1/ Montrons que (E) admet une unique solution réelle.

Posons $z=a$; z solution de (E)

$\Leftrightarrow a^3-(6+4i)a^2+(8+14i)a-12i=0$

$\Leftrightarrow (a^3-6a^2+8a)+i(-4a^2+14a-12)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3-6a^2+8a=0 & (1) \\ -4a^2+14a-12=0 & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow a(a^2-6a+8)=0$

$\Leftrightarrow a(a-2)(a-4)=0$

$\Leftrightarrow a=0$ ou $a=2$ ou $a=4$

$(2) \Leftrightarrow 2a^2-7a+6=0$

$\Leftrightarrow (a-2)(2a-3)=0 \Leftrightarrow a=2$ ou $a=\frac{3}{2}$

La solution commune à (1) et (2) est $a=2$

(E) admet donc une unique solution réelle $z_1=2$

2/ Résolvons (E) dans $\mathbb{C}$

Posons $P(z)=z^3-(6+4i)z^2+(8+14i)z-12i$

$P(2)=0$ On peut donc écrire $P(z)$ sous la forme $P(z)=(z-2)Q(z)$ où Q est un polynôme du second degré

Par division euclidienne on a:

$P(z)=(z-2)[z^2-(4+4i)z+6i]$

$(E) \Leftrightarrow P(z)=0 \Leftrightarrow z=2$ ou

$z^2-(4+4i)z+6i=0$

$\Delta'=(2+2i)^2-6i=2i=(1+i)^2$

$z_2=2+2i-1-i=1+i$

$z_3=2+2i+1+i=3+3i$

$S=\{2; 1+i; 3+3i\}$

3/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points M_1, M_2, M_3 d'affixes respectives z_1, z_2, z_3.

Déterminons la similitude directe de centre M_2 qui transforme M_1 en M_3.

Posons $S: z'=az+b$ on a:

$\begin{cases} z_3=az_1+b \\ \frac{b}{1-a}=z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=z_3-az_1 \\ b=z_2(1-a) \end{cases}$

$\Leftrightarrow z_3-az_1=z_2(1-a)$

$\Leftrightarrow a=\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}=\frac{2+2i}{1-i}=2i$

$b=(1+i)(1-2i)=3-i$

L'écriture complexe de la similitude S de centre M_2 qui transforme M_1 en M_3 est: $z'=2iz+3-i$

Donnons les éléments caractéristiques de la similitude S

$|a|=2 \quad \operatorname{Arg}(a)=\frac{\pi}{2}$

(S) est la similitude de centre M e d'affixe $z_2 = 1+i$, d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$ et de rapport $k = 2$.

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$; unité graphique 5cm. A, B, C désignent les points d'affixes respectives a, i et -1. On note g l'application qui à tout point M du plan, d'affixe z, associe le point $g(M)$ d'affixe :

$$z' = \frac{a + z + iz}{3}$$

1/a/ A tout point M d'affixe z, on fait correspondre le point M_1 d'affixe iz. On note M' l'isobarycentre des points A, B et M_1.

Exprimons l'affixe de M' en fonction de a et z.

Soit $z_{M'}$ l'affixe de M' on a :

$$\boxed{z_{M'} = \frac{a + i + iz}{3}}$$

b/ Montrons que $g(B) = O$ ssi $a = 1 - i$

$g(B) = O \Leftrightarrow \frac{a + i + i^2}{3} = 0 \Leftrightarrow a + i - 1 = 0$
$\Leftrightarrow a = 1 - i$

$$\boxed{g(B) = O \Leftrightarrow a = 1 - i}$$

Montrons que dans ces conditions les points O, A, I sont alignés, I désignant le milieu de [BC]

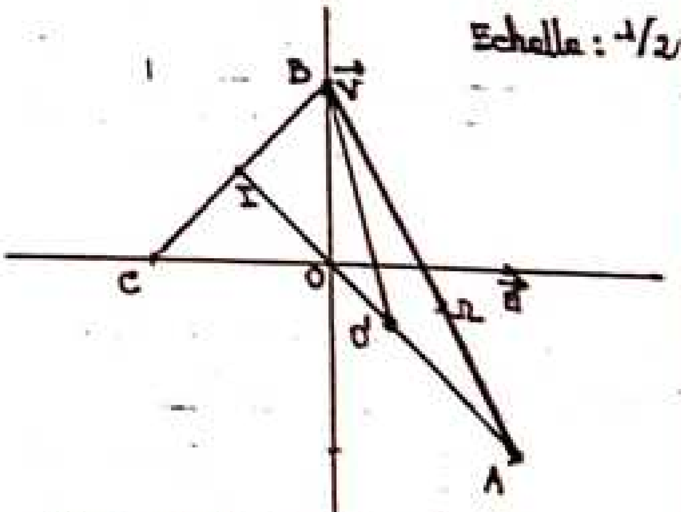
$z_O = 0 \quad z_A = 1 - i \quad z_B = i \quad z_C = -1$

$z_I = \frac{-1+i}{2}$

$\vec{OA}\begin{vmatrix}1\\-1\end{vmatrix} \quad \vec{OI}\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{vmatrix} \quad \vec{OI} = -\frac{1}{2}\vec{OA}$

Les points O, A et I sont donc alignés

Plaçons les points O, A, B, C et I sur une figure



Dans toute la suite de l'exercice on prend $a = 1 - i$

2/ a-/ Prouvons que g est une similitude directe dont nous déterminerons le centre Ω, le rapport et l'angle

$$z' = \left(\frac{1+i}{3}\right)z + \frac{1-i}{3} = az + b$$

avec $a = \frac{1+i}{3} \quad b = \frac{1-i}{3}$

g est donc une similitude directe

Soit Ω son centre, k son rapport et θ son angle on a :

$z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1-i}{2-i} = \frac{(1-i)(2+i)}{5}$
$= \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$

$z_\Omega = \frac{3-i}{5}$

$\theta = \text{Arg}\left(\frac{1+i}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$ $\quad k = \left|\frac{1+i}{3}\right| = \frac{\sqrt{2}}{3}$

g est la similitude directe de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{3-i}{5}$, d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$ et de rapport $k = \frac{\sqrt{2}}{3}$

b-/ Prouvons que les points A, B et Ω sont alignés.

$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A = -1+2i$

$z_{\vec{A\Omega}} = z_\Omega - z_A = \frac{3-i}{5} - 1 + i = \frac{-2+4i}{5}$

$z_{\vec{A\Omega}} = \frac{2}{5}(-1+2i) = \frac{2}{5} z_{\vec{AB}}$

$\vec{A\Omega} = \frac{2}{5}\vec{AB}$; les points A, B et Ω sont donc alignés.

3-/ a-/ Déterminons la mesure de l'angle $(\vec{OB}, \vec{OI})$.

$\text{mes}(\vec{OB}, \vec{OI}) = \text{Arg}\frac{z_I}{z_B} = \text{Arg}\left(\frac{-1+i}{2i}\right)$

$= \text{Arg}(-1+i) - \text{Arg}(2i)$

$= \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

$$\boxed{(\vec{OB}, \vec{OI}) = \frac{\pi}{4}}$$

Montrons que l'image de la droite (OB) par g est la droite (OI)

$a = 1-i \Rightarrow g(B) = 0$

$(OB) : x = 0 \quad (OI) : y = -x$

Soit $M(x; y)$ $\quad M \in (OB) \Leftrightarrow z = iy$

$z' = \left(\frac{1+i}{3}\right)iy + \frac{1-i}{3}$

$= \left(-\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}\right) + i\left(\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}\right)$

On remarque $\text{Re}(z') = -\text{Im}(z')$

$\Leftrightarrow g(M) \in (OI)$.

Conclusion

L'image de la droite (OB) par g est la droite (OI)

b-/ Soit O' l'image de O par g.

Montrons que la droite (OO') est l'image par g de la droite (BO).

$\begin{cases} g(B) = O \\ g(O) = O' \end{cases} \Rightarrow g((BO)) = (OO')$

La droite (OO') est donc l'image de la droite (BO) par g

c-/ Déduisons-en que les points I, O, O' et A sont alignés

$\begin{cases} g[(OB)] = (OI) \\ g[(OB)] = (OO') \end{cases} \Rightarrow$ (OI) et (OO') sont confondues

$\Rightarrow$ O, I et O' sont alignés. Or O, I et A sont alignés. On en déduit donc que les points I, O, O' et A sont alignés

4-/ Montrons que les points I et Ω appartiennent au cercle de diamètre [BO]

Soit J le milieu de [BO'] on a :

$z_J = \frac{z_B + z_{O'}}{2}$ $\quad z_{O'} = \frac{1-i}{3}$

$z_J = \frac{1+2i}{6}$

$BO' = |z_{O'} - z_B| = \left|\frac{1-4i}{3}\right| = \frac{\sqrt{17}}{3}$

$JI = |z_I - z_J| = \left|\frac{-4+i}{6}\right| = \frac{\sqrt{17}}{6} = \frac{1}{2}BO'$

$J\Omega = |z_\Omega - z_J| = \left|\frac{13-16i}{30}\right| = \frac{\sqrt{17}}{6} = \frac{1}{2}BO'$

Conclusion :

Les points I et Ω appartiennent au cercle de diamètre [BO']

EXERCICE 3

On considère le plan affine euclidien (P) rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

1/ Soit S_1 l'application de P dans P qui à tout point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x\sqrt{3} - y + 2 \\ y' = x + y\sqrt{3} + 1 \end{cases}$$

Calculons l'affixe $z' = x'+iy'$ de M' en fonction de l'affixe $z = x+iy$ de M.

$z' = x'+iy'$

$= x\sqrt{3} - y + 2 + i(x + y\sqrt{3} + 1)$

$= x(\sqrt{3}+i) + y(-1+i\sqrt{3}) + 2 + i$

$= x(\sqrt{3}+i) + iy(i+\sqrt{3}) + 2 + i$

$= (\sqrt{3}+i)(x+iy) + 2 + i$

$z' = (\sqrt{3}+i)z + 2 + i$

$$\boxed{z' = (\sqrt{3}+i)z + 2 + i}$$

Déduisons-en la nature et les éléments caractéristique de S_1

L'écriture complexe de S_1 est :

$z' = az + b$ avec $a = \sqrt{3}+i$, $b = 2+i$

S_1 est donc une similitude directe

Soit Ω_1 son centre, θ_1 son angle et k_1 son rapport on a :

$z_{\Omega_1} = \frac{b}{1-a} = \frac{2+i}{1-\sqrt{3}-i}$

$= \frac{(2+i)(1-\sqrt{3}+i)}{(1-\sqrt{3})^2+1}$

$= \frac{1-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}} + i\frac{3-\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$

$= \frac{-7-8\sqrt{3}}{13} + i\frac{9+\sqrt{3}}{13}$

$\theta_1 = \text{Arg}\, a = \text{Arg}(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6}$

$k_1 = |a| = |\sqrt{3}+i| = 2$

(S₁) est donc la similitude directe de centre Ω_1 d'affixe $z_{\Omega_1} = \frac{-7-8\sqrt{3}}{13} + i\frac{9+\sqrt{3}}{13}$, d'angle $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ et de rapport $k_1 = 2$

2/ On considère le point A d'affixe $z_A = 1+i$ et le point B d'affixe $z_B = 1$

Démontrons qu'il existe une similitude directe plane unique, S_2, telle que $S_2(A) = A'$ et $S_2(B) = B'$

avec

$z_{A'} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; $z_{B'} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Posons l'écriture complexe de S_2 sous la forme $z' = az + b$

$$\begin{cases} S_2(A) = A' \\ S_2(B) = B' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_{A'} = a z_A + b \\ z_{B'} = a z_B + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{i} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ b = z_{B'} - a z_B = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases}$$

$a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad b = 0$

L'écriture complexe de S_2 est :

$z' = az$, $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$|a| = 1$ $\quad \operatorname{Arg} a = \frac{\pi}{3}$

Eléments caractéristiques de S_2

S_2 est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Déterminons les éléments caractéristiques de $S = S_1 \circ S_2$

S a pour écriture complexe :

$z' = (\sqrt{3}+i)(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) z + 2 + i$

$a = (\sqrt{3}+i)(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$

$|a| = 2$ $\quad \operatorname{Arg}(a) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$

$a = 2i$

$z' = 2iz + 2 + i$

Soit Ω le centre de S on a :

$z_\Omega = \frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{5} = i$

S est donc la similitude plane directe de centre Ω d'affixe $z_\Omega = i$ d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$ et de rapport 2.

EXERCICE 4

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$f(z) = z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 20$

1./ Déterminons les nombres complexes p et q pour que, pour tout z de $\mathbb{C}$ on ait : $f(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + pz + q)$

En procédons par division euclidienne on a :

$$f(z) = (z^2 + 2i)[z^2 - 4(1+i)z + 10i]$$

On en déduit $p = -4(1+i)$ $\quad q = 10i$

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

$f(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2i = 0$ ou $z^2 - 4(1+i)z + 10i = 0$

$z^2 + 2i \Leftrightarrow z^2 = -2i = (1-i)^2$

$\Leftrightarrow z = -1+i$ ou $z = 1-i$

$z^2 - 4(1+i)z + 10i = 0$

$\Delta' = 4(1+i)^2 - 10i = -2i = (1-i)^2$

$z_1 = 2+2i - 1 + i = 1+3i$

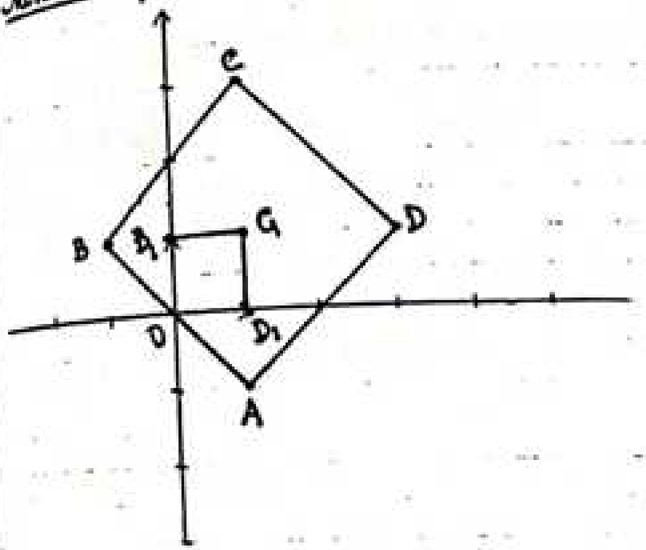
$z_2 = 2+2i + 1 - i = 3+i$

$S = \{-1+i ; 1-i ; 1+3i ; 3+i\}$

2/ $z_A = 1 - i$; $z_B = -1 + i$

$z_C = 1 + 3i$ $z_D = 3 + i$

Montrons que ABCD est un carré



$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A = -2 + 2i$

$z_{\vec{DC}} = z_C - z_D = -2 + 2i$ $\Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$ (1)

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_D} = \frac{4i}{-4} = -i \Rightarrow \begin{cases} \vec{AC} \perp \vec{DB} \\ AC = DB \end{cases}$ (2)

(1) et (2) $\Leftrightarrow$ ABCD est un carré.

3/ On considère dans le plan P les points B_1, G et D_1 d'abscisses respectives i, $1+i$ et 1

Montrons qu'il existe une similitude directe S du plan P telle que : $S(O) = A$ et $S(B_1) = B$

Posons l'écriture complexe de S sous la forme $z' = az + b$

$S(O) = A \Leftrightarrow z_A = b \Leftrightarrow b = 1 - i$

$S(B_1) = B \Leftrightarrow z_B = a z_{B_1} + b$

$\Leftrightarrow a = \frac{z_B - b}{z_{B_1}} = \frac{-2+2i}{i} = 2 + 2i$

Il existe donc une similitude plane directe S telle que $S(O) = A$ et $S(B_1) = B$.

Son écriture complexe est :

$$z' = (2+2i)z + 1 - i.$$

Déterminons les éléments caractéristiques de S.

Posons $a = 2 + 2i$ $b = 1 - i$

Soit Ω le centre de S, θ son angle et k son rapport on a :

$$z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1-i}{-1-2i} = \frac{(1-i)(-1+2i)}{5}$$

$$z_\Omega = \frac{1+3i}{5}$$

$\theta = \arg(a) = \frac{\pi}{4}$ $k = |a| = 2\sqrt{2}$

$\boxed{\text{(S) est la similitude plane directe de centre } \Omega \text{ d'affixe } z_\Omega = \frac{1+3i}{5}, \text{ d'angle } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ et de rapport } k = 2\sqrt{2}}$

Montrons que le quadrilatère OB_1GD_1 a pour image ABCD

$S(O) = A$ $S(B_1) = B$.

$(2+2i)z_G + 1 - i = (2+2i)(1+i) + 1 - i$

$= 4i + 1 - i$

$= 1 + 3i = z_C$

$\Leftrightarrow S(G) = C$

$(2+2i)z_{D_1} + 1 - i = 2 + 2i + 1 - i = 3 + i$

$= z_D \Leftrightarrow S(D_1) = D$

On en déduit que OB_1GD_1 est un carré.

EXERCICE 5

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
On considère l'application F qui, au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = t^3 z + t(t+1) \text{ où } t$$

désigne un nombre complexe.

1-/ <u>Déterminons l'ensemble des nombres complexes t pour lesquels F est une translation</u>

F est une translation ssi $\begin{cases} t^3 = 1 \\ t(t+1) \neq 0 \end{cases}$

$t^3 = 1 \Leftrightarrow t = 1$ ou $t = j$ ou $t = j^2$ avec

$$j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

or $\forall t \in \{1; j; j^2\}$, $t(t+1) \neq 0$

> L'ensemble des nombres complexes t pour lesquels F est une translation est $\{1; j; j^2\}$

Caractérisons F pour chaque valeur trouvée

- Pour $t = 1$ on a : $z' = z + 2$

F est la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

- Pour $t = j$

$t(t+1) = j^2 + j$ or $1 + j + j^2 = 0$

$= -1 \Rightarrow z' = z - 1$

F est la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

- Pour $t = j^2$

$t(t+1) = j^2(j^2+1) = j^4 + j^2 = j + j^2$ car $j^3 = 1$

$= -1$

F est la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

2-/ <u>Déterminons l'ensemble des nombres complexes t pour lesquels F est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$</u>

F est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ ssi $t^3 = i$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ posons $t = re^{i\theta}$

$t^3 = i \Leftrightarrow r^3 e^{3i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi, \ k \in \{0; 1; 2\} \end{cases}$

$k = 0 \Rightarrow t = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$k = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$\Rightarrow t = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$k = 2 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow t = -i$

> L'ensemble des valeurs de t pour lesquels F est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ est : $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i ; -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i ; -i\right\}$

<u>Caractérisons F pour chacune des valeurs trouvées</u>

- Pour $t=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $t^3=i$

$t(t+1)=\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}(1+i)$ ce qui donne

$$z'=iz+\frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i)$$

le centre Ω_1 de F a pour affixe

$$z_{\Omega_1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot\frac{1+i}{1-i}=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)i$$

F est donc la rotation de centre Ω_1 d'affixe $z_{\Omega_1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$ et d'angle $\theta=\frac{\pi}{2}$

- Pour $t=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $t^3=i$

$t(t+1)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i)$ ce qui donne

$$z'=iz+\frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i)$$

le centre Ω_2 de F a pour affixe

$$z_{\Omega_2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1+i}{1-i}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

F est donc la rotation de centre Ω_2 d'affixe $z_{\Omega_2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$ et d'angle $\theta=\frac{\pi}{2}$

- Pour $t=-i$, $t^3=i$, $t(t+1)=-1-i$ ce qui donne $z'=iz-1-i$

le centre Ω_3 de F a pour affixe

$$z_{\Omega_3}=\frac{-1-i}{1-i}=-i$$

F est donc la rotation de centre Ω_3 d'affixe $z_{\Omega_3}=-i$ et d'angle $\theta=\frac{\pi}{2}$

3/ Caractérisons F lorsque

$$t=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}e^{-i\pi/6}$$

$$t^3=3\sqrt{3}e^{-i\pi/2}=-3\sqrt{3}i$$

$$t^2+t=(\sqrt{3})^2e^{-i\pi/3}+\sqrt{3}e^{-i\pi/6}$$

$$=3\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}\left(+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{3i\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$=3-2i\sqrt{3}$$ ce qui donne

$$z'=-3\sqrt{3}iz+3-2i\sqrt{3}$$

$a=-3\sqrt{3}i$ $\quad b=3-2i\sqrt{3}$

F est une similitude plane directe

Soit Ω son centre, θ son angle et k son rapport on a:

$\theta=\operatorname{Arg}(a)=-\frac{\pi}{2}$ $\quad k=|a|=3\sqrt{3}$

$$z_\Omega=\frac{3-2i\sqrt{3}}{1+3i\sqrt{3}}=\frac{(3-2i\sqrt{3})(1-3i\sqrt{3})}{28}$$

$$=\frac{-15-11i\sqrt{3}}{28}$$

Pour $t=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, F est la similitude plane directe de centre Ω d'affixe $z_\Omega=\frac{-15-11i\sqrt{3}}{28}$, d'angle $\theta=-\frac{\pi}{2}$ et de rapport $k=3\sqrt{3}$.

EXERCICE 6

Dans le plan complexe, on considère l'application T_k qui au point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe $z'=kiz+1+k^2$, k étant un paramètre réel strictement positif.

1/ Nature de la transformation T_k

$z' = kiz + 1 + k^2$, $a = ki$, $b = 1 + k^2$

$|a| = |k| = k$ car $k > 0$

$Arg(a) = \frac{\pi}{2}$.

1er cas $k = 1$

(T_1) est une rotation d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$

soit Ω_1 son centre on a :

$$z_{\Omega_1} = \frac{2}{1-i} = 1+i$$

$\boxed{(T_1) \text{ est la rotation de centre } \Omega_1 \text{ d'affixe } z_{\Omega_1} = 1+i \text{ et d'angle } \theta = \frac{\pi}{2}}$

2e cas $k \neq 1$

$|a| \neq 1$ (T_K) est une similitude plane directe de rapport k, d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$ et de centre le point Ω_K d'affixe

$z_{\Omega_K} = \frac{1+k^2}{1-ik} = 1+ik$

2/ Déterminons l'ensemble des points Ω_K lorsque k décrit l'ensemble des réels strictement positifs

$\Omega_K(1; k)$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = k > 0 \end{cases}$

$\boxed{\text{lorsque } k \text{ décrit } \mathbb{R}^*_+ \text{ } \Omega_K \text{ décrit la demi-droite d'équation } \begin{cases} x = 1 \\ y > 0 \end{cases}}$

3/ k_1 et k_2 étant deux réels strictement positifs, on considère les transformations $T_{K_2} \circ T_{K_1}$ et $T_{K_1} \circ T_{K_2}$.

Montrons que $T_{K_1} \circ T_{K_2} = T_{K_2} \circ T_{K_1}$ ssi $k_1 = k_2$

$T_{K_2} \circ T_{K_1}$ a pour écriture complexe :

$z' = k_2 i (k_1 iz + 1 + k_1^2) + 1 + k_2^2$

$z' = -k_1 k_2 z + 1 + k_2^2 + i(k_2 + k_1^2 k_2)$

$T_{K_1} \circ T_{K_2}$ a pour écriture complexe :

$z' = k_1 i (k_2 iz + 1 + k_2^2) + 1 + k_1^2$

$= -k_1 k_2 z + 1 + k_1^2 + i(k_1 + k_1 k_2^2)$

$T_{K_2} \circ T_{K_1} = T_{K_1} \circ T_{K_2}$ ssi

$k_1^2 + i(k_1 + k_1 k_2^2) = k_2^2 + i(k_2 + k_1^2 k_2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1^2 = k_2^2 \\ \text{et} \\ k_1 + k_1 k_2^2 = k_2 + k_1^2 k_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow k_1 = k_2$

$\boxed{T_{K_2} \circ T_{K_1} = T_{K_1} \circ T_{K_2} \text{ ssi } k_1 = k_2}$

4/ Nature de la transformation $T_K \circ T_K$

$T_K \circ T_K$ a pour écriture complexe :

$z' = -k^2 z + (1+k^2)(1+ik)$

* Si $k = 1$ alors $T_K \circ T_K$ est la symétrie centrale par rapport à Ω_1 d'affixe $z_{\Omega_1} = 1+i$

* si $k \neq 1$, alors $T_K \circ T_K$ est l'homothétie de rapport $-k^2$ et de centre Ω_K d'affixe $z_{\Omega_K} = 1+ik$.

EXERCICE 7

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on donne les points $A(1; 0)$ et $B(-1; 0)$. A tout point M du plan de coordonnées (x, y)

on associe le nombre complexe $z = x+iy$ affixe de M.

1/ Soit T l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M associe le point M_1 d'affixe $z_1 = x_1 + iy_1$ telle que :

$$z_1 = iz - (1+i)$$

a/ <u>Montrons que l'on a :</u>

<u>$(\vec{AM}, \vec{BM_1}) = \frac{\pi}{2}$ et $\|\vec{BM_1}\| = \|\vec{AM}\|$</u>

$\frac{z_1+1}{z-1} = \frac{iz-1-i+1}{z-1} = \frac{i(z-1)}{z-1} = i$

$\text{Arg}\left(\frac{z_1+1}{z-1}\right) = \text{Arg}\, i = \frac{\pi}{2}$ et $\left|\frac{z_1+1}{z-1}\right| = 1$

or $\text{Arg}\left(\frac{z_1+1}{z-1}\right) = (\vec{AM}, \vec{BM_1})$ et

$\left|\frac{z_1+1}{z-1}\right| = \frac{\|\vec{BM_1}\|}{\|\vec{AM}\|}$ d'où

$(\vec{AM}, \vec{BM_1}) = \frac{\pi}{2}$ et $\|\vec{BM_1}\| = \|\vec{AM}\|$

b/ <u>Précisons la nature de T et ses éléments caractéristiques</u>

$z' = iz - 1 - i \quad a = i \quad b = -1-i$

$|a| = 1 \quad \text{Arg}(a) = \frac{\pi}{2} \quad \frac{b}{1-a} = \frac{-1-i}{1-i} = -i$

$$\boxed{\text{(T) est donc la rotation de centre } \Omega \text{ d'affixe } z_\Omega = -i \text{ et d'angle } \theta = \frac{\pi}{2}}$$

c/ <u>Calculons les coordonnées de M_1 en fonction de celles de M</u>

$z_1 = iz - 1 - i$

$\Leftrightarrow x_1 + iy_1 = i(x+iy) - 1 - i$

$\Leftrightarrow x_1 + iy_1 = -1 - y + i(x-1)$ d'où :

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = -y - 1 \\ y_1 = x - 1 \end{cases}} \quad (1)$$

d/ <u>Ensemble décrit par M_1 lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB]</u>

Le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre [AB] a pour équation : $x^2 + y^2 = 1$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 - x_1 \\ x = 1 + y_1 \end{cases}$

$M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (1+y_1)^2 + (-1-x_1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow (x_1+1)^2 + (y_1+1)^2 = 1$

<u>Conclusion :</u>

Lorsque M décrit le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre [AB], M_1 décrit le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre $E(-1;-1)$ et de rayon 1

<u>Autres méthodes</u>

* Lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB], M_1 décrit le cercle de diamètre [A'B'] avec $A' = T(A)$ et $B' = T(B)$. On montre aisément que : $z_{A'} = -1$ et $z_{B'} = -1 - 2i$

* Lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB] c'est-à-dire le cercle de centre O et de rayon 1, M_1 décrit le cercle de centre $O' = T(O)$ d'affixe $z_{O'} = -1-i$ et de rayon 1

2/ Le nombre réel λ étant fixé mais quelconque, on considère l'application T_λ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M, associe le point M', barycentre des points M, M_1 et A affectés des coefficients respectifs λ, $-\lambda$ et 1. On note $z' = x' + iy'$ l'affixe du point M'.

a/ Exprimons le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de λ, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OA}$

M' bary $\{(M,\lambda);(M_1,-\lambda);(A,1)\}$

$\Leftrightarrow \lambda\overrightarrow{MM'} - \lambda\overrightarrow{M_1M'} + \overrightarrow{AM'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\lambda-\lambda+1)\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM} - \lambda\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OA}$

$$\boxed{\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM} - \lambda\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OA}}$$

Déduisons-en la relation :

$z' = \lambda(1-i)z + \lambda(1+i) + 1$

$\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM} - \lambda\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow z' = \lambda z - \lambda z_1 + z_A$

$= \lambda z - \lambda[iz - 1 - i] + 1$

$$\boxed{z' = \lambda(1-i)z + \lambda(1+i) + 1}$$

b/ Démontrons que T_λ est une similitude directe et déterminons l'affixe de son centre, son rapport et son angle

L'écriture complexe de (T_λ) est de la forme $z' = az + b$ avec $a = \lambda(1-i)$ et $b = \lambda(1+i) + 1$

T_λ est donc une similitude plane directe. Soit Ω_λ son centre on a:

$z_{\Omega_\lambda} = \dfrac{1+\lambda+i\lambda}{1-\lambda+i\lambda} = \dfrac{(1+\lambda+i\lambda)(1-\lambda-i\lambda)}{(1-\lambda)^2+\lambda^2}$

$$\boxed{z_{\Omega_\lambda} = \frac{1-2i\lambda^2}{2\lambda^2-2\lambda+1}}$$

Soit k le rapport de T_λ on a:

$k = |a| = |\lambda|\sqrt{2}$

$$\boxed{\text{Le rapport de } T_\lambda \text{ est } k = |\lambda|\sqrt{2}}$$

Soit θ l'angle de T_λ on a:

$\theta = \operatorname{Arg}(a) = \operatorname{Arg}\lambda + \operatorname{A}(1-i)$

* si $\lambda < 0$ alors $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = 3\pi/4$

* si $\lambda > 0$ alors $\theta = \pi/4$

* Cas particulier $\lambda = 0$

Pour $\lambda = 0$, $z' = 1$, T_0 est une application constante.

c/ Précisons les valeurs de λ pour lesquelles T_λ est une rotation.

(T_λ) est une rotation si $|\lambda|\sqrt{2} = 1$

$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\boxed{\text{Les valeurs de } \lambda \text{ pour lesquelles } T_\lambda \text{ est une rotation sont : } \lambda_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Précisons le centre et l'angle de T_λ.

Pour $\lambda = \lambda_1$ on a:

$z_{\Omega_{\lambda_1}} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}(1-i)$ L'angle est $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$

$$\boxed{\text{Pour } \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}, T_\lambda \text{ est la rotation de centre le point d'affixe } \frac{2-\sqrt{2}}{2}(1-i) \text{ et d'angle } \frac{3\pi}{4}}$$

Pour $\lambda = \lambda_2$ on a :

$z_{\Omega\lambda_2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}(1-i)$; l'angle est $\theta_2 = -\frac{\pi}{4}$

Pour $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$, T_λ est la rotation de centre le point d'affixe $\frac{2+\sqrt{2}}{2}(1-i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

EXERCICE 8

1/ Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère complexe et soit la transformation S par laquelle tout point M d'affixe z a pour image M' d'affixe z' définie par :

$$\begin{cases} x' = ax - by + 1 \\ y' = bx + ay + 1 \end{cases} \quad \text{avec } M(x;y) \text{ et } M'(x';y')$$

a-/ Montrons que $z' = z_0 z + 1 + i$ avec $z_0 = a + ib$ $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} z' = x' + iy' &= (ax - by + 1) + i(bx + ay + 1) \\ &= (a+ib)x + (-b+ai)y + 1 + i \\ &= (a+ib)x + i(a+ib)y + 1 + i \\ &= (a+ib)(x+iy) + 1 + i \\ &= z_0 z + 1 + i \end{aligned}$$

$$\boxed{z' = z_0 z + 1 + i \text{ avec } z_0 = a + ib}$$

b-/ Déterminons le nombre complexe z_0 pour que S soit une translation

- S est une translation ssi $z_0 = 1$
- L'élément géométrique de cette translation est le vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1+i$

Conclusion

Pour $z_0 = 1$, S est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1+i$

d/ Déterminons z_0 pour que S soit une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$

S est une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ ssi $z_0 = -\frac{1}{2}$

Le centre de S est donc le point Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{1+i}{1-z_0} = \frac{2}{3}(1+i)$

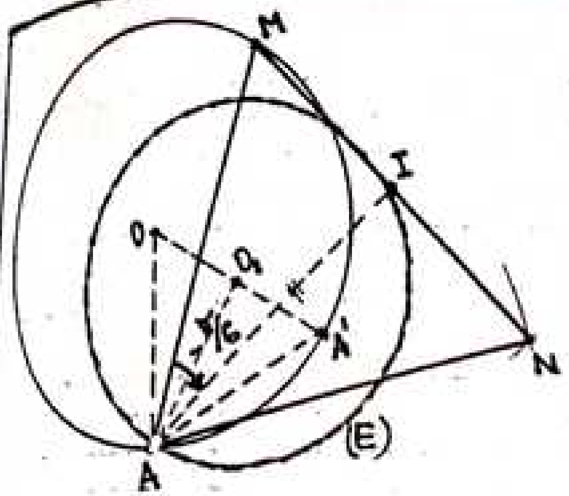
e-/ Caractérisons la transformation S si $z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$|z_0| = 1$ et $\operatorname{Arg} z_0 = \frac{\pi}{3}$

S est donc la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre Ω' d'affixe :

$$z_{\Omega'} = \frac{1+i}{1-z_0} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

2/ On considère un cercle de centre O, A un point de ce cercle. Soit M un point de ce cercle distinct de A. Soit N le point du plan tel que AMN soit un triangle équilatéral de sens indirect.



a/ Considérons la similitude directe S' de centre A transformant M en I (I étant le milieu de [MN])

Déterminons le rapport et l'angle de la similitude directe S'

AMN triangle équilatéral indirect et I milieu de [MN] nous permet de dire:

• $(\vec{AM}, \vec{AN}) = -\frac{\pi}{3}$

• AI est la hauteur issue de A

• (AI) est bissectrice de $(\vec{AM}, \vec{AN})$

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{S'} \\ A & A \\ M & I \end{array}$$

soit θ l'angle de S' et k son rapport on a:

$\theta = (\vec{AM}, \vec{AI}) = \frac{1}{2}(\vec{AM}, \vec{AN}) = -\frac{\pi}{6}$

$k = \frac{AI}{AM} = \frac{\frac{AM\sqrt{3}}{2}}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

S' est donc la similitude plane directe de centre A, de rapport $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\theta = -\frac{\pi}{6}$

Construction du point $O_1 = S'(O)$

Soit A' le point tel que AOA' soit un triangle équilatéral indirect.

O_1 est le milieu de [OA']

b-/ Déterminons l'ensemble (E) décrit par le point I lorsque M décrit tout le cercle sauf le point A

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{S'} \\ O & O_1 \\ A & A \end{array}$$

et A est un point du cercle

(E) est donc le cercle de centre O_1, de rayon O_1A, privé de A.

EXERCICE 9

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité: 1cm).

Plaçons les points A, B et C d'affixes respectives: $a = 8$, $b = -4+4i$ et $c = -4i$

(Voir figure à la page suivante)

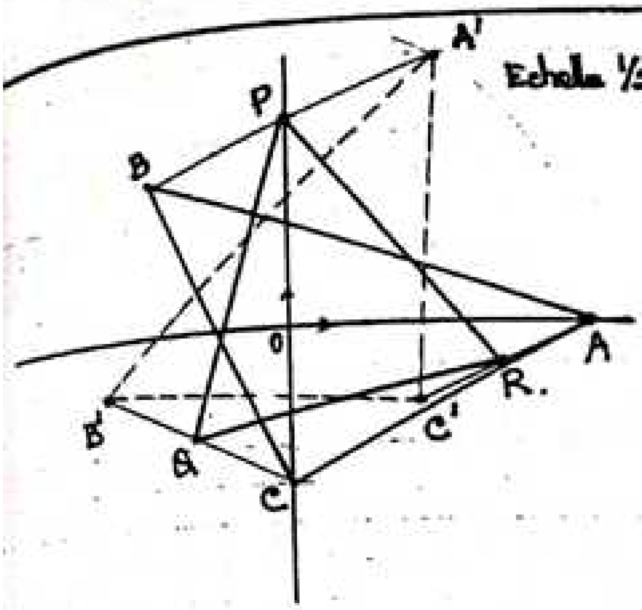
1-/ a-/ Ecrivons a, b et c sous forme trigonométrique

• $a = 8$ $|a| = 8$ $\text{Arg}\, a = 0$

$\boxed{a = 8(\cos 0 + i \sin 0)}$

$b = -4+4i$ $|b| = 4\sqrt{2}$ $\text{Arg}\, b = \frac{3\pi}{4}$

$\boxed{b = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$



Echelle 1/2

$c = -4i \quad |c| = 4 \quad \operatorname{Arg} c = -\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{c = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

b/ <u>Montrons que le triangle ABC est rectangle et isocèle.</u>

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{-4+8i}{8+4i} = \frac{i(8+4i)}{8+4i} = i$$

$$\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = |i| = 1 \text{ or } \left|\frac{b-c}{a-c}\right| = \frac{CB}{CA}$$

Ce qui précède nous permet d'écrire

$\frac{CB}{CA} = 1 \Leftrightarrow CB = CA \Leftrightarrow$ ABC est isocèle en C ①

$\operatorname{Arg}\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow$ ABC est rectangle en C. ②

① et ② $\Leftrightarrow$ ABC est rectangle et isocèle en C.

2/ La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme A en A', B en B' et C en C'.

a/ <u>Construction des points A', B' et C'</u>

Les points A', B' et C' sont tels que les triangles OAA', OBB' et OCC' sont équilatéraux de sens direct.

(Voir figure ci-contre)

b/ Soit a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'.

<u>Etablissons que: $b' = -2(1+\sqrt{3}) + 2(1-\sqrt{3})i$</u>

B' image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow b' = e^{i\pi/3} \cdot b$

$\Leftrightarrow b' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-4+4i)$

$= (1+i\sqrt{3})(-2+2i)$

$= -2-2\sqrt{3}+2i-2i\sqrt{3}$

$$\boxed{b' = -2(1+\sqrt{3}) + 2(1-\sqrt{3})i}$$

<u>Calculons a' et c'</u>

$a' = e^{i\pi/3} a = 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4(1+i\sqrt{3})$

$c' = e^{i\pi/3} c = -4i\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2(\sqrt{3} - i)$

$$\boxed{a' = 4(1+i\sqrt{3})} \quad \boxed{c' = 2(\sqrt{3} - i)}$$

3/ a/ <u>Déterminons les affixes p, q, r des points P, Q, R milieux respectifs des segments [A'B], [B'C], [C'A]</u>

$p = \frac{a'+b}{2} = \frac{4(1+i\sqrt{3})-4+4i}{2} = 2(1+\sqrt{3})i$

$q = \frac{b'+c}{2} = \frac{-2(1+\sqrt{3})+2i(1-\sqrt{3})-4i}{2}$

$= -(1+\sqrt{3})(1+i)$

$r = \frac{c'+a}{2} = \frac{2(\sqrt{3}-i)+8}{2} = 4+\sqrt{3}-i$

$$\boxed{p = 2(1+\sqrt{3})i} \quad \boxed{q = -(1+\sqrt{3})(1+i)}$$

$$\boxed{r = 4+\sqrt{3}-i}$$

b/ Démontrons que $r-p = e^{i\pi/3}(q-p)$.

$r-p = 4+\sqrt{3}-i - 2(1+\sqrt{3})i$

$r-p = 4+\sqrt{3}-(3+2\sqrt{3})i$

$q-p = -(1+\sqrt{3})(1+i) - 2(1+\sqrt{3})i$

$q-p = -1-\sqrt{3}-(3+3\sqrt{3})i$

$e^{i\pi/3}(q-p) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left[-1-\sqrt{3}-(3+3\sqrt{3})i\right]$

$= \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}+3\sqrt{3}+9\right) + \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}-3-3-3\sqrt{3}\right)i$

$= 4+\sqrt{3}-(3+2\sqrt{3})i = r-p$

$$\boxed{r-p = e^{i\pi/3}(q-p)}$$

Nature du triangle PQR

$r-p = e^{i\pi/3}(q-p) \Leftrightarrow$ R est l'image de Q par la rotation de centre P et d'angle $\pi/3$.

Le triangle PQR est donc équilatéral de sens direct.

EXERCICE 10

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points M, M' et M'' d'affixes respectives z, $z+i$ et iz, où z est un nombre complexe différent de zéro.

1/ Caractérisons la transformation qui, à M, associe M' puis celle qui à M, associe M''

Soit t la transformation qui à M associe M' et r celle qui à M associe M''. t et r ont respectivement pour écritures complexes :

$z' = z+i \qquad z'' = iz.$

* t est la translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe i

* r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2/ * Déterminons z pour avoir M' = O

M' confondu à O $\Leftrightarrow z+i=0 \Leftrightarrow z=-i$

$$\boxed{z=-i}$$

* Déterminons z pour avoir M' = M''

$M' = M'' \Leftrightarrow z+i = iz$

$\Leftrightarrow z(1-i) = -i \Leftrightarrow z = \frac{-i}{1-i}$

$z = \frac{-i(1+i)}{2} = \frac{1-i}{2}$

$$\boxed{z = \frac{1-i}{2}}$$

3/ Dans cette question, on suppose z distinct de 0, de $-i$ et de $\frac{1-i}{2}$.

a/ Prouvons que les points O, M' et M'' sont alignés si et seulement si $\frac{z+i}{iz}$ est un nombre réel

O, M', M'' alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM''}, \overrightarrow{OM'}) = k\pi$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_{M'}-z_O}{z_{M''}-z_O}\right) = k\pi$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z+i}{iz}\right) = k\pi$

$\Leftrightarrow \dfrac{z+i}{iz} \in \mathbb{R}$.

Les points O, M' et M'' sont alignés si et seulement si $\dfrac{z+i}{iz}$ est un nombre réel.

b-/ On pose $x = Re(z)$ et $y = Im(z)$. avec $z \neq 0$.

Calculons $Im\left(\dfrac{z+i}{iz}\right)$ en fonction de x et y

$$\frac{z+i}{iz} = \frac{x+iy+i}{i(x+iy)} = \frac{x+i(y+1)}{-y+ix}$$
$$= \frac{[x+i(y+1)](-y-ix)}{x^2+y^2}$$
$$= \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-x^2-y^2-y}{x^2+y^2}$$

On en déduit

$$\boxed{Im\left(\frac{z+i}{iz}\right) = -\frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}}$$

c-/ <u>Déterminons et représentons l'ensemble (E) des points M tels que O, M' et M'' soient deux à deux distincts et alignés</u>

O, M', M'' deux à deux distincts et alignés

$\Leftrightarrow \begin{cases} z \in \mathbb{C} - \left\{0; -i, \frac{1-i}{2}\right\} \\ \text{et} \\ \frac{z+i}{iz} \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z \in \mathbb{C} - \left\{0; -i; \frac{1-i}{2}\right\} \quad (1) \\ \text{et} \\ Im\left(\frac{z+i}{iz}\right) = 0 \quad (2) \end{cases}$

(2) $\Rightarrow x^2+y^2+y = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

L'ensemble (E) est le cercle de centre $\Omega\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ privé des O, A et B d'affixes respectives O, $-i$ et $\frac{1-i}{2}$

4/ a-/ Soit A le point d'affixe $-i$

Exprimons $\left|\dfrac{z+i}{iz}\right|$ en fonction de AM et OM

$$\left|\frac{z+i}{iz}\right| = \frac{|z-(-i)|}{|i||z|} = \frac{AM}{OM} \text{ car } |i| = 1 \text{ et } |z| = OM$$

$$\boxed{\left|\frac{z+i}{iz}\right| = \frac{AM}{OM}}$$

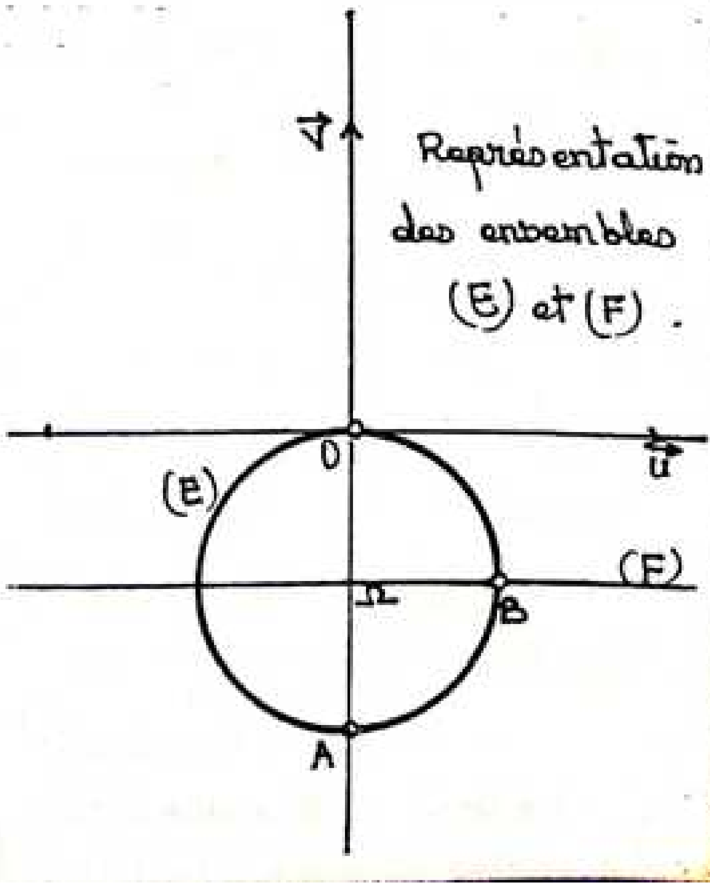
b-/ <u>Déterminons et représentons l'ensemble (F) des points M tels que : O M' M'' soit un triangle isocèle en O</u>

O M' M'' est un triangle isocèle en O ssi OM' = OM'' or OM' = |z+i| = AM et

OM'' = |iz| = |z| = OM

$\Leftrightarrow$ AM = OM.

F est donc la médiatrice du segment [OA]



Représentation des ensembles (E) et (F).

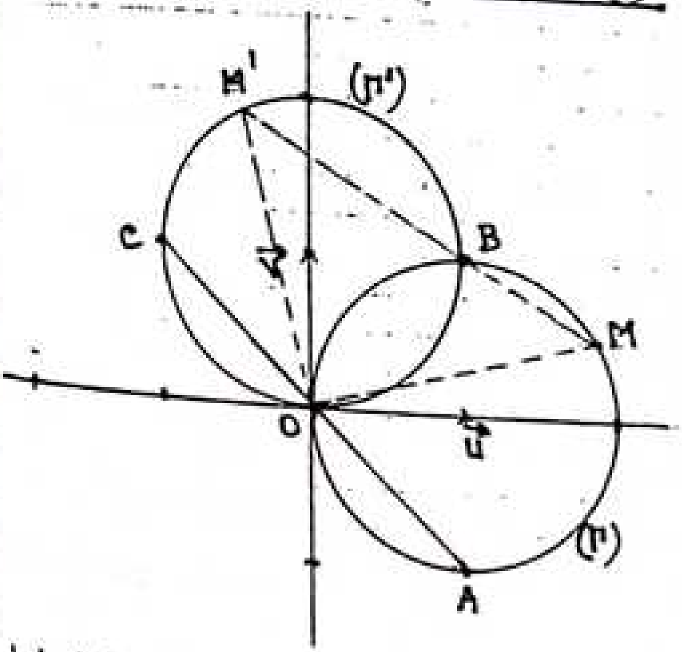
EXERCICE II

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 4cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que :

$a = 1 - i \quad b = 1 + i, \quad c = -1 + i = -a$

On note (Γ) le cercle de diamètre [AB].

1/ Plaçons sur une figure les points A, B et C et construisons le cercle (Γ)



b/ Mettons les nombres complexes a, b et c sous forme trigonométrique

$a = 1 - i \quad |a| = \sqrt{2} \quad \text{Arg}\,a = -\frac{\pi}{4}$

$b = 1 + i \quad |b| = \sqrt{2} \quad \text{Arg}\,b = \frac{\pi}{4}$

$c = -1 + i = -a \quad |c| = |a| = \sqrt{2}$

$\text{Arg}\,c = \pi + \text{Arg}\,a = \frac{3\pi}{4}$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ b = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ c = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \end{array}}$$

c/ Soit r la rotation de centre O telle que $r(A) = B$.

$b = 1 + i = i(1 - i) = ia$

L'angle de r est donc $\theta = \text{Arg}\,i = \pi/2$

r est donc la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminons r(B), image de B par r.

r(B) a pour affixe $b' = ib = i(1+i)$

$= -1 + i = c$

On a donc $r(B) = C$.

d/ Déterminons l'image (Γ') de (Γ) par r.

(Γ) est le cercle de diamètre [AB].

$(\Gamma') = r(\Gamma)$ est le cercle de diamètre $[r(A)\, r(B)] = [BC]$.

$\boxed{(\Gamma') \text{ est donc le cercle de diamètre } [BC]}$

Construction de (Γ') (Voir figure).

2/ On considère un nombre θ de l'intervalle $]0; 2\pi[$ distinct de π, on note M le point d'affixe $z = 1$

On désigne par M' l'image de M par r et on appelle z' l'affixe de M'.

a/ Montrons que M est un point de (Γ) distinct de A et B.

Soit I milieu de [AB] on a :

$a_I = \frac{a+b}{2} = 1$

$AB = |b-a| = |2i| = 2$

(Γ) est le cercle de centre I et de rayon 1

$IM = |1+ie^{i\theta}-1| = |ie^{i\theta}| = 1 \Rightarrow M \in (\Gamma)$

Pour $\theta = 0$, $z = 1+i$ et $M = B$

$\theta = \pi$, $z = 1-i$ et $M = A$

Or θ est différent de 0 et π donc M distinct de A et B

Conclusion

$\boxed{\text{M est un point de } (\Gamma) \text{ distinct de A et B}}$

b/ Exprimons z' en fonction de z.

$$\boxed{z' = iz}$$

Calculons en fonction de θ les affixes u et u' des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$

$u = z - b = 1 + ie^{i\theta} - 1 - i$

$$\boxed{u = i(e^{i\theta} - 1)}$$

$$u' = z' - b = iz - 1 - i$$
$$= i(1+ie^{i\theta}) - 1 - i$$
$$= i - e^{i\theta} - 1 - i$$

$$\boxed{u' = -(1+e^{i\theta})}$$

c/ Etablissons la relation $u = u'\tan\frac{\theta}{2}$

$$\frac{u}{u'} = \frac{i(e^{i\theta}-1)}{-(1+e^{i\theta})} = -i\,\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})}$$

$$= -i\,\frac{2i\sin\theta/2}{2\cos\theta/2}$$

$\frac{u}{u'} = \tan\frac{\theta}{2} \Leftrightarrow u = u'\tan\frac{\theta}{2}$

$$\boxed{u = u'\tan\frac{\theta}{2}}$$

d/ Prouvons que les points B, M et M' sont alignés

$\frac{u}{u'} = \tan\frac{\theta}{2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{u}{u'}\right) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{BM'}, \overrightarrow{BM}) = k\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{BM'}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires d'où :

$\boxed{\text{Les points B, M et M' sont alignés}}$

Plaçons sur la figure un point M et son transformé M' (Voir figure à la page précédente)

EXERCICE 12

Dans le plan orienté on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$. Soit I le milieu du segment [BC].

On note R_B la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$, R_C la rotation de centre C et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$, et T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

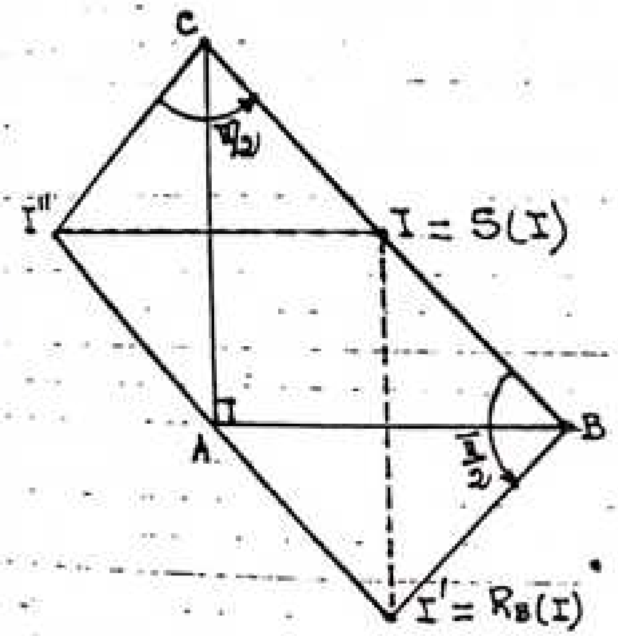
On se propose de trouver méthodes la nature et les éléments caractéristiques de la transformation

$$S = R_C \circ T \circ R_B.$$

1ère méthode : utilisation des nombres complexes

On rapporte le plan au repère orthonormal direct $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$

a/ Donnons l'écriture complexe des transformations R_B, R_C, T puis S.



Dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ les points A, B et C ont pour affixes respectives :

$z_A = 0 \quad z_B = 1 \quad z_C = i$

I milieu de [BC] a donc pour affixe

$$z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{1+i}{2}$$

Soit M et M' deux points d'affixes respectives z et z'

$$R_B(M) = M' \Leftrightarrow z' - z_B = e^{i\pi/2}(z - z_B)$$
$$\Leftrightarrow z' = i(z-1)+1$$
$$z' = iz + 1 - i$$

L'écriture complexe de R_B est :
$$\boxed{z' = iz + 1 - i}$$

$$R_C(M) = M' \Leftrightarrow z' - z_C = e^{i\pi/2}(z - z_C)$$
$$\Leftrightarrow z' = i(z-i)+i$$
$$= iz + 1 + i$$

L'écriture complexe de R_C est :
$$\boxed{z' = iz + 1 + i}$$

$$T(M) = M' \Leftrightarrow \vec{MM'} = \vec{BC}$$
$$\Leftrightarrow z' - z = z_C - z_B$$
$$\Leftrightarrow z' = z - 1 + i$$

L'écriture complexe de T est :
$$\boxed{z' = z - 1 + i}$$

Soit M_1 et M_2 tels que

$M \xrightarrow{R_B} M_1 \xrightarrow{T} M_2 \xrightarrow{R_C} M' \Leftrightarrow S(M) = M'$

Désignons par z_1 et z_2 les affixes respectives des points M_1 et M_2 on a :

$z_1 = iz + 1 - i$, $z_2 = z_1 - 1 + i$

$z_2 = iz + 1 - i - 1 + i = iz$.

$z' = iz_2 + 1 + i = i(iz) + 1 + i$

$z' = -z + 1 + i$.

L'écriture complexe de S est :
$$\boxed{z' = -z + 1 + i}$$

b/ Caractérisons alors S.

$z' = -z + 1 + i \Leftrightarrow z' + z = 1 + i$

$$\Leftrightarrow \frac{z' + z}{2} = \frac{1+i}{2} = z_I$$

$\Leftrightarrow$ I milieu de [MM'].

Conclusion

S est la symétrie centrale de centre I milieu de [BC]

2e méthode : Utilisation des propriétés des transformations .

a-/ Déterminons, sans calcul, la nature de S.

Posons $r' = T \circ R_B$ r' est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, l'angle de R_B

$S = R_C \circ r' \Rightarrow S$ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ or une rotation d'angle π est une symétrie centrale.

Conclusion

S est une symétrie centrale.

b-/ Précisons l'image de B par S

$S(B) = (R_C \circ T \circ R_B)(B)$

$= (R_C \circ T)(R_B(B))$

$= (R_C \circ T)(B)$ car $R_B(B) = B$

$= R_C(T(B))$

$= R_C(C)$ car $T(B) = C$

$= C$ car C est le centre de R_C

$\boxed{S(B) = C}$

c-/ Caractérisons S

On sait que S est une symétrie centrale et que $S(B) = C$.

Le centre de S est donc le milieu de [BC] soit I

Conclusion

$\boxed{\text{S est la symétrie centrale de centre I}}$

EXERCICE 13

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de centre O. On suppose que ce carré est direct c'est-à-dire que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$. On désigne par :

r le quart de tour direct de centre A

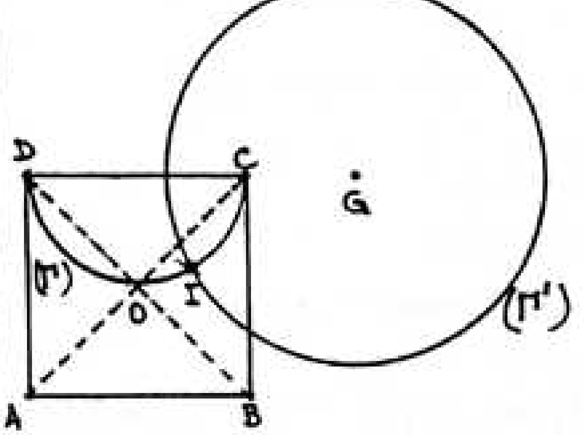
t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

h l'homothétie de centre C, de rapport 3

1-/ a-/ Prouvons que $r' = t \circ r$ est une rotation dont nous préciserons l'angle.

r' est la composée d'une translation et d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc : r' est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

b-/ Déterminons les images de A et B par r'



$r'(A) = (t \circ r)(A) = t[r(A)]$

$= t(A)$ car $r(A) = A$

$r'(A) = t(A) = B \qquad r'(A) = B$

$r'(B) = (t \circ r)(B) = t[r(B)]$

$= t(D)$ car $r(B) = D$

$= C$; $r'(B) = C$

$\boxed{r'(A) = B}$ $\boxed{r'(B) = C}$

Déduisons-en le centre de r'

• $r'(A) = B$ donc le centre de r' appartient à la médiatrice du segment $[AB]$

• $r'(B) = C$ donc le centre de r' appartient à la médiatrice du segment $[BC]$

le centre de r' est donc le point d'intersection des médiatrices des segments $[AB]$ et $[BC]$.

$\boxed{\text{Le centre de } r' \text{ est alors le point } O}$

2°/ On se propose d'étudier la transformation $f = r' \circ h$.

a·/ Montrons que f est une similitude dont on précisera l'angle et le rapport.

f est la composée d'une homothétie h de rapport $\sqrt{3}$ par une rotation r d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc f est une similitude d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\sqrt{3}$.

b/ Soit I le centre de f.

Déterminons l'image de C par f.

$f(C) = (r' \circ h)(C) = r'[h(C)]$

$= r'(C)$ car $h(C) = C$

$= D$.

$\boxed{\text{L'image de } C \text{ par } f \text{ est } D.}$

Prouvons que $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}) = \frac{\pi}{2}$ et que $ID = \sqrt{3}\, IC$

$$\begin{array}{c|c} & f \\ \hline I & I \\ C & D \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}) = \frac{\pi}{2} \\ \text{et} \\ ID = \sqrt{3}\, IC. \end{cases}$$

c·/ Déterminons et construisons l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = \frac{\pi}{2}$

$(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ le triangle DMC est rectangle en M et de sens direct.

$\boxed{(\Gamma) \text{ est donc le demi-cercle de diamètre } [CD] \text{ contenant } O}$

Construction de (Γ) : Voir page précédente

Donnons une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CI})$

$(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I \in (\Gamma)$.

De plus $ID = \sqrt{3}\, IC \Leftrightarrow \frac{ID}{IC} = \sqrt{3}$ soit $\tan(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CI}) = \frac{\pi}{3}$ par conséquent $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CI})$ a pour mesure $\frac{\pi}{3}$.

d·/ Prouvons que l'ensemble (Γ') des points M du plan tels que : $MD^2 - 3MC^2 = 0$ est un cercle dont nous préciserons le centre G et le rayon.

$MD^2 - 3MC^2 = 0$ (1)

Soit G le barycentre du système : $\{(D,1);(C,-3)\}$ on a : $\vec{GD} - 3\vec{GC} = \vec{0}$

$MD^2 - 3MC^2 = (\vec{MG} + \vec{GD})^2 - 3(\vec{MG} + \vec{GC})^2$
$= -2MG^2 + GD^2 - 3GC^2$

(1) $\Leftrightarrow -2MG^2 + GD^2 - 3GC^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2MG^2 = GD^2 - 3GC^2$

$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{2}(GD^2 - 3GC^2)$

De plus $ID = \sqrt{3}IC \Leftrightarrow ID^2 - 3IC^2 = 0$

$\Leftrightarrow I \in (\Gamma')$

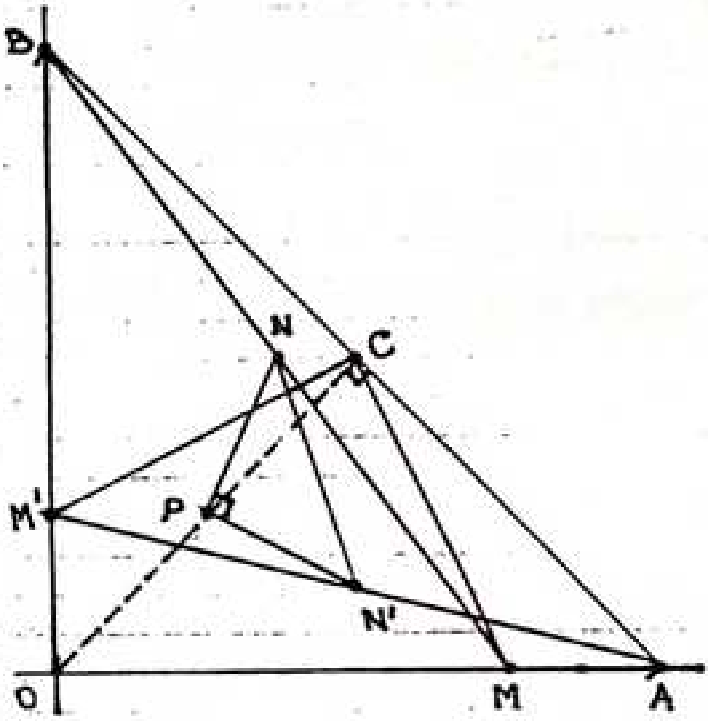
(Γ') est donc le cercle de centre G passant par I c'est-à-dire de rayon GI

Construction de (Γ') (Voir figure précédente)

EXERCICE 14

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$ Unité 8cm. On note C le milieu du segment [AB]. Soit r la rotation de centre C et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$. Pour tout point M du plan d'affixe z, on note M' le transformé de M par r.

1-/ a-/ Plaçons sur une figure les points O, A, B, M et M' lorsque $z = \frac{3}{4}$



b-/ Déterminons l'image du segment [OA] par r

$r([OA]) = [r(O)\,r(A)]$ or $\begin{cases} r(O) = B \\ \text{et} \\ r(A) = O \end{cases}$

donc

$$\boxed{r([OA]) = [BO]}$$

c-/ Calculons l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M

Dans le repère $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$ les points A et B ont pour affixes respectives :

$z_A = 1$ et $z_B = i$

C milieu de $[AB] \Leftrightarrow z_C = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1+i}{2}$

$r(M) = M' \Leftrightarrow (z' - z_C) = e^{-i\pi/2}(z - z_C)$

$\Leftrightarrow z' - \frac{1+i}{2} = -i(z - \frac{1+i}{2})$

$\Leftrightarrow z' = -iz + \frac{1+i}{2}(1+i)$

$\boxed{z' = -iz + i}$

2/ On note P le milieu du segment [OC]. Soit N le milieu de [BM] et N' le milieu de [AM'].

a/ Exprimons en fonction de z les affixes U et U' des vecteurs $\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{PN'}$

$$U = z_N - z_P = \frac{z + z_B}{2} - \frac{z_C + z_O}{2}$$

$$= \frac{z+i}{2} - \frac{1+i}{4}$$

$$= \frac{z}{2} + \frac{2i-1-i}{4}$$

$$\boxed{U = \frac{z}{2} + \frac{-1+i}{4}}$$

$$U' = z_{N'} - z_P = \frac{z' + z_A}{2} - \frac{z_C + z_O}{2}$$

$$= \frac{-iz+i+1}{2} - \frac{1+i}{4}$$

$$= \frac{-iz}{2} + \frac{2i+2-1-i}{4}$$

$$\boxed{U' = \frac{-iz}{2} + \frac{1+i}{4}}$$

b/ Prouvons que le triangle PNN' est rectangle et isocèle.

On remarque que $U' = -i\left(\frac{z}{2} + \frac{-1+i}{2}\right)$

Soit $U' = -iU \Leftrightarrow \frac{U'}{U} = -i$

$$\left\{\begin{array}{l} \left|\frac{U'}{U}\right| = |-i| = 1 \\ \arg\left(\frac{U'}{U}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

or $\left|\frac{U'}{U}\right| = \frac{|U'|}{|U|} = \frac{PN'}{PN}$ et

$$\arg\left(\frac{U'}{U}\right) = (\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PN'})$$

On en déduit donc $\left\{\begin{array}{l} PN' = PN \\ (\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PN'}) = -\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$

Le triangle PNN' est donc rectangle et isocèle en P.

c/ Dans le cas où $z = \frac{3}{4}$, plaçons le triangle PNN' sur la figure précédente

(Voir figure)

EXERCICE 15

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ (unité 4cm) on définit l'application f qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = jz + i$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1/ Montrons que f admet exactement un point invariant, dont nous donnerons l'affixe.

Soit Ω un point du plan, Ω est invariant par f si $f(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow z_\Omega = jz_\Omega + i$

$$\Leftrightarrow z_\Omega = \frac{i}{1+j} \quad \text{or } 1+j+j^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1+j = -j^2$$

$$\Leftrightarrow z_\Omega = -\frac{e^{i\pi/2}}{e^{i4\pi/3}}$$

$$= -e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3}\right)}$$

$$= -e^{-\frac{i5\pi}{6}} = -\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$\boxed{z_\Omega = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = e^{i\pi/6}$$

Caractérisons géométriquement f.

L'écriture complexe de f est de la forme $z' = az + b$, $a = -j$, $b = i$

$|a| = |-j| = 1$ $\quad Arg(a) = Arg(-j)$
$= \pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

f est donc la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{5\pi}{3}$

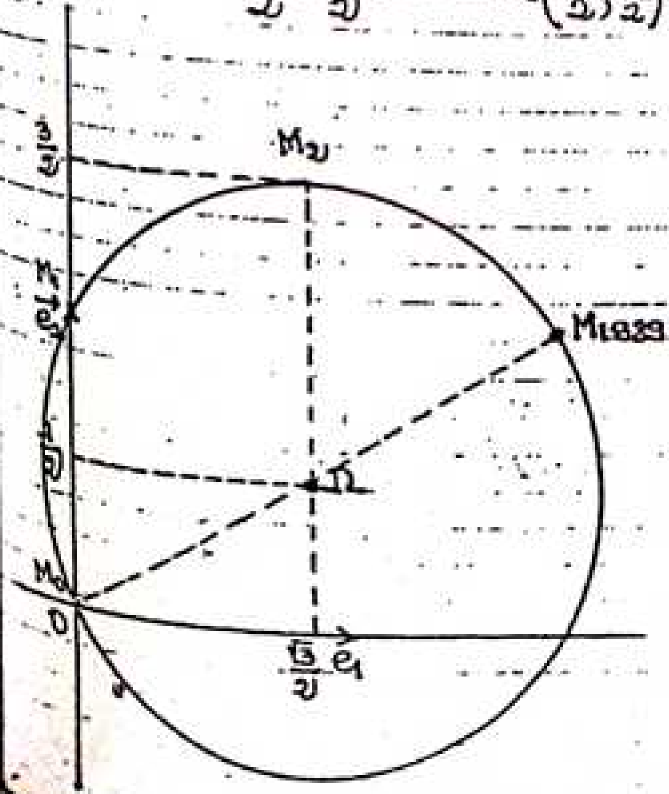
2/ On définit dans $\mathcal{P}$ la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par: $\begin{cases} M_0 = O \\ \forall n\in\mathbb{N},\ M_{n+1} = f(M_n) \end{cases}$

a/ Construisons Ω, M_0, M_1, M_2.

$z_0 = 0$ d'où $M_0(0;0)$

$z_1 = -jz_0 + i = i$ d'où $M_1(0;1)$

$z_2 = -jz_1 + i = -ji + i = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i + i$
$= \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} + i$
$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ d'où $M_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$



b/ Pour tout n, on note z_n l'affixe de M_n et on pose $Z_n = z_n - e^{i\pi/6}$.

Déterminons un nombre complexe a tel que $Z_{n+1} = aZ_n$

$Z_{n+1} = z_{n+1} - e^{i\pi/6} = -jz_n + i - e^{i\pi/6}$
$= -j(Z_n + e^{i\pi/6}) + i - e^{i\pi/6}$
$= -jZ_n - je^{i\pi/6} + i - e^{i\pi/6}$
$= -jZ_n + e^{i\pi/6} - e^{i\pi/6}$

$Z_{n+1} = -jZ_n$

d'où $\boxed{a = -j}$

Mettons a sous forme trigonométrique

$|a| = 1$ $\quad Arg\,a = Arg(-j) = \pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$\boxed{a = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}}$

Déterminons un entier naturel p tel que $a^p = 1$.

$a^p = 1 \Leftrightarrow \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)^p = 1$
$\Leftrightarrow \cos\frac{5p\pi}{3} + i\sin\frac{5p\pi}{3} = 1$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{5p\pi}{3} = 1 \\ \sin\frac{5p\pi}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{5p\pi}{3} = 2k\pi$
$\Rightarrow p = \frac{6k}{5},\ k\in\mathbb{Z}^*_+$

La plus petite valeur entière strictement positive est $p = 6$

c-/ Calculons Z_n puis z_n en fonction de n

On montre que $Z_n = -e^{i\pi/6}[(-j)^n]$

$z_n = e^{i\pi/6}[1 - (-j)^n]$

Plaçons M_{1929}

On montre que $M_{1929} = S_\Omega(O)$

TROISIEME PARTIE

PROBABILITES

COURS + EXERCICES CORRIGES

COURS

PROBABILITES

I/ DENOMBREMENT

1/ Rappels sur les ensembles.

a/ Parties d'un ensemble.

Soit A et B deux ensembles inclus dans un ensemble E.

- On appelle réunion de A et B l'ensemble noté $A \cup B$ qui contient les éléments de A ou les éléments de B.
- On appelle intersection de A et B, l'ensemble noté $A \cap B$ qui contient les éléments qui sont à la fois dans A et dans B.
- On appelle complémentaire de A dans E, l'ensemble noté C_E^A ou $\overline{A}$ dont les éléments sont ceux qui sont dans E et qui ne sont pas dans A.

Remarques :

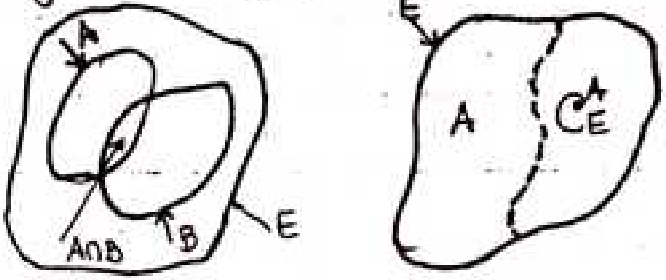
1/ Si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$ et $A \cap B = A$.

2/ Si $A \cap B = \emptyset$ alors les ensembles A et B sont dits disjoints.

3/ $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

4/ $C_E^{\emptyset} = E$; $C_E^E = \emptyset$; $C_E^{C_E^A} = A$

- On nomme $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E y compris $\emptyset$ et E.
- les parties $A_1, \dots, A_p$ de E constituent une partition de E si elles sont deux à deux disjointes et si leur réunion donne E.



- Le produit cartésien de A et B est l'ensemble noté $A \times B$ dont les éléments sont les couples $(a;b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$.

b/ Cardinal d'un ensemble.

- Définition

Soit A un ensemble. On appelle cardinal de A, le nombre d'éléments que contient A. On le note Card A.

- Propriétés.

- $\text{Card}\,\emptyset = 0$
- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{card}B - \text{Card}(A \cap B)$
- Si $A_1, A_2, \dots, A_p$ forment une partition de E alors :

$$\text{Card}E = \text{Card}(A_1) + \dots + \text{Card}(A_p)$$

- $\text{Card}(A \times B) = (\text{Card}A) \times (\text{Card}B)$
- $\text{Card}(C_E^A) = \text{Card}E - \text{Card}A$.
- Si A et B sont disjoints alors :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B.$$

2/ Notion de listes.

Etant donné un ensemble E (non vide) et un entier p $(1 \leq p)$ on appelle liste de p éléments de E, une suite ordonnée de p éléments de E, non nécessairement distincts.

Théorème :

Soit E un ensemble à n éléments, le nombre de listes de p éléments de E est n^p.

Remarque :

Le nombre de listes de p éléments d'un ensemble à n éléments est aussi appelé nombre d'applications d'un ensemble à p élément vers un ensemble à n éléments

3/ Liste d'éléments distincts ou arrangements

a/ Définition

Soit E un ensemble fini à n éléments et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. On appelle arrangement de p éléments de E, une liste de p éléments de E deux à deux distincts.

b/ Théorème.

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments est le nombre noté A_n^p, défini par :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$$

4/ Permutations

a/ Définition

On appelle permutation d'un ensemble E de n éléments toute liste de n éléments de E deux à deux distincts

b/ Notion de factorielle.

- Soit n un entier naturel non nul, on appelle « factorielle n » le nombre noté $n!$ et défini par :

$$n! = n(n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

- Par convention $0! = 1$

c/ Théorème

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments $(n \geq 1)$ est $n! = n(n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$.

Remarques :

1/ $A_n^n = n!$ $\quad A_n^0 = 1$

2/ On démontre aisement que:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

5/ Combinaisons

a/ Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier tels que $p \leq n$.

On appelle combinaison de p éléments de E, toute partie de E ayant p éléments

b/ Théorème.

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments, et le nombre noté C_n^p et défini par:

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

c/ Propriétés

Soit n et p deux nombres entiers naturels tels que $p \leq n$ on a:

* $C_n^{n-p} = C_n^p$
* si de plus $0 < p < n$ alors on a:

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$$

En outre on a:

$$C_n^0 = 1; \quad C_n^1 = n; \quad C_n^{n-1} = n$$

REMARQUE IMPORTANTE

Lorsqu'un problème de dénombrement a le sens :

- d'un tirage successif avec remise on utilise la formule n^p
- d'un tirage successif sans remise on utilise la formule $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
- d'un tirage simultané on utilise

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

TRAVAUX DIRIGES N°1

1/ Déterminer le nombre de façons différentes de range 3 objets dans 5 casiers sachant que :

a/ Un casier peut comporter plusieurs objets

b/ Un casier ne contenir qu'au plus un objet

2/ Avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 0 (les dix chiffres du système décimal) combien peut-on écrire :

a/ de nombres de trois chiffres?

b/ de nombres de trois chiffres distincts?

Résolution

1/ Déterminons le nombre de façons différentes de ranger 3 objets dans 5 casiers sachant que:

a/ Un casier peut contenir plusieurs objets:

$$N_1 = 5^3 = 125$$

b/ Un casier ne peut contenir qu'au plus un objet :

$$N_2 = A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

2/ Avec les 10 chiffres du système décimal déterminons :

a/ le nombre de nombres de trois

chiffres que l'on peut écrire :
Il faut remarquer qu'un nombre de 3 chiffres commençant par 0 n'est pas un nombre de trois chiffres d'où

$N_3 = 10^3 - 10^2 = 900$ ou bien

$N_3 = 9 \times 10 \times 10 = 900$

b/ Déterminons le nombre de nombres de trois chiffres distincts que l'on peut écrire

$N_4 = 10 \times 9 \times 8 - 1 \times 9 \times 8 = 648$

TRAVAUX DIRIGES N°2

1/ De combien de manières peut-on former un comité de trois femmes et de quatre hommes dans une société de huit femmes et de sept hommes, si l'on suppose que Mlle X refuse d'être désignée en même temps que M. Y ?

Résolution

Le comité peut se présenter de trois façons différentes :

- ni Mlle X ni M. Y ne font pas partie du comité
- Mlle X fait partie du comité et non M. Y.
- M. Y fait partie du comité mais pas Mlle X

Soit n_1 le nombre de comités ne comportant ni Mlle X ni M. Y on a :

$$n_1 = C_7^3 \times C_6^4 = 35 \times 15 = 525$$

Soit n_2 le nombre de comités comportant Mlle X mais pas M. Y on a :

$$n_2 = (C_1^1 \times C_7^2) \times C_6^4 = 21 \times 15 = 315$$

Soit n_3 le nombre de comités comportant M. Y mais pas Mlle X on a :

$$n_3 = C_7^3 \times (C_1^1 \times C_6^3) = 35 \times 20 = 700$$

Le nombre total N de comité que l'on peut former est donc :

$$N = n_1 + n_2 + n_3 = 525 + 315 + 700$$

$$N = 1540$$

Autre méthode :

Soit N' le nombre de comités comportant à la fois Mlle X et M. Y on a :

$$N' = C_7^2 \times C_6^3 = 21 \times 20 = 420$$

Soit N_1 le nombre de comités que l'on pouvait former s'il n'y avait aucune contrainte on a :

$$N_1 = C_8^3 \times C_7^4 = 56 \times 35 = 1960.$$

Soit N le nombre de comités s Mlle X refuse d'être désignée en même temps que M. Y on a :

$$N = N_1 - N' = 1960 - 420 = 1540$$

$$N = 1540$$

TRAVAUX DIRIGES N°3

Une enquête effectuée dans une chaî

de 100 élèves a donné les résultats suivants :

. 49 étudient l'anglais, 59 l'Espagnol, 53 le Russe.

. 20 étudient l'Anglais et l'Espagnol, 26 l'Anglais et le Russe, 22 le Russe et l'Espagnol.

. 7 étudient les trois langues.

1/ Déterminer le nombre d'élèves qui n'étudient que :

a-/ l'Anglais ; b-/ l'Espagnol ; c-/ le Russe

2-/ Déterminer le nombre d'élèves qui n'étudient que :

a-/ l'Anglais et l'Espagnol

b-/ l'Anglais et le Russe

c/ le Russe et l'Espagnol

3-/ Déterminer le nombre d'élèves qui étudient :

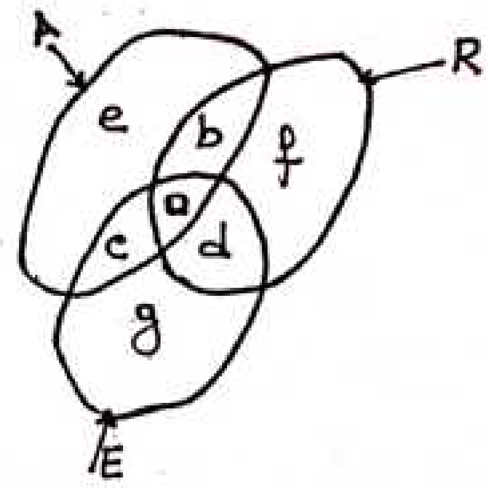
a-/ Exactement une langue

b-/ Exactement deux langues

c-/ Au moins deux langues.

Résolution

Soit A, l'ensemble des élèves qui étudient l'Anglais, E l'ensemble des élèves qui étudient l'Espagnol et R l'ensemble des élèves qui étudient le Russe. Procédons par un diagramme.



Les résultats de l'enquête nous permettent de poser le système suivant :

$$\begin{cases} a = 7 \\ a+c = 20 \\ a+b = 26 \\ a+d = 22 \\ a+b+c+e = 49 \\ a+c+d+g = 59 \\ a+b+d+f = 53 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 19 \\ c = 13 \\ d = 15 \\ e = 10 \\ g = 24 \\ f = 12 \end{cases}$$

1-/ a-/ $N_1 = e = 10$; b-/ $N_2 = g = 24$

c-/ $N_3 = f = 12$

2-/ a-/ $N_4 = c = 13$; b-/ $N_5 = b = 19$

c-/ $N_6 = d = 15$

3-/ a-/ $N_7 = N_1 + N_2 + N_3 = 10 + 24 + 12 = 46$

b-/ $N_8 = N_4 + N_5 + N_6 = 13 + 19 + 15 = 47$

c-/ $N_9 = N_8 + a = 47 + 7 = 54$

TRAVAUX DIRIGES N°4

1-/ Déterminer le nombre de manière d'attribuer un jour hebdomadaire de fermeture à chacune des quatre boulangeries d'une même commune.

2-/ Reprendre la question précédente

dans chacun des cas suivants :

a/ plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour.

b/ Chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte

Résolution

1/ Ce problème a le sens d'un tirage avec remise. On a donc

$$N_1 = 7^4 = 2401$$

2/ a/ Il s'agit d'un tirage successif sans remise.

$$N_2 = A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

3/ b/ Déterminons d'abord de manières d'avoir toutes les boulangeries fermées aucours de la semaine on a :

$$n = 7.$$

le nombre cherché est donc :

$$N = 7^4 - 7 = 2394$$

TRAVAUX DIRIGES N°5

De combien de manières peut-on aligner n objets sachant que deux d'entre eux X et Y doivent être à côté l'un de l'autre ?

Résolution

En remplaçant X et Y par un seul objet (en les collant, par exemple), il n'y a plus qu'à aligner les (n−1) objets et à faire attention que, compte tenu du problème étudié « X et Y à côté » il y a deux façons de les coller : XY ou YX d'où

$$N = 2(n-1)!$$

TRAVAUX DIRIGES N°6

Une urne contient 8 boules rouges, 9 noires et 10 blanches. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1/ Déterminer le nombre de tirages possibles.

2/ Déterminer le nombre de tirages qui comportent :

a/ 3 boules de même couleur

b/ 3 boules de couleurs différentes

c/ Exactement une boule noire.

d/ Au moins une boule blanche.

Résolution

8 boules rouges
9 boules noires
10 boules blanches
soit 27 boules au total

1/ Nombre N de tirages possibles :

$$N = C_{27}^3 = \frac{27!}{24! \times 3!} = 2925$$

2/ a/ $N_1 = C_8^3 + C_9^3 + C_{10}^3 = 56 + 84 + 120 = 260$

b/ $N_2 = C_8^1 \times C_9^1 \times C_{10}^1 = 8 \times 9 \times 10 = 720$

c/ $N_3 = C_9^1 \times C_{18}^2 = 9 \times 153 = 1377$

d/ $N_4 = C_{27}^3 - C_{17}^3 = 2925 - 680 = 2245$

6/ La formule du binôme de Newton

Soit a et b deux nombres complexes et n un entier naturel non nul.

On a : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$.

L'égalité précédente est appelée formule du binôme de Newton.

Les coefficients C_n^p sont calculés de proche en proche en formant le triangle de Pascal à l'aide du schéma suivant

$$\begin{array}{c} C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} \\ \parallel \\ C_n^p \end{array}$$

Voici un exemple du triangle.

$n \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	$\boxed{6} +$	$\boxed{4}$ $\parallel$	1			
5	1	5	10	$\boxed{10}$	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...

TRAVAUX DIRIGES N°7

1/ Développer $(a+b)^5$; $(a-b)^6$

2/ Montrer que

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

3/ Montrer que :

$$C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots$$

Résolution

1/ Développement.

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

2/ Montrons que :

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

On sait que :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

En posant $a = b = 1$ on a :

$$(1+1)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p 1^{n-p} \cdot 1^p \quad \text{d'où}$$

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n \quad \text{soit :}$$

$$\boxed{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n}$$

3/ Montrons que :

$$C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots$$

En posant $a = 1$ $b = -1$ dans la formule du binôme de Newton on a :

$$(1-1)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p 1^{n-p} (-1)^p$$

$$= \sum_{p=0}^{n} C_n^p (-1)^p$$

$$= C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots$$

or $(1-1)^n = 0^n = 0$ d'où

$$C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots$$

II PROBABILITES

1/ Quelques définitions

a/ Expérience aléatoire

On appelle expérience aléatoire, toute expérience dont le résultat n'est pas connu d'avance, ce resultat étant le fruit d'un pur hasard.

b/ Eventualité

C'est l'un des résultats d'une expérience aléatoire; on l'appelle également événement élémentaire

c/ Evénement

Un événement est un ensemble d'éventualités

d/ Univers

L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les eventualités de cette expérience. Il est la plupart du temps noté Ω.

Soit A et B deux événements d'une expérience aléatoire

* "A ou B" est un événement constitué d'éventualités appartenant à A ou à B. On le note $A \cup B$.
* "A et B" est un événement constitué d'éventualités appartenant à la fois à A et à B. On la note $A \cap B$.

Si $A \cap B = \emptyset$ alors les événements A et B sont dits incompatibles.

Remarques:

Ω est appelé événement certain

$\emptyset$ est appelé événement impossible.

* On appelle événement contraire de A, la complémentaire de A dans Ω. Il est noté $\overline{A}$.

2/ Notion de probabilité

a/ Définition

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire à n éventualités $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Une probabilité p sur Ω est une application définie de $\mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0;1]$ qui à chaque éventualité e_i associe le nombre réel $P(e_i)$ noté P_i tel que $P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = 1$

- Dans cette condition la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.
- La probabilité de l'événement certain est 1
- La probabilité de l'événement impossible est 0

b/ Propriétés.

Soit p une probabilité définie sur un univers Ω, A et B deux événements

. $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

. si $A\cap B = \emptyset$ alors $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$

. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

c/ Equiprobabilité

On parle d'équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience ont la même probabilité.
Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, pour tout événement A on a :

$$P(A) = \frac{\text{Card} A}{\text{Card}\,\Omega},$$

Ω étant l'univers de l'expérience.

Remarque:

Card A est appelé "nombre de cas favorables"

Card Ω est appelé "nombre de cas possibles"

3/ Probabilité conditionnelle.

a/ Définition

Soit B un événement de probabilité non nulle. On définit la probabilité de A sachant que B est réalisé, notée $P_B(A)$ ou $P(A/B)$ par la relation :

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

b/ Événements indépendants.

On dit que deux événements A et B sont indépendants si :

$P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$ ou encore si

$P(A/B) = P(A)$ avec $P(B) \neq 0$ ou encore si $P(A/B) = P(B/A)$ avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

4/ Formule des probabilités totales

Si des événements $B_1, B_2, \dots B_p$ constituent une partition de Ω alors pour tout événement A on a:

$$P(A) = P(A\cap B_1) + P(A\cap B_2) + \dots + P(A\cap B_p)$$

En particulier, pour deux événements A et B quelconques :

$$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap \bar{B})$$

$\boxed{\text{TRAVAUX DIRIGES N° 8}}$

Un professeur de mathématiques facétieux demande à ses élèves de préparer 100 exercices. Le lendemain, il interroge sur 3 exercices un élève qui en a préparé 25. Quelle est la probabilité qu'il ait préparé:

1/ les 3 exercices (P_3)

2/ 2 de ces trois exercices (P_2)

3/ Aucun de ces exercices (P_0)

4/ au moins l'un de ces exercices ($P_{\geq 1}$)

Résolution

1/ $P_3 = \frac{C_{25}^3}{C_{100}^3}$ 2/ $P_2 = \frac{C_{25}^2 \times C_{75}^1}{C_{100}^3}$

3/ $P_0 = \frac{C_{75}^3}{C_{100}^3}$ 4/ $P_{\geq 1} = 1 - P_0$

TRAVAUX DIRIGES N° 9

Soit A et B deux évènements indépendants. Montrer qu'il en est de même pour

1/ A et $\overline{B}$ 2/ $\overline{A}$ et B ; 3/ $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Résolution

A et B indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$

1/ Montrons que A et $\overline{B}$ sont indépendant.

D'après la formule des probabilités totales on a : $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

$\Rightarrow P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$= P(A) - P(A).P(B)$

$= P(A)(1 - P(B))$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A).P(\overline{B})$

A et $\overline{B}$ sont donc indépendants.

2/ Montrons que $\overline{A}$ et B sont indépendants

D'après ce qui précède on a :

A et B indépendants $\Rightarrow$ A et $\overline{B}$ indépendants $\Rightarrow P(A \cap \overline{B}) = P(A).P(\overline{B})$

$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$

$= P(\overline{A}) - P(\overline{A \cup B})$

$= P(\overline{A}) - 1 + P(A \cup B)$

$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) - 1 + P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(\overline{A}) - P(\overline{A}) + P(B) - P(A).P(B)$

$= P(B)(1 - P(A)) = P(\overline{A}).P(B)$

$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}).P(B)$

$\overline{A}$ et B sont donc indépendants

3/ Montrons que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$= P(\overline{A}) - P(B) + P(A).P(B)$

$= P(\overline{A}) - P(B)(1 - P(A))$

$= P(\overline{A}) - P(B).P(\overline{A})$

$= P(\overline{A})(1 - P(B)) = P(\overline{A}).P(\overline{B})$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}).P(\overline{B})$

Les évènements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont donc indépendants.

TRAVAUX DIRIGES N° 10

Une étude épidémique concernant une certaine maladie a été effectuée dans des familles ayant deux enfants de moins de 10 ans : une fille et un garçon. On a constaté que 20% des filles et 50% des garçons sont touchés par la maladie. Par ailleurs, dans les familles où la fille est touchée, 70% des garçons le sont aussi.

On choisit au hasard une famille ayant fait l'objet de cette étude.

Calculer la probabilité des évènements suivants :

A: les 2 enfants sont touchés par la maladie

B: au moins 1 des 2 enfants est touché

C: aucun des enfants n'est touché

D: sachant que le garçon est touché, la fille l'est aussi

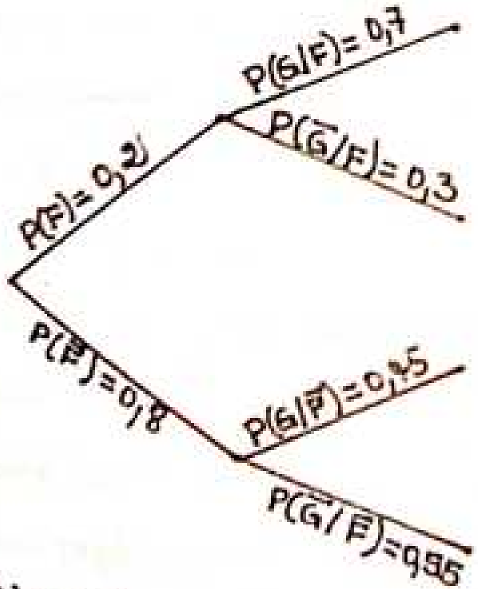
E: sachant que le garçon n'est pas touché, la fille l'est.

On notera : F : la fille est touchée

G : le garçon est touché.

Résolution.

Procédons par arbre de choix



$P(G)=0,5$

On sait que:

$P(G)=P(G\cap F)+P(G\cap \overline{F})$

$=P(F).P(G/F)+P(\overline{F}).P(G/\overline{F})$

$\Rightarrow 0,5=0,2.0,7+0,8.P(G/\overline{F})$

$\Rightarrow P(G/\overline{F})=0,45$

$P(\overline{G}/\overline{F})=1-P(G/\overline{F})=1-0,45=0,55$

$P(A)=P(G\cap F)=P(F)\times P(G/F)$

$=0,2\times 0,7=0,14$

$P(A)=0,14$

$P(B)=P(\overline{G}\cap F)+P(G\cap \overline{F})+P(G\cap F)$

$=0,2\times 0,3+0,8\times 0,45+0,14=0,56$

$P(B)=0,56$

$P(C)=1-P(B)=1-0,56=0,44$

$P(D)=P(F/G)=\dfrac{P(G\cap F)}{P(G)}=\dfrac{0,14}{0,5}=0,28$

$P(E)=P(F/\overline{G})=\dfrac{P(\overline{G}\cap F)}{P(\overline{G})}=\dfrac{0,2\times 0,2}{1-0,5}=0,12$

$P(A)=0,14$	$P(B)=0,56$	$P(C)=0,44$
$P(D)=0,28$	$P(E)=0,12$	

5/ Schéma de Bernoulli

a/ Définitions

- Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux éventualités

- Un schéma de Bernoulli est une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois, de façons indépendante une épreuve de Bernoulli.

L'une des éventualités est appelée succès et l'autre échec.

b/ Propriétés

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves, où pour chaque épreuve la probabilité du succès est p et celle de l'échec est q $(p+q=1 \Leftrightarrow q=1-p)$ la probabilité d'obtenir exactement k succès $(0 \leq k \leq n)$ au cours de ces n épreuves est :

$$P_k = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}.$$

REMARQUES IMPORTANTES

La difficulté majeure des exercices de probabilité est la traduction de l'énoncé.

Voici quelques éléments permettant de diagnostiquer la partie du programme à utiliser

- **Equiprobabilité**
- tous les tirages sont équiprobables
- On tire au hasard
- On lance des dés cubiques parfaits, ou non pipés ou non truqués
- On tire des boules indiscernables au toucher, des cartes non biseautées...

- **Conditionnement**
- Sachant que...
- si... alors, sinon...

(On réalise un arbre de choix)

- **Indépendance**
- les tirages sont indépendants
- on effectue des tirages successifs avec remise

- **Schéma de Bernoulli**
- On répète n fois de manière indépendante la même épreuve et on regarde à chaque fois si l'événement A est ou non réalisé ;
- On dispose de n « machines » identiques et indépendantes...

6/ Variable aléatoire

a/ Définition

Une variable aléatoire réelle X est une grandeur numérique associée à une expérience aléatoire, qui prend les valeurs $x_1, \ldots, x_n$.

Soit Ω l'univers associé à X.

$X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est l'ensemble des valeurs prises par X.

b/ Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit p une probabilité définie sur un univers Ω. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X sur Ω est l'application qui à toute valeur x_i

prise par X associe $P(X=x_i)$

Remarques:

- Il est commode de représenter une loi de probabilité par un tableau
- Il est prudent de vérifier que: $\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) = 1$

c-/ Fonction de repartition d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P.

On appelle fonction de repartition de X l'application

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0;1]$$
$$x \longmapsto F(x) = P(X \leq x)$$

d-/ Caractéristiques d'une variable aléatoire

* Espérance mathématique.

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω.

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

On appelle espérance mathématique de X le nombre réel noté E(X) et défini par: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)$

Remarque:

- Si $E(X) < 0$ le jeu est défavorable au joueur
- Si $E(X) = 0$ le jeu est équitable.
- Si $E(X) > 0$ le jeu est favorable au joueur

* Variance et Ecart-type

- On appelle variance de X le nombre réel positif noté V(X) et défini par:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

avec $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X=x_i)$

- L'écart type est le nombre réel positif noté $\sigma(X)$ et défini par:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

7/ Loi Binomiale.

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves, où pour chaque épreuve la probabilité du succès est p (celle de l'échec est $1-p$). Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de succès. L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{0; 1; 2; \dots; n\}$

La loi de probabilité de X est:

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Cette loi de probabilité est appelée loi binomiale de paramètres n et p.

<u>Propriété</u> :
si une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors :

$$E(X)=np \qquad V(X)=np(1-p)$$

TRAVAUX DIRIGES N°11

Un sac contient 6 boules numérotées de 0 à 5. On en extrait simultanément 2 boules qui portent respectivement les numeros x et y. A chaque tirage on associe la variable aléatoire X définie de la façon suivante :

- si x et y sont pairs, alors X prend la valeur $\frac{x+y}{2}$
- si x et y sont impairs alors X prend la valeur $\left|\frac{x-y}{2}\right|$
- si x et y sont de parité différentes, alors on attribue à X la valeur zéro.

1/ Etablir la loi de probabilité de X

2/ Déterminer et construire la fonction de repartition F de la variable aléatoire X

3/ Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

4/ On extrait dix fois de suite deux boules simultanément avec remise.

Quelle est la probabilité d'obtenir sept fois x et y de même parité ?

<u>Résolution</u>

Voici la liste des couples possibles et la valeur de X correspondant :

	Valeur de X	
$(0;2) \longrightarrow$	1	x et y pairs
$(0;4) \longrightarrow$	2	
$(2;4) \longrightarrow$	3	
$(1;3) \longrightarrow$	1	x et y impairs
$(1;5) \longrightarrow$	2	
$(3;5) \longrightarrow$	1	
$(0;1) \longrightarrow$	0	x et y de parité différente
$(0;3) \longrightarrow$	0	
$(0;5) \longrightarrow$	0	
$(1;2) \longrightarrow$	0	
$(1;4) \longrightarrow$	0	
$(2;3) \longrightarrow$	0	
$(2;5) \longrightarrow$	0	
$(3;4) \longrightarrow$	0	
$(4;5) \longrightarrow$	0	

Soit au total $C_6^2 = 15$ tirages possibles

1/ <u>Etablissons la loi de probabilité de X.</u>

Soit Ω l'univers associé à X on a :
$X(\Omega)=\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$

$P(X=0) = \frac{C_3^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

$P(X=1) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

$P(X=2) = \frac{2}{15}$

$P(X=3) = \frac{1}{15}$

Résumons les resultats dans le tableau ci-dessous

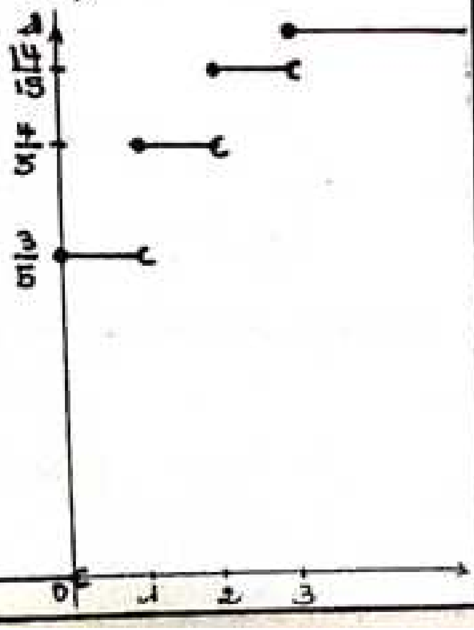
x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

2-/ Déterminons et construisons la fonction de repartition F de X.

F est définie par :

$$\begin{cases} F(x) = 0, & \text{si } x < 0 \\ F(x) = \frac{3}{5}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ F(x) = \frac{4}{5}, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ F(x) = \frac{14}{15}, & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ F(x) = 1, & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

Construisons F(x)



3-/ Déterminons l'espérance mathématique de X.

$E(X) = \sum x_i P(X=x_i)$

$= 0 \times \frac{3}{5} + 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{2}{15} + 3 \times \frac{1}{15}$

$= \frac{2}{3}$

$$\boxed{E(X) = \frac{2}{3}}$$

4-/ On extrait dix fois de suite deux boules simultanément avec remise.

Probabilité P_1 d'obtenir sept fois x et y de même parité.

Au cours d'un tirage la probabilité p que x et y soit de même parité est

$p = \frac{C_3^2 + C_3^2}{C_6^2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

$P_1 = C_{10}^7 p^7 (1-p)^3 = C_{10}^7 \times \left(\frac{2}{5}\right)^7 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3$

$$\boxed{P_1 = 0,042}$$

TRAVAUX DIRIGES N°12

Une variable aléatoire X a pour univers image : $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

1-/ Déterminer la loi de probabilité de X sachant que :

$P(5 < X) = \frac{1}{12}$;

$P(X < 2) = 2P(X=6) = 2P(X=2)$

$P(X \leq 3) = P(4 \leq X)$; $P(X=1) = P(X=5)$

2-/ Définir la fonction de répartition

de X et tracer sa courbe représentative.

3°/ Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

Résolution

1°/ Déterminons la loi de probabilité de X.

$P(5<X) = \frac{1}{12} \Rightarrow P(X=6) = \frac{1}{12}$

$P(X<2) = 2P(X=6) = 2P(X=2)$

$\Rightarrow P(X=1) = \frac{1}{6}\ ;\ P(X=2) = \frac{1}{12}$

$P(X=5) = P(X=1) = \frac{1}{6}$

$P(X\leq 3) = P(4\leq X)$

$\Leftrightarrow P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) = P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6}+\frac{1}{12}+P(X=3) = P(X=4)+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$

$\Leftrightarrow P(X=3) = P(X=4)$

or $\sum P(X=x_i) = 1$

$\Leftrightarrow P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6}+\frac{1}{12}+2P(X=3)+\frac{1}{6}+\frac{1}{12} = 1$

$\Rightarrow P(X=3) = P(X=4) = \frac{1}{4}$

Résumons les résultats dans le tableau suivant :

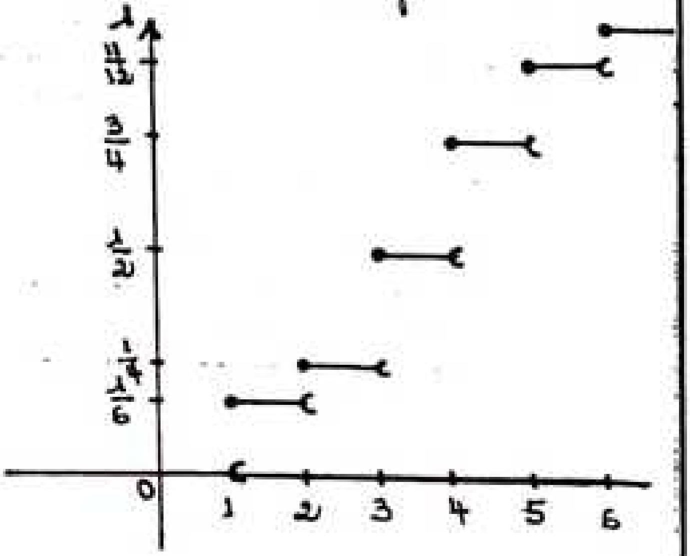
x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

2°/ Définissons la fonction de répartition F de X.

F est définie par :

$$\begin{cases} F(x) = 0 \text{ si } x<1 \\ F(x) = \frac{1}{6} \text{ si } 1\leq x<2 \\ F(x) = \frac{1}{4} \text{ si } 2\leq x<3 \\ F(x) = \frac{1}{2} \text{ si } 3\leq x<4 \\ F(x) = \frac{3}{4} \text{ si } 4\leq x<5 \\ F(x) = \frac{11}{12} \text{ si } 5\leq x<6 \\ F(x) = 1 \text{ si } 6\leq x \end{cases}$$

Traçons sa courbe représentative



3°/ Calculons l'espérance mathématique et l'écart-type de X

$E(X) = \frac{2+2+9+12+10+6}{12} = \frac{41}{12}$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$= \frac{2+4+27+48+50+36}{12} - \left(\frac{41}{12}\right)^2$

$= \frac{167}{12} - \frac{41^2}{144} = \frac{323}{144}$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{323}}{12}$

$E(X) = \frac{41}{12}$	$\sigma(X) = \frac{\sqrt{323}}{12}$

ENONCES DES EXERCICES

EXERCICE 1

L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème suivant : si p est une probabilité sur Ω, A et B deux événements de Ω, alors :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

On admet que si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ (1).

1) Démontrer que les événements A et $\bar{A} \cap B$ sont incompatibles et que $A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B$. (On pourra s'aider d'un diagramme.

2) Appliquer le théorème (1) aux événements A et $\bar{A} \cap B$.

3) Démontrer que les événements $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ sont incompatibles et que $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = B$ (On pourra s'aider d'un diagramme).

4) Appliquer le théorème (1) aux événements $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$.

5) Utiliser les résultats des questions précédentes pour conclure.

EXERCICE 2

Soit un univers des possibles Ω sur lequel on a défini une probabilité p. On considère deux événements A et B tels que $p(A \cup B) = \frac{5}{6}$, $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$ et $p(A) = \frac{2}{3}$.

1) Calculer $p(B)$, $p(\bar{A})$, $p(\bar{B})$, $p(\overline{A \cup B})$ et $p(\overline{A \cap B})$

2) Calculer $p(\bar{A} \cup \bar{B})$ et $p(\bar{A} \cap \bar{B})$

EXERCICE 3

Soit une probabilité p sur l'univers $\Omega = \{a; b; c; d; e; f; g; h\}$

Le tableau suivant indique les probabilités des événements élémentaires :

	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{e\}$	$\{f\}$	$\{g\}$	$\{h\}$
p	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$

1) Calculer x.

2) On donne $A = \{a; c; e\}$, $B = \{b, c, d, e\}$

Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$

$p(\overline{A \cap B})$, $p(\overline{A \cup B})$

EXERCICE 4

Une urne contient : trois boules rouges numérotées de 1 à 3 et quatre boules bleues numérotées de 1 à 4. Les boules sont indiscernables au toucher.

1) On suppose que l'on tire au hasard successivement deux boules avec remise dans l'urne de la première boule tirée.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A: « le tirage ne comporte que des boules rouges »

B: « le tirage comporte au moins une boule bleue »

C: « le tirage ne comporte que des boules numerotées 3 »

D: « Le tirage comporte au moins une boule numérotée 3 ».

E: « Le tirage comporte une boule bleue et une boule numerotée 3 »

F: « le tirage comporte une boule bleue ou une boule numerotée 3 »

2) Répondre aux questions en supposant que l'on effectue un tirage des deux boules sans remise dans l'urne de la première boule tirée

EXERCICE 5

Un sac contient deux boules blanches portant respectivement les numéro 1 et 4 et quatre boules noires portant respectivement les numéros 2, 3, 5 et 7. On tire simultanément deux boules du sac. Quelle est la probabilité :

1) Pour que les deux boules tirées portent des numéros impairs ?

2) Pour que les deux boules tirées soient de la même couleur ?

3) Pour que les deux boules tirées portent des numéros impairs et soient de la même couleur ?

4) Pour que les deux boules tirées portent des numeros impairs ou soient de la même couleur ?

EXERCICE 6

Soit l'équation du second dégré :

(E): $x^2+px+q=0$. Les coefficients p et q sont l'un des entiers naturels 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Le coefficient p est déterminé par un premier jet d'un dé parfait dont les faces sont numerotées de 1 à 6 et ont toutes la même probabilité d'apparition. Le coefficient q est déterminé par un deuxième jet de ce même dé.

Déterminer les probabilités des événements suivants :

a) (E) admet deux racines réelles distinctes

b) (E) admet deux racines réelles confondues

c) (E) admet deux racines complexes conjuguées

EXERCICE 7

Un dé cubique a ses faces numérotées de 1 à 6. On sait qu'il est pipé de telle façon que les probabilités $P_1, P_2, \ldots, P_6$ d'apparition des faces numérotées 1, 2, …, 6 forment une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{18}$.

1) Calculer les probabilités $P_1, P_2, \ldots P_6$.

2) Un joueur joue avec ce dé dans les conditions suivantes :

- il gagne 2F s'il fait apparaître une face portant un nombre pair ;
- il perd 3F s'il fait apparaître une face portant un nombre impair.

Calculer la probabilité de l'événement « après trois lancers successifs, le joueur a gagné 1F ».

EXERCICE 8

On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par Pi la probabilité d'apparition de la face numérotée i, lors d'un lancer du dé. Ces probabilités vérifient les 3 conditions suivantes :

- P_1, P_3 et P_5 sont, dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.
- P_2, P_4 et P_6 sont, dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$
- $3P_1 = 2P_2$.

1) Exprimer tous les Pi en fonction de P_1. En déduire la valeur de P_1 et celles des autres.

2) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair lors d'un lancer du dé.

3) On lance le dé 6 fois de suite.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois le nombre 6?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le nombre 6?

EXERCICE 9

Une urne contient 42 boules indiscernables au toucher. Dans l'urne il y a des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes ; n boules sont blanches, n boules sont rouges, toutes les autres sont vertes (n est un entier naturel)

On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

1) Déterminer l'ensemble A des valeurs

peut prendre le nombre n. (On suppose qu'il y a au moins une boule de chaque couleur dans l'urne).

2) On suppose n = 8 dans cette question. On donnera les résultats à 10^{-3} près par défaut.

a) Quelle est la probabilité, p_1 de tirer une boule de chaque couleur?

b) Quelle est la probabilité, p_2 de tirer 3 boules vertes?

3) On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur [1; 20] par: $f(x) = -2x^3 + 42x^2$.

Etudier les variations de f (On remarquera que f possède un maximum sur [1; 20] pour x = 14)

4) Dans cette question on suppose que n appartient à A (A a été défini à la question 1)

On note P(n) la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur.

a) Déterminer P(n).

b) En utilisant les résultats obtenus dans 3), déterminer la valeur n_0 de n pour que P(n) soit maximum. Calculer $P(n_0)$ à 10^{-3} près par défaut.

EXERCICE 10

Une usine fabrique des pièces en grande quantité. Chacune des pièces réunit deux éléments fabriqués par deux machines différentes fonctionnant de manière indépendante. À la sortie de l'usine, on choisit une pièce au hasard. On appelle A l'événement: « le premier élément est défectueux » et B: « le second élément est défectueux »

Des études statistiques ont montré que les probabilités respectives de ces deux événements étaient :

p(A) = 0,03 et p(B) = 0,05.

(Les deux événements sont indépendants)

Déterminer les probabilités des événements suivants :

- C: « la pièce choisie a ses deux éléments défectueux »
- D: « la pièce choisie n'a aucun élément défectueux. »
- E: « la pièce choisie a le premier élément défectueux mais pas le second »
- F: « la pièce choisie a au moins un élément défectueux »
- G: « La pièce choisie a un élément défectueux et un seul. »

EXERCICE 1

L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème suivant : si p est une probabilité sur Ω, A et B deux événements de Ω, alors :

$$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$$

On admet que si A et B sont incompatibles alors $p(A\cup B) = p(A) + p(B)$ (1).

1) Démontrer que les événements A et $\overline{A}\cap B$ sont incompatibles et que $A\cup(\overline{A}\cap B) = A\cup B$. (On pourra s'aider d'un diagramme.

2) Appliquer le théorème (1) aux événements A et $\overline{A}\cap B$.

3) Démontrer que les événements $A\cap B$ et $\overline{A}\cap B$ sont incompatibles et que $(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B) = B$ (On pourra s'aider d'un diagramme).

4) Appliquer le théorème (1) aux événements $A\cap B$ et $\overline{A}\cap B$.

5) Utiliser les résultats des questions précédentes pour conclure.

EXERCICE 2

Soit un univers des possibles Ω sur lequel on a défini une probabilité p. On considère deux événements A et B tels que $p(A\cup B) = \frac{5}{6}$, $p(A\cap B) = \frac{1}{4}$ et $p(A) = \frac{2}{3}$.

1) Calculer $p(B)$, $p(\overline{A})$, $p(\overline{B})$, $p(\overline{A\cup B})$ et $p(\overline{A\cap B})$

2) Calculer $p(\overline{A}\cup\overline{B})$ et $p(\overline{A}\cap\overline{B})$

EXERCICE 3

Soit une probabilité p sur l'univers $\Omega = \{a; b; c; d; e; f; g; h\}$

Le tableau suivant indique les probabilités des événements élémentaires :

	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{e\}$	$\{f\}$	$\{g\}$	$\{h\}$
p	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$

1) Calculer x.

2) On donne $A = \{a; c; e\}$, $B = \{b, c, d, e\}$

Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(A\cap B)$, $p(A\cup B)$, $p(\overline{A\cap B})$, $p(\overline{A\cup B})$

EXERCICE 4

Une urne contient : trois boules rouges numérotées de 1 à 3 et quatre boules bleues numérotées de 1 à 4. Les boules sont indiscernables au toucher.

1) On suppose que l'on tire au hasard successivement deux boules avec remise dans l'urne de la première boule tirée.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A: le tirage ne comporte que des boules rouges »

B:« le tirage comporte au moins une boule bleue »

C:« le tirage ne comporte que des boules numerotées 3 »

D:« Le tirage comporte au moins une boule numérotée 3 ».

E:« Le tirage comporte une boule bleue et une boule numerotée 3 »

F:« le tirage comporte une boule bleue ou une boule numerotée 3 »

2) Répondre aux questions en supposant que l'on effectue un tirage des deux boules sans remise dans l'urne de la première boule tirée

EXERCICE 5

Un sac contient deux boules blanches portant respectivement les numéro 1 et 4 et quatre boules noires portant respectivement les numéros 2, 3, 5 et 7. On tire simultanément deux boules du sac. Quelle est la probabilité :

1) Pour que les deux boules tirées portent des numéros impairs ?

2) Pour que les deux boules tirées soient de la même couleur ?

3) Pour que les deux boules tirées portent des numéros impairs et soient de la même couleur ?

4) Pour que les deux boules tirées portent des numeros impairs ou soient de la même couleur ?

EXERCICE 6

Soit l'équation du second dégré :

(E): $x^2+px+q=0$. les coefficients p et q sont l'un des entiers naturels 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Le coefficient p est déterminé par un premier jet d'un dé parfait dont les faces sont numerotées de 1 à 6 et ont toutes la même probabilité d'apparition. Le coefficient q est déterminé par un deuxième jet de ce même dé.

Déterminer les probabilités des événements suivants :

a) (E) admet deux racines réelles distinctes

b) (E) admet deux racines réelles confondues

c) (E) admet deux racines complexes conjuguées

EXERCICE 7

Un dé cubique a ses faces numérotées de 1 à 6. On sait qu'il est pipé de telle façon que les probabilités $P_1, P_2, \dots, P_6$ d'apparition des faces numérotées 1, 2, ..., 6 forment une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{18}$.

1) Calculer les probabilités $P_1, P_2, \dots P_6$.

2) Un joueur joue avec ce dé dans les conditions suivantes :

- il gagne 2F s'il fait apparaître une face portant un nombre pair ;
- il perd 3F s'il fait apparaître une face portant un nombre impair.

Calculer la probabilité de l'événement « après trois lancers successifs, le joueur a gagné 1F ».

EXERCICE 8

On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par Pi la probabilité d'apparition de la face numérotée i, lors d'un lancer du dé. Ces probabilités vérifient les 3 conditions suivantes :

- P_1, P_3 et P_5 sont, dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $\frac{1}{8}$.
- P_2, P_4 et P_6 sont, dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$
- $3P_1 = 2P_2$.

1) Exprimer tous les Pi en fonction de P_1. En déduire la valeur de P_1 et celles des autres.

2) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair lors d'un lancer du dé.

3) On lance le dé 6 fois de suite.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois le nombre 6?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le nombre 6?

EXERCICE 9

Une urne contient 42 boules indiscernables au toucher. Dans l'urne il y a des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes ; n boules sont blanches, n boules sont rouges, toutes les autres sont vertes (n est un entier naturel)

On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

1) Déterminer l'ensemble A des valeurs

que peut prendre le nombre n. (On rappelle qu'il y a au moins une boule de chaque couleur dans l'urne).

2) On suppose n = 8 dans cette question. On donnera les résultats à 10^{-3} près par défaut.

a) Quelle est la probabilité, p_1 de tirer une boule de chaque couleur ?

b) Quelle est la probabilité, p_2 de tirer 3 boules vertes ?

3) On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur [1; 20] par: $f(x) = -2x^3 + 42x^2$.

Etudier les variations de f (On remarquera que f possède un maximum sur [1; 20] pour x = 14)

4) Dans cette question on suppose que n appartient à A (A a été défini à la question 1)

On note P(n) la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur.

a) Déterminer P(n).

b) En utilisant les résultats obtenus dans 3), déterminer la valeur n_0 de n pour que P(n) soit maximum. Calculer $P(n_0)$ à 10^{-3} près par défaut.

EXERCICE 10

Une usine fabrique des pièces en grande quantité. Chacune des pièces réunit deux éléments fabriqués par deux machines différentes fonctionnant de manière indépendante. À la sortie de l'usine, on choisit une pièce au hasard. On appelle A l'événement : « le premier élément est défectueux » et B : « le second élément est défectueux »

Des études statistiques ont montré que les probabilités respectives de ces deux événements étaient :

p(A) = 0,03 et p(B) = 0,05.

(Les deux événements sont indépendants)

Déterminer les probabilités des événements suivants :

- C : « la pièce choisie a ses deux éléments défectueux »
- D : « la pièce choisie n'a aucun élément défectueux. »
- E : « la pièce choisie a le premier élément défectueux mais pas le second »
- F : « la pièce choisie a au moins un élément défectueux »
- G : « la pièce choisie a un élément défectueux et un seul. »

EXERCICE 11

Quatre amis décident de jouer avec un jeu de 32 cartes auxquelles ils attribuent des points :

- 4 points pour chacun des quatre « as »
- 3 points pour chacun des quatre « rois »
- 2 points pour chacune des quatre « dame »
- 1 point pour chacun des quatre « valet »
- aucun point pour chacune des seize autres cartes.

Une partie consiste à tirer simultanément trois cartes du jeu et à relever le total des points qui leur sont attribués. On dit que le joueur « ne marque pas » lorsque le total relevé est nul. On dit que le joueur « marque » dans tous les autres cas. On admet que, lors de chaque partie, tous les tirages de trois cartes sont équiprobables.

1) Un joueur fait une partie
On considère les événements suivants:
A: le joueur « ne marque pas ».
B: le joueur « marque ».
C: le joueur marque avec un total de 9 points.
Calculer la probabilité de chacun des événements A, B et C.
On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

2) Les quatre amis jouent successivement chacun une partie.
On admet que les résultats des quatre parties sont indépendants.
Calculer la probabilité pour que l'un au moins des quatre amis « marque »
On donnera le resultat à 10^{-4} près par défaut.

EXERCICE 12

Une urne contient 10 boules : 6 boules rouges numerotées de 1 à 6 et 4 boules bleues numerotées de 1 à 4. On tire simultanément 3 boules de l'urne. On suppose que tous les tirages de 3 boules sont équiprobables. On considère les événements :

- A : « les 3 boules sont rouges »
- B : « l'une au moins des 3 boules tirées est bleue »
- C : « chacune des 3 boules porte un numéro superieur ou égal à 3 ».

1) Calculer la probabilité de chacun des evenements A, B et C.

2) Calculer la probabilité de l'évé-

nement $A \cap C$. En déduire celle de l'événement $A \cup C$.

3) Sachant que l'événement A est réalisé, quelle est la probabilité pour que C le soit?

Les evenements A et C sont-ils indépendants?

EXERCICE 13

Une entreprise est composée de 510 employés. Chacun doit prendre soit trois, soit quatre semaines de congés, intégralement pendant l'un des mois de juin, juillet ou août. On sait que:

- parmi les employés ayant opté pour juin, un tiers a trois semaines de congés;
- parmi les employés ayant opté pour juillet, un cinquième a quatre semaines de congés.
- parmi les employés ayant opté pour août, un cinquième également a quatre semaines de congés.

On donnera les résultats demandés sous forme de fractions.

1) Quelle est la probabilité qu'un employé choisi au hasard dans l'entreprise bénéficie de trois semaines de congés en juin (On pourra s'aider d'un arbre).

2) Même question pour juillet puis pour août.

3) Déterminer la probabilité qu'un employé choisi au hasard dans l'entreprise bénéficie de trois semaines de congés au cours de ces trois mois.

EXERCICE 14

Le seuil maximum d'alcoolémie toléré pour conduire une automobile est 0,5 gramme par litre. Un laboratoire a mis au point un éthylotest. Théoriquement, celui-ci devrait être positif lorsqu'une personne testée a une alcoolémie strictement superieure au seuil toleré. Mais il n'est pas parfait:

- lorsqu'une personne a un taux d'alcoolémie strictement superieur au seuil toléré, l'éthylotest est positif 96 fois sur 100;
- lorsqu'une personne a un taux d'alcoolémie inferieur ou égal au seuil toléré, l'éthylotest est positif

3 fois sur 100.

On suppose que ces résultats portent sur un échantillon suffisamment important pour qu'ils soient constants. Dans une région donnée, 95% des conducteurs d'automobile ont un seuil d'alcoolémie inférieur ou égal au seuil toléré. On soumet, au hasard, un automobiliste de cette région à l'éthylotest. On définit les événements suivants :

- P : « l'éthylotest est positif »;
- N : « l'éthylotest est négatif »,
- S : « le conducteur a un taux d'alcoolémie strictement superieur au seuil toleré »;
- I : « le conducteur a un taux d'alcolemie inferieur ou égal au seuil toleré ».

1) Que valent $p(I)$, $p(P/S)$, $p(P/I)$?

2) Quelle est la probabilité pour que l'automobiliste ait un taux d'alcoolémie strictement superieur au seuil toléré ?

3) Quelle est la probabilité pour qu'il ait un taux d'alcoolémie strictement superieur au seuil toléré, et que l'éthylotest soit positif?

4) a) Calculer $p(P \cap I)$, puis $p(P)$.

b) Quelle est la probabilité pour qu'il ait un taux d'alcoolemie strictement superieur au seuil toléré, sachant que l'éthylotest est positif?

5) Quelle est la probabilité pour que l'éthylotest donne un resultat erroné?

EXERCICE 15

Dans cet exercice les resultats seront sous forme de fractions irréductibles.

Dans un jeu, il s'agit de trouver la bonne réponse à une question posée. Les questions st classées en trois catégories : sport, cinéma, musique. Dans chaque catégorie il y a le même nombre de questions. Les trois catégories sont donc équiprobables.

Alain, fervent supporteur de ce jeu, est conscient qu'il a :

- 5 chances sur 6 de donner la bonne réponse sachant qu'il est interrogé en sport;
- 2 chances sur 3 de donner la bonne réponce sachant qu'il est interro

gé en cinéma ;

- 1 chance sur 9 de donner la bonne réponse sachant qu'il est interrogé en musique.

1) Alain participe à ce jeu et tire au hasard une question. Déterminer la probabilité que:

a) la question soit dans la catégorie sport et qu'il donne la bonne réponse.

b) sa réponse soit bonne à la question posée.

2) Pour participe au jeu, Alain doit payer 10F de droit d'inscription.
Il recevra :

- 10F s'il est interrogé en sport et que sa réponse est bonne;
- 20F s'il est interrogé en cinéma et que sa réponse est bonne;
- 50F s'il est interrogé en musique et que sa réponse est bonne.
- 0F si la réponse qu'il donne est fausse.

Soit X la variable aléatoire égale au gain d'Alain (On appelle gain, la différence, en francs, entre ce qu'il reçoit et les 10F de droit d'inscription).

a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

Alain a-t-il interêt à jouer?

EXERCICE 16

Une étude a été faite sur la fréquentation du cinéma à Lomé pendant un mois. Cette étude revèle que 25% des habitants sont dans la tranche d'ages de 0-14 ans (les « enfants »), et 20% des habitants sont dans la tranche d'ages de 15-25 (les « jeunes »). Les autres habitants seront dits "adultes »
On choisit un habitant au hasard, on note E, J, A les evenements suivants :

- E : « l'habitant choisi est dans la tranche 0-14 ans »;
- J : « l'habitant choisi est dans la tranche 15-25 ans »;
- A : « l'habitant choisi est un adulte ».

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de séances aux quelles l'habitant choisi a assisté pendant un mois.

L'étude menée permet d'établir les tableaux de probabilité conditionnelle suivants :

x_i	0	1	2	3
$P((X=x_i)/E)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$

x_i	0	1	2	3	4
$P((X=x_i)/J)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

x_i	0	1	2	3
$P((X=x_i)/A)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

Exemple : $P((X=2)/J)$ désigne la probabilité pour que l'habitant choisi aille deux fois par mois au cinéma sachant qu'il est jeune.

1) Déterminer la probabilité pour que l'habitant choisi :

a) soit adulte ;

b) soit jeune et aille deux fois par mois au cinéma.

2) Calculer la probabilité pour que l'habitant choisi aille deux fois par mois au cinéma.

3) Compléter le tableau suivant pour obtenir la loi de probabilité de X.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$					

$P(X=x_i)$ sera donnée à 10^{-3} près par défaut.

4) Calculer $E(X)$, l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 17

À la cafétaria, dans la vitrine pâtisserie :

- 60% des gateaux sont à base de crème ;
- parmi ceux qui sont à base de crème, 30% ont aussi des fruits ;
- parmi les gateaux qui n'ont pas de crème, 80% ont des fruits.

On prend un gateau au hasard.

1) a) Calculer la probabilité d'avoir un gateau à base de crème et comportant des fruits.

b) Calculer la probabilité d'avoir un gâteau avec des fruits mais sans crème.

c) En déduire la probabilité d'avoir un gateau avec les fruits.

2) a) Le gâteau pris au hasard comporte des fruits. Quelle est la probabilité qu'il soit à base de crème?

b) Le gâteau pris au hasard ne porte pas de fruit. Quelle est la probabilité qu'il soit à base de crème?

EXERCICE 18

On dispose de deux dés cubiques. Toutes les faces ont la même probabilité d'apparaître. Le premier cube a cinq faces rouges et une face verte. Le deuxième cube a une face rouge, deux vertes et trois bleues.

1) On jette les deux dés. On regarde la couleur des faces supérieures de chaque dé. On note :

- A l'événement : « les deux faces sont rouges »
- B l'événement : « les deux faces ont la même couleur »
- C l'événement : « l'une des faces est rouge et l'autre verte »
- D l'événement : « les deux faces sont de couleurs différentes ».

Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ et $p(D)$.

2) À chaque jet des deux dés est associé un jeu qui permet :

- un gain de 5F si les deux faces sont rouges
- un gain de 2F si les deux faces sont vertes.
- une perte si les deux faces sont de couleurs différentes. On note a, le montant en francs de cette perte.

On définit ainsi une variable aléatoire X qui à chaque jet des deux dés, associe le gain, ou la perte ainsi réalisé.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Déterminer la valeur de a pour que ce jeu soit « équitable ».

EXERCICE 19

Un sac contient 3 jetons marqués respectivement a, b, c (a, b, c étant des réels positifs). On tire au hasard un jeton, on le remet dans le sac et on tire à nouveau un jeton ; les tirages sont équiprobables.

On définit la variable aléatoire X qui à chaque couple de tirages ainsi décrit associe le produit des nombres marqués sur les deux jetons tirés.

1) a) Montrer que l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X est égale à $\frac{1}{9}(a+b+c)^2$

b) Calculer l'espérance mathématique du carré de la variable X, c'est-à-dire $E(X^2)$

2) a) Montrer que si a, b, c sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors :

$(a+b+c)(a-b+c) = a^2+b^2+c^2$.

b) Déterminer le triplet (a, b, c) pour que a, b, c forment dans cet ordre une suite géométrique décroissante avec : $E(X) = 49$ et $V(X) = 5880$.

$V(X)$ désigne la variance de la variable aléatoire réelle X.

EXERCICE 20

Une urne contient dix boules : une rouge, une blanche et huit noires. Le jeu consiste à tirer simultanément deux boules. On suppose l'équiprobabilité des tirages.

1) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2) Quelle est la probabilité de tirer :

a) la boule rouge et la boule blanche ?

b) la boule rouge et une boule noire ?

c) la boule blanche et une boule noire ?

d) deux boules noires ?

3) Si le joueur tire la boule rouge il gagne 15F ; s'il tire la boule blanche, il ne gagne rien et il ne perd rien ; enfin, il perd 2F par boule noire tirée.

On considère la variable aléatoire X qui à chaque tirage associe le gain du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) En déduire l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

c) Quelle conclusion peut-on en tirer ?

EXERCICE 21

Le gérant d'un magasin, qui a constaté que 3% des marchandises disparaissent, veut faire installer un système antivol. On lui propose un système qui détecte 85% des vols par déclenchement d'un signal sonore. Malheureusement ce signal se déclenche aussi à tort, sans qu'il y ait vol, dans 1% des cas.

On appelle :

- V l'événement : « un article est volé »
- S l'événement : « le signal sonore est déclenché ».

On note $\bar{A}$ l'événement contraire de A et $p(A/B)$ la probabilité de A sachant que B est réalisé.

1) Préciser les valeurs numériques de $P(V)$, $P(S/V)$ et $P(S/\bar{V})$.

2) Calculer les probabilités des événements « V et S » ainsi que « $\bar{V}$ et S ».

En déduire la probabilité de S.

3) Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas eu vol, sachant que le signal s'est déclenché

4) Calculer la probabilité pour qu'il y ait vol et qu'il ne soit pas détecté. En déduire le pourcentage des articles qui disparaissent après installation du système antivol.

EXERCICE 22

On invente le jeu suivant : pour chaque partie, on met dans un sac dix jetons indiscernables au toucher, numérotés 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ; le joueur en tire quatre, successivement sans les remettre dans le sac. Il obtient ainsi un nombre compris entre 123 et 9876, les jetons étant alignés dans l'ordre où ils ont été tirés.

1) Combien y-a-t-il de résultats possibles ?

2) Montrer que la probabilité d'obtenir un nombre de quatre chiffres est de 0,9.

3) À chaque partie, le joueur obtient les gains (ou les pertes) suivants :

- s'il obtient un résultat supérieur à 9000, il reçoit 50F ;
- s'il obtient un résultat compris entre 5000 et 9000, il reçoit 30F ;
- s'il obtient un nombre de quatre chiffres inférieur à 5000, il perd 20F
- s'il obtient un nombre de trois chiffres, il perd 30F.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque nombre obtenu associe le gain correspondant.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$

c) Soit m la mise initiale du joueur

Quelle doit être cette mise pour que le jeu soit équitable ?

EXERCICE 23

On considère quatre urnes notées U_1, U_2, U_3 U_4.

La première contient 3 boules vertes, 2 rouges et 6 blanches.

La deuxième contient 8 boules vertes, 2 rouges et 6 blanches.

La troisième contient 3 boules vertes, 7 rouges et 6 blanches.

La quatrième contient 3 boules vertes, 2 rouges et 11 blanches.

Une épreuve consiste à tirer au hasard une première boule dans l'urne U_1 puis une deuxième boule dans l'une des trois autres urnes selon la règle suivante :

- si la première boule tirée est verte le second tirage a lieu dans l'urne U_2
- si la première boule tirée est blanche, le second tirage a lieu dans l'urne U_4,
- si la première boule tirée est rouge, le second tirage a lieu dans l'urne U_3

1) On appelle V_1 (resp R_1, B_1) l'événement « la boule tirée lors du premier tirage est verte (resp rouge, blanche) ».

Calculer la probabilité $p(V_1)$, puis $p(R_1)$, $p(B_1)$.

2) a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- « la deuxième boule est verte sachant que la première est verte ».
- « la deuxième boule est verte sachant que la première est rouge ».
- « la deuxième boule est verte sachant que la première est blanche ».

b) On appelle V_2 l'événement : « la boule tirée lors du second tirage est verte ».

En utilisant la formule des probabilités totales, calculer la probabilité de l'événement V_2 et vérifier qu'elle est égale à $p(V_1)$.

EXERCICE 24

Un test médical sert à dépister une certaine maladie dans une population donnée. D'une façon générale le résultat du test est positif sur les individus atteints de la maladie et négatif pour les individus non atteints.

Pour limiter d'aventuelles erreurs, on effectue un contrôle en reprenant le même test dans les conditions garantissant l'indépendance des résultats.

Pour tout individu X, on désigne par:

T, l'événement: « le test est positif pour X »

$\overline{T}$, l'événement: « le test est négatif pour X »

M, l'événement: « X est atteint de la maladie »

$\overline{M}$, l'evenement: « X n'est pas atteint de la maladie ».

T_2 l'événement: « le test est négatif pour X les deux fois ».

Après un certain nombre d'études statistiques on n'est conduit à admettre les probabilités suivantes:

$P_M(T) = 0,95$ $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,97$ $P(M)=0,1$

1) Observation des résultats avant le contrôle.

a) Calculer les probabilités des événements suivants:

A: "X est atteint de la maladie et le test est positif pour X".

B: "X n'est pas atteint de la maladie et le test est positif pour X".

En déduire la probabilité de T puis celle de $\overline{T}$.

b) Calculer la probabilité pour que X soit atteint de la maladie sachant que le test négatif pour X.

2) Observation des resultats après le contrôle.

a) Quelle est la probabilité de T_2?

Quelle est la probabilité que le test soit négatif les deux fois, sachant que X est atteint de la maladie.

b) Deduire de a) la probabilité pour que le X soit atteint de la maladie et que le test soit négatif les deux fois; puis la probabilité pour que X soit atteint de la maladie sachant que le test est négatif les deux fois.

3) Le contrôle est-il nécessaire?

EXERCICE 25

Une urne contient 6 boules: une boule numérotée -1, deux boules numérotées 0, deux boules numerotées 1 et une boule numerotée 2. On tire au hasard une boule de l'urne, on note son numéro, on la remet dans l'urne et on tire à nouveau une deuxième boule de l'urne et on note son numéro.

On désigne par a le numéro de la première boule tirée et par b le numéro de la deuxième boule tirée. On detient ainsi un couple $(a;b)$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'application $f_{(a,b)}$ qui au complexe z associe le complexe z' tel que $z'=(a-ib)z+b+ai$ où a et b sont les numéros des boules tirées.

1) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants:

A: « $f_{(a,b)}$ est l'écriture complexe d'une translation »

B: « $f_{(a,b)}$ est l'écriture complexe d'une rotation pure »

C: « $f_{(a,b)}$ est l'écriture complexe d'une homothétie pur »

D: « $f_{(a,b)}$ est l'écriture complexe d'une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ »

2) Répondre à la question 1) en supposant que la première boule tirée n'est pas remise dans l'urne.

EXERCICE 26

1) Un sac contient dix-huit boules de trois couleurs différentes : des rouges, des vertes et des blanches. La répartition exacte des boules entre ces trois couleurs n'est pas connue mais on sait que les vertes sont deux fois plus nombreuses que les rouges.

On extrait au hasard trois boules du sac et on appelle A l'événement " les trois boules tirées sont de couleurs différentes", n est le nombre de boules rouges contenues dans le sac.

Calculer la probabilité de l'événement A en fonction de n.

2) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par:

$f(x) = -x^3+6x^2$

a) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

b) Tracer la courbe (C) représentant f dans un repère orthonormal.

c) Calculer l'intégrale $\int_0^6 f(x)\,dx$.

Interpréter graphiquement sa valeur.

3) À l'aide de la question 2a) trouver pour quelle valeur de n la probabilité de l'événement est maximale.

Calculer cette probabilité.

4) Préciser alors la composition exacte du sac.

EXERCICE 27

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 10. On tire simultanément 4 boules de l'urne.

1) Combien y a-t-il de tirages possibles?

2) Soit X la variable aléatoire : "nombre de boules portant un numéro impair parmi les 4 boules tirées". Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et son écart-type.

3) On considère la variable aléatoire Y égale au plus grand numéro obtenu en effectuant le tirage simultané de 4 boules.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) En déduire que:

$$C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 + C_7^3 + C_8^3 + C_9^3 = C_{10}^4$$

EXERCICE 28

On place dans une urne, une boule jaune, p boules blanches et q boules noires. On tire une boule de l'urne, les tirages sont équiprobables.

Soit les événements :

A: « la boule obtenue est jaune »

B: « la boule obtenue est blanche »

C: « la boule obtenue est noire ».

Calculer la probabilité p(A), p(B) et p(C) de chacun des événements A, B et C en fonction de p et q.

b) Déterminer p et q sachant que $P(A) = \frac{1}{21}$ et que P(A), P(B) et P(C) sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

2) On pose $p = 4$ et $q = 16$.

Deux garçons G_1 et G_2 utilisent cette urne pour réaliser le jeu suivant : deux boules sont tirées de l'urne simultanément. G_2 reçoit 120 francs de G_1 si les deux boules sont de même couleur et G_1 reçoit 180 francs de G_2 si les deux boules sont de couleurs différentes.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de G_1

a-/ Déterminer la loi de probabilité de X.

b-/ Calculer l'espérance mathématique de X. Le garçon G_1 a-t-il intérêt à jouer?

EXERCICE 29

Une personne P regarde la télé en zappant entre trois chaînes A, B et C. Elle passe 50% de son temps à regarder A, 20% à regarder B et 30%

à regarder C. On suppose que statistiquement

1% des programmes de A lui plaisent
5% des programmes de B lui plaisent
7% des programmes de C lui plaisent.

1/ P regarde la télé quand le téléphone sonne. Quelle est la probabilité que le programme qu'elle regardait lui ait plu ?

2/ P s'ennuie devant un programme qui ne lui plaît pas. Quelle est la probabilité que ce programme passe sur la chaine B ?

EXERCICE 30

Dans une population donnée, 56% des familles occupent une maison individuelle. Parmi elles, 78% en sont propriétaires. Parmi les familles n'occupant pas une maison individuelle, 24% sont propriétaires de leur logement.

1/ On choisit une famille au hasard dans la population considérée. Quelles sont :

a/ la probabilité pour qu'elle soit propriétaire de son logement ?

b/ la probabilité qu'elle habite une maison individuelle sachant qu'elle n'en est pas propriétaire ?

2/ On interroge 5 familles au hasard dans la population considérée et on suppose que les choix successifs sont indépendants. X désigne le nombre de familles propriétaires de leur logement.

a/ Quelle est la loi de probabilité de X ?

b/ Calculer son espérance mathématique, sa variance et son écart-type

EXERCICE 31

Trois dés cubiques sont placés dans une urne. Deux de ces dés sont normaux : leurs faces sont numérotées de 1 à 6. Le troisième est spécial : trois de ses faces sont numérotées 6, les trois autres sont numérotées 1.

On tire de l'urne, simultanément et au hasard, deux dés parmi les trois et on les lance.

On note A l'événement :
" les deux dés tirés sont normaux"

On note B l'événement :
"Les deux faces supérieures sont numérotées 6"

1/ a/ Définir l'événement contraire de A, qu'on notera $\overline{A}$

b/ Calculer les probabilités de A et de $\overline{A}$.

2/ a/ Calculer P(B/A), probabilité de B sachant que A est réalisé, puis $P(B \cap A)$.

b/ Calculer P(B).

3/ Calculer P(A/B), probabilité de A sachant que B est réalisé

EXERCICE 32

Considérons un jeu dont la règle serait:

Avant chaque partie, le joueur choisit sa mise m et la dépose sur la table de jeu. Un dispositif (genre pile ou face) détermine si le joueur va gagner ou perdre avec les probabilités $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$

Si le joueur perd, il ne recupère pas sa mise (il a donc perdu m)

Si le joueur gagne, il récupère 2 fois sa mise (il a donc gagné m).

Monsieur artin Gabe explique qu'il a un truc infaillible pour gag

« Voici ma méthode pour gagner par exemple 100F

1ère partie : mise 100F.

Si je gagne, je m'arrête (car j'ai gagné 100F) Sinon je joue une...

2e partie : mise 200F.

Si je gagne, je m'arrête (car j'ai gagné 200 - 100 = 100). Sinon je joue une

3e partie : mise 400F

Si je gagne, je m'arrête (car j'ai gagné 400 - (200+100) = 100F) Sinon je joue 1e

4e partie : mise 800F.

Etc.

Et fatalement ajoute-t-il, je finirai bien par gagner mes 100F ».

je possède 12.700F et j'ai l'intention de joue selon la méthode de M. Gabe. Calculer la probabilité pour que je finisse ruiné

EXERCICE 33

Dix couples de rongeurs: 4 couples de souris et 6 couples de mulots, cohabitent dans une ferme lorsque le fermier se procure un chat pour les exterminer.

1/ Quelle est la probabilité que les deux premiers rongeurs qui seront mangés par le chat:

a/ appartiennent à un même couple

b/ soient une souris et un mulot?

(On supposera que toutes les paires de rongeurs possibles ont la même chance d'être les deux premières victimes du chat).

2°/ Quelle est la probabilité pour que les quatre premier rongeurs croqués par le chat :

a°/ appartiennent à deux couples différents exactement ?

b°/ appartiennent à 3 couples différents exactements ?

EXERCICE 34

Au cours d'une kermesse on organise une loterie de 100 billets ; 15 d'entre eux gagnent chacun 50F et 5 autres gagnent chacun 100F.

1°/ Une personne achète un billet, calculer la probabilité des événements

A : elle ne gagne rien

B : elle gagne 50F

C : elle gagne 100F.

2°/ Une deuxième personne achète deux billets. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain que peut réaliser la personne.

a°/ Déterminer la loi de probabilité de X.

b°/ Quelle est la probabilité à cette personne de gagner au plus 100F ?

c°/ Déterminer la fonction de répartition de X et construire sa courbe représentative.

3°/ Une troisième personne achète trois billets. Quelle probabilité a cette personne de gagner 150F ?

EXERCICE 35

Une cible circulaire est divisée en 10 régions par 10 cercles concentriques de rayons 1, 2, 3, ... 10cm. Aucune balle ne pouvant sortir de la cible, on appelle événement l'impact d'une balle dans le disque central ou dans une des couronnes circulaires ainsi tracées. On suppose que la probabilité pour que la balle atteigne une région de la cible est proportionnelle à l'aire de cette région. On rappelle que l'aire d'un disque de rayon R est πR^2.

1°/ Quelles sont les probabilités respectives d'atteindre le disque central et chacune des couronnes.

2°/ On donne 10 points si la balle

atteint le disque central, neuf si elle atteint la première couronne de rayons 1 et 2cm, 8 si elle atteint la second couronne etc. et un point pour la dernière couronne. Calculer la probabilité d'un score supérieur ou égal à 8.

EXERCICE 36

1/ Un sac A contient n jetons numérotés de 1 à n ($2 \leq n \leq 9$); on retire l'un après l'autre deux jetons du sac sans remise.

Exprimer en fonction de n la probabilité p_1 que les chiffres portés par ces deux jetons forment dans l'ordre de leur tirage, un nombre fixé à l'avance et composé de deux chiffres distincts pris parmi les chiffres de 1 à n.

2/ Un autre sac B contient 2m jetons numérotés de 1 à 2m; on extrait deux jetons du sac.

Exprimer en fonction de m la probabilité p_2 que la somme des points portés par ces deux jetons soit égale à $2m+1$.

3/ On considère le jeu suivant : un joueur tire deux jetons du sac A; si les jetons tirés satisfont à la condition prévue au 1/, le joueur doit remettre son gain en cause à pile ou face.

a/ s'il sort face, il est définitivement gagnant. Exprimer en fonction de n la probabilité p_1' que la partie se termine ainsi.

b/ S'il sort pile, il doit extraire deux jetons du sac B, et il gagne alors la partie si les jetons tirés remplissent la condition prévue au 2/.

Exprimer, en fonction de n et de m la probabilité p_2' que le joueur gagne la partie à l'issue de ce dernier tirage.

c/ Sachant que le jeu cesse quel que soit le résultat de ce dernier tirage, exprimer en fonction de n et de m, la probabilité p, pour le joueur, de gagner la partie d'une manière ou d'une autre.

4/ Le jeu a été prévu pour que $p = \frac{1}{58}$. Exprimer m en fonction de n.

5/ Sachant que m et n remplissent les conditions $2 \leq m$, $2 \leq n \leq 9$, établir à l'aide de l'expression obtenue au 4/ la double inégalité :

$$29 < n(n-1) < 39$$

En déduire la seule valeur possible (entière) de n, puis celle de m (entière)

EXERCICE 37

1/ Etudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{a(x-b)}{x(x-1)}$ où a et b sont deux réels donnés, $a>0$, $b>1$.

2/ Un sac contient 5 jetons rouges, 10 jetons blancs et 7 jetons verts. Un joueur tire au hasard un jeton du sac ; si le jeton est rouge, il gagne ; si le jeton est blanc, il perd ; si le jeton est vert, il doit procéder à un second tirage, le jeton tiré précédemment n'étant pas remis dans le sac. Si au cours de ce second tirage, le jeton tiré est rouge, le joueur gagne ; si le jeton est blanc ou vert, le joueur perd et le jeu cesse.

Calculer les probabilités suivantes :

a/ probabilité p_1 de gagner la partie au premier tirage ;

b/ probabilité p_2 de gagner la partie à l'issue du second tirage.

c/ probabilité de gagner la partie

3/ Le sac contient en tout x jetons dont 5 rouges et 10 blancs, les autres étant verts. Les modalités du jeu sont les mêmes que précédemment.

Si le joueur gagne au premier tirage il reçoit 5F ; s'il perd à ce tirage, il verse 3F ; s'il gagne au second tirage il reçoit 4F ; s'il tire un jeton blanc au second tirage, il verse 1F ; enfin si le jeton tiré dans ce second essai est vert, le joueur ne reçoit ni ne verse rien.

On désigne par X le nombre (positif, négatif ou nul) exprimant en francs les gains ou les pertes éventuels du joueur.

a/ Déterminer la loi de probabilité de X.

b/ Calculer en fonction de x, l'espérance mathématique E(X) de X.

c/ En déduire, en utilisant la quest° 1/ les valeurs de x pour lesquelles le jeu est favorable, équitable ou défavorable au joueur.

EXERCICE 38

p est un nombre réel ($0<p<1$) Un coureur s'entraîne sur un parcours comportant n haies numérotées de 1 à n. Pour chaque nombre entier naturel i tel que $1 \leq i \leq n$, la probabilité de renverser la $i^{ème}$ haie est p. Le coureur poursuit son parcours jusqu'à la $n^{ième}$ haie quel que soit le nombre de haies renversées. On désigne par X la variable aléatoire définie comme suit :

$X = n+1$, si aucune haie n'est renversée;

$X = k$, si k est le numéro de la première haie renversée.

./ Calculer en fonction de p et k la probabilité $P(X=k)$.

Préciser $P(X=1)$ et $P(X=n+1)$. Vérifier que l'on a: $P(X=1)+P(X=2)+\dots+P(X=n+1)=1$

./ Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de n et p.

EXERCICE 39

On considère un schéma de BERNOULLI, répétition de n épreuves identiques, indépendantes chacune d'elles, donnant lieu à deux issues S de probabilité p et $E=\bar{S}$ de probabilité q avec $p+q=1$

Soit X la variable aléatoire : « nombre de succès S » et P_k la probabilité $P_k = P(X=k)$. On a alors :

$P_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ pour $k=0,1,2,\dots n$.

On pose $f(x)=(px+q)^n$ (x réel)

1·] Montrer que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} P_k x^k.$$

2·] En déduire deux expressions de $f'(x)$ et l'égalité $f'(1) = E(X)$.

Retrouver alors la valeur de $E(X)$

EXERCICE 40

On considère une épreuve aléatoire débouchant sur deux éventualités, succès et échec, de probabilités respectives 0,8 et 0,2. On désigne par X la variable aléatoire qui associe à n épreuves aléatoires indépendantes le nombre k de succès. On désigne par Y la variable aléatoire qui associe à n épreuves aléatoires indépendantes le nombre k d'échecs.

1·] Quelles sont les lois suivies par X et Y ? Donner en fonction de n, l'expression de : $P(X=k)$; $P(Y=k)$; $P(X=0)$; $P(X\geq 1)$ $P(Y=n)$.

2·] On suppose $n=10$. Calculer : $P(X=0)$; $P(X=2)$; $P(X\leq 2)$; $P(X>2)$; $E(X)$ et $\sigma(X)$.

CORRIGES DES EXERCICES

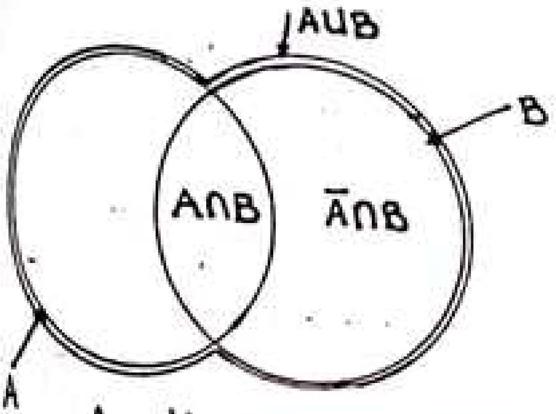
EXERCICE 1

L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème suivant : si p est une probabilité sur Ω, A et B deux événements de Ω, alors :

$$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$$

On admet que si A et B sont incompatibles alors $p(A\cup B) = p(A) + p(B)$ (1).

1) Démontr que les événements A et $\bar{A}\cap B$ sont incompatibles et que $A\cup(\bar{A}\cup B) = A\cup B$



A partir du diagramme ci-dessus on a :

- $A\cap(\bar{A}\cap B) = \emptyset$ d'où A et $\bar{A}\cap B$ sont incompatibles.
- $A\cup(\bar{A}\cap B) = A\cup B$.

2) Appliquons le théorème (1) aux événements A et $\bar{A}\cap B$.

A et $\bar{A}\cap B$ étant incompatibles on a :

$P[A\cup(\bar{A}\cap B)] = P(A) + p(\bar{A}\cap B)$

or $A\cup(\bar{A}\cap B) = A\cup B$

$\Leftrightarrow P(A\cup B) = p(A) + p(\bar{A}\cap B)$

$$P(A\cup B) = p(A) + p(\bar{A}\cap B) \quad (a)$$

3) Démontrons que les événements $A\cap B$ et $\bar{A}\cap B$ sont incompatibles et que $(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B) = B$

En observant le diagramme précédent on a :

- $(A\cap B)\cap(\bar{A}\cap B) = \emptyset$ d'où $A\cap B$ et $\bar{A}\cap B$ sont incompatibles
- $(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B) = B$.

4) Appliquons le théorème (1) aux événements $A\cap B$ et $\bar{A}\cap B$.

On sait que $\begin{cases} B = (A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B) \\ \text{et} \\ (A\cap B)\cap(\bar{A}\cap B) = \emptyset \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad p(B) = p(A\cap B) + p(\bar{A}\cap B) \quad (b)$

5) Utilisons les résultats des questions précédentes pour conclure.

(a) et (b) $\Leftrightarrow \begin{cases} p(A\cup B) = p(A) + p(\bar{A}\cap B) \\ p(B) = p(A\cap B) + p(\bar{A}\cap B) \end{cases}$

$\Leftrightarrow p(A\cup B) - p(B) = p(A) - p(A\cap B)$

$\Leftrightarrow p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$

Conclusion

$$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$$

EXERCICE 2

Soit un univers des possibles Ω sur lequel on a défini une probabilité p. On considère deux événements A et B tels que :

$p(A\cup B) = \frac{5}{6}$, $p(A\cap B) = \frac{1}{4}$ et $p(A) = \frac{2}{3}$

1) Calculons $p(B)$, $p(\overline{A})$, $p(\overline{B})$ $p(\overline{A\cup B})$ et $p(\overline{A\cap B})$

On sait que : $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$

$\Leftrightarrow p(B) = p(A\cup B) + p(A\cap B) - p(A)$

$$\boxed{p(B) = p(A\cup B) + p(A\cap B) - p(A)}$$

$$p(B) = \frac{5}{6} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{5}{12}$$

$$\boxed{p(B) = \frac{5}{12}}$$

$$\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$$

$$p(\overline{A}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{p(\overline{A}) = \frac{1}{3}}$$

$$\boxed{p(\overline{B}) = 1 - p(B)}$$

$$p(\overline{B}) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\boxed{p(\overline{B}) = \frac{7}{12}}$$

$$\boxed{p(\overline{A\cup B}) = 1 - p(A\cup B)}$$

$$p(\overline{A\cup B}) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{p(\overline{A\cup B}) = \frac{1}{6}}$$

$$\boxed{p(\overline{A\cap B}) = 1 - p(A\cap B)}$$

$$p(\overline{A\cap B}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{p(\overline{A\cap B}) = \frac{3}{4}}$$

2) Calculons $p(\overline{A}\cup\overline{B})$ et $p(\overline{A}\cap\overline{B})$

$$\overline{A}\cup\overline{B} = \overline{A\cap B}$$

$$p(\overline{A}\cup\overline{B}) = p(\overline{A\cap B}) = \frac{3}{4}$$

$$p(\overline{A}\cup\overline{B}) = p(\overline{A}) + p(\overline{B}) - p(\overline{A}\cap\overline{B})$$

$$\Leftrightarrow p(\overline{A}\cap\overline{B}) = p(\overline{A}) + p(\overline{B}) - p(\overline{A}\cup\overline{B})$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{7}{12} - \frac{3}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{p(\overline{A}\cup\overline{B}) = \frac{3}{4}} \quad \boxed{p(\overline{A}\cap\overline{B}) = \frac{1}{6}}$$

EXERCICE 3

1) Calculons x.

On sait que $p(\Omega) = 1$

$\Leftrightarrow p(\{a\}) + p(\{b\}) + p(\{c\}) + p(\{d\}) + p(\{e\}) + p(\{f\}) + p(\{g\}) + p(\{h\}) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + x + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{4}{5} + x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$

$$\boxed{x = \frac{1}{5}}$$

2) On donne $A=\{a;c;e\}$

$B=\{b;c;d;e\}$

Calculons $p(A)$, $p(B)$, $p(A\cap B)$, $p(A\cup B)$

$p(A)=\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{8}=\frac{3}{16}$

$$\boxed{p(A)=\frac{3}{16}}$$

$p(B)=\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{67}{160}$

$$\boxed{p(B)=\frac{67}{160}}$$

$A\cap B=\{c;e\}$

$p(A\cap B)=\frac{1}{32}+\frac{1}{8}=\frac{5}{32}$

$$\boxed{p(A\cap B)=\frac{5}{32}}$$

$A\cup B=\{a;b;c;d;e\}$

$p(A\cup B)=\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{9}{20}$

$$\boxed{p(A\cup B)=\frac{9}{20}}$$

Remarque : On pouvait utiliser la formule : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

Calculons $p(\overline{A\cap B})$ et $p(\overline{A\cup B})$

$p(\overline{A\cap B})=1-p(A\cap B)=1-\frac{5}{32}=\frac{27}{32}$

$p(\overline{A\cup B})=1-p(A\cup B)=1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$.

$p(\overline{A\cap B})=\frac{27}{32}$	$p(\overline{A\cup B})=\frac{11}{20}$

EXERCICE 4

1) Calcul de probabilités :

$p(A)=\left(\frac{3}{7}\right)^2=\frac{9}{49}$

$p(B)=C_2^1\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}+\left(\frac{4}{7}\right)^2=\frac{40}{49}$

$p(B)=\frac{40}{49}$ ou $p(B)=1-p(A)$ car les évènements A et B sont contraires

$p(C)=\left(\frac{2}{7}\right)^2=\frac{4}{49}$

$p(D)=1-\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{24}{49}$

$p(E)=\frac{3}{7}\times\frac{1}{7}\times C_2^1+\frac{1}{7}\times\frac{2}{7}\times 2=\frac{10}{49}$

Soit B_1 et C_1 les evenements

B_1 : "le tirage comporte une boule bleue"

C_1 : "le tirage comporte une boule numérotée 3"

$p(B_1)=\frac{3\times4\times2}{49}=\frac{24}{49}$

$p(C_1)=\frac{2\times5\times2}{49}=\frac{20}{49}$

$p(B_1\cap C_1)=p(E)=\frac{10}{49}$

$F=B_1\cup C_1$

$p(F)=p(B_1)+p(C_1)-p(B_1\cap C_1)$

$=\frac{24}{49}+\frac{20}{49}-\frac{10}{49}=\frac{34}{49}$

$p(A)=\frac{9}{49}$	$p(B)=\frac{40}{49}$	$p(C)=\frac{4}{49}$
$p(D)=\frac{24}{49}$	$p(E)=\frac{10}{49}$	$p(F)=\frac{34}{49}$

2) Répondons aux questions en supposant que le tirage se fait sans remise

$p(A) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$.

$p(B) = 1 - p(A) = \frac{6}{7}$

$p(C) = \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{21}$

$p(D) = 1 - \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{11}{21}$

$p(E) = \frac{3}{7} \times \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{7} \times \frac{2}{6} \times 2 = \frac{5}{21}$

$p(B_1) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times 2 = \frac{4}{7}$

$p(C_1) = \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} \times 2 = \frac{10}{21}$

$p(F) = p(B_1) + p(C_1) - p(E)$
$= \frac{4}{7} + \frac{10}{21} - \frac{5}{21} = \frac{17}{21}$

$p(A) = \frac{1}{7}$	$p(B) = \frac{6}{7}$	$p(C) = \frac{1}{21}$
$p(D) = \frac{11}{21}$	$p(E) = \frac{5}{21}$	$p(F) = \frac{17}{21}$

EXERCICE 5

Un sac contient deux boules blanches portant respectivement les numéros 1 et 4 et quatre boules noires portant respectivement les numeros 2, 3, 5 et 7. On tire simultanément deux boules du sac.

Déterminons :

1) La probabilité P_1 pour que les deux boules tirées portent des numeros impairs

Il y a au total 6 boules dont 4 portent des numéros impairs.

$$P_1 = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$\boxed{P_1 = \frac{2}{5}}$$

2/ La probabilité P_2 pour que les 2 boules tirées soient de la même couleur :

Les deux boules peuvent être toutes les deux blanches ou noires.

$$P_2 = \frac{C_2^2 + C_4^2}{C_6^2} = \frac{7}{15}$$

$$\boxed{P_2 = \frac{7}{15}}$$

3/ La probabilité P_3 pour que les 2 boules tirées portent des numéros impairs et soient de la même couleur :

$$P_3 = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\boxed{P_3 = \frac{1}{5}}$$

4/ La probabilité P_4 pour que les 2 boules tirées portent des numeros impairs ou soient de la même couleur

$$P_4 = P_1 + P_2 - P_3 = \frac{2}{5} + \frac{7}{15} - \frac{1}{5} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{P_4 = \frac{2}{3}}$$

EXERCICE 6

Soit l'équation du second degré :

(E) : $x^2+px+q=0$. Les coefficients p et q sont l'un des entiers naturels 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Le coefficient p est déterminé par un premier jet d'un dé parfait dont les faces sont numerotées de 1 à 6 et ont toutes la même probabilité d'apparition. Le coefficient q est déterminé par un deuxième jet de ce même dé.

Déterminons les probabilités des événements suivants :

A : "(E) admet deux racines réelles distinctes"

B : "(E) admet deux racines réelles confondues"

C : "(E) admet deux racines complexes conjuguées"

$\Delta = p^2 - 4q$

q \ p	1	2	3	4	5	6
1	-3	0	5	12	21	32
2	-7	-4	1	8	17	28
3	-11	-8	-3	4	13	24
4	-15	-12	-7	0	9	20
5	-19	-16	-11	-4	5	16
6	-23	-20	-15	-8	1	12

Δ

(E) admet deux racines réelles distinctes ssi $\Delta > 0$ d'où :

$$\boxed{P(A) = \frac{17}{36}}$$

(E) admet deux racines réelles confondues ssi $\Delta = 0$ d'où $P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

$$\boxed{P(B) = \frac{1}{18}}$$

(E) admet deux racines complexes conjuguées ssi $\Delta < 0$ d'où $P(C) = \frac{17}{36}$

$$\boxed{P(C) = \frac{17}{36}}$$

EXERCICE 7

Un dé cubique a ses faces numérotées de 1 à 6. On sait qu'il est pipé de telle façon que les probabilités $P_1, P_2, \dots, P_6$ d'apparition des faces numérotées 1, 2, ..., 6 forment une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{18}$

1) Calcul des probabilités $P_1, P_2, \dots, P_6$

On sait que :

$P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{6}{2}(P_1+P_6) = 1$ or $P_6 = P_1 + 5r$

$\Leftrightarrow 3(2P_1+5r) = 1$

$\Leftrightarrow P_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - 5r\right)$

$P_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{5}{18}\right) = \frac{1}{36}$

$P_2 = P_1 + r = \frac{1}{36} + \frac{1}{18} = \frac{1}{12}$

$P_3 = P_1 + 2r = \frac{1}{36} + \frac{2}{18} = \frac{5}{36}$

$P_4 = P_1 + 3r = \frac{1}{36} + \frac{3}{...} = \frac{7}{36}$

$P_5 = P_1 + 4r = \frac{1}{36} + \frac{4}{18} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$P_6 = P_1 + 5r = \frac{1}{36} + \frac{5}{18} = \frac{11}{36}$

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessous :

i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

2/ Un joueur joue avec ce dé dans les conditions suivantes :

- il gagne 2F s'il fait apparaître une face portant un nombre pair
- il perd 3F s'il fait apparaître une face portant un nombre impair.

Calculons la probabilité de l'évènement :

A : " après trois lancers successifs, le joueur a gagné 1F "

La probabilité de gagner 2F au cours d'un lancer est $p = P_2 + P_4 + P_6$

$p = \frac{7}{12}$

La probabilité de perdre 3F au cours d'un lancer est $q = P_1 + P_3 + P_5$

$q = \frac{5}{12}$

Pour gagner 1F après trois lancers successifs il faut gagner 2 fois et perdre une fois. d'où

$P(A) = C_3^1 . p^2 \times q$

$= 3 \times \left(\frac{7}{12}\right)^2 \times \frac{5}{12}$

$\boxed{P(A) = \frac{245}{576}}$

EXERCICE 8

On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par P_i la probabilité d'apparition de la face numérotée i, lors d'un lancer du dé. Ces probabilités vérifient les 3 conditions suivantes :

- P_1, P_3 et P_5 sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $\frac{1}{8}$.
- P_2, P_4 et P_6 sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$
- $3P_1 = 2P_2$.

1/ Exprimons tous les P_i en fonction de P_1

$3P_1 = 2P_2 \Leftrightarrow P_2 = \frac{3}{2} P_1$

$P_3 = P_1 + \frac{1}{8}$

$P_4 = \frac{1}{2} P_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} P_1 = \frac{3}{4} P_1$

$P_5 = P_3 + \frac{1}{8} = P_1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = P_1 + \frac{1}{4}$

$P_6 = \frac{1}{2} P_4 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} P_1 = \frac{3}{8} P_1$

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessous

i	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{3}{2}P_1$	$P_1+\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}P_1$	$P_1+\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}P_1$

Déduisons-en la valeur de P_1 et celles des autres

On sait que : $P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6 = 1$

$\Leftrightarrow P_1 + \frac{3}{2}P_1 + P_1 + \frac{1}{8} + \frac{3}{4}P_1 + P_1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{8}P_1 = 1$

$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{8}\right)P_1 + \frac{3}{8} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{45}{8} P_1 = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

$\Leftrightarrow P_1 = \frac{1}{9}$

$P_2 = \frac{3}{2} P_1 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{6}$

$P_3 = P_1 + \frac{1}{8} = \frac{1}{9} + \frac{1}{8} = \frac{17}{72}$

$P_4 = \frac{3}{4} P_1 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{12}$

$P_5 = P_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36}$

$P_6 = \frac{3}{8} P_1 = \frac{3}{8} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{24}$

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessous.

i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{17}{72}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{24}$

2/ Probabilité P_A d'obtenir un nombre pair lors d'un lancer du dé :

$P_A = P_2 + P_4 + P_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{7}{24}$

$$\boxed{P_A = \frac{7}{24}}$$

3/ On lance le dé 6 fois de suite

a/ Probabilité P_B d'obtenir exactement deux fois le nombre 6.

$P_B = C_6^2 \, P_6^2 \cdot (1 - P_6)^4$

$= 15 \times \left(\frac{1}{24}\right)^2 \times \left(\frac{23}{24}\right)^4$

$= \frac{1\,399.205}{63.700.992} = 0,022$

$$\boxed{P_B = 0,022}$$

b/ Probabilité P_C d'obtenir au moins une fois le nombre 6.

$P_C = 1 - (1 - P_6)^6 = 1 - \left(\frac{23}{24}\right)^6$

$P_C = \frac{24^6 - 23^6}{24^6} = \frac{43.067087}{191.102976} = 0,225$

$$\boxed{P_C = 0,225}$$

EXERCICE 9

Une urne contient 42 boules indiscernables au toucher dont :

n boules blanches, n boules et les autres sont vertes ($n \in \mathbb{N}$).

On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne

1/ Déterminons l'ensemble A des valeurs que peut prendre le nombre n.

Etant donné qu'il y a au moins une boule de chaque couleur dans l'urne on a: $\begin{cases} n>0 \\ 42-2n>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n>0 \\ \text{et} \\ n<21 \end{cases}$

$A=\{1;2;3;\dots;20\}$

2/ On suppose $n=8$ dans cette question c'est-à-dire que l'urne contient 8 boules blanches, 8 boules rouges et 26 boules vertes.

a/ Probabilité P_1 de tirer une boule de chaque couleur:

$$P_1=\frac{C_8^1\times C_8^1\times C_{26}^1}{C_{42}^3}=\frac{8\times 8\times 26}{11480}=0,144$$

$$\boxed{P_1=0,144}$$

b/ Probabilité P_2 de tirer 3 boules vertes

$$P_2=\frac{C_{26}^3}{C_{42}^3}=\frac{2600}{11480}=\quad 0,226$$

$$\boxed{P_2=0,226}$$

3/ On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur $[1;20]$ par: $f(x)=-2x^3+42x^2$

Etudions les variations de f.

$f(1)=40 \qquad f(20)=800$

f est une fonction polynôme; par conséquent f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[1;20]$ car $[1;20]\subset\mathbb{R}$.

$\forall x\in[1;20],\ f'(x)=-6x^2+84x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -6x(x-14)=0$

$\Leftrightarrow x=14$ car $0\notin[1;20]$

$f(14)=2744.$

x	1		14		20
$f'(x)$		+	0	−	

Sens de variation de f.

f est croissante sur $[1;14]$ et décroissante sur $[14;20]$.

Tableau de variation de f.

x	1		14		20
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	40	↗	2744	↘	800

4/ Dans cette question on suppose que n appartient à A. On note $P(n)$ la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur.

a/ Déterminons $P(n)$

$$P(n)=\frac{C_n^1\times C_n^1\times C_{42-2n}^1}{C_{42}^3}$$

$$P(n)=\frac{-2n^3+42n^2}{11.480}$$

$$\boxed{P(n) = \frac{-2n^3+42n^2}{11480} = \frac{f(n)}{11480}}$$

b/ En utilisant les résultats obtenus dans 3/, déterminons la valeur n_0 de n pour que $P(n)$ soit maximum.

D'après ce qui précède, $P(n)$ est maximum ssi $n = n_0 = 14$.

$$\boxed{n_0 = 14}$$

Calculons $P(n_0)$ à 10^{-3} près par défaut

$$P(n_0) = \frac{f(n_0)}{11480} = \frac{f(14)}{11480}$$

$$= \frac{2744}{11480} = 0,239.$$

$$\boxed{P(n_0) = 0,239}$$

EXERCICE 10

Une usine fabrique des pièces de grande quantité. Chacune des pièces réunit deux éléments fabriqués par deux machines différentes fonctionnant de manière indépendante. À la sortie de l'usine, on choisit une pièce au hasard. On appelle A l'événement : « le premier élément est défectueux » et B : « le second élément est défectueux »

$P(A) = 0,03$ et $P(B) = 0,05$.

A et B sont indépendants.

Déterminons les probabilités des événements suivants :

- C : « la pièce choisie éléments défectueux ».

$$P(C) = P(A) \times P(B) = 0,03 \times 0,05$$
$$= 0,0015$$

$$\boxed{P(C) = 0,0015}$$

- D : « la pièce choisie n'a aucun élément défectueux ».

$$P(D) = P(\bar{A}) . P(\bar{B})$$
$$= (1 - P(A))(1 - P(B))$$
$$= 0,97 \times 0,95 = 0,9215$$

$$\boxed{P(D) = 0,921}$$

- E : « la pièce choisie a le premier élément défectueux mais pas le second »

$$P(E) = P(A) . P(\bar{B})$$
$$= 0,03 \times 0,95 = 0,0285$$

$$\boxed{P(E) = 0,0285}$$

- F : « la pièce choisie a au moins un élément défectueux ».

• $P(F) = 1 - P(D) = 1 - 0,9215$
$= 0,0785$

ou encore

$$P(F) = P(A).P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B) + P(A).P(B)$$
$$= 0,03 \times 0,95 + 0,97 \times 0,05 + 0,03 \times 0,05$$
$$= 0,0785$$

$$\boxed{P(F) = 0{,}0785}$$

G : « la pièce choisie a un élément défectueux et un seul »

$$P(G) = P(A).P(\bar{B}) + P(\bar{A}).P(B)$$
$$= 0{,}03 \times 0{,}95 + 0{,}97 \times 0{,}05$$

$$\boxed{P(G) = 0{,}077}$$

EXERCICE 11

Quatre amis décident de jouer avec un jeu de 32 cartes auxquelles ils attribuent des points :

- 4 points pour chacun des 4 « as »
- 3 points pour chacun des 4 « rois »
- 2 points pour chacune des 4 « dame »
- 1 point pour chacun des 4 « valet »
- aucun point pour chacune des 16 autres cartes.

Une partie consiste à tirer simultanément 3 cartes du jeu et à relever le total des points qui leur sont attribués. On dit que le joueur « . pas » lorsque le total relevé est nul. On dit que le joueur « marque » dans tous les autres cas.
On admet que lors de chaque partie tous les tirages de trois cartes sont équiprobables.

1°/ Un joueur fait une partie.
On considère les événements suivants

A : le joueur « ne marque pas ».

B : le joueur « marque »

C : le joueur marque avec un total de 9 points.

Calculons la probabilité de chacun des événements A, B et C

$$P(A) = \frac{C_{16}^3}{C_{32}^3} = \frac{560}{4960} = \frac{7}{62}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{7}{62}}$$

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{62} = \frac{55}{62}$$

$$\boxed{P(B) = \frac{55}{62}}$$

Les triplets qui permettent d'avoir 9 points sont :
(4;4;1) (4;3;2) d'où

$$P(C) = \frac{C_4^2 \times C_4^1 + C_4^1 \times C_4^1 \times C_4^1}{C_{32}^3}$$
$$= \frac{6 \times 4 + 4 \times 4 \times 4}{4960} = \frac{88}{4960} = \frac{11}{620}$$

$$\boxed{P(C) = \frac{11}{620}}$$

2°/ Les quatre amis jouent successivement chacun une partie.

On admet que les résultats des 4 parties sont indépendants.

Calculons la probabilité P_1 pour que l'un au moins des quatre amis « marque »

$$P_1 = 1 - [P(A)]^4$$
$$= 1 - \left(\frac{7}{62}\right)^4 = 0,9998$$

$$\boxed{P_1 = 0,9998}$$

EXERCICE 12

Une urne contient 10 boules : 6 boules rouges numérotées de 1 à 6 et 4 boules bleues numérotées de 1 à 4. On tire simultanément 3 boules de l'urne. On suppose que tous les tirages de 3 boules sont équiprobables. On considère les événements :

A : « les trois boules sont rouges ».

B : « l'une au moins des 3 boules tirées est bleue ».

C : « Chacune des 3 boules porte un numéro supérieur ou égal à 3 ».

1) Calculons la probabilité de chacun des événements A, B et C.

$$P(A) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{6}}$$

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\boxed{P(B) = \frac{5}{6}}$$

$$P(C) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{P(C) = \frac{1}{6}}$$

2/ Calculons la probabilité de l'événement $A \cap C$.

$$P(A \cap C) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

$$\boxed{P(A \cap C) = \frac{1}{30}}$$

Déduisons-en celle de l'événement $A \cup C$.

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{30} = \frac{3}{10}$$

$$\boxed{P(A \cup C) = \frac{3}{10}}$$

3/ Sachant que l'événement A est réalisé, déterminons la probabilité que C le soit

$$P(C/A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{1}{30} \times 6 = \frac{1}{5}$$

$$\boxed{P(C/A) = \frac{1}{5}}$$

$P(C/A) \neq P(C)$ les événements A et C ne sont donc pas indépendants

EXERCICE 13

Une entreprise est composée de 510 employés. Chacun doit prendre soit trois, soit quatre semaines de congés intégralement pendant l'un des mois de juin, juillet ou août. On sait que:

- parmi les employés ayant opté pour juin, un tiers a trois semaines de congés
- parmi les employés ayant opté pour juillet, un cinquième a 4 semaines de congés
- parmi les employés ayant opté pour août, un cinquième a 4 semaines de congés

1/ Probabilité qu'un employé choisi au hasard dans l'entreprise bénéficie de 3 semaines de congés en juin

Soit A, B, C les événements :

A: " l'ouvrier a opté pour juin"

B: " l'ouvrier a optés pour juillet"

C: " l'ouvrier a opté pour août"

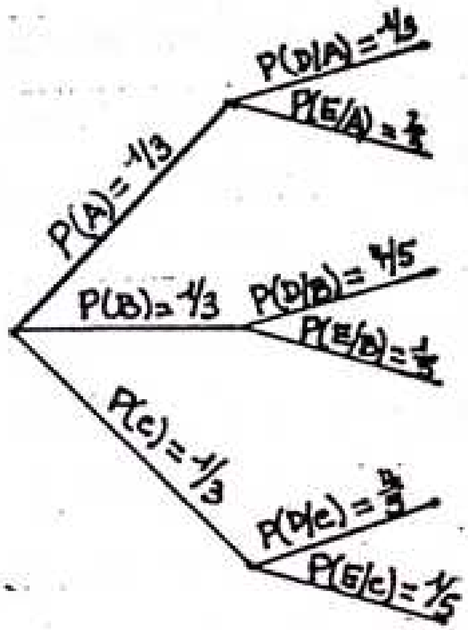
On a: $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$.

Soit D et E les événements :

D: " l'ouvrier bénéficie de trois semaines de congés"

E: " l'ouvrier bénéficie de quatre semaines de congés"

Aidons-nous de l'arbre suivant :



la probabilité que nous cherchons est celle de l'événement $A \cap D$.

On sait que : $P(D/A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)}$ d'où

$$\boxed{P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D/A)}$$

$$P(A \cap D) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\boxed{P(A \cap D) = 1/9}$$

2) Déterminons $P(B \cap D)$ et $P(C \cap D)$

$$P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D/B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$$

$$P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D/C) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$$

$P(B \cap D) = \frac{4}{15}$	$P(C \cap D) = \frac{4}{15}$

3/ Déterminons la probabilité de l'événement D.

En appliquant le théorème des probabilités totales on a :

$$\boxed{P(D) = P(A\cap D) + P(B\cap D) + P(C\cap D)}$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{5+12+12}{45} = \frac{29}{45}$$

$$\boxed{P(D) = \frac{29}{45}}$$

EXERCICE 14

Le seuil maximum d'alcoolémie toléré pour conduire une automobile est 0,5g/l. Un laboratoire a mis au point un éthylotest. Théoriquement, celui-ci devrait être positif lorsqu'une personne testée a une alcoolémie strictement supérieure au seuil toléré. Mais il n'est pas parfait

- lorsqu'une personne a un taux d'alcoolémie strictement supérieur au seuil toléré, l'éthylotest est positif 96 fois sur 100
- lorsqu'une personne a un taux d'alcoolémie inférieur ou égal au seuil toléré, l'éthylotest est positif 3 fois sur 100.

On suppose que ces résultats portent sur un échantillon suffisamment important pour qu'ils soient constants.

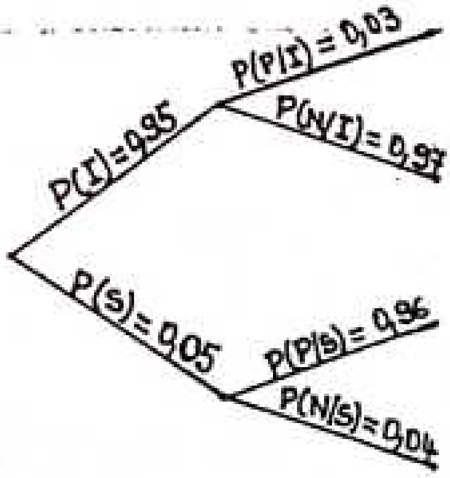
Dans une région donnée, 95% des conducteurs d'automobile ont un taux d'alcoolémie inférieur ou égal au seuil toléré. On soumet, au hasard un automobiliste de cette région à l'éthylotest. On définit les événements :

- P : « l'éthylotest est positif » ;
- N : « l'éthylotest est négatif » ;
- S : « le conducteur a un taux d'alcoolémie strictement supérieur au seuil toléré ».

I : « le conducteur a un taux d'alcoolémie inférieur ou égal au seuil toléré ».

1) Déterminons $P(I)$, $P(P/S)$, $P(P/I)$

Procédons par arbre.



On a :

$P(I) = 0,95$	$P(P/S) = 0,96$

$$\boxed{P(P/I) = 0,03}$$

2/ Probabilité pour que l'automobiliste ait un taux d'alcoolémie strictement superieur au seuil toléré.

$P(S) = 1 - P(I) = 1 - 0,95 = 0,05$

$$\boxed{P(S) = 0,05}$$

3/ Probabilité pour qu'il ait un taux d'alcoolémie strictement supérieur au seuil toléré et que l'éthylotest soit positif.

On sait que : $P(P/S) = \frac{P(P\cap S)}{P(S)}$ d'où

$$\boxed{P(P\cap S) = P(S).P(P/S)}$$

$P(P\cap S) = 0,05 \times 0,96 = 0,048$

$$\boxed{P(P\cap S) = 0,048}$$

4/ a) Calculons $P(P\cap I)$, puis $P(P)$

$P(P/I) = \frac{P(P\cap I)}{P(I)}$ d'où

$$\boxed{P(P\cap I) = P(I).P(P/I)}$$

$P(P\cap I) = 0,95 \times 0,03 = 0,0285$

$$\boxed{P(P\cap I) = 0,0285}$$

$P = (P\cap S) \cup (P\cap I)$ et $(P\cap S)\cap(P\cap I) = \phi$

$$\boxed{P(P) = P(P\cap S) + P(P\cap I)}$$

$P(P) = 0,048 + 0,0285 = 0,0765$

$$\boxed{P(P) = 0,0765}$$

b/ Probabilité pour qu'il ait un taux d'alcoolémie strictement supérieur au seuil toléré, sachant que l'éthylotest est positif.

$$\boxed{P(S/P) = \frac{P(S\cap P)}{P(P)}}$$

$P(S/P) = \frac{0,048}{0,0765} = 0,627.$

$$\boxed{P(S/P) = 0,627}$$

5) Probabilité pour que l'éthylotest donne un résultat erroné.

Soit P_1 cette probabilité on a :

$P_1 = P(I\cap P) + P(S\cap N)$

$$\boxed{P_1 = P(I).P(P/I) + P(S).P(N/S)}$$

$P_1 = 0,95 \times 0,03 + 0,05 \times 0,04 = 0,0305$

$$\boxed{P_1 = 0,0305}$$

EXERCICE 15

Dans un jeu, il s'agit de trouver la bonne réponse à une question posée. Les questions sont classées en trois catégories : sport, cinéma, musique. Dans chaque catégorie, il y a le même nombre de questions. Les trois caté-

-ries sont donc équiprobables.

Alain, fervent supporteur de ce jeu, est conscient qu'il a :

- 5 chances sur 6 de donner la bonne réponse sachant qu'il est interrogé en sport ;
- 2 chances sur 3 de donner la bonne réponse sachant qu'il interrogé en cinéma ;
- 1 chance sur 9 de donner la bonne réponse sachant qu'il est interrogé en musique.

1/ Alain participe à ce jeu et tire au hasard une question. Déterminons la probabilité par que :

a/ La question soit dans la catégorie sport et qu'il donne la bonne réponse

Soit les événements :

S : " La question est dans la catégorie sport "

C : " La question est dans la catégorie cinéma "

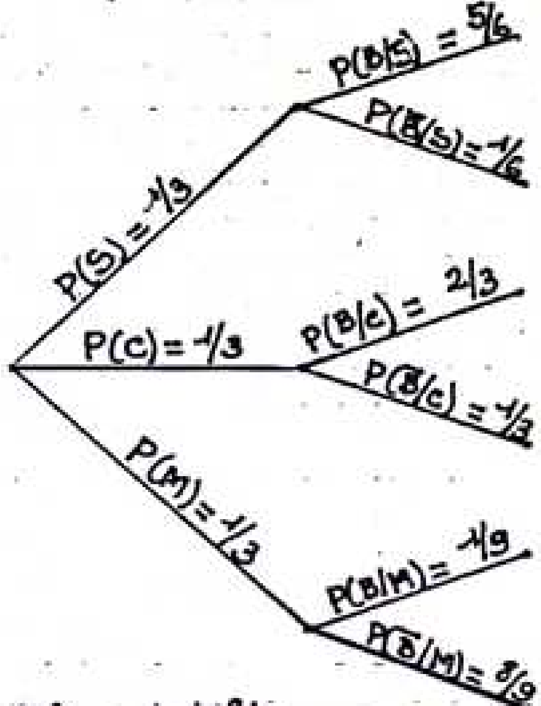
M : " La question est dans la catégorie musique. "

B : " La réponse d'Alain est bonne. "

$\bar{B}$: " La réponse d'Alain est fausse.

On a : $P(S) = P(C) = P(M) = \frac{1}{3}$

Procédons par arbre



Soit P_1 la probabilité pour que la question dans la catégorie sport et que Alain donne la bonne réponse.

$P_1 = P(B \cap S) = P(S) . P(B/S)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$

$$\boxed{P_1 = \frac{5}{18}}$$

b/ <u>sa réponse soit bonne à la question posée.</u>

Soit P_2 cette probabilité on a :

$P_2 = P(B) = P(B \cap S) + P(B \cap C) + P(B \cap M)$

$P_2 = P(S) . P(B/S) + P(C) . P(B/C) + P(M) . P(B/M)$

$P_2 = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{15+12+2}{54}$

$$\boxed{P_2 = \frac{29}{54}}$$

2/ Pour participer au jeu, Alain doit payer 10F de droit d'inscription.
Il recevra 10F s'il est interrogé en sport et que sa réponse est bonne;
Il recevra 20F s'il est interrogé en cinéma et que sa réponse est bonne;
Il recevra 50F s'il est interrogé en musique et que sa réponse est bonne
Il recevra 0F si la réponse qu'il donne est fausse.

Soit X la variable aléatoire égale au gain d'Alain.

a/ Déterminons les valeurs prises par X :

Soit Ω l'univers associé à X on a
$X(\Omega) = \{-10;\ 0;\ 10;\ 40\}$

b/ Déterminons la loi de probabilité de X.

$P(X=-10) = 1 - P_2 = \frac{25}{54}$

$P(X=0) = P(B\cap S) = P_1 = \frac{5}{18}$

$P(X=10) = P(B\cap C)$
$= P(C).\ P(B/C)$
$= \frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

$P(X=40) = P(B\cap M)$
$= P(M).\ P(B/M)$

$P(X=40) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{9} = \frac{1}{27}$

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessous

x_i	-10	0	10	40
$P(X=x_i)$	$\frac{25}{54}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

c/ Calculons l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

$E(X) = \sum x_i P(X=x_i)$

$= -10\times\frac{25}{54} + 0\times\frac{5}{18} + 10\times\frac{2}{9} + 40\times\frac{1}{27}$

$$\boxed{E(X) = -\frac{25}{27}}$$

$E(X) < 0$, le jeu est donc défavorable au joueur. Alain n'a donc aucun intérêt à joue

EXERCICE 16

Une étude a été faite sur la fréquentation du cinéma à Lomé pendant un mois. Cette étude révèle que 25% des habitants sont dans la tranche d'ages 0-14 ans (les «enfants») et 20% des habitants ont dans la tranche d'ages de 15-25 (les «jeunes»). Les autres habitants seront dits «adultes»

On choisit un habitant au hasard, on note E, J, A les événements suivants :

- E : « l'habitant choisi est dans la tranche 0–14 ans » ;
- J : « l'habitant choisi est dans la tranche 15–25 ans » ;
- A : « l'habitant choisi est un adulte ».

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de séances auxquelles l'habitant choisi a assisté pendant un mois. L'étude menée permet d'établir les tableaux de probabilité conditionnelle suivants :

x_i	0	1	2	3
$P((X=x_i)/E)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$

x_i	0	1	2	3	4
$P((X=x_i)/J)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

x_i	0	1	2	3
$P((X=x_i)/A)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

1/ Déterminons la probabilité pour que l'habitant choisi :

a/ soit Adulte

$P(A) = 1 - (0{,}25 + 0{,}2) = 0{,}55.$

$$\boxed{P(A) = 0{,}55}$$

b/ soit jeune et aille deux fois par mois au cinéma.

$P((X=2)\cap J) = P(J).P((X=2)/J)$

$= 0{,}2 \times \frac{3}{10} = \frac{3}{50}$

$$\boxed{P((X=2)\cap J) = \frac{3}{50}}$$

2/ Calculons la probabilité pour que l'habitant choisi aille deux fois par mois au cinéma.

$P(X=2) = P((X=2)\cap E) + P((X=2)\cap J) + P((X=2)\cap A)$

$P((X=2)\cap E) = P(E).P((X=2)/E)$

$= 0{,}25 \times \frac{2}{10} = \frac{1}{20} = 0{,}05$

$P((X=2)\cap J) = 0{,}06 = \frac{3}{50}$

$P((X=2)\cap A) = P(A).P((X=2)/A)$

$= 0{,}55 \times \frac{2}{10} = 0{,}11$

$P(X=2) = 0{,}05 + 0{,}06 + 0{,}11 = 0{,}22$

$$\boxed{P(X=2) = 0{,}22}$$

3/ Complétons le tableau pour obtenir la loi de probabilité de X.

$P(X=0) = 0{,}25 \times \frac{3}{10} + 0{,}2 \times \frac{1}{10} + 0{,}55 \times \frac{4}{10}$

$P(X=0) = 0{,}315$

$P(X=1) = 0{,}25 \times \frac{3}{10} + 0{,}2 \times \frac{2}{10} + 0{,}55 \times \frac{3}{10}$

$P(X=1) = 0{,}28$

$P(X=2) = 0,22$

$P(X=3) = 0,25 \times \frac{2}{10} + 0,2 \times \frac{3}{10} + 0,55 \times \frac{1}{10}$

$P(X=3) = 0,165$

$P(X=4) = 0,2 \times \frac{1}{10} = 0,02$

$P(X=4) = 0,02$

Complétons alors le tableau.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,315	0,28	0,22	0,165	0,02

4/ Calculons E(X), l'espérance mathématique de X.

$$E(X) = \sum x_i P(X=x_i)$$
$$= 0 \times 0,315 + 1 \times 0,28 + 2 \times 0,22 + 3 \times 0,165 + 4 \times 0,02$$

$$\boxed{E(X) = 1,295}$$

EXERCICE 17

À la cafétéria, dans la vitrine pâtisserie :

- 60% des gateaux sont à base de crème
- parmi ceux qui sont à base de crème 30% ont aussi des fruits;
- parmi ceux qui n'ont pas de crème 80% ont des fruits

On prend un gateau au hasard

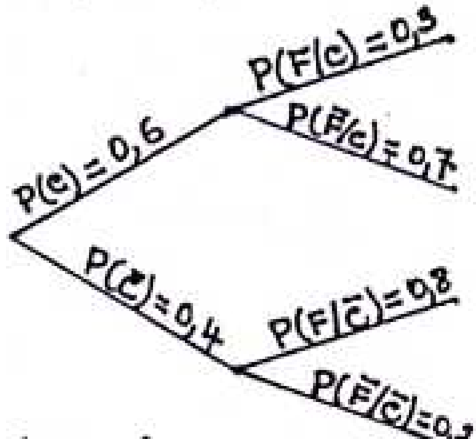
1/ Calculons la probabilité d'avoir un gateau à base de crème et comportant des fruits.

Soit les événements :

C: " Le gateau est à base de crème"

F: " Le gateau comporte des fruits".

Procédons par l'arbre



Soit P_1 la probabilité cherchée

$$P_1 = P(C \cap F) = P(C).P(F/C)$$
$$= 0,6 \times 0,3 = 0,18.$$

$$\boxed{P_1 = 0,18}$$

b/ Calculons la probabilité P_2 d'avoir un gateau avec fruits mais sans crème :

$$P_2 = (F \cap \bar{C}) = P(\bar{C}).P(F/\bar{C})$$
$$= 0,4 \times 0,8 = 0,32$$

$$\boxed{P_2 = 0,32.}$$

c/ Déduisons-en la probabilité P_3 d'avoir un gâteau avec des fruits.

$$P_3 = P(F) = P(F \cap C) + P(F \cap \bar{C})$$
$$= P_1 + P_2 = 0,18 + 0,32 = 0,5$$

$$\boxed{P_3 = 0,5}$$

2) a-/ Le gateau pris au hasard comporte des fruits. Déterminons la probabilité P_4 qu'il soit à base de crème

$$P_4 = P(C/F) = \frac{P(C \cap F)}{P(F)} = \frac{P_1}{P_3} = \frac{0,18}{0,5}$$

$$\boxed{P_4 = 0,36.}$$

b-/ Le gateau pris au hasard ne comporte pas de fruit. Déterminons la probabilité P_5 qu'il soit à base de crème

$$P_5 = P(C/\bar{F}) = \frac{P(C \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{P(C).P(\bar{F}/C)}{1 - P(F)}$$

$$= \frac{P(C).P(\bar{F}/C)}{1 - P_3}$$

$$= \frac{0,6 \times 0,7}{1 - 0,5} = 0,84$$

$$\boxed{P_5 = 0,84}$$

EXERCICE 18

On dispose de deux dés cubiques. Toutes les faces ont la même probabilité d'apparaître. Le premier cube a cinq faces rouges et une face verte. Le deuxième cube a une face rouge, deux faces vertes et trois bleues.

1) On jette les deux dés. On regarde la couleur des faces supérieures de chaque dé. On note les événements

A : " les deux faces sont rouges "

B : " les deux faces ont la même couleur "

C : " l'une face est rouge et l'autre verte "

D : " les deux faces sont de couleurs différentes "

Calculons P(A), P(B), P(C) et P(D).

$$P(A) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}.$$

$$\boxed{P(A) = \frac{5}{36}}$$

$$P(B) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{7}{36}$$

$$\boxed{P(B) = \frac{7}{36}}$$

$$P(C) = \frac{5}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$$

$$\boxed{P(C) = \frac{11}{36}}$$

$$P(D) = 1 - P(B) = 1 - \frac{7}{36} = \frac{29}{36}$$

$$\boxed{P(D) = \frac{29}{36}}$$

2-/ À chaque jet des deux dés est associé un jeu qui permet :

- un gain de 5F si les deux faces sont rouges
- un gain de 2F si les deux faces sont vertes
- une perte si les deux faces sont de

couleurs différentes. On note a, le montant en francs de cette perte.

On définit ainsi une variable aléatoire X qui à chaque jet des deux dés, associe le gain, ou la perte ainsi réalisé.

a/ <u>Déterminons la loi de probabilité de X.</u>

Soit Ω l'univers associé à X. on a:

$X(\Omega) = \{-a; 2; 5\}$

$P(X=-a) = P(D) = \frac{29}{36}$

$P(X=2) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{18}$

$P(X=5) = P(A) = \frac{5}{36}$

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessous.

x_i	$-a$	2	5
$P(X=x_i)$	$\frac{29}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{36}$

b/ <u>Déterminons la valeur de a pour que le jeu soit equitable.</u>

Calculons l'espérance mathématique E(x) de X.

$E(x) = \sum x_i P(X=x_i)$

$= -a \cdot \frac{29}{36} + 2 \times \frac{1}{18} + 5 \times \frac{5}{36}$

$E(x) = \frac{29}{36}(1-a)$

Le jeu est équitable ssi $E(X) = 0$

$\Leftrightarrow a = 1$.

Le jeu est équitable si $a = 1$

EXERCICE 19

Un sac contient 3 jetons marqués respectivement a, b, c (a, b, c étant des réels positifs). On tire au hasard un jeton, on le remet dans le sac et on tire à nouveau un jeton; les tirages sont équiprobables.

On définit la variable aléatoire X qui à chaque couple de tirages ainsi décrit associe le produit des nombres marqués sur les deux jetons tirés.

1/ a) <u>Montrons que l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X est égale à $\frac{1}{9}(a+b+c)^2$</u>

– Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire X

Soit Ω l'univers associé à X on a:

$X(\Omega) = \{a^2; b^2; c^2, ab; ac; bc\}$

$P(X=a^2) = \frac{1}{9}$; $P(X=b^2) = \frac{1}{9}$; $P(X=c^2) = \frac{1}{9}$

$P(X=ab) = P(X=ac) = P(X=bc) = \frac{2}{9}$

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessous.

x_i	a^2	b^2	c^2	ab	ac	bc
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

$$E(X) = \sum x_i P(X=x_i)$$
$$= \frac{1}{9}\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\right)$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{9}(a+b+c)^2}$$

b/ <u>Calculons l'espérance mathématique du carré de X, $E(X^2)$.</u>

$$E(X^2) = \sum x_i^2 \cdot P(X=x_i)$$
$$= \frac{1}{9}\left(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2\right)$$

$$\boxed{E(X^2) = \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)^2}$$

2/ a/ <u>Montrons que si a, b, c sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors : $(a+b+c)(a-b+c) = a^2+b^2+c^2$</u>

$$(a+b+c)(a-b+c) = (a+c)^2 - b^2$$
$$= a^2+2ac+c^2-b^2$$

or si a, b, c sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors $ac = b^2$. On a donc : $(a+b+c)(a-b+c) = a^2+2b^2+c^2-b^2$
$$= a^2+b^2+c^2$$

Si a, b, c sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors :

$$\boxed{(a+b+c)(a-b+c) = a^2+b^2+c^2}$$

b/ <u>Déterminons le triplet (a, b, c) pour que a, b, c forment dans cet ordre une suite géométrique décroissante avec $E(X) = 49$ et $V(X) = 5880$</u>

$$E(X) = 49 \Leftrightarrow \frac{1}{9}(a+b+c)^2 = 49$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 = 9 \times 49$$
$$\Leftrightarrow a+b+c = 3\times 7 = 21$$ car a, b, c sont des réels positifs.

$$a+b+c = 21 \quad (a)$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= E(X^2) - 49^2$$
$$\Leftrightarrow E(X^2) - 49^2 = 5880$$
$$\Leftrightarrow E(X^2) = 5880 + 49^2 = 8281$$
$$\Leftrightarrow E(X^2) = 8281$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)^2 = 8281$$
$$\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)^2 = 9\times 8281$$
$$\Leftrightarrow [(a+b+c)(a-b+c)]^2 = 74529$$
$$\Leftrightarrow (a-b+c)^2 = \frac{74529}{441} = 169$$

$$(a-b+c)^2 = 169$$

La suite étant décroissante et a, b, c réels positifs on a :

$$a > b > c > 0 \Rightarrow \begin{cases} a-b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow a-b+c > 0$$

$(a-b+c)^2 = 169 \Rightarrow a-b+c = 13$

$a-b+c$ 13 (b)

(a) et (b) $\Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 21 \\ a-b+c = 13 \end{cases}$ or $ac = b^2$

$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 21 \\ a-b+c = 13 \\ ac = b^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 8 \\ 2a+2c = 34 \\ ac = b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a+c = 17 \\ ac = 16 \end{cases}$

a et c sont solutions de l'équation

$x^2 - 17x + 16 = 0$.

$\Delta = 17^2 - 4\times16 = 225 = 15^2$

$x_1 = \frac{17-15}{2} = 1$; $x_2 = \frac{17+15}{2} = 16$

or $a > c$ donc : $a = 16$ et $c = 1$

Finalement :

$a = 16 \quad b = 4 \quad c = 1$

Le triplet cherché est donc :

$\boxed{(16; 4; 1)}$

EXERCICE 20

Une urne contient dix boules : une rouge, une blanche et huit noires. Le jeu consiste à tirer simultanément deux boules. On suppose l'équiprobabilité des tirages.

1°/ Nombre N de tirages possibles

$N = C_{10}^2 = \frac{10\times9}{2} = 45$.

$\boxed{N = 45}$.

2°/ a°/ Probabilité P_1 de tirer la boule rouge et la blanche.

$P_1 = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$

$\boxed{P_1 = \frac{1}{45}}$

b°/ Probabilité P_2 de tirer la boule rouge et un boule noire.

$P_2 = \frac{C_1^1 \times C_8^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{45}$

$\boxed{P_2 = \frac{8}{45}}$

c°/ Probabilité P_3 de tirer la boule blanche et une boule noire

$P_3 = \frac{C_1^1 \times C_8^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{45}$

$\boxed{P_3 = \frac{8}{45}}$

d°/ Probabilité P_4 de tirer deux boules noires

$P_4 = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}$

$\boxed{P_4 = \frac{28}{45}}$

3°/ Si le joueur tire boule rouge il gagne 15F ; s'il tire la boule blanche il ne gagne rien et il ne perd rien, enfin, il perd 2F par boule noire tirée.

On considère la variable aléatoire X qui à chaque tirage associe le gain du joueur.

a°/ Déterminons la loi de probabilité de X

Soit Ω l'univers associé à X on a:

$X(\Omega) = \{-4 ; -2 ; 13 ; 15\}$

$P(X=-4) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}$

$P(X=-2) = \frac{C_1^1 \times C_8^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{45}$

$P(X=13) = \frac{C_1^1 \cdot C_8^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{45}$

$P(X=15) = \frac{C_1^1 \cdot C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessous.

x_i	-4	-2	13	15
$P(X=x_i)$	$\frac{28}{45}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{45}$

b°/ Déduisons-en l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

$E(X) = \sum x_i . P(X=x_i)$

$= -4 . \frac{28}{45} - 2 . \frac{8}{45} + 13 \times \frac{8}{45} + 15 . \frac{1}{45}$

$\boxed{E(X) = -\frac{1}{5}}$

c°/ Conclusion

$E(X) < 0$ on conclut que le jeu est défavorable au joueur.

EXERCICE 21

Le gérant d'un magasin, qui a constaté que 3% des marchandises disparaissent, veut faire installer un système antivol. On lui propose un système qui détecte 85% des vols par déclenchement d'un signal sonore. Malheureusement ce signal se déclenche aussi à tort sans qu'il y ait vol, dans 1% des cas..

On appelle :

V: l'événement: « un article est volé »

S: l'événement : « le signal sonore est déclenché ».

On note $\bar{A}$ l'événement contraire de A et $P(A/B)$ la probabilité de A sachant que B est réalisé.

1°/ Précisons les valeurs numériques de $P(V)$, $P(S/V)$ et $P(S/\bar{V})$

$P(V) = 0{,}03$
$P(S/V) = 0{,}85$
$P(S/\bar{V}) = 0{,}01$

2/ Calculons les probabilités des événements « V et S » ainsi que « $\bar{V}$ et S »

$$\boxed{P(V\cap S) = P(V).P(S/V)}$$

$$= 0{,}03\times 0{,}85 = 0{,}0255$$

$$\boxed{P(V\cap S) = 0{,}0255}$$

$$\boxed{P(\bar{V}\cap S) = P(\bar{V}).P(S/\bar{V})}$$

$$= (1-P(V)).P(S/\bar{V})$$

$$= (1-0{,}03).0{,}01 = 0{,}0097$$

$$\boxed{P(\bar{V}\cap S) = 0{,}0097}$$

Déduisons-en la probabilité de S.

$S=(V\cap S)\cup(\bar{V}\cap S)$ et $(V\cap S)\cap(\bar{V}\cap S)=\emptyset$

$$\boxed{P(S) = P(V\cap S) + P(\bar{V}\cap S)}$$

$$= 0{,}0255+0{,}0097=0{,}0352$$

$$\boxed{P(S) = 0{,}0352}$$

3/ Calculons la probabilité qu'il n'y ait pas vol, sachant que le signal s'est déclenché.

$$P(\bar{V}/S) = \frac{P(\bar{V}\cap S)}{P(S)}$$

$$P(\bar{V}/S) = \frac{0{,}0097}{0{,}0352} = 0{,}2755$$

$$\boxed{P(\bar{V}/S) = 0{,}2755}$$

4/ Calculons la probabilité pour qu'il y ait vol et qu'il ne soit pas détecté.

$$P(V\cap\bar{S}) = P(V).P(\bar{S}/V)$$

$$P(V\cap\bar{S}) = P(V).[1-P(S/V)]$$

$$P(V\cap\bar{S}) = 0{,}03.(1-0{,}85)$$

$$= 0{,}0045$$

$$\boxed{P(V\cap\bar{S}) = 0{,}0045}$$

Déduction :

Le pourcentage des articles qui disparaissent après installation du système antivol est de : 0,45%.

EXERCICE 22

On invente le jeu suivant : pour chaque partie, on met dans un sac dix jetons indiscernables au toucher numérotés 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Le joueur en tire quatre, successivement sans les remettre dans le sac. Il obtient ainsi un nombre compris entre 123 et 9876, les jetons étant alignés dans l'ordre où ils ont été tirés.

1/ Nombre de résultats possibles

$$N = A_{10}^{4} = 10\times 9\times 8\times 7 = 5040$$

$$\boxed{N = 5040}$$

2/ Montrons que la probabilité d'obtenir un nombre de 4 chiffres est de 0,9

Soit P_1 la probabilité d'obtenir un nombre de 4 chiffres on a :

$P_1 = 1 - P'_1$ où P'_1 est la probabilité d'obtenir un nombre de 3 chiffres c'est-à-dire la probabilité de tirer le chiffre 0 au premier tirage.

$$P'_1 = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$P_1 = 1 - 0,1 = 0,9.$$

$$\boxed{P_1 = 0,9}$$

Remarque : On pouvait aller directement. Pour obtenir un nombre de 4 chiffres il suffit que le premier chiffre soit tiré parmi les 9 différents de 0 d'où $P_1 = \frac{9}{10} = 0,9$.

3/ À chaque partie le joueur obtient les gains (ou les pertes) suivants :

- s'il obtient un résultat supérieur à 9000, il reçoit 50F ;
- s'il obtient un résultat compris entre 5000 et 9000, il reçoit 30F ;
- s'il obtient un nombre de 4 chiffres inférieur à 5000, il perd 20F.
- s'il obtient un nombre de trois chiffres il perd 30F.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque nombre obtenu associe le gain correspondant.

a/ Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Soit Ω l'univers associé à X on a :

$X(\Omega) = \{-30; -20; 30; 50\}$

$P(X=-30) = \frac{1}{10}$; $P(X=30) = \frac{4}{10}$

$P(X=-20) = \frac{4}{10}$; $P(X=50) = \frac{1}{10}$

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessous :

x_i	-30	-20	30	50
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

b/ Calculons l'espérance mathématique $E(X)$.

$$E(X) = \sum x_i P(X=x_i)$$

$$= \frac{-30\times1 + (-20\times4) + 30\times4 + 50\times1}{10}$$

$$\boxed{E(X) = 6}$$

c/ Soit m la mise initiale du joueur

Valeur de m pour que le jeu soit équitable :

Pour que le jeu soit équitable il suffit que la mise soit égale à $E(X)$

$$\boxed{m = 6F}$$

EXERCICE 23

On considère quatre urnes notées : U_1, U_2, U_3, U_4.

- La 1ère contient 3 boules vertes, 2 rouges et 6 blanches
- La 2e contient 8 boules vertes, 2 rouges et 6 blanches.
- La 3e contient 3 boules vertes, 7 rouges et 6 blanches.
- La 4e contient 3 boules vertes, 2 rouges et 11 blanches.

Une épreuve consiste à tirer au hasard une première boule dans U_1 puis une deuxième dans l'une des 3 autres urnes selon la règle suivante :

- si la 1ère boule tirée est verte, le second tirage a lieu dans U_2, si elle est blanche, le second tirage a lieu dans U_4, si elle est rouge, le second tirage à lieu dans U_3.

1/ On appelle V_1 (resp R_1, B_1) l'événement : « la boule tirée lors du premier tirage est verte (resp rouge, blanche) ».

Calculons $P(V_1)$, $P(R_1)$, $P(B_1)$

$\boxed{P(V_1) = \frac{3}{11}}$ $\boxed{P(R_1) = \frac{2}{11}}$

$\boxed{P(B_1) = \frac{6}{11}}$

2/ a/ Calculons la probabilité pour que :

- « la deuxième boule est verte sachant que la première est verte ».

Soit P_1 cette probabilité. On a :

$$P_1 = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \qquad \boxed{P_1 = \frac{1}{2}}$$

- « la deuxième boule est verte sachant que la première est rouge ».

Soit P_2 cette probabilité ; P_2 est la probabilité de tirer une boule verte dans U_3. d'où $P_2 = \frac{3}{16}$

$$\boxed{P_2 = \frac{3}{16}}$$

- « la deuxième boule est verte sachant que la première est blanche »

Soit P_3 cette probabilité ; P_3 est la probabilité de tirer une boule verte dans U_4.

$$\boxed{P_3 = \frac{3}{16}}$$

b/ Soit V_2 l'événement :

« la boule tirée lors du second tirage est verte ».

Calculons $P(V_2)$ et vérifions que $P(V_2) = P(V_1)$

$$P(V_2) = P(V_1).P_1 + P(R_1).P_2 + P(B_1).P_3$$

$$= \frac{3}{11}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{11}\times\frac{3}{16} + \frac{6}{11}\cdot\frac{3}{16} = \frac{48}{11\times 16} = \frac{3}{11}$$

$$\boxed{P(V_2) = \frac{3}{11} = P(V_1)}$$

EXERCICE 24

Un test médical sert à dépister une certaine maladie dans une population donnée. D'une façon générale le résultat du test est positif sur les individus atteints de la maladie et négative pour les individus non atteints. Pour limiter d'éventuelles erreurs, on effectue un contrôle en reprenant le même test dans les conditions garantissant l'indépendance des resultats.

Pour tout individu X, on désigne par:

T l'événement : « le test est positif pour X »

$\overline{T}$ l'événement : « le test est négatif pour X »

M l'événement : « X est atteint de la maladie »

$\overline{M}$ l'evenement : « X n'est pas atteint de la maladie »

T_2 l'événement : « le test est négatif pour X les deux fois ».

Après un certain nombre d'etudes statistiques on n'est conduit à admettre les probabilités suivantes :

$P_M(T) = 0,95$; $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,97$;

$P(M) = 0,1$

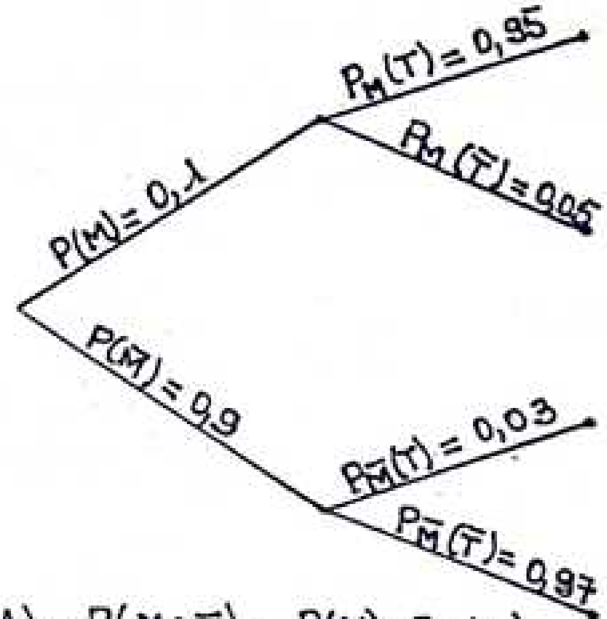
1°/ Observation des résultats avant le contrôle.

a) Calculons les probabilités des événements suivants :

A : " X est atteint de la maladie et le test est positif pour X "

B : " X n'est pas atteint de la maladie et le test est positif pour X "

Construisons l'arbre



$P(A) = P(M \cap T) = P(M) \cdot P_M(T)$

$$\boxed{P(A) = P(M) \cdot P_M(T)}$$

$P(A) = 0,1 \times 0,95 = 0,095.$

$$\boxed{P(A) = 0,095.}$$

$P(B) = P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \cdot P_{\overline{M}}(T)$

$$\boxed{P(B) = P(\overline{M}) \cdot P_{\overline{M}}(T)}$$

$P(B) = 0,9 \times 0,03 = 0,027$

$$\boxed{P(B) = 0,027}$$

Déduisons-en la probabilité de T puis celle de $\overline{T}$.

$T = (T \cap M) \cup (T \cap \overline{M})$, $(T \cap M) \cap (T \cap \overline{M}) = \emptyset$

$T = A \cup B$ avec $A \cap B = \emptyset$

$$\boxed{P(T) = P(A) + P(B)}$$

$$P(T) = 0{,}095 + 0{,}027 = 0{,}122$$

$$\boxed{P(T) = 0{,}122.}$$

$$\boxed{P(\overline{T}) = 1 - P(T)}$$

$$P(\overline{T}) = 1 - 0{,}122 = 0{,}878.$$

$$\boxed{P(\overline{T}) = 0{,}878}$$

b·/ <u>Calculons la probabilité pour que X soit atteint de la maladie sachant que le test est négatif pour X</u>

$$P_{\overline{T}}(M) = \frac{P(M \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{P(M) \cdot P_M(\overline{T})}{P(\overline{T})}$$

$$\boxed{P_{\overline{T}}(M) = \frac{P(M) \cdot P_M(\overline{T})}{P(\overline{T})}}$$

$$P_{\overline{T}}(M) = \frac{0{,}1 \times 0{,}05}{0{,}878} = 0{,}0057$$

$$\boxed{P_{\overline{T}}(M) = 0{,}0057}$$

2·/ Observation des résultats après le contrôle.

a·/ <u>Probabilité de $\overline{T_2}$</u> :

$$\boxed{P(\overline{T_2}) = [P(\overline{T})]^2}$$

$$P(\overline{T_2}) = 0{,}878^2 = 0{,}77$$

$$\boxed{P(\overline{T_2}) = 0{,}7708}$$

Probabilité que le test soit négatif les deux fois, sachant que X est atteint de la maladie.

$$P_M(\overline{T_2}) = [P_M(\overline{T})]^2 = (0{,}05)^2 = 0{,}0025$$

$$\boxed{P_M(\overline{T_2}) = 0{,}0025}$$

b·/ <u>Déduisons de a·/ la probabilité pour que X soit atteint de la maladie et que le test soit négatif les deux fois.</u>

$$P_M(\overline{T_2}) = \frac{P(M \cap \overline{T_2})}{P(M)}$$

$$\boxed{P(M \cap \overline{T_2}) = P(M) \cdot P_M(\overline{T_2})}$$

$$P(M \cap \overline{T_2}) = 0{,}1 \times 0{,}0025 = 0{,}00025$$

$$\boxed{P(M \cap \overline{T_2}) = 0{,}00025}$$

<u>Calculons la probabilité pour que X soit atteint de la maladie sachant que le test est négatif les deux fois</u>

$$P_{\overline{T_2}}(M) = \frac{P(M \cap \overline{T_2})}{P(\overline{T_2})} = \frac{0{,}00025}{0{,}7708} = 0{,}000324$$

$$\boxed{P_{\overline{T_2}}(M) = 0{,}000324}$$

3·/ <u>Nécessité du contrôle</u>

$P_{\overline{T_2}}(M) < P_{\overline{T}}(M)$. La chance qu'un malade ait un test négatif après le contrôle est très faible qu'avant. Le contrôle est bien nécessaire

EXERCICE 25

Une urne contient 6 boules : une boule numérotée -1, deux boules numerotées 0, deux boules numérotées 1 et une boule numerotée 2. On tire au hasard une boule de l'urne, on note son numero, on la remet dans l'urne et on tire à nouveau une deuxième boule de l'urne et on note son numéro. On désigne par a le numero de la première boule tirée et par b le numero de la deuxième boule tirée. On obtient ainsi un couple $(a;b)$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'application $f_{a,b}$ qui au complexe z associe le complexe z' tel que : $z' = (a-ib)z + b + ai$ où a et b sont les numeros des boules tirées

1°/ Déterminons la probabilité de l'événement :

A : « $f_{a,b}$ est l'écriture complexe d'une translation ».

$f_{a,b}$ est l'écriture complexe d'une translation ssi $a - ib = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

$$P(A) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{9}}$$

B : « $f_{a,b}$ est l'écriture complexe d'une rotation pure ».

$f_{a,b}$ est l'écriture complexe d'une rotation pure ssi

$$\begin{cases} |a - ib| = 1 \\ \text{et} \\ b \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 1 \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, b = -1 \\ \text{ou} \\ a = 0 \; b = 1 \end{cases}$$

$$P(B) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{P(B) = \frac{1}{6}}$$

C : « $f_{a,b}$ est l'écriture complexe d'une homothétie pure ».

$f_{a,b}$ est l'écriture complexe d'une homothétie pure ssi $\begin{cases} b = 0 \\ a = 2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$

$$P(C) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{18}$$

$$\boxed{P(C) = \frac{1}{18}}$$

D : « $f_{a,b}$ est l'écriture complexe d'une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ ».

$f_{a,b}$ est l'écriture complexe d'une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ ssi

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

$$P(D) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{9}{36}$$

$$\boxed{P(D) = \frac{1}{4}}$$

2/ Calculons la probabilité des événements A, B, C et D en supposant que la première boule tirée n'est pas remise dans l'urne.

$$P(A) = \frac{2}{6}\times\frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{2}{15}}$$

$$P(B) = \frac{2}{6}\times\frac{1}{5} + \frac{2}{6}\times\frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\boxed{P(B) = \frac{1}{5}}$$

$$P(C) = \frac{1}{6}\times\frac{2}{5} = \frac{1}{15}$$

$$\boxed{P(C) = \frac{1}{5}}$$

$$P(D) = \frac{1}{6}\times\frac{2}{5} + \frac{2}{6}\times\frac{1}{5} + \frac{2}{6}\times\frac{1}{5}$$

ici il est impossible d'avoir $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$

$$\boxed{P(D) = \frac{1}{5}}$$

EXERCICE 26

1/ Un sac contient 18 boules de trois couleurs différentes : des rouges, des vertes et des blanches. La répartition exacte des boules entre ces trois couleurs n'est pas connue mais on sait que les vertes sont deux fois plus nombreuses que les rouges. On extrait au hasard trois boules du sac et on appelle A l'événement " les trois boules sont de couleurs différentes." n est le nombre de boules rouges contenues dans le sac.

Calculons P(A) en fonction de n.

S'il y a n boules rouges dans le sac alors il y a 2n boules vertes et 18 − 3n boules blanches.

$$P(A) = \frac{C_n^1 \times C_{2n}^1 \times C_{18-3n}^1}{C_{18}^3}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{-n^3+6n^2}{136}}$$

2/ On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = -x^3+6x^2$

a/ Etudions les variations de f

$f(0) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

f est une fonction polynôme donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$; or $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ f est donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = -3x^2+12x = 3x(-x+4)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x(-x+4) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4$$

$$f(4) = -64 + 96 = 32$$

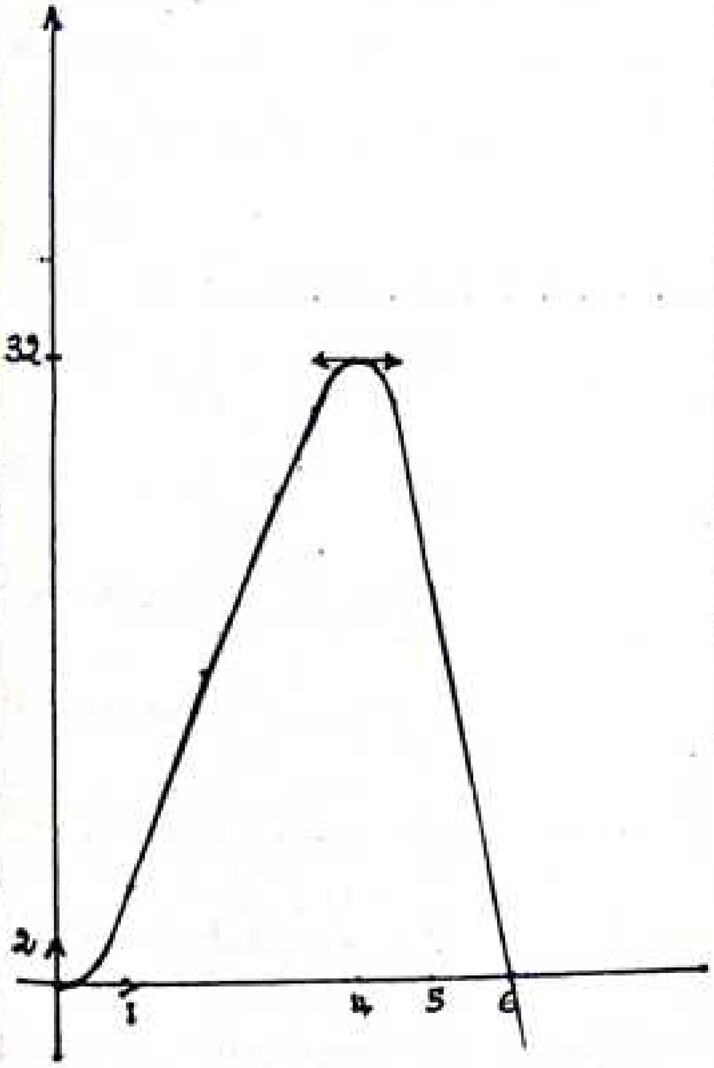
x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

f est croissante sur $[0;4]$ et décroissante sur $[4;+\infty[$

Tableau de variation de f

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	32	$\searrow$	$-\infty$

b-/ Construction de la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormal



c-/ Calculons l'intégrale $\int_0^6 f(x)\,dx$

$$\int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^6 (-x^3+6x^2)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3\right]_0^6 = 108$$

$$\boxed{\int_0^6 f(x)\,dx = 108}$$

Interprétation graphique de $\int_0^6 f(x)\,dx$

$\int_0^6 f(x)\,dx$ est l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisse et les droites d'équations $x=0$ et $x=6$. (en unité d'aire)

3-/ A l'aide de la question 2-/a/ trouvons la valeur de n pour laquelle $P(A)$ est maximale.

$P(A) = \frac{1}{136} f(n)$. $P(A)$ est maximale ssi $f(n)$ est maximale. D'après 2-/a-/ $f(n)$ est maximale pour $n=4$

$$\boxed{n=4}$$

Calculons alors $P(A)$

$$P(A) = \frac{1}{136} f(4) = \frac{32}{136} = \frac{4}{17}$$

$$\boxed{\text{Pour } n=4 \quad P(A) = \frac{4}{17}}$$

4-/ Précisons alors la composition exacte du sac.

Le sac contient 4 boules rouges, 8 boules vertes et 6 boules blanches.

EXERCICE 27

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 10. On tire simultanément 4 boules de l'urne.

1/ Nombre N de tirages possibles.

$$N = C_{10}^{4} = \frac{10!}{6! \times 4!} = 210$$

$$\boxed{N = 210}$$

2/ Soit X la variable aléatoire : "nombre de boules portant un numéro impair parmi les 4 boules tirées"

Déterminons la loi de probabilité de X

Soit Ω l'univers associé à X on a :

$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

$$P(X=0) = \frac{C_5^4}{210} = \frac{1}{42}$$

$$P(X=1) = \frac{C_5^1 \times C_5^3}{210} = \frac{5}{21}$$

$$P(X=2) = \frac{C_5^2 \times C_5^2}{210} = \frac{10}{21}$$

$$P(X=3) = \frac{C_5^3 \times C_5^1}{210} = \frac{5}{21}$$

$$P(X=4) = \frac{C_5^4}{210} = \frac{1}{42}$$

Résumons les résultats dans le tableau ci-après.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

Déterminons l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

$$E(X) = \sum x_i P(X=x_i)$$

$$= \frac{0 \times 1 + 1 \times 10 + 2 \times 20 + 3 \times 10 + 4 \times 1}{42}$$

$$= \frac{84}{42} = 2$$

$$\boxed{E(X) = 2}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{1^2 \times 10 + 2^2 \times 20 + 3^2 \times 10 + 4^2 \times 1}{42} - 4$$

$$= \frac{196}{42} - 4 = \frac{28}{42} = \frac{2}{3}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\frac{2}{3}}}$$

3/ On considère la variable aléatoire Y égale au plus grand numéro obtenu en effectuant le tirage simultané de 4 boules

a/ Déterminons la loi de probabilité de Y.

Soit Ω l'univers associé on a :

$Y(\Omega) = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

$$P(Y=4)=\frac{C_3^3\times C_1^1}{210}=\frac{1}{210}$$

$$P(Y=5)=\frac{C_4^3\cdot C_1^1}{210}=\frac{4}{210}=\frac{2}{105}$$

$$P(Y=6)=\frac{C_5^3\cdot C_1^1}{210}=\frac{10}{210}=\frac{1}{21}$$

$$P(Y=7)=\frac{C_6^3\times C_1^1}{210}=\frac{20}{210}=\frac{2}{21}$$

$$P(Y=8)=\frac{C_7^3\times C_1^1}{210}=\frac{35}{210}=\frac{1}{6}$$

$$P(Y=9)=\frac{C_8^3\times C_1^1}{210}=\frac{56}{210}=\frac{4}{15}$$

$$P(Y=10)=\frac{C_9^3\times C_1^1}{210}=\frac{84}{210}=\frac{2}{5}$$

b-/ Déduisons-en que:

$$C_3^3+C_4^3+C_5^3+C_6^3+C_7^3+C_8^3+C_9^3=C_{10}^4$$

On sait que:

$$P(Y=4)+P(Y=5)+\cdots+P(Y=10)=1$$

$$\Rightarrow \frac{C_3^3}{C_{10}^4}+\frac{C_4^3}{C_{10}^4}+\frac{C_5^3}{C_{10}^4}+\cdots+\frac{C_9^3}{C_{10}^4}=1$$

$$\Rightarrow \frac{C_3^3+C_4^3+C_5^3+C_6^3+C_7^3+C_8^3+C_9^3}{C_{10}^4}=1$$

d'où

$$C_3^3+C_4^3+C_5^3+C_6^3+C_7^3+C_8^3+C_9^3=C_{10}^4$$

On a donc

$$\boxed{C_3^3+C_4^3+C_5^3+C_6^3+C_7^3+C_8^3+C_9^3=C_{10}^4}$$

EXERCICE 28

On place dans une urne, une boule jaune, p boules blanches et q boules noires. On tire une boule de l'urne, les tirages sont équiprobables.

Soit les événements:

A: « la boule obtenue est jaune »

B: « la boule obtenue est blanche »

C: « la boule obtenue est noire ».

1-/ a-/ Calculons la probabilité P(A), P(B) et P(C) de chacun des événements A, B et C en fonction de p et q

$$P(A)=\frac{C_1^1}{C_{1+p+q}^1}=\frac{1}{1+p+q}$$

$$P(B)=\frac{C_p^1}{C_{1+p+q}^1}=\frac{p}{1+p+q}$$

$$P(C)=\frac{C_q^1}{C_{1+p+q}^1}=\frac{q}{1+p+q}$$

$$\boxed{P(A)=\frac{1}{1+p+q}}\qquad\boxed{P(B)=\frac{p}{1+p+q}}$$

$$\boxed{P(C)=\frac{q}{1+p+q}}$$

b-/ Déterminons p et q sachant que $P(A)=\frac{1}{21}$ et que P(A), P(B) et P(C) sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique

Première méthode

Les conditions données nous permettent d'écrire $\begin{cases}\frac{1}{1+p+q}=\frac{1}{21}\\ P(A)\cdot P(C)=[P(B)]^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} p+q=20 \\ q=p^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2+p-20=0 & (1) \\ q=p^2 & (2) \end{cases}$

Résolvons (1).

$p^2+p-20=0 \quad \Delta = 1+80 = 81 = 9^2$

$p_1 = \frac{-1-9}{2} = -5 \quad p_2 = \frac{-1+9}{2} = 4$ or $p \in \mathbb{N}^*$

donc $p=4$ et $q=16$

$\boxed{p=4}$ $\boxed{q=16}$

<u>Deuxième méthode</u> :

Les événement A, B et C forment une partition dans l'univers donc :

$P(A)+P(B)+P(C)=1 \Leftrightarrow P(A)+\alpha P(A)+\alpha^2 P(A)=1$

α étant la raison de la suite

donc : $(1+\alpha+\alpha^2)P(A)=1 \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha-20=0$

soit $\alpha=-5$ ou $\alpha=4$ or $P(B)>0$

donc $\alpha=4$ Ainsi on a :

$\begin{cases} \frac{1}{1+p+q} = \frac{1}{21} \\ \frac{p}{1+p+q} = \frac{4}{21} \\ \frac{q}{1+p+q} = \frac{16}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=4 \\ q=16 \end{cases}$

$\boxed{p=4}$ $\boxed{q=16}$

2/ On pose $p=4$ et $q=16$

a/ <u>Loi de probabilité de X</u>

$X \in \{-120 ; 180\}$

$P(X=-120) = \frac{C_4^2+C_{16}^2}{C_{21}^2} = \frac{6+120}{210} = \frac{126}{210} = \frac{3}{5}$

$P(X=180) = \frac{C_1^1 \times C_{20}^1 + C_4^1 \cdot C_{16}^1}{C_{21}^2} = \frac{20+64}{210} = \frac{84}{210} = \frac{2}{5}$

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessous.

x_i	-120	180
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

b/ <u>Calculons l'espérance mathématique E(X) de X</u>

$E(X) = \sum x_i p(X=x_i)$

$= \frac{-3\times120+2\times180}{5} = \frac{-360+360}{5} = 0$

$\boxed{E(X)=0}$

Le jeu est équitable. Le garçon G_1 a donc interêt à jouer

EXERCICE 29

Une personne P regarde la télé en zappant entre trois chaînes A, B et C. Elle passe 50% de son temps à regarder A, 20% à regarder B et 30% à regarder C. On suppose que statistiquement :

1% des programmes de A lui plaisent

5% des programmes de B lui plaisent

7% des programmes de C lui plaisent.

1/ P regarde la télé quand le téléphone sonne.

Calculons la probabilité que le programme qu'elle regardait lui ait plu.

Considérons les événements :

A : " La personne regarde la chaîne A"

B : " La personne regarde la chaîne B"

C : " La personne regarde la chaîne C".

D : " le programme lui plaît"

$P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}2$, $P(C) = 0{,}3$

$P(D/A) = 0{,}01$, $P(D/B) = 0{,}05$, $P(D/C) = 0{,}07$.

$D = (D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)$

$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$

On sait que : $P(D/A) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(A)}$

$\Leftrightarrow P(D \cap A) = P(A) \times P(D/A)$

On démontre de manière analogue que : $P(D \cap B) = P(B) \times P(D/B)$

$P(D \cap C) = P(C) \times P(D/C)$ d'où :

$$\boxed{P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)}$$

$P(D) = 0{,}5 \times 0{,}01 + 0{,}2 \times 0{,}05 + 0{,}3 \times 0{,}07$

$= 0{,}036$

$$\boxed{P(D) = 0{,}036}$$

2°/ P s'ennuie devant un programme qui ne lui plaît pas.

<u>Calculons la probabilité que ce programme passe sur la chaîne B</u>

Il s'agit de calculer $P(B/\overline{D})$.

$P(B/\overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D} \cap B)}{P(\overline{D})}$ or

$P(\overline{D}/B) = \dfrac{P(\overline{D} \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(\overline{D} \cap B) = P(B) \cdot P(\overline{D}/B)$

d'où :

$$P(B/\overline{D}) = \frac{P(B) \cdot P(\overline{D}/B)}{P(\overline{D})}$$

$P(\overline{D}/B) = 1 - P(D/B)$ et $P(\overline{D}) = 1 - P(D)$

Finalement on a :

$$\boxed{P(B/\overline{D}) = \frac{P(B)\left[1 - P(D/B)\right]}{1 - P(D)}}$$

$P(B/\overline{D}) = \dfrac{0{,}2(1 - 0{,}05)}{1 - 0{,}036} = 0{,}197$

$$\boxed{P(B/\overline{D}) = 0{,}197}$$

EXERCICE 30

Dans une population donnée, 56% des familles occupent une maison individuelle. Parmi elles 78% en sont propriétaires. Parmi les familles n'occupant pas une maison individuelle 24% sont propriétaires de leur logement.

1°/ On choisit une famille au hasard dans la population considérée.

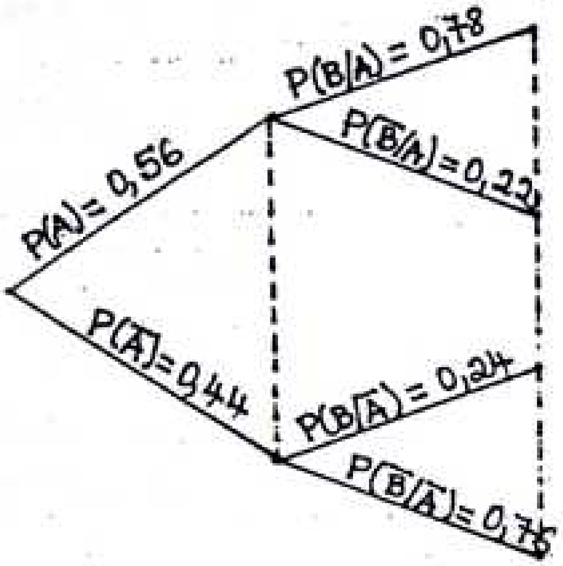
a°/ <u>Calculons la probabilité pour qu'elle soit propriétaire de son logement</u>

Considérons les événements suivants :

A : " la famille habite une maison individuelle "

B : " la famille est propriétaire de son logement ".

Procédons par l'arbre :



La probabilité recherchée est P(B)

Appliquons la formule des probabilités totales. On a :

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$

or $P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B/A)$

$$P(B \cap \bar{A}) = P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A})$$

$$\boxed{P(B) = P(A) . P(B/A) + P(\bar{A}) . P(B/\bar{A})}$$

$$P(B) = 0,56 \times 0,78 + 0,44 \times 0,24 = 0,5424$$

$$\boxed{P(B) = 0,5424}$$

b/ <u>Calculons la probabilité qu'elle habite une maison individuelle sachant qu'elle n'en est pas propriétaire.</u>

La probabilité recherchée est $P(A|\bar{B})$

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(\bar{B})}$$

or $P(\bar{B} \cap A) = P(A) . P(\bar{B}/A)$ et

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B)$$

Finalement on a :

$$\boxed{P(A/\bar{B}) = \frac{P(A) . P(\bar{B}/A)}{1 - P(B)}}$$

$$P(A/\bar{B}) = \frac{0,56 \times 0,22}{1 - 0,5424} = 0,27$$

$$\boxed{P(A/\bar{B}) = 0,27}$$

2/ On interroge 5 familles au hasard dans la population considéré et on suppose que les choix successifs sont indépendants. X désigne le nombre de familles propriétaires de leur logement.

a/ <u>Loi de probabilité de X</u>

La probabilité qu'une famille soit propriétaire de son logement est

$$p = P(B) = 0,5424$$

Soit Ω l'univers associé à X

on a : $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

On est dans un schéma de Bernoulli de paramètre $p = 0,5424$ et $n = 5$

Pour $1 \leq K \leq 5$, $P(X = K) = C_5^K p^K (1-p)^{n-K}$.

$p(X=0) = (1-p)^5 = 0,02$

$p(X=1) = C_5^1\, p(1-p)^4 = 0,12$

$p(X=2) = C_5^2\, p^2(1-p)^3 = 0,28$

$p(X=3) = C_5^3\, p^3(1-p)^2 = 0,33$

$p(X=4) = C_5^4\, p^4(1-p) = 0,20$

$p(X=5) = p^5 = 0,05$

b/ Calculons son espérance mathématique $E(X)$, sa variance $V(X)$ et son écart-type $\sigma(X)$

$E(X) = np = 5 \times 0,5424 = 2,712$

$V(X) = np(1-p) = 1,24$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1,11$

$E(X) = 2,712$	$V(X) = 1,24$	$\sigma(X) = 1,11$

EXERCICE 31

Trois dés cubiques sont placés dans une urne. Deux de ces dés sont normaux : leurs faces sont numérotées de 1 à 6. Le troisième est spécial : 3 de ses faces sont numérotées 6, les 3 autres sont numerotées 1.

On tire de l'urne, simultanement et au hasard, deux dés parmi les trois et on les lance.

On considère les événements :

A : " les deux dés tirés sont normaux".

B : " Les deux faces supérieures sont numerotées 6".

1/ a/ Définissons l'événement contraire de A, qu'on notera $\overline{A}$

$\overline{A}$: " Un des deux dés tirés n'est pas normal"

b/ Calculons $P(A)$ et $P(\overline{A})$

$$P(A) = \frac{C_2^2}{C_3^2} = \frac{1}{3}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$P(A) = \frac{1}{3}$	$P(\overline{A}) = \frac{2}{3}$

2/ a/ Calculons $P(B/A)$

Lorsque A est réalisé, la probabilité de tirer un 6 est $\frac{1}{6}$ pour chaque dé.

On a donc $P(B/A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$$\boxed{P(B/A) = \frac{1}{36}}$$

- Calculons $P(B \cap A)$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B \cap A) = P(A).P(B/A)$$

$$\boxed{P(B \cap A) = P(A).\ P(B/A)}$$

$$P(B \cap A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{36} = \frac{1}{108}$$

$$\boxed{P(B \cap A) = \frac{1}{108}}$$

b/ Calculons $P(B)$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$$

- Calculons $P(B\cap\bar{A})$

Lorsque $\bar{A}$ est réalisé ; on lance un dé normal et un dé spécial.

La probabilité d'obtenir un 6 avec le dé normal est $\frac{1}{6}$ et celle d'obtenir un 6 avec le dé spécial est $\frac{1}{2}$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$$P(B\cap\bar{A}) = P(\bar{A}).P(B/\bar{A})$$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{1}{12} = \frac{1}{18}$$

$$P(B) = \frac{1}{108}+\frac{1}{18} = \frac{1+6}{108} = \frac{7}{108}.$$

$$\boxed{P(B) = \frac{7}{108}}$$

3°/ Calculons $P(A/B)$.

$$P(A/B) = \frac{P(B\cap A)}{P(B)} = \frac{1}{108}\times\frac{108}{7} = \frac{1}{7}$$

$$\boxed{P(A/B) = \frac{1}{7}}$$

EXERCICE 32

Calculons la probabilité pour que je puisse être ruiné.

Déterminons d'abord le nombre n d'essais possibles avec le 12.700F.

Posons $S_n = U_1+U_2+\dots+U_n$ où (U_n) est une suite géométrique de 1er terme $U_1 = 100$ et de raison 2

$$S_n = 100\,\frac{1-2^n}{1-2} = 100(2^n-1)$$

$$S_n \leq 12700 \Leftrightarrow 100(2^n-1)\leq 12700$$

$$\Leftrightarrow 2^n \leq 128$$

$$\Leftrightarrow n\leq 7$$

Pour que je puisse être ruiné, il faut que je perde 7 fois de suite.

La probabilité recherchée est :

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$$

$$\boxed{P = \frac{1}{128}}$$

EXERCICE 33

Dix couples de rongeurs : 4 couples de souris et 6 couples de mulots, cohabitent dans une ferme lorsque le fermier se procure un chat pour les exterminer.

1°/ Probabilité que les deux premiers rongeurs qui seront mangés par le chat :

a°/ <u>appartiennent à un même couple</u>

Soit P_1 cette probabilité on a :

$$P_1 = \frac{C_{10}^1\times C_2^2}{C_{20}^2} = \frac{10}{190} = \frac{1}{19}$$

$$\boxed{P_1 = \frac{1}{19}}$$

b/ Soient une souris et un mulot.

Soit P_2 cette probabilité on a:

$$P_2 = \frac{C_8^1 \times C_{12}^1}{C_{20}^2} = \frac{8 \times 12}{190} = \frac{48}{95}$$

$$\boxed{P_2 = \frac{48}{95}}$$

2/ Probabilité pour que les quatre premiers rongeurs croqués par le chat :

a/ appartiennent à deux couples différents exactement

Soit P_3 cette probabilité on a:

$$P_3 = \frac{C_{10}^2 (C_2^2 \times C_2^2)}{C_{20}} = \frac{45}{4845} = \frac{3}{323}$$

$$\boxed{P_3 = \frac{3}{323}}$$

b/ appartiennent à trois couples différents exactement

Soit P_4 cette probabilité on a:

$$P_4 = \frac{C_{10}^3 (C_2^2 \times C_2^1 \times C_2^1) \times C_3^1}{C_{20}^4} = \frac{1440}{4845}$$

$$\boxed{P_4 = \frac{96}{323}}$$

EXERCICE 34

Au cours d'une kermesse on organise une loterie de 100 billets, 15 d'entre eux gagnent chacun 50F et 5 autres gagnent chacun 100F

1/ Une personne achète un billet, calculons la probabilité des événements :

A : " Elle ne gagne rien "

B : " Elle gagne 50F "

C : " Elle gagne 100F "

$$P(A) = \frac{C_{80}^1}{C_{100}^1} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$$

$$P(B) = \frac{C_{15}^1}{C_{100}^1} = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$$

$$P(C) = \frac{C_5^1}{C_{100}^1} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

$P(A) = \frac{4}{5}$	$P(B) = \frac{3}{20}$	$P(C) = \frac{1}{20}$

2/ Une deuxième personne achète deux billets. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain que peut réaliser la personne.

a/ <u>Déterminons la loi de probabilité de X</u>

Soit Ω l'univers associé à X on a:

$$X(\Omega) = \{0; 50; 100; 150; 200\}$$

$$P(X=0) = \frac{C_{80}^2}{C_{100}^2} = \frac{3160}{4950} = \frac{316}{495}$$

$$P(X=50) = \frac{C_{80}^1 \times C_{15}^1}{C_{100}^2} = \frac{80 \times 15}{4950} = \frac{8}{33}$$

$$P(X=100) = \frac{C_{15}^2 + C_{80}^1 \times C_5^1}{C_{100}^2} = \frac{505}{4950} = \frac{101}{990}$$

$$P(X=150) = \frac{C_{15}^1 \times C_5^1}{C_{100}^2} = \frac{75}{4950} = \frac{5}{330}$$

$$P(X=200) = \frac{C_5^2}{C_{100}^2} = \frac{10}{4950} = \frac{1}{495}$$

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessous :

x_i	0	50	100	150	200
$P(X=x_i)$	$\frac{316}{495}$	$\frac{8}{33}$	$\frac{101}{990}$	$\frac{5}{330}$	$\frac{1}{495}$

b-/ <u>Probabilité pour cette personne de gagner au plus 100F.</u>

Soit P_1 cette probabilité on a :

$$P_1 = P(X=0) + P(X=50) + P(X=100)$$

$$= \frac{316 \times 2 + 8 \times 30 + 101}{990} = \frac{973}{990}$$

$$\boxed{P_1 = \frac{973}{990}}$$

c-/ Déterminons la fonction de répartition de X

Soit F cette fonction :

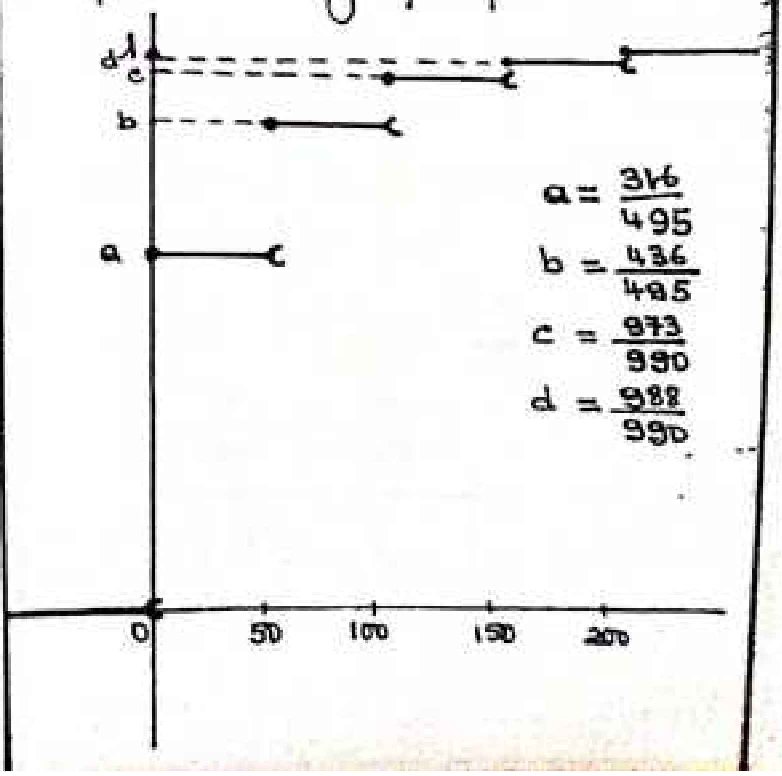
$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0;1]$$
$$x \longmapsto P(X \leq x).$$

- si $x < 0$ alors $F(x) = 0$
- si $0 \leq x < 50$, $F(x) = \frac{316}{495}$
- si $50 \leq x < 100$, $F(x) = \frac{316}{495} + \frac{8}{33} = \frac{436}{495}$
- si $100 \leq x < 150$, $F(x) = \frac{436}{495} + \frac{101}{990} = \frac{973}{990}$
- si $150 \leq x < 200$, $F(x) = \frac{973}{990} + \frac{5}{330} = \frac{988}{990}$
- si $x \geq 2$, $F(x) = \frac{988}{990} + \frac{1}{495} = 1$

En résumé on a :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{316}{495} & \text{si } 0 \leq x < 50 \\ \frac{436}{495} & \text{si } 50 \leq x < 100 \\ \frac{973}{990} & \text{si } 100 \leq x < 150 \\ \frac{988}{990} & \text{si } 150 \leq x < 200 \\ 1 & \text{si } x \geq 200 \end{cases}$$

Représentation graphique de F



EXERCICE 36

Lire attentivement le texte de l'énoncé et répondre aux questions

1°/ Calculons P_1 en fonction de n

$$P_1 = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\boxed{P_1 = \frac{1}{n(n-1)}}$$

2°/ Exprimons P_2 en fonction de m

$$P_2 = \frac{1}{2m} \times \frac{1}{2m-1} \times C_2^1 \times m$$

$$= \frac{2m}{2m(2m-1)} = \frac{1}{2m-1}$$

$$\boxed{P_2 = \frac{1}{2m-1}}$$

Pour mieux comprendre, choisir $m=8$ par exemple.

3°/ a-/ Exprimons p_1' en fonction de n.

$$P_1' = P_1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2n(n-1)}$$

$$\boxed{P_1' = \frac{1}{2n(n-1)}}$$

b°/ Exprimons P_2' en fonction de n et de m

$$P_2' = P_1 \times \frac{1}{2} \times P_2 = \frac{1}{2n(n-1)(2m-1)}$$

$$\boxed{P_2' = \frac{1}{2n(n-1)(2m-1)}}$$

c°/ Exprimons p en fonction de n et de m

$$P = P_1' + P_2'$$

$$= \frac{1}{2n(n-1)} + \frac{1}{2n(n-1)(2m-1)}$$

$$= \frac{2m-1+1}{2n(n-1)(2m-1)} = \frac{m}{n(n-1)(2m-1)}$$

$$\boxed{P = \frac{m}{n(n-1)(2m-1)}}$$

4°/ Le jeu a été prévu pour $P = \frac{1}{58}$.

Exprimons m en fonction de n

$$P = \frac{1}{58} \Leftrightarrow \frac{m}{n(n-1)(2m-1)} = \frac{1}{58}$$

$$\Leftrightarrow 58m = n(n-1)(2m-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{58m}{2m-1} = n(n-1) \Leftrightarrow 29 + \frac{29}{2m-1} = n(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{29}{2m-1} = n(n-1) - 29$$

$$\Leftrightarrow 2m-1 = \frac{29}{n(n-1)-29} \Leftrightarrow 2m = \frac{n(n-1)}{n(n-1)-29}$$

$$\boxed{m = \frac{n(n-1)}{2[n(n-1)-29]}}$$

5°/ Sachant que m et n remplissent les conditions $2 \leq m$, $2 \leq n \leq 9$, établissons à l'aide de l'expression obtenue au 4°/ la double inégalité :

$$29 < n(n-1) < 39$$

$$\begin{cases} 2 \leq n \\ 2 \leq m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n(n-1) > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow n(n-1) - 29 > 0$$

$$\Rightarrow 29 < n(n-1) \quad (1)$$

$2 \le m \Rightarrow 2 \le \dfrac{n(n-1)}{2n(n-1)-58}$

$\Rightarrow \dfrac{2n(n-1)-58}{n(n-1)} \le \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{n(n-1)-29}{n(n-1)} \le \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 1-\dfrac{29}{n(n-1)} \le \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{29}{n(n-1)} \ge \dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)}{29} \le \dfrac{4}{3} \Rightarrow n(n-1) \le \dfrac{4\times 29}{3}$

$\Rightarrow n(n-1) \le 38{,}6 < 39$

$\Rightarrow n(n-1) < 39$ ②

Finalement à l'aide de ① et ② on a: $29 < n(n-1) < 39$.

Déduisons-en la seule valeur possible (entière) de n, puis celle de m (entière)

$6\times 5 = 30 \quad 7\times 6 = 42$

La seule valeur de n est donc 6

$n = 6$

$$m = \frac{n(n-1)}{2[n(n-1)-29]} = \frac{6\times 5}{2(6\times 5-29)} = 15$$

$\boxed{n=6}$ $\boxed{m=15}$

EXERCICE 37

1-/ Etude des variations de la fonction f définie par: $f(x) = \dfrac{a(x-b)}{x(x-1)}$ où a et b sont deux réels donnés $a>0$ $b>1$

$D_f = \mathbb{R} - \{0;1\}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a}{x} = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$ car $\begin{cases} a(x-b) \to -ab<0 \\ x(x-1) \to 0 \\ x(x-1) > 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} a(x-b) \to -ab<0 \\ x(x-1) \to 0 \\ x(x-1) < 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} a(x-b) \to a(1-b)<0 \\ x(x-1) \to 0 \\ x(x-1) < 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = -\infty$ car $\begin{cases} a(x-b) \to a(1-b)<0 \\ x(x-1) \to 0 \\ x(x-1) > 0 \end{cases}$

f est une fonction rationnelle donc continue et dérivable sur D_f et $\forall x\in D_f$:

$f'(x) = a.\dfrac{x^2-x-(2x-1)(x-b)}{(x^2-x)^2}$

$f'(x) = a.\dfrac{-x^2+2bx-b}{(x^2-x)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2-2bx+b = 0$

$\Delta' = b^2-b = b(b-1) > 0$ car $b>0$

$x_1 = b-\sqrt{b^2-b} \qquad x_2 = b+\sqrt{b^2-b}$

Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		0		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

f est décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;x_1]$ et sur $[x_2;+\infty[$; croissante sur $[x_1;1[$ et sur $]1;x_2]$

Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0

2/ Lisons attentivement le texte et calculons les probabilités :

a/ P_1 de gagner la partie au 1er tirage.

$$P_1 = \frac{C_5^1}{C_{22}^1} = \frac{5}{22}$$

$$\boxed{P_1 = \frac{5}{22}}$$

b/ P_2 de gagner la partie au 2e tirage

$$P_2 = \frac{C_7^1}{C_{22}^1} \times \frac{C_5^1}{C_{21}^1} = \frac{7 \times 5}{22 \times 21} = \frac{5}{66}$$

$$\boxed{P_2 = \frac{5}{66}}$$

c/ P de gagner la partie

$$P = P_1 + P_2 = \frac{5}{22} + \frac{5}{66} = \frac{10}{33}$$

$$\boxed{P = \frac{10}{33}}$$

3/ a/ Déterminons la loi de probabilité de X

Soit Ω l'univers associé à X on a :

$X(\Omega) = \{-3; -1; 0; 4; 5\}$

$$P(X=-3) = \frac{10}{x}$$

$$P(X=-1) = \frac{x-15}{x} \times \frac{10}{x-1} = \frac{10(x-15)}{x(x-1)}$$

$$P(X=0) = \frac{x-15}{x} \times \frac{x-16}{x-1} = \frac{(x-15)(x-16)}{x(x-1)}$$

$$P(X=4) = \frac{x-15}{x} \times \frac{5}{x-1} = \frac{5(x-15)}{x(x-1)}$$

$$P(X=5) = \frac{5}{x}$$

b/ Calcul de l'espérance mathématique E(X) en fonction de x

$$E(X) = \sum x_i P(X=x_i)$$

$$= \frac{-30(x-1) - 10(x-15) + 20(x-15) + 25(x-1)}{x(x-1)}$$

$$= \frac{5x-145}{x(x-1)} = \frac{5(x-29)}{x(x-1)}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{5(x-29)}{x(x-1)}}$$

c/ Valeurs de x pour lesquelles le jeu est favorable, équitable ou défavorable au joueur

$E(X) = f(x)$ pour $a = 5$ et $b = 29$

Le tableau de variation de f pour $a = 5$ et $b = 29$ se présente comme suit

x	$-\infty$		0		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0

$x_1 =$ $\quad f(x_1) =$ $\quad x_2 =$ $\quad f(x_2) =$

On pourra en déduire le signe de f(x)

x	0		1		29		$+\infty$
$f(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	

or $x > 15$ d'où les conclusions :

– si $x \in]15; 29[$ $E(X) < 0$, le jeu est défavorable au joueur

- si $x = 29$ $E(X) = 0$, le jeu est équitable
- si $x > 29$ $E(X) > 0$, le jeu est favorable au joueur.

EXERCICE 38

p est un nombre réel $(0 < p < 1)$. Un coureur s'entraîne sur un parcours comportant n haies numérotées de 1 à n. Pour chaque nombre entier naturel i tel que $1 \leq i \leq n$, la probabilité de renverser la $i^{ième}$ haie est p.

Le coureur poursuit son parcours jusqu'à la $n^{ième}$ haie quel que soit le nombre de haies renversées. On désigne par X la variable aléatoire définie comme suit :

$X = n+1$ si aucune haie n'est renversée

$X = k$ si k est le numero de la première haie renversée.

1/ Calculons en fonction de p et k la probabilité $P(X=k)$

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1}p, \quad 1 \leq k \leq n$$

$$\boxed{P(X=k) = (1-p)^{k-1}p, \quad 1 \leq k \leq n}$$

Précisons $P(X=1)$ et $P(X=n+1)$

$P(X=1) = p \quad P(X=n+1) = (1-p)^n$

$$\boxed{P(X=1) = p \qquad P(X=n+1) = (1-p)^n}$$

Vérifions que :

$P(X=1) + P(X=2) + \dots + P(X=n+1) = 1$

Posons $S = P(X=1) + P(X=2) + \dots + P(X=n+1)$

$$S = p + (1-p)p + \dots + (1-p)^{n-1}p + (1-p)^n$$

$$= p\,\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} + (1-p)^n$$

$$= 1 - (1-p)^n + (1-p)^n = 1$$

$$\boxed{P(X=1) + P(X=2) + \dots + P(X=n+1) = 1}$$

2/ Calculons l'espérance mathématique de X en fonction de n et p.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot P(X=k)$$

$$= P(X=1) + 2P(X=2) + \dots + (n+1)P(X=n+1)$$

$$= p + 2p(1-p) + \dots + np(1-p)^{n-1} + (n+1)(1-p)^n$$

$$= p\left(1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + \dots + n(1-p)^{n-1}\right) + (n+1)(1-p)^n$$

Posons

$$S_n = 1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + \dots + n(1-p)^{n-1}$$

$$f(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

On a : $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$

On remarque donc que :

$$S_n = f'(1-p)$$

$$f(x) = x\,\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x^{n+1}-x}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{((n+1)x^n - 1)(x-1) - x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(n+1)x^{n+1}-(n+1)x^n-x+1-x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(x-1)^2}$$

$$Sn=f'(1-p)$$
$$=\frac{1-(n+1)(1-p)^n+n(1-p)^{n+1}}{p^2}$$

$$Sn=\frac{1-(1+np)(1-p)^n}{p^2}$$

$$E(X)=pSn+(n+1)(1-p)^n$$
$$=\frac{1-(1+np)(1-p)^n}{p}+(n+1)(1-p)^n$$
$$=\frac{1+(1-p)^n(np+p-1-np)}{p}$$
$$=\frac{1+(1-p)^n(p-1)}{p}=\frac{1-(1-p)^{n+1}}{p}.$$

$$\boxed{E(X)=\frac{1-(1-p)^{n+1}}{p}.}$$

EXERCICE 39

On considère un schéma de BERNOULLI, répétition de n épreuves identiques, indépendantes, chacune d'elles donnant lieu à deux issues S de probabilité p et $E=\overline{S}$ de probabilité q avec $p+q=1$.

Soit X la variable aléatoire : « nombre de succès S » et P_k la probabilité $P_k=P(X=k)$. On a alors : $P_k=C_n^k p^k q^{n-k}$ pour $k=0,1,2,\dots n$.

On pose $f(x)=(px+q)^n$ (x réel).

1/ Montrons que :
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}P_k x^k.$$

En utilisant la formule du binôme de Newton on a :
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(px)^k q^{n-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k x^k q^{n-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(C_n^k p^k q^{n-k})x^k$$

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n}P_k x^k}$$

2/ Déduisons-en deux expressions de $f'(x)$ et l'égalité $f'(1)=E(X)$

En utilisant l'expression $f(x)=(px+q)^n$ on a : $f'(x)=np(px+q)^{n-1}$

$$\boxed{f'(x)=np(px+q)^{n-1}}$$

En utilisant $f(x)=\sum_{k=0}^{n}P_k x^k$ on a :

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{n}P_k.kx^{k-1}$$

$$\boxed{f'(x)=\sum_{k=0}^{n}k.P_k.x^{k-1}}$$

On sait que :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k P(X=k)$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k P_k.$$

or $f'(1) = \sum_{k=0}^{n} P_k \cdot k \cdot 1^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} k P_k.$

On en déduit donc que :

$$\boxed{E(X) = f'(1)}$$

Retrouvons alors la valeur de E(X)

$$E(X) = f'(1) = np(p\times 1+q)^{n-1}$$
$$= np(p+q)^{n-1} \text{ or } p+q=1$$
$$= np(1)^{n-1} = np.$$

$$\boxed{E(X) = np.}$$

EXERCICE 40

On considère une épreuve aléatoire débouchant sur deux éventualités, succès et échec, de probabilités respectives 0,8 et 0,2. On désigne par X la variable aléatoire qui associe à n épreuves aléatoires indépendantes le nombre k de succès. On désigne par Y la variable aléatoire qui associe à n épreuves aléatoires indépendantes le nombre k d'échecs.

1/ Lois suivies par X et Y :

* X suit la loi binomiale de paramètres 0,8 et n.
* Y suit la loi binomiale de paramètres 0,2 et n.

Donnons en fonction de n l'expression de :

$P(X=k)$; $P(Y=k)$, $P(X=0)$ $P(X\geqslant 1)$ $P(Y=n)$

$$\boxed{P(X=k) = C_n^k (0,8)^k (0,2)^{n-k}.}$$

$$\boxed{P(Y=k) = C_n^k (0,2)^k (0,8)^{n-k}}$$

$P(X=0) = (0,2)^n$ $P(X\geqslant 1) = 1 - P(X=0)$

$$\boxed{P(X=0) = (0,2)^n} \quad \boxed{P(X\geqslant 1) = 1-(0,2)^n}$$

$$\boxed{P(Y=n) = (0,2)^n}$$

2/ On suppose n = 10. Calculons :

$P(X=0)$; $P(X=2)$; $P(X\leq 2)$, $P(X>2)$, $E(X)$ et $\sigma(X)$

$P(X=0) = (0,2)^{10} = 1024 \cdot 10^{-10}$

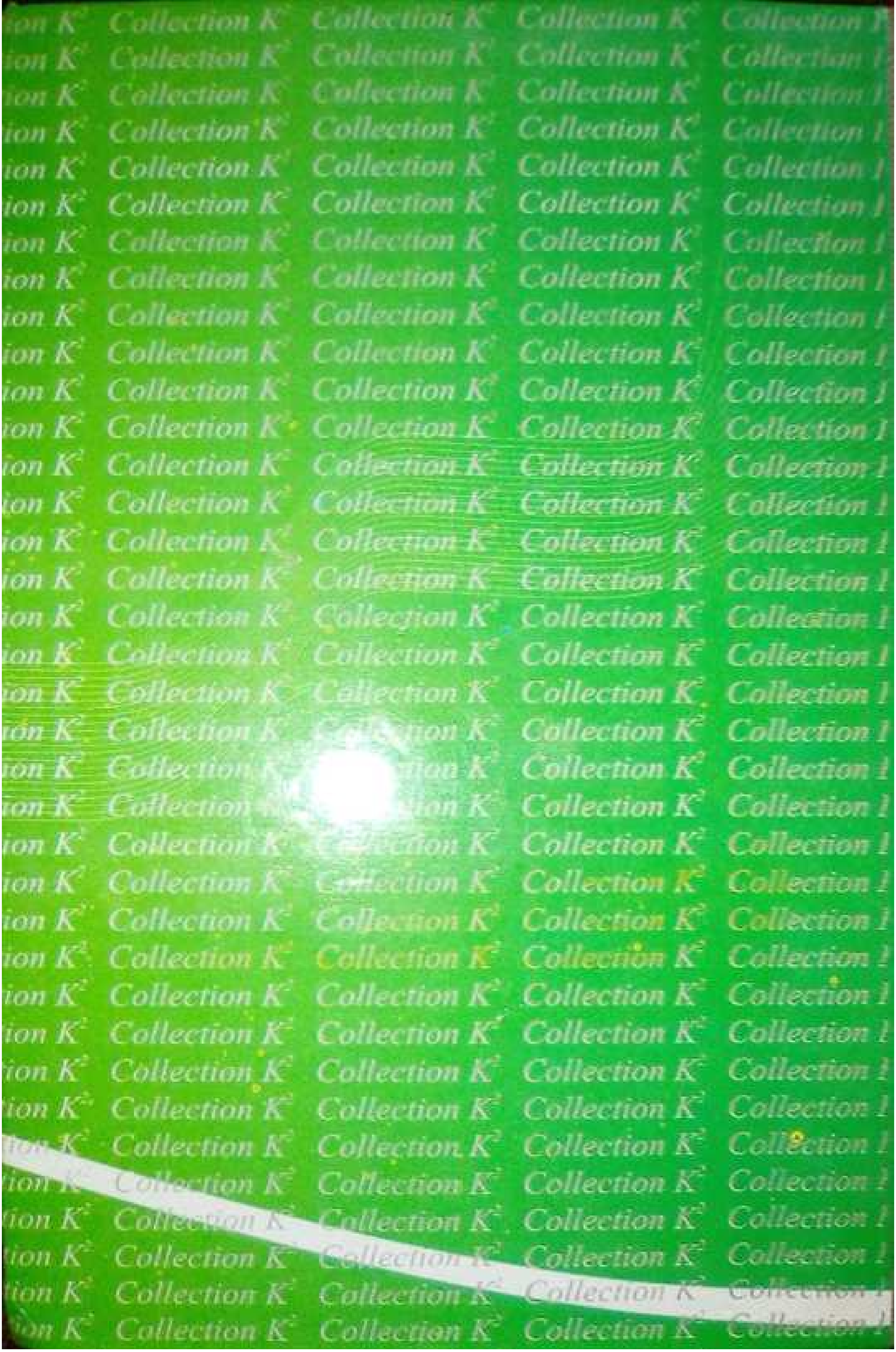
$P(X=2) = C_{10}^2 (0,8)^2 (0,2)^8 = 737 \cdot 10^{-7}$

$P(X\leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$= (0,2)^{10} + C_{10}^1 0,8 \cdot (0,2)^9 + P(X=2) = 779 \cdot 10^{-7}$

$P(X>2) = 1 - P(X\leq 2) = 0,99$

$E(X) = 0,8\times 10 = 8$ $\sigma(X) = \sqrt{0,8 \cdot 10 \times 0,2} = 1,26.$


Collection K²