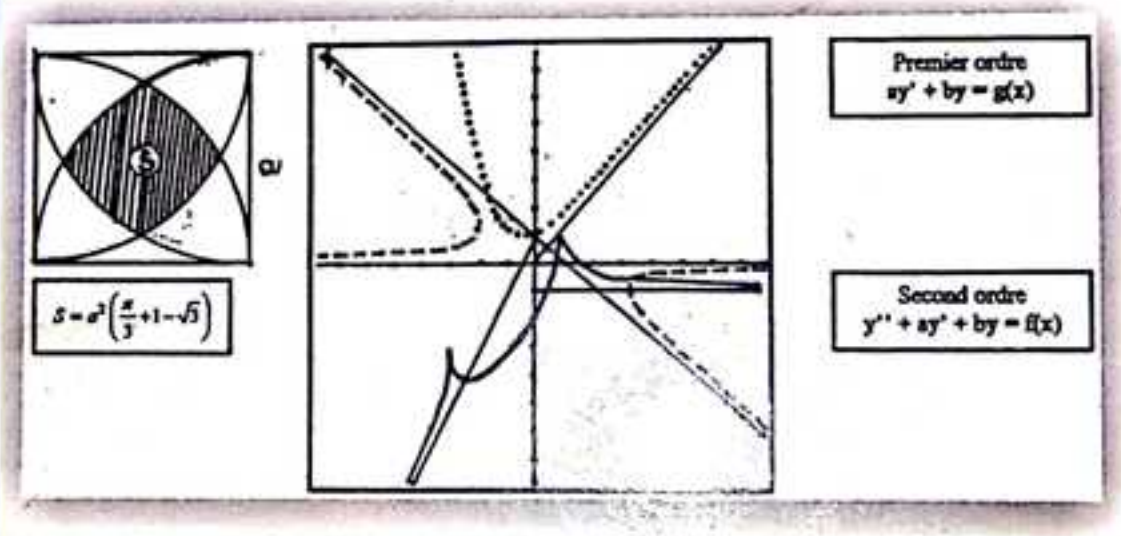
MATHEMATIQUES

COLLECTION K^2

RECUEIL D'EXERCICES ET PROBLEMES DE SYNTHESE AVEC LEURS CORRIGES DETAILLES

Première partie	Deuxième partie	Troisième partie
CALCUL INTEGRAL 30 EXERCICES	PROBLEME DE SYNTHESE 40 EXERCICES	EQUATION DIFFERENTIELLES 14 EXERCICES



K^2 AU SERVICE DES ELEVES

Tome 2

Classes : Terminales : C-D-E-F-Ti /1

Rédigé par :

KOUEVIDJIN Mawoulé Kankoé
Professeur de MATHEMATIQUES
Tél : (+228) 90 16 93 00 / 99 54 56 40
(+228) 91 82 84 61 / 99 09 43 63
(+228) 92 74 97 70
E-mail: koehyppo@yahoo.fr

PREMIERE EDITION : Janvier 2006

Enregistré a BUTODRA sous le numero : OL 1310

MATHEMATIQUES

COLLECTION K^2

RECEUIL D'EXERCICES ET PROBLEMES DE SYNTHESE AVEC LEURS CORRIGES DETAILLES

PREMIERE PARTIE

CALCUL INTEGRAL

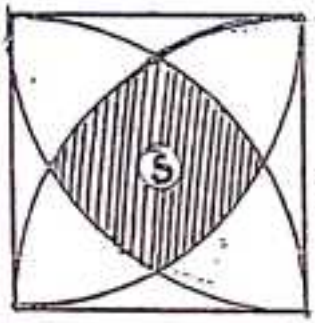
30 EXERCICES

DEUXIEME PARTIE

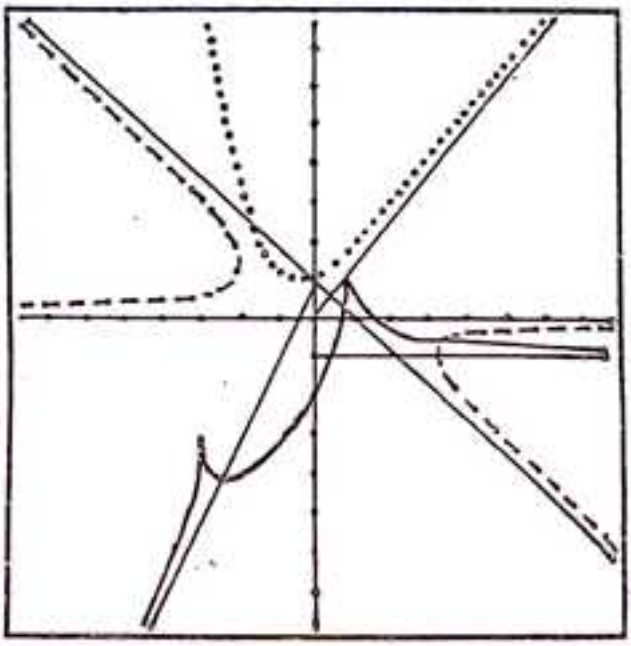
PROBLEMES DE SYNTHESE
40 PROBLEMES

TROISIEME PARTIE

EQUATIONS DIFFERENTIELLES
14 EXERCICES



$$S = a^2\left(\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}\right)$$



Premier ordre
$ay' + by = g(x)$

Second ordre
$y'' + ay' + by = f(x)$

K^2 AU SERVICE DES ELEVES

CLASSES : TERMINALES : C-D-E-F- Ti/1

TOME 2

Rédigé par :

M. KOUEVIDJIN Mawoulé Kankoé
Professeur de MATHEMATIQUES
CEL : 90-16-93-00 / 22-34-63-10 / 99-54-56-40

PREMIERE EDITION : Décembre 2006

ENREGISTRE À BUTODRA SOUS LE NUMERO OL 1310

ÉNONCES DES EXERCICES SUR LE CALCUL INTEGRAL

EXERCICE 1

Calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dx$ $\quad J = \int_{-2}^{1} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

$K = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$ $\quad L = \int_0^{\pi/4} (\tan x + \tan^3 x)\,dx$

$M = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos x\,dx$ $\quad N = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/3} \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\,dx$

$P = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\,dx$ $\quad R = \int_{\frac{1}{e}}^{e^3} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

$S = \int_{\frac{5}{3}}^{2} \frac{1}{(3x-4)^5}\,dx$ $\quad T = \int_1^e \ln t\,dt$

$U = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{2\pi/4} e^x \cos 2x\,dx$ $\quad V = \int_{-1}^{0} x^2 e^{-x}\,dx$

$W = \int_0^2 (1 - |x-1|^3)\,dx$ $\quad Z = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$

$A = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$ $\quad B = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t \sin t + \sin^3 t)\,dt$

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x+5}{(x+1)^2}$.

1/ Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$

2/ En déduire la valeur de l'intégrale : $I = \int_0^3 \frac{2x+5}{(x+1)^2}\,dx$

EXERCICE 3

On considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$.

1/ Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que :

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$

2/ En déduire la valeur de l'intégrale : $J = \int_1^3 \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx$.

EXERCICE 4

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$; $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$

1/ Calcul de I

Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$

a/ Calculer la dérivée f' de f

b/ Calculer alors la valeur de I

2/ Calcul de J et de K.

a/ Sans calculer explicitement J et K, vérifier que $J + 2I = K$.

b/ A l'aide d'une intégration par l'intégrale K, montrer que : $K = \sqrt{3} - J$.

c/ En déduire les valeurs de J et de K.

EXERCICE 5

Pour tout entier naturel non nul, n on pose $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

1/ Montrer que $I_1 = \frac{\pi}{4}$

2/ A l'aide d'une intégration par

parties, démontrer que:

$$2n\,I_{n+1} = (2n-1)\,I_n + \frac{1}{2^n}$$

3/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \frac{x^4}{(1+x^2)^3}$

a/ Démontrer qu'il existe, trois réels a, b et c tels que pour tout x réel

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2} + \frac{b}{(1+x^2)^2} + \frac{c}{(1+x^2)^3}$$

b/ Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$

EXERCICE 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$

1/ Soit $I_1 = \int_0^1 x e^{-x}\,dx$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $I_1 = 1 - \frac{2}{e}$.

2/ Soit $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x}\,dx$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $I_{n+1} = (n+1) I_n - \frac{1}{e}$.

3/ Exprimer I_2 en fonction de I_1. En déduire fonction de e. Exprimer I_3 en fonction de I_2. Montrer que $I_3 = 6 - \frac{16}{e}$.

4/ Soit $I = \int_0^1 (2x^3 - 8x^2 + 4x) e^{-x}\,dx$. Exprimer I en fonction de I_1, I_2 et I_3. En déduire I.

EXERCICE 7

1/ Linéariser $g(x) = 8\sin x \cos^3 x - 2\sin 2x$

2/ En intégrant par parties, calculer le réel $I = \int_0^{\pi/4} x\,g(x)\,dx$

EXERCICE 8

Soient les intégrales I et J:

$I = \int_0^{\pi/4} (2x+1)\cos^2 x\,dx$ et $J = \int_0^{\pi/4} (2x+1)\sin^2 x\,dx$

1/ Calculer I+J

2/ En utilisant la technique d'intégration par parties calculer I−J

3/ En déduire les valeurs de I et J

EXERCICE 9

On se propose de trouver sans les calculer séparement les valeurs des trois intégrales:

$I = \int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx$; $J = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx$

$K = \int_0^{\pi/2} 2\sin^2 x \cos^2 x\,dx$.

1/ Calculer I−J et I+J+K.

2/ Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. En déduire I+J−3K.

3/ Trouver à partir des questions précédentes, les valeurs de I, J et K.

EXERCICE 10

On considère la suite (I_n) définie par: $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{\frac{5}{4} - \cos t}\,dt$.

1/ Justifier l'existance de I_n (On ne cherchera pas à calculer I_n)

2/ On donne $I_0 = \frac{4\pi}{3}$. Vérifier que $I_1 = \frac{2\pi}{3}$.

3/ a/ Transformer en produit $\cos(n+2)x + \cos nx$.

b/ Utiliser le résultat précédent pour démontrer que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} + I_n = \frac{5}{2} I_{n+1}$. En déduire que $I_{n+2} - \frac{1}{2} I_{n+1} = 2\left(I_{n+1} - \frac{1}{2} I_n\right)$

c/ Soit $V_n = I_{n+1} - \frac{1}{2} I_n$. Exprimer V_n en fonction de n. En déduire que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

4/ On pose $S_n = I_0 + I_1 + \cdots + I_n$. Exprimer S_n en fonction de n.

EXERCICE 11

L'objectif est d'étudier la suite (U_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par: $U_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ et pour tout $n \geq 1$, $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

1/ Soit f la fonction numérique définie sur $[0;1]$ par: $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

a/ Calculer la dérivée f' de f. En déduire U_0

b/ Calculer U_1.

2/ a/ Prouver que la suite (U_n) est décroissante (On ne cherchera pas à calculer U_n)

En déduire que la suite (U_n) est convergente.

b/ Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;1]$ on a: $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ on a: $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$ (1)

Déterminer la limite de (U_n).

3/ Pour tout entier $n \geq 3$, on pose: $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$

a/ Vérifier que pour tout entier $n \geq 3$ on a: $U_n + U_{n-2} = I_n$.

b/ Par une intégration par parties portant sur I_n, montrer que pour tout entier $n \geq 3$ on a:

$$n U_n + (n-1) U_{n-2} = \sqrt{2}$$

c/ En déduire que pour tout entier $n \geq 3$ on a: $(2n-1) U_n \leq \sqrt{2}$ (2)

d/ A l'aide des inégalités (1) et (2), montrer que la suite $(n U_n)$ est convergente et calculer sa limite

EXERCICE 12

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\,dx$.

1/ Démontrer que la suite (I_n) est positive et décroissante

2/ a/ Pour tout entier naturel n,

déterminer la dérivée de la fonction $x \longmapsto \tan^{n+1} x$.

b/ En déduire que:

i/ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ (1)

ii/ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

iii/ $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

c/ On pose: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = I_{n+4} - I_n$

Utiliser (1) pour démontrer que:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}$

3/ a/ Calculer I_2.

b/ Démontrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$f(2) + f(6) + f(10) + \cdots + f(4n-2) = I_{4n+2} - I_2$

En déduire que:

$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1}\right) = \frac{\pi}{4}$

4/ a/ Calculer I_1.

b/ Démontrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$f(1) + f(5) + f(9) + \cdots + f(4n-3) = I_{4n+1} - I_1$

c/ En déduire que:

$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$

EXERCICE 13

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite définie par: $I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$.

1/ Déterminer deux nombres réels a et b tels que:

$\forall x \in [0; \pi/4]$, $\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}$

En déduire la valeur de I_0

2/ Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties que:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2n I_n = (2n-1) I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$

(On pourra écrire I_n sous la forme $I_n = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^{2n-1} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$)

3/ Calculer alors les intégrales: $J = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^3 x}$ et $K = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^3 x} dx$

EXERCICE 14

On se propose de calculer l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ de deux manières différentes:

1/ A l'aide d'une intégration par parties établir que: $I_n = e - n I_{n-1}$.

En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence que:

$I_n = \left[1 - n + n(n-1) + \cdots + (-1)^p n(n-1) \cdots (n-p+1) + \cdots + (-1)^n n!\right] e + (-1)^{n+1} n!$

2/ Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

Montrer que la fonction F définie par: $F(x) = \left[P(x) - P'(x) + P''(x) + \cdots + (-1)^n P^{(n)}(x)\right] e^x$ est une primitive de $x \longmapsto P(x) e^x$.

Retrouver le résultat établi dans la question 1/.

EXERCICE 15

Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose :

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}\, dx.$$

1.| On suppose que $b = a$. Calculer I.

2.| On suppose que $b \neq a$. Calculer la dérivée de la fonction :

$x \longmapsto a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x$ et en déduire la valeur de I.

EXERCICE 16

Démontrer que la fonction f :

$x \longmapsto \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$ est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et que, pour tout réel x de $[0; \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$

Calculer alors $I = \int_0^{\pi/4} f(x)\, dx$

EXERCICE 17

Ne connaissant pas de primitive de la fonction f définie sur $[0; \frac{1}{2}]$ par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$, on se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale : $I = \int_0^{1/2} \frac{e^{-x}}{1-x}\, dx$.

1.| En étudiant les variations de la fonction f, démontrer pour tout nombre réel x de $[0; \frac{1}{2}]$ l'encadrement : $1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$ (1)

2.| a.| Démontrer que, pour tout x de $[0; \frac{1}{2}]$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$

b.| En déduire que :

$$I = \int_0^{1/2} (1+x)e^{-x}\, dx + \int_0^{1/2} x^2 f(x)\, dx$$

c.| Calculer $J = \int_0^{1/2} (1+x)e^{-x}\, dx$

d.| Déduire de (1) que :

$$\frac{1}{24} \leq \int_0^{1/2} x^2 f(x) \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}.$$

e.| Déduire des questions précédentes une valeur décimale approchée de I à la précision 0,01.

EXERCICE 18

Soit x un réel strictement positif donné, on considère les intégrales :

$I_n = \int_0^x \sin^{2n} t\, dt$ et $J_n = \int_0^x \sin^{2n} t \cos^2 t\, dt$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.| Trouver une relation entre J_n, I_n et I_{n+1}

2.| En intégrant par parties, calculer J_n en fonction de I_{n+1}

En déduire une relation entre I_{n+1} et I_n.

3.| Calculer I_0 et montrer que l'on peut ainsi calculer I_n et J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 19

PARTIE A:

Soit f une primitive, sur $\mathbb{R}$, de l'application φ qui, à tout réel t, associe : $\varphi(t) = \frac{1}{2t^2-2t+1}$

1.) Soit g l'application de l'intervalle $S = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(u) = f\left(\frac{1-\tan u}{2}\right)$. Prouver que g est dérivable sur S, puis que g est une fonction affine.

2.) Montrer que $\int_0^1 \frac{dt}{2t^2-2t+1} = \frac{\pi}{2}$

PARTIE B:

On considère l'application I de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$I(p,q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q \, dt$$

1.) En majorant convenablement $t(1-t)$ pour $t \in [0;1]$, trouver la limite de la suite u telle que:

$u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = I(n,n)$.

2.) Montrer que: $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $I(p+1, q+1) = \frac{q+1}{p+2} I(p+2, q)$ (on pourra utiliser une intégration par parties), puis que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; I(n,n) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

PARTIE C.

1.) Après avoir remarqué que: $2t^2-2t+1 = 1-2t(1-t)$ simplifier l'expression:

$$\frac{1}{2t^2-2t+1} - 1 - \sum_{k=1}^{n} 2^k t^k (1-t)^k.$$

2.) On considère la suite v telle que: $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}$

Quelle est la limite de la suite w telle que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$?

EXERCICE 20

PARTIE A:

Dans cette partie, x désigne un nombre réel et t une variable réelle.

1.) En utilisant la formule d'intégration par parties, démontrer que:

$$\int_0^x t e^t \, dt = x e^x - \int_0^x e^t \, dt.$$

En déduire, par un calcul de l'intégrale $\int_0^x (x-t) e^t \, dt$ que:

$$e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t) e^t \, dt.$$

2.) On considère l'intégrale $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer l'égalité:

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \, dt.$$

3.) Démontrer par récurrence sur n la formule:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt$$

PARTIE B:

On pose $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$,
$I_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$ et $J_n = \int_{-1}^0 (1+t)^n e^t dt$.

1/ Pour $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$, on considère $H = ae + b + ce^{-1}$. Dans les deux premières questions on suppose $|a| + |c| \neq 0$.

a/ Démontrer que l'on a:
$n!H = n![aP_n(1) + b + cP_n(-1)] + aI_n + (-1)^{n+1} c J_n$.

b/ Démontrer que l'on a:
$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ et $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$
En déduire la limite de $h(n) = aI_n + (-1)^{n+1} c J_n$ quand n augmente indéfiniment.

c/ Démontrer que:
$\theta_n = n![aP_n(1) + b + cP_n(-1)]$ est un nombre entier relatif.

EXERCICE 21

PARTIE A:

1/ On considère la fonction f de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ définie par:
$f(x) = \tan x$
Démontrer que f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
Dans toute la suite du problème, on désignera par φ la fonction réciproque de f.

2/ Préciser le domaine de définition de φ puis calculer: $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(\sqrt{3})$ et $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

3/ Tracer dans un repère orthonormal la courbe (C) représentative de f puis en déduire sur le même graphique la courbe (C') représentative de la fonction φ.

4/ Démontrer que $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

5/ Démontrer alors que la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $g(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 1$ est continue sur $\mathbb{R}$.

6/ Soit p et q deux fonctions de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par: $p(x) = x - \varphi(x)$ et $q(x) = x - \frac{x^3}{3} - \varphi(x)$.
En étudiant les variations des fonctions p et q démontrer que:
$0 \leq x - \varphi(x) \leq \frac{x^3}{3}$ pour tout $x > 0$

PARTIE B:

Dans toute la suite du problème, on considère la fonction h de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $\begin{cases} h(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t} dt \text{ si } x > 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$

(On cherchera pas à calculer l'intégrale qui définit h).

1.| Démontrer que:

$$1-h(x)=\frac{1}{x}\int_0^x \frac{t-\varphi(t)}{t}\,dt \text{ si } x>0$$

2.| En utilisant A-6.| et la question précédente, démontrer que:

$$0\leq 1-h(x)\leq \frac{x^2}{9}, \text{ si } x>0$$

En déduire que h est continue à droite en 0 et que sa dérivée à droite en 0 est 0.

3.| Démontrer que si $x\geq 1$:

$$0\leq \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}\,dt \leq \frac{\pi}{2}\int_1^x \frac{dt}{t}=\frac{\pi}{2}\ln x.$$

En écrivant:

$$h(x)=\frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t}\,dt+\frac{1}{x}\int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}\,dt,$$

démontrer que: $\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$

PARTIE C

1.| Vérifier que:

$$x^2h'(x)=-\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}\,dt+\varphi(x).$$

pour tout $x>0$.

2.| On pose $V(x)=x^2h'(x)$, pour tout $x>0$. Vérifier que:

$$xV'(x)=-\varphi(x)+\frac{x}{1+x^2}$$

3.| Etudier les variations de la fonction u de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $u(x)=xV'(x)$. En déduire le signe de $V'(x)$, puis celui de $h'(x)$ pour tout $x>0$.

4.| Rassembler les résultats des parties B et C pour donner l'allure de la courbe représentative de h dans un repère orthonormal.

EXERCICE 22

On considère les fonctions dépendant d'un entier naturel n et définies sur l'intervalle $[0;1]$ par:

$f_0(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$; et pour tout $n\geq 1$

$f_n(x)=\frac{x^n}{1+x+x^2}$ On pose: $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$

PARTIE A

1.| Etudier le sens de variation de la fonction f_0. Construire la courbe représentative de f_0 dans un repère orthonormal (unité graphique 6cm) en précisant les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

2.| On note pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;1]$: $f(x)=-f_0'(x)$. Calculer la fonction dérivée de f et montrer que f est décroissante sur $[0;1]$. En déduire que pour tout x appartenant à $[0;1]$, on a: $\frac{1}{3}\leq f(x)\leq 1$.

PARTIE B: (On ne cherchera pas à calculer I_n)

1.| Calculer : $I_0+I_1+I_2$ et I_0+2I_1.

2.| Etudier, pour tout entier n et pour x appartenant à $[0;1]$, le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$.

En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

3.| Montrer que, pour tout entier n et pour tout x appartenant à $[0;1]$,

$0 \leq f_n(x) \leq x^n$.

En déduire que: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

Déterminer la limite de la suite (I_n)

4.| a.| À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier n:

$$I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x).x^{n+1}\,dx$$

(f étant la fonction définie dans le A.2)

b.| En utilisant l'encadrement obtenu dans la question A-2, montrer que, pour tout entier n:

$$\frac{1}{3(n+2)} \leq \int_0^1 f(x).x^{n+1}\,dx \leq \frac{1}{n+2}$$

puis que :

$$\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

c.| À partir de quel entier n_0 cet encadrement conduit-il à une valeur approchée au centième près de I_n?

d.| Déterminer alors la valeur approchée au centième près de I_n pour $n = n_0$.

EXERCICE 23

Calculer l'intégrale suivante.

$$I = \int_1^n (|x-1|+|x-2|+\dots+|x-n|)\,dx$$

$n \in \mathbb{N}^*$

EXERCICE 24

1.| Montrer, en utilisant une intégrale que la surface d'un cercle de rayon r est $S = \pi r^2$

2.| Soit ABCD un carré de côté a. $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$, $(\mathcal{C}_3)$ et $(\mathcal{C}_4)$ les quarts de cercle de rayon a et de centre respectifs A, B, C et D.

Calculer en fonction de a la surface du domaine plan limité par les quarts de cercle $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$, $(\mathcal{C}_3)$ et $(\mathcal{C}_4)$.

EXERCICE 25

On considère l'intégrale I_n, $n \in \mathbb{N}$ définie par: $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n\,dx$

1.| Calculer I_0 obtenue pour $n=0$

2.| A l'aide d'une intégration par parties : calculer I_1 obtenue pour $n=1$

Donner l'expression de I_{n+1} en fonction de I_n

3.| Calculer en utilisant les résultats

précédents l'intégrale :

$$J=\int_1^e x\left[1+\ln x-(\ln x)^2+2(\ln x)^3\right]dx$$

EXERCICE 26

PARTIE A.

On considère les intégrales suivantes

$$I=\int_0^{\pi/3}\frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx \text{ et } J=\int_0^{\pi/3}\frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$$

1./ Calculer J.

2./ Calculer I+J.

3./ En déduire la valeur de I

PARTIE B

En vous inspirant de la partie A, calculer l'intégrale $K=\int_0^{\pi/3}\frac{\sin 2x}{1+2\cos x}dx$

EXERCICE 27

On se propose de calculer les intégrales suivantes : $I=\int_0^{\pi/4}\cos^4 x\,dx$; $J=\int_0^{\pi/4}\sin^4 x\,dx$

1./ a./ Vérifier que :

$$I=\int_0^{\pi/4}\cos x\left(\cos x-\cos x\sin^2 x\right)dx.$$

En déduire que $I=\int_0^{\pi/4}\sin^2 x\,dx-\frac{1}{3}J+\frac{5}{12}$

2./ Par analogie, montrer que :

$$J=\int_0^{\pi/4}\cos^2 x\,dx-\frac{1}{3}I-\frac{5}{12}$$

3./ Calculer I+J et I−J.

En déduire les valeurs de I et J

EXERCICE 28

On se propose de calculer l'intégrale

$$J=\int_0^1\frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx$$

1./ Calculer $A=\int_0^1\frac{e^x}{1+e^x}dx$ et $B=\int_0^1\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$

2./ Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre réel t positif ou nul on ait :

$$\frac{1}{(1+t)^2}=a+\frac{bt}{1+t}+\frac{ct}{(1+t)^2}\quad(1).$$

3/ En posant $t=e^x$ dans l'égalité (1) calculer $I=\int_0^1\frac{1}{(1+e^x)^2}dx$

4./ a/ A l'aide d'une intégration par parties, exprimer J en fonction de I.

b./ En déduire la valeur de J.

A l'aide de la calculatrice donner une valeur approchée de J à 10^{-2} près.

EXERCICE 29

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on définit l'intégrale $I_k=\int_0^1 x^k\sqrt{1-x}\,dx$ et

$$I_0=\int_0^1\sqrt{1-x}\,dx.$$

1./ Calculer I_0.

2./ Montrer en intégrant par parties que pour tout entier $k\geq 1$:

$$I_k=\frac{2k}{2k+3}I_{k-1}$$

En déduire une expression de I_k (que l'on ne cherchera pas à simplifier).

3./ Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$I_k \leq \frac{1}{k+1}$$

4./ On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur l'intervalle fermé $[0;1]$ par:

$F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ si $0 \leq x < 1$ et $F(1) = 0$.

a./ Etudier la continuité de F sur $[0;1]$

b./ Etudier les variations de F.

5./ Dans la suite, on note F_n, pour tout entier $n > 0$, la fonction définie par

$F_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(x)$ où f_i est la fonction définie sur $[0;1]$ par:

$f_i(x) = x^i \sqrt{1-x}$.

a./ Calculer $F_n(x)$ et montrer que pour tout réel x fixé dans $]0;1[$, $F(x)$ est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $F_n(x)$.

b./ Pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par A_n l'intégrale: $\int_0^{1-\frac{1}{n}} F(x)\,dx$.

Calculer A_n et $\lim_{n \to +\infty} A_n$.

EXERCICE 30

On considère les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par: $f_0(x) = \frac{1}{x^2-x+1}$ pour $n=0$

$f_n(x) = \frac{x^n}{x^2-x+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

On pose, pour n entier naturel,

$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1./ a./ Calculer $f_0'(x)$ et étudier les variations de la fonction f_0.

b./ On note (Γ_0) la courbe représentative de f_0, A et B les points de (Γ_0) d'abscisses 0 et 1 respectivement, D_A et D_B les tangentes en A et B à (Γ_0), $y = \varphi_A(x)$ et $y = \varphi_B(x)$ les équations de ces tangentes.

Donner les équations de D_A et D_B

Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) - \varphi_A(x)$ et $f_0(x) - \varphi_B(x)$.

En déduire la position de (Γ_0) par rapport aux tangentes D_A et D_B.

c./ Dans un plan rapporté à un repère orthonormal (on choisira pour unité graphique 3cm), tracer la portion de (Γ_0) correspondant à l'intervalle $[-1;2]$, ainsi que les tangentes D_A et D_B.

2./ Soit P une parabole d'équation:

$y = p(x) = ax^2 + bx + c$.

a/ Déterminer les coefficients a, b et c pour que la parabole P passe par les points A et B et soit tangente à D_A.

b/ Calculer $f_0(x) - p(x)$

En déduire la position de (Γ_0) par rapport à P.

Tracer la parabole P sur le graphique de la question 1.c.

3/ En utilisant les questions 1 et 2, établir que $\frac{k}{12} < I_0 < \frac{m}{12}$ où k et m sont deux entiers que l'on précisera.

Indiquer les inégalités entre intégrales que l'on aura utilisées pour obtenir ce résultat.

4/ a/ Calculer $2I_1 - I_0$; en déduire I_1 en fonction de I_0.

b/ Calculer $I_2 - I_1 + I_0$.

En déduire I_2 en fonction de I_0

Déterminer deux entiers q et r tels que $I_2 \in \left]\frac{q}{8}; \frac{r}{12}\right[$

5/ Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n \leq x^n f_0(x) \leq \frac{4}{3}x^n$

En déduire deux réels a et b tels que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{n+1} \leq I_n \leq \frac{b}{n+1}$

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

6/ a/ A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 g(x) x^{n+1} dx$

où g est une fonction que l'on précisera

b/ Calculer $g'(x)$ et étudier les variations de g sur l'intervalle $[0;1]$

c/ Etablir que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $1 + \frac{i}{n+2} \leq (n+1) I_n \leq 1 + \frac{j}{n+2}$

où i et j sont deux entiers que l'on précisera.

En déduire $\lim_{n \to +\infty} n I_n$.

CORRIGES DES EXERCICES SUR LE CALCUL INTEGRAL

EXERCICE 1

Calculs d'intégrales.

$$I=\int_0^1 \frac{3x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{x^2+1}\right]_0^1$$

$$=\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4}$$

$$\boxed{I=\frac{3}{4}}$$

$$J=\int_{-2}^1 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx=-\int_{-2}^1 \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}dx$$

$$=-\left[\sqrt{9-x^2}\right]_{-2}^1$$

$$=-\left(\sqrt{8}-\sqrt{5}\right)$$

$$\boxed{J=\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$$

$$K=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2x-1)dx$$

$$=\left[\tan x-x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\left(-1+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$2-\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{K=2-\frac{\pi}{2}}$$

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan x+\tan^3x\right)dx=\int_0^{\pi/4}\tan x\left(1+\tan^2x\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\tan^2x\right]_0^{\pi/4}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1^2-0^2\right)=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{L=\frac{1}{2}}$$

$$M=\int_0^{\pi/2}\sin^4x\cos x\,dx=\left[\frac{1}{5}\sin^5x\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{1}{5}\left(1^5-0^5\right)=\frac{1}{5}$$

$$\boxed{M=\frac{1}{5}}$$

$$N=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/3}\frac{1+\tan^2x}{\tan x}dx=\left[\ln|\tan x|\right]_{\pi/4}^{\pi/3}$$

$$=\ln\sqrt{3}-\ln 1=\frac{1}{2}\ln 3$$

$$\boxed{N=\frac{1}{2}\ln 3}$$

$$P=\int_2^1 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_2^1 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$$

$$=-\left[e^{\frac{1}{x}}\right]_2^1$$

$$=-\left(e-e^{\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{e}-e$$

$$\boxed{P=\sqrt{e}-e}$$

$$R=\int_{\frac{1}{e}}^{e^3}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{e^3}\frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}dx$$

$$=-\left[\frac{1}{\ln x}\right]_{\frac{1}{e}}^{e^3}$$

$$=-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{1}\right)=\frac{-4}{3}$$

$$\boxed{R=\frac{-4}{3}}$$

$$S=\int_{\frac{5}{3}}^{2}\frac{1}{(3x-4)^5}dx$$

Posons $u=3x-4 \Rightarrow du=3dx$

Pour $x=\frac{5}{3}$, $u=-2$

Pour $x=2$, $u=2$

$$S=\int_{-2}^{2}\frac{1}{u^5}\cdot\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int_{-2}^{2}\frac{du}{u^5}$$

$$=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{u^4}\right]_{-2}^{2}$$

$z - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) = 0$

$\boxed{S = 0}$

$T = \int_1^e \ln t\, dt$ Posons $U = \ln t \Rightarrow U' = \frac{1}{t}$

$V' = 1 \Rightarrow V = t$

$T = [t \ln t]_1^e - \int_1^e dt$

$= (e - 0) - (e - 1) = 1$

$\boxed{T = 1}$

$U = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} e^x \cos 2x\, dx$

Posons $f = e^x \Rightarrow f' = e^x$

$g' = \cos 2x \Rightarrow g = \frac{1}{2}\sin 2x$

$U = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\, e^x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} e^x \sin 2x\, dx$

$= \frac{1}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} e^x \sin 2x\, dx$

Posons $C = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} e^x \sin 2x\, dx$

Posons $\mu = e^x \Rightarrow \mu' = e^x$

$V' = \sin 2x \Rightarrow V = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$C = \left[-\frac{1}{2}e^x \cos 2x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} e^x \cos 2x\, dx$

$= \frac{1}{2}U$

Finalement on a:

$U = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{4}} - e^{\frac{3\pi}{4}}\right) - \frac{1}{4}U$

$\Leftrightarrow U = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{4}} - e^{\frac{3\pi}{4}}\right)$

$\boxed{U = \frac{2}{5}\left(e^{-\frac{\pi}{4}} - e^{\frac{3\pi}{4}}\right)}$

$V = \int_{-1}^{0} x^2 e^{-x}\, dx$

Posons $f(x) = x^2 \Leftrightarrow f'(x) = 2x$

$g'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow g(x) = -e^{-x}$

$V = \left[-x^2 e^{-x}\right]_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0} x e^{-x} dx$

$= e + 2\int_{-1}^{0} x e^{-x} dx$

Posons $t(x) = x \Leftrightarrow t'(x) = 1$

$s'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow s(x) = -e^{-x}$

$V = e + 2\left[-x e^{-x}\right]_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0} e^{-x} dx$

$= e - 2e + 2\left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0}$

$= e - 2e + 2(-1 + e) = e - 2$

$\boxed{V = e - 2}$

$W = \int_0^2 (1 - |x-1|^3)\, dx$

$= \int_0^1 (1 - |x-1|^3) dx + \int_1^2 (1 - |x-1|^3) dx$

$= \int_0^1 \left[1 - (1-x)^3\right] dx + \int_1^2 \left[1 - (x-1)^3\right] dx$

$= \left[x + \frac{1}{4}(1-x)^4\right]_0^1 + \left[x - \frac{1}{4}(x-1)^4\right]_1^2$

$= \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(2 - \frac{1}{4} - 1\right) = \frac{3}{2}$

$\boxed{W = \frac{3}{2}}$

$Z = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ Posons $t = \tan u$ On a

$dt = (1 + \tan^2 u)\, du$

$t = 0 \Leftrightarrow \tan u = 0 \Rightarrow u = 0$

$t = 1 \Leftrightarrow \tan u = 1 \Rightarrow u = \pi/4$

$Z = \int_0^{\pi/4} \frac{(1+\tan^2 u)\, du}{1+\tan^2 u} = \int_0^{\pi/4} du = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

$$\boxed{Z = \frac{\pi}{4}}$$

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$$ Posons $x = \sin\theta$

On a: $dx = \cos\theta\,d\theta$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$$A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/3} \left(\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)\cos\theta\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} |\cos\theta|\cos\theta\,d\theta$$

or $\forall \theta \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$, $\cos\theta > 0$

$$A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/3}$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$$

$$\boxed{A = \frac{\pi}{12}}$$

$$B = \int_0^{\pi/2} (\cos^3 t \sin t + \sin^3 t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos^3 t \sin t + \sin^2 t \sin t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos^3 t \sin t + (1-\cos^2 t)\sin t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos^3 t \sin t + \sin t - \cos^2 t \sin t)\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{4}\cos^4 t - \cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{11}{12}$$

$$\boxed{B = \frac{11}{12}}$$

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x+5}{(x+1)^2}$

1/ Déterminons deux nombres réels a et b tels que:

$\forall x \in \mathbb{R}-\{-1;1\}$, $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{-1;1\}$, $f(x) = \frac{2x+5}{(x+1)^2}$

$$= \frac{2(x+1)+3}{(x+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}$$

On en déduit donc: $a = 2$ $b = 3$

2/ Déduisons-en la valeur de l'intégrale : $I = \int_0^3 \frac{2x+5}{(x+1)^2}\,dx$

$$I = \int_0^3 \left(\frac{2}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$= \left[2\ln|x+1| - \frac{3}{x+1}\right]_0^3$$

$$= 2\ln 4 - \frac{3}{4} + 3 = 4\ln 2 + \frac{9}{4}$$

$$\boxed{I = 4\ln 2 + \frac{9}{4}}$$

EXERCICE 3

On considère la fonction g définie par: $g(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$

1/ Déterminons trois nombres réels a, b et c tels que:

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{ax^2+a+bx^2+cx}{x(x^2+1)}$$

$g(x) = \frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(x^2+1)}$ Par identification on a: $\begin{cases} a+b=1 \\ c=0 \\ a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=0 \end{cases}$

$a=-1$	$b=2$	$c=0$

$g(x) = \frac{-1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

2/ Déduisons-en la valeur de l'intégrale : $J = \int_1^3 \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx$

$J = \int_1^3 \left(-\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}\right) dx = \left[-\ln|x| + \ln(x^2+1)\right]_1^3$

$= -\ln 3 + \ln 10 - \ln 2 = \ln\frac{5}{3}$

$$\boxed{J = \ln\frac{5}{3}}$$

EXERCICE 4

L'objectif de cet exercice est de calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$; $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$

1/ Calcul de I

Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+2})$

a/ Calculons la dérivée f' de f.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x+\sqrt{x^2+2} > 0$ et $x^2+2 > 0$

f est donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ or $[0;1] \subset \mathbb{R}$. On conclut alors que f est continue et dérivable sur $[0;1]$

et $\forall x \in [0;1]$, $f'(x) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}}$

$= \frac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}} \times \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2}}$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

$$\boxed{\forall x \in [0;1],\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}}$$

b/ Calculons alors la valeur de I.

$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \int_0^1 f'(x)\,dx = \left[f(x)\right]_0^1$

$I = f(1) - f(0) = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln\sqrt{2}$

$$\boxed{I = \ln\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}\right)}$$

2/ Calcul de J et de K.

a/ Sans calculer explicitement J et K, vérifions que $J+2I = K$.

$J+2I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx + 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$

$= \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx = K$

$$\boxed{J+2I = K}$$

b/ A l'aide d'une intégration par parties de l'intégrale K, montrons que

$K = \sqrt{3} - J$

$K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$

Posons $u(x) = \sqrt{x^2+2} \Rightarrow u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$

$K = \left[x\sqrt{x^2+2}\right] - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$

$= \sqrt{3} - 0 - J = \sqrt{3} - J$

$$K = \sqrt{3} - J$$

c/ Déduisons-en les valeurs de J et de K

$$\begin{cases} J + 2I = K \\ K = \sqrt{3} - J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J + 2I = \sqrt{3} - J \\ K = \sqrt{3} - J \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2J = \sqrt{3} - 2I \\ K = \sqrt{3} - J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J = \frac{\sqrt{3}}{2} - I \\ K = \frac{\sqrt{3}}{2} + I. \end{cases}$$

$$J = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right) \qquad K = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$$

EXERCICE 5

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}$

1/ Montrons que $I_1 = \frac{\pi}{4}$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

Posons $x = \tan u$. $\Leftrightarrow dx = (1+\tan^2 u)\,du$

$x = 0 \Leftrightarrow \tan u = 0 \Rightarrow u = 0$

$x = 1 \Leftrightarrow \tan u = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4}$

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{(1+\tan^2 u)\,du}{1+\tan^2 u} = \int_0^{\pi/4} du = \left[u\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$I_1 = \frac{\pi}{4}$$

2/ A l'aide d'une intégration par parties, démontrons que:

$$2n\,I_{n+1} = (2n-1)\,I_n + \frac{1}{2^n}$$

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Posons $U(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} \Rightarrow U'(x) = \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}}$

$V'(x) = 1 \Rightarrow V(x) = x$

$$I_n = \left[\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_0^1 + 2n \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2^n} + 2n \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2^n} + 2n \int_0^1 \left(\frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right)dx$$

$$I_n = \frac{1}{2^n} + 2n\left(I_n - I_{n+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2n\,I_{n+1} = (2n-1)\,I_n + \frac{1}{2^n}$$

$$2n\,I_{n+1} = (2n-1)\,I_n + \frac{1}{2^n}$$

3/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \frac{x^4}{(1+x^2)^3}$

a/ Démontrons qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout x réel

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2} + \frac{b}{(1+x^2)^2} + \frac{c}{(1+x^2)^3}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{a(1+x^2)^2 + b(1+x^2) + c}{(1+x^2)^3}$$

$$= \frac{ax^4 + (2a+b)x^2 + a + b + c}{(1+x^2)^3}$$

Par identification on a:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

$a = 1\ \ b = -2\ \ c = 1$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{(1+x^2)^3}$$

b/ Calculons $\int_0^1 f(x)\,dx$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{(1+x^2)^3}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - 2\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

$$= I_1 - 2I_2 + I_3$$

$I_1 = \frac{\pi}{4}$; $2I_2 = I_1 + \frac{1}{2} \Rightarrow I_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

$4I_3 = 3I_2 + \frac{1}{4} = \frac{3\pi}{8} + 1 \Rightarrow I_3 = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi}{4} - 2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) + \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3\pi}{32} - \frac{1}{4} = \frac{3\pi - 8}{32}$$

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{3\pi - 8}{32}}$$

EXERCICE 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$

1/ Soit $I_1 = \int_0^1 x e^{-x}\,dx$.

Montrons à l'aide d'une intégration par parties que $I_1 = 1 - \frac{2}{e}$

$I_1 = \int_0^1 x e^{-x}\,dx$ Posons $U(x) = x \Rightarrow U'(x) = 1$

$V'(x) = e^{-x} \Rightarrow V(x) = -e^{-x}$

$$I_1 = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx$$

$$= -e^{-1} + 0 + \left[-e^{-x}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$

$$\boxed{I_1 = 1 - \frac{2}{e}}$$

2/ Soit $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x}\,dx$.

Montrons à l'aide d'une intégration par parties que :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$$

$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x}\,dx$

$U(x) = x^{n+1} \Rightarrow U'(x) = (n+1)x^n$

$V'(x) = e^{-x} \Rightarrow V(x) = -e^{-x}$

$$I_{n+1} = \left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{e} + (n+1)I_n.$$

$$\boxed{I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}} \quad (1)$$

3/ - Exprimons I_2 en fonction de I_1

Remplaçons n par 1 dans l'égalité (1)

on a : $I_2 = 2I_1 - \frac{1}{e}$.

$$\boxed{I_2 = 2I_1 - \frac{1}{e}}$$

- Déduisons-en I_2 en fonction de e

$$I_2 = 2I_1 - \frac{1}{e} = 2\left(1 - \frac{2}{e}\right) - \frac{1}{e} = 2 - \frac{5}{e}$$

$$\boxed{I_2 = 2 - \frac{5}{e}}$$

Exprimons I_3 en fonction de I_2

Posons $n = 2$ dans (1) on a : $I_3 = 3I_2 - \frac{1}{e}$

$$\boxed{I_3 = 3I_2 - \frac{1}{e}}$$

Montrons que $I_3 = 6 - \frac{16}{e}$

$$I_3 = 3I_2 - \frac{1}{e} = 3\left(2 - \frac{5}{e}\right) - \frac{1}{e} = 6 - \frac{15}{e} - \frac{1}{e}$$

$$\boxed{I_3 = 6 - \frac{16}{e}}$$

4/ Soit $I = \int_0^1 (2x^3 - 3x^2 + 4x)e^{-x}\,dx$

Exprimons I en fonction de I_1, I_2 et I_3

$I=\int_0^1 (2x^3-8x^2+4x)e^{-x}\,dx$

$=2\int_0^1 x^3e^{-x}dx-8\int_0^1 x^2e^{-x}dx+4\int_0^1 xe^{-x}dx$

$\boxed{I=2I_3-8I_2+4I_1}$

Déduisons-en I.

$I=2I_3-8I_2+4I_1$

$=2\left(6-\frac{16}{e}\right)-8\left(2-\frac{5}{e}\right)+4\left(1-\frac{2}{e}\right)$

$=12-\frac{32}{e}-16+\frac{40}{e}+4-\frac{8}{e}=0$

$\boxed{I=0}$

EXERCICE 7

1/ Linéarisons $g(x)=8\sin x\cos^3 x-2\sin x$

$g(x)=8\sin x\cos^3 x-2\sin 2x$

$=4(2\sin x\cos x)\cos^2 x-2\sin 2x$

$=4\sin 2x\cos^2 x-2\sin 2x$

$=2\sin 2x(2\cos^2 x-1)$

$=2\sin 2x\cos 2x=\sin 4x$

$\boxed{g(x)=\sin 4x}$

2/ En intégrant par parties, calculons le réel $I=\int_0^{\pi/4} x\,g(x)\,dx$

Posons $U(x)=x \Rightarrow U'(x)=1$

$V'(x)=\sin 4x \Rightarrow V(x)=-\frac{1}{4}\cos 4x$

$I=\left[-\frac{1}{4}x\cos 4x\right]_0^{\pi/4}+\frac{1}{4}\int_0^1 \cos 4x\,dx$

$=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{16}\left[\sin 4x\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{16}(0-0)$

$\boxed{I=\frac{\pi}{16}}$

EXERCICE 8

Soient les intégrales I et J :

$I=\int_0^{\pi/4}(2x+1)\cos^2 x\,dx \quad J=\int_0^{\pi/4}(2x+1)\sin^2 x\,dx$

1/ Calculons $I+J$

$I+J=\int_0^{\pi/4}(2x+1)\cos^2 x\,dx+\int_0^{\pi/4}(2x+1)\sin^2 x\,dx$

$=\int_0^{\pi/4}(2x+1)(\cos^2 x+\sin^2 x)\,dx$

$=\int_0^{\pi/4}(2x+1)\,dx$

$=\left[x^2+x\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2+4\pi}{16}$

$\boxed{I+J=\frac{\pi^2+4\pi}{16}}$

2/ En utilisant la technique d'intégration par parties calculons $I-J$

$I-J=\int_0^{\pi/4}(2x+1)\cos^2 x\,dx-\int_0^1(2x+1)\sin^2 x\,dx$

$=\int_0^{\pi/4}(2x+1)(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx$

$I-J=\int_0^{\pi/4}(2x+1)\cos 2x\,dx$

Posons $U(x)=2x+1 \Rightarrow U'(x)=2$

$V'(x)=\cos 2x \Rightarrow V(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$

$I-J=\left[\frac{1}{2}(2x+1)\sin 2x\right]_0^{\pi/4}-\int_0^{\pi/4}\sin 2x\,dx$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)+\left[\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi/4}$

$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}$

$$\boxed{I-J=\frac{\pi}{4}}$$

3/ Déduisons-en les valeurs de I et J

$$\begin{cases} I+J=\frac{\pi^2+4\pi}{16} \\ I-J=\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I=\frac{\pi^2+8\pi}{32} \\ J=\frac{\pi^2}{32} \end{cases}$$

$$\boxed{I=\frac{\pi^2+8\pi}{32} \quad J=\frac{\pi^2}{32}}$$

EXERCICE 9

On se propose de trouver sans les calculer séparément les valeurs des trois intégrales :

$I=\int_0^{\pi/2}\cos^4x\,dx$; $J=\int_0^{\pi/2}\sin^4x\,dx$; $K=\int_0^{\pi/2}2\sin^2x\cos^2x\,dx$

1/ Calculons $I-J$ et $I+J+K$.

$$I-J=\int_0^{\pi/2}\cos^4x\,dx-\int_0^{\pi/2}\sin^4x\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}(\cos^4x-\sin^4x)\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}(\cos^2x-\sin^2x)(\cos^2x+\sin^2x)\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}(\cos^2x-\sin^2x)\,dx \text{ car } \cos^2x+\sin^2x=1$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos 2x=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}(0-0)$$

$$\boxed{I-J=0}$$

$$I+J+K=\int_0^{\pi/2}(\cos^4x+\sin^4x+2\sin^2x\cos^2x)\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}(\cos^2x+\sin^2x)^2\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{I+J+K=\frac{\pi}{2}}$$

2/ Exprimons $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

$$\cos 4x=\cos^2 2x-\sin^2 2x$$

$$=(\cos^2x-\sin^2x)^2-4\cos^2x\sin^2x$$

$$\boxed{\cos 4x=\cos^4x+\sin^4x-6\sin^2x\cos^2x}$$

Déduisons-en $I+J-3K$

$$I+J-3K=\int_0^{\pi/2}(\cos^4x+\sin^4x-6\sin^2x\cos^2x)\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos 4x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{4}(0-0)=0$$

$$\boxed{I+J-3K=0}$$

3/ Trouvons à partir des questions précédentes, les valeurs de I, J et K

D'après ce qui précède on a :

$$\begin{cases} I-J=0 \\ I+J+K=\frac{\pi}{2} \\ I+J-3K=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I=J \\ 2I+K=\frac{\pi}{2} \\ 2I-3K=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4K=\frac{\pi}{2} \Rightarrow K=\frac{\pi}{8} \\ I=\frac{3}{2}K=\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{16} \end{cases}$$

$$\boxed{I=\frac{3\pi}{16} \quad J=\frac{3\pi}{16} \quad K=\frac{\pi}{8}}$$

EXERCICE 10

On considère la suite (I_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n=\int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{\frac{5}{4}-\cos t}\,dt$.

//

$$\boxed{I-J=\frac{\pi}{4}}$$

3/ Déduisons-en les valeurs de I et J

$$\begin{cases} I+J=\frac{\pi^2+4\pi}{16} \\ I-J=\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I=\frac{\pi^2+8\pi}{32} \\ J=\frac{\pi^2}{32} \end{cases}$$

$$\boxed{I=\frac{\pi^2+8\pi}{32} \quad J=\frac{\pi^2}{32}}$$

EXERCICE 9

On se propose de trouver sans les calculer séparement les valeurs des trois intégrales :

$$I=\int_0^{\pi/2}\cos^4x\,dx ;\quad J=\int_0^{\pi/2}\sin^4x\,dx ;\quad K=\int_0^{\pi/2}2\sin^2x\cos^2x\,dx$$

1/ Calculons $I-J$ et $I+J+K$.

$$I-J=\int_0^{\pi/2}\cos^4x\,dx-\int_0^{\pi/2}\sin^4x\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}(\cos^4x-\sin^4x)\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}(\cos^2x-\sin^2x)(\cos^2x+\sin^2x)\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}(\cos^2x-\sin^2x)\,dx \text{ car } \cos^2x+\sin^2x=1$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos 2x=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}(0-0)$$

$$\boxed{I-J=0}$$

$$I+J+K=\int_0^{\pi/2}(\cos^4x+\sin^4x+2\sin^2x\cos^2x)\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}(\cos^2x+\sin^2x)^2\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{I+J+K=\frac{\pi}{2}}$$

2/ Exprimons $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

$$\cos 4x=\cos^2 2x-\sin^2 2x$$

$$=(\cos^2x-\sin^2x)^2-4\cos^2x\sin^2x$$

$$\boxed{\cos 4x=\cos^4x+\sin^4x-6\sin^2x\cos^2x}$$

Déduisons-en $I+J-3K$

$$I+J-3K=\int_0^{\pi/2}(\cos^4x+\sin^4x-6\sin^2x\cos^2x)\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos 4x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{4}(0-0)=0$$

$$\boxed{I+J-3K=0}$$

3/ Trouvons à partir des questions précédentes, les valeurs de I, J et K

D'après ce qui précède on a :

$$\begin{cases} I-J=0 \\ I+J+K=\frac{\pi}{2} \\ I+J-3K=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I=J \\ 2I+K=\frac{\pi}{2} \\ 2I-3K=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4K=\frac{\pi}{2} \Rightarrow K=\frac{\pi}{8} \\ I=\frac{3}{2}K=\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{16} \end{cases}$$

$$\boxed{I=\frac{3\pi}{16} \quad J=\frac{3\pi}{16} \quad K=\frac{\pi}{8}}$$

EXERCICE 10

On considère la suite (I_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n=\int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{\frac{5}{4}-\cos t}\,dt$.

//

1/ Justifions l'existence de I_n

Les fonctions $t \mapsto \cos nt$ et $t \mapsto \frac{5}{4} - \cos t$ sont continues sur $[0;\pi]$ et $\forall t \in [0;\pi]$, $\frac{5}{4} - \cos t \neq 0$.

On en déduit que : $t \mapsto \frac{\cos nt}{\frac{5}{4} - \cos t}$ est continue sur $[0;\pi]$ d'où l'existence de I_n.

2/ On donne $I_0 = \frac{4\pi}{3}$.

Vérifions que $I_1 = \frac{2\pi}{3}$

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{\cos t}{\frac{5}{4} - \cos t} dt = \int_0^{\pi} \left(-1 + \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4} - \cos t}\right) dt$$

$$= \int_0^{\pi} -dt + \frac{5}{4} \int_0^{\pi} \frac{dt}{\frac{5}{4} - \cos t}$$

$$= -\pi + \frac{5}{4} I_0 = -\pi + \frac{5}{4} \cdot \frac{4\pi}{3}$$

$$I_1 = -\pi + \frac{5\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\boxed{I_1 = \frac{2\pi}{3}}$$

3/ a/ Transformons en produit

$-\cos(n+2)x + \cos nx$

On sait que : $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

En posant $p = (n+2)x$ et $q = nx$ on a :

$$\boxed{\cos(n+2)x + \cos nx = 2\cos(n+1)x \cos x}.$$

b/ Utilisons le résultat précédent pour démontrer que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} + I_n = \frac{5}{2} I_{n+1}$

$$I_{n+2} + I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+2)t}{\frac{5}{4} - \cos t} dt + \int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{\frac{5}{4} - \cos t} dt$$

$$I_{n+2} + I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+2)t + \cos nt}{\frac{5}{4} - \cos t} dt$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{2\cos(n+1)t \cos t}{\frac{5}{4} - \cos t} dt$$

$$= 2\int_0^{\pi} \left(-1 + \frac{5/4}{\frac{5}{4} - \cos t}\right) \cos(n+1)t \, dt$$

$$= 2\int_0^{\pi} -\cos(n+1)t \, dt + \frac{5}{2} \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)t \, dt}{\frac{5}{4} - \cos t}$$

$$= -\frac{2}{n+1}\left[\sin(n+1)t\right]_0^{\pi} + \frac{5}{2} I_{n+1}$$

$$= -\frac{2}{n+1}(0-0) + \frac{5}{2} I_{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} + I_n = \frac{5}{2} I_{n+1}}$$

Déduisons-en que :

$$I_{n+2} - \frac{1}{2} I_{n+1} = 2\left(I_{n+1} - \frac{1}{2} I_n\right).$$

$$I_{n+2} - \frac{1}{2} I_{n+1} = \frac{5}{2} I_{n+1} - I_n - \frac{1}{2} I_{n+1}$$

$$= 2 I_{n+1} - I_n$$

$$= 2\left(I_{n+1} - \frac{1}{2} I_n\right)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} - \frac{1}{2} I_{n+1} = 2\left(I_{n+1} - \frac{1}{2} I_n\right)}$$

c/ Soit $V_n = I_{n+1} - \frac{1}{2} I_n$.

Exprimons V_n en fonction de n

$$V_{n+1} = I_{n+2} - \frac{1}{2} I_{n+1}$$

$$= 2\left(I_{n+1} - \frac{1}{2} I_n\right)$$

$V_{n+1} = 2V_n$; $V_0 = I_1 - \frac{1}{2} I_0$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3}$$

$V_0 = 0$

(V_n) est une suite géométrique de 1er terme $V_0 = 0$ et de raison $q = 2$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = 0}$

Déduisons-en que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$V_n = I_{n+1} - \frac{1}{2} I_n = 0 \Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2} I_n$

(I_n) est une suite géométrique de 1er terme $I_0 = \frac{4\pi}{3}$ et de raison $q = \frac{1}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = I_0 q^n = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

4/ On pose $S_n = I_0 + I_1 + \ldots + I_n$

Exprimons S_n en fonction de n.

$S_n = I_0 \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2I_0\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

$\boxed{S_n = \frac{8\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}$

EXERCICE II

L'objectif est d'étudier la suite (U_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par :

$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ et pour tout $n \geq 1$

$U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

1/ Soit f la fonction numérique définie sur $[0;1]$ par : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

a/ Calculons la dérivée f' de f.

$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\boxed{f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$

Déduisons-en U_0

$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 f'(x)\,dx$

$= \left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1$

$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1$

$\boxed{U_0 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$

b/ Calculons U_1

$U_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$= \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$

$\boxed{U_1 = \sqrt{2} - 1}$

2/ a/ Prouvons que la suite (U_n) est décroissante.

$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{(x-1)x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$\forall x \in [0;1],\ \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x^n \geq 0 \\ \sqrt{1+x^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{(x-1)x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq 0$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(x-1)x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq 0$

$\Leftrightarrow U_{n+1} - U_n \leq 0$

$\boxed{\text{La suite } (U_n) \text{ est donc décroissante}}$

Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente

$\forall x \in [0;1],\ \begin{cases} x^n \geq 0 \\ \sqrt{1+x^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \geqslant 0 \Leftrightarrow U_n \geqslant 0$

(U_n) est minorée par 0.

(U_n) étant décroissante et minorée, (U_n) est convergente

b/ Montrons que pour tout nombre réel x appartenant à $[0;1]$: $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$

$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1+x^2 \leq 2$

$\Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$

$\forall x \in [0;1],\ 1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$

Déduisons-en que pour tout $n \geqslant 1$, on a: $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ (1)

$1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant 1$ car $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow \frac{x^n}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n$ car $x^n \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leqslant U_n \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{n+1}$

$\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{n+1}$

Déterminons la limite de (U_n)

$\begin{cases} \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{n+1} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} = 0 \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ d'après le Théorème des Gendarmes.

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

3/ Pour tout entier $n \geqslant 3$, on pose: $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$.

a/ Vérifions que pour tout entier $n \geqslant 3$ on a: $U_n + U_{n-2} = I_n$.

$U_n + U_{n-2} = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{x^{n-2}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$= \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx = I_n$

$\forall n \geqslant 3,\ U_n + U_{n-2} = I_n$

b/ Par une intégration par parties portant sur I_n, montrons que $\forall n \geqslant 3$ on a: $nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$.

$I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$

Posons $U(x) = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow U'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$V'(x) = x^{n-2} \Rightarrow V(x) = \frac{x^{n-1}}{n-1}$

$I_n = \left[\frac{x^{n-1}}{n-1}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \frac{1}{n-1}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$I_n = \frac{\sqrt{2}}{n-1} - \frac{1}{n-1}U_n$

$\Leftrightarrow (n-1)I_n + U_n = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (n-1)(U_n + U_{n-2}) + U_n = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow n(U_n - U_n + (n-1)U_{n-2} + U_n = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow n U_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$

$\boxed{\forall n \geq 3,\ n U_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}}$

c./ Déduisons-en que pour tout $n \geq 3$ on a: $(2n-1)U_n \leq \sqrt{2}$ (2)

On sait que (U_n) est décroissante

$\Leftrightarrow \forall n \geq 3,\ U_n \leq U_{n-2}$

$\Leftrightarrow (n-1)U_n \leq (n-1)U_{n-2}$

$\Leftrightarrow nU_n + (n-1)U_n \leq nU_n + (n-1)U_{n-2}$

$\Leftrightarrow (2n-1)U_n \leq \sqrt{2}$

$\boxed{\forall n \geq 3,\ (2n-1)U_n \leq \sqrt{2}}$ (2)

d./ A l'aide des inégalités (1) et (2) montrons que la suite (nU_n) est convergente et calculons sa limite

On sait que $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n$

$\Leftrightarrow \frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} \leq nU_n$ (a)

$(2n-1)U_n \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow 2nU_n \leq \sqrt{2} + U_n$

$\Leftrightarrow nU_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{n}U_n$ (b)

(a) et (b) $\Leftrightarrow \frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} \leq nU_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{n}U_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{n}U_n = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \times 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

D'après le théorème des Gendarmes on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

EXERCICE 12

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie par $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\,dx$

1./ Démontrons que la suite (I_n) est positive et décroissante

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \tan 0 \leq \tan x \leq \tan\frac{\pi}{4}$

car $x \mapsto \tan x$ est croissante sur $[0; \frac{\pi}{4}]$

$\Leftrightarrow 0 \leq \tan x \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq \tan^n x \leq 1$ car $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\pi/4} \tan^n x\,dx$

soit $I_n \geq 0$.

$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{n+1} x\,dx - \int_0^{\pi/4} \tan^n x\,dx$

$= \int_0^{\pi/4} (\tan x - 1)\tan^n x\,dx$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} \tan^n x \geq 0 \\ \tan x \leq 1 \end{cases} \overset{(\times)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \tan^n x \geq 0 \\ \tan x - 1 \leq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (\tan x - 1)\tan^n x \leq 0$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} (\tan x - 1)\tan^n x\,dx \leq 0$

$\Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0$

Conclusion: (I_n) est décroissante et positive

2./ a./ $\forall n \in \mathbb{N}$, posons $g(x) = \tan^{n+1} x$

Calculons $g'(x)$: $\boxed{g'(x) = (n+1)(1+\tan^2 x)\tan^n x}$

b./ Déduisons-en que:

i./ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (1+\tan^2 x)\tan^n x\,dx = \left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1} x\right]_0^{\pi/4}$

$\boxed{I_n + I_{n+2} = 1/n+1}$

* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

On sait que la suite (I_n) est positive

$\Leftrightarrow I_{n+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} - I_n \geq 0$

$\Leftrightarrow I_n \leq \frac{1}{n+1}$ (a)

De plus (I_n) est décroissante

$\Leftrightarrow I_{n+2} \leq I_n \Leftrightarrow I_n + I_{n+2} \leq 2I_n$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq 2I_n$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2n+2} \leq I_n$ (b)

(a) et (b) nous permettent d'écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

* Déduisons-en que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{2n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+2} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ d'après le théorème des Gendarmes.

c/ On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = I_{n+4} - I_n$

Utilisons (1) pour démontrer que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}$

Avec (1) on a :

$$\begin{cases} I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} & (a) \\ I_{n+2} + I_{n+4} = \frac{1}{n+3} & (b) \end{cases}$$

(b)-(a) $\Leftrightarrow I_{n+4} - I_n = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}$

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}$

3/ a/ Calculons I_2

$I_2 = \int_0^{\pi/4} \tan^2 x \, dx = \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 x - 1) \, dx$

$= \left[\tan x - x\right]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}$

$$\boxed{I_2 = 1 - \frac{\pi}{4}}$$

b/ Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$f(2) + f(6) + f(10) + \dots + f(4n-2) = I_{4n+2} - I_2$

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = I_{n+4} - I_n$

Remplaçons dans la relation précédente n par 2; 6; 10; ...; 4n-2 on obtient les n égalités suivantes :

$f(2) = I_6 - I_2$

$f(6) = I_{10} - I_6$

$f(10) = I_{14} - I_{10}$

$\vdots$

$f(4n-2) = I_{4n+2} - I_{4n-2}$

En additionnant membres à membres les n égalités obtenues et en simplifiant on a : $f(2) + f(6) + f(10) + \dots + f(4n-2) = I_{4n+2} - I_2$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, f(2) + f(6) + f(10) + \dots + f(4n-2) = I_{4n+2} - I_2}$$

Déduisons-en que :

$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1}\right) = \frac{\pi}{4}$

On sait que $f(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}$

$f(2) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}$; $f(6) = \frac{1}{9} - \frac{1}{7}$

$f(10) = \frac{1}{13} - \frac{1}{11}$; $\dots f(4n-2) = \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n-1}$

$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots-\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+1}=$

$1+f(2)+f(6)+f(10)+\cdots+f(4n-2)=$

$1+I_{4n+2}-I_2$

$\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots-\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+1}$

$=\lim_{n\to+\infty} 1+I_{4n+2}-I_2$

$=1-I_2$ car $\lim_{n\to+\infty} I_{4n+2}=0$

$=1-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$

Conclusion :

$$\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots-\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+1}=\frac{\pi}{4}$$

4-/ a-/ Calculons I_1

$I_1=\int_0^{\pi/4}\tan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin x}{\cos x}\,dx=-\left[\ln|\cos x|\right]_0^{\pi/4}$

$=-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\ln 1=\frac{1}{2}\ln 2$

$$I_1=\frac{1}{2}\ln 2$$

b-/ Démontrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$f(1)+f(5)+f(9)+\cdots+f(4n-3)=I_{4n+1}-I_1$

$f(n)=I_{n+4}-I_n$

Remplaçons dans la relation ci-dessus, n par $1;5;9;\ldots,4n-3$. On obtient les n égalités suivantes

$f(1)=I_5-I_1$
$f(5)=I_9-I_5$
$f(9)=I_{13}-I_9$
$\vdots$
$f(4n-3)=I_{4n+1}-I_{4n-3}$

En additionnant membres à membres les n égalités obtenues on a après simplification :

$f(1)+f(5)+f(9)+\cdots+f(4n-3)=I_{4n+1}-I_1$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f(1)+f(5)+f(9)+\cdots+f(4n-3)=I_{4n+1}-I_1$$

c-/ Déduisons-en que :

$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$

$f(n)=\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+1}$

$f(1)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$; $f(5)=\frac{1}{8}-\frac{1}{6}$

$f(4n-3)=\frac{1}{4n}-\frac{1}{4n-2}$

Posons $S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$

$S_n=-2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{4n}-\frac{1}{4n-2}\right)$

$=-2\left(f(1)+f(5)+f(9)+\cdots+f(4n-3)\right)$

$=-2\left(I_{4n+1}-I_1\right)$

$\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$

$=\lim_{n\to+\infty} -2\left(I_{4n+1}-I_1\right)$

$=2I_1$ car $\lim_{n\to+\infty} I_{4n+1}=0$

$=2\times\frac{1}{2}\ln 2=\ln 2$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$$

EXERCICE 13

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie par :

$$I_n=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^{2n+1}x}$$

1-/ Déterminons deux nombres réels a et b tels que :

$\forall x \in [0; \frac{\pi}{4}]$, $\frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x}$

$\frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x} = \frac{a(1+\sin x)+b(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}\cos x$

$= \frac{(a-b)\sin x + a + b}{\cos x}$

Par identification on a:

$\begin{cases} a-b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

$\boxed{a=\frac{1}{2} \quad | \quad b=\frac{1}{2}}$

$\boxed{\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}\frac{\cos x}{1-\sin x} + \frac{1}{2}\frac{\cos x}{1+\sin x}}$

Déduisons-en la valeur de I_0

$I_0 = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x}$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{1-\sin x}dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$

$= \frac{1}{2}\left[\ln|1-\sin x|\right]_0^{\pi/4} + \frac{1}{2}\left[\ln|1+\sin x|\right]_0^{\pi/4}$

$= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\right]_0^{\pi/4}$

$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}/2}{1-\sqrt{2}/2}\right) - \frac{1}{2}\ln 1$

$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2})$

$= \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})^2 = \ln(1+\sqrt{2})$

$\boxed{I_0 = \ln(1+\sqrt{2})}$

2/ Démontrons, à l'aide d'une intégration par parties que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2n I_n = (2n-1) I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$

$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^{2n} x} = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^{2n-1} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$

Posons $U(x) = \frac{1}{\cos^{2n-1} x} \Rightarrow U'(x) = \frac{(2n-1)\sin x}{\cos^{2n} x}$

$V'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow V(x) = \tan x$

$I_n = \left[\frac{\tan x}{\cos^{2n-1} x}\right]_0^{\pi/4} - (2n-1)\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos^{2n+1} x}dx$

$= \left[\frac{\sin x}{\cos^{2n} x}\right]_0^{\pi/4} - (2n-1)\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^{2n+1} x}dx$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2n} - (2n-1)\left[\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x} - \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2 x}{\cos^{2n+1} x}dx\right]$

$I_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2^n - (2n-1)(I_n - I_{n-1})$

$\Leftrightarrow I_n + (2n-1)I_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2n I_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}}$

3/ Calculons alors les intégrales

$J = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^3 x}$ et $K = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^5 x}$

$J = I_1$ or $2I_1 = I_0 + \frac{2}{\sqrt{2}}$

$= \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}$

$I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$

$\boxed{J = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})}$

$K = I_2$ or $4I_2 = 3I_1 + \frac{4}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow I_2 = \frac{3}{4}I_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$K = \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{3}{8}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{K = \frac{7\sqrt{2}}{8} + \frac{3}{8}\ln(1+\sqrt{2})}$

EXERCICE 14

On se propose de calculer l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ de deux manières différentes :

1/ A l'aide d'une intégration par parties établissons que : $I_n = e - n I_{n-1}$

$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$

Posons $u(x) = x^n \Rightarrow u'(x) = n x^{n-1}$

$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$

$I_n = [x^n e^x]_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1} e^x dx = e - n I_{n-1}$

$$\boxed{I_n = e - n I_{n-1}}$$

Déduisons-en, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

$$I_n = \left[1 - n + n(n-1) + \dots + (-1)^p n(n-1)\dots(n-p+1) + \dots + (-1)^n n!\right] e + (-1)^{n+1} n!$$

Pour $n = 0$ on a :

$I_0 = \int_0^1 e^x dx = \left[e^x\right]_0^1 = e - 1$ Vraie

- Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \left[1 - n + n(n-1) + \dots + (-1)^p n(n-1)\dots(n-p+1) + \dots + (-1)^n n!\right] e + (-1)^{n+1} n!$$

et montrons que :

$$I_{n+1} = \left[1 - (n+1) + (n+1)n + \dots (-1)^p (n+1) n \dots (n-p+2) + \dots (-1)^{n+1} (n+1)!\right] e + (-1)^{n+2} (n+1)!$$

On sait que $I_n = e - n I_{n-1}$

$\Rightarrow I_{n+1} = e - (n+1) I_n$

$I_{n+1} = e - (n+1)\left[1 - n + n(n-1) + \dots + (-1)^p n(n-1) \dots (n-p+1) \dots + (-1)^n n!\right] e - (n+1)(-1)^{n+1} n!$

$I_{n+1} = \left[1 - (n+1) + (n+1)n + \dots (-1)^p (n+1) n (n-1) \dots (n-p+2) + \dots + (-1)^{n+1} (n+1)!\right] e + (-1)^{n+1} x^{n+1} (n+1)!$

$I_{n+1} = \left[1 - (n+1) + (n+1)n \dots + (-1)^p (n+1) n (n-1) \dots (n-p+2) + \dots (-1)^{n+1} (n+1)!\right] e + (-1)^{n+2} (n+1)!$

Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\boxed{I_n = \left[1 - n + n(n-1) + \dots (-1)^p n(n-1)\dots(n-p+1) + \dots (-1)^n n!\right] e + (-1)^{n+1} n!}$$

2/ Soit P le polynôme de degré inférieur ou égal à n.

Montrons que la fonction F définie par : $F(x) = \left[P(x) - P'(x) + P''(x) + \dots + (-1)^n P^{(n)}(x)\right] e^x$ est une primitive de $x \mapsto P(x) e^x$.

$F'(x) = \left[P'(x) - P''(x) + P'''(x) + \dots - (-1)^n P^{(n)}(x) + (-1)^{n+1} P^{(n+1)}(x) + P(x) - P'(x) + P''(x) + \dots + (-1)^n P^{(n)}(x)\right] e^x$

Or $P^{(n+1)}(x) = 0$ car $d^\circ P \leq n$

$F'(x) = P(x) e^x$ d'où F est une primitive de la fonction $x \mapsto P(x) e^x$

Retrouvons le résultat établi dans la question 1/

Posons $P(x) = x^n$

$P'(x) = n x^{n-1}$ $P''(x) = n(n-1) x^{n-2}$

$P^{(p)}(x) = n(n-1)\dots(n-p+1) x^{n-p}$; $P^n(x) = n!$

$P(1) = 1$; $P'(1) = n$; $P''(1) = n(n-1)$

$P^{(p)}(1) = n(n-1)\dots(n-p+1)$; $P^n(x) = n!$

$F(x) = [P(x) - P'(x) + P''(x) + \dots + (-1)^n P^{(n)}(x)]e$

$F(x) = [x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \dots + (-1)^p n(n-1)\dots(n-p+1)x^{n-p} + \dots + (-1)^n n!]e$

$F(0) = (-1)^n n!$

or $I_n = \left[F(x)\right]_0^1 = F(1) - F(0)$

d'où :

$$\boxed{I_n = [1 - n + n(n-1) + \dots + (-1)^p n(n-1)\dots(n-p+1) + \dots + (-1)^n n!]e + (-1)^{n+1} n!}$$

EXERCICE 15

Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose :

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}\, dx$$

1/ On suppose que $b = a$. Calculons I

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{a^2\cos^2 x + a^2 \sin^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{a^2(\cos^2 x + \sin^2 x)}\, dx \quad \text{or } \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_0^{\pi/2} \sin 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{a^2}$$

$$\boxed{\text{Pour } b = a,\ I = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2}}$$

2/ On suppose que $b \neq a$.

Calculons la dérivée de la fonction $x \longmapsto a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x$.

Posons $g(x) = a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x$

$g'(x) = -2a^2 \cos x \sin x + 2b^2 \cos x \sin x$

$= -a^2 \sin 2x + b^2 \sin 2x$

$$\boxed{g'(x) = (b^2 - a^2)\sin 2x}$$

Déduisons-en la valeur de I.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}\, dx$$

$$= \frac{1}{b^2 - a^2}\int_0^{\pi/2} \frac{(b^2 - a^2)\sin 2x}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}\, dx$$

$$= \frac{1}{b^2 - a^2}\left[\ln(a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{b^2 - a^2}\left(\ln b^2 - \ln a^2\right)$$

$$\boxed{I = \frac{2}{b^2 - a^2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

EXERCICE 16

* Démontrons que la fonction $f : x \longmapsto \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$ est dérivable sur $[0; \pi/2]$

$x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos x + \sin x$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc continues et dérivables sur $[0; \pi/2]$

De plus $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\cos x + \sin x \neq 0$

donc :

$f : x \longmapsto \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$ est continue et dérivable sur $[0; \pi/2]$.

* Démontrons que pour tout réel x de $[0; \pi/2]$, $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$

$\forall x \in [0; \pi/2]$,

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{(\cos x + \sin x) - \cos x + \sin x}{2(\cos x + \sin x)}$

$= \frac{2\sin x}{2(\cos x + \sin x)}$

$= \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} = f(x)$

$\boxed{\forall x \in [0; \pi/2],\ f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}}$

Calculons alors $I = \int_0^{\pi/4} f(x)\,dx$

$I = \int_0^{\pi/4} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right) dx$

$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\cos x + \sin x|\right]_0^{\pi/4}$

$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln 1$

$\boxed{I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2}$

EXERCICE 17

Ne connaissant pas de primitive de la fonction f définie sur $[0; \frac{1}{2}]$ par $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$, on se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale : $I = \int_0^{1/2} \frac{e^{-x}}{1-x}\,dx$.

1°/ * Etudions les variations de f

$f(0) = 1$; $f(\frac{1}{2}) = 2e^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{e}}$.

f est continue et dérivable sur $[0; 1/2]$ et $\forall x \in [0; 1/2]$, $f'(x) = \frac{-e^{-x}(1-x) + e^{-x}}{(1-x)^2}$

$f'(x) = \frac{x e^{-x}}{(1-x)^2}$

$\forall x \in [0; 1/2]$, $f'(x) \geq 0$; f est donc croissante sur $[0; 1/2]$.

Tableau de variation de f

x	0		$1/2$
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	1	↗	$\frac{2}{\sqrt{e}}$

* Démontrons l'encadrement : $1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$ (1)

$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(\frac{1}{2})$ car f croissante sur $[0; 1/2]$

De plus $f(0) = 1$ et $f(1/2) = \frac{2}{\sqrt{e}}$

d'où l'encadrement :

$1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$ (1)

2°/ a/ Démontrons que, pour tout x de $[0; 1/2]$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$

$\forall x \in [0; 1/2]$, $\frac{1}{1-x} = \frac{1 - x^2 + x^2}{1-x}$

$= \frac{1-x^2}{1-x} + \frac{x^2}{1-x}$

$= 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$

On a donc :

$\boxed{\forall x \in [0; 1/2],\ \frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}}$

b/ Déduisons-en que :

$I = \int_0^{1/2} (1+x)e^{-x}\,dx + \int_0^{1/2} x^2 f(x)\,dx$

$I = \int_0^{1/2} \frac{e^{-x}}{1-x}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x} e^{-x}\,dx$

$= \int_0^{1/2} \left(1 + x + \frac{x^2}{1-x}\right) e^{-x}\,dx$

$$I=\int_0^{1/2}(1+x)e^{-x}dx+\int_0^{1/2}x^2\frac{e^{-x}}{1-x}dx$$

On a donc :

$$\boxed{I=\int_0^{1/2}(1+x)e^{-x}dx+\int_0^{1/2}x^2f(x)dx}$$

c-/ Calculons $J=\int_0^{1/2}(1+x)e^{-x}dx$

Posons $g(x)=(ax+b)e^{-x}$. Déterminons a et b pour que g soit une primitive de $x\longmapsto(1+x)e^{-x}$

$$g'(x)=(-ax+a-b)e^{-x}$$

g primitive de $x\longmapsto(1+x)e^{-x}$

$\Leftrightarrow g'(x)=(1+x)e^{-x}\Leftrightarrow(-ax+a-b)e^{-x}=(1+x)e^{-x}$

Par identification on a: $\begin{cases}a=-1\\a-b=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow a=-1 \quad b=-2$

$$g(x)=(-x-2)e^{-x}$$

$$J=\int_0^{1/2}(1+x)e^{-x}dx=\left[(-x-2)e^{-x}\right]_0^{1/2}$$

$$=-\frac{5}{2}e^{-1/2}+2=2-\frac{5}{2\sqrt{e}}$$

$$\boxed{J=2-\frac{5}{2\sqrt{e}}}$$

N.B: On pourrait aussi utiliser une intégration par parties.

d-/ Déduisons de (1) que:

$$\frac{1}{24}\leq\int_0^{1/2}x^2f(x)dx\leq\frac{1}{12\sqrt{e}}$$

D'après (1) on a: $1\leq f(x)\leq\frac{2}{\sqrt{e}}$

$$\Leftrightarrow x^2\leq x^2f(x)\leq\frac{2x^2}{\sqrt{e}}$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{1/2}x^2dx\leq\int_0^{1/2}x^2f(x)dx\leq\int_0^{1/2}\frac{2x^2}{\sqrt{e}}dx$$

$$\int_0^{1/2}x^2dx=\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^{1/2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$$

$$\int_0^{1/2}\frac{2x^2}{\sqrt{e}}dx=\frac{2}{\sqrt{e}}\int_0^{1/2}x^2dx=\frac{2}{\sqrt{e}}\cdot\frac{1}{24}=\frac{1}{12\sqrt{e}}$$

On a donc :

$$\boxed{\frac{1}{24}\leq\int_0^{1/2}x^2f(x)dx\leq\frac{1}{12\sqrt{e}}}$$

e-/ Déduisons des questions précédentes une valeur décimale approchée de I à la précision 0,01

$$\frac{1}{24}\leq\int_0^{1/2}x^2f(x)dx\leq\frac{1}{12\sqrt{e}}$$

$$\Leftrightarrow J+\frac{1}{24}\leq J+\int_0^{1/2}x^2f(x)dx\leq J+\frac{1}{12\sqrt{e}}$$

$$\Leftrightarrow 2-\frac{5}{2\sqrt{e}}+\frac{1}{24}\leq I\leq 2-\frac{5}{2\sqrt{e}}+\frac{1}{12\sqrt{e}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{49}{24}-\frac{5}{2\sqrt{e}}\leq I\leq 2-\frac{29}{12\sqrt{e}}$$

$\Leftrightarrow 0,525\leq I\leq 0,534$

On en déduit que : $I\simeq 0,53$.

EXERCICE 18

Soit x un réel strictement positif donné, on considère les intégrales

$$I_n=\int_0^x\sin^{2n}t\,dt \text{ et } J_n=\int_0^x\sin^{2n}t\cos^2t\,dt$$

1-/ Trouvons une relation entre J_n I_n et I_{n+1}

$$I_n-J_n=\int_0^x\sin^{2n}t(1-\cos^2t)dt$$

$$=\int_0^x\sin^{2n}t\sin^2t\,dt$$

$$=\int_0^x\sin^{2n+2}t\,dt=I_{n+1}$$

$$\boxed{I_n-J_n=I_{n+1}}$$

2/ En intégrant par parties, calculons J_n en fonction de I_{n+1}

$$J_n = \int_0^x \sin^{2n}t \cos^2 t\, dt$$

$$= \int_0^x \sin^{2n}t \cos t \cos t\, dt$$

Posons : $U(t) = \cos t \Rightarrow U'(t) = -\sin t$

$$V'(t) = \cos t \sin^{2n}t \Rightarrow V(t) = \frac{\sin^{2n+1}t}{2n+1}$$

$$J_n = \left[\frac{1}{2n+1}\sin^{2n+1}t \cos t\right]_0^x + \frac{1}{2n+1}\int_0^x \sin^{2n+2}t\, dt$$

$$\boxed{J_n = \frac{1}{2n+1}\left(\sin^{2n+1}x \cos x + I_{n+1}\right)}$$

Déduisons-en une relation entre I_{n+1} et I_n

$$J_n = I_n - I_{n+1}$$

$$(2n+1)J_n = \sin^{2n+1}x \cos x + I_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow (2n+1)(I_n - I_{n+1}) = \sin^{2n+1}x \cos x + I_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow (2n+1)I_n - (2n+2)I_{n+1} = \sin^{2n+1}x \cos x$$

On a donc

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}I_n - \frac{1}{2n+2}\sin^{2n+1}x \cos x}$$

3/ Calculons I_0

$$I_0 = \int_0^x \sin^0 t\, dt = \int_0^x dt = x$$

$$\boxed{I_0 = x}$$

Montrons que l'on peut ainsi calculer I_n et J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$

On sait que :

$$\begin{cases} I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}I_n - \frac{1}{2n+2}\sin^{2n+1}x \cos x & (1) \\ J_n = I_n - I_{n+1} & (2) \end{cases}$$

Connaissant I_0, on peut à partir de la relation de récurrence (1) calculer I_1 à partir de I_0, I_2 à partir de I_1 et ainsi de suite. On peut donc calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

A partir de la relation (2) on peut calculer J_0 à partir de I_0 et I_1, J_1 à partir de I_1 et I_2, et ainsi de suite. On peut donc calculer J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 19

PARTIE A

Soit f une primitive, sur $\mathbb{R}$, de l'application φ qui, à tout réel t associe : $\varphi(t) = \frac{1}{2t^2 - 2t + 1}$

1/ Soit g l'application de l'intervalle $S =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(u) = f\left(\frac{1 - \tan u}{2}\right)$$

Prouvons que g est dérivable sur S

$\forall t \in \mathbb{R}$, $2t^2 - 2t + 1 \neq 0$; φ est définie sur $\mathbb{R}$. f étant une primitive de φ, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus $u \longmapsto \frac{1 - \tan u}{2}$ est dérivable sur S et $\forall u \in S$, $\frac{1 - \tan u}{2} \in \mathbb{R}$

g est donc dérivable sur S

Prouvons que g est une fonct° affine

$$\varphi(t) = \frac{1}{2t^2-2t+1} = \frac{1}{2\left(t^2-t+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

$$g'(u) = f'\left(\frac{1-\tan u}{2}\right)\times\left(\frac{1-\tan u}{2}\right)'$$

$$= -\frac{1}{2}\,\varphi\left(\frac{1-\tan u}{2}\right)\left(1+\tan^2 u\right)$$

$$\varphi\left(\frac{1-\tan u}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{\tan^2 u}{4}+\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{2}{1+\tan^2 u}$$

$$g'(u) = -\frac{1}{2}\,\frac{2}{1+\tan^2 u}\times\left(1+\tan^2 u\right) = -1$$

$g'(u) = -1$ d'où g est une fonction affine. $g(u) = -u + \text{cste}$.

2-/ Montrons que $\int_0^1 \frac{1}{2t^2-2t+1}\,dt = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 \frac{1}{2t^2-2t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\,dt$$

Posons $t = \frac{1-\tan u}{2} \Rightarrow dt = -\frac{1}{2}(1+\tan^2 u)\,du$

$t=0 \Rightarrow \tan u = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4}$

$t=1 \Rightarrow \tan u = -1 \Rightarrow u = -\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{1}{2t^2-2t+1}\,dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{1}{4}}\,\frac{1}{1+\tan^2 u}\left(-1-\tan^2 u\right)du$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} du = \left[u\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{2t^2-2t+1}\,dt = \frac{\pi}{2}}$$

PARTIE B

On considère l'application I de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$I(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt$$

1-/ En majorant convenablement $t(1-t)$ pour $t\in[0;1]$, trouvons la limite de la suite u telle que $u_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = I(n,n)$

$0\le t\le 1 \Rightarrow 0\le 1-t\le 1$

$\Rightarrow 0\le t(1-t)\le t$

$\Rightarrow 0\le t^n(1-t)^n\le t^n$ car $x\to x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

$0\le t^n(1-t)^n\le t^n$

$\Leftrightarrow 0\le\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt\le\int_0^1 t^n\,dt$

$\Leftrightarrow 0\le I(n,n)\le\frac{1}{n+1}\Leftrightarrow 0\le u_n\le\frac{1}{n+1}$

$$\begin{cases} 0\le u_n\le\frac{1}{n+1} \\ \text{et} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

d'après le théorème des Gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

2-/ Montrons que: $\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2\times\mathbb{N}^*$

$$I(p+1,q+1) = \frac{q+1}{p+2}\,I(p+2,q)$$

$$I(p+1,q+1) = \int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q+1}\,dt$$

Posons $u(t) = (1-t)^{q+1} \Rightarrow u'(t) = -(q+1)(1-t)^q$

$v'(t) = t^{p+1} \Rightarrow v(t) = \frac{1}{p+2}\,t^{p+2}$

$$I(p+1,q+1)=\frac{1}{p+2}\left[t^{p+2}(1-t)^{q+1}\right]_0^1 + \frac{q+1}{p+2}\int_0^1 t^{p+2}(1-t)^q dt$$

$$= 0-0+\frac{q+1}{p+2}I(p+2,q)$$

$$\boxed{\forall (p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*,\ I(p+1,q+1)=\frac{q+1}{p+2}I(p+2,q)}$$

Montrons que: $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I(n,n)=\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

$$I(1,1)=\int_0^1 t(1-t)\,dt=\int_0^1 (t-t^2)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$I(1,1)=\frac{1}{6}=\frac{(1!)^2}{3!}=\frac{(1!)^2}{(2\times1+1)!}$$ Vrai

Supposons que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I(n,n)=\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ et montrons que, $I(n+1,n+1)=\frac{((n+1)!)^2}{(2n+3)!}$

On peut par changement de variable $x=1-t$, montrer que $I(p,q)=I(q,p)$.

$$I(n+1,n+1)=\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{n+1}dt$$

$$=\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^n(1-t)\,dt$$

$$=\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^n dt-\int_0^1 t^{n+2}(1-t)^n\,dt$$

$$= I(n+1,n)-I(n+2,n)\quad (1)$$

or $I(n+1,n+1)=\frac{n+1}{n+2}I(n+2,n)$

$$(1)\Leftrightarrow I(n+1,n+1)=I(n+1,n)-\frac{n+2}{n+1}I(n+1,n+1)$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\frac{n+2}{n+1}\right)I(n+1,n+1)=I(n+1,n)$$

(2) $\frac{2n+3}{n+1}I(n+1,n+1)=I(n+1,n)=I(n,n+1)$

$$I(n,n+1)=\int_0^1 t^n(1-t)^{n+1}dt$$

$$=\int_0^1 t^n(1-t)^n(1-t)\,dt$$

$$=\int_0^1 t^n(1-t)^n dt-\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^n dt$$

$$= I(n,n)-I(n+1,n)$$

$$I(n,n+1)=I(n,n)-I(n,n+1)$$

$$\Leftrightarrow I(n,n+1)=\frac{1}{2}I(n,n)$$

$$(2)\Leftrightarrow\frac{2n+3}{n+1}I(n+1,n+1)=\frac{1}{2}I(n,n)$$

$$\Leftrightarrow I(n+1,n+1)=\frac{n+1}{2(2n+3)}I(n,n)$$

$$=\frac{(n+1)(n!)^2}{2(2n+3)(2n+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)^2(n!)^2}{2(n+1)(2n+3)(2n+1)!}$$

$$=\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)}$$

$$I(n+1,n+1)=\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+3)!}$$

Conclusion:

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I(n,n)=\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}}$$

PARTIE C

1.| Après avoir remarqué que: $2t^2-2t+1=1-2t(1-t)$ simplifions l'expression:

$$S=\frac{1}{2t^2-2t+1}-1-\sum_{k=1}^{n}2^k t^k(1-t)^k$$

$$\frac{1}{2t^2-2t+1}-1=\frac{1}{1-2t(1-t)}-1=\frac{2t(1-t)}{1-2t(1-t)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k t^k (1-t)^k = \sum_{k=1}^{n} [2t(1-t)]^k$$

$$= 2t(1-t)\,\frac{1-2^n t^n (1-t)^n}{1-2t(1-t)}$$

$$S=\frac{1}{2t^2-2t+1}-1-\sum_{k=1}^{n} 2^k t^k (1-t)^k$$

$$=\frac{2t(1-t)}{1-2t(1-t)}-2t(1-t)\,\frac{1-2^n t^n (1-t)^n}{1-2t(1-t)}$$

$$=\frac{2^{n+1}t^{n+1}(1-t)^{n+1}}{1-2t(1-t)}=\frac{[2t(1-t)]^{n+1}}{1-2t(1-t)}$$

$$\boxed{\frac{1}{2t^2-2t+1}-1-\sum_{k=1}^{n} 2^k t^k (1-t)^k=\frac{[2t(1-t)]^{n+1}}{1-2t(1-t)}}$$

2./ On considère la suite (v_n) telle que $v_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\dfrac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}$

Déterminons la limite de la suite (W_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $W_n=\sum_{k=1}^{n} v_k$

$$v_n=\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}=2^n I(n,n)$$

$$W_n=\sum_{k=1}^{n} v_k=\sum_{k=1}^{n} 2^k I(k,k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} 2^k \int_0^1 t^k (1-t)^k dt$$

$$=\int_0^1 \left[\sum_{k=1}^{n} 2^k t^k (1-t)^k\right] dt$$

$$W_n=\int_0^1 2t(1-t)\,\frac{1-[2t(1-t)]^n}{1-2t(1-t)}$$

Posons $h(t)=2t(1-t)$ pour $0\le t\le 1$

Etudions les variations de h.

$h(0)=h(1)=0$

$h'(t)=2-4t$; $h'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$

$h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

Tableau de variation de h

t	0		$1/2$		1
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	0	↗	$1/2$	↘	0

On déduit des variations de h que

$\forall t\in[0,1]$, $0\le h(t)\le\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0\le 2t(1-t)\le\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}[2t(1-t)]^n=0$

$$\lim_{n\to+\infty} W_n=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 2t(1-t)\,\frac{1-[2t(1-t)]^n}{1-2t(1-t)}dt$$

$$=\int_0^1 \frac{2t(1-t)}{1-2t(1-t)}dt \quad \text{car } \lim_{n\to+\infty}[2t(1-t)]^n=0$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2t^2-2t+1}-1\right)dt$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{2t^2-2t+1}dt-\int_0^1 dt$$

$$=\frac{\pi}{2}-1$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} W_n=\frac{\pi}{2}-1}$$

EXERCICE 20

PARTIE A

Dans cette partie, x désigne un nombre réel et t une variable réelle.

1/ En utilisant la formule d'intégration par parties, démontrons que:

$$\int_0^x te^t dt = xe^x - \int_0^x e^t dt.$$

Posons $U(t) = t \Rightarrow U'(t) = 1$

$V'(t) = e^t \Rightarrow V(t) = e^t$

$$\int_0^x te^t dt = \left[te^t\right]_0^x - \int_0^x e^t dt.$$

$$= xe^x - \int_0^x e^t dt$$

$$\boxed{\int_0^x te^t dt = xe^x - \int_0^x e^t dt}$$

Déduisons-en, par un calcul de l'intégrale $\int_0^x (x-t)e^t dt$ que:

$$e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)e^t dt$$

$$\int_0^x (x-t)e^t dt = \int_0^x xe^t dt - \int_0^x te^t dt$$

$$= x\left[e^t\right]_0^x - xe^x + \int_0^x e^t dt$$

$$= x(e^x - 1) - xe^x + e^x - 1$$

$$\int_0^x (x-t)e^t dt = -x - 1 + e^x$$

$$\Leftrightarrow \boxed{e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)e^t dt}$$

2/ On considère l'intégrale $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Démontrons l'égalité:

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt$$

Posons $U(t) = e^t \Rightarrow U'(t) = e^t$

$V'(t) = (x-t)^n \Rightarrow V(t) = -\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1}$

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt = \frac{1}{n!}\left[-\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1} e^t\right]_0^x$$

$$+ \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n+1}\int_0^x (x-t)^{n+1} e^t dt$$

$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt$$

$$\boxed{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt}$$

3/ Démontrons par récurrence sur n la formule:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

D'après la question 1/ on a:

$$e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)e^t dt$$

la formule est vraie pour $n = 1$

Supposons que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

et montrons que:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt$$

D'après la question 2/ on a:

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt$$

d'où:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt$$

Conclusion

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

PARTIE B.

On pose $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

$I_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$ et $J_n = \int_{-1}^0 (1+t)^n e^t dt$.

1/ Pour $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$, on considère $H = ae + b + ce^{-1}$. Dans les deux premières questions on suppose $|a|+|c| \neq 0$

a/ Démontrons que l'on a:

$n!H = n!\left[a P_n(1) + b + c P_n(-1)\right] + a I_n + (-1)^{n+1} c J_n$.

D'après A-3/ on a:

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$

$e^x = P_n(x) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$.

$e = P_n(1) + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$

$e^{-1} = P_n(-1) + \int_0^{-1} \frac{(-1-t)^n}{n!} e^t dt$

$= P_n(-1) + (-1)^n \int_0^{-1} \frac{(1+t)^n}{n!} e^t dt$

$e^{-1} = P_n(-1) + (-1)^{n+1} \int_{-1}^0 \frac{(1+t)^n}{n!} e^t dt$

$H = ae + b + ce^{-1}$

$= a\left[P_n(1) + \frac{1}{n!} I_n\right] + b + c\left[P_n(-1) + (-1)^{n+1} \frac{J_n}{n!}\right]$

$= aP_n(1) + b + cP_n(-1) + \frac{a}{n!} I_n + (-1)^{n+1} c \frac{J_n}{n!}$

$n!H = n!\left[aP_n(1) + b + cP_n(-1)\right] + aI_n + (-1)^{n+1} c J_n$

$\boxed{n!H = n!\left[aP_n(1) + b + cP_n(-1)\right] + aI_n + (-1)^{n+1} c J_n}$

b/ Démontrons que l'on a:

$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ et $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$

$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 1 - t \geqslant 0 \Rightarrow (1-t)^n \geqslant 0$

$0 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow e^0 \leq e^t \leq e^1$ car $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 1 \leq e^t \leq e \Leftrightarrow (1-t)^n \leq (1-t)^n e^t \leq (1-t)^n e$

$\Rightarrow \int_0^1 (1-t)^n dt \leq \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \int_0^1 (1-t)^n e\, dt$

$\Rightarrow -\frac{1}{n+1}\left[(1-t)^{n+1}\right]_0^1 \leq I_n \leq -\frac{e}{n+1}\left[(1-t)^{n+1}\right]_0^1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ or $\frac{1}{n+1} > 0$

d'où : $\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}}$

$-1 \leq t \leq 0 \Rightarrow 1 + t \geqslant 0 \Rightarrow (1+t)^n \geqslant 0$

$-1 \leq t \leq 0 \Leftrightarrow e^{-1} \leq e^t \leq 1$

$\Leftrightarrow (1+t)^n e^{-1} \leq (1+t)^n e^t \leq (1+t)^n$

$\Rightarrow \int_{-1}^0 (1+t)^n e^{-1} dt \leq \int_{-1}^0 (1+t)^n e^t dt \leq \int_{-1}^0 (1+t)^n dt$

$\Rightarrow \frac{e^{-1}}{n+1}\left[(1+t)^{n+1}\right]_{-1}^0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}\left[(1+t)^{n+1}\right]_{-1}^0$

$\Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{n+1} \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$ or $\frac{e^{-1}}{n+1} > 0$

d'où $\boxed{0 \leqslant J_n \leq \frac{1}{n+1}}$

Déduisons-en la limite de

$h(n) = aI_n + (-1)^{n+1} c J_n$

$\begin{cases} 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1} \\ 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1} \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \end{cases}$ d'après le théorème des Gendarmes on a: $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$

d'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n(n) = 0}$

c/ $Q_n = n!\left[aP_n(1)+b+cP_n(-1)\right]$

Démontrons que Q_n est un nombre entier relatif.

$$n!P_n(1) = n!\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)$$

$$= n!\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}+\dots+\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}+2\right)$$

$$= A_n^n + A_n^{n-1} + \dots + A_n^3 + A_n^2 + 2$$

or $\forall p\in\mathbb{N}$ et $p\le n$, $A_n^p \in \mathbb{N}$

d'où $n!P_n(1)\in\mathbb{N} \Rightarrow an!P_n(1)\in\mathbb{Z}$

$$n!P_n(-1) = n!\left(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\dots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{p=0}^{n-2} (-1)^p A_n^p \in \mathbb{Z} \text{ car il}$$

est la somme d'entiers relatifs

$\Rightarrow cP_n(-1)\in\mathbb{Z}$ car $c\in\mathbb{Z}$

Enfin $b\in\mathbb{Z}$ et $n!\in\mathbb{N} \Rightarrow n!b\in\mathbb{Z}$

Tout ce qui précède nous permet de dire que:

$Q_n = n!\left[aP_n(1)+b+cP_n(-1)\right]$

$= an!P_n(1) + n!b + cn!P_n(-1)$

appartient à $\mathbb{Z}$

$\boxed{Q_n \text{ est donc un nombre entier relatif}}$

A FORCE DE CHERCHER SANS TROUVER, ON FINIT PAR TROUVER SANS CHERCHER

EXERCICE 21

PARTIE A

1/ On considère la fonction f de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$f(x) = \tan x$

Démontrons que f est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$

Etudions d'abord les variations de f.

$D_f = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$; $\lim_{\substack{x\to -\frac{\pi}{2}\\ x>-\frac{\pi}{2}}} f(x) = -\infty$; $\lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} f(x) = +\infty$

f est continue et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x\in D_f$, $f'(x) = 1+\tan^2 x$.

$\forall x\in D_f$, $f'(x)>0$; f est donc croissante sur D_f.

Tableau de variation de f

x	$-\pi/2$		$\pi/2$
$f'(x)$	‖	$+$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	‖ $+\infty$

D'après les variations de f, elle est continue, monotone, strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ avec $f\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$.

f définit donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$

Dans toute la suite du problème, on désignera par φ la fonction réciproque

de f.

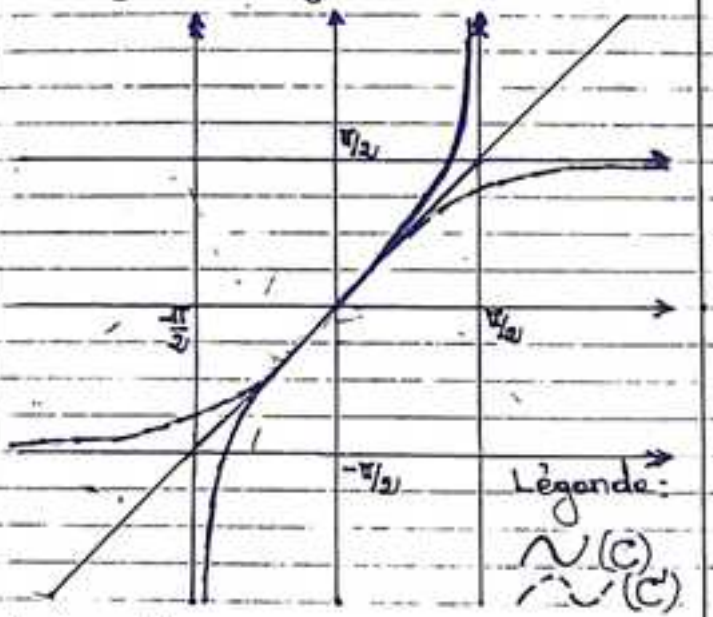
2/ Précisons D_φ, $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(\sqrt{3})$ et $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$

$D_f = \mathbb{R}$; $\varphi(0)=0$; $\varphi(1)=\frac{\pi}{4}$

$\varphi(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$; $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\frac{\pi}{2}$

3/ Soit (C) la courbe représentative de f et (C') celle de φ.

Traçons (C) et déduisons-en (C')



(C') est l'image de (C) dans la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice.

4/ Démontrons que $\varphi'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

On sait que $[(g\circ u)(x)]' = g'[u(x)]\times u'(x)$

φ est la réciproque de de f donc:

$(f\circ\varphi)(x)=x \Leftrightarrow f'[\varphi(x)]\times\varphi'(x)=1$

$\Leftrightarrow \varphi'(x)=\frac{1}{f'[\varphi(x)]}$

$\varphi'(x)=\frac{1}{1+\tan^2\varphi(x)}$ or $\tan\varphi(x)=x$

$$\boxed{\varphi'(x)=\frac{1}{1+x^2}}$$

5/ Démontrons alors que la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $g(x)=\frac{\varphi(x)}{x}$ pour $x\neq 0$ et $g(0)=1$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$x\mapsto\frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$; $x\mapsto\varphi(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^*$.

$x\mapsto\frac{\varphi(x)}{x}$ est donc continue sur $\mathbb{R}^*$ soit g continue sur $\mathbb{R}^*$.

De plus: $\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)}{1}$

$= \lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}$

$= \varphi'(0)=\frac{1}{1+0^2}=1$

$\lim_{x\to0} g(x)=1=g(0)$; g est donc continue en 0.

Conclusion: g est continue sur $\mathbb{R}$.

6/ Soit p et q deux fonctions de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par:

$p(x)=x-\varphi(x)$ et $q(x)=x-\frac{x^3}{3}-\varphi(x)$.

En étudiant les variations des fonctions p et q démontrons que: $0\leq x-\varphi(x)\leq\frac{x^3}{3}$

Etudions les variations de p.

$p(x)=x-\varphi(x)$ $D_p=\mathbb{R}^+$ $p(0)=0$,

$\lim_{x\to+\infty} p(x)=\lim_{x\to+\infty} x-\varphi(x)=+\infty-\frac{\pi}{2}=+\infty$

p est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$\forall x \geq 0,\ p'(x) = 1 - \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$

$p'(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

$\forall x \geq 0,\ p'(x) \geq 0$; p est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$

Tableau de variation de p

x	0	$+\infty$
p'(x)	+	
p(x)	0	$+\infty$

D'après les variations de p on a:

$\forall x \geq 0,\ p(x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x - \varphi(x)$ (1)

Etudions les variations de q

$q(x) = x - \varphi(x) - \frac{x^3}{3}$

$D_q = \mathbb{R}^+$ $\quad q(0) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} q(x) = \lim_{x \to +\infty} x - \varphi(x) - \frac{x^3}{3} = -\infty$

q est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$\forall x \geq 0,\ q'(x) = 1 - x^2 - \varphi'(x)$

$= 1 - x^2 - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{x^4}{1+x^2}$

$q'(x) = -\frac{x^4}{1+x^2}$

$\forall x \geq 0,\ q'(x) \leq 0$; q est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

q décroissante sur $\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \forall x \geq 0$,

$q(x) \leq q(0) = 0$; $\quad \forall x \geq 0,\ x - \varphi(x) - \frac{x^3}{3} \leq 0$

$\forall x \geq 0,\ x - \varphi(x) \leq \frac{x^3}{3}$ (2)

(1) et (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x - \varphi(x) \\ x - \varphi(x) \leq \frac{x^3}{3} \end{cases}$ pour tout $x \geq 0$

On a donc:

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ 0 \leq x - \varphi(x) \leq \frac{x^3}{3}}$$

PARTIE B

Dans toute la suite du problème, on considère la fonction h de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $\begin{cases} h(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}\,dt, & x > 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$

(Nous ne chercherons pas à calculer l'intégrale qui définit h)

1°/ Démontrons que:

$1 - h(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{t - \varphi(t)}{t}\,dt$ si $x > 0$

Pour tout $x > 0$, $1 - h(x) = 1 - \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}\,dt$

$1 - h(x) = \frac{1}{x}\left(x - \int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}\,dt\right)$

$= \frac{1}{x}\left(\int_0^x dt - \int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}\,dt\right)$

$= \frac{1}{x}\int_0^x \left(1 - \frac{\varphi(t)}{t}\right)dt$

$1 - h(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \left(\frac{t - \varphi(t)}{t}\right)dt$

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0,\ 1 - h(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{t - \varphi(t)}{t}\,dt}$$

2°/ En utilisant A. 6°/ et la question précédente, démontrons que:

$0 \leq 1 - h(x) \leq \frac{x^2}{9}$, si $x > 0$

D'après A·6 on a:

$\forall t>0,\ 0 \le t-\varphi(t) \le \frac{t^3}{3}$

$\Leftrightarrow 0 \le \frac{t-\varphi(t)}{t} \le \frac{t^2}{3}$

Pour $x>0$ on a:

$0 \le \int_0^x \frac{t-\varphi(t)}{t}dt \le \int_0^x \frac{t^2}{3}dt$; or $\int_0^x \frac{t^2}{3}dt = \frac{x^3}{9}$

$\Leftrightarrow 0 \le \int_0^x \frac{t-\varphi(t)}{t}dt \le \frac{x^3}{9}$

$\Leftrightarrow 0 \le \frac{1}{x}\int_0^x \frac{t-\varphi(t)}{t}dt \le \frac{x^2}{9}$

or $\frac{1}{x}\int_0^x \frac{t-\varphi(t)}{t}dt = 1-h(x)$

Finalement on a:

Pour tout $x>0$, $0 \le 1-h(x) \le \frac{x^2}{9}$

Déduisons-en que h est continue en 0

$\begin{cases} 0 \le 1-h(x) \le \frac{x^2}{9} \\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{9} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} 1-h(x) = 0$ d'après le théorème des Gendarmes

$\lim_{x\to 0} 1-h(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} h(x) = 1 = h(0)$

h est donc continue en 0.

- Déduisons-en aussi que la dérivée de h à droite en 0 est 0

$0 \le 1-h(x) \le \frac{x^2}{9} \Leftrightarrow 0 \le \frac{1-h(x)}{x} \le \frac{x}{9}$

$\lim_{x>0} \frac{x}{9} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x>0} \frac{1-h(x)}{x} = 0$

or $\lim_{x>0} \frac{1-h(x)}{x} = -h'_d(0)$

$\Leftrightarrow -h'_d(0) = 0 \Leftrightarrow h'_d(0) = 0$

La dérivée de h à droite en 0 est 0

3/ Démontrer que si $x \ge 1$:

$0 \le \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}dt \le \frac{\pi}{2}\int_1^x \frac{dt}{t} = \frac{\pi}{2}\ln x$

D'après la courbe (C') de φ on a:

$\forall t \ge 1,\ 0 \le \varphi(t) \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le \frac{\varphi(t)}{t} \le \frac{\pi}{2}\frac{1}{t}$

$\Leftrightarrow 0 \le \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}dt \le \int_1^x \frac{\pi}{2}\frac{1}{t}dt = \frac{\pi}{2}\ln x$

donc: si $x \ge 1$: $0 \le \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}dt \le \frac{\pi}{2}\ln x$

- En écrivant:

$h(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t}dt + \frac{1}{x}\int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}dt$

démontrons que $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$

D'après ce qui précède on a:

Pour tout $x \ge 1$, $0 \le \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}dt \le \frac{\pi}{2}\ln x$

$\Leftrightarrow 0 \le \frac{1}{x}\int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}dt \le \frac{\pi}{2}\frac{\ln x}{x}$

or $\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2}\frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}dt = 0$

De plus $\frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t}dt = \frac{1}{x}h(1)$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$ car $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t}dt = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}dt = 0 \end{cases}$

PARTIE C

1/ Vérifions que:

$x^2 h'(x) = -\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}dt + \varphi(x)$ pour tout $x>0$

$h(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}dt$

$\Leftrightarrow h'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}dt + \frac{1}{x}\frac{\varphi(x)}{x}$

$h'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}dt + \frac{\varphi(x)}{x^2}$

$\Leftrightarrow x^2 h'(x) = -\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}dt + \varphi(x)$.

Pour tout $x>0$, $x^2h'(x) = -\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}dt + \varphi(x)$

2/ On pose $V(x) = x^2h'(x)$, $x>0$

Vérifions que: $xV'(x) = -\varphi(x) + \frac{x}{1+x^2}$

$V(x) = x^2h'(x) \Rightarrow V'(x) = 2xh'(x) + x^2h''(x)$

$h'(x) = \frac{1}{x^2}\left(-\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}dt + \varphi(x)\right)$

$h''(x) = -\frac{2}{x^3}\left(-\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}dt + \varphi(x)\right) + \frac{1}{x^2}\left(-\frac{\varphi(x)}{x} + \varphi'(x)\right)$

$V'(x) = 2x\frac{1}{x^2}\left(-\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}dt + \varphi(x)\right) +$

$x^2\left[-\frac{2}{x^3}\left(-\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}dt + \varphi(x)\right) + \frac{1}{x^2}\left(-\frac{\varphi(x)}{x}\right.\right.$

$\left.\left. + \varphi'(x)\right]\right.$

$V'(x) = \frac{2}{x}\left(-\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}dt + \varphi(x) + \int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}dt - \varphi(x)\right)$

$-\frac{\varphi(x)}{x} + \varphi'(x)$

$V'(x) = -\frac{\varphi(x)}{x} + \varphi'(x)$

$xV'(x) = -\varphi(x) + x\varphi'(x)$ ou $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

d'où **$xV'(x) = -\varphi(x) + \frac{x}{1+x^2}$, $x>0$**

3/ Soit la fonction u définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par: $u(x) = xV'(x)$.

- Etudions les variations de u.

$D_u =]0;+\infty[$; $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\frac{\pi}{2}$

$u'(x) = -\varphi'(x) + \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}$

$= -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$u'(x) = \frac{-2x^2}{(1+x^2)^2}$

$\forall x \in D_u$, $u'(x) < 0$; u est donc strictement décroissante sur D_u.

Tableau de variation de u

x	0	$+\infty$
$u'(x)$	‖	$-$
$u(x)$	‖ 0	$\searrow -\frac{\pi}{2}$

Déduisons-en le signe de $V'(x)$ puis celui de $h'(x)$ pour tout $x>0$

D'après les variations de u on a:

$\forall x>0$, $u(x)<0 \Rightarrow xV'(x)<0 \Rightarrow V'(x)<0$

$\forall x>0$, $V'(x)<0$

V est donc strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ où $\lim\limits_{x\to 0} V(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2h'(x) = 0\times 0 = 0$

V décroissante sur $]0;+\infty[$

$\Rightarrow \forall x>0$, $V(x) < \lim\limits_{x\to 0} V(x) = 0$

$\forall x>0$, $V(x)<0 \Leftrightarrow x^2h'(x)<0$

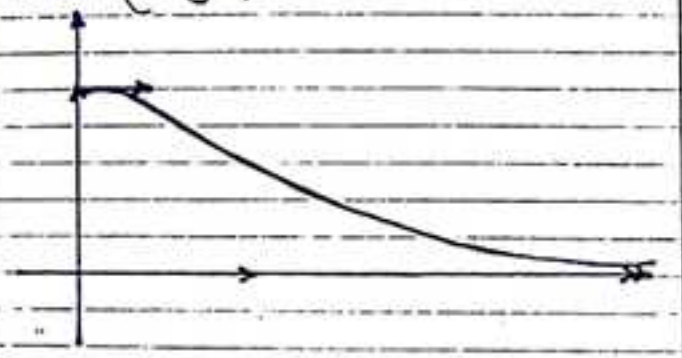
$\Leftrightarrow h'(x)<0$; h est donc décroissante sur $[0;+\infty[$.

4/ Rassemblons les résultats des parties B et C pour donner l'allure de la courbe (C_h) représentative de h dans un repère orthonormé.

Tableau de variation de h

x	0		$+\infty$
$h'(x)$	0	$-$	
$h(x)$	1	↘	0

Allure de la courbe (C_h).



EXERCICE 22

On considère les fonctions dépendant d'un entier naturel n et définies sur l'intervalle $[0;1]$ par:

$f_0(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$; et pour tout $n \geq 1$,

$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x+x^2}$ On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

PARTIE A.

1/ - Etudions le sens de variation de f_0

$\mathcal{D}f_0 = [0;1]$; $\forall x \in [0;1]$, $1+x+x^2 \neq 0$

f_0 est donc dérivable sur $[0;1]$ et

$\forall x \in [0;1]$, $f_0'(x) = -\frac{2x+1}{(1+x+x^2)^2}$

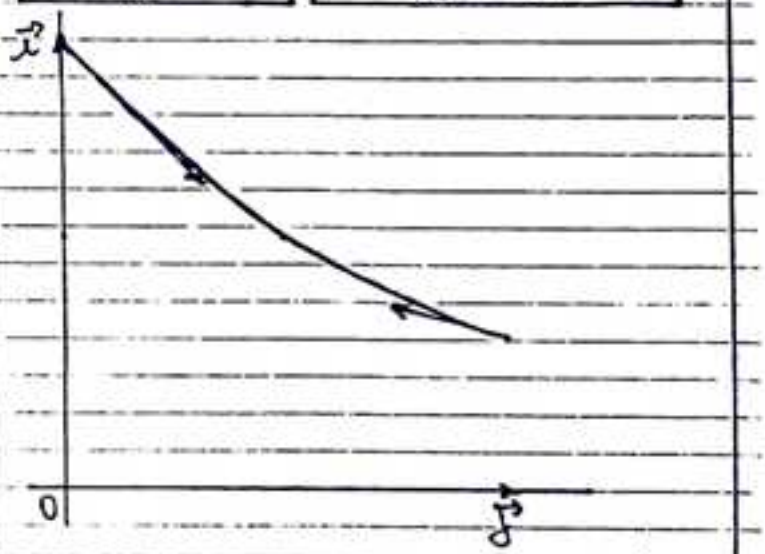
$\forall x \in [0;1]$, $f_0'(x) < 0$; f_0 est strictement décroissante sur $[0;1]$

Construction de la courbe (C_0) représentative de f_0.

$f_0(0) = 1$ $f_0(1) = \frac{1}{3}$; $f_0'(0) = -1$ $f_0'(1) = -\frac{1}{3}$

Soit (T_0) la tangente à (C_0) au points d'abscisse 0 et (T_1) la tangente à (C_0) au point d'abscisse 1 on a:

$(T_0): y = -x+1$ | $(T_1): y = -\frac{1}{3}(x-2)$



2/ On note pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;1]$: $f(x) = f_0'(x)$

Calculons la fonction dérivée de f et montrons que f est décroissante sur $[0;1]$

$f(x) = \frac{2x+1}{(1+x+x^2)^2}$

$f'(x) = \frac{2(1+x+x^2)^2 - 2(2x+1)^2(1+x+x^2)}{(1+x+x^2)^4}$

$= \frac{2(1+x+x^2) - 2(2x+1)^2}{(1+x+x^2)^3}$

$f'(x) = \frac{-6(x^2+x)}{(1+x+x^2)^3}$, $x \in [0;1]$

$\forall x \in [0;1]$, $f_0'(x) \leq 0$; f_0 est donc décroissante sur $[0;1]$

Déduisons-en que pour tout x appartenant à $[0;1]$, on a: $\frac{1}{3} \leq f_0(x) \leq 1$

$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow f_0(1) \leq f_0(x) \leq f_0(0)$ car f_0 est décroissante sur $[0;1]$.

or $f_0(1) = -f_0'(1) = \frac{1}{3}$; $f_0(0) = -f_0'(0) = 1$

Conclusion: $\forall x \in [0;1]$, $\frac{1}{3} \leq f_0(x) \leq 1$

PARTIE B. (On ne cherchera pas à calculer I_n)

1/ Calculons: $I_0+I_1+I_2$ et I_0+2I_1

$$I_0+I_1+I_2 = \int_0^1 \left(f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1+x+x^2}{1+x+x^2}\,dx = \int_0^1 dx = 1$$

$$I_0+2I_1 = \int_0^1 \left(f_0(x)+2f_1(x)\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1+2x}{1+x+x^2}\,dx$$

$$I_0+2I_1 = \left[\ln(1+x+x^2)\right]_0^1 = \ln 3$$

$I_0+I_1+I_2 = 1$ **$I_0+2I_1 = \ln 3$**

2/ Etudions, pour tout entier n et pour tout x de $[0;1]$, le signe de: $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0;1]$,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{x^{n+1}-x^n}{1+x+x^2} = \frac{x^n(x-1)}{1+x+x^2}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq x \leq 1$, $\begin{cases} x^n \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ 1+x+x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^n(x-1)}{1+x+x^2} \leq 0$

$\Leftrightarrow f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$, et $x \in [0;1]$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$ (1)

Déduisons-en que la suite (I_n) est décroissante

(1) $\Rightarrow \int_0^1 \left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right)dx \leq 0$

$\Rightarrow \int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx - \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq 0$

$\Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0$

La suite (I_n) est donc décroissante

3/ Montrons que, pour tout entier n, et pour tout x appartenant à $[0;1]$

$$0 \leq f_n(x) \leq x^n$$

On sait que f_n est décroissante sur $[0;1]$

donc $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} f_n(1) \leq f_n(x) \leq f_n(0) \\ x^n \geq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+x+x^2} \leq 1 \\ x^n \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{x^n}{3} \leq \frac{x^n}{1+x+x^2} \leq x^n$$

Conclusion.

Pour tout n et pour tout x appartenant à $[0;1]$ on a: $0 \leq f_n(x) \leq x^n$

Déduisons-en que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

$$0 \leq f_n(x) \leq x^n \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

Déterminons la limite de la suite (I_n)

$$\begin{cases} 0 \le I_n \le \frac{1}{n+1} \\ \text{et} \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

d'après le théorème des Gendarmes

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

4-a/ A l'aide d'une intégration par parties, montrons que pour tout entier n: $I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)x^{n+1}dx$

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x+x^2}x^n\right)dx$$

Posons $U(x) = \frac{1}{1+x+x^2} \Rightarrow U'(x) = -\frac{2x+1}{(1+x+x^2)^2}$

$V'(x) = x^n \Rightarrow V(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$$I_n = \left[\frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x+x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{2x+1}{(1+x+x^2)^2}x^{n+1}dx$$

$$\boxed{I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)x^{n+1}dx}$$

b/ En utilisant l'encadrement obtenu dans la question A-2/, montrons que, pour tout entier n:

$$\frac{1}{3(n+2)} \le \int_0^1 f(x)x^{n+1}dx \le \frac{1}{n+2}$$

D'après A-2/ on a:

$\forall x \in [0;1]$, $\frac{1}{3} \le f(x) \le 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^{n+1} \le f(x)x^{n+1} \le x^{n+1}$ car $x^{n+1} \ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 x^{n+1}dx \le \int_0^1 f(x)x^{n+1}dx \le \int_0^1 x^{n+1}dx$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left[\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1 \le \int_0^1 f(x)x^{n+1}dx \le \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1$

On a donc:

$$\boxed{\frac{1}{3(n+2)} \le \int_0^1 f(x)x^{n+1}dx \le \frac{1}{n+2}}$$

Montrons également que:

$$\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \le I_n \le \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)x^{n+1}dx$$

$$\frac{1}{3(n+2)} \le \int_0^1 f(x)x^{n+1} \le \frac{1}{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3(n+2)(n+1)} \le \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)x^{n+1}dx \le \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \le \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)x^{n+1}dx \le \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

d'où:

$$\boxed{\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \le I_n \le \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}}$$

c/ Entier n_0 à partir duquel cet encadrement conduit à une valeur approchée de I_n au centième près

La condition précédente est vérifiée si

$$\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \le \frac{1}{100}$$

$\Leftrightarrow 3n^2 - 91n - 494 \ge 0$

On montre que $n \ge 35{,}03$

On a donc $\boxed{n_0 = 36}$

d-/ Valeur approchée au centième près de I_n pour $n = n_0$

On montre que $\boxed{I_n = 0{,}01}$

EXERCICE 23

Calculons l'intégrale suivante :

$$I=\int_1^n (|x-1|+|x-2|+\dots+|x-n|)\,dx$$

$$I=\int_1^n (|x-1|+|x-2|+\dots+|x-n|)\,dx$$

$$=\int_1^n \left(\sum_{i=1}^{n}|x-i|\right)dx$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_1^n |x-i|\,dx \quad \text{car la fonction intégrale est linéaire}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\int_1^i (i-x)\,dx+\int_i^n (x-i)\,dx\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\left[\frac{-1}{2}x^2+ix\right]_1^i+\left[-ix+\frac{1}{2}x^2\right]_i^n\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{-1}{2}i^2+i^2+\frac{1}{2}-i\right)+\left(-in+\frac{1}{2}n^2+i^2-\frac{1}{2}i^2\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(i^2-(n+1)i+\frac{1}{2}(n^2+1)\right)$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-(n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{2}(n^2+1)n$$

$$\boxed{I=\frac{2n^3-3n^2+n}{6}}$$

EXERCICE 24

1/ Montrons, en utilisant une intégrale que la surface d'un cercle de rayon r est : $S=\pi r^2$

La surface d'un cercle ne dépend pas de la position de son centre.

Considérons donc le cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon r. Soit (C) ce cercle ; il a pour équation :

$$x^2+y^2=r^2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$

Soit S_1 la surface délimitée par le cercle (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=r$ on a :

$$S_1=\frac{S}{4}=\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$=r\int_0^r \sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\,dx$$

Posons $\cos\theta=\frac{x}{r} \Rightarrow dx=-r\sin\theta\,d\theta$

$x=0 \Rightarrow \cos\theta=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$

$x=r \Rightarrow \cos\theta=1 \Rightarrow \theta=0$

$$S_1=r\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1-\cos^2\theta}\,(-r\sin\theta\,d\theta)$$

$$=-r^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}|\sin\theta|\sin\theta\,d\theta$$

Comme $\forall\theta\in[0;\pi/2]\ \sin\theta\geq 0$

$$S_1=r^2\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta$$

$$=r^2\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

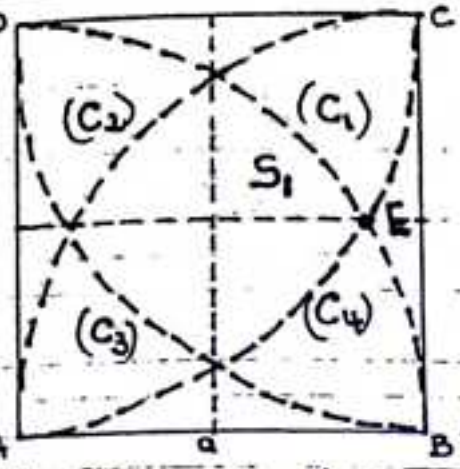
$$=\frac{r^2}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi\right)=\frac{\pi r^2}{4}$$

$$S_1=\frac{S}{4}=\frac{\pi r^2}{4} \Leftrightarrow S=\pi r^2$$

Conclusion :

La surface d'un cercle de rayon r est $S=\pi r^2$



Considérons un repère d'origine A tel que B(a;0) C(a;a) et D(0;a)

$(\mathcal{C}_1) : x^2+y^2=a^2$

$(\mathcal{C}_2) : (x-a)^2+y^2=a^2$

$(\mathcal{C}_3) : (x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

$(\mathcal{C}_4) : x^2+(y-a)^2=a^2$

On démontre que $(\mathcal{C}_1) \cap \mathcal{C}_4$ donne $E\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$ et que les droites d'équations $x=\frac{a}{2}$ et $y=\frac{a}{2}$ sont des axes des symétrés à la surface S' demandée.

Posons S'_1 la surface du domaine plan délimité par $(\mathcal{C}_1)$ et les droites d'équations $y=\frac{a}{2}$; $x=\frac{a}{2}$ et $x=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

On a: $S'_1 = \frac{S'}{4}$ et :

$$S'_1 = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{a^2-x^2} - \frac{a}{2}\right) dx$$

$$= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \sqrt{a^2-x^2} - \frac{a}{2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2}\right)$$

$$= a\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx - a^2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$$

Posons $\cos\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow dx = -a\sin\theta\, d\theta$

$x=\frac{a}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$x=\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$$S'_1 = a^2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\theta\, d\theta - a^2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/3} - a^2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) - a^2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$$

$$S'_1 = \frac{a^2\pi}{12} - a^2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$$

$$S' = 4S'_1 = \frac{a^2\pi}{3} - a^2(\sqrt{3}-1)$$

$$S' = a^2\left(1+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$$

$$\boxed{S' = a^2\left(\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}\right)}$$

EXERCICE 25

On considère l'intégrale I_n, $n \in \mathbb{N}$ définie par: $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

1./ Calculons I_0 obtenue pour $n=0$

$$I_0 = \int_1^e x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e = \frac{1}{2}(e^2-1)$$

$$\boxed{I_0 = \frac{1}{2}(e^2-1)}$$

2./ A l'aide d'une intégration par parties calculons I_1 obtenue pour $n=1$

$$I_1 = \int_1^e x\ln x\,dx$$

Posons $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}x^2$

$I_1 = \frac{1}{2}\left[x^2 \ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$

$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2-1) = \frac{1}{4}(e^2+1)$

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{4}(e^2+1)}$$

Donnons l'expression de I_{n+1} en fonction de I_n

$I_{n+1} = \int_1^e x(\ln x)^{n+1}\,dx$

Posons $U(x) = (\ln x)^{n+1} \Rightarrow U'(x) = \frac{n+1}{x}(\ln x)^n$

$V'(x) = x \Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}x^2$

$I_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x^2(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \frac{n+1}{2}\int_1^e x(\ln x)^n dx$

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{1}{2}e^2 - \frac{n+1}{2}I_n}$$

3/ Calculons en utilisant les résultats précédents l'intégrale :

$J = \int_1^e x\left[1 + \ln x - (\ln x)^2 + 2(\ln x)^3\right]dx$

En utilisant la linéarité de l'intégrale on a :

$J = \int_1^e x\,dx + \int_1^e x\ln x\,dx - \int_1^e x(\ln x)^2 dx + 2\int_1^e x(\ln x)^3 dx$

$J = I_0 + I_1 - I_2 + 2I_3$

$I_2 = \frac{1}{2}e^2 - I_1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2+1)$

$= \frac{1}{4}(e^2-1)$

$I_3 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2}I_2$

$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{8}(e^2-1) = \frac{1}{8}(e^2+3)$

$J = \frac{1}{2}(e^2-1) + \frac{1}{4}(e^2+1) - \frac{1}{4}(e^2-1) + \frac{1}{4}(e^2+3)$

$$\boxed{J = \frac{1}{4}(3e^2+1)}$$

EXERCICE 26

PARTIE A.

On considère les intégrales suivantes

$I = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,dx$ et $J = \int_0^{\pi/3} \frac{\cos x\,dx}{1+2\sin x}$

1./ Calculons J.

$J = \int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \frac{2\cos x}{1+2\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln(1+2\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$$\boxed{J = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{3})}$$

2./ Calculons I + J.

$I + J = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$

$= \int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x + \cos x}{1+2\sin x}\,dx$

$= \int_0^{\pi/3} \frac{2\sin x\cos x + \cos x}{1+2\sin x}\,dx$

$= \int_0^{\pi/3} \frac{(1+2\sin x)\cos x}{1+2\sin x}\,dx$

$= \int_0^{\pi/3} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{I + J = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

3./ Déduisons-en la valeur de I

$I + J = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow I = \frac{\sqrt{3}}{2} - J.$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{3})$

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{3})}$$

PARTIE B

En nous inspirant de la partie A,

Calculons l'intégrale $K=\int_0^{\pi/3}\frac{\sin 2x}{1+2\cos x}dx$

Posons $K'=\int_0^{\pi/3}\frac{\sin x}{1+2\cos x}dx$

$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\frac{-2\sin x}{1+2\cos x}dx$

$=-\frac{1}{2}\left[\ln(1+2\cos x)\right]_0^{\pi/3}$

$=-\frac{1}{2}\left(\ln 2-\ln 3\right)$

$K'=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

$K+K'=\int_0^{\pi/3}\frac{\sin 2x}{1+2\cos x}dx+\int_0^{\pi/3}\frac{\sin x}{1+2\cos x}dx$

$=\int_0^{\pi/3}\frac{\sin 2x+\sin x}{1+2\cos x}dx$

$=\int_0^{\pi/3}\frac{2\sin x\cos x+\sin x}{1+2\cos x}dx$

$=\int_0^{\pi/3}\frac{(1+2\cos x)\sin x}{1+2\cos x}dx$

$=\int_0^{\pi/3}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\pi/3}$

$=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

$K+K'=\frac{1}{2}\Leftrightarrow K=\frac{1}{2}-K'$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2e}{3}\right)$

$$\boxed{K=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2e}{3}\right)}$$

EXERCICE 27

On se propose de calculer les intégrales suivantes : $I=\int_0^{\pi/4}\cos^4 x\,dx$; $J=\int_0^{\pi/4}\sin^4 x\,dx$

1.| a.| Vérifions que :

$I=\int_0^{\pi/4}\cos x\left(\cos x-\cos x\sin^2 x\right)dx$.

$I=\int_0^{\pi/4}\cos^3 x\,dx=\int_0^{\pi/4}\cos x\cdot\cos x\cos^2 x\,dx$

$=\int_0^{\pi/4}\cos x\cos x\left(1-\sin^2 x\right)dx$

$=\int_0^{\pi/4}\cos x\left(\cos x-\cos x\sin^2 x\right)dx$

$$\boxed{I=\int_0^{\pi/4}\cos x\left(\cos x-\cos x\sin^2 x\right)dx}$$

Déduisons-en que :

$I=\int_0^{\pi/4}\sin^2 x\,dx-\frac{1}{3}J+\frac{5}{12}$

$I=\int_0^{\pi/4}\cos x\left(\cos x-\cos x\sin^2 x\right)dx$

Posons $U(x)=\cos x\Rightarrow U'(x)=-\sin x$

$V'(x)=\cos x-\cos x\sin^2 x\Rightarrow V(x)=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$

$I=\left[\cos x\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right)\right]_0^{\pi/4}+\int_0^{\pi/4}\left(\sin^2 x-\frac{1}{3}\sin^4 x\right)dx$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{12}\right)+\int_0^{\pi/4}\sin^2 x\,dx-\frac{1}{3}\int_0^{\pi/4}\sin^4 x\,dx$

$=\int_0^{\pi/4}\sin^2 x\,dx-\frac{1}{3}J+\frac{5}{12}$

$$\boxed{I=\int_0^{\pi/4}\sin^2 x\,dx-\frac{1}{3}J+\frac{5}{12}}\quad(1)$$

2.| Par analogie, montrons que :

$J=\int_0^{\pi/4}\cos^2 x\,dx-\frac{1}{3}I-\frac{5}{12}$

$J=\int_0^{\pi/4}\sin^4 x\,dx=\int_0^{\pi/4}\sin x\cdot\sin x\sin^2 x\,dx$

$=\int_0^{\pi/4}\sin x\sin x\left(1-\cos^2 x\right)dx$

$=\int_0^{\pi/4}\sin x\left(\sin x-\sin x\cos^2 x\right)dx$

Posons $U(x) = \sin x \Rightarrow U'(x) = \cos x$

$V'(x) = \sin x - \sin x \cos^2 x \Rightarrow V(x) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$

$$J = \left[\sin x\left(-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right)\right]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4}\left(\cos^2 x - \frac{1}{3}\cos^4 x\right)dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{12}\right) + \int_0^{\pi/4}\cos^2 x\,dx - \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4}\cos^4 x\,dx$$

$$= -\frac{5}{12} + \int_0^{\pi/4}\cos^2 x\,dx - \frac{1}{3}I.$$

$$\boxed{J = \int_0^{\pi/4}\cos^2 x\,dx - \frac{1}{3}I - \frac{5}{12}} \quad (2)$$

3./ Calculons $I+J$ et $I-J$

En utilisant (1) et (2) on a :

$$I+J = \int_0^{\pi/4}\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)dx - \frac{1}{3}(I+J)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}(I+J) = \int_0^{\pi/4} dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow I+J = \frac{3\pi}{16}$$

$$\boxed{I+J = \frac{3\pi}{16}}$$

$$I-J = \int_0^{\pi/4}\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)dx + \frac{5}{6}$$

$$= -\int_0^{\pi/4}\cos 2x\,dx + \frac{5}{6}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\sin 2x\right]_0^{\pi/4} + \frac{5}{6}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{I-J = \frac{1}{3}}$$

Déduisons-en les valeurs de I et J

$$\begin{cases} I+J = \frac{3\pi}{16} \\ I-J = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2I = \frac{3\pi}{16} + \frac{1}{3} = \frac{9\pi+16}{48} \\ 2J = \frac{3\pi}{16} - \frac{1}{3} = \frac{9\pi-16}{48} \end{cases}$$

$$\boxed{I = \frac{9\pi+16}{96}} \qquad \boxed{J = \frac{9\pi-16}{96}}$$

EXERCICE 28

On se propose de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx$$

1./ Calculons $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$ et $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$

$$A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx = \left[\ln(1+e^x)\right]_0^1$$

$$= \ln(1+e) - \ln 2$$

$$\boxed{A = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$$

$$B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \left[\frac{-1}{1+e^x}\right]_0^1$$

$$= \frac{-1}{1+e} + \frac{1}{2} = \frac{e-1}{2(1+e)}$$

$$\boxed{B = \frac{e-1}{2(1+e)}}$$

2./ Déterminons trois nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre réel t positif ou nul on ait :

$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$$

$$a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2} = \frac{a(1+t)^2 + bt(1+t) + ct}{(1+t)^2}$$

$$= \frac{(a+b)t^2 + (2a+b+c)t + a}{(1+t)^2}$$

Par identification on a:

$$\begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$$

$a=1$	$b=-1$	$c=-1$

$$\boxed{\frac{1}{(1+t)^2} = 1 - \frac{t}{1+t} - \frac{t}{(1+t)^2}} \quad (1)$$

3/ En posant $t = e^x$ dans (1)

Calculons $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right)dx$$

$$= \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$$

$$= 1 - A - B$$

$$= 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) - \frac{e-1}{2(1+e)}$$

$$\boxed{I = \frac{e+3}{2(e+1)} - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$$

4/ a/ A l'aide d'une intégration par parties, exprimons J en fonction de I

$$J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}\,dx$$

Posons $U(x) = x \Rightarrow U'(x) = 1$

$$V'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \Rightarrow V(x) = -\frac{1}{1+e^x}$$

$$J = \left[\frac{-x}{1+e^x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{1+e} + \int_0^1 \frac{1+e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$$

$$J = \frac{-1}{1+e} + \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx + \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$$

$$= \frac{-1}{1+e} + I + B$$

$$= \frac{-1}{1+e} + \frac{e-1}{2(1+e)} + I$$

$$J = I + \frac{e-3}{2(1+e)} \qquad \boxed{J = \frac{e}{1+e} - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$$

EXERCICE 29

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale $I_k = \int_0^1 x^k\sqrt{1-x}\,dx$ et

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$$

1/ Calcul de I_0

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx = \int_0^1 (1-x)^{1/2}\,dx$$

$$= -\int_0^1 -(1-x)^{1/2}\,dx$$

$$= -\frac{2}{3}\left[(1-x)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{I_0 = \frac{2}{3}}$$

2/ Montrons en intégrant par parties que pour tout entier $k \geq 1$:

$$I_k = \frac{2k}{2k+3} I_{k-1}$$

$$I_k = \int_0^1 x^k\sqrt{1-x}\,dx$$

Posons $U(x) = x^k \Rightarrow U'(x) = kx^{k-1}$

$$V'(x) = \sqrt{1-x} \Rightarrow V(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$$

$$I_k = -\frac{2}{3}\left[x^k(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 + \frac{2k}{3}\int_0^1 x^{k-1}(1-x)\sqrt{1-x}\,dx$$

$$= \frac{2k}{3}\int_0^1 \left(x^{k-1}\sqrt{1-x} - x^k\sqrt{1-x}\right)dx$$

$$= \frac{2k}{3}\left(\int_0^1 x^{k-1}\sqrt{1-x}\,dx - \int_0^1 x^k\sqrt{1-x}\,dx\right)$$

$$I_k = \frac{2k}{3}\left(I_{k-1} - I_k\right)$$

$$\Leftrightarrow 3I_k = 2kI_{k-1} - 2kI_k$$

$$\Leftrightarrow (2k+3)I_k = 2kI_{k-1}$$

$$\Leftrightarrow I_k = \frac{2k}{2k+3}I_{k-1}$$

Conclusion

Pour tout entier $k \geq 1$, $I_k = \frac{2k}{2k+3}I_{k-1}$

Déduisons-en une expression de I_k

$\forall n \geq 1$, $I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}$

Remplaçons n par $1, 2, 3 \ldots k$ on a:

$$I_1 = \frac{2}{5}I_0$$

$$I_2 = \frac{4}{7}I_1$$

$$I_3 = \frac{6}{9}I_2$$

$$\vdots$$

$$I_k = \frac{2k}{2k+3}I_{k-1}$$

Multiplions membres à membres les k égalités obtenues et simplifions on a:

$$I_k = \frac{2}{5}\times\frac{4}{7}\times\frac{6}{9}\times\ldots\times\frac{2k}{2k+3}I_0$$

$$\boxed{I_k = \frac{2}{3}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{2i}{2i+3}\right)}$$

3/ Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$I_k \leq \frac{1}{k+1}$$

$\forall x \in [0;1]$, $0 \leq 1-x \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{1-x} \leq 1$ car $t \mapsto \sqrt{t}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow 0 \leq x^k\sqrt{1-x} \leq x^k$ car $x^k \geq 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^1 x^k\sqrt{1-x}\,dx \leq \int_0^1 x^k\,dx$

$$\int_0^1 x^k\,dx = \frac{1}{k+1}\left[x^{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$$

$$\Rightarrow I_k \leq \frac{1}{k+1}$$

Conclusion

Pour tout entier $k \geq 0$, $I_k \leq \frac{1}{k+1}$

4/ On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $[0;1]$ par:

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}, & 0 \leq x < 1 \\ F(1) = 0 \end{cases}$$

a/ Continuité de F sur $[0;1]$

$x \mapsto 1-x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $[0;1[$, de plus, $\forall x \in [0;1[$, $1-x > 0$ donc F est continue sur $[0;1[$

Au point 1 on a:

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} F(x) = +\infty$ et $F(1) = 0$

F n'est continue au point 1

Conclusion : F est continue sur $[0;1[$

b/ Etude des variations de F

$\mathcal{D}_F = [0;1]$; $F(0) = 1$ $F(1) = 0$

$\lim_{x \to 1} F(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = +\infty$

F est continue et dérivable sur $[0;1[$

et $\forall x \in [0;1[$, $F'(x) = \frac{1}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$

$\forall x \in [0;1[$, $F'(x) > 0$; F est donc strictement croissante sur $[0;1[$.

Tableau de variations

x	0		1
$F'(x)$		+	
$F(x)$	1	↗	$+\infty$

5/ Dans la suite, on note F_n, pour tout entier $n > 0$, la fonction définie par : $F_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(x)$ où f_i est la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$f_i(x) = x^i \sqrt{1-x}$

a/ Calculons $F_n(x)$

$F_n(x)$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\sqrt{1-x}$ et de raison x

$F_n(0) = F_n(1) = 0$

$\forall x \in [0;1[$, $F_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}\sqrt{1-x}$

$\forall x \in [0;1[$, $F_n(x) = \frac{1-x^n}{\sqrt{1-x}}$

Montrons que pour tout réel x de $[0;1[$, $F(x)$ est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $F_n(x)$

$\forall x \in [0;1[$, $\lim_{n \to +\infty} x^n = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = F(x)$

$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = F(x)$

b/ Pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par A_n l'intégrale: $\int_0^{1-\frac{1}{n}} F(x)\,dx$

Calculons A_n

$A_n = \int_0^{1-\frac{1}{n}} F(x)\,dx = \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$

$= \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^{1-\frac{1}{n}}$

$= \frac{-2}{\sqrt{n}} + 2$

$A_n = 2 - \frac{2}{\sqrt{n}}$

Calculons $\lim_{n \to +\infty} A_n$

$\lim_{n \to +\infty} A_n = \lim_{n \to +\infty} 2 - \frac{2}{\sqrt{n}}$

$= 2$ car $\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$

$\lim_{n \to +\infty} A_n = 2$

EXERCICE 30

On considère les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x) = \frac{1}{x^2-x+1}$ pour $n=0$

$$f_n(x) = \frac{x^n}{x^2-x+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

On pose, pour n entier naturel

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

1./ a./ Calculons $f_0'(x)$ et étudions les variations de f_0

$$f_0(x) = \frac{1}{x^2-x+1} \; ; \; f_0'(x) = \frac{-2x+1}{(x^2-x+1)^2}$$

$$\boxed{f_0'(x) = \frac{-2x+1}{(x^2-x+1)^2}}$$

$D_{f_0} = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_0(x) = 0 \; ; \; f_0'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$f_0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, (x^2-x+1)^2 > 0$; $f_0'(x)$ a donc le signe de $-2x+1$

Signe de $f_0'(x)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	0	$-$	

Sens de variations de f_0

f_0 est strictement croissante sur $]-\infty; 1/2[$, strictement décroissante sur $]1/2; +\infty[$ et admet un maximum au point $\frac{1}{2}$ qui est $f_0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$.

Tableau de variations de f_0

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_0(x)$	0	↗	$\frac{4}{3}$	↘	0

b./ Equations des tangentes D_A et D_B

$(D_A) : y = f_0'(0)x + f_0(0)$

$y = x + 1$

$(D_B) : y = f_0'(-1)(x-1) + f_0(-1)$

$= -x+1+1 = -x+2$

$$\boxed{\begin{aligned}(D_A) &: y = \varphi_A(x) = x+1 \\ (D_B) &: y = \varphi_B(x) = -x+2\end{aligned}}$$

Calcul de $f_0(x) - \varphi_A(x)$ et $f_0(x) - \varphi_B(x)$

$$f_0(x) - \varphi_A(x) = \frac{1}{x^2-x+1} - (x+1)$$

$$\boxed{f_0(x) - \varphi_A(x) = \frac{-x^3}{x^2-x+1}}$$

$$f_0(x) - \varphi_B(x) = \frac{1}{x^2-x+1} + x - 2$$

$$= \frac{1+(x-2)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-x+1}$$

$$\boxed{f_0(x) - \varphi_B(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2-x+1}}$$

Position de (Γ_0) par rapport à D_A et D_B

$\forall x \in \mathbb{R}, \; x^2-x+1 > 0$

$f_0(x) - \varphi_A(x)$ et $f_0(x) - \varphi_B(x)$ ont respec

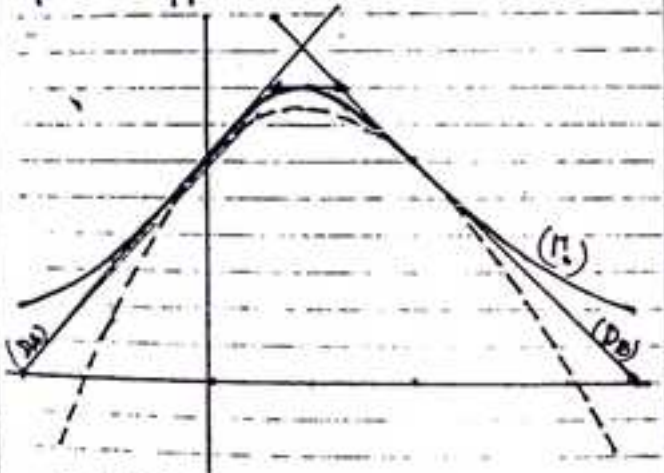
tirement le signe de $-x^3$ et $(x-1)^3$.

Résumons les résultats dans les tableaux ci-dessous.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_0(x)-p(x)$		$+$	0	$-$	
Position de Γ_0 par rapport à D_A	(Γ_0) est au dessus de (D_A)		(Γ_0) coupe (D_A)		(Γ_0) est en dessous de D_A

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_0(x)-p(x)$		$-$	0	$+$	
Position de Γ_0 par rapport à D_B	(Γ_0) est en dessous de (D_B)		(Γ_0) coupe (D_B)		(Γ_0) est au dessus de (D_B)

c./ Construction de (Γ_0) (D_A) et (D_B) pour x appartenant à $[-1;2]$



2./ Soit P une parabole d'équation

$$y = p(x) = ax^2+bx+c.$$

a./ Déterminons les coefficients a, b et c pour que la parabole P passe par les points A et B et soit tangente à D_A.

$A \in P \Leftrightarrow p(0)=1$; $B \in P \Leftrightarrow p(-1)=1$

P est tangente à $(D_A) \Leftrightarrow p'(0)=1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p(0)=1 \\ p(-1)=1 \\ p'(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a+b+c=1 \\ -b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$$

$a=-1$	$b=1$	$c=1$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = -x^2+x+1}$$

b./ Calculons $f_0(x)-p(x)$

$$f_0(x)-p(x) = \frac{1}{x^2-x+1} + x^2-x-1$$

$$= \frac{1+x^4-x^3-x^2-x^3+x^2+x+x^2-x-1}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{x^4-2x^3+x^2}{x^2-x+1} = \frac{x^2(x^2-2x+1)}{x^2-x+1}$$

$$\boxed{f_0(x)-p(x) = \frac{x^2(x-1)^2}{x^2-x+1}}$$

Déduisons la position de (Γ_0) par rapport à la parabole (P).

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x^2(x-1)^2 \geq 0 \\ x^2-x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow f_0(x)-p(x) \geq 0$$

$\boxed{(\Gamma_0) \text{ est donc au dessus de } (P)}$

Construction de (P) sur le graphique de la question 1.c (Voir Figure)

3./ Montrons que $\frac{k}{12} < I_0 < \frac{m}{12}$ où k et m sont deux entiers que nous préciserons

$$\forall x \in]0;1[,\ p(x) < f_0(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 p(x)\,dx < \int_0^1 f_0(x)\,dx = I_0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 p(x)\,dx < I_0 \quad (a)$$

$\forall x \in [0; 1/2]$, $f_0(x) < x+1$

$\Rightarrow \int_0^{1/2} f_0(x)\,dx < \int_0^{1/2} (x+1)\,dx$ (b)

$\forall x \in [1/2; 1[$, $f_0(x) < -x+2$

$\Rightarrow \int_{1/2}^{1} f_0(x)\,dx < \int_{1/2}^{1} (-x+2)\,dx$ (c)

(b) + (c) $\Rightarrow \int_0^{1/2} f_0(x)\,dx + \int_{1/2}^{1} f_0(x)\,dx < \int_0^{1/2} (x+1)\,dx + \int_{1/2}^{1} (-x+2)\,dx$

$\Leftrightarrow \int_0^{1} f_0(x)\,dx < \int_0^{1/2} (x+1)\,dx + \int_{1/2}^{1} (-x+2)\,dx$

$\Leftrightarrow I_0 < \int_0^{1/2} (x+1)\,dx + \int_{1/2}^{1} (-x+2)\,dx$ (d)

(a) et (d) $\Leftrightarrow \int_0^1 p(x)\,dx < I_0 < \int_0^{1/2} (x+1)\,dx + \int_{1/2}^{1} (-x+2)\,dx$

$\int_0^1 p(x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1 = \frac{7}{6}$.

$\int_0^{1/2} (x+1)\,dx = \frac{5}{8}$ et $\int_{1/2}^{1} (-x+2)\,dx = \frac{5}{8}$

On a finalement $\frac{7}{6} < I_0 < \frac{5}{4}$

soit $\frac{14}{12} < I_0 < \frac{15}{12}$ d'où

$\boxed{k = 14 \text{ et } m = 15}$

4/ Calculons $2I_1 - I_0$ et déduisons-en I_1 en fonction de I_0

$2I_1 - I_0 = \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx$

$= \left[\ln(x^2-x+1)\right]_0^1 = 0$

$\boxed{2I_1 - I_0 = 0}$ d'où $\boxed{I_1 = \frac{1}{2} I_0}$

b/ Calculons $I_2 - I_1 + I_0$.

$I_2 - I_1 + I_0 = \int_0^1 \frac{x^2-x+1}{x^2-x+1}\,dx = \int_0^1 dx = 1$

$\boxed{I_2 - I_1 + I_0 = 1}$

Déduisons-en I_2 en fonction de I_0

$I_2 - I_1 + I_0 = 1 \Leftrightarrow I_2 = 1 - \frac{1}{2} I_0$

$\boxed{I_2 = 1 - \frac{1}{2} I_0}$

Déduisons-en alors l'encadrement $\frac{9}{8} < I_2 < \frac{11}{12}$

En utilisant l'inégalité de la question précédente on a:

$-\frac{7}{6} < I_0 < \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{8} < -\frac{1}{2} I_0 < -\frac{7}{12}$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{5}{8} < 1 - \frac{1}{2} I_0 < 1 - \frac{7}{12}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{8} < I_2 < \frac{5}{12}$

On en déduit : $\boxed{q = 3 \quad r = 5}$

5./ Montrons que pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n \leq x^n f_0(x) \leq \frac{4}{3} x^n$

D'après les variations de f_0 sur $[0;1]$ on a: $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq f_0(x) < \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow x^n \leq x^n f_0(x) \leq \frac{4}{3} x^n$ car $x^n \geq 0$

$\boxed{\forall x \in [0;1] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x^n \leq x^n f_0(x) \leq \frac{4}{3} x^n}$

Déduisons-en deux réels s et t tels que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{s}{n+1} \leq I_n \leq \frac{t}{n+1}$

$\forall x \in [0;1]$, $x^n \leq x^n f_0(x) \leq \frac{4}{3} x^n$

$\Rightarrow x^n \leq f_n(x) \leq \frac{4}{3} x^n$

$\Rightarrow \int_0^1 x^n\,dx \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 \frac{4}{3} x^n\,dx$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{n+1}$

Soit $\boxed{s=1 \text{ et } t=\frac{4}{3}}$

Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

$\begin{cases} \frac{1}{n+1} < I_n < \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{n+1} \\ \text{et} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ d'après le théorème des Gendarmes

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$

6/ a/ A l'aide d'une intégration par parties, établissons que:

$\forall n\in\mathbb{N},\ I_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 g(x)\,x^{n+1}\,dx$

où g est une fonction que nous préciserons

$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2-x+1}\,dx$

Posons $U(x) = \frac{1}{x^2-x+1} \Rightarrow U'(x) = -\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}$

$V'(x) = x^n \Rightarrow V(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$I_n = \left[\frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{x^2-x+1}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}x^{n+1}\,dx$

$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 g(x)\,x^{n+1}\,dx$ avec

$\boxed{g(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}}$

b/ Calculons $g'(x)$ et étudions les variations de g sur $[0;1]$

Pour tout x de $[0;1]$,

$g'(x) = \frac{2(x^2-x+1)^2 - 2(2x-1)^2(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)^4}$

$= \frac{2(x^2-x+1) - 2(2x-1)^2}{(x^2-x+1)^3}$

$= \frac{-6x^2+6x}{(x^2-x+1)^3}$

$\boxed{\forall x\in[0;1],\ g'(x) = \frac{-6x(x-1)}{(x^2-x+1)^3}}$

$\forall x\in[0;1],\ g'(x)\geq 0$; g est donc une fonction croissante sur $[0;1]$

$g(0) = -1$ et $g(1) = 1$

Tableau de variations de g

x	0		1
$g'(x)$	0	$+$	0
$g(x)$	-1	↗	1

c/ Etablissons que $\forall n\in\mathbb{N}$,

$1 + \frac{1}{n+2} \leq (n+1)I_n \leq 1 + \frac{1}{n+2}$

D'après les variations de g on a:

$-1 \leq g(x) \leq 1 \Leftrightarrow -x^{n+1} \leq x^{n+1}g(x) \leq x^{n+1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 (-x^{n+1})\,dx \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}\,dx$

$\Leftrightarrow 1 - \int_0^1 x^{n+1}\,dx \leq (n+1)I_n \leq 1 + \int_0^1 x^{n+1}\,dx$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n+2} \leq (n+1)I_n \leq 1 + \frac{1}{n+2}$

$i=-1$ et $I=1$

En utilisant le théorème des Gendarmes et la question 5/ on a: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = 1}$

DEUXIEME PARTIE :

PROBLEMES DE SYNTHESE

ENONCES DES PROBLEMES DE SYNTHESE

PROBLEME N°1

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x .$$

1/ Etudier le sens de variation de g.

2/ Calculer $g(1)$ et $g(2)$; en déduire que l'équation $g(x)=0$ a une unique solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1

3/ En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$$ On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unités : 2cm sur (ox), 4cm sur (oy)).

1/ Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$

2/ Montrer que pour tout $x>0$,

$$f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \cdot g(x)$$

En déduire le signe de $f'(x)$.

3/ Dresser le tableau de variations de f et montrer que : $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

4/ Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère orthonormal (préciser la tangente au point d'abscisse 1)

PARTIE C

1/ a/ Déterminer une primitive sur l'intervalle $]1;+\infty[$ de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$$

b/ Montrer que pour tout $x \geq 1$ on a :

$$f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$$

2/ Soit F la primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule pour $x=1$. Sans calculer F, montrer que, pour tout $x \geq 1$ on a :

$$F(x) \leq \frac{1}{2}(\ln x)^2 .$$

PROBLEME N°2

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x$

1/ Etudier les variations de g.

Préciser $g(1)$.

2/ En déduire le signe de la fonction g sur chacun des intervalles $]0;1[$ et $]1;+\infty[$

PARTIE B : Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$$

1/ Montrer que, pour tout $x>0$, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

2/ Déterminer les limites de f en $+\infty$ (On pourra mettre x^2 en facteur dans l'expression $f(x)$).
Déterminer la limite de f en 0

3/ Montrer que pour tout réel $x>0$,
$$f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot g(x).$$
En utilisant la partie A, étudier le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4/ On nomme (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormal (unité graphique 3cm). Tracer (C)

PARTIE C: Résolutions approchées d'équat-

1/ Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une seule solution sur $]0;1]$ (On pourra étudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0;1]$ par:
$h(x) = f(x) - x$) On nomme α cette solut-

2/ Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une seule solution sur l'intervalle $]1;+\infty[$. On nomme β cette solution. Montrer que $\alpha.\beta = 1$

3/ Déterminer un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}. En déduire un encadrement de α.

PROBLEME N°3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, a est un nombre réel strictement positif et différent de 1.
Soit f_a la fonction de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ et $(\mathcal{C}_a)$ sa courbe représentative.

1/ a/ Calculer $f_a(1)$, $f_a(a)$, $f_a(a^n)$ où n est un entier relatif.

b/ Démontrer que pour tous nombres réels strictement positifs x, y et tout entier relatif n on a:

- $f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y)$.
- $f_a\left(\frac{x}{y}\right) = f_a(x) - f_a(y)$
- $f_a(x^n) = n f_a(x)$.
- $f_a(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} f_a(x)$.

c/ Démontrer que pour tous nombres réels strictement positifs a, b et x on a:

- $f_a(b) = \frac{1}{f_b(a)}$
- $f_a(x) = f_a(b) \cdot f_b(x)$.

2/ a/ Etudier la fonction f_a et dresser son tableau de variation pour $0<a<1$ et $a>1$

b/ Démontrer que f_a est une bijection

c/ Démontrer que $f_{\frac{1}{a}} = -f_a$ et en déduire la position relative de $(\mathcal{C}_a)$ et $(\mathcal{C}_{\frac{1}{a}})$

3/ Tracer les courbes $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_{\frac{1}{2}})$

PROBLEME N° 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout nombre réel m, on définit la fonction f_m par: $f_m(x) = \ln\left|\frac{mx+1}{x+m}\right|$. On désigne par (C_m) la courbe représentative de f_m.

1.) Etudier f_m et tracer (C_m) dans les cas suivants: $m=0$, $m=-1$ et $m=1$

Dans la suite, on suppose que $m \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$

2.) a.) Déterminer les ensembles de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction f_m.

On désigne par D_m l'ensemble de définition de f_m.

b.) Démontrer que les courbes (C_m) passent par deux points fixes.

3.) a.) Démontrer que $D_m = D_{\frac{1}{m}}$ et que pour tout élément x de D_m on a:

$f_{\frac{1}{m}}(x) = -f_m(x)$.

En déduire la position relative de (C_m) et $(C_{\frac{1}{m}})$.

b.) Démontrer que

* $(x \in D_{-m}) \Leftrightarrow (-x \in D_m)$;
* $\forall x \in D_{-m}$, $f_{-m}(x) = f_m(-x)$

En déduire la position relative de (C_m) et (C_{-m})

c.) Déduire des questions précédentes qu'il suffit d'étudier f_m et de tracer (C_m) pour $m>1$ pour obtenir toutes les courbes (C_m).

4.) On suppose dans cette question que $m>1$.

a.) Etudier f_m et dresser son tableau de variation.

b.) En déduire le tracé de (C_2), $(C_{\frac{1}{2}})$ et (C_{-2}).

Soit Ω le point d'intersection de (C_2) et de son asymptote parallèle à (OI). Démontrer que Ω est un centre de symétrie de (C_2)

c.) Soit g la restriction de f_2 à $]-2; -\frac{1}{2}[$. Démontrer que g réalise une bijection de $]-2; -\frac{1}{2}[$ vers $\mathbb{R}$ et construire sur un autre graphique les courbes représentative de g et de g^{-1}.

PROBLEME N° 5

1.) Soit f la fonction définie par:

$f(x) = \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$

a.) Etudier f et dresser son tableau de de variations.

b.) Calculer $f(0)$; en déduire le signe de f

2.) Soit g la fonction définie par:

$g(x) = x \ln|x-1|$

a/ Etudier g et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$.

b/ Soit A le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et (OI) d'abscisse non nulle. Démontrer que A est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$ et écrire une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en A.

3/ On désigne par h la restriction de g à l'intervalle $]1;+\infty[$. Démontrer que h est une bijection de $]1;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et construire sur un autre graphique les courbes représentatives de h et de h^{-1}

PROBLEME N° 6

PARTIE A

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x + \ln|x-1|$

1/ a/ Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.

b/ Montrer que f s'annule pour une valeur α différent de 0, que l'on comparera aux nombres réels $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.

2/ Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan P rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J) (unité graphique 2 cm).

a/ Etudier les branches infinies de (C)

b/ Tracer (C) ainsi que les tangentes à (C) aux points d'abscisses respectives 1/2 et 1-e.

3/ Soit t un nombre réel de $[0;1[$. Calculer l'aire de la partie du plan définie par: $0 \leq x \leq t$ et $f(x) \leq y \leq 0$. Quelle est la limite de cette aire lorsque t tend vers 1?

4/ Soit g la restriction de f à $]1;+\infty[$.

a/ Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1}; préciser l'ensemble de définition de g^{-1}.

b/ La fonction réciproque g^{-1} est-elle dérivable en 2? Si oui calculer $(g^{-1})'(2)$

PARTIE B

1/ On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation:

$z^3 + (1+i)z^2 + (2+i)z + 6 + 8i = 0$ (E)

a/ Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure notée z_0 que l'on déterminera.

b/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Soit z_0, z_1 et z_2 les solutions de (E) z_1 est celle dont la partie réelle est positive

2/ Soit dans le repère (O, I, J) A,

B, C les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2.

a/ Montrer qu'il existe une similitude directe S que l'on déterminera qui transforme A en B et I en C.

b/ Donner les éléments géométriques de la similitude directe S.

3/ A tout point M(x;y) on associe le point M'(x';y') par S.

Déterminer x' et y' en fonction de x et y.

4/ Soit (Γ) la représentation graphique dans le plan P de la restriction h de la fonction f à l'intervalle $]-\infty;-1[$.

Vérifier que l'image (Γ') de (Γ) par S est une partie de la représentation graphique dans le plan P de la fonction h_1 définie par:

$$h_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2e^{x+1} - x - 3$$

5/ Etudier les variations de la fonction h_1 et tracer sa courbe représentative.

PROBLEME N°7

On considère la fonction numérique, de la variable réelle x définie par:

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right)$$

PARTIE A

Soit l'expression $A(x) = \frac{2x^3 - x - 1}{x}$.

1/ Vérifier que $A(1) = 0$ et étudier le signe de cette expression suivant les valeurs de x.

2/ a/ Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

Quel est l'ensemble de définition de f?

b/ Déterminer les limites de f(x) lorsque x tend vers $-\infty$; vers $+\infty$

c/ Etudier les limites de f(x) lorsque x tend vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$, vers $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d/ Montrer que la courbe (C), représentative de f, admet trois asymptotes dont on déterminera les équations respectives.

3/ a/ Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation

b/ Tracer la courbe (C) dans un repère orthonormé (unité 2cm).

On construira la tangente à (C) au point d'abscisse -1.

PARTIE B

Soit l'expression $B(x) = \frac{2}{2x^2 - 1}$

1/ a/ Déterminer le couple de réels (a;b) tel que, pour toute valeur de x élément du domaine de définition de B on ait: $B(x) = \frac{a}{x\sqrt{2}-1} + \frac{b}{x\sqrt{2}+1}$

b/ En déduire les primitives de $B(x)$.

2/ a/ Soit α un réel de l'intervalle $]\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}]$. Calculer l'intégrale :

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{2x^2}{2x^2-1}\right) dx$$

à l'aide d'une intégration par parties.

b/ Déterminer, en fonction de $I(\alpha)$, l'aire du domaine plan défini par la courbe (C) et les droites d'équations respectives :

$y = x+1-\ln 2$; $x = \alpha$; $x = \sqrt{2}$.

c/ Soit $\beta = \alpha\sqrt{2} - 1$

Exprimer $I(\alpha)$ en fonction de β.

En déduire $\lim_{\alpha \to \frac{\sqrt{2}}{2}} I(\alpha)$.

d/ Calculer l'aire du domaine plan défini par la courbe (C) et les droites d'équations respectives :

$y = x+1-\ln 2$; $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \sqrt{2}$.

Exprimer ce résultat en cm^2, à 10^{-2} près et le hachurer sur le dessin.

PROBLEME N° 8

Pour tout nombre réel α non nul on désigne par f_α la fonction numérique définie par :

$$f_\alpha(x) = \frac{\ln(\alpha x)}{x}$$

et (C_α) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

PARTIE A

1/ Etudier les variations de f_1 et construire (C_1).

2/ Etudier f_α pour $\alpha \neq 0$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C_α) avec l'axe des abscisses.

3/ Dans cette question, on suppose $\alpha > 0$

a/ Déterminer une primitive F_α de f_α sur $]0; +\infty[$

b/ Pour $a \in]0, \frac{e}{\alpha}[$ on pose

$$A_\alpha(a) = F_\alpha\left(\frac{e}{\alpha}\right) - F_\alpha(a).$$

Etudier la limite en 0 de $A_\alpha(a)$, puis celle de $a\,A_\alpha(a)$.

PARTIE B

1/ Soit a un réel strictement positif. Déterminer, suivant les valeurs de a le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x réel : $a^x = x$

(On pourra utiliser les variations de f_1)

2/ Démontrer, en utilisant les variations de f_1, qu'il existe un couple (b,c) unique d'entier naturels que l'on déterminera tel que :

$$0 < b < c \text{ et } b^c = c^b.$$

PARTIE C

1/ Soit t un réel strictement positif

a/ Ecrire une équation de la tangente (T_α) à la courbe (C_α) au point d'abscisse t.

b/ Démontrer que lorsque α varie, t restant fixe, les droites (T_α) passent par un point fixe I_t que l'on déterminera.

Déterminer l'ensemble décrit par les points I_t lorsque t parcourt $]0;+\infty[$

2/ Pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$ on note M et M' les points de (C_2) et (C_3) ayant pour abscisse x et l'on désigne par G le barycentre du système $\{(M,1),(M',-2)\}$

Démontrer que lorsque x décrit l'intervalle $]0;+\infty[$, le point G décrit une des courbes (C_α) que l'on déterminera.

3/ Soient α et α' deux réels strictement positifs et λ un réel différent de 1. Pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$ on note M et M' les points de (C_α) et $(C_{\alpha'})$ ayant pour abscisse x et l'on désigne par G le barycentre du système $\{(M,1),(M',-\lambda)\}$

Démontrer que lorsque x parcourt $\mathbb{R}_+^*$, le point G décrit une des courbes (C_α) que l'on précisera.

PROBLEME N°9

PARTIE I.

Pour tout entier relatif non nul n, on considère la fonction f_n d'une variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln|x| \text{ si } x \neq 0 \\ \text{et} \\ f_n(0) = 0. \end{cases}$$

1/ a/ Préciser l'ensemble de définition de f_n.

b/ Pour quelles valeurs de n la fonction f_n est-elle continue en tout point de $\mathbb{R}$?

2/ Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on appelle (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n.

a/ Etudier les éléments de symétrie de (C_n) suivant la parité de n.

b/ Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes O, A et B où O est l'origine du repère, A est le point d'abscisse positive et B le symétrique de A par rapport à O.

c/ Pour quelles valeurs de n la fonction f_n est-elle dérivable pour $x=0$?

d/ Calculer la dérivée de f_n pour $x \neq 0$. Montrer que toutes les courbes

(C_n) admettant la même tangente en A.

3/ Etudier les variations des fonctions f_{-3}, f_1 et f_2, puis tracer avec soin les courbes (C_{-3}), (C_1) et (C_2) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2cm)

4/ Dans la suite du problème, on ne considère que la restriction des fonctions f_n à l'intervalle $[0;+\infty[$.

Soit M_n le point de la courbe (C_n) de coordonnées (X_n, Y_n) où X_n est la valeur strictement positive, pour laquelle f_n présente un extremum.

Montrer que tous les points M_n sont sur une courbe (Γ) dont on précisera l'équation.

PARTIE II

1/ Soit α un nombre réel strictement positif. Calculer $I_n(\alpha)=\int_1^\alpha f_n(x)\,dx$

2/ Dans cette question $n=2$

a/ Calculer $I_2(\alpha)=\int_1^\alpha f_2(x)\,dx$

Quelle est la limite de $I_2(\alpha)$ lorsque α tend vers zéro?

Interpréter géométriquement la valeur limite trouvée.

b/ Déterminer un nombre réel β $(\beta>0)$ tel que la valeur moyenne de f_2 sur l'intervalle $[0,\beta]$ soit nulle.

Quel point particulier de la courbe (C_{-3}) a pour abscisse β?

PROBLEME N°10

Soit la fonction numérique f_a de la variable réelle x définie par:

$$f_a(x)=\ln\left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right),\ a\neq 0.$$

On désigne par (C_a) la courbe représentative de f_a dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.

PARTIE A

1/ Etudier la parité de f_a.

2/ Démontrer que la courbe (C_a) possède deux asymptotes dont on donnera les équations.

3/ Etudier, selon les valeurs du réel non nul a, le sens de variation de la fonction f_a.

4/ a/ Démontrer que f_a est une bijection de son ensemble de définition sur un ensemble que l'on précisera

b/ Expliciter $f_a^{-1}(x)$. On désigne par (Γ_a) la courbe représentative de f_a^{-1} relativement au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5/ a/ Démontrer que l'affinité orthogonale d'axe $(O,\vec{j})$ et de rapport a transforme (C_1) en (C_a).

b/ Soit a et a' deux réels non

nuls et distincts. Déterminer une application affine transformant (C_a) en $(C_{a'})$.

6/ Soit R la rotation de centre O et d'angle $(-\frac{\pi}{2})$, S la symétrie orthogonale d'axe $(O,\vec{i})$.

a/ Déterminer une expression analytique de RoS puis donner une équation cartésienne de la transformée, RoS(Γ_a), de (Γ_a) par RoS

b/ Comparer les équations cartésiennes de (C_a) et de RoS(Γ_a). Pouvait-on prévoir ce résultat?

Dans la suite du problème, on suppose $a = 1$.

7/ Tracer la tangente à la courbe (C_1) au point d'abscisse 0 ainsi que (C_1) et (Γ_1).

PARTIE B

1/ Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; \pi/2[$ par: $g(x) = f_1(\sin x)$

Démontrer que $g'(x) = \frac{1}{\cos x}$.

2/ Déterminer le réel c tel que

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x} = \ln c$$

3/ On considère l'intégrale:

$I_n = \int_0^{\pi/6} \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} dx$ où n est un entier naturel non nul.

On définit ainsi une suite numérique (I_n).

a/ Démontrer que la suite (I_n) est à termes positifs.

b/ Etudier le sens de variation de la suite (I_n).

c/ Démontrer que $I_n \leq \frac{\ln c}{4^n}$

d/ En déduire la limite de la suite (I_n)

PARTIE C

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction h_n définie sur l'intervalle $[0; \pi/2[$ par:

$$h_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{(\sin x)^{2p-1}}{2p-1}$$

1/ Donner une expression simplifiée de somme $S_n(x) = 1 + \sum_{p=1}^{n-1} (\sin x)^{2p}$ en remarquant que $S_n(x)$ est la somme des premiers termes d'une suite géométrique (x est un réel).

2/ Démontrer que: $h_n'(x) = \frac{1-(\sin x)^{2n}}{\cos x}$

3/ Montrer que $h_n(\frac{\pi}{6}) = \ln\sqrt{3} - I_n$.

4/ En déduire que la suite (U_n) définie par:

$$U_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p-1)\times 3^{2p-1}}$$

a une limite que l'on déterminera.

PROBLEME II

PARTIE A

1/ Vérifier que :

$3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2+3x+2)$.

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par: $g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x$

2/a/ Etudier le sens de variation de la fonction g.

b/ Déduire de la question précédente le signe de g(x) suivant les valeurs de x

3/ On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x) = x + 1 + \frac{x + \ln x}{x^2}$.

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan (unité graphique 2cm)

a/ Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

b/ Justifier que les droites (D) et (Δ) d'équations respectives : $x = 0$ et $y = x + 1$ sont asymptotes à la courbe (C)

4/a/ Montrer que la fonction h telle que: $h(x) = x + \ln x$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et que cette fonction prend des valeurs positives et négatives.

b/ En déduire que (Δ) coupe (C) en un point unique d'abscisse α vérifiant $\alpha + \ln\alpha = 0$.

Montrer que $0,56 < \alpha < 0,57$

c/ Déterminer la position relative de (C) par rapport à (Δ).

5/ Etudier le sens de variation de f.

6/ Déduire de la question 4/ l'existence d'une valeur unique β telle que $f(\beta) = 0$.

Montrer que $0,46 < \beta < 0,47$

7/ Construire (C) et (Δ).

PARTIE B

m étant un réel, on appelle f_m la fonction de $]0;+\infty[$ dans R définie par: $f_m(x) = \frac{x^2-1}{4} - \frac{m}{2}\ln x$ et (Γ_m) sa courbe représentative dans repère orthonormé.

1/ Dresser suivant les valeurs de m/ le tableau de variation de f_m.

2/ a/ Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan avec $x_0 > 0$ et $x_0 \neq 1$

Montrer qu'il existe une seule courbe (Γ_m) qui passe par M_0

b/ Montrer qu'il existe un seul point A appartenant à toutes les courbes (Γ_m).

PROBLEME N°12

PARTIE I

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par:

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$ où ln désigne la fonction logarithme népérien. On désigne par (C) la courbe représentative de f relativement au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1-/ a-/ Etudier la fonction (ensemble de définition D, parité, étude des variations, limites aux bornes de D) et résumer cette étude par un tableau de variation.

b-/ Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

c-/ Etudier la position relative de (C) et (T). Tracer (C) et (T) sur un même dessin.

2-/ a-/ Démontrer que f est une bijection de D sur un ensemble que l'on déterminera.

b-/ Expliciter $f^{-1}(x)$; représenter f^{-1} sur le même dessin que celui de la question précédente.

3-/ a-/ Déterminer le réel a tel que $f(a) = 1$

b-/ Soit E l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ f^{-1}(x) \leq y \leq \inf(1; f(x)) \end{cases}$$ où $\inf(u;v)$ désigne le plus petit des réels u et v.

Déterminer en fonction de a l'aire de E.

PARTIE II

Soit f_α la fonction numérique de la variable réelle x définie par:

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\alpha+x}{\alpha-x}\right); \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

On désigne par (C_α) la courbe représentative de f_α dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1-/ Etudier la fonction f_α (ensemble de définition D_α, parité, étude des variations, limites aux bornes de D_α) et résumer cette étude par un tableau de variation. On discutera suivant les valeurs de α.

2-/ Démontrer que pour tout α non nul, f_α est une bijection de D_α sur un ensemble que l'on déterminera.

Expliciter $f_\alpha^{-1}(x)$. On désigne par (Γ_α) la courbe représentative de f_α^{-1} relativement au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

relativement au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3./ a/ Déterminer une application affine du plan P dans lui-même, autre que l'identité et laissant (C_α) globalement invariante.

b/ Déterminer une application affine transformant (C_1) en (C_α).

c/ α et α' étant deux réels distincts non nuls, déterminer une application affine transformant (C_α) en $(C_{\alpha'})$

4./ On désigne par r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et par s la symétrie axiale d'axe $(O, \vec{i})$.

a/ Déterminer les expressions analytiques de r et de sor.

b/ Déterminer une équation cartésienne de la transformée $\text{sor}(C_\alpha)$ de (C_α) par sor.

c/ Comparer les équations cartésiennes de (Γ_α) et de $(\text{sor})(C_\alpha)$. Pouvait-on prévoir le résultat

PARTIE III

Dans cette partie on considère les fonctions f_α définies au II avec $\alpha > 0$

1./ Déterminer les valeurs de α pour lesquelles l'équation d'inconnue réelle x: $f_\alpha(x) - x = 0$ admet une solution strictement positive que l'on notera $\chi(\alpha)$.

2./ On prend dans cette question $\alpha = 3$ et on définit la suite (U_n) par:

$$\begin{cases} U_0 = 1/2 \\ U_{n+1} = f_3^{-1}(U_n) \text{ si } n \geq 0. \end{cases}$$

a/ Démontrer que $U_1 > U_0$

En déduire que la suite est croissante

b/ Démontrer que pour tout n entier naturel on a : $U_n < \chi(3)$.

c/ Démontrer que la suite (U_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.

Démontrer que $\ell > \sqrt{6}$.

PROBLEME N° 13

PARTIE A

On se propose de déterminer les solutions sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle :

(E) : $xy' - 2y = \ln x$, où y est une fonction de variable x

1./ Déterminer les nombres réels a, b, c pour que la fonction P définie sur $]0; +\infty[$, par $P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie

$$xP'(x) - 2P(x) = 0$$

2./ f étant une fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, on pose $g = \frac{f}{P}$, P étant la fonction déterminée dans la

première question avec $a \neq 0$.

a-/ Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si g est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{ax^2}$.

b-/ Déterminer l'ensemble des primitives définies sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x^3}$. (On pourra faire une intégration par parties).

c-/ En déduire que l'ensemble des fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et vérifiant (E) est l'ensemble des fonctions $x \mapsto \frac{1+\ln x^2}{4} + \alpha x^2$, où α est un nombre réel.

3-/ a-/ Trouver la fonction φ, définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, vérifiant (E) tel que $\varphi(1) = 0$.

b-/ Etudier les variations de φ, et construire la courbe (C) représentative de φ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

PARTIE B

1-/ Soit λ un nombre réel strictement positif. Calculer, en fonction de λ l'intégrale : $I(\lambda) = \int_\lambda^1 \varphi(x)\,dx$.

2-/ Montrer que $\lim_{\lambda \to 0} I(\lambda) = \frac{1}{3}$.

3/ Soit $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$

a-/ Montrer que pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n-1$ et pour tout x de $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ on a :

$$\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \varphi(x) \leq \varphi\left(\frac{k}{n}\right).$$

b-/ Montrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

En déduire que :

$$I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right)$$

4/ Déduire des questions 2-/ et 3-/

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

5-/ a-/ Montrer que pour tout entier naturel non nul, n :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{4n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{1}{4}$$

b/ Etablir les égalités :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{k}\right) = \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$$

pour tout entier naturel non nul n.

c-/ Utiliser les résultats précédents pour démontrer que les deux suites :

$n \mapsto V_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$ et

$n \mapsto U_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ ont des limites finies lorsque n tend vers $+\infty$ que l'on calculera.

PROBLEME N°14

PARTIE A

Soit h la fonction numérique d'une variable réelle x définie par :

$$h(x) = \frac{2 - \ln x^2}{2 + \ln x^2}$$

($\ln$ désigne le logarithme népérien).

1/ a/ Déterminer l'ensemble de définition D de h.

b/ Montrer que h admet un prolongement par continuité au point 0 ; préciser ce prolongement.

2/ Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = h(x) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

a/ f est-elle dérivable en 0 ?

b/ Etudier les variations de f et établir son tableau de variation. On justifiera tout calcul de limite.

c/ Tracer la courbe (C) de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3/ On désigne par $\tilde{f}$ la restriction de f à l'intervalle $]-1/e ; +\infty[$

a/ Montrer que $\tilde{f}$ admet une bijection réciproque notée $\tilde{f}^{-1}$.

b/ Donner le tableau de variation de $\tilde{f}^{-1}$

c/ Tracer la courbe (C_1) de $\tilde{f}$ et (C_2) de $\tilde{f}^{-1}$ dans un autre repère orthonormé que celui de (C).

d/ Montrer que $\tilde{f}^{-1}$ est dérivable, puis calculer $(\tilde{f}^{-1})'(0)$

e/ Montrer que l'équation : $\forall x \in]\frac{-1}{e} ; +\infty[$, $\tilde{f}(x) = 2$ admet une solution unique notée x_0 dans l'intervalle $]\frac{-1}{e} ; -1[$. Donner un encadrement de x_0 à 10^{-1} près.

PARTIE B

On considère la fonction g définie par :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1 - e^{|x|}}{1 + e^{|x|}}$$

1/ a/ Etudier les variations de g.

b/ Tracer la courbe (S) de g dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2/ a/ Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout x réel strictement positif, on a : $g(x) = \frac{ae^x}{1+e^x} + b$

b/ Soit λ un réel tel que : $0 < \lambda$, et (E_λ) l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) vérifiant : $0 \leq x \leq \lambda$ et $-1 \leq y \leq g(x)$.

Calculer l'aire A de l'ensemble (E_λ) en fonction de λ puis calculer :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A.$$

PROBLEME N°15

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \text{ si } x>0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 2cm)

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par: $g(x) = 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

1./ Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$

2./ a./ Dresser le tableau de variation de g

b./ En déduire le signe de $g(x)$.

PARTIE B

1./ a./ Démontrer que f est continue en 0

b./ Démontrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

2./ a./ Calculer $f'(x)$ pour $x>0$ et montrer que $f'(x) = xg(x)$.

b./ En déduire le sens de variation de la fonction f.

3./ a./ Calculer la limite en $+\infty$ de f.

b./ Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4./ On pose pour tout $x>0$, $h(x) = f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)$ et $I(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{1+t} - 1 + t\right) dt$

a./ Calculer $I(x)$ et vérifier que $h(x) = x^2 I(x)$.

b./ Démontrer que pour $t \geq 0$, $0 \leq \frac{1}{1+t} - 1 + t \leq t^2$. On rappelle que $\frac{1}{1+t} - 1 + t = \frac{t^2}{1+t}$.

c./ En déduire que $0 \leq I(x) \leq \frac{1}{3}x^3$

d./ Déterminer la limite en $+\infty$ de $h(x)$ et le signe de $h(x)$ pour tout $x>0$

e./ Que représente la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ à la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction?

f./ Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite $(\mathcal{D})$.

PARTIE C

1./ Construire la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite $(\mathcal{D})$.

2./ Pour $0<\lambda\leq 1$ on pose $A(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)\,dx$. Calculer $A(\lambda)$ en fonction de λ.

3./ a./ Calculer $\lim_{\lambda \to 0} A(\lambda)$

b./ En déduire en cm^2 l'aire de la partie (Δ) du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations: $x=0$ et $x=1$

PROBLEME N°16

On considère la fonction f_n à variable réelle définie par: $f_n = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$ où n est un entier naturel non nul. Soit (C_n) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ $\|\vec{i}\| = 2cm$, $\|\vec{j}\| = 10cm$.

PARTIE A

1./ Etude de la fonction f_1 pour $n=1$

a./ Calculer les limites de la fonction f_1 en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C_1)?

b./ Etudier le sens de variation de f_1 et dresser son tableau de variation

2./ Etude de la fonction f_2 pour $n=2$

a./ Calculer les limites de la fonction f_2 en 0 et en $+\infty$. Que peut on en déduire pour la courbe (C_2)?

b./ Etudier le sens de variation de f_2 et dresser son tableau de variation

PARTIE B: Cas général

1./ Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes A et B dont on précisera les coordonnées.

2./ Etudier suivant la parité de n, les variations de f_n

3./ Etudier la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}).

PARTIE C

On considère la suite (I_n) pour tout entier naturel n non nul, définie par $I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$

1-/ a-/ Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $I_n \geq 0$.

b-/ Etudier le sens de variation de la suite (I_n). En déduire que la suite (I_n) est convergente.

2-/ a-/ Calculer I_1

b/ En utilisant la méthode d'intégration par parties montrer que pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$ En déduire la valeur de I_2

3-/ Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan délimité par les courbes (C_1), (C_2) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$

4-/ En utilisant les résultats de la question C-2-b, montrer par récurrence que: $\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$

5-/ En encadrant la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $[1;e]$, montrer $0 \leq I_n \leq 1$.

b-/ Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} I_n = 0$ et en déduire la valeur de

$$\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

PROBLEME N° 17

On considère les fonctions f_a définies pour tout réel x non nul par: $f_a(x) = \frac{a}{x} + \ln x^2$ où a désigne un paramètre réel. On appelle (C_a) la courbe représentative de f_a dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1./ a./ Etudier la fonction f_0

b./ Construire la courbe (C_0) représentative de la fonction f_0.

2./ Dans cette question a est différent de 0

a./ Comparer $f_{-a}(-x)$ et $f_a(x)$.

b./ En déduire une transformation géométrique entre les courbes (C_a) et (C_{-a})

3./ a./ Calculer les dérivées première et seconde de f_a.

b./ Calculer la limite en 0 de f_a

c/ Etudier les variations de f_a et dressons son tableau de variation suivant les valeurs de a.

d./ Préciser les points d'inflexion des courbes (C_1) et (C_2).

Déterminer l'équation de la tangente (T_1) à (C_1) et celle de la tangente (T_2) à (C_2) aux points d'inflexion.

Contruire les courbes (C_1) et (C_2) ainsi que les tangentes (T_1) et (T_2).

4./ Soit S_a le point de (C_a) où la tangente est parallèle à l'axe (ox).

a./ Déterminer l'ensemble (Γ) des points S_a lorsque a décrit $\mathbb{R}^*$.

b./ Montrer que (Γ) se déduit simplement de (C_0).

c./ Déterminer l'ensemble (Γ') des points d'inflexion de (C_a).

5./ a./ Ecrire l'équation de la tangente à la courbe (C_1) au point d'abscisse x_1.

b./ Soit U un point donné de l'axe (oy), d'ordonnée u.

Former l'équation déterminant les abscisses des points de contact des tangentes à (C_1) passant par U.

c./ Etudier, selon la position du point U le nombre de tangentes à (C_1) passant par U

PROBLEME N° 18

On considère la fonction f définie sur $]-e; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x + (x+e)\left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2 \text{ si } x \neq -e \\ f(-e) = -e \end{cases}$$

Soit (C) sa courbe représentative dans

Le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE A.

1/ a/ Démontrer que $\lim_{x \to 0} [x(\ln x)^2] = 0$

b/ Calculer la limite de f en $-e$. f est-elle continue en $-e$?

c/ Etudier la dérivabilité de f au point $-e$.

2/ Déterminer le sens de variations de f puis dresser son tableau de variat-

3/ Déterminer une équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

4/ Tracer T et (C).

5/ a/ Démontrer que f est une bijection sur un intervalle J à préciser. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') sa courbe.

b/ Tracer (C') dans le même repère que (C)

c/ Déterminer l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable.

PARTIE B.

Soit α un nombre réel tel que: $-e < \alpha < 0$. On pose $J(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} f(x)\,dx$

1/ Pour tout entier naturel n, on désigne par $I_n(\alpha)$ l'intégrale définie par: $I_n(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} (x+e)[\ln(x+e)]^n dx$.

a/ A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_n(\alpha)$ en fonction de $I_{n-1}(\alpha)$.

b/ Calculer $I_0(\alpha)$ puis $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$.

2/ a/ Vérifier que pour tout $x \in]-e; +\infty[$
$f(x) = (x+e)[-1+\ln(x+e)]^2 + x$.

b/ Exprimer $J(\alpha)$ en fonction de $I_0(\alpha)$, $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$, puis en fonction de α seul.

3/ Calculer $\lim_{\alpha \to -e} (-J(\alpha))$. Donner une interprétation géométrique du résultat

4/ Soient P, Q et R) les points du plan de coordonnées respectives: $(0; -e)$, $(-e; -e)$ et $(-e; 0)$. Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$. Les courbes (C), (C') et (Δ) partagent le carré OPQR en quatre régions notées respectivement:

S_1: partie du carré au dessus de (C)

S_2: partie du carré comprise entre (C) et (Δ).

S_3: partie du carré comprise entre Δ et (C').

S_4: partie du carré en dessous de (C')

Comparer les aires de ces quatre parties

PROBLEME N°19

On considère pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $[0;1]$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^2(\ln x)^n, \text{ si } 0<x\leq 1 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

On note (C_n) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$

PARTIE A.

1-/ Soit p un entier naturel. En utilisant la limite de $t^p e^{-t}$ lorsque t tend vers $+\infty$, montrer que :

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x(\ln x)^p = 0.$$

2-/ En déduire pour tout entier $k\geq 1$, la limite de $x^k(\ln x)^p$ en 0.

3-/ Montrer que f_n est dérivable en 0 et calculer son nombre dérivé en 0

PARTIE B.

1-/ Etudier le sens de variation de f_1 sur $[0;1]$

2-/ a-/ Montrer que $\forall n\geq 1$, $0<e^{-\frac{n}{2}}<1$

b-/ L'entier n étant fixe ($n\geq 1$), résoudre dans $]0;1]$ l'inéquation

$$\ln x + \frac{n}{2} \leq 0$$

c/ Montrer que si $n\geq 2$ alors f_n est dérivable sur $[0;1]$ et $f_n'(x)$ admet le même signe que :

$(\ln x + \frac{n}{2})(\ln x)^{n-1}$ pour tout $x\in]0;1]$

d-/ Etudier le sens de variation de f_n sur $[0;1]$ pour $n\geq 2$ suivant les valeurs de n. Dresser le tableau de variation de f_n.

3-/ L'unité graphique étant 10 cm, construire les courbes (C_1) et (C_3). Déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection.

4-/ Montrer que les courbes (C_n) passent par deux points indépendants de n.

PARTIE C

Dans cette partie t désigne un réel appartenant à $[0;1]$ et n un entier naturel non nul

1-/ On pose $I_n(t) = \int_t^1 f_n(x)\,dx$ et $L_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

a-/ Justifier l'existence de $I_n(t)$

b-/ Montrer que la fonction : $t \longmapsto L_n - I_n(t)$ est la primitive sur $[0;1]$ de la fonction f_n qui s'annule en $t=0$.

2-/ En déduire que $I_n(t)$ admet pour limite L_n lorsque t tend vers 0

3-/ On considère la fonction numérique

F définie sur $[0;1]$ par :

$F(x) = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$ pour $0 < x \leq 1$

et $F(0) = 0$

a/ Prouver que F est dérivable sur $]0;1]$ et calculer $F'(x)$ pour $0 < x \leq 1$

b/ Prouver que F est dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.

c/ En déduire que F est une primitive de f_1 sur $[0;1]$. Calculer L_1.

4/ Soit φ_n la fonction définie sur $[0;1]$ par $\varphi_n(t) = -\frac{1}{3}t^3(\ln t)^n$.

a/ Déterminer $\lim_{t\to 0} \varphi_n(t)$

b/ Prouver que pour $t \in [0;1]$

$I_{n+1}(t) = \varphi_{n+1}(t) - \frac{n+1}{3} I_n(t)$.

c/ En déduire que $L_{n+1} = -\frac{n+1}{3} L_n$

d/ Prouver par récurrence que

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ L_n = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}$

e/ Calculer en fonction de n l'aire en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe (C_n) et l'axe des abscisses.

PROBLEME N°20

PARTIE A

1/ Justifier le résultat suivant :

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

2/ a/ En déduire que : $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$

b/ Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

3/ Pour tout naturel n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^n(1-x)$

a/ Etudier le sens de variation de f_n.

b/ Prouver que selon la parité de n, l'équation $f_n(x) = 1$ admet soit 0 soit 1 solution dans $\mathbb{R}$.

4/ Montrer que les courbes de f_n passent par deux points fixes et admettent les mêmes tangentes en ces points sauf pour certaines valeurs de n que l'on précisera.

PARTIE B :

On note g_n la restriction de f_n sur $[0;1]$

Soit (C_n) la courbe représentative de g_n

1/ Montrer que sauf pour une valeur de n, g_n possède un maximum $M_n = \left(\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

2/ Tracer (C_0), (C_1) et (C_2). Donner l'allure de (C_n) pour $n > 2$.

3/ Calculer : $\lim_{n\to+\infty} M_n$; $I_n = \int_0^1 g_n(x)$

$\lim_{n\to+\infty} I_n$. Pouvait-on prévoir ce dernier résultat à partir d'un encadrement de g_n ?

4/ Pour tout $x \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose

$S_n(x) = g_0(x) + g_1(x) + \cdots + g_n(x) = \sum_{i=0}^{n} g_i(x)$

a/ Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n(x)$ puis $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)dx$

b/ Exprimer $\int_0^1 S_n(x)dx$ en fonction de $I_0, I_1 \ldots I_n$

En déduire la valeur de $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)} = P_n$

c/ Comparer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)dx$ et $\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$

PROBLEME N° 21

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par: $f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 2cm)

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x)=x+2-e^x$.

1./ Etudier le sens de variation de g sur $[0;+\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.

2./ a./ Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution et une seule dans $[0;+\infty[$. On note α cette solution.

b./ Prouver que $1,14<\alpha<1,15$

3./ En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B

1./ a./ Montrons que pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$

b./ En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$

2./ a./ Montrer que pour tout réel positif x, $f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

b./ En déduire la limite de f en $+\infty$

Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3./ a./ Etablir que $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$

b./ En utilisant l'encadrement de α établi dans la question A-2, donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

4./ Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

5./ a./ Etablir que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$

$f(x)-x=\frac{(x+1)U(x)}{xe^x+1}$ avec $U(x)=e^x-xe^x-1$

b./ Etudier le sens de variation de la fonction U sur l'intervalle $[0;+\infty[$

En déduire le signe de $U(x)$.

c./ Déduire des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

Tracer (C) et (T).

PARTIE C.

1./ Déterminer une primitive F de f sur $[0;+\infty[$; on pourra utiliser l'expression de $f(x)$ établie dans B.2)

2./ On note D le domaine délimité par la courbe (C), la tangente (T) et les droites d'équations: $x=0$ et $x=1$

Calculer en cm^2 l'aire A du domaine D.

3/ Pour tout entier naturel n, on pose:

$$V_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx.$$

a./ Calculer V_0, V_1 et V_2

b/ Montrer que pour tout naturel $n \geq 2$,

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n).$$

En déduire la monotonie de la suite (V_n) à partir de $n = 1$

c./ Déterminer la limite de la suite (V_n)

d./ Déterminer la somme:

$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ pour tout entier naturel n.

PROBLEME N°22

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + (x^2+2)e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique: 2cm)

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.

1./ Etudier les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2./ Calculer la dérivée de g et déterminer son signe.

3./ Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation

4./ Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ puis justifier que $0{,}35 < \alpha < 0{,}36$.

5./ En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B

1./ Etudier les limites de f en $-\infty$ puis en $+\infty$.

2./ Déterminer $f'(x)$ pour tout x réel et montrer que $f'(x) = g(x)$.

3./ En déduire à l'aide de la partie A, les variations de f et donner son tableau de variation.

4/ a./ Démontrer que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$

b./ A l'aide de l'encadrement de α déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 4×10^{-2}.

5./ Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

Préciser la position relative de la courbe (C) par rapport à Δ.

6./ Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

7./ Tracer Δ, T puis (C)

8./a/ Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$

par: $P(x) = (ax^2+bx+c)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto (x^2+2)e^{-x}$.

b/ Calculer en fonction de α l'aire A en cm² de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équations $x=-\alpha$ et $x=0$.

c/ Justifier que $A = 4e^{2\alpha} + 8e^{\alpha} - 16$.

PARTIE C

1/ Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[1;2]$, $1 \leq f(x) \leq 2$.

2/ Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[1;2]$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$

3/ En utilisant le sens de variation de la fonction h définie sur $[1;2]$ par $h(x) = f(x) - x$, démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique β dans $[1;2]$.

4/ Soit (U_n) la suite numérique définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = f(U_n)$.

a/ Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leq U_n \leq 2$. (On utilisera une démonstration par récurrence)

b/ Démontrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{3}{4}|U_n - \beta|$

c/ Démontrer que pour tout entier naturel n, $|U_n - \beta| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

d/ En déduire que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite.

e/ Trouver un entier n_0 tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 on ait :

$$|U_n - \beta| \leq 10^{-2}.$$

PROBLEME N°23

On considère la fonction de la variable réelle x définie par: $f_a(x) = x + ae^{-|x|}$, où a est un réel non nul, e la base des logarithmes néperiens et $|x|$ désigne la valeur absolue de x.

PARTIE A

1/ a/ Donner l'ensemble de définition de f_a ainsi que la partie de cet ensemble où f_a est dérivable.

b/ Etudier la dérivabilité de f_a à gauche et à droite en 0.

c/ Montrer que pour tout a, la courbe représentative (C_a) de f_a admet une asymptote oblique dont on donnera une équation.

2/a/ Trouver la valeur de x pour laquelle la dérivée s'annule.

En déduire l'ensemble I des réels a pour lesquels la fonction f_a a un extrémum relatif; cet extrémum est-il un maximum ou un minimum?

b/ Soit x_a le point où f_a possède un extrémum relatif.

Déterminer l'ensemble D des pts $M(x_a; f_a(x_a))$ lorsque a décrit I.

3/a/ Etablir le tableau de variation de f_e pour $a = e$.

b/ Tracer la courbe (C_e) ainsi que ses demi-tangentes en son point d'abscisse 0, son asymptote et l'ensemble D. (Unité 2cm).

4/ a/ le réel a étant fixé, déterminer les points d'intersection P et Q de (C_a) avec la droite (S) d'équation $y = x + m$, m étant un paramètre réel.

b/ Calculer les coordonnées du milieu J du segment [PQ] et en déduire l'ensemble des points J lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

PARTIE B

Dans cette partie on prend $a = 1$

1/a/ Dresser le tableau de variation de la fonction f_1.

b/ Tracer (C_1), ses demi-tangentes au point d'abscisse 0 et son asymptote sur un autre dessin (unité 2cm)

2/ Soit l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x; y) sont telles que: $\begin{cases} 0 \leq x \leq \lambda \\ x \leq y \leq f_1(x) \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

a/ Calculer l'aire S de cet ensemble.

b/ Trouver la limite de cette aire lorsque λ tend vers l'infinie.

PROBLEME N°24

PARTIE A

On considère les fonctions numériques f_m de la variable réelle x définies par: $f_m(x) = e^x - m(x+1)$ $m \in \mathbb{R}$. On désigne par (C_m) leurs courbes. (Unité graphique 2cm)

1/ Etudier les variations de la fonction f_1 et tracer avec soin la courbe (C_1). On précisera l'asymptote de la courbe (C_1)

2/ Soit la droite (Δ_1) d'équation $y = -x - 1$. Calculer en cm^2, l'aire

$A(\alpha)$ de la portion du plan limitée par (G), (Δ_1) et les droites d'équations $x=0$ et $x=\alpha$ (où α est un réel négatif).

Etudier la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers $-\infty$.

3./ Pour tout entier naturel n on désigne par (D_n) le domaine limité par (Δ_1), (G) et les droites d'équation $x=-n-1$ et $x=-n$.

a/ Calculer en cm^2 l'aire A_n du domaine (D_n).

b/ Montrer que la suite des réels A_n est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme A_0 et la raison.

c/ Calculer $S_n = A_0+A_1+\dots+A_n$. En déduire la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4/ Etudier suivant les valeurs de m les variations de f_m. On précisera les limites de f_m aux bornes de son ensemble de définition.

5./ Montrer que toutes les courbes (G_m) passent par un point fixe B.

6./ Montrer que la droite (Δ_m) : $y=-mx-m$ est asymptote à (G_m) et déterminer la position de (G_m) par rapport à (Δ_m).

PARTIE B

A tout point M du plan d'affixe $z=x+iy$, on associe par une transformation T, le point M' d'affixe $z'=x'+iy'$:

$T : P \longrightarrow P$

$M \longmapsto M'$ et $z' = (1-i)z+1+i$

1./ Quelle est la nature de la transformation T ?

2./ Définir analytiquement la transformation T.

3./ M étant un point de (G), déterminer en fonction de x, abscisse de M, les coordonnées de M' transformé de M par T.

4/ Déterminer l'ensemble (γ), image par T de la courbe (G).

PARTIE C

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par : $g(x) = x - \ln(x^2)$

1./ Etudier les variations de g et tracer sa courbe (Γ) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Préciser les branches infinies de (Γ).

2./ Démontrer que l'équation $g(x)=0$

admet une seule solution dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

3/ Tracer (γ) dans le même repère que (Γ). On pourra utiliser une autre couleur.

PROBLEME N°25

Soit la fonction numérique f définie par: $f(x) = 2x + \frac{e^x+1}{2(e^x-1)}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 1cm).

PARTIE A

1/ Déterminer l'ensemble de définition D de f et étudier la parité de f.

2/ Montrer que pour tout x de D on a: $f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x-1}$

3/ Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$

4/ a/ Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C) de f en $-\infty$.

b/ Etudier la position de (C) par rapport à (Δ).

c/ Déterminer les autres asymptotes à la courbe (C).

PARTIE B

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0$.

2/ Déterminer la fonction dérivée de f et dresser le tableau de variation de la fonction f.

3/ Tracer (C) ainsi que ses asymptotes dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4/ Déterminer l'intersection de (C) et de la droite (D_m) d'équation $y = 2x+m$ où m est un paramètre réel

PARTIE C

Soit n un entier naturel supérieur à 1. On définit: $I_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t-1}\,dt$

1/ a/ A l'aide de la courbe (C) de f, donner une interprétation graphique du nombre I_n.

b/ Prouver que $I_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$ pour tout n supérieur à 1.

c/ Calculer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$

2/ On considère $S_n = I_2 + I_3 \ldots + I_n$. A l'aide de la courbe (C) de f, donner une interprétation graphique du nombre S_n. Calculer S_n.

3/ Calculer en cm^2 l'aire $A(n)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$ et les

droites d'équation $x=\ln 2$ et $x=\ln(n+1)$. Déterminer la limite de $A(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLEME N°26

1-/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=(x+1)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

a-/ Etudier les variations de g.

b-/ Construire la courbe (C) avec soin

2-/ Soit les fonctions f_a, de variable réelle x définies par: $f_a(x)=e^{-x}+ax$. où a est un paramètre réel. On désignera par (C_a) la courbe représentative de la fonction f_a dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a-/ Etudier et représenter les fonctions f_a correspondant à: $a=0$, $a=1$ et $a=-1$. On construira les courbes (C_0), (C_1) et (C_{-1}) dans le même repère.

b-/ Construire le tableau de variation de la fonction f_a suivant les valeurs de a.

- Pour quelles valeurs de a la fonction f_a admet-elle un extrémum?
- Soit I le point de (C_a) correspondant à cet extrémum. Indiquer en fonction de a les coordonnées de I. Quel est l'ensemble des points I?
- Pour quelles valeurs de a, la fonction f_a réalise-t-elle une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$?

c-/ Utiliser les résultats précédents pour discuter, selon les valeurs de a l'équation d'inconnue réelle:

$$e^{-x}+ax=0.$$

3-/ a-/ Montrer que, quel que soit a, les fonctions f_a vérifient l'équation différentielle: $y-xy'=(x+1)e^{-x}$

b-/ Ecrire l'équation de la tangente à (C_a) au point d'abscisse x_0.

Montrer que cette tangente coupe l'axe (oy) en un point indépendant de a

c-/ Soit P un point de (oy) d'ordonnée m. Etudier, selon les valeurs de m, le nombre de tangente à (C_a) issues de P.

4-/ Déterminer les courbes (C_a') et (C_a) ayant les deux propriétés suivantes:

* ces courbes sont orthogonales
* les asymptotes de ces courbes sont perpendiculaires.

- Une droite parallèle à (oy) coupe ces courbes en M' et M'' respectivement.

Déterminer et construire l'ensemble J des milieux de [M'M"]

PROBLEME N°37

Dans ce problème, k est un nombre réel et on considère la famille de fonctions f_k définies sur $]-1;+\infty[$ par $f_k(x) = (x+1)(e^{-1-x} + k)$. Pour les représentations graphiques, le plan est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 4cm) et on désigne par (C_k) la courbe représentative de la fonction f_k.

PARTIE A.

1/ Etudier suivant les valeurs de k, la limite de f_k en $+\infty$.

2/ a/ Montrer que la droite (D_k) d'équation $y = kx + k$ est asymptote à (C_k) en $+\infty$.

b/ Etudier la position relative de (C_k) et (D_k).

3/ a/ Calculer la dérivée première f'_k et la dérivée seconde f''_k de f_k.

b/ Etudier le sens de variation de f'_k

4/ a/ Dresser le tableau de variation de f_0 puis de f_1.

b/ Déterminer les tangentes (T_0) et (T_1) respectives aux courbes (C_0) et (C_1) au point d'abscisse -1.

c/ Tracer (D_0), (D_1), (T_0), (T_1), (C_0), (C_1)

PARTIE B

1/ Montrer que l'équation $f'_{-\frac{1}{2}}(x) = 0$ admet une unique solution α et que $-1 \leq \alpha \leq -0,5$.

2/ Soit h l'application de $I = [-1; -\frac{1}{2}]$ sur $\mathbb{R}$, définie par: $h(x) = -\frac{1}{2}e^{1+x}$. Démontrer que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.

3/ Etudier les variations de h et montrer que pour tout x de I, h(x) appartient à I.

4/ On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = -1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = h(U_n)$.

a/ Démontrer que tous les termes de la suite (U_n) appartiennent à I.

On suppose que pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq 0,83\,|U_n - \alpha|$$

b/ Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$|U_n - \alpha| \leq (0,83)^n \cdot \frac{1}{2}.$$

En déduire que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite

c/ Trouver le plus petit entier naturel p tel que $|U_p - \alpha| < 10^{-2}$

Dresser le tableau de variation de

de la fonction $f_{-1/2}$

Démontrer que $f_{-1/2}(\alpha) = -\frac{1}{2\alpha}(\alpha+1)^2$

b./ On donne $U_{18} \simeq -0,6854$

Donner la valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Tracer $(C_{-\frac{1}{2}})$

PROBLEME N°28

Soit λ un réel non nul, on considère la fonction f_λ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par: $f_\lambda(x) = x + \lambda(x+1)e^x$. On désigne par (C_λ) la courbe représentative de la fonction f_λ dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

N.B les parties B et C de ce problème sont indépendantes

PARTIE A

1./ Déterminer f'_λ et f''_λ les fonctions dérivées première et seconde de f_λ

2./ Etudier les variations de f'_λ.

3./ Discuter, suivant le réel λ, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x: $f'_\lambda(x) = 0$

Préciser la position de ces solutions par rapport à 0 et à 1. (On distinguera les 4 cas: $\lambda < 0$; $0 < \lambda < e$; $\lambda = e$ et $\lambda > e$)

4./ Déduire de ce qui précède le sens de variation de f_λ suivant les valeurs du réel λ.

5./ Etudier les limites de f_λ en $+\infty$ et en $-\infty$. Préciser les branches infinies de la courbe (C_λ)

6./ Montrer qu'il existe un unique point commun A à toutes les courbes (C_λ).

7./ Soit I_λ le point de (C_λ) dont l'abscisse est 1. Ecrire une équation de la tangente D_λ en I_λ à (C_λ). Montrer que les droites D_λ ont un point commun B.

8./ On se propose de tracer avec précision les courbes (C_{-1}), (C_e), (C_4). Les courbes seront tracées sur une même figure en prenant 2cm comme unité graphique.

a./ On prend $\lambda = -1$. Montrer que l'équation $f'_{-1}(x) = 0$ n'a qu'une solution notée x_4 comprise entre $-0,57$ et $-0,56$.

Construire la courbe (C_{-1})

b./ Tracer (C_e)

c./ Montrer que l'équation d'inconnue x, $f'_4(x) = 0$ a deux solutions: x_4 comprise entre 0,35 et 0,36 et x_5 com-

prise entre 2,15 et 2,16.

Tracer (C_λ)

PARTIE B

1/ Montrer que la fonction f_λ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'ensemble de ces primitives.

2/ Pour tout λ réel non nul, on définit une suite de fonctions continues $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par:

$\forall x\in\mathbb{R}, \varphi_1(x)=\int_0^x f_\lambda(t)\,dt - 2\lambda$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}$,

$\varphi_{n+1}(x)=\int_0^x \varphi_n(t)\,dt + (-1)^{n+1}(n+2)\lambda$

a/ Calculer φ_1

b/ Montrer par récurrence, que pour tout naturel n non nul et tout réel x:

$$\varphi_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+(-1)^n\lambda(x+n+1)e^{-x}.$$

PARTIE C

On suppose dans cette partie $-\frac{1}{e}<\lambda<0$.

1/ Montrer que le réel x_1 tel que $f'_\lambda(x_1)=0$ est est strictement inférieur à -1. En déduire que si $-1<x<0$ alors $-1<f_\lambda(x)<0$.

2/ On considère la suite (U_n) définie par: $\begin{cases} U_0=0 \\ \forall n\in\mathbb{N}, U_{n+1}=f_\lambda(U_n)\end{cases}$

Montrer que:

a/ $\forall n\in\mathbb{N}^*, -1<U_n<0$

b/ la suite (U_n) est décroissante.

c/ $\forall n\in\mathbb{N}, 0<U_{n+1}+1<(1+\lambda)(U_n+1)$.

En déduire que la suite (U_n) est convergente et trouver sa limite.

PROBLEME N°29

Soit la fonction f_m à variable réelle définie par: $f_m(x)=e^{x-1}(mx-m+1)-1$.

On désigne par (C_m) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

PARTIE A.

On suppose dans cette partie que m est un paramètre réel non nul.

1/ a/ Montrer que toutes (C_m) passent par un point fixe dont on précisera les coordonnées.

b/ Soit M un point du plan. Etudier suivant la position du point M dans le plan, le nombre de courbe (C_m) qui passent par M.

2/ a/ Calculer suivant les valeurs de m, les limites de f_m en $+\infty$ puis en $-\infty$

b/ Etudier les branches infinies de (C_m)

3/ a/ Calculer la dérivée f'_m de la

fonction f_m et étudier son signe suivant les valeurs de m.

c./ Dresser les tableaux de variations de f_m selon les valeurs de m.

4/ Déterminer l'ensemble des extremums de (C_m) lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$.

5./ Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_m(x) = f_m(x) + me^{x-1} + 1$. En déduire sans calculer $f''_m(x)$ la relation:

$f''_m(x) - 2f'_m(x) + f_m(x) = -1$

6./ Etudier la position relative des courbes (C_{-m}) et (C_m)

PARTIE B

On pose $m = 1$ puis $m = -1$.

1./ Dresser les tableaux de variations des fonctions f_1 et f_{-1}.

2./ Construire dans le même repère, les courbes (C_{-1}) et (C_1)

3/ Soit λ un réel tel que $\lambda > 1$

a./ Calculer l'aire $a(\lambda)$ de la portion du plan limitée par les courbes (C_{-1}), (C_1) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

b/ Déterminer $\lim_{\lambda \to +\infty} a(\lambda)$

PROBLEME N°30

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ on donne les points $A(1,0)$ $B(-1;0)$ et $K(0;-1)$. A tout point M de P de coordonnées $(x;y)$ on associe le nombre complexe $z = x+iy$, affixe de M

PARTIE A

1./ Démontrer qu'il existe une rotation T qui laisse le point K invariant et qui transforme A en B.

Préciser l'angle de T et la transformation complexe associée à T.

2./ Soit M_1, M_2 et M_3 trois points du plan tels que $M_1 = T(M)$, $M_2 = T(M_1)$ et $M_3 = T(M_2)$

a/ Quelle est la position relative des droites (MM_1) et (M_2M_3) lorsque M est distinct du point K.

b/ Déterminer l'ensemble des points M_1 de P lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB]

PARTIE B

Le nombre α étant fixé mais quelconque on considère l'application T_α de P dans P qui à tout point M associe le point M' barycentre des

points pondérés (M,α), $(M_1,-\alpha)$ et $(A,1)$, M_1 étant le point défini dans A-2/, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1/ Exprimer l'affixe z' du point M' en fonction de α et de l'affixe z du point M.

2/ Déterminer suivant les valeurs de α, la nature et les éléments caractéristiques de T_α.

3/ Exprimer les coordonnées (x',y') de M' en fonction des coordonnées (x,y) de M.

4/ Soit $E(-e^\alpha, e^\alpha)$ et E' l'image de E par T_α.

a/ Exprimer les coordonnées de E' en fonction de α.

b/ Démontrer que lorsque α décrit $\mathbb{R}$, l'ensemble des points E' est la courbe (C) d'équation $y = 2(x-1)e^{x-1}+x-1$

PARTIE C

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2xe^x + x$.

1/ Etudier le sens de variation de la fonction dérivée première f' de f.

2/ Dresser le tableau de variation de f.

3/ a/ Représenter graphiquement la fonction f.

b/ Trouver la transformation affine simple par laquelle l'ensemble (C) des points E' du B-4b est l'image de la courbe représentative de f.

c/ Tracer (C) dans le repère précédent.

d/ Calculer l'aire A de la partie du plan délimitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$

4/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2(x-1)e^{x-1}$. On note $g', g'', g^{(3)}, \dots g^{(n)}$ les dérivées successives de g.

a/ Démontrer que pour tout entier n non nul $g^{(n)}(x) = 2(x+n-1)e^{x-1}$ où x est un nombre réel.

b/ Calculer $\sum_{k=1}^{n} g^{(k)}(x)$.

PROBLEME N°31

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère les points A(0;2), B(0;-1), C(1;-1), D(1;2) et E(2,1). Soit f l'application affine du plan telle que $f(O) = A$ et

dont l'application linéaire associée est notée φ.

PARTIE A.

On suppose que pour tout point M de (BC), on a $\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{j}$.

1./ a./ Déterminer f(B) et f(C).

b./ Déterminer $\varphi(\vec{i})$ et $\varphi(\vec{j})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

2./ Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Démontrer que $\overrightarrow{Mf(M)} = (2-y)\vec{j}$.

3./ Démontrer que $fof = f$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

PARTIE B

On suppose que pour tout point M de (BC), on a: $\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{i}$

1./ a./ Déterminer f(B) et f(C).

b./ Déterminer $\varphi(\vec{i})$ et $\varphi(\vec{j})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

2./ Démontrer que l'expression analytique de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est:

$$\begin{cases} x' = x+y \\ y' = -y+2 \end{cases}$$

3./ a/ Quel est l'ensemble des points invariants par f.

b./ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de fof

4/ Soit t la translation de vecteur $\vec{i}$. Démontrer que tof est une symétrie axiale dont on précisera les éléments caractéristiques.

5./ On considère la suite des points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$M_0 = O$ et $M_{n+1} = f(M_n)$.

a./ Montrer que $\overrightarrow{M_n M_{n+2}} = 2\vec{j}$.

b./ En déduire que les points M_n appartiennent à la réunion de deux droites que l'on précisera.

c./ Soit $(x_n; y_n)$ les coordonnées de M_n. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

On pose $z_n = y_n - 1$. Montrer que (z_n) est géométrique.

En déduire y_n en fonction de n

Démontrer que $x_n = n - \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

PARTIE C

Soit k un réel non nul et soit (Γ_k) la courbe d'équation : $x(y-1) = k$

1./ Montrer que (Γ_k) est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes.

2/ On considère l'application affine f définie dans la partie B et on désigne par (Γ'_k) l'image de (Γ_k) par f.

a/ Ecrire les équations de (Γ'_k) respectivement dans les repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(C, \vec{i}, \vec{i}-\vec{j})$.

b/ En déduire que (Γ'_k) est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes.

3/ Construire (Γ_2) et (Γ'_2).

PROBLEME N° 32

Soit m un nombre réel et f_m la fonction à variable réelle définie par $f_m(x) = e^{-2x} - (3+m)e^{-x} + 3m$.

Soit (C_m) sa courbe représentative.

PARTIE A.

1/ a/ Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe A dont on précisera les coordonnées

b/ Soit M un point du plan. Etudier suivant la position du point M dans le plan le nombre de courbes (C_m) passant par M.

2/ Discuter suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de (C_m) avec l'axe des abscisses. On donnera les coordonnées des points d'intersection.

3/ a/ Calculer $f'_m(x)$.

b/ Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles la fonction f_m admet un extrémum I_m

c/ Déterminer les coordonnées du point I_m en fonction de m.

d/ Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m varie.

4/ Dans cette question m est un réel fixe.

a/ Montrer que (C_m) admet une asymptote horizontale (D_m) dont on précisera l'équation

b/ On suppose à présent que $m > -3$. Calculer en fonction de m les coordonnées du point J intersection de (C_m) et (D_m).

PARTIE B

1/ Etudier les variations de f. On justifiera tout calcul de limite

2/ Etudier les branches infinies de la courbe (C_1)

3/ Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de (C_1) et l'équation de la tangente à (C_1) en ce point.

Construire soigneusement la courbe (C).

3./ Soit g l'application de $[-\ln 2; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = f_1(x)$.

a./ Montrer que g admet une bijection

b./ Quel est l'ensemble de définition de la réciproque g^{-1} de g?

4./ Soit α un nombre réel positif.

Calculer l'aire $A(\alpha)$ du domaine plan défini par $\begin{cases} -2\ln 2 \leq x \leq \alpha \\ f_1(x) \leq y \leq 3 \end{cases}$.

5./ Construire la courbe $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère que (C_1).

PROBLEME N°33

Dans le plan P muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$, la symétrie S d'axe (D) et de direction celle de l'axe (oy).

PARTIE A

Soit g l'application affine de P dans P qui au point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y' = -\frac{3}{4}x + y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

1./ Montrer que g est bijective et vérifier que $goS = Sog$.

2./ Déterminer l'ensemble (Δ) des points M de P invariants par g.

3./ Montrer que, si M n'est pas invariant par g, la droite (MM') garde une direction indépendante de M que l'on précisera.

4./ Calculer les coordonnées du point M_1, intersection de (MM') et de (Δ).

5./ Montrer que g est une affinité dont on donnera les éléments caractéristiques.

PARTIE B

On note Ψ l'application linéaire associée à S et F l'ensemble des applications affines bijectives f de P dans P telles que f(O) appartient à (D) et dont l'application linéaire associée φ vérifie :

$\varphi(2\vec{i}+\vec{j}) = a(2\vec{i}+\vec{j})$ et $\varphi(\vec{j}) = b\vec{j}$ où a et b sont deux nombres réels non nuls

1./ a./ Préciser le couple (a;b) pour lequel f est une homothétie.

b./ Préciser le couple (a,b) pour que f soit une translation.

2./ Soit A un point de P tel que le vecteur $\overrightarrow{OA}$ soit colinéaire à $\vec{j}$ et B un point de (D) distinct de O.

Déterminer $\Psi(\overrightarrow{OA})$ et $\Psi(\overrightarrow{OB})$.

En déduire $\Psi(\vec{j})$ et $\Psi(2\vec{i}+\vec{j})$

3./ Démontrer que S et g appartiennent à f_1.

4./ On appelle f_1 le sous ensemble des éléments de f_1 dont l'application linéaire associée Ψ vérifie $\Psi(\vec{j})=\vec{j}$.

a./ Soit f_1 un élément de f_1. Démontrer que le point $M(x;y)$ a pour image par f_1 le point $M'(x';y')$ tel que:

$$\begin{cases} x' = ax + 2\alpha \\ y' = \frac{a-1}{2}x + y + \alpha \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} a \in \mathbb{R}^* \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

b./ Quel est l'ensemble des points invariants par f_1?

c./ Dans cette question on prend $\alpha = 0$.

Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan P.

On pose $M_1 = f_1(M_0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M_{n+1} = f_1(M_n)$. Soit $M_n(x_n; y_n)$

Calculer x_n et y_n en fonction de x_0, y_0 et a. Etudier la convergence des suites (x_n) et (y_n).

PARTIE C

1./ Soit F la fonction numérique définie par: $F(x) = \frac{1}{2}x + \ln x$.

Etudier les variations de F et représenter graphiquement F dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe de F.

2./ a./ Soit f_1 un élément quelconque de f_1. Déterminer une équation cartésienne de l'image de $(\mathcal{C})$ par f_1

b./ Soient $(p;q) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $(\mathcal{C}_{p,q})$ la courbe d'équation $y = \ln(px+q) + \frac{1}{2}x$ dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Démontrer que $(\mathcal{C}_{p,q})$ est l'image de $(\mathcal{C})$ par une application appartenant à f_1.

3./ Soit (Γ) la courbe d'équation $y = \ln(2-2x) + \frac{1}{2}x$. Reconnaître l'application élément de f_1 qui transforme $(\mathcal{C})$ en (Γ).

4./ Construire l'image $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$ par $g \circ S$.

PROBLEME N° 34

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 2cm. Pour tout nombre réel non nul α, on considère la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}^*$ par:

$$f_\alpha(x) = -x\ln(\alpha^2) - 2|x|\ln(|x|).$$

On note C_α, C_α^+, C_α^- les courbes représentatives de f_α et des restrictions de f_α à $]0;+\infty[$ et à $]-\infty;0[$ respectivement.

Soit g_α la restriction de f_α à $]0;+\infty[$

PARTIE A

Soit E l'ensemble des fonctions numériques dérivables sur $]0;+\infty[$ et telles que: $\forall x_1 \in]0;+\infty[$, $\forall x_2 \in]0;+\infty[$,

$f(x_1x_2) = x_1f(x_2) + x_2f(x_1)$.

1/ Démontrer que la fonction kg où k est un nombre réel fixé, appartient à E.

2/ a/ Démontrer que si f appartient à E alors $f(1) = 0$

b/ Démontrer que si f appartient à E alors $\forall x \in]0;+\infty[$, $xf'(x) - f(x) = xf'(1)$ (1)

c/ En remarquant que la propriété (1) est équivalente à : $\forall x \in]0;+\infty[$ $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \frac{f'(1)}{x}$, calculer $\frac{f(x)}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

d/ En déduire l'ensemble des fonctions appartenant à E.

PARTIE B

1/ Pour quelles valeurs de α, g_α appartient à E?

2/ a/ Etudier le sens de variation de g_1

b/ Etablir le tableau de variation de f_1 (on pourra utiliser la parité de f_1)

c/ Tracer C_1.

d/ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_1, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{e}$ et $x = 1$

Dans la suite du problème, on suppose α strictement supérieur à zéro.

3/ a/ Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$

$g_\alpha\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} g_1(x)$.

b/ En déduire que C_α^+ est l'image de C_1^+ par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

c/ En déduire le maximum de g_α.

4/ Soit S_α l'application du plan dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe:

$z' = -\alpha^2 \bar{z}$.

a/ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S_α

b/ Montrer que C_α^- est l'image de C_α^+ par S_α.

5/ Construire point par point C_2 à partir de C_1.

PARTIE C

Soit (U_n) une suite numérique définie par $U_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $2U_{n+1} = g_\alpha(U_n)$

1/ Résoudre l'inéquation $g_\alpha(x) > 0$ et l'inéquation $g_\alpha(x) - 2x > 0$.

2/ Déterminer U_0 pour que la suite (U_n) soit constante.

3/ On choisit $U_0 \in]0; \frac{1}{\alpha}[$ et $U_0 \neq \frac{1}{\alpha e}$

a/ Démontrer par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < U_n < \frac{1}{\alpha e}$.

b/ Démontrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

c/ En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

PROBLEME N°35

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

1/ a/ Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

b/ Tracer la courbe (C) représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2/ Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, f vérifie la relation : $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$.

3/ On considère l'équation différentielle :

$(E) : y'' + 2y' + y = 0$

a/ On pose pour tout x réel $U(x) = e^x h(x)$ où h est une fonction au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que h est solution de (E) si, et seulement si, pour tout x réel

$U''(x) = 0$.

b/ Résoudre l'équation différentielle $z'' = 0$ où z est une fonction réelle quelconque et déterminer les solutions de (E)

c/ Démontrer que les conditions initiales $h(0) = \alpha$ et $h'(0) = \beta$ où α et β sont des réels, déterminent une solution unique de (E).

PARTIE B

Pour λ nombre réel donné, on considère les fonctions g_λ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$g_\lambda(x) = \left[(\lambda+1)x+1\right]e^{-x}$

1/ Démontrer qu'il existe des valeurs de α et β définies dans A/3-c/ pour lesquelles g_λ est solution de (E).

2/ On suppose dans la suite que $\lambda \neq -1$.

a/ Discuter suivant les valeurs de λ les limites de g_λ en $-\infty$ et en $+\infty$.

b/ Etudier suivant les valeurs de λ, le sens de variation de g_λ et faire dans chaque cas le tableau de variations.

c/ On appelle (Γ_λ) la courbe représentative de g_λ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Tracer sur la figure précédente la courbe $(\Gamma_{-1/2})$.

d/ Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (γ) des points M du plan par lesquels il passe au moins une courbe

(Γ_λ) tel que la tangente en M à (Γ_λ) soit parallèle à l'axe des abscisses.

3./ Montrer que pour tout λ de $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ l'équation $g_\lambda(x)=1$ a deux solutions et que la solution non nulle a même signe que λ.

PROBLEME N° 36

PARTIE A

Cette première partie a trait à la résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients non constants.

On appelle E l'ensemble des fonctions numériques f admettant des dérivées f', f'' et $f^{(3)}$ continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation différentielle :

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0.$$

1./ Montrer que si f appartient à E, alors $f^{(3)} = f''$, puis que f'' est solution d'équation différentielle de la forme $y' - my = 0$ $(m \in \mathbb{R})$.

2./ A l'aide de deux intégrations montrer que les éléments de E sont de la forme $f(x) = ax + be^x$, $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

PARTIE B

Pour tout couple $(a;b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, on appelle $f_{a,b}$ la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f_{a,b}(x) = ax + be^x$. On désigne par $(C_{a,b})$ la courbe représentative de $f_{a,b}$.

1./ Etudier la fonction $f_{1,1}$ et construire la courbe $(C_{1,1})$ que l'on notera (C). (on prendra comme unité 2cm sur chaque axe).

2./ Etudier, suivant les valeurs de a et b, les variations de $f_{a,b}$. On sera amené à distinguer quatre cas. Donner le tableau de variations pour chaque cas.

3./ Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Pour $(\alpha;\beta)$ donné dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, on considère l'application $\varphi_{\alpha,\beta}$ de P dans P dont l'expression analytique relativement à $(O,\vec{i},\vec{j})$ est :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \alpha x + \beta y. \end{cases}$$

Montrer que toute courbe $(C_{a,b})$ est l'image de (C) par une transformation $\varphi_{\alpha,\beta}$ que l'on précisera. En déduire le résultat suivant : $(C_{a,b})$ et $C_{a',b'}$ étant données, il existe une transformation $\varphi_{\alpha,\beta}$ telle que :

$$\varphi_{\alpha,\beta}(C_{a,b}) = (C_{a',b'})$$

4./ Dans cette question, on fixe la va-

leur de a.

a/ Montrer que toutes les courbes $(C_{a,b})$ ont la même asymptote (D_a). Déterminer l'application $\varphi_{a,\beta}$ qui transforme $(C_{a,a})$ en $(C_{a,b})$

b/ On appelle M_b le point de $(C_{a,b})$ d'abscisse 0. Déterminer l'équation de la tangente (T_b) à $(C_{a,b})$ au point M_b. Montrer que lorsque b décrit $\mathbb{R}^*$, toutes les droites (T_b) sont concourantes. Préciser leur point de concours et vérifier qu'il appartient à (D_a).

c/ Pour x_0 fixé, soit N_b le point d'abscisse x_0 de $(C_{a,b})$. Montrer que toutes les tangentes aux courbes $(C_{a,b})$ en N_b sont concourantes en un point situé sur (D_a).

d/ Tracer sur le même dessin les courbes C_1; $C_{1,2}$; $C_{1,3}$, $C_{1,-1}$ et $C_{1,-2}$. On précisera les tangentes aux points d'abscisse 0.

PROBLEME N° 37

PARTIE A

On se propose de déterminer l'ensemble F des fonctions f numériques d'une variable réelle définies sur $]-1;+\infty[$, dérivables sur cet intervalle et vérifiant

$\forall x \in]-1;+\infty[, (1+x)f'(x) + f(x) = 1 + \ln(1+x)$

1/ Soit $f \in F$ et soit g définie par: $\forall x \in]-1;+\infty[$, $g(x) = (1+x)f(x)$.

Démontrer que g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et que g est une primitive de la fonction h définie par:

$\forall x \in]-1;+\infty[$, $h(x) = 1 + \ln(1+x)$

Réciproquement, soit g_1 une primitive de la fonction h.

Démontrer que la fonction f_1 définie par: $\forall x \in]-1;+\infty[$, $f_1(x) = \frac{g_1(x)}{1+x}$ est un élément de F.

2/ a/ Déterminer des réels a et b tels que: $\forall x \in]-1;+\infty[$, $\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$

b/ A l'aide d'une intégration par parties déterminer l'ensemble des primitives de la fonction h.

3/ En déduire l'ensemble F.

PARTIE B

On considère l'ensemble des fonctions f_k de $]-1;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définies par:

$\forall x \in]-1;+\infty[$, $f_k(x) = \ln(1+x) + \frac{k}{1+x}$

k étant un paramètre réel.

1/ Discuter suivant les valeurs de k le sens de variations des fonctions f_k.

2/ Tracer avec soins, dans un même repère les représentations graphiques

des fonctions f_{-1}, f_0 et f_1.

PARTIE C

1/ Soit $P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k$

$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{2n-1}$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout x de $]-1; +\infty[$

$f_0'(x) = P_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x}$

2/ Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1]$

$\frac{x^{2n}}{1+x} \leq x^{2n}$. En déduire pour tout entier $n \geq 1$ la double inégalité

$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx \leq \frac{1}{2n+1}$

3/ On considère la suite (W_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n}$

Démontrer que

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_0(1) = W_n + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx$

En déduire que la suite (W_n) admet, lorsque n tend vers $+\infty$, une limite que l'on précisera.

Trouver un entier n_0 tel que

$\ln 2 - W_{n_0} < 0,1$.

PROBLEME N°38

Soit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité 1cm.

1/ Etudier suivant les valeurs de x, le signe du polynôme $x^2 - 6x + 5$ et l'expression de $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.

2/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f en particulier aux points d'abscisse 1 et 5; la courbe admet-elle des tangentes en ces points?

3/ Etudier les variations de f.

4/ Démontrer que la droite d'équation $x = 3$ est axe de symétrie de (C).

5/ Démontrer que (C) admet deux asymptotes non parallèles aux axes de coordonnées; l'une à $+\infty$ et l'autre à $-\infty$.

6/ Déterminer les coordonnées des points A et B d'intersection de (C) avec ces deux asymptotes, A étant le point dont l'abscisse est supérieure à 3.

7/ Soit I le point de coordonnées (3;0). Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1; 5]$, le point $M(x; f(x))$

et à une distance constante de I.
En déduire la nature géométrique de (C) lorsque $1 \leq x \leq 5$.

8/ Tracer (C) et ses asymptotes.
Faire figurer A et B.

9/ Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan défini par: $1 \leq x \leq 5$ et $0 \leq y \leq f(x)$
En déduire $\int_1^5 f(x)\,dx$

PROBLEME N°39

PARTIE A

Démontrer que pour tout réel x on a:
$\sqrt{x^2+3} > |x|$

En déduire le signe de $\sqrt{x^2+3} + x$ et celui de $\sqrt{x^2+3} - x$ sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \sqrt{x^2+3} - |x-1|$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1-/ a-/ Montrer que f est continue en $x_0 = 1$

b-/ Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

c-/ Etudier le sens de variations de f sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$. On pourra utiliser les résultats de la partie A.

d-/ Compléter l'étude des variations de f.

e-/ Préciser le comportement de la courbe (C) en $x_0 = 1$ et construire (C).

2-/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; -1]$

a-/ Montrer que g admet une application réciproque notée g^{-1}

b-/ Définir explicitement g^{-1}

c-/ Construire la courbe (Γ) représentative de g^{-1} dans le même plan que (C).

d-/ Déterminer la fonction G primitive de g^{-1} telle que $G(0) = 0$

e-/ Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les équations: $x = -1$ et $x = 1$
Calculer A en utilisant la courbe (Γ)

PARTIE C

On désigne par I l'intervalle $[-1; 2]$
On définit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$

1-/ a-/ Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans I

b-/ Démontrer que pour tout x de I on a $f(x)$ dans I.

c-/ Démontrer que pour tout x de I on a: $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

d/ En déduire que pour tout x de I on a : $|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

2/ a/ Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$

b/ Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n-\alpha|$

c/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n-\alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

d/ Déduire de 2.c que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

PROBLEME N°40

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x - \sqrt{|x^2+2x-3|}$$

(C) sa courbe représentative.

1/ f est-elle continue sur $\mathbb{R}$.

2/ a/ Etudier la dérivabilité de f au point -3.

b/ Etudier la dérivabilité de f au point 1.

3/ Calculer le nombre dérivé de f en un point x tel que :

a/ $x \in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$

b/ $x \in]-3;1[$

4/ a/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\sqrt{x^2+2x-3} - x - 1 < 0$$

b/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\sqrt{-x^2-2x+3} + x + 1 < 0$$

c/ En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x.

5/ a/ Calculer les limites de f en $-\infty$ puis en $+\infty$ et donner le tableau de variations de f.

b/ Montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes dont on précisera les équations

c/ Tracer la courbe (C).

6/ Soit h la restriction de f à $]-\infty;-3]$.

a/ Montrer que h est une bijection de $]-\infty;-3]$ sur un intervalle J à préciser

b/ Soit h^{-1} la bijection réciproque de h. Calculer $h^{-1}(-5)$ puis trouver une équation de la tangente (T) à la courbe (Γ) au point de coordonnées $(-5; h^{-1}(-5))$

c/ Construire (Γ) sur le même graphique que que (C).

7/ Soit (C') la représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) de la fonction :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x + \sqrt{x^2+2x-3}$$

et (G) celle de la restriction de f à $]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[$

a/ Montrer que $(C') = S_H(C_1)$ où H est le milieu du segment $[AB]$ $A(-3;-3)$, $B(1;1)$

b/ Caractériser analytiquement $(G) \cup (C')$

c/ Construire $(C_1) \cup (C')$ sur une autre figure.

CORRIGES DES PROBLEMES DE SYNTHESE

PROBLEME N°1

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par: $g(x)=\frac{x+1}{2x+1}-\ln x$

1/ Etudions le sens de variation de g

$D_g=]0;+\infty[$

$x\mapsto\frac{x+1}{2x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}-\{-\frac{1}{2}\}$ donc dérivable sur $]0;+\infty[$

$x\mapsto\ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

g est donc dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$\forall x>0,\ g'(x)=\frac{-1}{(2x+1)^2}-\frac{1}{x}$

$\forall x>0,\ g'(x)<0$; g est décroissante sur $]0;+\infty[$

2/ Calculons g(1) et g(2).

$g(1)=\frac{2}{3}-\ln 1=\frac{2}{3}$

$g(2)=\frac{3}{5}-\ln 2$

$g(1)=\frac{2}{3}$	$g(2)=\frac{3}{5}-\ln 2$

Déduisons-en que l'équation $g(x)=0$ a une unique solution α dans $]0;+\infty[$

g est continue, monotone, strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ avec:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{x+1}{2x+1}=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

g définit donc une bijection de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$. De plus $0\in\mathbb{R}$; il existe donc un unique réel α de l'intervalle $]0;+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$

Conclusion

L'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α de l'intervalle $]0;+\infty[$

Donnons un encadrement de α d'amplitude 0,1

$g(1)=\frac{2}{3}>0$ $g(2)=\frac{3}{5}-\ln 2=-0,09<0$

$\Leftrightarrow 1\leq\alpha\leq 2$ d'après le théorème des valeurs intermédiaire.

$g(\frac{3}{2})=0,219>0\Rightarrow 1,5<\alpha<2$

$g(1,75)=0,514>0\Rightarrow 1,75<\alpha<2$

$g(1,875)=-0,023<0\Rightarrow 1,75<\alpha<1,875$

Conclusion: De proche en proche on a:

$1,8<\alpha<1,9$

3/ Déduisons-en le signe de g(x) sur l'intervalle $]0;+\infty[$

On sait que g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

$0<x<\alpha\Rightarrow g(x)>0$; $g(\alpha)=0$ et $x>\alpha\Rightarrow g(x)<0$.

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessous:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	+	0	−	

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$$. On note

$(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2cm sur (ox), 4cm sur (oy))

1./ Etudions les limites de f en 0 et en $+\infty$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2\ln x}{x^2+x}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2}{x}\,\frac{1}{x+1}\ln x$$

$= -\infty$ car $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2}{x} = +\infty$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x+1} = 1$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x^2+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x+1}\,\frac{\ln x}{x}$$

$= 0$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x+1} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2./ Montrons que pour tout $x>0$,

$$f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\,g(x).$$

$x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$x \mapsto x^2+x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x>0, x^2+x>0$.

La fonction f est donc dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x>0$:

$$f'(x) = 2\,\frac{\frac{1}{x}(x^2+x)-(2x+1)\ln x}{(x^2+x)^2}$$

$$= 2\,\frac{x+1-(2x+1)\ln x}{(x^2+x)^2}$$

$$= 2(2x+1)\,\frac{\frac{x+1}{2x+1}-\ln x}{(x^2+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\,g(x)$$

$$\boxed{\forall x>0,\ f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\,g(x)}$$

Déduisons-en le signe de $f'(x)$

$\forall x>0$, $\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}>0$; $f'(x)$ a donc le signe de $g(x)$.

Signe de $f'(x)$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

3./ Dressons le tableau de variations de f et montrons que : $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

Tableau de variations de f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

Montrons que $f(\alpha) = \frac{2l}{\alpha(2\alpha+1)}$

On sait que: $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha+1}{2\alpha+1} - \ln\alpha = 0$

$\Leftrightarrow \ln\alpha = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$

$f(\alpha) = \frac{2\ln\alpha}{\alpha^2+\alpha}$

$= \frac{2}{\alpha(\alpha+1)} \ln\alpha = \frac{2l}{\alpha(\alpha+1)} \cdot \frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$

$$\boxed{f(\alpha) = \frac{2l}{\alpha(2\alpha+1)}}$$

4/ Traçons la courbe (C)

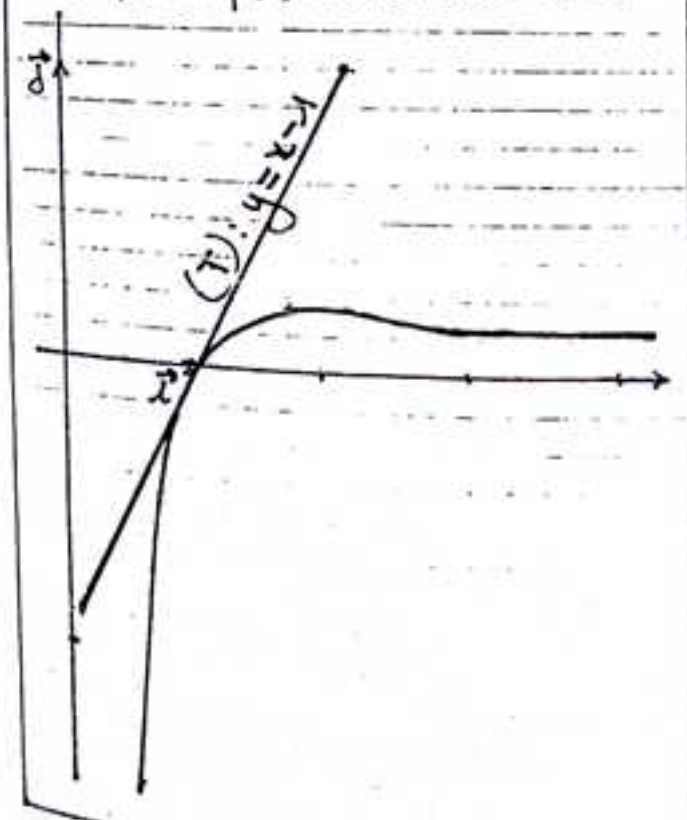
Tangente (T) au point d'abscisse 1

$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f'(1) = \frac{2\times 3}{2^2} \cdot \frac{2}{3} = 1$; $f'(1) = 0$

$$\boxed{(T): y = x-1}$$

$\alpha \simeq 1{,}85 \quad f(\alpha) \simeq 0{,}23$



PARTIE C

1-/a- Déterminons une primitive sur l'intervalle $]1;+\infty[$ de la fonction: $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

Posons $h(x) = \frac{\ln x}{x}$

$= \frac{1}{x}\ln x$

$= u'(x) \cdot u(x)$ avec $u(x) = \ln x$

Soit H une primitive de h on a:

$$\boxed{H(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2}$$

b/ Montrons que pour tout $x \geq 1$ on a:

$$f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$$

$\forall x \geq 1$, $x+1 \geq 2 \Leftrightarrow x(x+1) \geq 2x$ car $x \geq 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+x} \leq \frac{1}{2x}$ car

$t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow \frac{2}{x^2+x} \leq \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{2\ln x}{x^2+x} \leq \frac{\ln x}{x}$ car $\forall x \geq 1$, $\ln x \geq 0$.

Conclusion

$$\boxed{\text{Pour tout } x \geq 1 \text{ on a: } f(x) \leq \frac{\ln x}{x}}$$

2/ Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule pour $x=1$

Sans calculer F, montrons que pour tout $x \geq 1$ on a: $F(x) \leq \frac{1}{2}(\ln x)^2$

On sait que:

$\forall t \geq 1$, $f(t) \leq \frac{\ln t}{t}$

$\Leftrightarrow \int_1^x f(t)dt \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$

$\Leftrightarrow \left[F(t)\right]_1^x \leq \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^x$

$\Leftrightarrow F(x) - F(1) \leq \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2$

or $F(1) = 0$ et $\ln 1 = 0$

On a donc : $F(x) \leq \frac{1}{2}(\ln x)^2$

Conclusion

Pour tout $x \geq 1$ on a : $F(x) \leq \frac{1}{2}(\ln x)^2$

PROBLEME N°2

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x$$

1°/ Etudions les variations de g.

$D_g =]0;+\infty[$

Limites de g aux bornes de D_g

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>}} x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>}} x^2 - \frac{1+4x\ln x}{x^2}$$

$= -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>}} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>}} x\ln x = 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^2} + x\left(x - 4\frac{\ln x}{x}\right)$$

$= +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^2} = 0 \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>}} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

Dérivée

$x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $]0;+\infty[$

$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc dérivable sur $]0;+\infty[$

$x \mapsto -4\ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

La fonction g étant la somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, est dérivable sur $]0;+\infty[$ et :

$\forall x > 0$, $g'(x) = 2x + \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x}$

$$g'(x) = \frac{2(x^4 - 2x^2 + 1)}{x^3}$$

$$g'(x) = \frac{2(x^2-1)^2}{x^3}$$

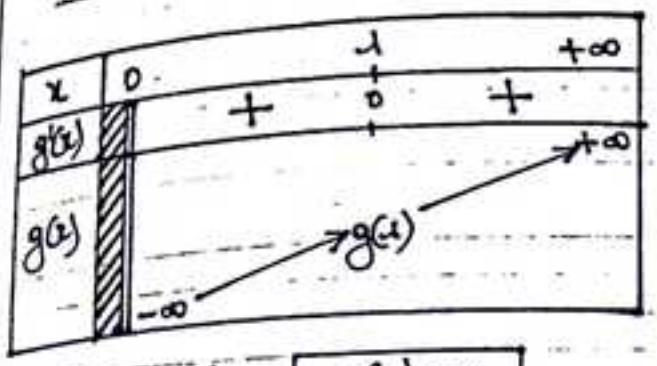
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ \text{et} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

$\forall x > 0$, $\begin{cases} (x^2-1)^2 \geq 0 \\ x^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow g'(x) \geq 0$

Sens de variation de g

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Tableau de variation de g:



Prédisons g(1) : $\boxed{g(1)=0}$

2/ Déduisons-en le signe de la fonction g sur chacun des intervalles $]0;1[$ et $]1;+\infty[$

$\forall x \in]0;1[,\ g(x)<0$

$\forall x \in]1;+\infty[,\ g(x)>0$.

PARTIE B: Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4x^2}-(\ln x)^2$$

1°/ Montrons que, pour tout $x>0$, $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

$\forall x>0,\ \frac{1}{x}>0$; $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x$

$$\forall x>0,\ f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{4\left(\frac{1}{x}\right)^2}-\left[(-\ln x)^2\right]$$

$$=\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{4}x^2-(\ln x)^2$$

$$=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4x^2}-(\ln x)^2=f(x)$$

$\boxed{\forall x>0,\ f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)}$

2°/ Déterminons la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4x^2}-(\ln x)^2$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4x^2}+x^2\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right]$$

$=+\infty$ car $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4x^2}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

Déterminons la limite de f en 0

1ère méthode

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4x^2}-(\ln x)^2$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{4}-(x\ln x)^2\right]$$

$=+\infty$ car $\lim_{x\to 0^+}x^2=0$, $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$, $\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0$

$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty}$

2e méthode

Posons $X=\frac{1}{x}$ ⟺ $x=\frac{1}{X}$

si $x\to 0^+$ alors $X\to+\infty$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{X\to+\infty} f\left(\frac{1}{X}\right)$ or $f\left(\frac{1}{X}\right)=f(X)$

$$=\lim_{X\to+\infty} f(X)=+\infty$$

$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty}$

3/ Montrons que pour tout réel $x>0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2x} g(x)$$

$x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \ln x$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$; donc f est dérivable car elle est la combinaison linéaire de fonctions dérivables, sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$ on a:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x^3} - \frac{2}{x}\ln x$$

$$= \frac{1}{2x}\left(x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x\right) = \frac{1}{2x} g(x)$$

$$\boxed{\forall x>0,\ f'(x) = \frac{1}{2x} g(x)}$$

En utilisant la partie A, étudions le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$

$\forall x>0$, $\frac{1}{2x}>0$; $f'(x)$ a donc le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$

D'après A-2 on a:

$\forall x \in]0;1[$, $f'(x)<0$; f est donc décroissante sur $]0;1[$

$\forall x \in]1;+\infty[$, $f'(x)>0$; f est donc croissante sur $]1;+\infty[$; $f'(1)=0$

Tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$1/2$	↗	$+\infty$

4/ Construction de la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé (unité graphique 5cm)

Etude des branches infinies

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$; l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe (C)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}x + \frac{1}{4x^3} - \frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4x^3} + x\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right]$$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{4x^3} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

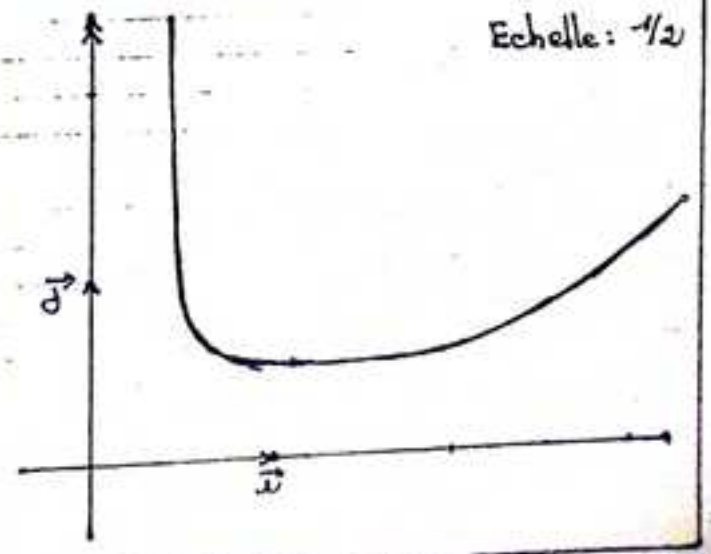
La courbe (C) admet une branche infinie de direction (oy).

Traçons (C)

Tableau de valeurs:

x	$1/2$	1	2	3
$f(x)$	$\frac{17}{16} - (\ln 2)^2$	$1/2$	$\frac{13}{16} - (\ln 2)^2$	

Echelle: $1/2$



PARTIE C : Résolutions approchées d'équations

1/ Montrons que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution sur $]0;1]$

Posons $h(x) = f(x) - x$, $x \in]0;1]$

Etude du sens de variation de h

$D_h =]0;1]$

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc dérivable sur $]0;1]$; h est donc dérivable sur $]0;1]$ et $\forall x \in]0;1]$, $h'(x) = f'(x) - 1$

$\forall x \in]0;1]$, $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) - 1 \leq -1 < 0$

$\forall x \in]0;1]$, $h'(x) < 0$; h est décroissante sur $]0;1]$

h est monotone, strictement décroissante sur $]0;1]$ avec :

$\lim\limits_{x \to 0} h(x) = +\infty$ et $h(1) = f(1) - 1 = -\frac{1}{2} < 0$

h définit une bijection de $]0;1]$ vers $[-\frac{1}{2};+\infty[$. De plus $0 \in [-\frac{1}{2};+\infty[$; il existe donc un unique réel α de $]0;1]$ tel que $h(\alpha) = 0$

or $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.

Conclusion

> L'équation $f(x) = x$ admet une seule solution sur $]0;1]$, notée α.

2/ Montrons que l'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une seule solution sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

On sait que pour tout $x > 0$, $f(x) = f(\frac{1}{x})$

$f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}$ (1)

Posons $X = \frac{1}{x}$

(1) $\Leftrightarrow f(X) = X$; X existe, est unique et appartient à $]0;1]$

$X = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{X}$. $0 < X < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{X} > 1$

L'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ admet donc une solution sur l'intervalle $]1;+\infty[$ soit β cette solution.

Montrons que $\alpha.\beta = 1$.

L'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ admet pour solution β.

$\Leftrightarrow f(\beta) = \frac{1}{\beta}$ $f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\beta}$ est solution de l'equation $f(x) = x$ or l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} = \alpha \Leftrightarrow \alpha\beta = 1$

$$\boxed{\alpha\beta = 1}$$

Encadrement de β d'amplitude 10^{-2}. Déduction d'un encadrement de α

$f(2) - \frac{1}{2} = -0,08$ $f(3) - \frac{1}{3} = 0,73$

$f(2,5) - \frac{1}{2,5} = 0,36$ $f(2,25) - \frac{1}{2,25} = 0,14$

De proche en proche on a :

$f(2,015625) - \frac{1}{2,015625} = 0,029$

On en déduit que : $\boxed{2 < \beta < 2,01}$

d'où : $\boxed{0,49 < \alpha < 0,5}$

PROBLEME N°3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, a est un nombre réel strictement positif et différent de 1

Soit f_a la fonction de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f_a(x)=\frac{\ln x}{\ln a}$ et $(\mathcal{C}_a)$ sa courbe représentative.

1-/ a- Calculons $f_a(1)$, $f_a(a)$, $f_a(a^n)$ où n est un entier relatif.

$f_a(1)=\frac{\ln 1}{\ln a}=0$; $f_a(a)=\frac{\ln a}{\ln a}=1$

$f_a(a^n)=\frac{\ln a^n}{\ln a}=\frac{n\ln a}{\ln a}=n$.

$f_a(1)=0$	$f_a(a)=1$	$f_a(a^n)=n$

b/ Démontrons que pour tous nombres réels strictement positifs x, y et tout entier relatif n on a:

* $f_a(xy)=f_a(x)+f_a(y)$.

$f_a(xy)=\frac{\ln(xy)}{\ln a}=\frac{\ln x+\ln y}{\ln a}$

$=\frac{\ln x}{\ln a}+\frac{\ln y}{\ln a}=f_a(x)+f_a(y)$

$\boxed{f_a(xy)=f_a(x)+f_a(y)}$

* $f_a\left(\frac{x}{y}\right)=f_a(x)-f_a(y)$

$f_a\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\ln(x/y)}{\ln a}=\frac{\ln x-\ln y}{\ln a}$

$=\frac{\ln x}{\ln a}-\frac{\ln y}{\ln a}$

$\boxed{f_a\left(\frac{x}{y}\right)=f_a(x)-f_a(y)}$

* $f_a(x^n)=n f_a(x)$

$f_a(x^n)=\frac{\ln x^n}{\ln a}=n\frac{\ln x}{\ln a}=n f_a(x)$

$\boxed{f_a(x^n)=n f_a(x)}$

* $f_a(\sqrt{x})=\frac{1}{2}f_a(x)$

$f_a(\sqrt{x})=\frac{\ln\sqrt{x}}{\ln a}=\frac{1}{2}\frac{\ln x}{\ln a}=\frac{1}{2}f_a(x)$

$\boxed{f_a(\sqrt{x})=\frac{1}{2}f_a(x)}$

c-/ Démontrons que pour tous nombres réels strictement positifs a, b et x on a:

* $f_a(b)=\frac{1}{f_b(a)}$ * $f_a(x)=f_a(b)\cdot f_b(x)$

$f_a(b)=\frac{\ln b}{\ln a}=\frac{1}{\frac{\ln a}{\ln b}}=\frac{1}{f_b(a)}$

$f_a(x)=\frac{\ln x}{\ln a}=\frac{\ln b}{\ln a}\cdot\frac{\ln x}{\ln b}$

$=f_a(b)\cdot f_b(x)$

$\boxed{f_a(b)=\frac{1}{f_b(a)}}$ $\boxed{f_a(x)=f_a(b)\cdot f_b(x)}$

2-/ a-/ Etudions la fonction f_a et dressons son tableau de variation pour $0<a<1$ et $a>1$

$f_a(x)=\frac{\ln x}{\ln a}$

1er cas $0<a<1$: $\ln a<0$

$D_{f_a}=]0;+\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_a(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{\ln a}=$

$=+\infty$ car $\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty\\ \text{et}\\ \ln a<0\end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln a}$

$=-\infty$ car $\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\\ \text{et}\\ \ln a<0\end{array}\right.$

Dérivée

$x\mapsto\ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

donc f_a est dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$\forall x>0,\ f'_a(x)=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln a}$

$\forall x>0,\ f'_a(x)<0$ car $\ln a<0$

f_a est donc strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

Tableau de variation de f_a

x	0		$+\infty$
$f'_a(x)$	‖	$-$	
$f_a(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

2e cas $a>1$ $\ln a>0$

$D_{f_a}=]0;+\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_a(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{\ln a}$

$=-\infty$ car $\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty\\ \text{et}\\ \ln a>0\end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln a}$

$=+\infty$ car $\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\\ \text{et}\\ \ln a>0\end{array}\right.$

$f'_a(x)=\frac{1}{x\ln a}$

$\forall x>0,\ f'_a(x)>0$ car $\ln a>0$.

f_a est donc croissante sur $]0;+\infty[$

Tableau de variation de f_a

x	0		$+\infty$
$f'_a(x)$	‖	$+$	
$f_a(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

b/ Démontrons que f_a est une bijection

Pour tout a strictement positif et différent de 1, f_a est continue, monotone, sur $]0;+\infty[$ avec :

$f_a(]0;+\infty[)=\mathbb{R}$. f_a est donc une bijection de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

c-/ Démontrons que $f_{\frac{1}{a}}=-f_a$

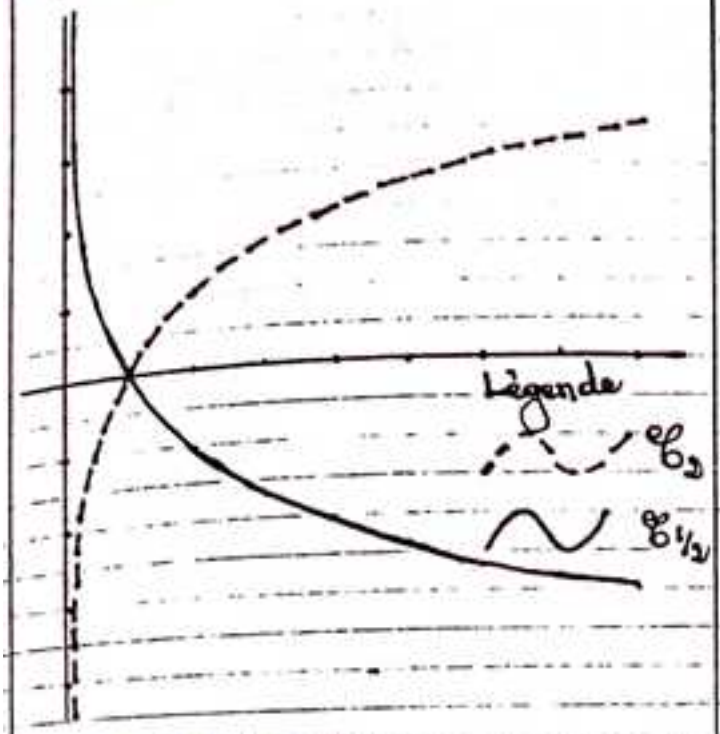
$f_{\frac{1}{a}}(x)=\frac{\ln x}{\ln(\frac{1}{a})}=\frac{\ln x}{-\ln a}=-\frac{\ln x}{\ln a}$

$\boxed{f_{\frac{1}{a}}(x)=-f_a(x)}$ $\quad f_{\frac{1}{a}}=-f_a$.

Déduisons-en la position relative de $(\mathscr{C}_a)$ et $(\mathscr{C}_{\frac{1}{a}})$

$(\mathscr{C}_a)$ et $(\mathscr{C}_{\frac{1}{a}})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

3/ Traçons les courbes $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_{\frac{1}{2}})$



PROBLEME N° 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout nombre réel m, on définit la fonction f_m par:

$$f_m(x) = \ln\left|\frac{mx+1}{x+m}\right|.$$

On désigne par $(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de f_m.

1/ Etudions f_m et traçons $(\mathcal{C}_m)$ dans les cas suivants : m=0, m=-1 et m=1

1er cas m = 0

$f_0(x) = -\ln|x|$

$D_{f_0} = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} -\ln|x|$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} -\ln X = -\infty$; $X = |x|$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f_0(x) = \lim\limits_{x\to 0} -\ln|x|$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>}} -\ln x = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<}} f_0(x) = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>}} f_0(x) = +\infty$

Dérivée

$\forall x \neq 0$, $|x| > 0$; f_0 est continue et dérivable sur D_{f_0} et $\forall x \neq 0$:

$f_0'(x) = -\frac{1}{x}$.

Signe de $f_0'(x)$

$\forall x < 0$, $f_0'(x) > 0$; $\forall x > 0$, $f_0'(x) < 0$.

Sens de variation de f_0

f_0 est croissante sur $]-\infty; 0[$ et croissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation de f_0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	‖	$-$	
$f_0(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

Branches infinies de f_0.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_0(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{\ln|x|}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{\ln(-x)}{x}$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_0(x)}{x} = 0$;

$\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_0(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln|x|}{x}$

$= \lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$

$(\mathcal{C}_0)$ admet une branche infinie de direction (Ox) à $-\infty$ comme à $+\infty$.

* $\lim_{x\to 0} f_0(x) = +\infty$; l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $(\mathcal{C}_0)$.

2e cas $m = -1$

$f_{-1}(x) = \ln\left|\frac{-x+1}{x-1}\right| = \ln 1 = 0$, $x \neq 1$

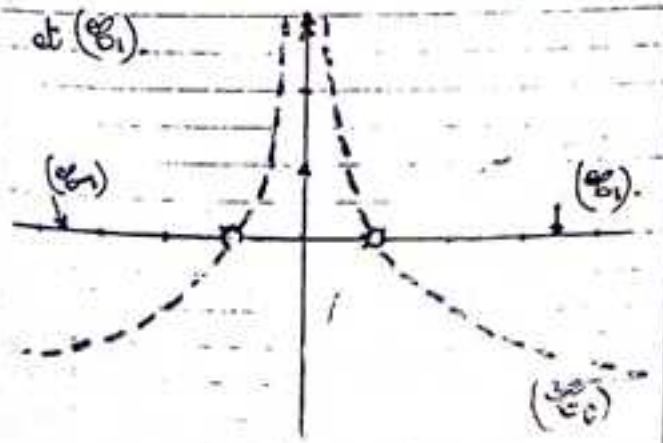
$(\mathcal{C}_{-1})$ est l'axe des abscisses privé du point d'abscisse 1

3e cas $m = 1$

$f_1(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x+1}\right| = \ln 1 = 0$, $x \neq -1$

$(\mathcal{C}_1)$ est l'axe des abscisses privé du point d'abscisse -1

Construction des courbes $(\mathcal{C}_0)$, $(\mathcal{C}_{-1})$ et $(\mathcal{C}_1)$.



Dans la suite, on suppose que $m \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$

2./ a./ Déterminons les ensembles de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction f_m

Soit D_m le domaine de définition de f_m

$D_m = \{x \in \mathbb{R} / x+m \neq 0 \text{ et } mx+1 \neq 0\}$

Posons $x+m = 0 \Leftrightarrow x = -m$

$mx+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{m}$

$\boxed{D_m = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{m}; -m\right\}}$

$\forall x \in D_m$, $x \mapsto \left|\frac{mx+1}{x+m}\right|$ est continue et dérivable. De plus $\forall x \in D_m$, $\left|\frac{mx+1}{x+m}\right| > 0$ or $x \mapsto \ln x$ est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$,

Les ensembles de continuité et de dérivabilité sont donc confondus à D_m

b./ Démontrons que les courbes $(\mathcal{C}_m)$ passent par deux points fixes

$f_m(-1) = \ln\left|\frac{m+1}{m+1}\right| = 0$ pour $m \neq -1$

$f_m(-1) = \ln\left|\frac{-m+1}{m-1}\right| = \ln|-1| = \ln 1 = 0$ pour $m \neq 1$

Toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$ à l'exception de $(\mathcal{C}_{-1})$ et $(\mathcal{C}_1)$ passent par deux points fixes $A(-1; 0)$ et $B(1; 0)$

3./ a./ Démontrons que $D_m = D_{\frac{1}{m}}$

$D_{\frac{1}{m}} = \left\{x \in \mathbb{R} / x + \frac{1}{m} \neq 0 \text{ et } \frac{1}{m}x + 1 \neq 0\right\}$

$x + \frac{1}{m} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{m}$

$\frac{1}{m}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -m$.

$D_{\frac{1}{m}} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{m}; -m\right\} = D_m$.

$\boxed{D_m = D_{\frac{1}{m}}}$

- Démontrons que pour tout élément x de D_m on a: $f_{\frac{1}{m}}(x) = -f_m(x)$

$f_{\frac{1}{m}}(x) = \ln\left|\frac{\frac{1}{m}x+1}{x+\frac{1}{m}}\right|$

$= \ln\left|\frac{x+m}{mx+1}\right| = -\ln\left|\frac{mx+1}{x+m}\right| = -f_m(x)$

$\boxed{\forall x \in D_m,\ f_{\frac{1}{m}}(x) = -f_m(x)}$

Déduisons-en la position relative de (C_m) et $\left(C_{\frac{1}{m}}\right)$.

$\forall x \in D_m,\ f_{\frac{1}{m}}(x) = -f_m(x)$.

$\boxed{\text{On en déduit que les courbes } (C_m) \text{ et } \left(C_{\frac{1}{m}}\right) \text{ sont symétriques par rapport à l'axe } (Ox)}$

b/ Démontrons que:

$*\ (x \in D_{-m}) \Leftrightarrow (-x \in D_m)$

$x \in D_{-m} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{m} \\ \text{et} \\ x \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x \neq -\frac{1}{m} \\ \text{et} \\ -x \neq -m \end{cases}$

$\Leftrightarrow -x \in D_m$

$\boxed{(x \in D_{-m}) \Leftrightarrow (-x \in D_m)}$

$*\ \forall x \in D_{-m},\ f_{-m}(x) = f_m(-x)$

$\forall x \in D_m,\ f_{-m}(x) = \ln\left|\frac{-mx+1}{x-m}\right|$

$= \ln\left|\frac{m(-x)+1}{-(-x+m)}\right|$

$\forall x \in D_{-m},\ f_{-m}(x) = \ln\left|\frac{m(-x)+1}{-x+m}\right|$

$= f_m(-x)$

$\boxed{\forall x \in D_{-m},\ f_{-m}(x) = f_m(-x)}$

Déduisons-en la position relative des courbes $(\mathcal{C}_m)$ et $(\mathcal{C}_{-m})$

$\forall x \in D_{-m},\ f_{-m}(x) = f_m(-x)$

On en déduit que:

$\boxed{\text{Les courbes } (\mathcal{C}_m) \text{ et } (\mathcal{C}_{-m}) \text{ sont symétriques par rapport à l'axe } (Oy)}$

c/ Déduisons des questions précédentes qu'il suffit d'étudier f_m et de tracer $(\mathcal{C}_m)$ pour $m > 1$ pour obtenir toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$

$m > 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} \in]0;1[\\ -\frac{1}{m} \in]-1;0[\\ -m \in]-\infty;-1[\end{cases}$ et $\begin{cases} \mathcal{C}_{\frac{1}{m}} = S_{ox}(\mathcal{C}_m) \\ \mathcal{C}_{-m} = S_{oy}(\mathcal{C}_m) \end{cases}$

$\boxed{\text{Il suffit donc d'étudier } f_m \text{ et tracer } (\mathcal{C}_m) \text{ pour } m > 1 \text{ pour obtenir toutes les courbes } (\mathcal{C}_m)}$

4°/ On suppose dans cette question que $m > 1$

a-/ Etudions f_m et dressons son tableau de variation

$D_m = \mathbb{R} - \left\{-m; -\frac{1}{m}\right\}$

Limites de f_m aux bornes de D_m

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_m(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left|\frac{mx+1}{x+m}\right| = \ln|m|$$

$= \ln m$ car $m>1$

$$\lim_{x\to -m} f_m(x) = \lim_{x\to -m} \ln\left|\frac{mx+1}{x+m}\right|$$

Posons $U(x) = \left|\frac{mx+1}{x+m}\right|$

$\lim_{x\to -m} U(x) = +\infty$ car $\begin{cases} mx+1 \to -m^2+1 \neq 0 \\ x+m \to 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to -m} \ln\left|\frac{mx+1}{x+m}\right| = +\infty$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{m}} f_m(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{m}} \ln\left|\frac{mx+1}{x+m}\right|$$

$= -\infty$ car $\lim_{x\to -\frac{1}{m}} U(x) = 0^+$

$$\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = \ln m$$

$$\lim_{x\to -m} f_m(x) = +\infty ; \lim_{x\to -\frac{1}{m}} f_m(x) = -\infty$$

Dérivée

$\forall x \in D_m$, $f'_m(x) = \frac{m^2-1}{(x+m)(mx+1)}$

$\forall x \in D_m$ et $m>1$, $m^2-1>0$

$f'_m(x)$ a donc le signe de $(x+m)(mx+1)$

Signe de $f'_m(x)$

x	$-\infty$		$-m$		$-\frac{1}{m}$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	

Sens de variation de f_m

$\forall x \in]-\infty ; -m[\cup]-\frac{1}{m}, +\infty[$, $f'_m(x)>0$

f_m est donc croissante sur $]-\infty, -m[$ et sur $]-\frac{1}{m}, +\infty[$

$\forall x \in]-m ; -\frac{1}{m}[$, $f'_m(x)<0$; f_m est décroissante sur $]-m ; -\frac{1}{m}[$

Tableau de variation de f_m

x	$-\infty$		$-m$		$-\frac{1}{m}$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	
$f_m(x)$	$\ln m$	↗	$+\infty$	↘	$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↗	$\ln m$

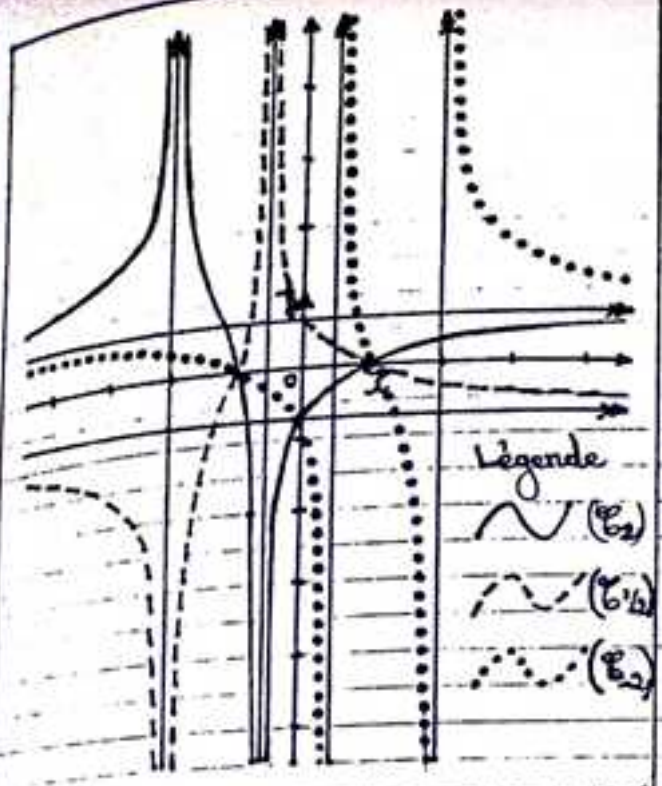
b-/ Déduisons-en le tracé de $(\mathcal{C}_2)$, $(\mathcal{C}_{\frac{1}{2}})$ et $(\mathcal{C}_{-2})$.

Tableau de variation de f_2

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'_2(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	
$f_2(x)$	$\ln 2$	↗	$+\infty$	↘	$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↗	$\ln 2$

c- La courbe $(\mathcal{C}_2)$ admet trois asymptotes dont deux verticales d'équations : $x=-\frac{1}{2}$ et $x=-2$ et une horizontale d'équation $y=\ln 2$

$(\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}) = S_{ox}(\mathcal{C}_2)$; $(\mathcal{C}_{-2}) = S_{oy}(\mathcal{C}_2)$!



Soit Ω le point d'intersection de $(\mathcal{C}_{f_2})$ et de son asymptote horizontale.

Démontrons que Ω est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_{f_2})$

Coordonnées de Ω

$$\begin{cases} y = f_2(x) \\ y = \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow f_2(x) = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{2x+1}{x+2}\right| = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{2x+1}{x+2}\right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+1}{x+2} = 2 \ (a) \\ \text{ou} \\ \frac{2x+1}{x+2} = -2 \ (b) \end{cases}$$

(a) $\Leftrightarrow 2x+1 = 2x+4$ impossible.

(b) $\Leftrightarrow 2x+1 = -2x-4 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$

$\Omega\left(-\frac{5}{4}; \ln 2\right)$

On sait que $A(a;b)$ est centre de symétrie de (C_f) si: $f(2a-x)+f(x) = 2b$

$$f_2\left[2\left(-\tfrac{5}{4}\right)-x\right] = f_2\left(-\tfrac{5}{2}-x\right)$$

$$= \ln\left|\frac{-5-2x+1}{-\frac{5}{2}-x+2}\right|$$

$$= \ln\left|\frac{4(x+2)}{2x+1}\right|$$

$$= \ln 4 + \ln\left|\frac{x+2}{2x+1}\right|$$

$$f_2\left(-\tfrac{5}{2}-x\right) = 2\ln 2 - f_2(x)$$

$$f_2\left(-\tfrac{5}{2}-x\right) + f_2(x) = 2\ln 2.$$

$\Omega\left(-\frac{5}{4}; \ln 2\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C}_{f_2})$

c-/ Soit g la restriction de f_2 à $]-2; -\frac{1}{2}[$

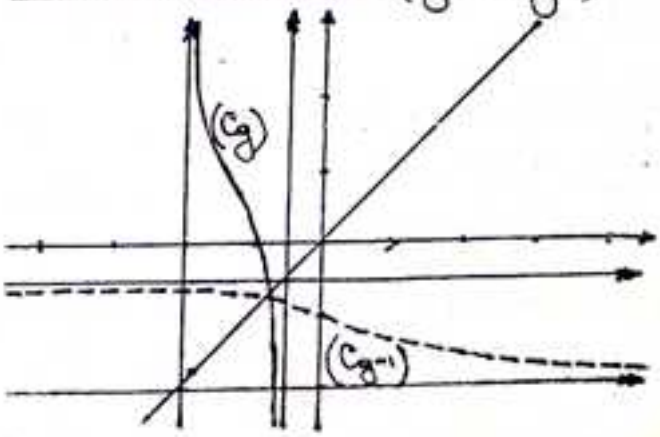
Démontrons que g réalise une bijection de $]-2; -\frac{1}{2}[$ vers $\mathbb{R}$

La restriction g de f_2 à $]-2; -\frac{1}{2}[$ est continue, monotone, strictement décroissante sur $]-2; -\frac{1}{2}[$ avec:

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ <}} g(x) = -\infty$$

g définit donc une bijection $]-2; -\frac{1}{2}[$ vers $\mathbb{R} = g\left(]-2; -\frac{1}{2}[\right)$

Construction des courbes (C_g) et $(C_{g^{-1}})$



PROBLEME N°5

1/ Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$$

a/ Etudions f et dressons son tableau de variation

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[}$$

Limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$$

$= +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to \pm\infty} |x-1| = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x}{x-1} + \ln(1-x)$$

$$= \lim_{X \overset{>}{\to} 0} \frac{1-X}{X} + \ln X, \quad X = 1-x$$

$$= \lim_{X \overset{>}{\to} 0} \frac{X-1+X\ln X}{X}$$

$= -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{X \overset{>}{\to} 0} X\ln X = 0 \\ X-1 \to -1 < 0 \\ X \to 0 \\ X > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x}{x-1} + \ln(x-1)$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{Y \overset{>}{\to} 0} \frac{Y+1}{Y} + \ln Y, \quad Y = x-1$$

$$= \lim_{Y \overset{>}{\to} 0} \frac{Y+1+Y\ln Y}{Y},$$

$= +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{Y \overset{>}{\to} 0} Y\ln Y = 0 \\ Y+1 \to 1 > 0 \\ Y \to 0 \\ Y > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty.$$

Dérivée

$\forall x \in \mathcal{D}_f, |x-1| > 0$

$x \mapsto \ln|x-1|$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ car $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, |x-1| > 0$ et $t \mapsto \ln t$ dérivable sur $]0; +\infty[$

De plus $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$; f est donc continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$ car elle est la somme de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathcal{D}_f$

et $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

$\forall x \in \mathcal{D}_f, (x-1)^2 > 0$

$f'(x)$ a donc le signe de $x-2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$		

Sens de variation de f

$\forall x \in]-\infty;1[\cup]1;2[$, $f'(x) > 0$; f est donc strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;2[$

$\forall x \in]2;+\infty[$, $f'(x) > 0$; f est donc strictement croissante sur $]2;+\infty[$ f admet un extrémum local au point d'abscisse 2. $f(2) = 2$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'(x)		−	‖	−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$
			‖ $-\infty$				

b/- Calculons f(0)

$f(0) = \frac{0}{0-1} + \ln|0-1| = 0$

$\boxed{f(0) = 0}$

Déduisons-en le signe de f(x)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f(x)		+	0	−	‖	+	

2/ Soit g la fonction définie par:

$g(x) = x \ln|x-1|$

a/ Etudions g.

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$

$\boxed{D_g = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[}$

Limites de g aux bornes de D_g.

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} x \ln|x-1|$

$= -\infty$ car $\lim_{x \to -\infty} |x-1| = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x \ln|x-1|$

$= +\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} |x-1| = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} x \ln|x-1|$

$= -\infty$ car $\lim_{x \to 1} |x-1| = 0^+$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = -\infty$	$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = -\infty$

Dérivée :

$x \mapsto \ln|x-1|$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$

$x \mapsto x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

donc continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$

g est donc continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ car elle est le produit de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$:

$g'(x) = \ln|x-1| + \frac{x}{x-1} = f(x)$

g'(x) est du même signe que f(x)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	‖	+	

Sens de variation de g.

$\forall x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$, $g'(x) > 0$ g est croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$.

$\forall x \in]0;1[$, $g'(x) < 0$; g est décroissante sur $]0;1[$

g admet un maximum local en 0

$g(0) = 0$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	‖	+	
g(x)	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Construction de la courbe (C) représentative de g.

Etude des branches infinies

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

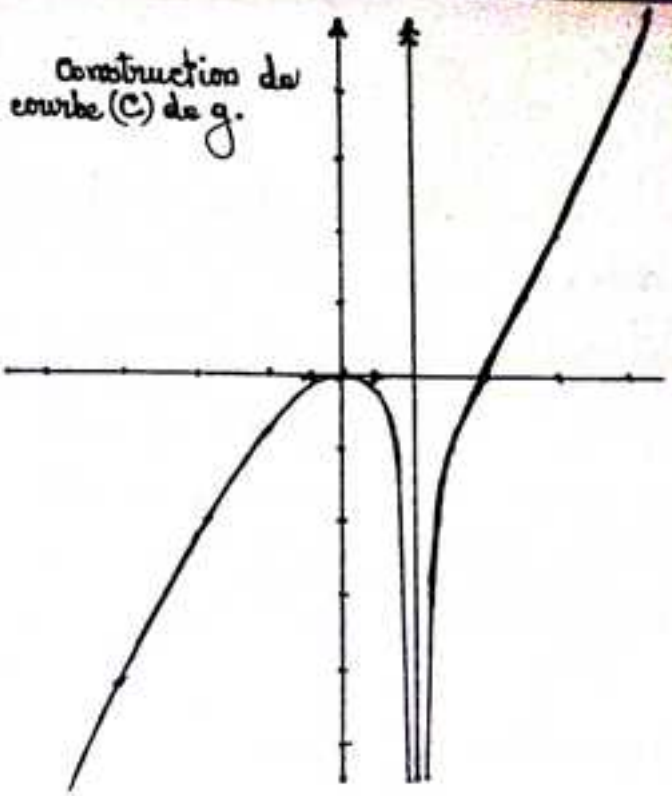
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \ln|x-1|$

$= +\infty$ car $\lim_{x\to\pm\infty} |x-1| = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

la courbe (C) de g possède une direction asymptotique de direct^{e} (oy)

$\lim_{x\to1} g(x) = -\infty$; la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à (C).

Construction de la courbe (C) de g.



b/ Soit A le point d'intersection de (C) et (OI) d'abscisse non nulle

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x\ln|x-1| = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ... $\ln|x-1| = 0 \Leftrightarrow |x-1| = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

$A(2;0)$.

Démontrons que A est un point d'inflexion de (C).

$g''(x) = f'(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2}$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ $g(2) = 0$

L'abscisse du point A annule la dérivée de g; A est donc un point d'inflexion de (C).

Equation de la tangente (T) à (C) en A.

$(T) : y = g'(2)(x-2) + g(2)$

$g'(2) = 2$ $g(2) = 0$

$(T) : y = 2(x-2)$

3/ On désigne par h la restriction de g à l'intervalle $]-1;+\infty[$

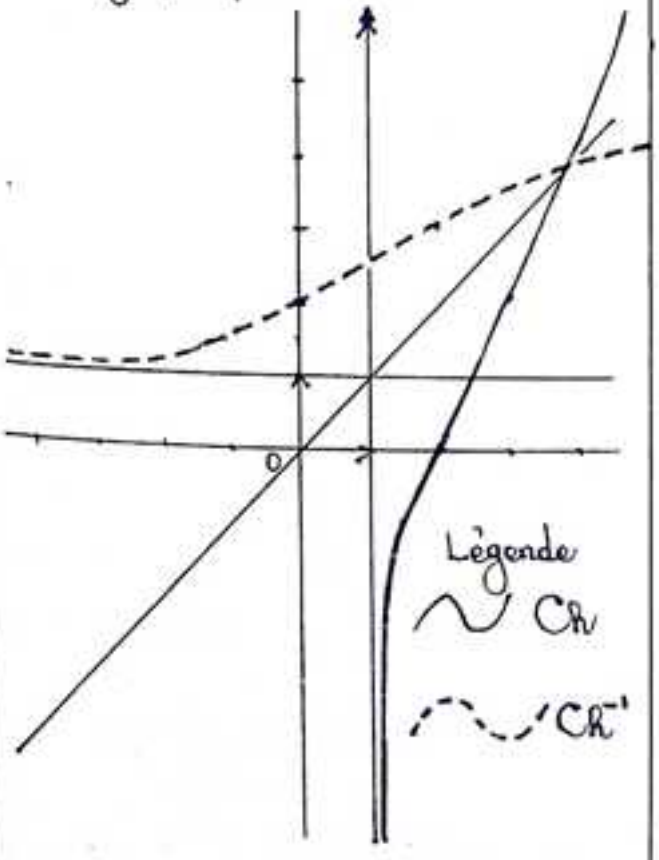
Démontrons que h est une bijection de $]-1;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$

h est continue, monotone, strictement croissante sur $]-1;+\infty[$ avec $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

$$h(]-1;+\infty[) = \mathbb{R}$$

h est donc une bijection de $]-1;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Construction des courbes représentatives de h et h^{-1} sur un autre graphique



PROBLEME N°6

PARTIE A

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x + \ln|x-1|$$

1°/ Etude du sens de variation de f

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0\}$

Posons $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[}$$

Dérivée

$x \mapsto \ldots$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$ et $\forall x \neq 1$, $|x-1| > 0$. De plus $x \mapsto \ln x$ est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$. La fonct° $x \mapsto \ln|x-1|$ est donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$ d'où f continue et dérivable sur D_f et $\forall x \in D_f$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{x}{x-1}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Sens de variation de f

$\forall x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$, $f'(x) > 0$

f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$

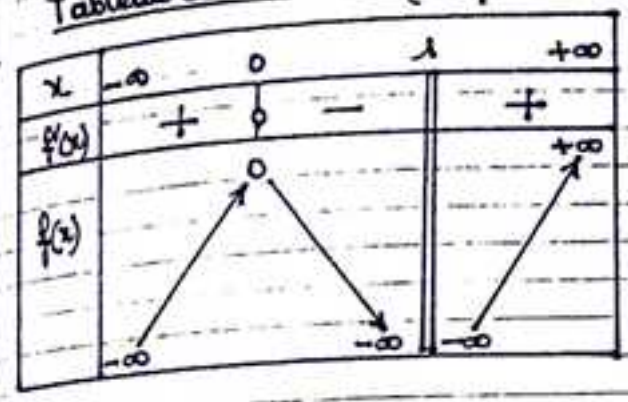
$\forall x \in]0;1[$, $f'(x) < 0$; f est strictement

décroissante sur $]0;1[$

f admet un maximum local au point 0

$f(0) = 0$.

Tableau de variation de f.



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + \ln|x-1|$

$= \lim_{x\to-\infty} x + \ln(1-x)$

$= \lim_{x\to+\infty} -X + \ln(1+X)$, $X = -x$

$= \lim_{x\to+\infty} -x + \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} -x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$= -\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + \ln|x-1|$

$= +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} |x-1| = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} x + \ln|x-1|$

$= -\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x\to1} |x-1| = 0^+ \\ \lim_{x\to0} \ln x = -\infty \end{cases}$

b/ Montrons que f s'annule pour une valeur α différent de 0, que nous comparerons aux nombres réels $\frac{5}{4}$ et $\frac{3}{2}$

D'après les variations de f on a:

$f(0) = 0$; $\forall x \in]-\infty;0[\cup]0;1[$, $f(x) < 0$

De plus la restriction de f à $]1;+\infty[$ est continue, monotone, strictement croissante sur $]1;+\infty[$ avec:

$\lim_{x\to1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Cette restriction définit donc une bijection de $]1;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

Il existe donc un unique réel $\alpha > 1$ tel que $f(\alpha) = 0$

$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4} - 2\ln 2 < 0$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - \ln 2 > 0$

$f\left(\frac{5}{4}\right) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0 \Rightarrow \frac{5}{4} < \alpha < \frac{3}{2}$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires

2/ Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan P rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J)

a/ Etudions les branches infinies de (C)

$\lim_{x\to1} f(x) = -\infty$; (C) possède une asymptote verticale d'équation $x = 1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{\ln|x-1|}{x}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{\ln(1-x)}{x}$

$= \lim_{X\to+\infty} 1 - \frac{\ln(1+X)}{X}$

$= \lim_{X\to+\infty} 1 - \frac{\ln X}{X} - \frac{1}{X}\ln\left(1+\frac{1}{X}\right)$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\ln(x-1)}{x}$

$= \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \ln|x-1|$

$= +\infty$ car $\lim_{x\to\pm\infty} |x-1| = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

La courbe (C) admet une branche parabolique dirigée par la droite d'équation $y=x$ (la 1ère bissectrice)

b/ Traçons (C) ainsi que les tangentes à (C) aux points d'abscisses respectives $\frac{1}{2}$ et $1-e$

Equations des tangentes

Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ et (T') la tangente à (C) au point d'abscisse $1-e$ on a:

(T): $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln 2$

(T): $-\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - \ln 2 = -x + 1 - \ln 2$

(T'): $y = f'(1-e)(x-1+e) + f(1-e)$

$f'(1-e) = \frac{e-1}{e}$; $f(1-e) = 2-e$

(T'): $y = \frac{e-1}{e}(x-1+e) + 2 - e$

$= \frac{e-1}{e}x + \frac{1}{e}$

Finalement on a:

(T): $y = -x+1-\ln 2$	(T'): $y = \frac{e-1}{e}x + \frac{1}{e}$

Pour la construction voir page suivante

3/ Soit t un nombre réel de $]0;1[$

Calculons l'aire de la partie du plan définie par: $0 \le x \le t$ et $f(x) \le y \le 0$

Soit A(t) cette aire on a:

$A(t) = \int_0^t (-x - \ln|x-1|)\,dx$

$= \int_0^t (-x - \ln(1-x))\,dx$

$= \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_0^t - \int_0^t \ln(1-x)\,dx$

$= -\frac{1}{2}t^2 - \int_0^t \ln(1-x)\,dx$

Posons $u(x) = \ln(1-x) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x-1}$

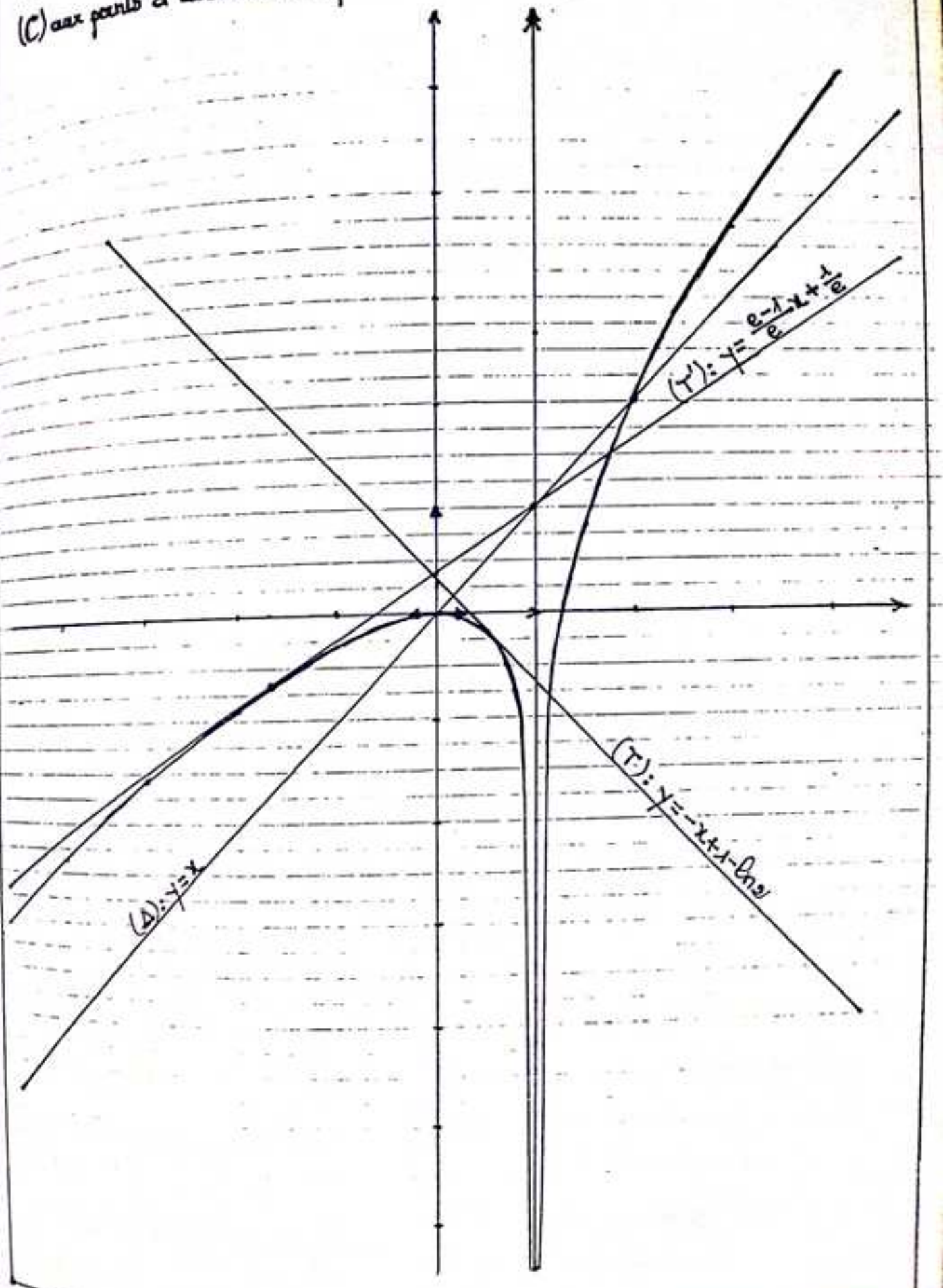
$v'(x) = 1 \Leftrightarrow v(x) = x$.

$\int_0^t \ln(1-x)\,dx = \left[x\ln(1-x)\right]_0^t - \int_0^t \frac{x}{x-1}\,dx$

$= t\ln(1-t) - \int_0^t \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)dx$

$= t\ln(1-t) - \left[x + \ln|x-1|\right]_0^t$

Construction de la courbe (C) representative de f ainsi des tangentes à (C) aux points d'abscisses respectives $-1/2$ et $1-e$



$\int_0^t \ln(1-x)\,dx = t\ln(1-t) - t - \ln|t-1|$

$= t\ln(1-t) - t - \ln(1-t)$

$\int_0^t \ln(1-x)\,dx = (t-1)\ln(1-t) - t$

$\boxed{A(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + (1-t)\ln(1-t) \text{ unité d'aire}}$

Calculons la limite de cette aire lorsque t tend vers 1

$\lim_{t\to 1} -\frac{1}{2}t^2 + t = \frac{1}{2}$ (1)

$\lim_{t\to 1} (1-t)\ln(1-t) = \lim_{x\to 0} x\ln x$, $x = 1-t$

$\lim_{t\to 1} (1-t)\ln(1-t) = 0$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow \lim_{t\to 1} A(t) = \frac{1}{2}$

$\boxed{\lim_{t\to 1} A(t) = \frac{1}{2} \text{ unité d'aire} = 2cm^2}$

4/ Soit g la restriction de f à $]1;+\infty[$

a/ Montrons que g admet une bijection réciproque g^{-1}

D'après les variations de f, sa restriction g à $]1;+\infty[$ est continue, monotone strictement croissante sur $]1;+\infty[$

avec: $\lim_{x\to 1} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

g définit donc une bijection de $]1;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

Conclusion: g admet une bijection réciproque g^{-1}

Ensemble de définition de g^{-1}

$\boxed{D_{g^{-1}} = \mathbb{R}}$

b-/ Dérivabilité de g^{-1} en 2

On sait que $g(2) = 2 \Leftrightarrow g^{-1}(2) = 2$.

De plus g est dérivable en 2 et $g'(2) \neq 0$

g^{-1} est donc dérivable en 2.

Calculons $(g^{-1})'(2)$

$(g^{-1})'(2) = \frac{1}{g'[g^{-1}(2)]} = \frac{1}{g'(2)} = \frac{1}{2}$

$\boxed{(g^{-1})'(2) = \frac{1}{2}}$

PARTIE B

1-/ On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation:

$z^3 + (1+i)z^2 + (2+i)z + 6 + 8i = 0$ (E).

a-/ Montrons que (E) admet une solution imaginaire pure notée z_0 que nous déterminerons.

Posons $z_0 = ai$, $a \in \mathbb{R}^*$

z_0 solution de (E)

$\Leftrightarrow (ai)^3 + (1+i)(ai)^2 + (2+i)ai + 6 + 8i = 0$

$\Leftrightarrow -a^3 i - (1+i)a^2 + (-1+2i)a + 6 + 8i = 0$

$\Leftrightarrow (-a^2 - a + 6) + i(-a^3 - a^2 + 2a + 8) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 - a + 6 = 0 \ (1) \\ -a^3 - a^2 + 2a + 8 = 0 \ (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Leftrightarrow (a+3)(a-2) = 0$

$\Leftrightarrow a = -3$ ou $a = 2$

$-(-3)^3-(-3)^2+2(-3)+8 = 20 \neq 0$

$-(2)^3-2^2+2\times2+8 = 0$

$\Leftrightarrow a=2 \Leftrightarrow z_0 = 2i$

(E) admet une solution imaginaire pure $z_0 = 2i$

b/ Résolution de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$

Posons $P(z) = z^3+(1+i)z^2+(2+i)z+6+8i$

z_0 solution $\Leftrightarrow$ P(z) peut se mettre sous la forme : $P(z)=(z-2i)Q(z)$ où Q est un polynôme du second degré. Par division euclidienne on a :

$P(z) = (z-2i)\left[z^2+(1+3i)z-4+3i\right]$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} z=2i \\ \text{ou} \\ z^2+(1+3i)z-4+3i=0 \quad (3) \end{cases}$

$(3) \Leftrightarrow z^2+(1+3i)z-4+3i=0$

$\Delta = (1+3i)^2-4(-4+3i)$

$= 8-6i = (3-i)^2$

$z_1 = \dfrac{-1-3i+3-i}{2} = 1-2i$

$z_2 = \dfrac{-1-3i-3+i}{2} = -2-i$

$\boxed{S=\{2i\,;\,1-2i\,;\,-2-i\}}$

2/ Soit dans le repère (O, I, J) les points A, B et C d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2

a/ Montrons qu'il existe une similitude directe S que nous déterminerons qui transforme A en B et I en C

Posons $z' = az+b$, l'écriture complexe de S.

$\begin{cases} S(A)=B \\ S(I)=C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = az_0+b \\ z_2 = az_I+b \end{cases}, z_I = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ia+b = 1-2i \\ a+b = -2-i \end{cases} (4)$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2i & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i-1 \neq 0$

Il existe donc une similitude S et une seule qui transforme A en B et I en C

$(4) \Leftrightarrow (2i-1)a = 3-i$

$a = \dfrac{-3+i}{1-2i} = \dfrac{(-3+i)(1+2i)}{5}$

$= -1-i$

$b = -2-i+1+i = -1$

L'écriture complexe de S est :

$\boxed{z' = (-1-i)z-1}$

b/ Donnons les éléments géométriques de la similitude directe S.

$a = -1-i \quad b = -1$

$|a| = \sqrt{2} \quad \text{Arg}(a) = \dfrac{5\pi}{4}$

Soit Ω le centre de S.

$z_\Omega = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{-1}{2+i} = \dfrac{-2+i}{5}$

S est la similitude directe de centre Ω d'affixe $z_\Omega = -\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$, de rapport $k=\sqrt{2}$ et d'angle $\theta = \frac{5\pi}{4}$

3/ A tout point $M(x;y)$ on associe le point $M'(x';y')$ par S.

Déterminons x' et y' en fonction de x et y

$z' = (-1-i)z - 1$

$\Leftrightarrow x' + iy' = (-1-i)(x+iy) - 1$

$x' + iy' = -x + y - 1 + i(-x-y)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x+y-1 \\ y' = -x-y \end{cases}$

4/ Soit (Γ) la représentation graphique dans le plan P de la restriction h de la fonction f à l'intervalle $]-\infty;1[$

Vérifions que l'image (Γ') de (Γ) par S est une partie de la représentation graphique dans le plan P de la fonction h_1 définie sur $\mathbb{R}$ par:

$h_1(x) = 2e^{x+1} - x - 3$

$\begin{cases} x' = -x+y-1 \\ y' = -x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{x'+y'+1}{2} \\ y = \dfrac{x'-y'+1}{2} \end{cases}$

$M(x;y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + \ln(1-x) \\ x < 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x'-y'+1}{2} = -\dfrac{x'+y'+1}{2} + \ln\left(1 + \dfrac{x'+y'+1}{2}\right) \\ \dfrac{x'+y'+1}{2} > -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'+1 = \ln\left(\dfrac{x'+y'+3}{2}\right) \\ x'+y'+3 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'+y'+3 = 2e^{x'+1} \\ x'+y'+3 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y' = 2e^{x'+1} - x' - 3 \\ x'+y'+3 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow M'$ appartient à une partie de la courbe représentative de h_1.

Conclusion:

$(\Gamma') = S(\Gamma)$ est une partie de la courbe représentative de la fonction h_1 définie par: $h_1(x) = 2e^{x+1} - x - 3$

5/ Etudions les variations de la fonction h_1

$D_{h_1} = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$

Limites de h_1 aux bornes de D_{h_1}

$\lim\limits_{x\to-\infty} h_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{x+1} - x - 3$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2e\dfrac{e^x}{x} - 1 - \dfrac{3}{x}\right)$

$= +\infty$ car $\left|\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0 \end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{x+1} - x - 3$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} 2ee^x - x - 3$

$= +\infty$ car $\left|\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -x-3 = +\infty \end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h_1(x) = +\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} h_1(x) = +\infty$

Dérivée

$x \mapsto 2e^{x+1}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto -x-3$ est continue et dérivable

sur $\mathbb{R}$, h_1 est donc continue et dérivable sur $D_{h_1} = \mathbb{R}$ car elle est la somme de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in D_{h_1}$:

$h_1'(x) = 2e^{x+1} - 1$

$h_1'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x+1} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x+1 = -\ln 2 \Leftrightarrow x = -1 - \ln 2$

$h_1(-1-\ln 2) = 2 \times \frac{1}{2} + 1 + \ln 2 - 3$

$= -1 + \ln 2$

Signe de $h_1'(x)$

x	$-\infty$		$-1-\ln 2$		$+\infty$
$h_1'(x)$		$-$	0	$+$	

Sens de variation

D'après le tableau ci-dessus, h_1 est décroissante sur $]-\infty ; -1-\ln 2[$, croissante sur $]-1-\ln 2 ; +\infty[$ et admet un un minimum au point $-1-\ln 2$

Tableau de variation de h_1

x	$-\infty$		$-1-\ln 2$		$+\infty$
$h_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$h_1(x)$	$+\infty$	↘	$-1+\ln 2$	↗	$+\infty$

Branches infinies

$\lim_{x \to -\infty} h_1(x) + x + 3 = \lim_{x \to -\infty} 2e^{x+1} = 0$

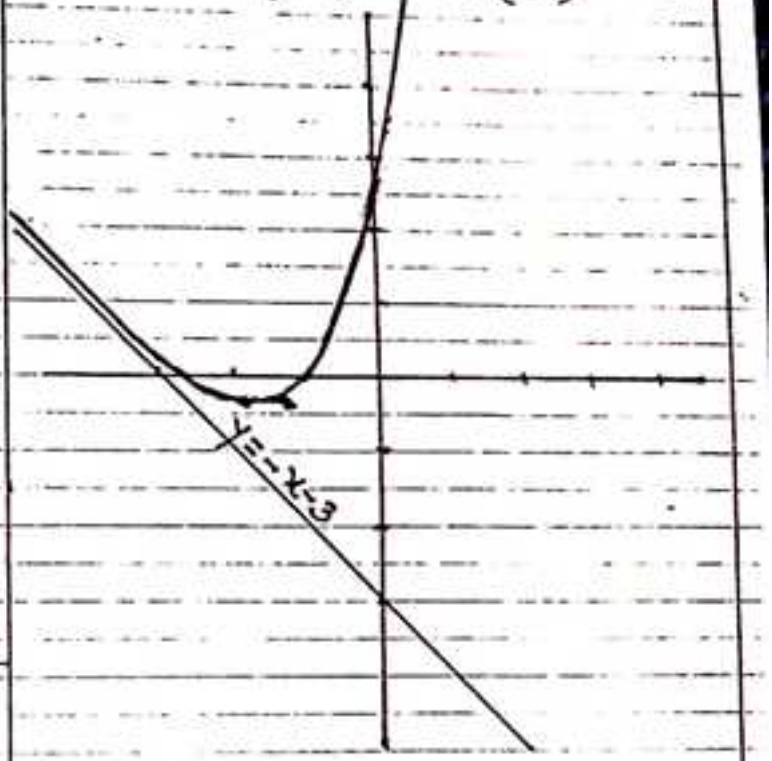
la droite d'équation $y = -x - 3$ est asymptote oblique à la courbe (C_{h_1}) à $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{h_1(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2e\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{3}{x}$

$= +\infty$

(C_{h_1}) possède une branche infinie de direction (oy) à $+\infty$

Construction de la courbe (C_{h_1})



PROBLEME N°7

On considère la fonction numérique de variable réelle x définie par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right)$$

PARTIE A

Soit l'expression $A(x) = \frac{2x^3 - x - 1}{x}$

1-/ Vérifions que $A(1) = 0$

$A(1) = \frac{2(1)^3 - 1 - 1}{1} = 0$

$\boxed{A(1) = 0}$

- Etudions le signe de $A(x)$

$2x^3-x-1=(x-1)(2x^2+2x+1)$

Posons $2x^2+2x+1=0$

$\Delta'=1-2=-1<0$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $2x^2+2x+1>0$

$A(x)=\dfrac{(x-1)(2x^2+2x+1)}{x}$; $A(x)$ a le même signe de $\dfrac{x-1}{x}$; $\mathcal{D}_A=\mathbb{R}^*$

Tableau de signe de $A(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$A(x)$	$+$	‖	$-$		0	$+$	

2/ a/ Calculons $f(-1)$ et $f(1)$.

$f(-1)=-1+1+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{-1}{2-1}\right)=2l$

$f(1)=1+1+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2-1}\right)=0$

$f(-1)=0$	$f(1)=2l$

- Ensemble de définition de f

$\mathcal{D}_f=\{x\in\mathbb{R}/\ x\neq 0 \text{ et } 2x^2-1>0\}$

Posons $2x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}/2$		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
$2x^2-1$	$+$	0	$-$	0	$+$		

$\mathcal{D}_f=\left]-\infty;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$

b/ Déterminons les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$; vers $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x+1+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{2x^2-1}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\dfrac{x^2}{2x^2-1}\right)=-\ln 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=x+1+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{2x^2-1}\right)$

$=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x^2}{2x^2-1}\right)=-\ln 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b/ Etude des limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ puis vers $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\lim\limits_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}} x+1+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{2x^2-1}\right)$

$=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}} x+1=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}} \dfrac{x^2}{2x^2-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}} x+1=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}} \dfrac{x^2}{2x^2-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)=+\infty$

- Etudions le signe de $A(x)$

$2x^3-x-1=(x-1)(2x^2+2x+1)$

Posons $2x^2+2x+1=0$

$\Delta'=1-2=-1<0$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $2x^2+2x+1>0$

$A(x)=\frac{(x-1)(2x^2+2x+1)}{x}$; $A(x)$ a le/ signe de $\frac{x-1}{x}$; $\mathcal{D}_A=\mathbb{R}^*$

Tableau de signe de $A(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$A(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

2/ a/ Calculons $f(-1)$ et $f(1)$.

$f(1)=1+1+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2-1}\right)=2$

$f(-1)=-1+1+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2-1}\right)=0$

$f(-1)=0$	$f(1)=2$

- Ensemble de définition de f

$\mathcal{D}_f=\{x\in\mathbb{R}/\ x\neq 0 \text{ et } 2x^2-1>0\}$

Posons $2x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$2x^2-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{D}_f=\left]-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup\left]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$

b/ Déterminons les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$; vers $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x+1+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right)=-\ln 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=x+1+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right)$

$=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right)=-\ln 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

c/ Etude des limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ puis vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\lim\limits_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}} x+1+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right)$

$=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}} x+1=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{2x^2-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}} x+1=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{2x^2-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)=+\infty$

d/ Montrons que la courbe (C) représentative de f admet trois asymptotes dont nous donnerons les équations

$\lim_{x \to -\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to \frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) = +\infty$

Les droites d'équations $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sont asymptotes verticales à (C).

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} -1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right)$$

$= 1$ car $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \to \pm\infty} \ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right) = -\ln 2$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \to \pm\infty} 1 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \ln 2$$

La droite $(\Delta) : y = x + 1 - \frac{1}{2} \ln 2$ est asymptote oblique à la courbe (C).

Conclusion

(C) admet trois asymptotes dont deux verticales d'équations $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et une oblique d'équation : $y = x + 1 - \frac{1}{2} \ln 2$

3/ a/ Etude des variations de f.

f est continue et dérivable sur D_f et $\forall x \in D_f$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \frac{2x(2x^2-1) - 4x \cdot x^2}{(2x^2-1)^2} \cdot \frac{2x^2-1}{x^2}$

$$= 1 - \frac{1}{x(2x^2-1)}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - x - 1}{x(2x^2-1)} = \frac{A(x)}{(2x^2-1)}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ \text{et} \\ x \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

$\forall x \in D_f$, $2x^2 - 1 > 0$; $f'(x)$ a donc le signe de $A(x)$.

Tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Sens de variation de f

Posons $I_1 =]-\infty ; -\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]1 ; +\infty[$

$\forall x \in I_1$, $f'(x) > 0$; f est donc croissante sur $]-\infty ; -\frac{\sqrt{2}}{2}[$ et sur $]1 ; +\infty[$

$\forall x \in]\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1[$, $f'(x) < 0$; f est donc décroissante sur $]\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1[$

f admet un minimum local au point 1

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖	↗	$+\infty$ ‖	↘	y	↗	$+\infty$

b/ Construction de la courbe (C)

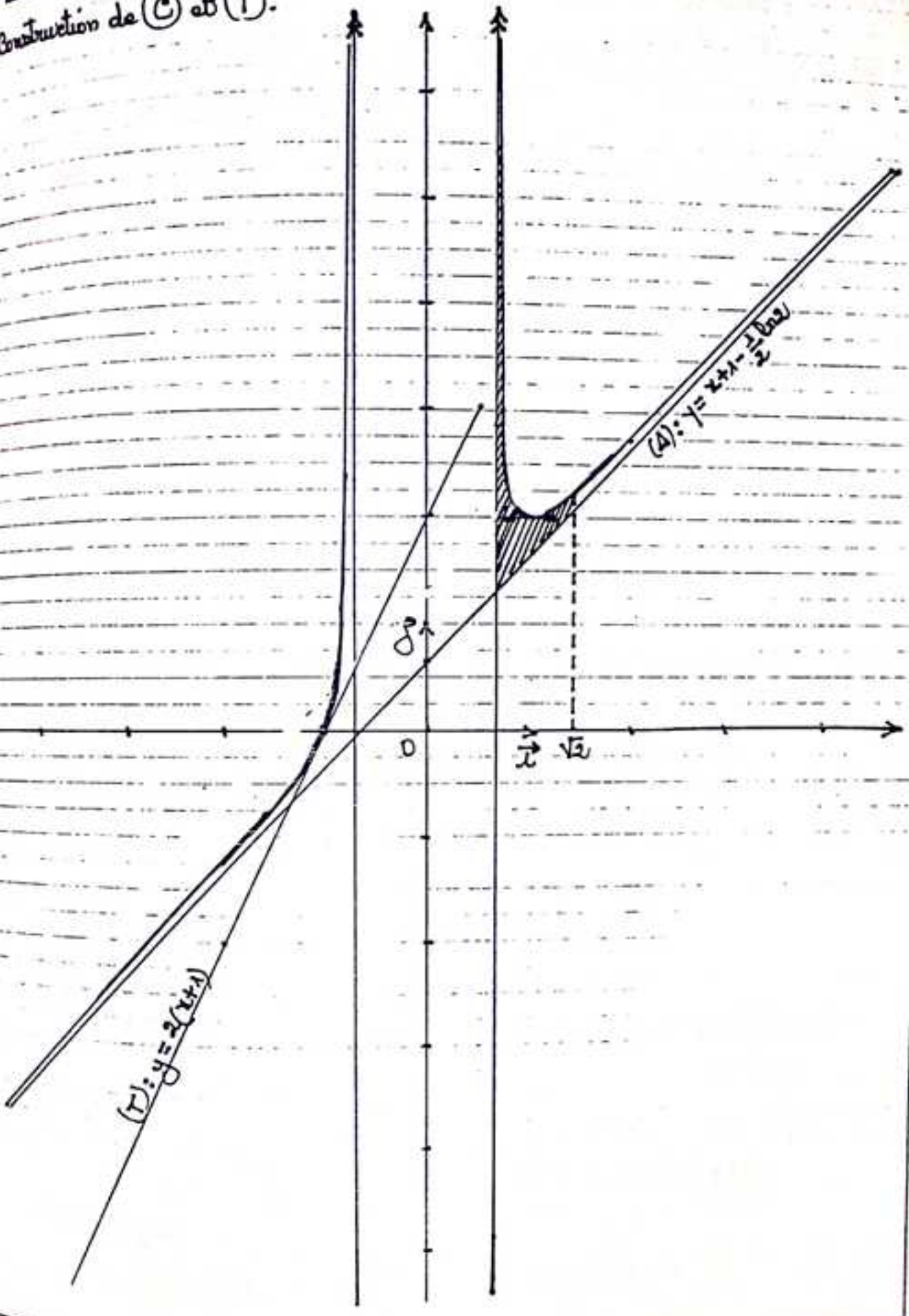
(Voir page suivante)

Equation de la tangente au point d'abscisse -1 :

$(T) : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

$(T): y = 2(x+1)$

Construction de (C) et (T).



PARTIE B

Soit l'expression $B(x)=\dfrac{2}{2x^2-1}$

1./ a/ Déterminons le couple des réels (a;b) tel que pour toute valeur de x qui définit B(x) on ait:

$$B(x)=\frac{a}{x\sqrt{2}-1}+\frac{b}{x\sqrt{2}+1}$$

$D_B=\mathbb{R}-\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

$\forall x\in D_B,\ B(x)=\dfrac{(a+b)x\sqrt{2}+a-b}{2x^2-1}$

Par identification on a:

$$\begin{cases}a+b=0\\ a-b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}$$

$$\boxed{a=1}\quad\boxed{b=-1}$$

b/ Déduisons-en les primitives de B(x)

$$B(x)=\frac{1}{x\sqrt{2}-1}-\frac{1}{x\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{x\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{2}}{x\sqrt{2}+1}\right)$$

Soit H(x) une primitive de B(x) on a:

$$H(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\ln|x\sqrt{2}-1|-\ln|x\sqrt{2}+1|\right]$$

$$\boxed{H(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}-1}{x\sqrt{2}+1}\right|+k,\ k\in\mathbb{R}}$$

2./ a/ Soit α un réel de l'intervalle $\left]\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right]$

Calcul d'intégrale

$$I(\alpha)=\int_\alpha^{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{2x^2}{2x^2-1}\right)dx$$

Posons $u(x)=\ln\left(\frac{2x^2}{2x^2-1}\right)\Rightarrow u'(x)=\frac{-2}{x(2x^2-1)}$

$v'(x)=1\Rightarrow v(x)=x$

$$I(\alpha)=\left[x\ln\left(\frac{2x^2}{2x^2-1}\right)\right]_\alpha^{\sqrt{2}}+\int_\alpha^{\sqrt{2}}\frac{2}{2x^2-1}dx$$

$$I(\alpha)=\sqrt{2}\ln\frac{4}{3}-\alpha\ln\left(\frac{2\alpha^2}{2\alpha^2-1}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\ln\left|\frac{x\sqrt{2}-1}{x\sqrt{2}+1}\right|\right]_\alpha^{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{I(\alpha)=\sqrt{2}\ln\frac{4}{3}-\alpha\ln\left(\frac{2\alpha^2}{2\alpha^2-1}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ln\frac{1}{3}-\ln\frac{\alpha\sqrt{2}-1}{\alpha\sqrt{2}+1}\right)}$$

b/ Déterminons en fonction de I(α) l'aire du domaine plan défini par la courbe (C) et les droites d'équations $y=x+1-\ln\sqrt{2}$, $x=\alpha$ et $x=\sqrt{2}$

Soit A(α) cette aire on a:

$$A(\alpha)=\int_\alpha^{\sqrt{2}}\left[f(x)-(x+1-\ln\sqrt{2})\right]dx$$

$$=\int_\alpha^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right)+\ln\sqrt{2}\right)dx$$

$$=\int_\alpha^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x^2}{2x^2-1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_\alpha^{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{2x^2}{2x^2-1}\right)dx$$

$$\boxed{A(\alpha)=\frac{1}{2}I(\alpha)}$$

c/ Soit $\beta=\alpha\sqrt{2}-1$

Exprimons I(α) en fonction de β

$\beta=\alpha\sqrt{2}-1\Leftrightarrow\beta+2=\alpha\sqrt{2}+1$

$2\alpha^2-1=(\alpha\sqrt{2}-1)(\alpha\sqrt{2}+1)=\beta(\beta+2)$

$\alpha=\dfrac{\beta+1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow 2\alpha^2=(\beta+1)^2$

d'où:

$$I(\alpha)=\sqrt{2}\ln\frac{4}{3}-\frac{\beta+1}{\sqrt{2}}\ln\frac{(\beta+1)^2}{\beta(\beta+2)}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{3\beta}{\beta+2}$$

$$I(\alpha)=\sqrt{2}\ln\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\left[2(\beta+1)\ln(\beta+1)-\beta\ln\beta-(\beta+2)\ln(\beta+2)+\ln 3\right]$$

Déduisons-en $\lim_{\substack{\alpha\to\frac{\sqrt{2}}{2}\\ >}} I(\alpha)$

$\alpha\xrightarrow[>]{}\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta\xrightarrow[>]{}0$.

$$\lim_{\substack{\alpha\to\frac{\sqrt{2}}{2}\\ >}} I(\alpha)=\lim_{\substack{\beta\to 0\\ >}}\sqrt{2}\ln\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\left[2(\beta+1)\ln(\beta+1)-\beta\ln\beta-(\beta+2)\ln(\beta+2)+\ln 3\right]$$

$$=\sqrt{2}\ln\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}(2\ln 2-\ln 3)$$

$$=3\sqrt{2}\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\lim_{\substack{\alpha\to\frac{\sqrt{2}}{2}\\ >}} I(\alpha)=3\sqrt{2}\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}$$

d/ Calculons l'aire A du domaine plan défini par la courbe (C) et les droites d'équations: $y=x+1-\ln\sqrt{2}$, $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\sqrt{2}$

$$A=\lim_{\substack{\alpha\to\frac{\sqrt{2}}{2}\\ >}} A(\alpha)=\frac{1}{2}\lim_{\substack{\alpha\to\frac{\sqrt{2}}{2}\\ >}} I(\alpha)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \text{ unités d'aire}$$

En cm^2 on a:

$$A=4\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=6\sqrt{2}\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

La valeur approchée de A est: $1,22cm^2$

$$\boxed{A\simeq 1,22cm^2}$$

PROBLEME N°8

Pour tout nombre réel α non nul, on désigne par f_α la fonction numérique définie par: $f_\alpha(x)=\frac{\ln(\alpha x)}{x}$ et (C_α) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

PARTIE A

1°/ - Etudions les variations de f_1

$f_1(x)=\frac{\ln x}{x}$ $\quad Df_1=]0;+\infty[$

limites de f_1 aux bornes de Df_1

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f_1(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x}\ln x$$

$=-\infty$ car $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln x=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f_1(x)=-\infty$	$\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=0$

Dérivée

$x\mapsto\frac{1}{x}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc continue et dérivable sur $]0;+\infty[$

$x\mapsto\ln x$ est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$

f_1 est donc continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ car elle le produit de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}^*_+$

et $\forall x>0$, $f_1'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}$

$$\forall x>0,\ f_1'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$I(\alpha)=\sqrt{2}\ln\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\left[2(\beta+1)\ln(\beta+1)-\beta\ln\beta-(\beta+2)\ln(\beta+2)+\ln 3\right]$$

Déduisons-en $\lim_{\substack{\alpha\to\frac{\sqrt{2}}{2}\\ >}} I(\alpha)$

$\alpha\to\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta\to 0$

$$\lim_{\substack{\alpha\to\frac{\sqrt{2}}{2}\\ >}} I(\alpha)=\lim_{\substack{\beta\to 0\\ >}}\sqrt{2}\ln\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\left[2(\beta+1)\ln(\beta+1)-\beta\ln\beta-(\beta+2)\ln(\beta+2)+\ln 3\right]$$

$$=\sqrt{2}\ln\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}(2\ln 2-\ln 3)$$

$$=3\sqrt{2}\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\lim_{\substack{\alpha\to\frac{\sqrt{2}}{2}\\ >}} I(\alpha)=3\sqrt{2}\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}$$

d/ Calculons l'aire A du domaine plan défini par la courbe (C) et les droites d'équations : $y=x+1-\ln\sqrt{2}$, $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\sqrt{2}$

$$A=\lim_{\substack{\alpha\to\frac{\sqrt{2}}{2}\\ >}} A(\alpha)=\frac{1}{2}\lim_{\substack{\alpha\to\frac{\sqrt{2}}{2}\\ >}} I(\alpha)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \text{ unités d'aire}$$

En cm^2 on a :

$$A=4\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=6\sqrt{2}\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

La valeur approchée de A est : $1,22cm^2$

$$\boxed{A\simeq 1,22cm^2}$$

PROBLEME N°8

Pour tout nombre réel α non nul, on désigne par f_α la fonction numérique définie par : $f_\alpha(x)=\frac{\ln(\alpha x)}{x}$ et (C_α) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

PARTIE A

1°/ – Etudions les variations de f_1

$f_1(x)=\frac{\ln x}{x}$ $\quad D_{f_1}=]0;+\infty[$

limites de f_1 aux bornes de D_{f_1}

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f_1(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x}\ln x$$

$$=-\infty \text{ car } \begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x}=+\infty\\ \text{et}\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln x=-\infty\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f_1(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=0$

Dérivée

$x\mapsto\frac{1}{x}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc continue et dérivable sur $]0;+\infty[$

$x\mapsto\ln x$ est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$

f_1 est donc continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ car elle le produit de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

et $\forall x>0$, $f_1'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}$

$$\forall x>0,\ f_1'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$\forall x>0$, $x^2>0$; $f_1'(x)$ a donc le signe de $1-\ln x$.

$f_1'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow x=e$

Signe de $f_1'(x)$

x	0		e		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

Sens de variation de f_1

D'après le tableau de signe de $f_1'(x)$, f_1 est strictement croissante sur $]0;e[$, décroissante sur $]e;+\infty[$ et admet un maximum local au point e.

$f_1(e)=\frac{1}{e}$

Tableau de variation de f_1

x	0		e		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

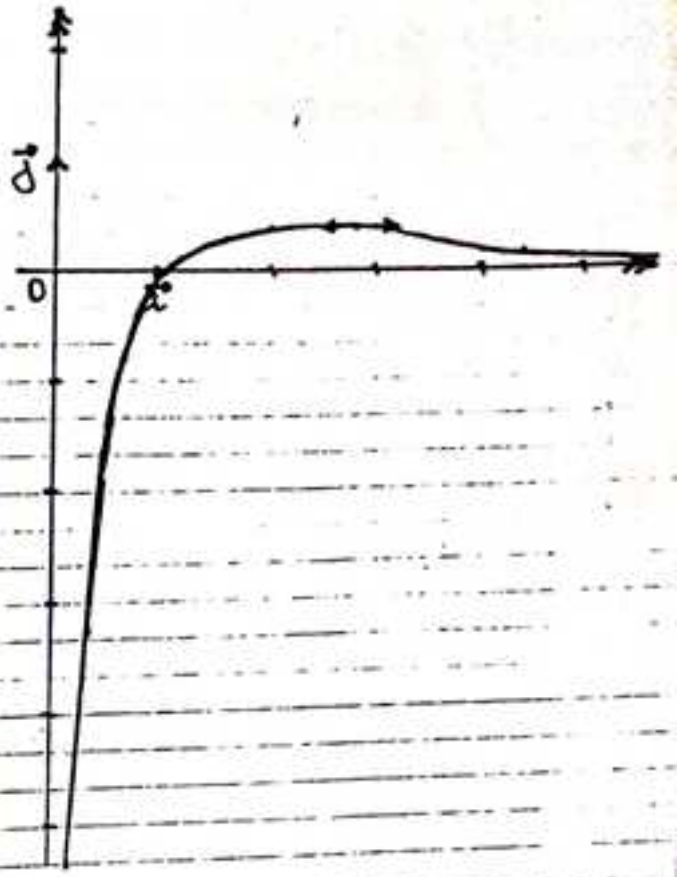
Branches infinies

$\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)=-\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=0$

(C_1) possède deux asymptotes dont une verticale d'équation $x=0$ et une horizontale d'équation $y=0$

Construction de la courbe (C_1)

(Voir figure ci-contre)



2/ Etudions f_α pour $\alpha\neq 0$

1er cas $\alpha<0$

$D_{f_\alpha}=\{x\in\mathbb{R} / x\neq 0 \text{ et } \alpha x>0\}$

$\alpha x>0 \Leftrightarrow x<0$ car $\alpha<0$

$\boxed{D_{f_\alpha}=]-\infty;0[}$

limites de f_α aux bornes D_{f_α}.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_\alpha(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(\alpha x)}{x}$

$=\lim\limits_{X\to+\infty}\alpha\frac{\ln X}{X}$, $X=\alpha x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_\alpha(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f_\alpha(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\alpha}{x}\ln x$, $X=\alpha x$

$=+\infty$ car $\begin{cases}\alpha<0\\ \lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty\end{cases}$

$\lim_{x\to-\infty} f_\alpha(x) = 0$	$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<}} f_\alpha(x) = +\infty$

Dérivée

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc continue et dérivable sur $]-\infty;0[$

$x \mapsto \alpha x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue et dérivable sur $]-\infty;0[$ et $\forall x \in]-\infty;0[$, $\alpha x > 0$

$x \mapsto \ln x$ est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$; $x \mapsto \ln(\alpha x)$ est donc continue et dérivable sur $]-\infty;0[$

f_α étant le produit deux fonctions dérivables sur $]-\infty;0[$ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $\forall x<0$,

$$f'_\alpha(x) = \frac{\frac{\alpha}{\alpha x}x - \ln(\alpha x)}{x^2} = \frac{1-\ln(\alpha x)}{x^2}$$

$$\boxed{\forall x \in]-\infty;0[,\ f'_\alpha(x) = \frac{1-\ln(\alpha x)}{x^2}}$$

Signe de $f'_\alpha(x)$

$\forall x<0$, $x^2>0$; $f'_\alpha(x)$ a le signe de: $1-\ln(\alpha x)$.

$f'_\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow 1-\ln(\alpha x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{e}{\alpha}$

x	$-\infty$		$\frac{e}{\alpha}$		0
$f'_\alpha(x)$		$-$	0	$+$	‖

$\frac{e}{\alpha} < x < 0 \Rightarrow 0 < \alpha x < e \Rightarrow \ln(\alpha x) < 1$

$\Rightarrow 1-\ln(\alpha x) > 0$.

Sens de variation de f_α

f_α est décroissante sur $]-\infty;\frac{e}{\alpha}[$, croissante sur $]\frac{e}{\alpha};0[$ et admet un minimum en $\frac{e}{\alpha}$; $f_\alpha(\frac{e}{\alpha}) = \frac{\alpha}{e}$.

Tableau de variation de f_α

x	$-\infty$		$\frac{e}{\alpha}$		0
$f'_\alpha(x)$		$-$	0	$+$	‖
$f_\alpha(x)$	0	↘	$\frac{\alpha}{e}$	↗	$+\infty$

2e cas $\alpha > 0$

$$\mathcal{D}f_\alpha = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } \alpha x > 0\}$$

$$\boxed{\mathcal{D}f_\alpha =]0;+\infty[}$$

Limites de f_α aux bornes de $\mathcal{D}f_\alpha$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>}} f_\alpha(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>}} \frac{\ln(\alpha x)}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>}} \frac{\alpha}{X} \ln X, \quad X = \alpha x$$

$= -\infty$ car $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>}} \frac{\alpha}{x} = +\infty$ et $\lim_{\substack{X\to 0\\ X>}} \ln X = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = \lim_{X\to+\infty} \alpha \frac{\ln X}{X}, \quad X = \alpha x$$

$$= 0$$

$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>}} f_\alpha(x) = -\infty$	$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 0$

Dérivée

On démontre comme dans le 1er cas que f_α est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.

$\forall x>0$, $f'_\alpha(x) = \frac{1-\ln(\alpha x)}{x^2}$

$f'_\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(\alpha x) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = e \Leftrightarrow x = \frac{e}{\alpha}$

$\forall x > 0$, $x^2 > 0$; $f'_\alpha(x)$ a donc le signe de $1 - \ln(\alpha x)$.

Signe de $f'_\alpha(x)$

x	0		$\frac{e}{\alpha}$		$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	‖	$+$	0	$-$	

D'après le tableau qui précède, f_α est strictement croissante sur $]0; \frac{e}{\alpha}[$, strictement décroissante sur $]\frac{e}{\alpha}; +\infty[$ et admet un minimum au point $\frac{e}{\alpha}$

$f_\alpha\left(\frac{e}{\alpha}\right) = \frac{\alpha}{e}$

Tableau de variation de f_α

x	0		$\frac{e}{\alpha}$		$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f_\alpha(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{\alpha}{e}$	↘	0

- Déterminons les coordonnées du point d'intersection de (C_α) avec l'axe (ox)

Soit $M(x;y)$. $M \in (C_\alpha) \cap (ox)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = f_\alpha(x) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_\alpha(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$f_\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha x) = 0 \Leftrightarrow \alpha x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\alpha}$

Le point d'intersection de C_α avec (ox) est $I\left(\frac{1}{\alpha}; 0\right)$

3./ Dans cette question on suppose $\alpha > 0$

a./ Déterminons une primitive F_α de f_α sur $]0; +\infty[$

$f_\alpha(x) = \frac{1}{x}\ln(\alpha x) = u'(x).u(x)$ avec $u(x) = \ln(\alpha x)$

d'où $\boxed{F_\alpha(x) = \frac{1}{2}[\ln(\alpha x)]^2}$

b./ Pour $a \in]0; \frac{e}{\alpha}[$ on pose:

$A_\alpha(a) = F_\alpha\left(\frac{e}{\alpha}\right) - F_\alpha(a)$.

Etudions la limite en 0 de $A_\alpha(a)$ puis celle de $aA_\alpha(a)$

$A_\alpha(a) = F_\alpha\left(\frac{e}{\alpha}\right) - F_\alpha(a)$

$= \frac{1}{2}\left[1 - (\ln \alpha a)^2\right]$

$\lim\limits_{a \to 0} A_\alpha(a) = \lim\limits_{a \to 0} \frac{1}{2}\left[1 - (\ln \alpha a)^2\right]$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2}\left[1 - (\ln x)^2\right]$, $X = \alpha a$

$= -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty \end{cases}$

$\boxed{\lim\limits_{a \to 0} A_\alpha(a) = -\infty}$

$\lim\limits_{a \to 0} aA_\alpha(a) = \lim\limits_{a \to 0} \frac{1}{2}a\left[1 - (\ln \alpha a)^2\right]$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2\alpha}x\left[1 - (\ln x)^2\right]$, $x = \alpha a$

$= \lim\limits_{y \to -\infty} \frac{1}{2\alpha}(1 - y^2)e^y$, $y = \ln x$

$= \lim\limits_{t \to -\infty} \frac{1}{2\alpha}(1 - 4t^2)e^{2t}$, $t = \frac{y}{2}$

$= \lim\limits_{t \to -\infty} \frac{1}{2\alpha}\left[e^{2t} - 4(te^t)^2\right]$

$\lim_{t\to-\infty} \frac{1}{2\alpha}\left(e^{2t} - 4(te^t)^2\right) = 0$ car $\lim_{t\to-\infty} e^{2t} = 0$ et $\lim_{t\to-\infty} te^t = 0$

$\boxed{\lim_{a\to 0} A_\alpha(a) = 0}$

PARTIE B

1/ Soit a un réel strictement positif.

Déterminons suivant les valeurs de a, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x réel : $a^x = x$ (E).

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\ln a = \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln x}{x} = \ln a \\ x>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = \ln a \\ x>0 \end{cases}$

Les solutions de (E) sont donc les abscisses des points d'intersection de la courbe (C_1) avec la droite d'équation $y=\ln a$.

Graphiquement, on obtient les résultats présentés dans le tableau ci-dessous.

a	0		1		$e^{1/e}$
nbre de solutions de (E).	1	1	2	1	0

2/ Démontrons, en utilisant les variations de f_1, qu'il existe un couple (b,c) d'entiers naturels que nous déterminerons tels que : $0<b<c$ et $b^c = c^b$

$b^c = c^b \Leftrightarrow c\ln b = b\ln c$

$\Leftrightarrow \frac{\ln b}{b} = \frac{\ln c}{c} \Leftrightarrow f_1(b) = f_1(c)$

or : $f_1(2) = \frac{\ln 2}{2}$ et $f_1(4) = \frac{2\ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2}$

$f_1(2) = f_1(4)$. $\Leftrightarrow b=2 \quad c=4$

$\boxed{b=2 \quad c=4}$

PARTIE C

1/ Soit t un réel strictement positif

a/ Equation de la tangente (T_α) à la courbe (C_α) au point d'abscisse t

$(T_\alpha) : y = f'_\alpha(t)(x-t) + f_\alpha(t)$

$= \frac{1-\ln(\alpha t)}{t^2}(x-t) + \frac{\ln \alpha t}{t}$

$\boxed{(T_\alpha) : y = \frac{1-\ln(\alpha t)}{t^2}x - \frac{1-2\ln(\alpha t)}{t}}$

b/ Démontrons que lorsque α varie, t restant fixe, les droites (T_α) passent par un point fixe I_t que nous déterminerons.

$y = \frac{1-\ln(\alpha t)}{t^2}x - \frac{1-2\ln(\alpha t)}{t}$

$\Leftrightarrow t^2 y = x - t + (2t-x)\ln(\alpha t)$

$\Leftrightarrow t^2 y - x + t = (2t-x)\ln(\alpha t)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t-x=0 \\ t^2y - x + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$.

Lorsque α varie, t restant fixe, toutes les droites (T_α) passent le point fixe

$I_t\left(2t, \frac{1}{t}\right)$

Déterminons l'ensemble décrit par les points I_t lorsque t parcourt $]0;+\infty[$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = \frac{1}{t} \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ x > 0 \end{cases}$$

Lorsque t parcourt $]0;+\infty[$, I_t décrit l'hyperbole d'équation $\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ x > 0 \end{cases}$

2/ Pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$ on note M et M' les points de (C_2) et (C_3) ayant pour abscisse x et l'on désigne par G le barycentre du système $\{(M,1);(M',-2)\}$

Démontrons que lorsque x décrit l'intervalle $]0;+\infty[$, le point G décrit une des courbes (C_α) que nous déterminerons

$G = \text{bary}\{(M,1);(M',-2)\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x - 2x}{-1} = x \\ y_G = \frac{f_2(x) - 2f_3(x)}{-1} \end{cases}$$

$$y_G = 2f_3(x) - f_2(x)$$

$$= 2\frac{\ln 3x}{x} - \frac{\ln 2x}{x} = \frac{\ln(3x)^2 - \ln 2x}{x}$$

$$= \frac{1}{x}\left(\ln 9x^2 - \ln 2x\right) = \frac{\ln \frac{9}{2}x}{x}$$

$$y_G = f_{9/2}(x_G) \Leftrightarrow G \in (C_{9/2})$$

Lorsque x décrit $]0;+\infty[$, G décrit la courbe $(C_{9/2})$

3/ Soient α et α' deux réels strictement positifs et λ un réel différent de 1

Pour tout $x > 0$ on note:

$M(x; f_\alpha(x))$ $M'(x; f_{\alpha'}(x))$

$G = \text{bary}\{(M,1);(M',-\lambda)\}$

Démontrons que lorsque x parcourt $\mathbb{R}_*^+$, le point G décrit une des courbes (C_α) que nous préciserons

$G = \text{bary}\{(M,1);(M',-\lambda)\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x - \lambda x}{1-\lambda} = x \\ y_G = \frac{f_\alpha(x) - \lambda f_{\alpha'}(x)}{1-\lambda} \end{cases}$$

$$y_G = \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{\ln \alpha x}{x} - \lambda \frac{\ln \alpha' x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{1-\lambda}\left[\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\alpha x}{\alpha'^\lambda x^\lambda}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{1-\lambda}\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha'^\lambda} \cdot x^{1-\lambda}\right)$$

$$y_G = \frac{1}{x}\ln\left[\left(\frac{\alpha}{\alpha'^\lambda}\right)^{1-\lambda} x\right]$$

$$\Leftrightarrow G \in C_\beta \text{ avec } \beta = \left(\frac{\alpha}{\alpha'^\lambda}\right)^{1-\lambda}$$

Lorsque x parcourt $]0;+\infty[$, le point G décrit la courbe (C_β) avec:

$$\beta = \left(\frac{\alpha}{\alpha'^\lambda}\right)^{1-\lambda}$$

PROBLEME N°9

Pour tout entier relatif non nul n, on considère la fonction f_n d'une variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

1-/ Précisons l'ensemble de définition de la fonction f_n

$D_{f_n} = \mathbb{R}^* \cup \{0\} = \mathbb{R}$

$\boxed{D_{f_n} = \mathbb{R}}$

b-/ Valeurs de n pour lesquelles f_n est continue en tout point de $\mathbb{R}$

$x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, de même que $x \mapsto \ln|x|$; f_n est donc continue sur $\mathbb{R}^*$.

Continuité en 0

$$\lim_{x \to 0} f_n(x) = \begin{cases} \infty \text{ si } n \leq 0 \\ 0 \text{ si } n > 0 \end{cases}$$

Conclusion

$\boxed{f_n \text{ est continue en tout point de } \mathbb{R} \text{ ssi } n \in \mathbb{N}^*}$

2-/ Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle (C_n) la courbe représentative de la fonct° f_n

a-/ Etudions les éléments de symétrie de (C_n) suivant la parité de n

$D_{f_n} = \mathbb{R}$; $\forall x \in D_{f_n}$, $-x \in D_{f_n}$

$f_n(-x) = (-x)^n \ln|-x|$

$= (-1)^n x^n \ln|x|$

$= \begin{cases} x^n \ln|x| & \text{si } n \text{ pair} \\ -x^n \ln|x| & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$

- Pour n pair, $f_n(-x) = f_n(x)$; f_n est paire et la courbe (C_n) admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- Pour n impair, $f_n(-x) = -f_n(x)$; f_n est impaire et la courbe (C_n) admet le point O comme centre de symétrie.

b-/ Montrons que toutes les courbes (C_n) passent par des points fixes O, A et B avec $B = S_O(A)$

$f_n(0) = 0$; $f_n(1) = 0$; $f_n(-1) = 0$

$\boxed{(C_n) \text{ passent par : } O(0;0),\ A(1;0),\ B(-1;0)}$

c-/ Valeurs de n pour lesquelles f_n est dérivable en $x = 0$

On sait que f_n n'est pas continue en 0 pour $n \leq 0$; f_n n'est donc pas dérivable en 0 pour $n \leq 0$

Pour $n > 0$, f_n est continue en 0 et $f_n(0) = 0$

Dérivabilité de f_n en 0 pour $n > 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^{n-1} \ln|x|$$

$$= \begin{cases} -\infty \text{ pour } n = 1 \\ 0 \text{ pour } n \geq 2 \end{cases}$$

Conclusion

f_n est dérivable en 0 pour $n \geq 2$

d/ - Calculons la dérivée de f_n pour $x \neq 0$

$\forall x \neq 0$, $f_n'(x) = nx^{n-1}\ln|x| + \frac{1}{x}x^n$

$= x^{n-1}(1 + n\ln|x|)$

$\forall x \neq 0$, $f_n'(x) = (1 + n\ln|x|)x^{n-1}$

- Montrons que toutes les courbes (C_n) admettent la même tangente en A

$f_n'(1) = 1$ $f_n(1) = 0$

Toutes les courbes (C_n) admettent en point A la même tangente d'équat: $y = x - 1$

3/ Etudions les variations des fonctions f_{-3}, f_1 et f_2.

* Etude des variations de f_{-3}

$f_{-3}(x) = \frac{\ln|x|}{x^3}$ pour $x \neq 0$; $f_{-3}(0) = 0$

$D_{f_{-3}} = \mathbb{R}$.

$\lim_{x \to -\infty} f_{-3}(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln|x|}{x^3}$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x)}{x^3}$

$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{X^2} \cdot \frac{\ln X}{X}$, $X = -x$

$= -0 \cdot 0 = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f_{-3}(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f_{-3}(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln|x|}{x^3}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}\frac{\ln x}{x} = 0 \times 0 = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f_{-3}(x) = 0$

$\lim_{x \to 0} f_{-3}(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3}\ln|x|$

$= \lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^3}\ln x$, $x = -x$

$= +\infty$ car $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} = +\infty$ et $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$

$\lim_{x \to 0} f_{-3}(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0} f_{-3}(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3}\ln|x|$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3}\ln x$

$= -\infty$ car $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} = +\infty$

$\lim_{x \to 0} f_{-3}(x) = -\infty$

Dérivée

$x \mapsto \frac{1}{x^3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de même que $x \mapsto \ln|x|$, f_{-3} est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0$, $f_{-3}'(x) = \frac{1 - 3\ln|x|}{x^4}$

$f_{-3}'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 3\ln|x| = 0$

$\Leftrightarrow |x| = e^{1/3} \Rightarrow \begin{cases} x = -e^{1/3} \\ \text{ou} \\ x = e^{1/3} \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x^4 > 0$.

$f_{-3}'(x)$ a donc le signe de $1 - 3\ln|x|$

Signe de $f_{-3}'(x)$

x	$-\infty$		$-e^{1/3}$		0		$e^{1/3}$		$+\infty$
$f_{-3}'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

Sens de variation de f_{-3}

$\forall x \in]-\infty; -e^{1/3}[\cup]e^{1/3}; +\infty[$, $f_{-3}'(x) < 0$

f_{-3} est donc strictement décroissante sur

chacun des intervalles $]-\infty;-e^{1/3}[$ et $]e^{1/3};+\infty[$.

• $\forall x \in]-e^{1/3}; e^{1/3}[-\{0\}$, $f'_{-3}(x) > 0$.

f_{-3} est donc strictement croissante sur $]-e^{1/3};0[$ et sur $]0;e^{1/3}[$

• f_{-3} admet minimum local en $-e^{1/3}$ et un maximum en $e^{1/3}$.

$f_{-3}(-e^{1/3}) = -\frac{1}{3e}$; $f_{-3}(e^{1/3}) = \frac{1}{3e}$.

Tableau de variation de f_{-3}

x	$-\infty$		$-e^{1/3}$		0		$e^{1/3}$		$+\infty$
$f'_{-3}(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f_{-3}(x)$	0	↘	$-\frac{1}{3e}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{3e}$	↘	0

Remarque: f_{-3} est impaire. On aurait pu étudier f_{-3} sur $]0;+\infty[$ et compléter dans la symétrie par rapport à 0.

* Etude des variations de f_1

$f_1(x) = x\ln|x|$ pour $x \neq 0$; $f_1(0) = 0$

$\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}$.

Limites de f_1 aux bornes de $\mathcal{D}_{f_1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\ln|x|$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} -X\ln X$, $X = -x$

$= -\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln|x|$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x$

$= +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0_<} f_1(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to0_>} f_1(x) = 0$

Dérivée

On sait pour $n=1$, f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0$, $f'_1(x) = 1 + \ln|x|$

$f'_1(x) = 0 \Leftrightarrow \ln|x| = -1$

$\Leftrightarrow |x| = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{e}$ ou $x = \frac{1}{e}$.

Signe de $f'_1(x)$.

x	$-\infty$		$-1/e$		0		$1/e$		$+\infty$
$f'_1(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Sens de variation de f_1

• $\forall x \in]-\infty;-1/e[\cup]-1/e;+\infty[$, $f'_1(x) > 0$

f_1 est donc strictement croissante sur $]-\infty;-1/e[$ et sur $]-1/e;+\infty[$

• $\forall x \in]-1/e;1/e[-\{0\}$, $f'_1(x) < 0$; f_1 est donc strictement décroissante sur $]-1/e;0[$ et sur $]0;1/e[$

• f_1 admet un maximum local en $-\frac{1}{e}$ et un minimum local en $\frac{1}{e}$

$f_1(-1/e) = \frac{1}{e}$; $f_1(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$.

Tableau de variation de f_1

x	$-\infty$		$-1/e$		0		$1/e$		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$-\infty$	↗	$1/e$	↘	0	↘	$-1/e$	↗	$+\infty$

Remarque: Comme dans le cas de f_{-3} on pourrait remarquer que f_1 est impaire, l'étudier sur $]0;+\infty[$ et compléter dans la symétrie par rapport à 0.

* Etude des variations de f_2

$f_2(x) = x^2 \ln|x|$ pour $x \neq 0$; $f_2(0) = 0$

$\mathcal{D}f_2 = \mathbb{R}$

Limites de f_2 aux bornes de $\mathcal{D}f_2$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_2(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} X^2 \ln X$, $X = |x|$

$= +\infty \times +\infty = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = \lim\limits_{X\to 0} X \cdot X\ln X$

$= 0 \times 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 0$

Dérivée.

D'après 2-c/ f_2 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f_2'(x) = x(-1 + 2\ln|x|)$

$f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -(\sqrt{e})^{-1}$ $x = 0$ ou $x = (\sqrt{e})^{-1}$

$x = -\frac{1}{\sqrt{e}}$, $x = 0$ ou $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Signe de $f_2'(x)$

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{e}$		0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Sens de variation de f_2

D'après le tableau ci-dessus, f_2 est strictement décroissante sur $]-\infty, -1/\sqrt{e}[$ et sur $]0; 1/\sqrt{e}[$; strictement croissante sur $]-1/\sqrt{e}, 0[$ et sur $]1/\sqrt{e}; +\infty[$; f_2 admet un minimum local en $-\frac{1}{\sqrt{e}}$ et $\frac{1}{\sqrt{e}}$ et un maximum local en 0

$f_2\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$; $f_2(0) = 0$; $f_2\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$

Tableau de variation de f_2

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{e}$		0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗	0	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗	$+\infty$

Remarque: Ici, on pourrait remarquer que f_2 est paire, l'étudier sur $[0;+\infty[$ et compléter dans la symétrie d'axe (oy)

Construction des courbes C_{-3}, G et C_2

Etude des branches infinies

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to 0} f_{-3}(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0} f_3(x) = -\infty$

La courbe (C_{-3}) possède deux asymptotes : une verticale d'équation $x=0$ et une horizontale d'équation $y=0$

$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \ln|x|$

$= +\infty$ car $\lim_{x\to\pm\infty} |x| = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

(C_1) possède une branche infinie de direction (oy).

On démontre comme précédemment que (C_2) possède une branche infinie de direction (oy)

Construction des courbes C_{-3}, C_1 et C_2

(Voir page 148)

1/ Dans la suite du problème, on ne considère que la restriction des fonct: f_n à l'intervalle $[0;+\infty[$

Soit M_n le point de la courbe (C_n) de coordonnées (x_n, y_n) où x_n est la valeur strictement positive, pour laquelle f_n présente un extrémum.

Montrons que tous les points M_n sont sur une courbe (Γ) dont nous préciserons l'équation

x_n est la solution de l'équation $f_n'(x) = 0$.

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow (1+n\ln|x|)\,x^{n-1} = 0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x = -e^{-1/n}$ ou $x = e^{-1/n}$

$x_n > 0 \Leftrightarrow x_n = e^{-1/n}$

$y_n = f_n(x_n) = x_n^n \ln|x_n|$

$= e^{-1}\cdot\left(\frac{-1}{n}\right) = -\frac{1}{ne}$

$$M_n\left(e^{-1/n}; -\frac{1}{ne}\right)$$

Equation de la courbe (Γ)

$$\begin{cases} x = e^{-1/n} \\ y = -\frac{1}{ne} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -\frac{1}{\ln x}, & x>0 \\ y = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{\ln x}\right)e} = \frac{\ln x}{e} \end{cases}$$

(Γ) a pour équation: $\begin{cases} x>0 \\ y = \frac{\ln x}{e} \end{cases}$

Tous les points M_n sont sur une courbe (Γ) d'équation $\begin{cases} y = \frac{\ln x}{e} \\ x>0 \end{cases}$

PARTIE II

1/ Soit α un nombre réel strictement positif.

Calculons $I_n(\alpha) = \int_1^\alpha f_n(x)\,dx$

$I_n(\alpha) = \int_1^\alpha f_n(x)\,dx = \int_1^\alpha x^n \ln|x|\,dx$

Posons $U(x) = \ln|x| \Rightarrow U'(x) = \frac{1}{x}$

$V'(x) = x^n \Rightarrow V(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$I_n(\alpha) = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln|x|\right]_1^\alpha - \frac{1}{n+1}\int_1^x x^n\,dx$

$= \frac{1}{n+1}\alpha^{n+1}\ln\alpha - \frac{1}{(n+1)^2}\left[x^{n+1}\right]_1^\alpha$

$$I_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\left(\ln\alpha - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)^2}$$

2/ Dans cette question $n = 2$

a/ calculons $I_2(\alpha) = \int_1^\alpha f_2(x)\,dx$.

$I_2(\alpha) = \frac{1}{3}\alpha^3\left(\ln\alpha - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9}$

$$I_2(\alpha) = \frac{1}{3}\alpha^3\ln\alpha - \frac{1}{9}(\alpha^3 - 1)$$

Limite de $I_2(\alpha)$ lorsque α tend vers 0

$\lim_{\alpha\to 0} I_2(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{3}\alpha^2.\alpha\ln\alpha - \frac{1}{9}(\alpha^3 - 1)$

$= \frac{1}{9}$ car $\lim_{\alpha\to 0} \alpha\ln\alpha = 0$

$$\lim_{\alpha\to 0} I_2(\alpha) = \frac{1}{9}$$

Interprétation géométrique de la limite trouvée

La limite trouvée est l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équations $x = 0$; $x = 1$, la courbe (C_2) et l'axe des abscisses

b/ Déterminons un nombre réel β $(\beta > 0)$ tel que la valeur moyenne de f_2 sur l'intervalle $[0;\beta]$ soit nulle

La valeur moyenne de f_2 sur $[0;\beta]$ est: $\frac{1}{\beta}\int_0^\beta f_2(x)\,dx = \frac{1}{3}\beta^2\left(\ln\beta - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9\beta} - \frac{1}{9\beta}$

$= \frac{1}{3}\beta^2\left(\ln\beta - \frac{1}{3}\right)$

La valeur moyenne de f_2 sur $[0;\beta]$ est nulle si $\ln\beta = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \beta = e^{1/3}$

$$\beta = e^{1/3} = \sqrt[3]{e}$$

Point de (C_{-3}) qui a pour abscisse β.

$f_{-3}(\beta) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{e} = \frac{1}{3e}$

Le point de (C_{-3}) qui a pour abscisse β est : $H\left(e^{1/3}; \frac{1}{3e}\right)$

PROBLEME N° 10

Soit la fonction numérique f_a de la variable réelle x définie par:

$f_a(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)$. On désigne par (C_a) la courbe représentative de f_a dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm

PARTIE A

1/ Etude de la parité de f_a

$D_{f_a} = \left\{x \in \mathbb{R} / a - x \neq 0 \text{ et } \frac{a+x}{a-x} > 0\right\}$

$= \begin{cases}]-a; a[& \text{si } a > 0 \\ ]a; -a[& \text{si } a < 0 \end{cases}$

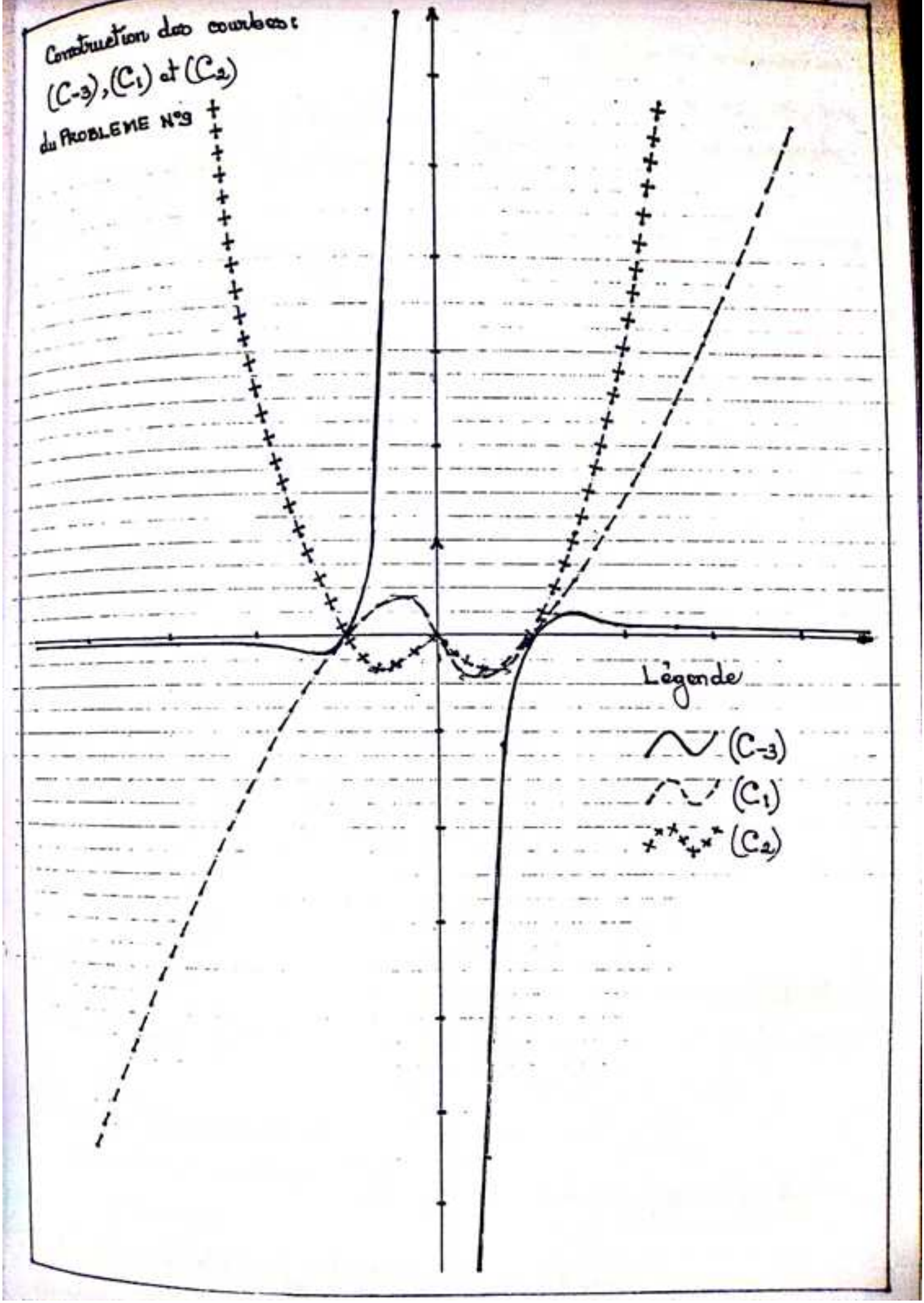
$D_{f_a} =]-|a|; |a|[$ si $a \neq 0$

$\forall x \in D_{f_a}, -x \in D_{f_a}$

$f_a(-x) = \ln\left(\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right) = -\ln\left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)$

$\forall x \in D_{f_a}, f_a(-x) = -f_a(x)$

Construction des courbes :
(C_{-3}), (C_1) et (C_2)
du PROBLEME N°3



la fonction f_a est impaire.

2-/ Démontrons que la courbe (C_a) possède deux asymptotes dont on donnera les équations :

1er cas $a<0$: $D_{f_a} =]a;-a[$

$\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f_a(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to -a \\ <}} f_a(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to -a \\ <}} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$

2e cas $a>0$: $D_{f_a} =]-a;a[$

$\lim\limits_{\substack{x\to -a \\ >}} f_a(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ <}} f_a(x) = +\infty$

La courbe (C_a) possède deux asymptotes verticales d'équations $x=-a$ et $x=a$

3-/ Etudions selon les valeurs de a, le sens de variation de f_a

On démontre aisément que f_a est dérivable sur D_{f_a} et $\forall x \in D_{f_a}$:

$f'_a(x) = \frac{a}{(a-x)(a+x)}$

$\forall x \in D_{f_a}$, $(a-x)(a+x) > 0$

1er cas $a<0$

$\forall x \in D_{f_a}$, $f'_a(x) < 0$; f_a est donc strictement décroissante sur D_{f_a}

2e cas $a>0$

$\forall x \in D_{f_a}$, $f'_a(x) > 0$; f_a est donc strictement croissante sur D_{f_a}

4/a-/ Démontrons que f_a est une bijection de D_{f_a} sur un ensemble que nous préciserons

$\forall a \in \mathbb{R}^*$, f_a est continue, monotone sur D_{f_a} avec $f_a[D_{f_a}] = \mathbb{R}$.

f_a est donc une bijection de D_{f_a} sur $\mathbb{R}$

b/ Explicitons $f_a^{-1}(x)$

Posons $y = f_a(x)$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) \Leftrightarrow 2y = \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$

$\Leftrightarrow e^{2y} = \frac{a+x}{a-x} \Leftrightarrow x = a\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

On a donc :

$$f_a^{-1}(x) = a\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

On désigne par (Γ_a) la courbe représentative de f_a^{-1} relativement au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

5-/ a/ Démontrons que l'affinité orthogonale d'axe $(O,\vec{j})$ et de rapport a transforme (C_1) en C_a.

$f_a(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)$

$= \ln\left(\sqrt{\frac{1+x/a}{1-x/a}}\right) = f_1\left(\frac{x}{a}\right)$

$f_a(x) = f_1\left(\frac{x}{a}\right)$

On en déduit que l'affinité orthogonale d'axe $(O,\vec{y})$ et de rapport a transforme (G) en (C_a).

b/ Soit a et a' deux réels non nuls et distincts.

Déterminons une application affine transformant (C_a) en $(C_{a'})$

Soit g l'affinité orthogonale d'axe $(O,\vec{y})$ et de rapport a; g' l'affinité orthogonale d'axe $(O,\vec{y})$ et de rapport a'; g^{-1} est l'affinité orthogonale d'axe $(O,\vec{y})$ et de rapport $\frac{1}{a}$.

$C_a = g(G) \Leftrightarrow G = g^{-1}(C_a)$

$C_{a'} = g'(G) \Leftrightarrow C_{a'} = g'[g^{-1}(C_a)]$

$= g' \circ g^{-1}(C_a)$

or $g' \circ g^{-1}$ est l'affinité d'axe $(O,\vec{y})$ et de rapport $a \times \frac{1}{a} = \frac{a'}{a}$.

L'affinité orthogonale d'axe $(O,\vec{y})$ de rapport $\frac{a'}{a}$ transforme (C_a) en $(C_{a'})$.

6/ Soit R la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, S la symétrie orthogonale d'axe $(O,\vec{i})$

a/ Déterminons une expression analytique de RoS.

On sait que l'écriture complexe de R est: $z' = -iz$; celle de S est: $z' = \bar{z}$ d'où l'écriture complexe de RoS est $z' = -i\bar{z}$

Posons $z = x+iy$ $z' = x'+iy'$

$\Leftrightarrow x'+iy' = -i(x-iy)$

$= -y-ix$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$

L'expression analytique de RoS est:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

Donnons une équation cartésienne de la transformation $RoS(\Gamma_a)$ de Γ_a par RoS.

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x' \\ x = -y' \end{cases}$$

$M(x;y) \in (\Gamma_a) \Leftrightarrow y = f_a^{-1}(x)$

$\Leftrightarrow -x' = f_a^{-1}(-y')$

$\Leftrightarrow -y' = f_a(-x')$

$\Leftrightarrow -y' = -f_a(x')$

$\Leftrightarrow y' = f_a(x)$

L'équation cartésienne de $RoS(\Gamma_a)$ est $y = f_a(x)$.

b/ Comparaison des équations cartésienne de (C_a) et $RoS(\Gamma_a)$

(C_a) et $RoS(\Gamma_a)$ ont la même équation cartésienne. $RoS(\Gamma_a) = C_a$

On remarque $R \circ S = S_0 \circ S(\Gamma_1)$.

si f est impaire et $\Gamma_a = S(\Gamma_1)(C_a)$

$R \circ S(\Gamma_a) = S_0 \circ S(\Gamma_1)(\Gamma_a) = S_0(C_a)$

$R \circ S(\Gamma_a) = C_a$. On pourrait donc prouver le résultat!

Dans la suite du problème on suppose $a = 1$

7/ Traçons (C_1), (Γ_1) ainsi que la tangente à (C_1) au point d'abscisse 0

(Voir page suivante)

PARTIE B

1/ Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}[$ par: $g(x) = f_1(\sin x)$

Démontrons que $g'(x) = \frac{1}{\cos x}$

$\forall x \in [0; \pi/2[$, $0 \leq \sin x \leq 1$

or $[0;1[\subset]-1;1[= D_{f_1}$.

g est donc continue et dérivable sur $[0; \pi/2[$ et $\forall x \in [0; \pi/2[$,

$g'(x) = f_1'(\sin x) \cdot \cos x$

$= \frac{1}{1-\sin^2 x} \cos x = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x$

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{\cos x}}$$

2/ Déterminons le réel c tel que:

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x} = \ln c$$

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x} = \Big[g(x) \Big]_0^{\pi/6}$$

$$= f_1\left(\sin \tfrac{\pi}{6}\right) - f_1(\sin 0)$$

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x} = f_1\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+1/2}{1-1/2}\right)$$

$$= \ln \sqrt{3}$$

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x} = \ln \sqrt{3} \quad \text{d'où:}$$

$$\boxed{c = \sqrt{3}}$$

3/ On considère l'intégrale:

$I_n = \int_0^{\pi/6} \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} dx$ où n est un entier naturel non nul.

On définit ainsi une suite numérique (I_n).

a/ Démontrons que la suite (I_n) est à termes positifs

$\forall x \in [0; \pi/6]$, $\begin{cases} \sin x \geqslant 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \int_0^{\pi/6} \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} dx \geqslant 0 \Leftrightarrow I_n \geqslant 0$

La suite (I_n) est donc à termes positifs

b/ Etudions le sens de variation de la suite (I_n)

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/6} \frac{(\sin x)^{2n+2}}{\cos x} - \int_0^{\pi/6} \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/6} \frac{(\sin^2 x - 1)(\sin x)^{2n}}{\cos x} dx$$

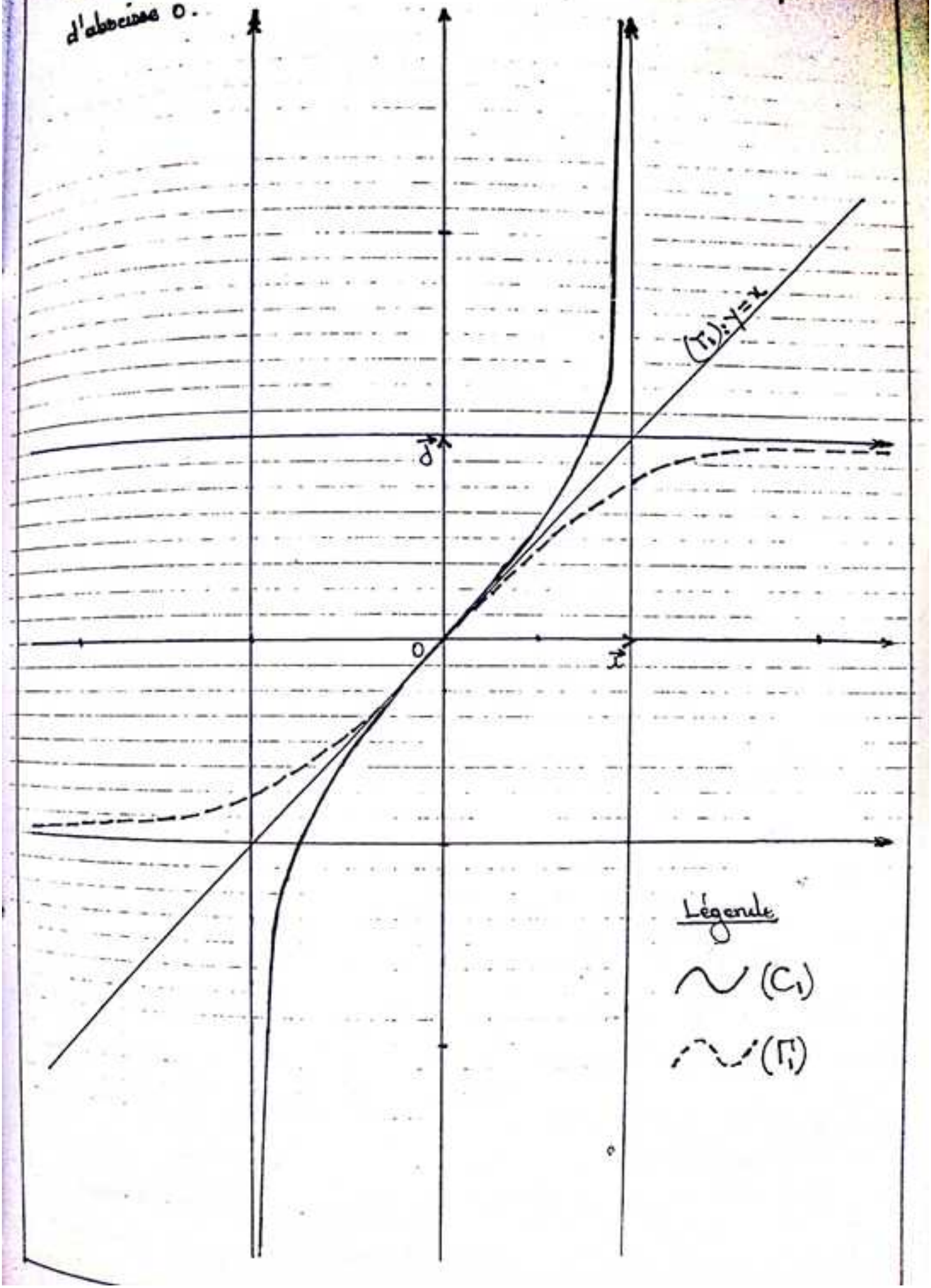
$$I_{n+1} - I_n = -\int_0^{\pi/6} \cos x (\sin x)^{2n} dx$$

$\forall x \in [0; \pi/6]$, $\cos x (\sin x)^{2n} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow -\int_0^{\pi/6} \cos x (\sin x)^{2n} dx \leqslant 0$

$\Leftrightarrow I_{n+1} - I_n \leqslant 0$

Construction des courbes (C_1), (Γ_1) et la tangente (T_1) à (C_1) au point d'abscisse 0.



La suite (I_n) est donc décroissante

c/ Démontrons que $I_n \leq \frac{\ln c}{4^n}$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 0 \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$ car $x \mapsto \sin x$ est croissante sur $[0; \pi/6]$

$\Leftrightarrow 0 \leq (\sin x)^{2n} \leq \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{4^n}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} \leq \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{\cos x}$ car $\cos x > 0$ sur $[0; \pi/6]$

$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\pi/6} \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} dx \leq \frac{1}{4^n} \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x}$

$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{\ln \sqrt{3}}{4^n}$

Conclusion:

$$\boxed{I_n \leq \frac{\ln c}{4^n} \text{ avec } c = \sqrt{3}.}$$

d/ Déduisons-en la limite de (I_n)

$$\begin{cases} 0 \leq I_n \leq \frac{\ln c}{4^n} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln c}{4^n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} I_n = 0$$

d'après le théorème des Gendarmes.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$$

PARTIE C

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction h_n définie sur l'intervalle $[0; \pi/2[$ par :

$$h_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{(\sin x)^{2p-1}}{2p-1}$$

1/ Donnons une expression simplifiée de la somme $S_n(x) = 1 + \sum_{p=1}^{n-1} (\sin x)^{2p}$.

$$S_n(x) = 1 + \sum_{p=1}^{n-1} (\sin x)^{2p}$$

$$= 1 + \sin^2 x \frac{1 - (\sin x)^{2n-2}}{1 - \sin^2 x}$$

$$= 1 + \frac{\sin^2 x - (\sin x)^{2n}}{1 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{1 - \sin^2 x}$$

$$S_n(x) = \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos^2 x}$$

$$\boxed{S_n(x) = \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos^2 x}}$$

2/ Démontrons que : $h_n'(x) = \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos x}$

$$h_n'(x) = \sum_{p=1}^{n} (\sin x)^{2p-2} \cos x$$

$$= \frac{\cos x}{\sin^2 x} \sum_{p=1}^{n} (\sin x)^{2p}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin^2 x} \cdot \left(\sin^2 x \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{1 - \sin^2 x} \right)$$

$$= \cos x \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos^2 x} = \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos x}$$

$$\boxed{h_n'(x) = \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos x}}$$

3/ Montrons que $h_n\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln \sqrt{3} - I_n$

$$\int_0^{\pi/6} h_n'(x) dx = \int_0^{\pi/6} \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos x} dx$$

$$\Leftrightarrow \left[h_n(x) \right]_0^{\pi/6} = \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x} - \int_0^{\pi/6} \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} dx$$

$\Leftrightarrow h_n\left(\frac{\pi}{6}\right) - h_n(0) = \ln \sqrt{3} - I_n$ or $h_n(0) = 0$

d'où $\boxed{h_n\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln \sqrt{3} - I_n}$

4/ Déduisons-en que la suite (U_n) définie par: $U_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p-1).2^{2p-1}}$ a une limite que l'on déterminera

$$U_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2p-1}}{2p-1} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{2p-1}}{2p-1}$$

$$= h_n\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$U_n = \ln\sqrt{3} - I_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\sqrt{3} - I_n = \ln\sqrt{3} - 0 = \ln\sqrt{3}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = \ln\sqrt{3}}$$

PROBLEME N°11

PARTIE A

1/ Vérifions que:

$$3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2+3x+2)$$

$$(x-1)(3x^2+3x+2) = 3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2$$

$$= 3x^3 - x - 2$$

Conclusion:

$$\boxed{3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2+3x+2)}$$

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par: $g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x$

2/ a/ Etudions le sens de variation de la fonction g

$D_g =]0;+\infty[$

$x \mapsto x^3 - x + 1$ et $x \mapsto 2\ln x$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et $\forall x > 0$,

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x}$$

$\forall x > 0$, $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

Posons $3x^2+3x+2 = 0$

$\Delta = 9 - 24 = -15 < 0$

$\forall x > 0$, $3x^2+3x+2 > 0$

$g'(x)$ a donc le signe de $x-1$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Signe de $g'(x)$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

b/ Déduisons de la question précédente le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

$g(1) = 1 > 0$

D'après ce qui précède, g admet un minimum au point 1, ce minimum est $g(1) = 1 > 0$

Conclusion

$$\boxed{\forall x > 0,\ g(x) > 0}$$

3/ On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par:

$$f(x) = x + 1 + \frac{x + \ln x}{x^2}$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan (unité graphique 2cm)

a/ Déterminons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

$\lim_{x>0} f(x) = \lim_{x>0} x+1+\frac{x+\ln x}{x^2}$

$= \lim_{x>0} x+1+\frac{1}{x^2}(x+\ln x)$

$= -\infty$ car $\lim_{x>0} x+1 = 1$, $\lim_{x>0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x>0} x+\ln x = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x+1+\frac{x+\ln x}{x^2}$

$= \lim_{x\to+\infty} x+1+\frac{1}{x}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)$

$= +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x>0} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b/ Justifions que les droites (D) et (Δ) d'équations respectives: $x=0$ et $y=x+1$ sont asymptotes à la courbe (C)

$\lim_{x>0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ la droite (D) d'équation $x=0$ est asymptote verticale à la courbe (C).

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(x+1)] = 0 \Leftrightarrow$ la droite (Δ) d'équation $y=x+1$ est asymptote oblique à la courbe (C).

Conclusion

Les droites (D): $x=0$ et (Δ): $y=x+1$ sont respectivement asymptote verticale et oblique à la courbe (C)

4-/ a/ Montrons que la fonction h telle que: $h(x) = x+\ln x$ est strictement croissante et prend des valeurs positives et négatives

$D_h =]0;+\infty[$

$\lim_{x>0} h(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} x+\ln x = +\infty$

$\forall x>0$, $h'(x) = 1+\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

$\forall x>0$, $h'(x)>0$. h est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$

D'après ce qui précède, h définit une bijection de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$; h(x) prend donc des valeurs positives et négatives

b-/ Déduisons que (Δ) coupe (C) en un point unique d'abscisse α vérifiant

$\alpha+\ln\alpha = 0$

D'après ce qui précède l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique

Soit M(x;y) un point du plan

$M \in (C)\cap(\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1+\frac{x+\ln x}{x^2} \\ y = x+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x+\ln x = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$

Conclusion :

(Δ) coupe (C) en un point unique d'abscisse α vérifiant $\alpha + \ln\alpha = 0$

- Montrons que $0,56 < \alpha < 0,57$

$h(0,56) = -0,0198$; $h(0,57) = 0,0078$

$h(0,56) \times h(0,57) < 0 \Rightarrow 0,56 < \alpha < 0,57$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\boxed{0,56 < \alpha < 0,57}$$

c/ Déterminons la position relative de (C) par rapport à (Δ)

Posons $d(x) = f(x) - (x+1)$

$$= \frac{x + \ln x}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$$

$\forall x > 0$, $x^2 > 0$.

d(x) a donc le même signe que h(x)

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessus

x	0		α		+∞
h(x)	‖	−	0	+	
Position relative de (C) par rapport à (Δ)	‖	(C) est en dessous de (Δ)	(C) coupe (Δ)	(C) est au dessus de (Δ)	

5./ Etudions le sens de variation de f

$D_f =]0; +\infty[$

f est dérivable sur D_f et $\forall x \in D_f$,

$$f'(x) = 1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x^2 - 2x(x+\ln x)}{x^4}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{x+1-2x-2\ln x}{x^3}$$

$$= \frac{x^3 - x + 1 - 2\ln x}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

$\forall x > 0$, $x^3 > 0$; $f'(x)$ a le signe de $g(x)$ or $\forall x > 0$, $g(x) > 0$. On a donc :

$\forall x > 0$, $f'(x) > 0$; f est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

5./ Déduisons de la question 4./ l'existence d'une valeur unique β telle $f(\beta) = 0$

La fonction f est continue, monotone strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

f définit donc une bijection de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Ainsi il existe un unique réel $\beta > 0$ tel que $f(\beta) = 0$.

Montrons que $0,46 < \beta < 0,47$

$f(0,46) = -0,036$; $f(0,47) = 0,18$.

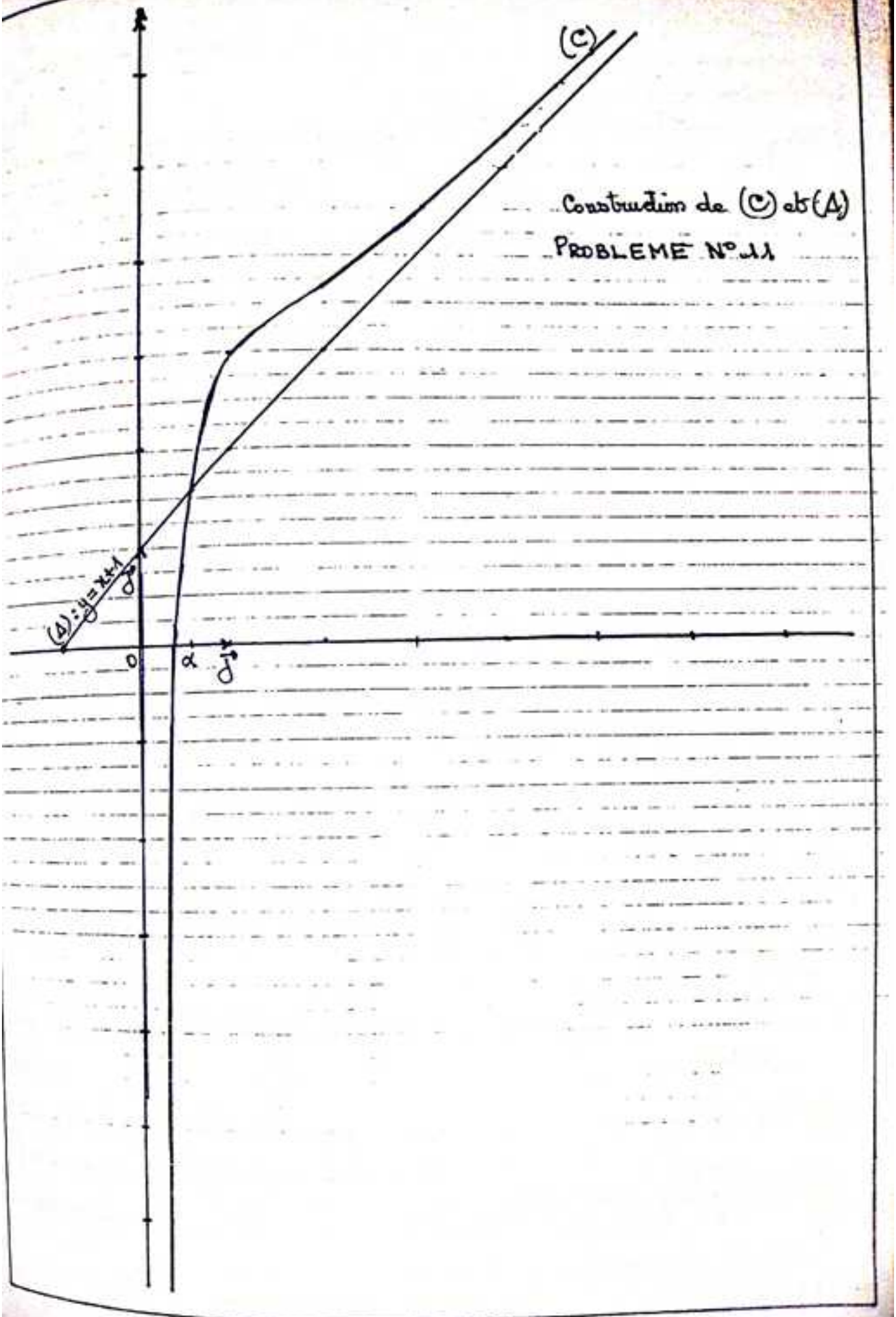
$f(0,46) \cdot f(0,47) < 0 \Rightarrow 0,46 < \beta < 0,47$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

7/ Construction de (C) et (Δ)

(Voir page suivante)

PARTIE B

m étant un réel, on appelle f_m la fonction de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :



Construction de (C) et (Δ)

PROBLEME N°11

$f_m(x) = \frac{x^2-1}{4} - \frac{m}{2}\ln x$ et (Γ_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.) Dressons suivant les valeurs de m le tableau de variation de f_m

1er cas $m < 0$

$Df_m =]0; +\infty[$

Limites de f_m aux bornes de Df_m.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_m(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^2-1}{4} - \frac{m}{2}\ln x$

$= -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-1}{4} = -\frac{1}{4}$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ et $-\frac{m}{2} > 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{4} - \frac{m}{2}\ln x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{4} + x\left(\frac{x}{4} - \frac{m}{2}\frac{\ln x}{x}\right)$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_m(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = +\infty$

Dérivée

f_m est dérivable sur Df_m et $\forall x \in Df_m$:

$f'_m(x) = \frac{x}{2} - \frac{m}{2x} = \frac{x^2-m}{2x}$

$\forall x > 0$, $2x > 0$; $f'_m(x)$ a donc le signe de $x^2 - m$.

Pour $m < 0$ on a : $x^2 - m > 0$ donc $\forall x > 0$, $f'_m(x) > 0$; f_m est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation de f_m $m < 0$

x	0		$+\infty$
$f'_m(x)$	‖	$+$	
$f_m(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2e cas $m = 0$

$f_0(x) = \frac{x^2-1}{4}$ $Df_0 =]0; +\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_0(x) = -\frac{1}{4}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = +\infty$

$f'_0(x) = \frac{x}{2} > 0$

f_0 est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation de f_0

x	0		$+\infty$
$f'_0(x)$	‖	$+$	
$f_0(x)$	‖ $-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

3e cas $m > 0$

$Df_m =]0; +\infty[$

Limites de f_m aux bornes de Df_m.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_m(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^2-1}{4} - \frac{m}{2}\ln x$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-1}{4} = -\frac{1}{4}$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ et $-\frac{m}{2} < 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{4} + x\left(\frac{x}{4} - \frac{m}{2}\frac{\ln x}{x}\right)$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x>0} f_m(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = +\infty$

Dérivée:

f_m est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x>0$:

$f'_m(x) = \frac{x^2-m}{2x}$

$f'_m(x)$ a le signe de x^2-m car $2x>0$

$f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-m=0 \\ \text{et} \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{m}$

Signe de $f'_m(x)$

x	0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
$f'_m(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Sens de variation de f_m

f_m est strictement décroissante sur $]0;\sqrt{m}[$, strictement croissante sur $]\sqrt{m},+\infty[$ et admet un minimum local au point $\sqrt{m}$.

$f_m(\sqrt{m}) = \frac{m-1-m\ln m}{4}$

Tableau de variation de f_m $(m>0)$

x	0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
$f'_m(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	$+\infty$ ‖	↘	$D_{f_m}(\sqrt{m})$	↗	$+\infty$

2/ a/ Soit $M_0(x_0;y_0)$ un point du plan avec $x_0>0$ et $x_0 \neq 1$

Montrons qu'il existe une seule courbe (Γ_m) qui passe par M_0

$M_0(x_0;y_0) \in (\Gamma_m) \Leftrightarrow y_0 = f_m(x_0)$

$\Leftrightarrow y_0 = \frac{x_0^2-1}{4} - \frac{m}{2}\ln x_0$ (1)

$\Leftrightarrow 2m\ln x_0 = -4y_0 + x_0^2 - 1$

$\Leftrightarrow m = \frac{x_0^2-4y_0-1}{2\ln x_0}$

Cette equation (1) d'inconnue m admet une seule solution pour $x_0>0$ et $x_0 \neq 1$

Il existe donc une seule courbe (Γ_m) qui passe par $M_0(x_0;y_0)$, $x_0>0$ et $x_0 \neq 1$

b/ Montrons qu'il existe un seul point A appartenant à toutes courbes (Γ_m)

Posons $y = f_m(x)$

$\Leftrightarrow y = \frac{x^2-1}{4} - \frac{m}{2}\ln x$

$\Leftrightarrow \frac{m}{2}\ln x = \frac{x^2-1}{4} - y$

$\begin{cases} \ln x = 0 \\ \frac{x^2-1}{4} - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

Le point $A(1;0)$ appartient à toutes courbes (Γ_m)

PROBLEME N°12

PARTIE I

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par:

$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme neperien

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe repré-

centaire de f relativement au repère orthonormé $(O,\vec{I},\vec{J})$

1/ Etude de la fonction f

Ensemble de définition D

$$D=\left\{x\in\mathbb{R} / 1-x\neq 0 \text{ et } \frac{1+x}{1-x}>0\right\}$$

$$D=]-1;1[$$

Parité

$\forall x\in D, -x\in D$

$$f(-x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$f(-x)=-f(x)$$

Conclusion

La fonction f est impaire

Dérivée

f est continue et dérivable sur D et

$$\forall x\in D,\ f'(x)=\frac{1}{1-x^2}$$

$\forall x\in D, 1-x^2>0 \Rightarrow f'(x)\geq 0$

f est donc strictement croissante sur D

Limites de f aux bornes de D

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$=-\infty \text{ car } \begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{1+x}{1-x}=0\\ \frac{1+x}{1-x}>0\\ \text{et } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x=-\infty\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$=+\infty \text{ car } \begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{1+x}{1-x}=+\infty\\ \text{et}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=-\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=+\infty$$

Tableau de variation de f

x	-1		1
$f'(x)$	‖	$+$	‖
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

b/ Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0

$$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$f'(0)=1 \quad f(0)=0$

$$\boxed{(T): y=x}$$

c/ Etudions la position relative de (C) et (T).

Posons $h(x)=f(x)-x$.

Etudions h sur $]-1;1[$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} h(x)=-\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} h(x)=+\infty$$

$$h'(x)=f'(x)-1=\frac{1}{1-x^2}-1=\frac{x^2}{1-x^2}$$

$\forall x\in]-1;1[,\ h'(x)\geq 0$ avec $h'(0)=0$

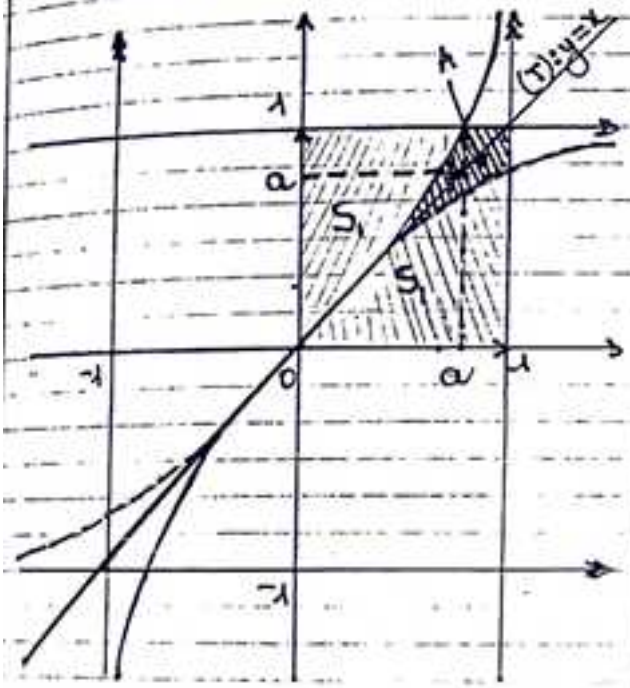
Tableau de variation de h

x	-1		0		1
$h'(x)$	‖	$+$	0	$+$	‖
$h(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

A partir du tableau de variation de f on déduit les résultats suivants consignés dans le tableau ci-dessous

x	-1		0		1
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
Position relative de (C) et (T)	‖ (C) est en dessous de (T)		(C) coupe (T)	(C) est au dessus de (T)	‖

Construction de (C) et (T) sur un même dessin



2/ a/ Démontrons que f est une bijection de D sur un ensemble que nous déterminerons

D'après l'étude de f, elle est continue monotone, strictement croissante sur $]-1;1[$ avec $\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$

f est donc une bijection de $]-1;1[$ sur $f(]-1;1[) = \mathbb{R}$

b/ Explicitons $f^{-1}(x)$.

Posons $y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$\Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}$$

Représentation de f^{-1} sur la même dessin que celui de la question précédente.

Voir figure ci-contre.

3./ Déterminons le réel a tel que $f(a) = 1$

$f(a) = 1 \Leftrightarrow a = f^{-1}(1) = \frac{e^2-1}{e^2+1}$

$$\boxed{a = \frac{e^2-1}{e^2+1}}$$

b/ Soit E l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ f^{-1}(x) \le y \le \inf(1; f(x)) \end{cases}$

où $\inf(u;v)$ désigne le plus petit des réels u et v.

Déterminons en fonction de a l'aire de E.

Soit A cette aire.

$$\inf(1; f(x)) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \le x \le a \\ 1 & \text{si } a \le x \le 1 \end{cases}$$

$$A = \int_0^a \left(f(x) - f^{-1}(x)\right)dx + \int_a^1 \left(1 - f^{-1}(x)\right)dx$$

Sur la figure on peut constater que :

$A = 1 - 2\int_0^a (1 - f(x))\,dx = 1 - 2S_1$

$= 1 - 2a + 2\int_0^a f(x)\,dx$

$= 1 - 2a + \int_0^a \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$; $I = \int_0^a \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$

Posons $U(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow U'(x) = \frac{2}{1-x^2}$

$V'(x) = 1 \Leftrightarrow V(x) = x$

$I = \left[x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]_0^a + \int_0^a \frac{2x}{x^2-1}\,dx$

$= 2a + \left[\ln|x^2-1|\right]_0^a$

$= 2a + \ln(1-a^2)$

$A = 1 - 2a + 2a + \ln(1-a^2)$

$\boxed{A = 1 + \ln(1-a^2)}$

PARTIE II

Soit f_α la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f_\alpha(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha+x}{\alpha-x}\right)$; $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

On désigne par (C_α) la courbe représentative de f_α dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Pour toute la partie II, voir Problème N°10, PARTIE A, questions 3 à 7. en remplaçant a par α.

PARTIE III

Dans cette partie on considère les fonctions f_α définies au II avec $\alpha > 0$.

1°/ Déterminons les valeurs de α pour lesquelles l'équation d'inconnue réelle x : $f_\alpha(x) - x = 0$ admet une solution strictement positive que l'on notera $x(\alpha)$

Posons $h_\alpha(x) = f_\alpha(x) - x$

$Dh_\alpha =]-\alpha; \alpha[$

$\lim_{x \to -\alpha} h_\alpha(x) = -\infty$ $\lim_{x \to \alpha} h_\alpha(x) = +\infty$

h_α est continue et dérivable sur Dh_α

et $\forall x \in Dh_\alpha$, $h'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\alpha^2 - x^2} - 1$

$= \frac{x^2 - \alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - x^2}$

$\forall x \in Dh_\alpha$, $h'_\alpha(x) = \frac{x^2 - (\alpha^2 - \alpha)}{\alpha^2 - x^2}$

α	0		1		$+\infty$
$\alpha^2 - \alpha$	‖	−	0	+	

1er cas $0 < \alpha \leq 1$

$\forall x \in Dh_\alpha$, $h'_\alpha(x) \geqslant 0$. h_α est monotone strictement croissante avec

$\lim_{x \to -\alpha} h_\alpha(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to \alpha} h_\alpha(x) = +\infty$

h définit donc une bijection de Dh_α vers $\mathbb{R}$. Or $h_\alpha(0) = 0$.

L'équation $f_\alpha(x) - x = 0$ admet une seule solution $x = 0$

2e cas $\alpha > 1$

$h'_\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\sqrt{\alpha^2 - \alpha}$, $x_2 = \sqrt{\alpha^2 - \alpha}$

$\forall x \in Dh_\alpha$, $\alpha^2 - x^2 > 0$; $h'_\alpha(x)$ a donc

Sur la figure on peut constater que :

$A = 1 - 2\int_0^a (1 - f(x))\,dx = 1 - 2S_1$

$= 1 - 2a + 2\int_0^a f(x)\,dx$

$= 1 - 2a + \int_0^a \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$; $I = \int_0^a \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$

Posons $U(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow U'(x) = \frac{2}{1-x^2}$

$V'(x) = 1 \Leftrightarrow V(x) = x$

$I = \left[x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]_0^a + \int_0^a \frac{2x}{x^2-1}\,dx$

$= 2a + \left[\ln|x^2-1|\right]_0^a$

$= 2a + \ln(1-a^2)$

$A = 1 - 2a + 2a + \ln(1-a^2)$

$\boxed{A = 1 + \ln(1-a^2)}$

PARTIE II

Soit f_α la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f_\alpha(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha+x}{\alpha-x}\right)$; $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

On désigne par (C_α) la courbe représentative de f_α dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Pour toute la partie II, voir Problème N°10, PARTIE A, questions 3 à 7. en remplaçant a par α.

PARTIE III

Dans cette partie on considère les fonctions f_α définies au II avec $\alpha > 0$.

1°/ Déterminons les valeurs de α pour lesquelles l'équation d'inconnue réelle x : $f_\alpha(x) - x = 0$ admet une solution strictement positive que l'on notera x_α

Posons $h_\alpha(x) = f_\alpha(x) - x$

$Dh_\alpha =]-\alpha; \alpha[$

$\lim_{x \to -\alpha} h_\alpha(x) = -\infty$ $\lim_{x \to \alpha} h_\alpha(x) = +\infty$

h_α est continue et dérivable sur Dh_α

et $\forall x \in Dh_\alpha$, $h'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\alpha^2 - x^2} - 1$

$= \frac{x^2 - \alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - x^2}$

$\forall x \in Dh_\alpha$, $h'_\alpha(x) = \frac{x^2 - (\alpha^2 - \alpha)}{\alpha^2 - x^2}$

α	0		1		$+\infty$
$\alpha^2 - \alpha$	‖	−	0	+	

1er cas $0 < \alpha \leq 1$

$\forall x \in Dh_\alpha$, $h'_\alpha(x) \geq 0$, h_α est monotone strictement croissante avec

$\lim_{x \to -\alpha} h_\alpha(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to \alpha} h_\alpha(x) = +\infty$

h_α définit donc une bijection de Dh_α vers $\mathbb{R}$. Or $h_\alpha(0) = 0$.

L'équation $f_\alpha(x) - x = 0$ admet une seule solution $x = 0$

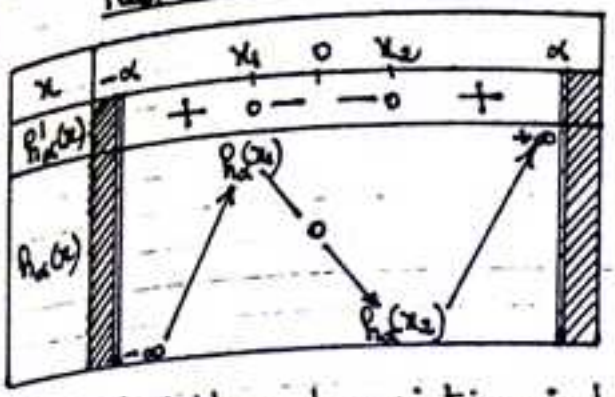
2e cas $\alpha > 1$

$h'_\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\sqrt{\alpha^2 - \alpha}$, $x_2 = \sqrt{\alpha^2 - \alpha}$

$\forall x \in Dh_\alpha$, $\alpha^2 - x^2 > 0$; $h'_\alpha(x)$ a donc

le signe de $x^2-(\alpha^2-\alpha)$

Tableau de variation de h_α



D'après le tableau de variation ci-dessus, la restriction de h_α à $]0;\alpha[$ s'annule pour une seule valeur $x(\alpha)$

Conclusion

Pour $\alpha > 1$, l'équation d'inconnue réelle x: $f_\alpha(x)-x=0$ admet une solution strictement positive notée $x(\alpha) > x_2 = \sqrt{6}$

2/ On prend dans cette question $\alpha=3$ et on définit la suite (U_n) par:

$$\begin{cases} U_0 = 1/2 \\ U_{n+1} = f_3^{-1}(U_n) \text{ si } n \geq 0. \end{cases}$$

a/ Démontrons que $U_1 > U_0$

Pour $\alpha=3$, $x_2=\sqrt{6}$, $h_3(\sqrt{6})<0$

$\forall x \in]0;\sqrt{6}[$, $h_3(x)<0$.

$U_0 \in]0;\sqrt{6}[\Leftrightarrow h_3(U_0)<0$

$\Leftrightarrow f_3(U_0)-U_0<0$

$\Leftrightarrow U_0 > f_3(U_0)$

or f_3 est monotone et strictement croissante sur

De plus f_3 définit une bijection de $]-3;3[$ vers $\mathbb{R}$; on en déduit que f_3^{-1} est monotone, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et définit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-3;3[$.

$U_0 > f_3(U_0) \Leftrightarrow f_3^{-1}(U_0) > (f_3^{-1} \circ f_3)(U_0)$

or $f_3^{-1}(U_0) = U_1$ et $(f_3^{-1} \circ f_3)(U_0) = U_0$

d'où $\boxed{U_1 > U_0.}$

Déduisons-en que la suite (U_n) est croissante

$U_1 > U_0$

Or f_3^{-1} est croissante sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow f_3^{-1}(U_1) > f_3^{-1}(U_0) \Leftrightarrow U_2 > U_1$

Supposons $U_{n+1} > U_n$

$\Leftrightarrow f_3^{-1}(U_{n+1}) > f_3^{-1}(U_n)$

$\Leftrightarrow U_{n+2} > U_{n+1}$

Conclusion:

$\forall n \geq 0$, $U_{n+1} > U_n$, la suite (U_n) est donc croissante.

b/ Démontrons que pour tout n entier naturel on a: $U_n < x(3)$

$U_0 = \frac{1}{2} < \sqrt{6}$ or $x(3) > \sqrt{6}$

$U_0 < x(3)$

Supposons $U_n < x(3)$ et démontrons que $U_{n+1} < x(3)$

$U_n < x(3) \Leftrightarrow f_3^{-1}(U_n) < f_3^{-1}(x(3))$

$\Leftrightarrow u_{n+1} < f_3^{-1}(\chi(3))$

or $f_{\chi(3)} = \chi(3) \Leftrightarrow f_3^{-1}(\chi(3)) = \chi(3)$

$\Leftrightarrow u_{n+1} < \chi(3)$

Conclusion

$\forall n \geq 0,\ u_n < \chi(3)$

c/- Démontrons que la suite (u_n) est convergente.

$u_n < \chi(3) \Rightarrow (u_n)$ majorée

De plus (u_n) est croissante

Conclusion

(u_n) est croissante et majorée donc (u_n) est convergente

Soit l la limite de la suite (u_n).

Démontrons que $l > \sqrt{6}$.

Si l est la limite de la suite (u_n) alors l est solution de l'équation

$l = f_3^{-1}(l) \Leftrightarrow f_3(l) = l \Leftrightarrow l = \chi(3)$

or $\chi(3) > \sqrt{6} \Rightarrow l > \sqrt{6}$.

$l > \sqrt{6}$

PROBLEME N°13

PARTIE A

On se propose de déterminer les solutions sur $]0;+\infty[$ de l'équation différentielle :

(E): $xy' - 2y = \ln x$, où y est une fonction de variable x.

1-/ Déterminons les nombres réels a, b et c pour que la fonction P définie sur $]0;+\infty[$, par $P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie : $xP'(x) - 2P(x) = 0$ (1)

$P(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow P'(x) = 2ax + b$

P vérifie (1) ssi :

$x(2ax+b) - 2(ax^2+bx+c) = 0$

$\Leftrightarrow -bx - 2c = 0 \Rightarrow b = c = 0$

$\forall a \in \mathbb{R},\ b=0, c=0;\ P(x) = ax^2$ vérifie $xP'(x) - 2P(x) = 0$ (1)

2-/ f étant une fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, on pose $g = \frac{f}{P}$ où P est la fonction déterminer dans la question 1-/ avec $a \neq 0$.

a-/ Démontrons que la fonction f est solution de (E) ssi g est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{ax^3}$

$g = \frac{f}{P} \Leftrightarrow f = gP \Leftrightarrow f' = g'P + gP'$

f solution de (E) ssi :

$xf'(x) - 2f(x) = \ln x$

$\Leftrightarrow x[g'(x)P(x) + g(x)P'(x)] - 2g(x)P(x) = \ln x$

$\Leftrightarrow ax^3 g'(x) + 2ax^2 g(x) - 2ax^2 g(x) = \ln x$

$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{\ln x}{ax^3}$ ($\Leftrightarrow$ g est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{ax^3}$

Conclusion :

f est solution de (E) ssi g est une primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{\ln x}{ax^3}$

b/ Déterminons l'ensemble des primitives définies sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x^3}$

Posons $h(x) = \frac{\ln x}{x^3}$. Soit H une primitive de h on a :

$H(x) = \int_e^x \frac{\ln t}{t^3} dt \quad e>0$

$= \int_e^x \left(\frac{1}{t^3}\ln t\right) dt$

Posons $U(t) = \ln t \Rightarrow U'(t) = \frac{1}{t}$

$V'(t) = \frac{1}{t^3} \Rightarrow V(t) = -\frac{1}{2t^2}$

$H(x) = \left[-\frac{1}{2t^2}\ln t\right]_e^x + \frac{1}{2}\int_e^x \frac{1}{t^3} dt$

$= -\frac{1}{2x^2}\ln x - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

$= -\frac{1}{4x^2}(1+2\ln x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

L'ensemble des primitives de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x^3}$ est l'ensemble des fonctions : $x \mapsto -\frac{1}{4x^2}(1+2\ln x)+c, c \in \mathbb{R}$

c/ Déduisons-en que l'ensemble des fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et vérifiant (E) est l'ensemble des fonctions $x \mapsto \frac{-1+\ln x^2}{4} + \alpha x^2, \alpha \in \mathbb{R}$

$g(x) = \frac{1}{a}\frac{\ln x}{x^3} \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{4ax^2}(1+\ln x^2) + c$

f solution de (E) $\Leftrightarrow f(x) = g(x)\cdot p(x)$

$\Leftrightarrow f(x) = -\frac{1+\ln x^2}{4} + acx^2$; posons $ac = \alpha$

$f(x) = -\frac{1+\ln x^2}{4} + \alpha x^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

Conclusion

L'ensemble des fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et vérifiant (E) est l'ensemble des fonctions :

$x \mapsto -\frac{1+\ln x^2}{4} + \alpha x^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

3-/ a/ Trouvons la fonction φ, définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, vérifiant (E) tel que $\varphi(1) = 0$:

$\varphi(x) = -\frac{1+\ln x^2}{4} + \alpha x^2, \quad \varphi(1) = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4}$ d'où :

$$\varphi(x) = -\frac{1+\ln x^2}{4} + \frac{1}{4}x^2$$

b-/ Etudions les variations de φ

$\varphi(x) = -\frac{1+\ln x^2}{4} + \frac{1}{4}x^2$

$D_\varphi =]0;+\infty[$

$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} -\frac{1+\ln x^2}{4} + \frac{1}{4}x^2$

$= \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} -\frac{1+\ln x}{4} + \frac{1}{4}x, \quad X = x^2$

$= +\infty$ car $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$

$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \varphi(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1+\ln x}{4} + \frac{1}{4}x, \quad x = x^2$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{4}x\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}-1\right)$$

$=+\infty$ car $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=+\infty$	$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$

Dérivée

φ est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$

$\forall x>0,\ \varphi'(x)=-\frac{1}{4}\frac{2}{x}+\frac{x}{2}$

$$\varphi'(x)=\frac{x^2-1}{2x}$$

$\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ \text{et} \\ x\in D_\varphi \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

$\forall x>0,\ 2x>0$; $\varphi'(x)$ a donc le signe de x^2-1

Signe de $\varphi'(x)$

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

φ est décroissante sur $]0;1[$, croissante sur $]1;+\infty[$ et admet un minimum local au point 1 ; $\varphi(1)=0$

Tableau de variation de φ

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Construction de la courbe (C) représentative de φ.

Branches infinies

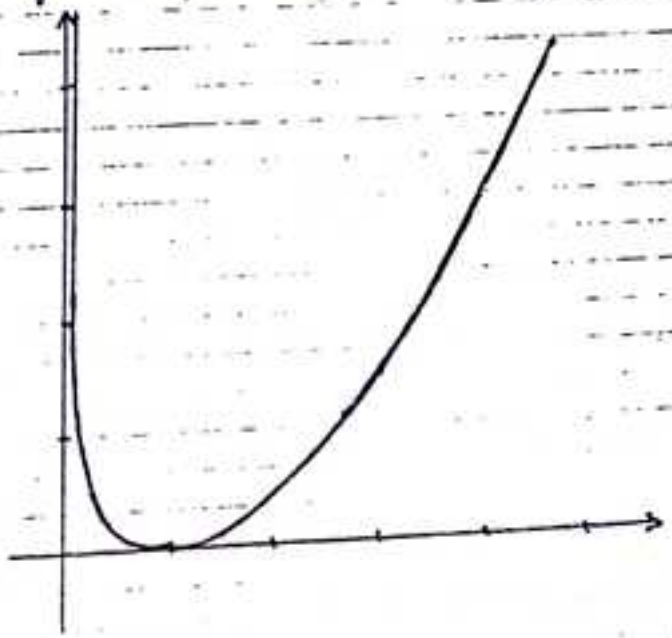
$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=+\infty$; la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$

$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{4x}-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{4}x$$

$=+\infty$ car $\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{4x}=0$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4}x=+\infty$

La courbe (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (oy)



PARTIE B

1/ Soit λ un nombre réel strictement positif.

Calculons en fonction de λ l'intégrale : $I(\lambda)=\int_\lambda^1 \varphi(x)\,dx$

$$I(\lambda)=\int_\lambda^1 \varphi(x)\,dx$$
$$=\int_\lambda^1\left(-\frac{1+\ln x^2}{4}+\frac{1}{4}x^2\right)dx$$
$$=\int_\lambda^1\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x+\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}(x\ln x-x)\right]_\lambda^1$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\lambda^3-\frac{1}{4}\lambda+\frac{1}{2}\lambda\ln\lambda$$

$$\boxed{I(\lambda)=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\lambda^3-\frac{1}{4}\lambda+\frac{1}{2}\lambda\ln\lambda}$$

2/ Montrons que $\lim_{\lambda\to 0} I(\lambda)=\frac{1}{3}$

On sait que $\lim_{\lambda\to 0} -\frac{1}{12}\lambda^3-\frac{1}{4}\lambda=0$

et $\lim_{\lambda\to 0}\lambda\ln\lambda=0$.

donc $\boxed{\lim_{\lambda\to 0} I(\lambda)=\frac{1}{3}}$

3/ Soit $n\in\mathbb{N}-\{0;1\}$

a/ Montrons que pour tout entier naturel k tel que $1\le k\le n-1$ et pour tout x de $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$ on a: $\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\varphi(x)\le\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$

$1\le k\le n-1 \Rightarrow 0<\frac{k}{n}<\frac{k+1}{n}\le 1$

or φ est décroissante sur $]0;1]$

$\frac{k}{n}\le x\le\frac{k+1}{n}\Rightarrow\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\varphi(x)\le\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$

Conclusion:

$1\le k\le n-1$ et $x\in\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$ on a:

$$\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\varphi(x)\le\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

b/ Montrons que:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\le I\left(\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

On sait que $\forall x\in\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$,

$$\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\varphi(x)\le\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Rightarrow\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)dx\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\varphi(x)dx\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)dx$$

$$\Rightarrow\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\varphi(x)dx\le\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\varphi(x)dx\le\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\varphi(x)dx\le\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

or $\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)=\sum_{k=2}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\varphi(x)dx=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\varphi(x)dx+\int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}}\varphi(x)dx+\cdots+\int_{\frac{n-1}{n}}^{1}\varphi(x)dx$$
$$=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\varphi(x)\,dx=I\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a donc

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\le I\left(\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)}$$

Déduisons-en que:

$$I\left(\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\le\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+I\left(\frac{1}{n}\right)$$

On sait que $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\le I\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\Rightarrow\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)-\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right)\le I\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right)$ (1)

De plus

$I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ ou

$$\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

d'où $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ (2)

(1) et (2) nous permettent d'écrire

$$I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right)$$

4./ Déduisons des questions 2./ et 3./

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

$\lim_{n\to+\infty} I\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{\lambda\to 0} I(\lambda)$ avec $\lambda = \frac{1}{n}$

$= \frac{1}{3}$ d'après la question 2./

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to 0} x\varphi(x)$, $x = \frac{1}{n}$

$= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x\ln x + \frac{1}{4}x^3$

$= 0$

On a donc

$$\begin{cases} I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right) \\ \lim_{n\to+\infty} I\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{3}$$

5./ a/ Montrons que pour tout entier naturel non nul, n :

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{4n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\times\frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2 + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{1}{n^2}\times\frac{n}{4}$$

$$= \frac{1}{4n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{1}{4}$$

Conclusion : Pour tout entier n non nul :

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{4n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{1}{4}$$

b./ Etablissons les égalités

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \; ; \; \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right) = \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$$

$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ (a)

Remplaçons dans (a), x par 1, 2, ... n

$2^3 = 1^3 + 3\times1^2 + 3\times1 + 1$

$3^3 = 2^3 + 3\times2^2 + 3\times2 + 1$

$4^3 = 3^3 + 3\times3^2 + 3\times3 + 1$

$\vdots$

$(n+1)^3 = n^3 + 3\times n^2 + 3\times n + 1$

En additionnant membres à membres les n égalités obtenues et après simplification on a:

$$(n+1)^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n + 1$$

$$(n+1)^3 = (n+1) + \frac{3n(n+1)}{2} + 3\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{n+1}{3}\left(n^2 + 2n - \frac{3n}{2}\right)$$

$$= \frac{n+1}{3}\cdot\frac{2n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$\cdot \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{k}\right) = \ln\left(\frac{n}{1}\right) + \ln\left(\frac{n}{2}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{n}{1}\times\frac{n}{2}\times\frac{n}{3}\times\cdots\frac{n}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{k}\right) = \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)}$$

c-/ Soient les deux suites :

$V_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$ et $U_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Utilisons les résultats précédents pour calculer la limite des deux suites

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n} k^2 = \lim \frac{n(n+1)(2n+1)}{6\times 4n^3} = \frac{1}{12}$$

On en déduit donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{k}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum \ln\left(\frac{n}{k}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) = 1 \text{ Soit } \lim_{n\to+\infty} V_n = 1$$

De plus :

$$\ln U_n = \ln n - \frac{1}{n}\ln n! = \frac{1}{n}\left(n\ln n - \ln n!\right)$$

$$\ln U_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) = V_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \ln U_n = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = e.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} V_n = 1} \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = e.}$$

PROBLEME N°14

PARTIE

Soit h la fonction numérique d'une variable réelle x définie par: $h(x) = \frac{2-\ln x^2}{2+\ln x^2}$

1-/ a-/ Ensemble de définition D de h

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } 2+\ln x^2 \neq 0\right\}$$

Posons $2+\ln x^2 = 0 \Leftrightarrow 2+2\ln|x| = 0$

$\Leftrightarrow \ln|x| = -1 \Leftrightarrow |x| = e^{-1} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{e}$ ou $x = \frac{1}{e}$

$$\boxed{D = \left\{-\frac{1}{e}; 0; \frac{1}{e}\right\}}$$

b/ Montrons que h admet un prolongement par continuité au point 0

$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2-\ln x^2}{2+\ln x^2}$

$= \lim_{X\to -\infty} \frac{-X+2}{X+2}$ avec $X = \ln x^2$

$= -1$

$\lim_{x\to 0} h(x) = -1 \in \mathbb{R}$; h admet donc un prolongement par continuité en 0

Précisons ce prolongement

Soit p ce prolongement on a:

$$\begin{cases} p(x) = h(x) \text{ si } x \neq 0 \\ p(0) = -1 \end{cases}$$

2/ Soit f la fonction définie par:

$$\begin{cases} f(x) = h(x) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

a/ Dérivabilité de f en 0

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = -1 = f(0)$; f est continue en 0 et $f(0) = -1$.

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{2-\ln x^2}{2+\ln x^2} + 1\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{x(1+\ln(-x))}$

$= \lim_{X\to 0} -\frac{2}{X+X\ln X}$, $X = -x$

$= -\infty$ car $\begin{cases} \lim_{X\to 0} X\ln X = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{X\to 0} \frac{2}{X} = +\infty \end{cases}$.

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x+x\ln x} = +\infty$

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$; $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$

f n'est donc pas dérivable en 0.

b/ Etudions les variations de f.

$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right\}$.

$\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

la fonction f est paire.

Etudions f sur $[0; \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}; +\infty[$ et complettons dans la symétrie par rapport à (oy).

Posons $I = [0; \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}; +\infty[$

$\lim_{x\to \frac{1}{e}^-} f(x) = \lim_{X\to -2^-} \frac{2-X}{2+X}$, $X = \ln x^2$

$= -\infty$ car $\begin{cases} 2-X \to 4 \\ 2+X \to 0 \\ 2+X < 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to \frac{1}{e}^+} f(x) = \lim_{X\to -2^+} \frac{2-X}{2+X}$, $X = \ln x^2$

$= +\infty$ car $\begin{cases} 2-X \to 4 \\ 2+X \to 0 \\ 2+X > 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to \frac{1}{e}^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to \frac{1}{e}^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{X\to +\infty} \frac{2-X}{2+X}$, $X = \ln x^2$

$= -1$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -1$

Dérivée

f est continue et dérivable sur I^*.

et $\forall x \in I^*$,
$f'(x) = \dfrac{-\frac{2}{x}\left(2+\ln x^2\right) - \frac{2}{x}\left(2-\ln x^2\right)}{\left(2+\ln x^2\right)^2}$

$= -\dfrac{8}{x\left(2+\ln x^2\right)^2}$

$\forall x \in D_f$, $\left(2+\ln x^2\right)^2 > 0$; $f'(x)$ a donc le signe de $-x$.

Tableau de variation de f :

f étant paire : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{e}\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{e}\\ >}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{e}\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{e}\\ <}} f(x)$

x	$-\infty$		$-1/e$		0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$		0	$-$	$-$		
$f(x)$	-1	↗	$+\infty$	↗	-1	↘	$+\infty$	↘	-1
			$-\infty$				$-\infty$		

c/ Tracer de (C), courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(Voir page suivante)

La courbe (C) admet trois asymptotes dont deux verticales d'équations : $x = -\frac{1}{e}$ et $x = \frac{1}{e}$ et une horizontale d'équation $y = -1$.

La courbe (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente verticale.

3-/ On désigne par $\tilde{f}$ la restriction de f à l'intervalle $]-1/e ; +\infty[$

a-/ Montrons que $\tilde{f}$ admet une bijection réciproque notée $\tilde{f}^{-1}$

D'après le tableau de variation de f, $\tilde{f}$ est continue, monotone, strictement décroissante sur $]-1/e ; +\infty[$ avec :

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{e}\\ >}} \tilde{f}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \tilde{f}(x) = -1$

$\tilde{f}$ réalise une bijection de $]-1/e ; +\infty[$ vers $]-1 ; +\infty[$.

$\tilde{f}$ admet donc une bijection réciproque notée $\tilde{f}^{-1}$.

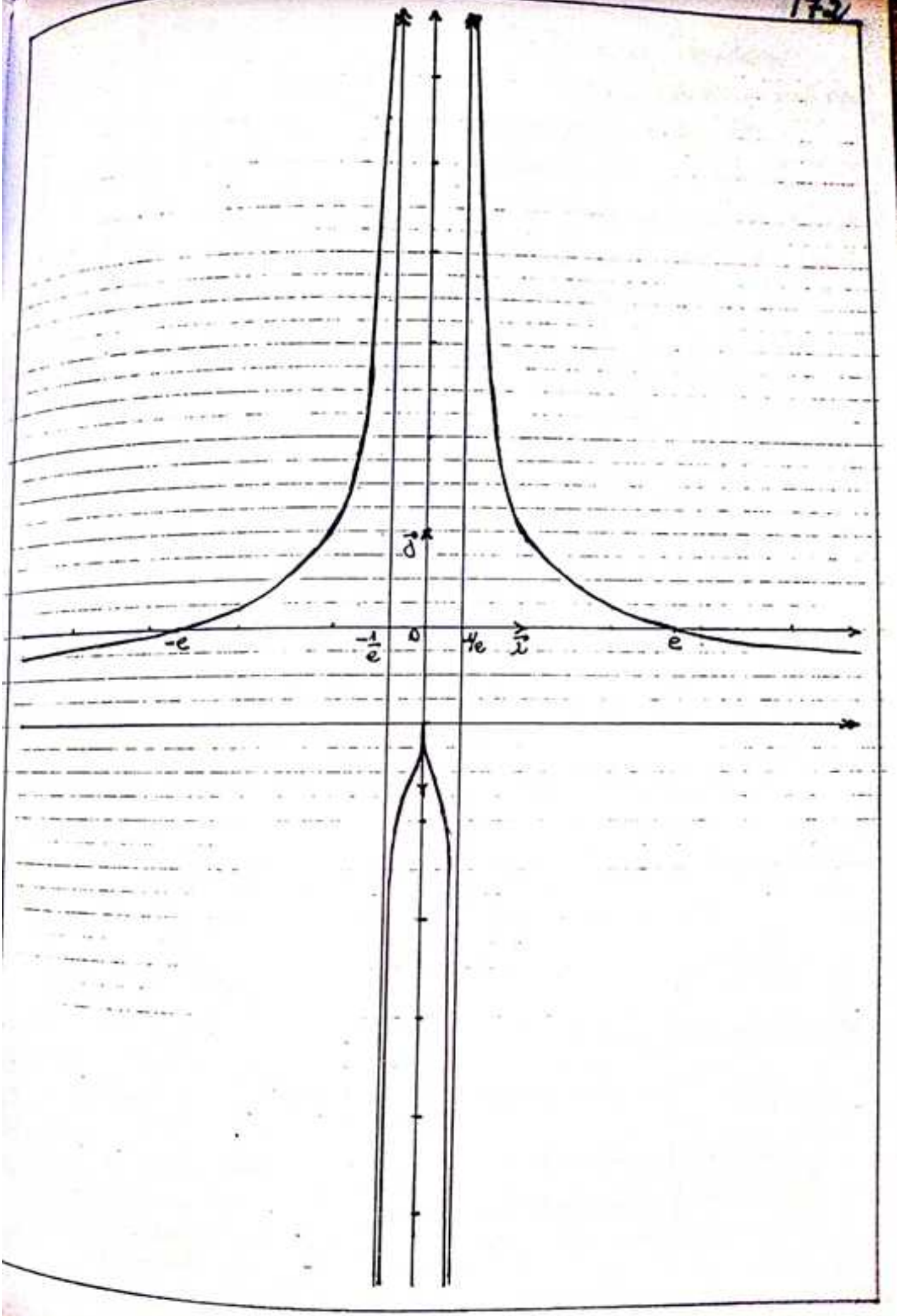
b-/ Tableau de variation de $\tilde{f}^{-1}$

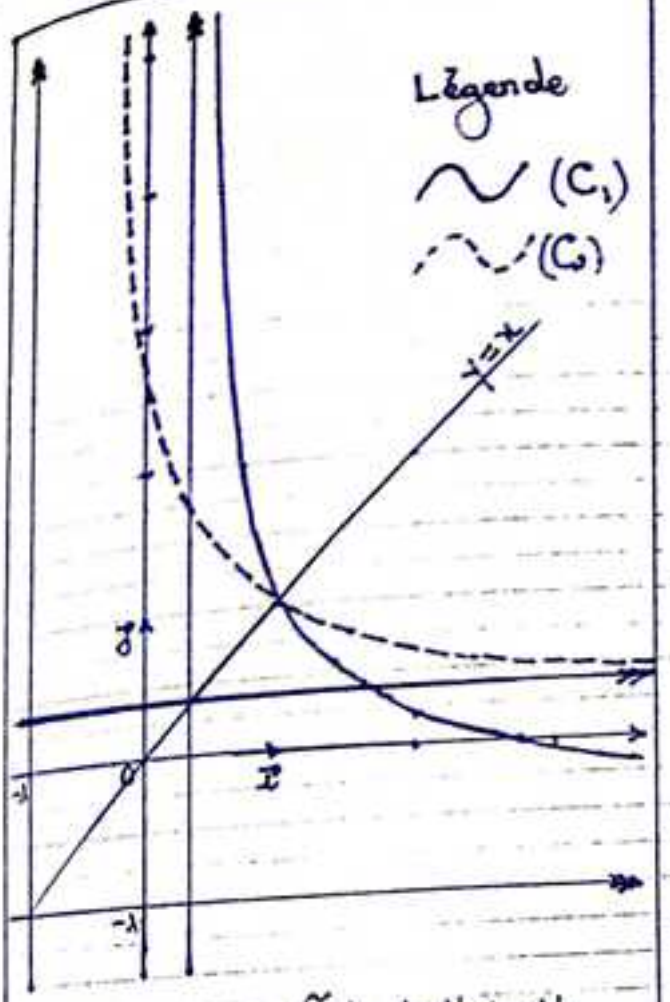
x	-1		$+\infty$
$(\tilde{f}^{-1})'(x)$	$-$		
$\tilde{f}^{-1}(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{e}$

c-/ Traçons la courbe (C_1) de $\tilde{f}$ et (C_2) de $\tilde{f}^{-1}$ dans un autre repère orthonormé que celui de (C)

(Voir page 173)

Rappelons (C_2) est l'image de (C_1) dans la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice


δ
-e
-1/e
0
1/e
x
e



d/ Montrons que $\tilde{f}^{-1}$ est dérivable, puis calculons $(\tilde{f}^{-1})'(0)$

$\forall x \in]-1;+\infty[$, $\tilde{f}^{-1}(x) \in]\frac{1}{e};+\infty[$

De plus $\tilde{f}$ est dérivable sur $]\frac{1}{e};+\infty[$ et $\forall x \in]\frac{1}{e};+\infty[$, $\tilde{f}'(x) \neq 0$

$\tilde{f}^{-1}$ est donc dérivable sur $]-1;+\infty[$

Calculons $(\tilde{f}^{-1})'(0)$.

$$(\tilde{f}^{-1})'(0) = \frac{1}{\tilde{f}'[\tilde{f}^{-1}(0)]}$$

$$= \frac{1}{\tilde{f}'(e)}$$

$$= \frac{-16e}{8} = -2e$$

$\tilde{f}^{-1}(0) = e$

$\tilde{f}'(e) = -\frac{8}{16e}$

$$\boxed{(\tilde{f}^{-1})'(0) = -2e}$$

e/ Montrons que l'équation : $x \in]\frac{1}{e};+\infty[$, $\tilde{f}(x) = 2$ admet une solution unique x_0 dans $]\frac{1}{e};1[$.

$\tilde{f}$ realise une bijection de $]\frac{1}{e};+\infty[$ vers $]-1;+\infty[$ or $2 \in]-1;+\infty[$; il existe donc un unique réel x_0 de $]\frac{1}{e};+\infty[$ tel que $\tilde{f}(x_0) = 2$.

De plus : $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}} \tilde{f}(x) = +\infty$ et $\tilde{f}(1) = 1$

$2 \in]-1;+\infty[\Leftrightarrow x_0 \in]\frac{1}{e};1[$

Conclusion

l'équation : $x \in]\frac{1}{e};+\infty[$, $\tilde{f}(x) = 2$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle.

Donnons un encadrement de x_0 à 10^{-1} près

$\tilde{f}(0,7) = 2,108$ $\tilde{f}(0,8) = 1,57$

$$\Leftrightarrow \boxed{0,7 < x_0 < 0,8}$$

PARTIE B

On considère la fonction g définie par : $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1-e^{|x|}}{1+e^{|x|}}$

1./ a- / Etudions les variations de g

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 1+e^{|x|} \neq 0\}$

or $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+e^{|x|} \neq 0$

$$\boxed{D_g = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[}$$

$\forall x \in D_g$, $-x \in D_g$ et $g(-x) = g(x)$

la fonction g est donc paire.

$g(0) = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-e^{|x|}}{1+e^{|x|}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-e^{x}}{1+e^{x}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-X}{1+X}$, $X = e^{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -1$

g étant paire, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

$\forall x \geq 0$, $g(x) = \frac{1-e^{x}}{1+e^{x}}$

$g'(x) = \frac{-2e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}$

$\forall x \geq 0$, $g'(x) < 0$.

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(x)	+	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	−
g(x)	-1	↗	0	↘	-1

On montre aisément que :

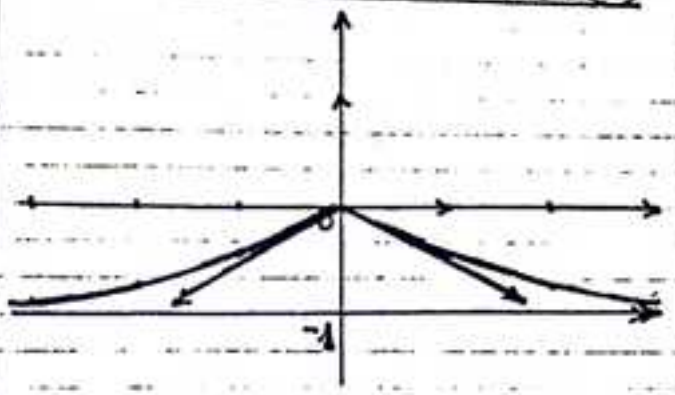
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = -\frac{1}{2}$

g n'est donc pas dérivable en 0.

b-/ Traçons la courbe (S) de g dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

La courbe (S) possède une asymptote horizontale d'équation $y = -1$; de plus (S) admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0.

Construction de la courbe (S)



2-/ a-/ Montrons qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout x réel strictement positif on a:

$g(x) = \frac{ae^{x}}{1+e^{x}} + b$

$\forall x > 0$, $g(x) = \frac{1-e^{x}}{1+e^{x}} = \frac{1+e^{x}-2e^{x}}{1+e^{x}}$

$g(x) = \frac{-2e^{x}}{1+e^{x}} + 1$

Par identification on a:

a = -2	b = 1

b-/ Soit λ un réel tel que: $0 < \lambda$ et (E_λ) l'ensemble des points M(x;y) du plan vérifiant $0 \leq x \leq \lambda$ et $-1 \leq y \leq g(x)$

Calculons l'aire A de l'ensemble (E_λ)

$A = \int_0^{\lambda} (g(x)+1)\,dx = \int_0^{\lambda} \left(\frac{-2e^{x}}{1+e^{x}} + 2\right) dx$

$= \left[-2\ln(1+e^{x}) + 2x\right]_0^{\lambda}$

$= -2\ln(1+e^{\lambda}) + 2\lambda + 2\ln 2$

$A = 2\ln 2 + 2\lambda - 2\ln(1+e^{\lambda})$

Calculons $\lim_{\lambda \to +\infty} A$

$A = 2\ln 2 + 2\lambda - 2\ln(1+e^{\lambda})$

$= 2\ln 2 + 2\lambda - 2\ln[e^{\lambda}(1+e^{-\lambda})]$

$= 2\ln 2 + 2\lambda - 2\ln e^{\lambda} - 2\ln(1+e^{-\lambda})$

$= 2\ln e + 2\lambda - 2\lambda - 2\ln(1+e^{-\lambda})$

$A = 2\ln 2 - 2\ln(1+e^{-\lambda})$

$\lim_{\lambda \to +\infty} A = \lim_{\lambda \to +\infty} 2\ln 2 - 2\ln(1+e^{-\lambda})$

$= 2\ln 2$ car $\lim_{\lambda \to +\infty} \ln(1+e^{-\lambda}) = \ln 1 = 0$

$\lim_{\lambda \to +\infty} A = 2\ln 2$

PROBLEME N°15

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm)

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

1-/ Déterminons les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$

$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

$= \lim_{x \to 0} 2\ln(x+1) - 2\ln x - \frac{1}{x+1}$

$\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$ car $\lim_{x \to 0} \ln(x+1) = \ln 1 = 0$, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x+1} = 1$, $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

$= 0$ car $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln 1 = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x+1} = 0$

$\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

2-/ a-/ Dressons le tableau de variation de g.

Dérivée

$x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ donc dérivable sur $]0;+\infty[$.

$x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ car $x \mapsto \frac{x+1}{x}$ est dérivable et strictement positive sur $]0;+\infty[$.

g est donc dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$\forall x > 0,\ g'(x) = \frac{-2}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \frac{-2(x+1)+x}{x(x+1)^2}$

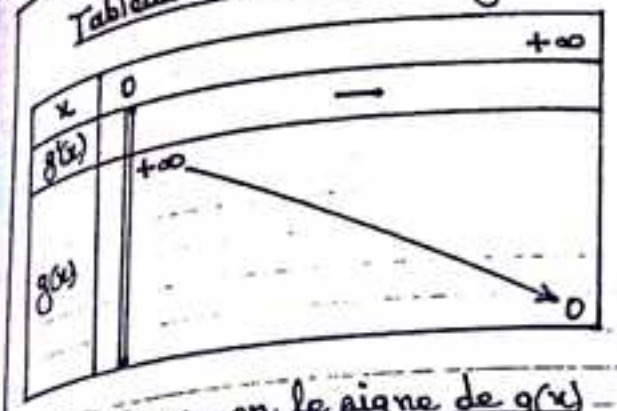
$\forall x > 0,\ g'(x) = -\frac{x+2}{x(x+1)^2}$

Sens de variation

$\forall x > 0$, $\begin{cases} x+2 > 0 \\ x(x+1)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) < 0$

g est donc strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

Tableau de variation de g



b/ Déduisons-en le signe de g(x)

D'après le tableau de variation de g on a:

$\forall x > 0,\ g(x) > 0$

PARTIE B

1/ a/ Démontrons que f est continue en 0

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$= \lim_{x\to 0} x^2 \ln(x+1) - x^2 \ln x$

$= \lim_{x\to 0} x^2 \ln(x+1) - x \cdot x \ln x$

$= 0$ car $\lim_{x\to 0} \ln(x+1) = \ln 1 = 0$ et $\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

La fonction est donc continue en 0.

b/ Démontrons que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$= \lim_{x\to 0} x \ln(x+1) - x \ln x$

$= 0 \times \ln 1 - 0 = 0$

ou $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$

La fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

Précisons la tangente à (C) à l'origine du repère

$f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$;

La courbe (C) admet à l'origine du repère une tangente horizontale.

2/ a/ Calculons $f'(x)$ pour $x > 0$

$f'(x) = 2x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x(x+1)} \cdot x^2$

$= 2x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{x}{x+1}$

$= x\left(2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)$

$f'(x) = x\,g(x)$ pour $x > 0$

b/ Déduisons-en le sens de variation de la fonction f.

D'après A-/ 1-1 b on a: $\forall x > 0,\ g(x) > 0$

$\Leftrightarrow x\,g(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

3/ a/ Calculons la limite en $+\infty$ de f

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} \ln(1+t),\ t = \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{1}{t}\cdot\frac{\ln(1+t)}{t}$

$= +\infty$ car $\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{1}{t} = +\infty$ et $\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

b/ Dressons le tableau de variat° de f

x	0		$+\infty$
f'(x)	0	+	
f(x)	0	↗	$+\infty$

4/ On pose $h(x) = f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)$ pour $x>0$ et $I(x) = \int_0^{1/x} \left(\frac{1}{1+t} - 1 + t\right) dt$

a./ Calculons $I(x)$

$I(x) = \int_0^{1/x} \left(\frac{1}{1+t} - 1 + t\right) dt$

$= \left[\ln(1+t) - t + \frac{1}{2}t^2\right]_0^{1/x}$

$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}$

$\boxed{I(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\left(x - \frac{1}{2}\right)}$

Vérifions que $h(x) = x^2 I(x)$

$h(x) = f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)$

$= x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right)$

$= x^2\left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]$

$\boxed{h(x) = x^2 I(x)}$

b/ Démontrons que pour $t>0$,

$0 \le \frac{1}{1+t} - 1 + t \le t^2$

On sait que : $\frac{1}{1+t} - 1 + t = \frac{t^2}{t+1}$

$0<t \Rightarrow 1+t>1$

$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1+t} < 1$ car la fonction $x \to \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow 0 \le \frac{t^2}{1+t} \le t^2$ car $t^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow 0 \le \frac{1}{1+t} - 1 + t \le t^2$

Conclusion :

$\boxed{\text{Pour tout } t>0,\ 0 \le \frac{1}{1+t} - 1 + t \le t^2}$

c/ Déduisons-en que : $0 \le I(x) \le \frac{1}{3x^3}$

$0 \le \frac{1}{1+t} - 1 + t \le t^2$

$\Leftrightarrow 0 \le \int_0^{1/x} \left(\frac{1}{1+t} - 1 + t\right) dt \le \int_0^{1/x} t^2\, dt$

or $\int_0^{1/x} \left(\frac{1}{1+t} - 1 + t\right) dt = I(x)$

et $\int_0^{1/x} t^2\, dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{1/x} = \frac{1}{3x^3}$

d'où $\boxed{0 \le I(x) \le \frac{1}{3x^3}}$

d./ Déterminons la limite en $+\infty$ de $h(x)$

$0 \le I(x) \le \frac{1}{3x^3} \Leftrightarrow 0 \le x^2 I(x) \le \frac{1}{3x}$

$\Leftrightarrow 0 \le h(x) \le \frac{1}{3x}$ or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$ d'après le théorème des Gendarmes.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0}$$

Déterminons le signe de $h(x)$

$\forall x>0,\ h(x) \geq 0$

e/ Soit (D) la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$

Déterminons ce que représente (D) pour (C).

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(x-\frac{1}{2}\right) = 0$

La droite (D) d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à la courbe (C) en $+\infty$

f/ Position relative de (C) par rapport à la droite (D)

On sait que pour tout $x>0$, $h(x) > 0$

$\Leftrightarrow f(x) - \left(x-\frac{1}{2}\right) > 0$

La courbe (C) est au dessus de la droite (D).

PARTIE C

1/ Construction de (C) et (D).

(Voir page suivante)

2/ Pour $0<\lambda\leq 1$, on pose $A(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)\,dx$

a/ Calculons $A(\lambda)$ en fonction de λ

$$A(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)\,dx = \int_\lambda^1 x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx$$

Posons $U(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \Rightarrow U'(x) = \frac{-1}{x(x+1)}$

$V'(x) = x^2 \Rightarrow V(x) = \frac{1}{3}x^3$

$$A(\lambda) = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]_\lambda^1 + \frac{1}{3}\int_\lambda^1 \frac{x^3}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\lambda^3 \ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) + \frac{1}{3}\int_\lambda^1 \left(\frac{1}{x+1} - 1 + x\right)dx$$

$$A(\lambda) = \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\lambda^3 \ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) + \frac{1}{3}\left[\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2\right]_\lambda^1$$

$$= \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\lambda^3 \ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\ln(1+\lambda) - \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2\right)$$

$$\boxed{A(\lambda) = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left[\lambda^3 \ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) + \ln(1+\lambda) - \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2\right]}$$

3/ Calculons $\lim_{\lambda\to 0} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^3 \ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda^3 \ln(\lambda+1) - \lambda^2 \cdot \lambda \ln\lambda$$

$$= 0$$

$\lim_{\lambda\to 0} \ln(1+\lambda) = 0$ et $\lim_{\lambda\to 0} -\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 = 0$

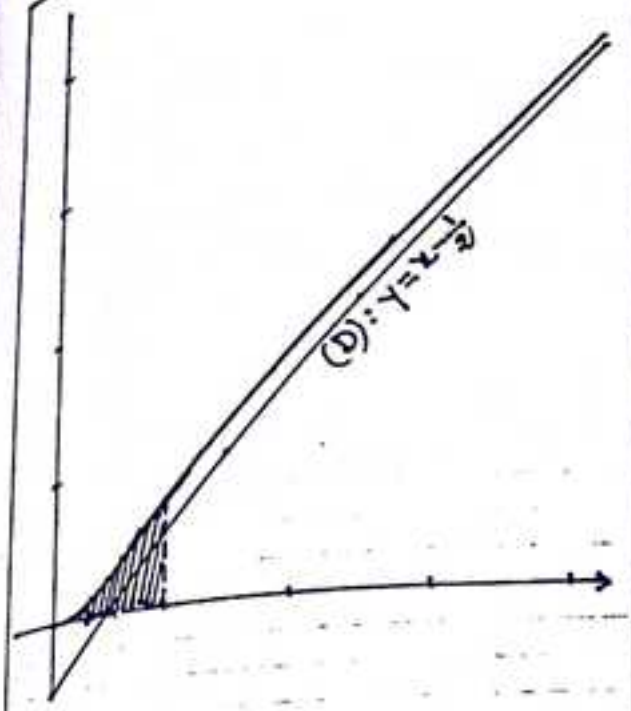
$$\boxed{\lim_{\lambda\to 0} A(\lambda) = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{2}}$$

b/ Déduisons-en l'aire en cm^2 de la partie Δ du plan limitée par (C), l'axe des abscisses, les droites d'équat° $x=0$ et $x=1$

Soit S cette aire on a:

$$S = \left(\lim_{\lambda\to 0} A(\lambda)\right) \times 4\,cm^2$$

$$\boxed{S = \left(\frac{8}{3}\ln 2 - 2\right)cm^2 \simeq 1{,}84\,cm^2}$$



PROBLEME N°16

On considère la fonction $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$ et (C_n) sa courbe représentative.

PARTIE A

1/ Etude de la fonction f_1

a/ Calculons les limites de f_1 en 0 et en $+\infty$

$f_1(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ $\quad D_{f_1} =]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln x$

$= -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$

Déduction pour la courbe (C_1)

La courbe (C_1) possède deux asymptotes dont une verticale d'équation $x=0$ et une asymptote horizontale d'équat $y=0$

b/ Etudions le sens de variation de f_1 et dressons son tableau de variation

f_1 est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x>0$,

$f_1'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$

$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-2\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{e}$

$\forall x>0$, $x^3>0$; $f_1'(x)$ a donc le signe de $1-2\ln x$.

Signe de $f_1'(x)$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

Sens de variation de f_1

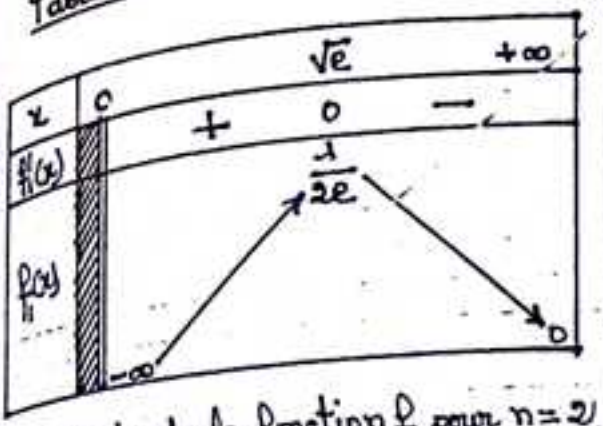
$\forall x \in]0;\sqrt{e}[$, $f_1'(x)>0$; f_1 est donc croissante sur $]0;\sqrt{e}[$

$\forall x \in]\sqrt{e};+\infty[$, $f_1'(x)<0$; f_1 est donc décroissante sur $]\sqrt{e};+\infty[$.

f_1 admet un maximum local au point $\sqrt{e}$

$f_1(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$

Tableau de variation de f_1



2/ Etude de la fonction f_2 pour $n=2$

$f_2(x) = \frac{(\ln x)^2}{x^2}$ $\quad D_{f_2} =]0;+\infty[$

a/ Calculons les limites de f_2 en 0 et en $+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_2(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(\ln x)^2}{x^2}$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{1}{x}\ln x\right)^2$

$= +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$

$= 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_2(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = 0$

Déduction pour la courbe (C_2)

La courbe (C_2) possède deux asymptotes dont une verticale d'équation $x=0$ et une horizontale d'équation $y=0$

b/ Etudions le sens de variation de f_2 et dressons son Tableau de variation

f_2 est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x>0$,

$f_2'(x) = \frac{(2\cdot\frac{1}{x}\ln x)x^2 - 2x(\ln x)^2}{x^4}$

$f_2'(x) = \frac{2(1-\ln x)\ln x}{x^3}$

$\forall x>0$, $x^3>0$; $f_2'(x)$ a donc le signe de $(1-\ln x)\ln x$.

$f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-\ln x = 0$ ou $\ln x = 0$

$\Leftrightarrow x = e$ ou $x = 1$

$f_2(e) = \frac{1}{e^2}$; $f_2(1) = 0$

Signe de $f_2'(x)$

x	0		1		e	$+\infty$
$\ln x$	‖	−	0	+	+	+
$1-\ln x$	‖	+	+	+	0	−
$f_2'(x)$	‖	−	0	+	0	−

Sens de variation de f_2

$\forall x \in]0;1[\cup]e;+\infty[$, $f_2'(x) < 0$

f_2 est donc décroissante sur $]0;1[$ et sur $]e;+\infty[$

$\forall x \in]1;e[$, $f_2'(x) > 0$; f_2 est donc croissante sur $]1;e[$

f_2 admet un minimum local au point 1 et un maximum local au point e

Tableau de variation de f_2

x	0		1		e		$+\infty$
$f_2'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗	$\frac{1}{e^2}$	↘	0

3/a/ Position relative des courbes (C_1) et (C_2)

Posons $d(x) = f_2(x) - f_1(x)$

$$= \frac{(\ln x)^2}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$d(x) = \frac{(\ln x - 1)\ln x}{x^2}$$

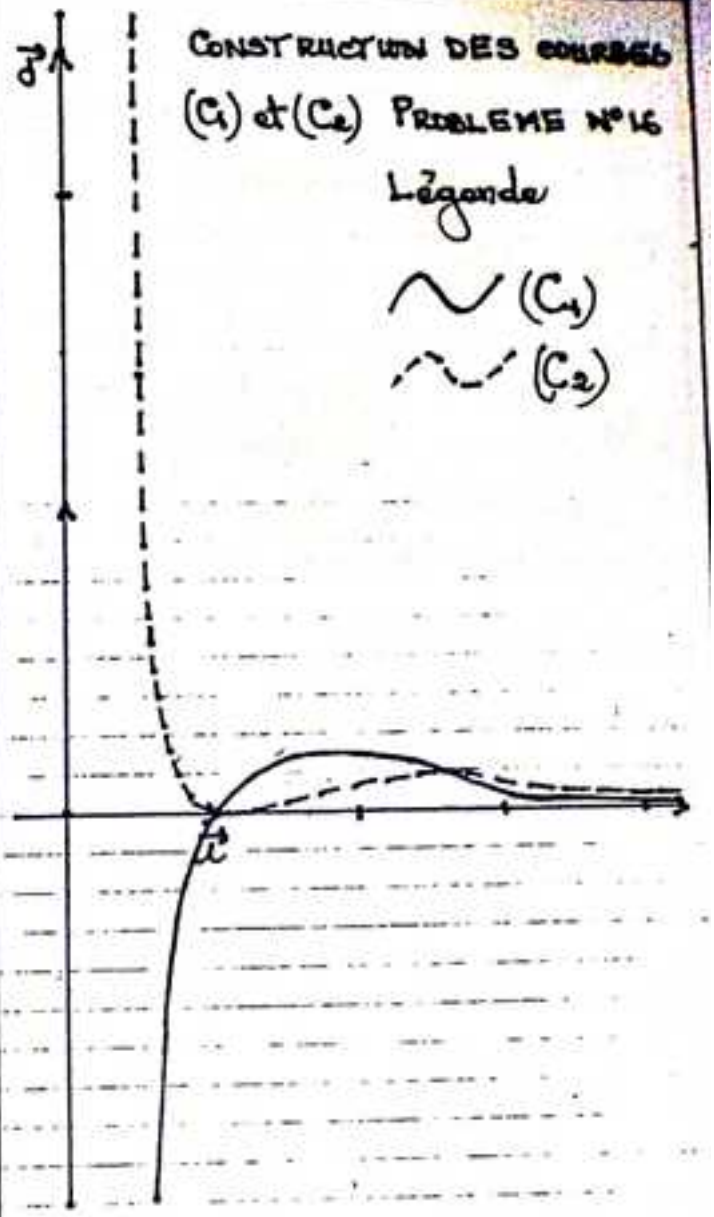
$\forall x > 0$, $x^2 > 0$; $d(x)$ a donc le signe de $(\ln x - 1)\ln x$.

Remarque : $d(x)$ a le signe de $-f_2'(x)$

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessous

x	0		1		e		$+\infty$
$d(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
Position relative de (C_1) et (C_2)	‖	(C_2) est au dessus de (C_1)	(C_2) coupe (C_1)	(C_2) est en dessous de (C_1)	(C_2) coupe (C_1).	(C_2) est au dessus de (C_1)	

b/ Construction des courbes (C_1) et (C_2) dans le même repère (Voir figure ci-contre)



PARTIE B : Cas général

1/ Montrons que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes A et B dont nous préciserons les coordonnées

$\forall n \geq 1$, $f_n(1) = \frac{(\ln 1)^n}{1^2} = \frac{0^n}{1} = 0$

$$f_n(e) = \frac{(\ln e)^n}{e^2} = \frac{1^n}{e^2} = \frac{1}{e^2}$$

Conclusion

Toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes $A(1;0)$ et $B(e;\frac{1}{e^2})$

2/ Etudions suivant la parité de n, les variations de f_n

$\forall n \geq 1$, $\mathcal{D}f_n =]0; +\infty[$

Limites de f_n aux bornes de $\mathcal{D}f_n$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f_n(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^2}(\ln x)^n$$

$$= \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$\forall n \geq 1$ on a:

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{X^n}{e^{2X}} \text{ avec } X = \ln x$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{(nt)^n}{e^{2nt}} \text{ avec } t = \frac{X}{n}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} n^n \left(\frac{t}{e^t}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{e^t}\right)^n$$

$$= n^n \times 0^n \times 0^n = 0$$

Pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Dérivée

Pour tout $n \geq 1$, f_n est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x > 0$, on a:

$$f_n'(x) = \frac{n \cdot \frac{1}{x}(\ln x)^{n-1} \cdot x^2 - 2x(\ln x)^n}{x^4}$$

$$f_n'(x) = \frac{(n - 2\ln x)(\ln x)^{n-1}}{x^3}$$

1er cas n impair

n impair $\Rightarrow n-1$ pair

$\forall x > 0$, $x^3 > 0$ et $(\ln x)^{n-1} \geq 0$

$f_n'(x)$ a donc le signe de $n - 2\ln x$.

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{n/2}$ ou $x = 1$

Signe de $f_n'(x)$

x	0		1		$e^{n/2}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$+$	0	$+$	0	$-$	

D'après le tableau précédent, f_n est croissante sur $]0; e^{n/2}[$ et décroissante sur $]e^{n/2}; +\infty[$

f_n admet un maximum local en $e^{n/2}$

$$f_n(1) = 0 \; ; \; f_n(e^{n/2}) = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$

Tableau de variation de la fonction f_n pour n impair

x	0		1		$e^{n/2}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$\left(\frac{n}{2e}\right)^n$	↘	0

Deuxième cas: n pair

$\forall x > 0$, $x^3 > 0$.

n pair $\Leftrightarrow n-1$ impair.

$f_n'(x)$ a le signe de $(n - 2\ln x)(\ln x)^{n-1}$

Signe de $f_n'(x)$

x	0		1		$e^{n/2}$		$+\infty$
$(\ln x)^{n-1}$	‖	$-$	0	$+$			$+$
$n - 2\ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f_n'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Sens de variation de f_n

- $\forall x \in]0;1[\cup]e^{n/2}; +\infty[$, $f_n'(x) < 0$ f_n est décroissante sur $]0;1[$ et sur $]e^{n/2}; +\infty[$
- $\forall x \in]1; e^{n/2}[$, $f_n'(x) > 0$; f_n est croissante sur $]1; e^{n/2}[$
- f_n admet un minimum local au point 1 et un maximum local au point $e^{n/2}$.

Tableau de variation de f_n pour n pair

x	0		1		$e^{n/2}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗	$\left(\frac{n}{2e}\right)^n$	↘	0

3/ Position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1})

Posons $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$

$$d_n(x) = \frac{(\ln x - 1)(\ln x)^n}{x^2}$$

$d_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e$.

1er cas n impair

x	0		1		e		$+\infty$
$d_n(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
Posit° relative de (C_n) et (C_{n+1})	‖	(C_{n+1}) est au dessous de (C_n)	(C_{n+1}) coupe (C_n)	(C_{n+1}) est en dessous de (C_n)	(C_{n+1}) coupe (C_n)	(C_{n+1}) est au dessus de (C_n)	

2e cas n pair

x	0		1		e		$+\infty$
$d_n(x)$	‖	$-$	0	$-$	0	$+$	
Posit° relative de (C_{n+1}) et (C_n)	‖	(C_{n+1}) est en dessous de (C_n)	(C_{n+1}) coupe (C_n)	(C_{n+1}) est en dessous de (C_n)	(C_{n+1}) coupe (C_n).	(C_{n+1}) est au dessus de (C_n)	

PARTIE C

On considère la suite (I_n) pour tout entier naturel n non nul définie par:

$$I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$$

a./ Montrons que pour tout n entier naturel non nul, $I_n \geq 0$

$1 \leq x \leq e \Leftrightarrow 0 \leq \ln x \leq 1$ car $x \mapsto \ln x$ est croissante sur $\mathbb{R}_*^+$

$\Leftrightarrow 0 \leq (\ln x)^n \leq 1$ car $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{(\ln x)^n}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ car $x^2 > 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$ soit $I_n \geq 0$

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad I_n \geq 0}$$

b/ Sens de variation de (I_n).

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} dx - \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$$

$$= \int_1^e \frac{(\ln x - 1)(\ln x)^n}{x^2} dx$$

$\forall x \in [1;e]$, $\begin{cases} \ln x - 1 \leq 0 \\ (\ln x)^n \geq 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{(\ln x - 1)(\ln x)^n}{x^2} \leq 0$

$\Leftrightarrow \int_1^e \frac{(\ln x - 1)(\ln x)^n}{x^2} dx \leq 0$

$\Leftrightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0$.

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante

Convergence de (I_n)

$\begin{cases} I_n \geq 0 \Rightarrow (I_n) \text{ minorée} \\ (I_n) \text{ décroissante} \end{cases}$

(I_n) est minorée et décroissante donc (I_n) est convergente

2/ a/ Calculons I_1

$I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x \, dx$

Posons $U(x) = \ln x \Rightarrow U'(x) = \frac{1}{x}$

$V'(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow V(x) = -\frac{1}{x}$

$I_1 = \left[-\frac{1}{x} \ln x\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx$

$= -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1$

$$\boxed{I_1 = 1 - \frac{2}{e}}$$

b/ Montrons, en utilisant la méthode d'intégration par parties, que pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$

$I_{n+1} = \int_1^e \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} dx = \int_1^e \frac{1}{x^2} (\ln x)^{n+1} dx$

Posons $U(x) = (\ln x)^{n+1} \Rightarrow U'(x) = (n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n$

$V'(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow V(x) = -\frac{1}{x}$

$I_{n+1} = \left[-\frac{1}{x}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e + (n+1)\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$

$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$

$$\boxed{\forall n \geq 1, \; I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n}$$

Déduisons-en la valeur de I_2

$I_2 = -\frac{1}{e} + 2 I_1 = -\frac{1}{e} + 2\left(1 - \frac{2}{e}\right)$

$$\boxed{I_2 = 2 - \frac{5}{e}}$$

3/ Calculons en cm^2 l'aire A du domaine plan délimité par les courbes (C_1) et (C_2) et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = e$

$A(cm^2) = 20\left[\int_1^e \left(f_1(x) - f_2(x)\right) dx\right]$

$= 20(I_1 - I_2)$

$= 20\left(1 - \frac{2}{e} - 2 + \frac{5}{e}\right)$

$$\boxed{A(cm^2) = 20\left(\frac{3}{e} - 1\right)}$$

4/ En utilisant les résultats de la question C-2-b, montrons par récurrence que :

$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$

$I_1 = 1 - \frac{2}{e} = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1!} I_1 = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!}\right)$

Supposons que pour tout $n \geq 1$,
$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$ et

montrons que:

$\frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = 1 - \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}\right)$

$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$

$\Leftrightarrow I_n = n!\left[1 - \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right]$

$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$

$= -\frac{1}{e} + (n+1) n!\left[1 - \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right]$

$= -\frac{1}{e} + (n+1)!\left[1 - \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right]$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)!}\left(I_{n+1} + \frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = 1 - \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}\right)$

Conclusion

$\boxed{\forall n \geq 1,\ \frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)}$

5./ a./ Montrons que $0 \leq I_n \leq 1$

$1 \leq x \leq e \Leftrightarrow 0 \leq \ln x \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq (\ln x)^n \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{(\ln x)^n}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx \leq \int_1^e \frac{1}{x^2} dx$

$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = 1 - \frac{1}{e} < 1$

Conclusion:

$\boxed{\forall n \geq 1,\ 0 \leq I_n \leq 1}$

b./ Montrons que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} I_n = 0$

$0 \leq I_n \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{n!} I_n \leq \frac{1}{n!}$

or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$ d'où

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} I_n = 0 \text{ d'après le théorème des Gendarmes.}}$

Déduisons-en la valeur de:

$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} I_n = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = e$

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = e}$

PROBLEME N°17

On considère les fonctions f_a définies pour tout réel x non nul par:
$f_a(x) = \frac{a}{x} + \ln x^2$ où a désigne un paramètre réel. On appelle (C_a) la courbe représentative de f_a dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1./ a./ Etudions la fonction f_0

$f_0(x) = \ln x^2 = 2\ln|x|$

$D_{f_0} = \mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$\lim_{x\to\pm\infty} f_0(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 2\ln|x|$

$= \lim_{X\to+\infty} 2\ln X$, $X = |x|$

$= +\infty$

$\lim_{x\to 0} f_0(x) = \lim_{x\to 0} 2\ln|x|$

$= \lim_{x\to 0} 2\ln X$, $X = |x|$

$= -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f_0(x) = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = +\infty$
$\lim_{x\to 0^<} f_0(x) = -\infty$	$\lim_{x\to 0^>} f_0(x) = -\infty$

Dérivée

$x \mapsto |x|$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0$, $|x| > 0$.

De plus $x \mapsto \ln x$ est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$

La fonction f_0 est donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0$, $f_0'(x) = \frac{2}{x}$

Sens de variation de f_0

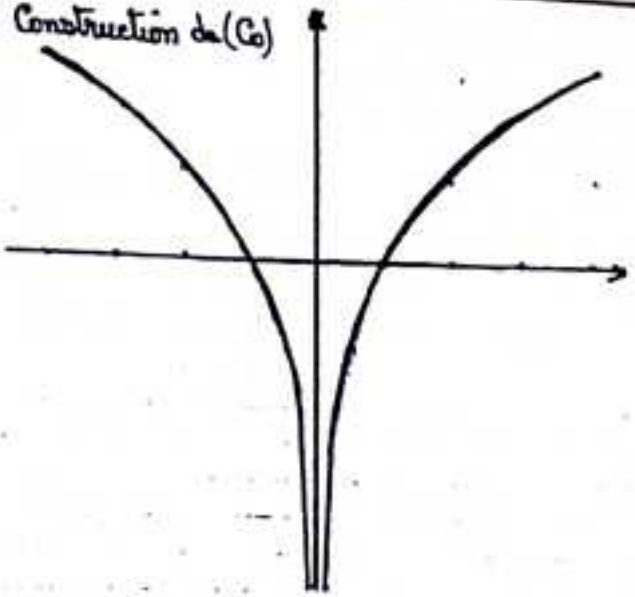
$\forall x < 0$, $f_0'(x) < 0$; f_0 est donc décroissante sur $]-\infty;0[$

$\forall x > 0$, $f_0'(x) > 0$; f_0 est donc croissante sur $]0;+\infty[$

Tableau de variation de f_0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_0'(x)$		$-$	‖	$+$	
$f_0(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Construction de (C_0)



2./ a est différent de 0

a./ Comparaison $f_{-a}(-x)$ et $f_a(x)$

$f_{-a}(-x) = \frac{-a}{-x} + \ln x^2 = \frac{a}{x} + \ln x^2 = f_a(x)$

$$f_{-a}(-x) = f_a(x)$$

b./ Déduisons-en une transformation géométrique entre les courbes (C_a) et (C_{-a})

$f_{-a}(-x) = f_a(x)$ nous permet de dire que les courbes (C_a) et (C_{-a}) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. (C_{-a}) Soy (C_a)

3./ a./ Calculons les dérivées première et seconde de f_a

$\forall x \neq 0$, $f_a'(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{2}{x}$

$$\forall x \neq 0,\ f_a'(x) = \frac{2x-a}{x^2}$$

$\forall x \neq 0$, $f_a''(x) = \frac{2x^2 - 2x(2x-a)}{x^4}$

$$\forall x \neq 0,\ f_a''(x) = \frac{3(a-x)}{x^3}$$

b/ Calculons la limite en 0 de f_a

$$\lim_{x\to 0} f_a(x) = \lim_{x<0,\ x\to 0} \frac{a}{x} + \ln x^2$$

$$= \lim_{x<0,\ x\to 0} \frac{a}{x} + 2\ln|x|$$

$$= \lim_{x<0,\ x\to 0} \frac{a}{x} + 2\ln(-x)$$

$$= \lim_{X>0,\ X\to 0} -\frac{a}{X} + 2\ln X, \quad X=-x$$

$$= \lim_{X>0,\ X\to 0} \frac{-a+2X\ln X}{X}$$

$$= \begin{cases} +\infty \text{ si } a<0 \\ -\infty \text{ si } a>0 \end{cases} \quad \text{car } \lim_{X>0,\ X\to 0} X\ln X = 0$$

$$\boxed{\lim_{x<0,\ x\to 0} f_a(x) = \begin{cases} +\infty \text{ si } a<0 \\ -\infty \text{ si } a>0 \end{cases}}$$

$$\lim_{x>0,\ x\to 0} f_a(x) = \lim_{x>0,\ x\to 0} \frac{a+2x\ln x}{x}$$

$$= \begin{cases} -\infty \text{ si } a<0 \\ +\infty \text{ si } a>0 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x>0,\ x\to 0} f_a(x) = \begin{cases} -\infty \text{ si } a<0 \\ +\infty \text{ si } a>0 \end{cases}}$$

c/ Etude des variations de f_a

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_a(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x} + \ln x^2$$

$$= +\infty \quad \left| \begin{array}{l} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x} = 0 \\ \lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right.$$

$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$

Signe de $f'_a(x)$.

$\forall x \neq 0$, $x^2>0$; $f'_a(x)$ a le signe de $2x-a$

$f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow 2x-a=0 \Leftrightarrow x=\frac{a}{2}$

Tableau de variation de f_a

$$f_a\left(\frac{a}{2}\right) = 2 + \ln\left(\frac{a^2}{4}\right)$$

1er cas $a<0$

x	$-\infty$		$\frac{a}{2}$		0		$+\infty$
$f'_a(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f_a(x)$	$+\infty$	↘	$2+\ln\left(\frac{a^2}{4}\right)$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2e cas $a>0$

x	$-\infty$		0		$\frac{a}{2}$		$+\infty$
$f'_a(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f_a(x)$	$+\infty$	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	$2+\ln\left(\frac{a^2}{4}\right)$	↗	$+\infty$

d/ Précisons les points d'inflexion des courbes (C_1) et (C_2)

$$f_1(x) = \frac{1}{x} + \ln x^2 \qquad f''_1(x) = \frac{2(1-x)}{x^2}$$

$f''_1(x) = 0 \Leftrightarrow x=1$; $f_1(1) = -1$

$$f_2(x) = \frac{2}{x} + \ln x^2 \qquad f''_2(x) = \frac{2(2-x)}{x^2}$$

$f''_2(x) = 0 \Leftrightarrow x=2$; $f_2(2) = 1+2\ln 2$

Soit I_1 le point d'inflexion de (C_1) et I_2 celui de (C_2) on a:

$I_1(-1;-1)$	$I_2(2;-1+2\ln 2)$

Déterminons l'équation de la tangente (T_1) à (C_1) en I_1 et celle de la tangente (T_2) à (C_2) en I_2

$f_1'(x)=\frac{2x-1}{x^2}$ $\quad f_2'(x)=\frac{2x-2}{x^2}$

$f_1'(-1)=-1$ $\quad f_2'(2)=\frac{1}{2}$

$(T_1): y=x$	$(T_2): y=\frac{1}{2}x+2\ln 2$

Construction des courbes (C_1) et (C_2)

Branches infinies

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a}{x^2}-\frac{2\ln x}{x}$, $x=-x$

$=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a}{x^2}+\frac{2\ln x}{x}$

$=0$

Les courbes (C_1) et (C_2) admettent une branche infinie de direction (ox) et une asymptote verticale d'équation $x=0$

Pour la construction des courbes (C_1) et (C_2) voir figure à page suivante

4/ Soit S_a le point de (C_a) où la tangente est parallèle à l'axe (ox)

a/ Déterminons l'ensemble des points S_a lorsque a décrit $\mathbb{R}^*$

$S_a\left(\frac{a}{2};\ 2+\ln\left(\frac{a^2}{4}\right)\right)$

$\begin{cases} x=\frac{a}{2} \Rightarrow a=2x,\ x\neq 0 \\ y=2+\ln\left(\frac{a^2}{4}\right) \end{cases}$

$y=2+\ln x^2$, $x\neq 0$

Lorsque a décrit $\mathbb{R}^*$, S_a décrit la courbe (Γ) d'équation $y=2+\ln x^2$, $x\neq 0$

b/ Montrons que (Γ) se déduit simplement de (C_0).

$y=2+\ln x^2=f_0(x)+2$

(Γ) est l'image de (C_0) dans la translation de vecteur $2\vec{j}$

c-/ Déterminons l'ensemble (Γ') des points d'inflexion de (C_a)

Soit I_a le point d'inflexion de (C_a) on a: $I_a(a;\ -1+\ln a^2)$

$\begin{cases} x=a \\ y=-1+\ln a^2 \end{cases} \Rightarrow y=-1+\ln x^2,\ x\neq 0$

L'ensemble des points d'inflexion de (C_a) est la courbe (Γ') d'équat°

$y=-1+\ln x^2$, $x\neq 0$

$(\Gamma')=t_{\vec{j}}(C_0)=t_{\vec{j}}(\Gamma)$

b/ a/ Equation de la Tangente (T) à la courbe (C_1) au son point d'abscisse x_1

$(T): y = f_1'(x_1)(x-x_1) + f_1(x_1)$

$= \frac{2x_1-1}{x_1^2}(x-x_1) + \frac{1}{x_1} + \ln x_1^2$

$= \left(\frac{2x_1-1}{x_1^2}\right)x - 2 + \frac{2}{x_1} + \ln x_1^2$

$\therefore \boxed{= \left(\frac{2x_1-1}{x_1^2}\right)x + 2 + f_2(x_1)}$

L'ord (x, u). Equation déterminant les abscisses des points de contact des tangentes à (C_1) passant U

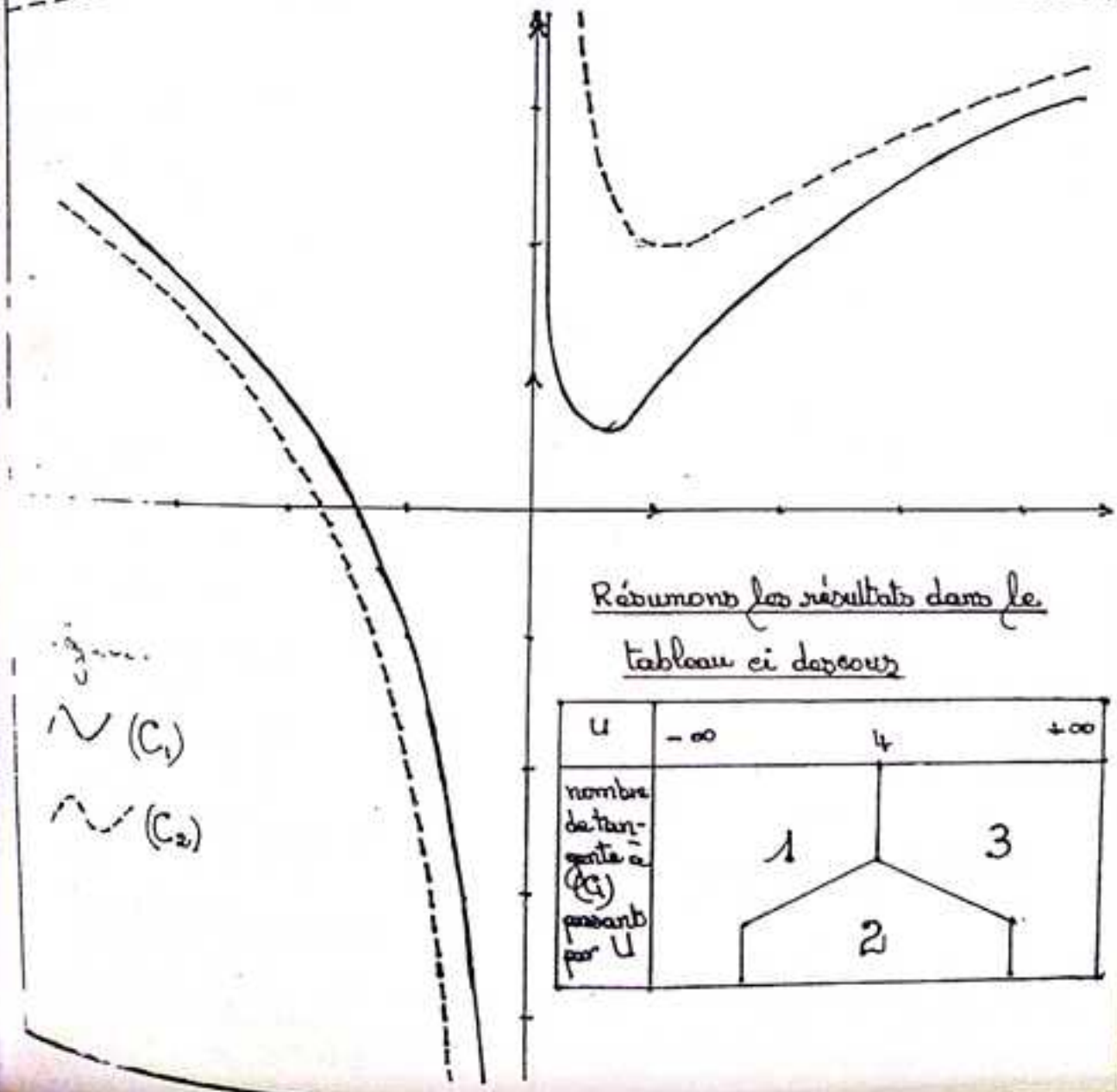
$U \in (T) \Leftrightarrow u = \frac{2x_1-1}{x_1^2} \times 0 + 2 + f_2(x_1)$

$\Leftrightarrow \boxed{f_2(x_1) = u-2}$

c/ Etudions suivant la position du point U le nombre de tangente à (C_1) passant par U

Le nombre de tangente à (C_1) passant par U est le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x_1 : $f_2(x_1) = u-2$

C'est donc le nombre de point d'$\cap$ de la courbe (C_2) avec la droite d'équation $y = u-2$



Résumons les résultats dans le tableau ci dessous

u	$-\infty$	4	$+\infty$
nombre de tangente à (C_1) passant par U	1	2	3

PROBLEME N°18

On considère la fonction f définie sur $[-e;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x + (x+e)\left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2, x \neq -e \\ f(-e) = -e. \end{cases}$$

Soit (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE A

1/ a/ Démontrons que $\lim_{x \to 0} x(\ln x)^2 = 0$

Posons $X = \ln x$.

si $x \to 0$ alors $X \to -\infty$; $x = e^X$

$$\lim_{x \to 0} x(\ln x)^2 = \lim_{X \to -\infty} X^2 e^X$$

$$= \lim_{t \to +\infty} 4t^2 e^{-2t}, \quad t = -\frac{X}{2}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} 4\left(\frac{t}{e^t}\right)^2 = 4 \times 0^2 = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x(\ln x)^2 = 0}$$

b/ Calcul de la limite de f en $-e$.

$$\lim_{x \to -e} f(x) = \lim_{x \to -e} x + (x+e)\left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]$$

or $\lim_{x \to -e} (x+e)\left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2$

$= \lim_{X \to 0} X\left[\ln\left(\frac{X}{e}\right)\right]^2$ avec $X = x+e$

$= \lim_{t \to 0} et(\ln t)^2 = e \times 0 = 0$; $t = \frac{X}{e}$

d'où $\lim_{x \to -e} (x+e)\left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2 = 0$

On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x \to -e} f(x) = -e}$$

Continuité de f en $-e$

$$\lim_{x \to -e} f(x) = -e = f(-e)$$

Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est continue en } -e}$$

c/ Etude de la dérivabilité de f au point $-e$

$$\lim_{x \to -e} \frac{f(x) - f(-e)}{x+e}$$

$$= \lim_{x \to -e} \frac{1}{x+e}\left(x+e+(x+e)\left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2\right)$$

$$= \lim_{x \to -e} 1 + \left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2$$

$$= \lim_{X \to 0} 1 + (\ln X - 1)^2$$

$= +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty \\ \text{et} \\ \lim_{X \to -\infty} (X-1)^2 = +\infty \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{x \to -e} \frac{f(x) - f(-e)}{x+e} = +\infty}$$

Conclusion

$$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable au point } -e.}$$

2/ • Sens de variation de f

f est dérivable sur $]-e;+\infty[$ et

$\forall x > -e$,

$$f'(x) = 1 + \left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2 + 2(x+e) \cdot \frac{\frac{1}{e}}{\frac{x+e}{e}} \ln\left(\frac{x+e}{e}\right)$$

$\forall x > -e,\ f'(x) = 1 + 2\ln\left(\frac{x+e}{e}\right) + \left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2$

$\boxed{\forall x > -e,\ f'(x) = \left[1 + \ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+e}{e}\right) = -1$

$\Leftrightarrow \frac{x+e}{e} = \frac{1}{e}$

$\Leftrightarrow x+e = 1 \Leftrightarrow x = 1-e.$

$\forall x > -e,\ f'(x) \geq 0$

$\boxed{f \text{ est donc croissante sur } [-e; +\infty[}$

Dressons le tableau de variation de f

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + (x+e)\left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} -e + X + X(\ln X - 1)^2$

$= +\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

$f(1-e) = 1 - e + \left(\ln\frac{1}{e}\right)^2 = 2 - e.$

Tableau de variation de f.

x	$-e$		$1-e$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$-e$ ↗	$2-e$	↗	$+\infty$

3/ Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0

$(T): y = f'(0).x + f(0)$

$f'(0) = 1 \qquad f(0) = 0$

$\boxed{(T): y = x}$

4/ Construction de (T) et (C)

Branches infinies

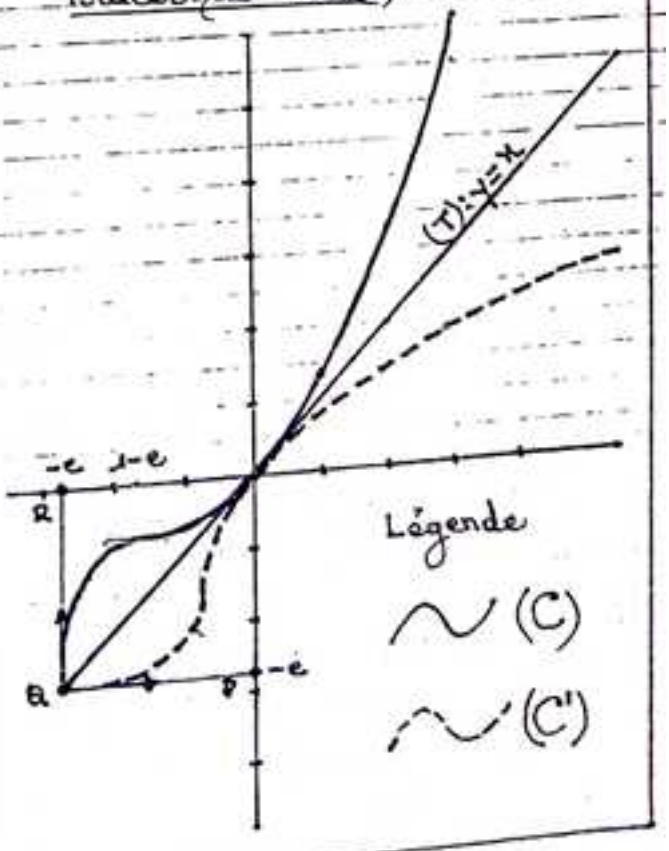
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{x+e}{x}\left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+e}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+e}{e} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2 = (+\infty)^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

- La courbe (C) possède une branche asymptotique de direction (oy).
- Rappelons que la courbe (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $-e$.

Tracer de T et (C).



5/ a/ Démontrons que f est une bijection sur un intervalle J que nous préciserons

D'après le tableau précédent, f est continue, monotone strictement croissante sur $[-e;+\infty[$ avec :

$\lim_{x\to -e} f(x) = -e$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

f définit donc une bijection de $[-e;+\infty[$ sur $[-e;+\infty[$

Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') sa courbe.

b/ Traçons (C') dans le même repère que (C) (Voir figure)

Rappelons que (C') est l'image de (C) dans la symétrie orthogonale d'axe la 1ère bissectrice (la droite d'équat° $y=x$)

c/ Déterminons l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable.

$\forall x \in]-e;2-e[\cup]2-e;+\infty[$,

$f^{-1}(x) \in]-e;1-e[\cup]1-e;+\infty[$

et $\forall x \in]-e;+\infty[-\{1-e\}$, $f'(x) > 0$

f^{-1} est donc dérivable sur $]-e;+\infty[-\{2-e\}$

- (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $-e$; on en déduit que (C') admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse $-e$

f^{-1} est donc dérivable en $-e$

- D'une manière analogue, on montre que f^{-1} n'est pas dérivable en $2-e$.

Conclusion

L'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable est $[-e;2-e[\cup]2-e;+\infty[$

PARTIE B

Soit α un nombre réel tel que : $-e < \alpha < 0$. On pose $J(\alpha) = \int_\alpha^0 f(x)\,dx$.

1/ Pour tout entier naturel n, on désigne par $I_n(\alpha)$ l'intégrale définie par : $I_n(\alpha) = \int_\alpha^0 (x+e)\left[\ln(x+e)\right]^n dx$.

a/ A l'aide d'une intégration par parties exprimons $I_n(\alpha)$ en fonction de $I_{n-1}(\alpha)$

Posons $U(x) = \left[\ln(x+e)\right]^n$

$\Rightarrow U'(x) = \frac{n}{x+e}\left[\ln(x+e)\right]^{n-1}$

$V'(x) = x+e \Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}(x+e)^2$

$I_n(\alpha) = \left[\frac{1}{2}(x+e)^2\left[\ln(x+e)\right]^n\right]_\alpha^0 - \frac{n}{2}\int_\alpha^0 (x+e)\left[\ln(x+e)\right]^{n-1} dx$

$$I_n(\alpha) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}(\alpha+e)^2\left[\ln(\alpha+e)\right]^n - \frac{n}{2}I_{n-1}(\alpha)$$

b/ Calculons $I_0(\alpha)$ puis $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$

$I_0(\alpha) = \int_\alpha^0 (x+e)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + ex\right]_\alpha^0$

$= -\frac{1}{2}\alpha^2 - e\alpha = -\frac{1}{2}\alpha(\alpha+2e)$

$$I_0(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha(\alpha+2e)$$

$$I_1(\alpha) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}(\alpha+e)^2\ln(\alpha+e) - \frac{1}{2}I_0(\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}(\alpha+e)^2\ln(\alpha+e) + \frac{1}{4}\alpha(\alpha+2e)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\alpha^2 + 2e\alpha + 2e^2 - 2(\alpha+e)^2\ln(\alpha+e)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^2 + (\alpha+e)^2 - 2(\alpha+e)^2\ln(\alpha+e)\right]$$

$$\boxed{I_1(\alpha) = \frac{1}{4}\left[e^2 + (\alpha+e)^2\left(1 - 2\ln(\alpha+e)\right)\right]}$$

$$I_2(\alpha) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}(\alpha+e)^2\left[\ln(\alpha+e)\right]^2 - I_1(\alpha)$$

Après calcul et en posant $\ln(\alpha+e) = \beta$ on a:

$$\boxed{I_2(\alpha) = \frac{1}{4}\left[e^2 - (\alpha+e)^2\left(2\beta^2 - 2\beta + 1\right)\right]}$$

2/ a/ Vérifions que pour tout $x \in]-e;+\infty[$

$$f(x) = (x+e)\left[-1 + \ln(x+e)\right]^2 + x$$

$\forall x > -e$, $f(x) = x + (x+e)\left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2$

$f(x) = x + (x+e)\left[\ln(x+e) - \ln e\right]^2$; $\ln e = 1$

$= x + (x+e)\left[-1 + \ln(x+e)\right]^2$

$$\boxed{\forall x \in]-e;+\infty[,\ f(x) = (x+e)\left[-1+\ln(x+e)\right]^2 + x}$$

b/ Exprimons $J(\alpha)$ en fonction de $I_0(\alpha)$ $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$

$$J(\alpha) = \int_\alpha^0 f(x)\,dx$$

$$= \int_\alpha^0 \left((x+e)\left[-1+\ln(x+e)\right]^2 + x\right)dx$$

$$J(\alpha) = \int_\alpha^0 \left((x+e)\left(1 - 2\ln(x+e) + (\ln(x+e))^2\right) + x\right)dx$$

$$= \int_\alpha^0 (x+e)\,dx - 2\int_\alpha^0 (x+e)\ln(x+e)\,dx$$

$$+ \int_\alpha^0 (x+e)\left(\ln(x+e)\right)^2 dx + \int_\alpha^0 x\,dx$$

$$= I_0(\alpha) - 2I_1(\alpha) + I_2(\alpha) + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_\alpha^0$$

$$\boxed{J(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha^2 + I_0(\alpha) - 2I_1(\alpha) + I_2(\alpha)}$$

Exprimons $J(\alpha)$ en fonction de α

En remplaçant $I_0(\alpha)$, $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$ par leur valeur on obtient

$$\boxed{J(\alpha) = -\frac{7}{4}\alpha^2 - e^2 - \frac{5}{2}e\alpha + \frac{(\alpha+e)^2}{2}\left(3\beta - \beta^2\right)}$$

$$\boxed{\beta = \ln(\alpha+e)}$$

3/ Calculons $\lim_{\substack{\alpha \to -e \\ \alpha > -e}} J(\alpha)$

$$\lim_{\substack{\alpha \to -e \\ \alpha > -e}} \frac{1}{2}(\alpha+e)^2\left(3\beta - \beta^2\right)$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{2}x^2\left(3\ln x - (\ln x)^2\right),\ X = x+e$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -\frac{1}{2}\left(x\ln x\right)^2 + \frac{3}{2}x(x\ln x)$$

$= 0$ car $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\ln x = 0$

$$\lim_{\substack{x \to -e \\ x > -e}} -\frac{7}{4}\alpha^2 - e^2 - \frac{5}{2}e\alpha = -\frac{1}{4}e^2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to -e \\ x > -e}} J(\alpha) = -\frac{1}{4}e^2 \quad \text{d'où}$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to -e \\ x > -e}} -J(\alpha) = \frac{e^2}{4}}$$

Interprétation géométrique du résultat.

La valeur de cette limite est l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-e$ et $x=0$.

+/ Soient P, Q et R les points du plan de coordonnées respectives : $(0;-e)$, $(-e;-e)$ et $(-e;0)$. Les courbes (C) et (C') et la droite (Δ) d'équation $y=x$ partagent le carré OPQR en quatre régions comme stipulé dans l'énoncé.

Comparons les aires de ces quatre parties

$A(S_2)=A(S_3)$ car les courbes (C) et (C') sont symétriques par rapport à (Δ).

De plus (Δ) est la diagonale du carré OPQR donc $A(S_1)=A(S_4)$ car $A(S_2)=A(S_3)$

$A(S_1)=A(S_4)=\frac{e^2}{4}$

$A(S_2)=A(S_3)=\frac{1}{2}\left(e^2-\frac{2e^2}{4}\right)=\frac{e^2}{4}$

Finalement on a:

$$\boxed{A(S_1)=A(S_2)=A(S_3)=A(S_4)}$$

PROBLEME N°19

On considère pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $[0;1]$ par: $\begin{cases} f_n(x)=x^2(\ln x)^n \text{ si } 0<x\leq 1 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$

On note (C_n) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$

PARTIE A

+/ Soit p un entier naturel. En utilisant la limite de $t^p e^{-t}$ lorsque t tend vers $+\infty$, montrer que:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x(\ln x)^p = 0$$

On sait que $\lim_{t\to+\infty} te^{-t}=0$

Posons $u=\frac{t}{p} \Leftrightarrow t=pu$

$$\lim_{t\to+\infty} t^p e^{-t} = \lim_{u\to+\infty} (pu)^p e^{-pu}$$

$$= \lim_{u\to+\infty} p^p (ue^{-u})^p = p^p \cdot 0^p = 0$$

$\lim_{t\to+\infty} t^p e^{-t}=0$

Posons $X=-\ln x$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x(\ln x)^p = \lim_{X\to+\infty} (-X)^p e^{-X}$$

$$= \lim_{X\to+\infty} (-1)^p X^p e^{-X} = (-1)^p \times 0 = 0$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x(\ln x)^p = 0}$$

2-/ Déduisons-en que pour tout entier $k\geq 1$, la limite de $x^k(\ln x)^p$

- Pour $k=1$

$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x(\ln x)^p = 0$ (Voir question précédente)

- Pour $k>1$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x^k(\ln x)^p = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x^{k-1} x(\ln x)^p = 0\times 0 = 0$$

Conclusion

Pour tout entier $k \geqslant 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^k(\ln x)^p = 0$

3/ Montrons que f_n est dérivable en 0 et calculons son nombre dérivé en 0

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2(\ln x)^n = 0$ d'après la question précédente.

La fonction f_n est continue en 0 car

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x) = f_n(0)$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x(\ln x)^n = 0$

Conclusion

La fonction f_n est dérivable en 0 et $f_n'(0) = 0$

PARTIE B

1/ Etudions le sens de variation de f_1 sur $[0;1]$

$f_1(x) = x^2(\ln x)$

$f_1(0) = 0$; $f_1(1) = 0$

Dérivée

f_1 est dérivable sur $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$,

$f_1'(x) = 2x\ln x + \dfrac{1}{x}x^2 = x(1+2\ln x)$

$f_1'(x) = x(1+2\ln x)$

$\forall x \in [0;1]$, $x > 0$, $f_1'(x)$ a donc le signe de $1+2\ln x$.

$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $1+2\ln x = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-1/2}$.

Signe de $f_1'(x)$

x	0		$e^{-1/2}$		1
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	

D'après le tableau ci-dessus, f_1 est décroissante sur $[0; e^{-1/2}[$, croissante sur $]e^{-1/2}; 1]$ et admet un minimum local au point $e^{-1/2}$.

2/ Montrons que $\forall n \geqslant 1$, $0 < e^{-n/2} < 1$

$\forall n \geqslant 1$, $\dfrac{-n}{2} < 0$

$\Leftrightarrow e^{-n/2} < e^0$ car $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow e^{-n/2} < 1$ or $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

$\Leftrightarrow 0 < e^{-n/2} < 1$

Conclusion

$\forall n \geqslant 1$, $0 < e^{-n/2} < 1$

b/ L'entier n étant fixé ($n \geqslant 1$), résolvons dans $]0;1]$ l'inéquation $\ln x + \frac{n}{2} \leqslant 0$

$\ln x + \dfrac{n}{2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \leqslant -\dfrac{n}{2} \Leftrightarrow x \leqslant e^{-n/2}$

$S =]0; e^{-n/2}]$

c/ Montrons que si $n \geqslant 2$ alors f_n est dérivable sur $[0;1]$ et $f_n'(x)$ admet le même signe que $\left(\ln x + \frac{n}{2}\right)(\ln x)^{n-1}$ pour tout $x \in]0;1]$

$x \mapsto x^2$ et $x \mapsto (\ln x)^n$ sont dérivables

sur $]0;+\infty[$ donc dérivables sur $]0;1]$

On en déduit que f_n est dérivable sur $]0;1]$.

De plus f_n est dérivable en 0 pour tout n non nul; donc si $n \geq 2$ alors f_n est dérivable en 0

Conclusion

Pour tout $n \geq 2$, f_n est dérivable sur $[0;1]$

$\forall x \in]0;1]$,

$f_n'(x) = 2x(\ln x)^n + \frac{n}{x} x^2 (\ln x)^{n-1}$

$= 2x(\ln x)^n + nx(\ln x)^{n-1}$

$= x(n + 2\ln x)(\ln x)^{n-1}$

$$f_n'(x) = 2x\left(\ln x + \frac{n}{2}\right)(\ln x)^{n-1}$$

$\forall x \in]0;1]$, $2x > 0$. d'où

$f_n'(x)$ a le même signe que $\left(\ln x + \frac{n}{2}\right)(\ln x)^{n-1}$ sur $]0;1]$.

d/ Etudions le sens de variation de f_n sur $[0;1]$ pour $n \geq 2$ suivant les valeurs de n.

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln x + \frac{n}{2} = 0$ ou $\ln x = 0$

$\ln x + \frac{n}{2} = 0 \Leftrightarrow x = e^{-n/2}$

$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

1er cas n pair

x	0		$e^{-n/2}$		1
$\ln x + \frac{n}{2}$		−	0	+	
$(\ln x)^{n-1}$		−		−	0
$f_n'(x)$	0	+	0	−	0

Sens de variation

f_n est croissante sur $[0; e^{-n/2}[$, décroissante sur $]e^{-n/2}; 1[$ et admet une maximum local au point $e^{-n/2}$

2e cas n impair

x	0		$e^{-n/2}$		1
$\ln x + \frac{n}{2}$		−	0	+	
$(\ln x)^{n-1}$		+		+	0
$f_n'(x)$	0	−	0	+	0

Sens de variation

f_n est décroissante sur $]0; e^{-n/2}[$, croissante sur $]e^{-n/2}; 1[$ et admet un minimum local au point $e^{-n/2}$

$f_n(e^{-n/2}) = e^{-n} \times \left(\frac{-n}{2}\right)^n = \left(\frac{-n}{2e}\right)^n$

Remarque : (C_n) admet aux points d'abscisses 0 et 1 une tangente horizontale

Dressons le tableau de variation de f_n

1er cas n pair

x	0		$e^{-n/2}$		1
$f_n'(x)$	0	+	0	−	
$f_n(x)$	0	↗	$\left(\frac{-n}{2e}\right)^n$	↘	0

2e cas n impair

x	0		$e^{-n/2}$		1
$f_n'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	↘	$\left(\frac{-n}{2e}\right)^n$	↗	0

3/ Tableau de variation de la fonct- f_1

x	0		$e^{-1/2}$		1
$f_1'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	0	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗	0

Tableau de variation de la fonct- f_2

x	0		e^{-1}		1
$f_2'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f_2(x)$	0	↗	$\frac{1}{e^2}$	↘	0

Coordonnées des points d'intersection des courbes (C_1) et (C_2)

Soit $M(x;y)$ un point du plan.

$M \in (C_1) \cap (C_2) \Leftrightarrow \begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \end{cases}$ $x \in [0;1]$

$\Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow x^2 \ln x = x^2 (\ln x)^2$

$\Leftrightarrow x^2 \ln x (1 - \ln x) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1 \\ \text{ou} \\ x = e \end{cases}$ avec $x \in [0;1]$

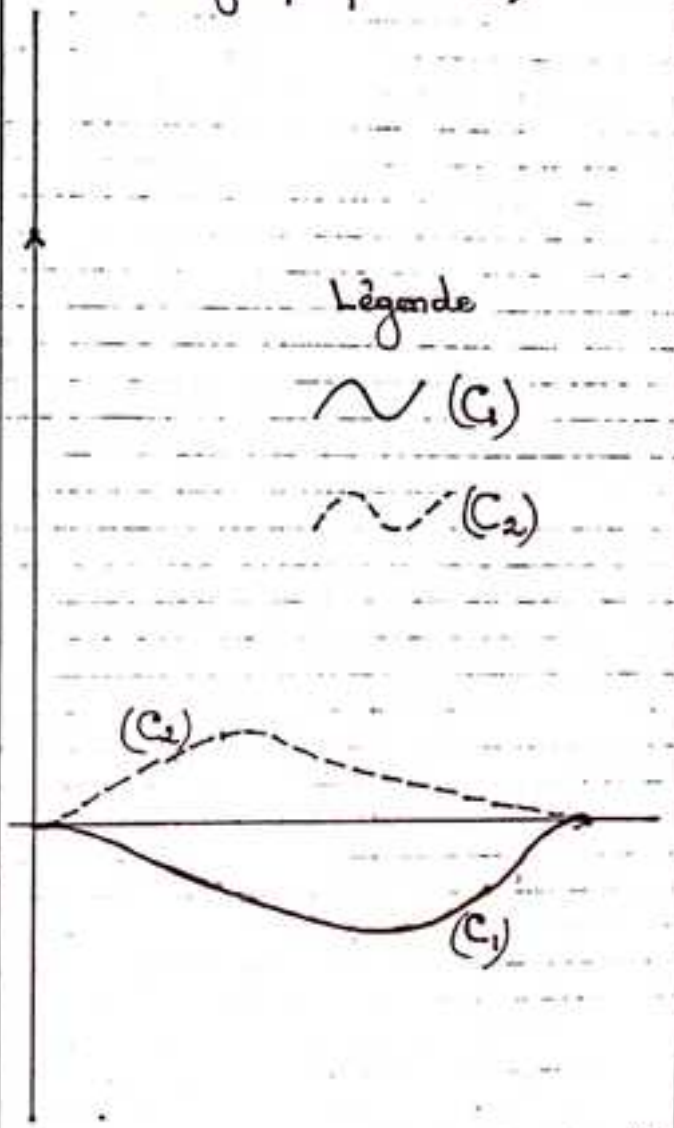
On en déduit $x = 0$ ou $x = 1$

$f_1(0) = 0$ $f_1(1) = 0$.

Les courbes (C_1) et (C_2) se coupent en deux points : $O(0;0)$ et $A(1;0)$

Construction des courbes (C_1) et (C_2)

(Unité graphique 10cm)



4./ Montrons que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes

Pour tout $n \neq 0$, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 0$

Toutes les courbes (C_n) passent par deux points $O(0;0)$ et $A(1;0)$

PARTIE C.

Dans cette partie t désigne un réel de l'intervalle $[0;1]$ et n un entier naturel non nul

1/ On pose $I_n(t) = \int_t^1 f_n(x)\,dx$ et

$$L_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx .$$

a/ Justifions l'existence de $I_n(t)$

La fonction f_n est continue sur $[0;1]$ donc continue sur $[t;1]$ car $[t;1]$ est inclus dans $[0;1]$, ce qui justifie l'existence de $I_n(t)$.

b/ Montrons que la fonction : $t \mapsto L_n - I_n(t)$ est la primitive sur $[0;1]$ de la fonction f_n qui s'annule en $t=0$

Posons $F(t) = L_n - I_n(t)$.

$$F(0) = L_n - I_n(0)$$
$$= L_n - L_n = 0$$

De plus $F(t) = \int_0^1 f_n(x)\,dx - \int_t^1 f_n(x)\,dx$

$$= \int_0^1 f_n(x)\,dx + \int_1^t f_n(x)\,dx$$

$$F(t) = \int_0^t f_n(x)\,dx$$

$$F'(t) = f_n(t)$$

Conclusion : $t \mapsto L_n - I_n(t)$ est la primitive de f_n sur $[0;1]$ qui s'annule en $t=0$

2/ Déduisons-en que $I_n(t)$ admet pour limite L_n lorsque t tend vers 0.

$\lim_{t\to 0} L_n - I_n(t) = L_n - L_n = 0$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\lim_{t\to 0} I_n(t) = L_n}$

3/ On considère la fonction numérique F définie sur $[0;1]$ par :

$F(x) = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$ pour $0 < x \leq 1$

et $F(0) = 0$

a/ Prouvons que F est dérivable sur $]0;1]$ et calculons $F'(x)$ pour $0 < x \leq 1$

$x \mapsto \frac{x^3}{3}$ et $x \mapsto \frac{x^3}{9}$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0;1]$

$x \mapsto \ln x$ est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ donc sur $]0;1]$. On en déduit que $x \mapsto \frac{x^3}{3}\ln x$ est dérivable sur $]0;1]$ et que par conséquent F est dérivable sur $]0;1]$.

$\forall x \in]0;1]$, $F'(x) = x^2\ln x + \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x} - \frac{x^2}{3}$

$= x^2\ln x$

$\boxed{\forall x \in]0;1],\ F'(x) = x^2\ln x}$

b/ Prouvons que F est dérivable en 0 et précisons $F'(0)$

$\lim_{x>0} F(x) = \lim_{x>0} \frac{x^2}{3}\left(x\ln x - \frac{x}{3}\right)$

$= 0$ car $\lim_{x>0} x\ln x = 0$

$\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = 0$

F est continue en 0.

$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{3}\left(x\ln x - \frac{x}{3}\right)$

$= 0$

Conclusion

F est dérivable en 0 et F'(0) = 0

c/ Déduisons que F est une primitive de f_1 sur $[0;1]$

On sait d'après 3·a/ de cette partie que $F'(x) = x^2\ln x = f_1(x)$.

On en déduit que F est une primitive de f_1 sur $[0;1]$.

Calculons L_1.

$L_1 = \int_0^1 f_1(x)\,dx = \left[F(x)\right]_0^1$

$= F(1) - F(0)$

$= -\frac{1}{9}$.

$$\boxed{L_1 = -\frac{1}{9}}$$

4/ Soit φ_n la fonction définie sur $]0;1]$ par $\varphi_n(t) = -\frac{1}{3}t^3(\ln t)^n$

a/ Déterminons $\lim_{t\to 0} \varphi_n(t)$

D'après A·2·/, $\lim_{t\to 0} t^k(\ln t)^p = 0$ $k\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}$.

On en déduit que $\lim_{t\to 0} t^3(\ln t)^n = 0$

d'où $$\boxed{\lim_{t\to 0} \varphi_n(t) = 0}$$

b/ Prouvons que pour $t\in[0;1]$

$I_{n+1}(t) = \varphi_{n+1}(t) - \frac{n+1}{3} I_n(t)$

$I_{n+1}(t) = \int_t^1 f_{n+1}(x)\,dx$

$= \int_t^1 x^2(\ln x)^{n+1}\,dx$

Posons $u(x) = (\ln x)^{n+1} \Rightarrow u'(x) = \frac{n+1}{x}(\ln x)^n$

$v'(x) = x^2 \Leftrightarrow v(x) = \frac{1}{3}x^3$

$I_{n+1}(t) = \left[\frac{1}{3}x^3(\ln x)^{n+1}\right]_t^1 - \frac{n+1}{3}\int_t^1 x^2(\ln x)^n\,dx$

$= -\frac{1}{3}t^3(\ln t)^{n+1} - \frac{n+1}{3} I_n(t)$

$$\boxed{I_{n+1}(t) = \varphi_{n+1}(t) - \frac{n+1}{3} I_n(t)}$$

c/ Déduisons-en que $L_{n+1} = -\frac{n+1}{3} L_n$

$I_{n+1}(0) = \varphi_{n+1}(0) - \frac{n+1}{3} I_n(0)$

or $I_{n+1}(0) = L_{n+1}$; $\varphi_{n+1}(0) = 0$ et $I_n(0) = L_n$

d'où $$\boxed{L_{n+1} = -\frac{n+1}{3} L_n}$$

d/ Prouvons par récurrence que:

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ L_n = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}$

$L_1 = -\frac{1}{9} = (-1)^1\frac{1!}{3^{1+1}}$ Vrai

Supposons que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ L_n = (-1)^n\frac{n!}{3^{n+1}}$ et montrons que $L_{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{3^{n+2}}$.

$L_{n+1} = -\frac{n+1}{3} L_n$

$= -(-1)^n\frac{n!}{3^{n+1}} \times \frac{n+1}{3}$

$= (-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{3^{n+2}}$

Conclusion: $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ L_n = (-1)^n\frac{n!}{3^{n+1}}$

c/ Calculons en fonction de n l'aire en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe (C_n) et l'axe (ox)

Soit A_n cette aire on a:

$$A_n = \left| \int_0^1 f_n(x)\,dx \right| = |I_n| = \frac{n!}{3^{n+1}}$$

car $|(-1)^n| = |-1|^n = 1^n = 1$

$$\boxed{A_n = \frac{n!}{3^{n+1}} \text{ ua}}$$

PROBLEME N°20

PARTIE A.

1/ Justifions le résultat suivant:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Posons $h(x) = \ln(1+x)$ on a: $h(0) = \ln 1 = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = h'(0)$$

or $h'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $h'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$

d'où:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

2/ a/ Réduisons-en que $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X}, \quad X = \frac{1}{x}$$

$$= 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1}$$

b/ Etudions la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

On sait que $a^x = e^{x\ln a}$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= e \text{ car } \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

3/ Pour tout naturel n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f_n(x) = x^n(1-x).$$

a/ Etudions le sens de variation de f_n

$x \mapsto x^n$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto 1-x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

f_n étant le produit de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f_n'(x) = nx^{n-1}(1-x) - x^n$$
$$= nx^{n-1} - nx^n - x^n$$

$$\boxed{f_n'(x) = x^{n-1}[n-(n+1)x]}$$

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{n}{n+1}$

Signe de de $f_n'(x)$

1er cas n pair

x	$-\infty$		0		$n/n+1$		$+\infty$
x^{n-1}		$-$	0	$+$		$+$	
$n-(n+1)x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]n/n+1; +\infty[$, $f_n'(x) < 0$

f_n est donc strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]\frac{n}{n+1}; +\infty[$

$\forall x \in]0; \frac{n}{n+1}[$, $f_n'(x) > 0$

f_n est strictement croissante sur $]0;\frac{n}{n+1}[$

2e cas n impair

x	$-\infty$		0		$\frac{n}{n+1}$		$+\infty$
x^{n-1}		$+$	0	$+$		$+$	
$n-(n+1)x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

$\forall x \in]-\infty;\frac{n}{n+1}[$ $f_n'(x) \geq 0$; f_n est croissante sur $]-\infty;\frac{n}{n+1}[$

$\forall x \in]\frac{n}{n+1};+\infty[$ $f_n'(x) < 0$; f_n est décroissante sur $]\frac{n}{n+1};+\infty[$

b/ Prouvons que selon la parité de n, l'équation $f_n(x) = 1$ admet soit 0 soit 1 solution dans $\mathbb{R}$.

La fonction f_n admet un maximum local au point $\frac{n}{n+1}$; $f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq 1$.

1er cas n impair

D'après le sens de variation a:

- $\forall x \geq 0$, $f_n(x) < 1$
- la restriction de f_n à $]-\infty;0]$ est monotone strictement décroissante avec $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$ et $f_n(0) = 0$

Cette restriction définit donc une bijection de $]-\infty;0]$ vers $[0;+\infty[$. L'équation $f(x) = 1$ admet donc une seule solution sur $]-\infty;0]$

Conclusion:

Pour n impair l'équation $f_n(x) = 1$ admet une seule solution.

2e cas n pair et $\neq 0$

D'après le sens de variation de f_n on a: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \leq f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) < 1$

L'équation $f_n(x) = 1$ n'a donc pas de solution dans $\mathbb{R}$ pour n pair.

Finalement:

L'équation $f_n(x) = 1$ admet 0 solution pour n pair et 1 solution pour n impair.

4/ Soit (Γ_n) les courbes de f_n.

Montrons que toutes passent par deux points fixes sauf pour certaines valeurs de n à préciser.

$f_n(0) = 0^n(1-0) = 0$ pour $n \neq 0$

$f_n(1) = 1^n(1-1) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Toutes les courbes (Γ_n) sauf (Γ_0) passent par deux points fixes $O(0;0)$ et $A(1;0)$

$f_n'(0) = 0^{n-1} \times n = 0$ pour $n > 1$

$f_n'(1) = 1^{n-1}(n-n-1) = -1$

Conclusion

Pour $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$ toutes les courbes de f_n passent par deux points fixes $O(0;0)$ et $A(1;0)$ et admettent en ces points la même tangente

En $O(0;0)$ la tangente est horizontale et en A la tangente a pour équation $y=-x+1$

PARTIE B

On note g_n la restriction de f_n sur l'intervalle $[0;1]$. Soit (C_n) la courbe représentative de g_n.

1./ Montrons que g_n possède un maximum

$$M_n = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

- Pour $n=0$ on a: $g_0(x)=1-x$.

g_0 est une fonction affine et par conséquent n'admet pas de maximum.

- Pour $n\neq 0$, $g_n'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ x=\frac{n}{n+1} \end{cases}$

D'après l'étude du sens de variation de f_n dans A.3./a./, g_n admet un maximum au point $\frac{n}{n+1}$. Ce maximum est $M_n = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$

$$= \left(\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Conclusion

Pour $n\neq 0$, g_n possède un maximum $M_n = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$. Ce maximum est atteint pour $x=\frac{n}{n+1}$

2./ Traçons (C_0), (C_1) et (C_2)

(C_0) est la droite d'équation $y=1-x$

$g_1(x) = -x^2+x$; $g_1'(x) = -2x+1$

$g_1'(x)=0 \Leftrightarrow x=1/2$; $g_1\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

Tableau de variation de g_1

x	$-\infty$		$1/2$		1
$g_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_1(x)$		↗	$1/4$	↘	

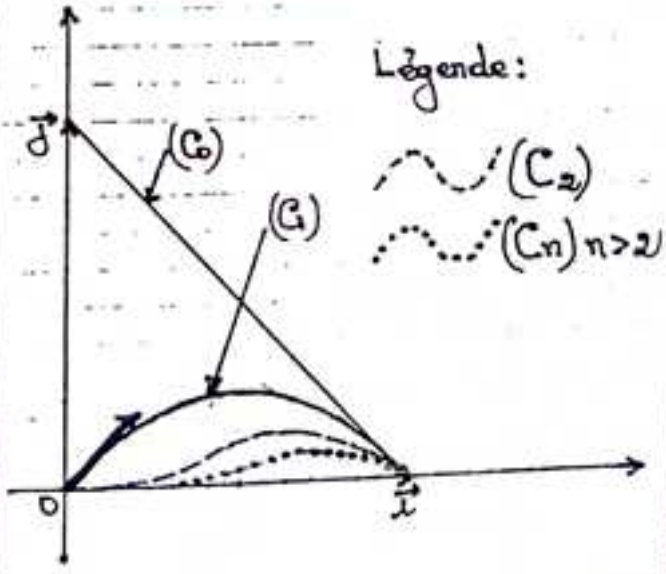
$g_2(x) = x^2(1-x)$; $g_2'(x) = x(-3x+2)$

$g_2'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=\frac{2}{3}$; $g\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{27}$

Tableau de variation de g_2

x	0		$2/3$		1
$g_2'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_2(x)$		↗	$\frac{4}{27}$	↘	

Construction des courbes (C_0), (C_1) et (C_2)



3/- Calculons $\lim_{n\to+\infty} M_n$

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$= 0$ car $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} M_n = 0}$$

- Calculons $I_n = \int_0^1 g_n(x)\,dx$

$$I_n(x) = \int_0^1 g_n(x)\,dx = \int_0^1 x^n(1-x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^n - x^{n+1})\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\boxed{I_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}}$$

- Calculons $\lim_{n\to+\infty} I_n$

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 0.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

Déterminons le résultat précédent en encadrant $g_n(x)$

$0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 1-x \le 1$

$\Leftrightarrow 0 \le x^n(1-x) \le x^n$

$\Leftrightarrow 0 \le g_n(x) \le x^n$

$\Leftrightarrow 0 \le \int_0^1 g_n(x)\,dx \le \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$

$\Leftrightarrow 0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$

or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

d'après le théorème des Gendarmes.

4/ Pour tout $x \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

on pose : $S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} g_i(x)$

a:/ Calculons $S_n(x)$

$S_n(x) = g_0(x) + g_1(x) + \dots + g_n(x)$

$S_n(x)$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de 1er terme $g_0(x) = 1-x$ et de raison x

$$S_n(x) = g_0(x)\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1-x^{n+1}$$

$$\boxed{S_n(x) = 1 - x^{n+1}}$$

Calculons $\lim_{n\to+\infty} S_n(x)$.

Pour $x = 0$, $S_n(0) = 1$

et $\lim_{n\to+\infty} S(x) = 1$

Pour $x = 1$ $S_n(1) = 0$

et $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = 0$

Pour $0 < x < 1$ on a: $\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$

et $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = 1$

∴ Posons $J_n = \int_0^1 S_n(x)\,dx$

Calculons J_n

$J_n = \int_0^1 (1 - x^{n+1})\,dx = 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$

$$J_n = \frac{n+1}{n+2}$$

Calculons $\lim_{n\to+\infty} J_n$

$\lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+2} = 1 - 0 = 1$

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = 1$$

b/ Exprimons $J_n = \int_0^1 S_n(x)\,dx$ en fonction de $I_0, I_1, \ldots, I_n$

$J_n = \int_0^1 S_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{n} g_i(x)\right) dx$

$= \sum_{i=0}^{n} \int_0^1 g_i(x)\,dx$

$= \sum_{i=0}^{n} I_i$

$$\int_0^1 S_n(x)\,dx = I_0 + I_1 + \cdots + I_n$$

Déduisons-en la valeur de:

$$P_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \sum_{i=0}^{n} I_i = \int_0^1 S_n(x)\,dx$$

$$= J_n = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

c-/ Comparons $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)\,dx$ et $\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \int_0^1 dx = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(x)\right) dx$$

PROBLEME N°21

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par: $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm).

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.

1-/ Etudions le sens de variation de g

$D_g = [0;+\infty[$

$x \mapsto x+2$ et $x \mapsto e^x$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ d'où g continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue et dérivable sur $[0;+\infty[$ et $\forall\, x \geq 0$:

$g'(x) = 1 - e^x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\forall x \geq 0$, $e^x \geq 1 \Leftrightarrow 1 - e^x \leq 0$

g est décroissante sur $[0;+\infty[$.

Déterminons la limite de g en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x+2-e^x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{e^x}{x}\right)$$

$$= -\infty \text{ car } \left|\begin{array}{l}\frac{2}{x}\to 0\\ \frac{e^x}{x}\to+\infty\end{array}\right.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$$

2-/ a-/ Montrons que l'équation $g(x)=0$ admet une solution et une seule dans $[0;+\infty[$ que l'on note α

D'après 1-/, g est continue, monotone strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ avec $g(0)=1$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

g définit donc une bijection de $[0;+\infty[$ vers $]-\infty;1]$, un intervalle qui contient 0. Il existe donc un unique réel $\alpha>0$ tel que $g(\alpha)=0$.

Conclusion

L'équation: $x\in[0;+\infty[$, $g(x)=0$ admet une unique solution α.

b-/ Prouvons que $1,14<\alpha<1,15$

$g(1,14) =$ >0; $g(1,15) =$ <0

$g(1,14)\times g(1,15)<0$. On a donc $1,14<\alpha<1,15$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\boxed{1,14<\alpha<1,15}$$

3-/ Déduisons-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

PARTIE B

1-/ a-/ Montrons que pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$

f est continue et dérivable sur $[0;+\infty[$ et $\forall x\geq 0$, $f'(x) = \frac{e^x(xe^x+1)-(e^x+xe^x)(e^x-1)}{(xe^x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{xe^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x-xe^{2x}+xe^x}{(xe^x+1)^2}$$

$$= \frac{xe^x+2e^x-e^{2x}}{(xe^x+1)^2} = \frac{e^x(x+2-e^x)}{(xe^x+1)^2}$$

$$\boxed{\forall x\geq 0 \quad f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}}$$

b-/ Déduisons-en le sens de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$

$\forall x\geq 0$, $\begin{cases} e^x>0 \\ \text{et} \\ (xe^x+1)^2>0 \end{cases}$

$f'(x)$ a donc le signe de $g(x)$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

$\forall x\in[0;\alpha[$, $f'(x)>0$; f est donc croissante sur $[0;\alpha[$

$\forall x\in]\alpha;+\infty[$, $f'(x)<0$; f est donc décroissante sur $]\alpha;+\infty[$

f possède un maximum local au point α.

2/ a/ Montrons que pour tout réel positif x, $f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

$\forall x \geq 0$, $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1}$

$= \dfrac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(x+e^{-x})} = \dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

$\boxed{\forall x \geq 0,\ f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}}$

b/ Déduisons-en la limite de f en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

$= 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+e^{-x} = +\infty \end{cases}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

Interprétation graphique du résultat

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On en déduit que la courbe (C) représentative de f possède une asymptote horizontale d'équat° $y=0$

3/a/ Etablissons que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha+1}$

On sait que $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2 - e^\alpha = 0$

$\Leftrightarrow e^\alpha = \alpha + 2$

$f(\alpha) = \dfrac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1} = \dfrac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1}$

$= \dfrac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1} = \dfrac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}$

$\boxed{f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha+1}}$

b/ Utilisons l'encadrement de α établi dans la question A.2, donnons un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}

$1,14 < \alpha < 1,15 \Leftrightarrow 2,14 < \alpha+1 < 2,15$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2,15} < \dfrac{1}{\alpha+1} < \dfrac{1}{2,14}$

$\Leftrightarrow 0,46 < f(\alpha) < 0,47$

$\boxed{0,46 < f(\alpha) < 0,47}$

4/ Equation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

$(T) : y = f'(0)x + f(0)$

$f'(0) = 1$; $f(0) = 0$.

$\boxed{(T) : y = x}$

5/ a/ Etablissons que pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$

$f(x) - x = \dfrac{(x+1)U(x)}{xe^x+1}$ avec $U(x) = e^x - xe^x - 1$

$f(x) - x = \dfrac{e^x-1}{xe^x+1} - x = \dfrac{e^x - 1 - x^2e^x - x}{xe^x+1}$

$= \dfrac{(1-x^2)e^x - (x+1)}{xe^x+1}$

$= \dfrac{(x+1)[(1-x)e^x - 1]}{xe^x+1}$

$= \dfrac{(x+1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x+1}$

$\boxed{f(x) - x = \dfrac{(x+1)U(x)}{xe^x+1} \text{ avec } U(x) = e^x - xe^x - 1}$

b/ Etude du sens de de U sur $[0; +\infty[$

$Du = [0; +\infty[$

U est continue et dérivable sur $[0;+\infty[$

et $\forall x \geq 0$, $U'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$

$\boxed{\forall x \geq 0,\ U'(x) = -xe^x}$

$\forall x \geq 0$, $U'(x) \leq 0$; la fonction U est donc strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

Déduisons-en le signe de U(x)

$U(0) = 0$ et U décroissante sur $[0;+\infty[$

On en déduit que:

$\forall x \geq 0,\ U(x) \leq U(0) = 0$

$\boxed{\text{Conclusion: } \forall x \geq 0,\ U(x) \leq 0}$

c/ Déduisons des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T)

$\forall x \geq 0 (\Leftrightarrow) \begin{cases} x+1 > 0 \\ U(x) \leq 0 \ (\Leftrightarrow) \ \dfrac{(x+1)U(x)}{xe^x+1} \leq 0 \\ xe^x+1 > 0 \end{cases}$

$(\Leftrightarrow) f(x) - x \leq 0$

Conclusion :

$\boxed{\text{la courbe (C) est en dessous de la droite (T)}}$

- Traçons la courbe (C) et la droite (T)

Pour la construction de (C) et (T) voir figure ci-contre.

PARTIE C

1/ Déterminons une primitive F de f sur $[0;+\infty[$

D'après B. 2/ on a:

$f(x) = \dfrac{1-e^x}{x+e^{-x}} = \dfrac{V'(x)}{V(x)}$ avec $V(x) = x+e^{-x}$

$F(x) = \ln|x+e^{-x}| = \ln(x+e^{-x})$

$\boxed{F(x) = \ln(x+e^{-x})}$

2-/ On note D le domaine délimité par la courbe (C), la tangente (T) et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$

Calculons en cm^2 l'aire A de D.

$A = \int_0^1 (x - f(x))\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \ln(x+e^{-x})\right]_0^1$

$= \frac{1}{2} - \ln(1+e^{-1})$

$= \frac{3}{2} - \ln(1+e)$ u.a

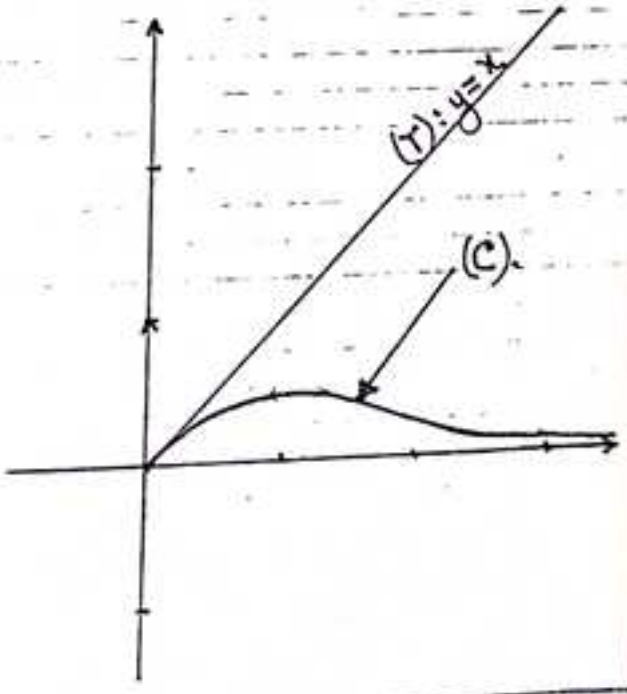
En cm^2, $A = 4\times\left(\frac{3}{2} - \ln(1+e)\right)$

$= \frac{12}{2} - 4\ln(1+e)$

$= 6 - 4\ln(1+e)$

$\boxed{A = 6 - 4\ln(1+e)\ cm^2}$

Construction de (C) et (T)



3/ Pour tout entier naturel n, on pose

$$V_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

a/ Calculons V_0, V_1, V_2

$$V_0 = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\ln(x+e^{-x})\right]_0^1$$

$$= \ln(1+e^{-1}) - \ln 1$$

$$\boxed{V_0 = \ln(1+e^{-1})}$$

$$V_1 = \int_1^2 f(x)\,dx = \left[\ln(x+e^{-x})\right]_1^2$$

$$= \ln(2+e^{-2}) - \ln(1+e^{-1})$$

$$= \ln\left(\frac{2+e^{-2}}{1+e^{-1}}\right)$$

$$\boxed{V_1 = \ln\left(\frac{2e^2+1}{e^2+e}\right)}$$

$$V_2 = \int_2^3 f(x)\,dx = \left[\ln(x+e^{-x})\right]_2^3$$

$$= \ln(3+e^{-3}) - \ln(2+e^{-2})$$

$$= \ln\left(\frac{3+e^{-3}}{2+e^{-2}}\right)$$

$$\boxed{V_2 = \ln\left(\frac{3e^3+1}{2e^3+e}\right)}$$

b/ Montrons que pour naturel $n \geq 2$

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$$

D'après 8-1-b/ la fonction f est décroissante sur $[\alpha; +\infty[$ avec $\alpha < 1{,}15$

$\Rightarrow$ f décroissante sur $[n; n+1]$, $n \geq 2$.

$n \leq x \leq n+1 \Rightarrow f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx$$

$$\Rightarrow f(n+1)(n+1-n) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)(n+1-n)$$

$$\Rightarrow f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$$

Conclusion

Pour tout naturel $n \geq 2$ on a :

$$\boxed{f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)}$$

Déduisons-en la monotonie de la suite (V_n) à partir de $n = 1$

$f(n+1) \leq V_n \leq f(n)$ $\forall\, n \geq 2$

$\Rightarrow f(n+2) \leq V_{n+1} \leq f(n+1)$

or $f(n+1) \leq V_n \Rightarrow V_{n+1} \leq f(n+1) \leq V_n$

$\Rightarrow V_{n+1} \leq V_n$

Conclusion

$$\boxed{\text{La suite } (V_n) \text{ est décroissante}}$$

c/ Déterminons la limite de (V_n)

$$\begin{cases} f(n+1) \leq V_n \leq f(n) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ d'après le théorème des Gendarmes.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} V_n = 0}$$

d/ Déterminons la somme

$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \cdots + \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{n+1} f(x)\,dx. = \ln\left(n+1+e^{-n-1}\right)$$

$$\boxed{S_n = \int_0^{n+1} f(x)\,dx}$$

PROBLEME N°22

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x - 1 + (x^2+2)e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2cm)

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = 1 - (x^2-2x+2)e^{-x}$.

1/ Etudions les limites de la fonct- g en $-\infty$ et en $+\infty$

On sait que $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$.

$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = \lim_{X\to+\infty} (nX)^n e^{-nX}$, $X = \frac{x}{n}$

$= \lim_{X\to+\infty} n^n (Xe^{-X})^n$

$= n^n \times 0^n = 0$

$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (1)

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 - (x^2-2x+2)e^{-x}$

$= -\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} x^2-2x+2 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

$\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - (x^2-2x+2)e^{-x}$

$= \lim_{x\to+\infty} 1 - x^2e^{-x} + 2xe^{-x} - 2e^{-x}$

$= 1 - 0 + 2\times0 - 2\times0 = 1$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1}$

2/ Calculons la dérivée de g et déterminons son signe.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$g'(x) = -\left[(2x-2)e^{-x} - (x^2-2x+2)e^{-x}\right]$

$= (x^2-4x+4)e^{-x}$

$\boxed{g'(x) = (x-2)^2 e^{-x}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ et $(x-2)^2 \geq 0$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) \geq 0}$

3/ Etudions le sens de variation de g.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) \geq 0$; g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car: $g'(2) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}-\{2\}$, $g'(x) > 0$.

Tableau de variation de g:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$1-2e^{-2}$	↗	1

$g(2) = 1 - 2e^{-2}$

4/ Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$

La fonction g est continue, monotone strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$

g définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\infty;1[$. Or $0 \in]-\infty;1[$.

Il existe donc un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.

Conclusion

L'équation : $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet une solution unique α.

Justifions que $0,35 < \alpha < 0,36$

$g(0,35) = -0,0024$ et $g(0,36) = 0,0166$

On a donc : $g(0,35) < 0 < g(0,36)$

$\Leftrightarrow g(0,35) < g(\alpha) < g(0,36)$

$\Leftrightarrow 0,35 < \alpha < 0,36$ car g est croissante sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : $\boxed{0,35 < \alpha < 0,36}$

5/ Déduisons-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

g étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $g(\alpha) = 0$, on a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

PARTIE B

1) Etudions les limites de f en $-\infty$ puis en $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x - 1 + (x^2+2)e^{-x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (xe^{-x} - e^{-x} + x^2 + 2)e^{-x}$$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ car

$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} xe^{-x} - e^{-x} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} x^2 + 2 = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x - 1 + (x^2+2)e^{-x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x - 1 + x^2e^{-x} + 2e^{-x}$$

$= +\infty$ car

$\lim_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} x^2e^{-x} + 2e^{-x} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2/ Déterminons $f'(x)$ pour tout x réel et montrons que $f'(x) = g(x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1 + 2xe^{-x} - (x^2+2)e^{-x}$$

$$= 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$$

$f'(x) = g(x)$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = g(x)}$

3/ Déduisons-en à l'aide de la partie A, les variations de f

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$; $f'(x)$ a donc le signe de $g(x)$. D'après A-5/ on déduis le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4./a/ Démontrons que $f(\alpha) = \alpha(1+2e^{-\alpha})$

On sait que $g(\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow 1-(\alpha^2-2\alpha+2)e^{-\alpha} = 0$

$\Leftrightarrow 1-(\alpha^2+2)e^{-\alpha}+2\alpha e^{-\alpha} = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha^2+2)e^{-\alpha} = 1+2\alpha e^{-\alpha}$

$f(\alpha) = \alpha - 1 + (\alpha^2+2)e^{-\alpha}$

$= \alpha - 1 + 1 + 2\alpha e^{-\alpha} = \alpha + 2\alpha e^{-\alpha}$

$= \alpha(1+2e^{-\alpha})$

$$\boxed{f(\alpha) = \alpha(1+2e^{-\alpha})}$$

b./ A l'aide de l'encadrement α, déterminons un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 4.10^{-2}

$0,35 < \alpha < 0,36 \Leftrightarrow e^{-0,36} < e^{-\alpha} < e^{-0,35}$ car $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 2e^{-0,36} < 2e^{-\alpha} < 2e^{-0,35}$ car $2>0$

$\Leftrightarrow 1+2e^{-0,36} < 1+2e^{-\alpha} < 1+2e^{-0,35}$

$\Rightarrow 0,35(1+2e^{-0,36}) < \alpha(1+2e^{-\alpha}) < 0,36(1+2e^{-0,35})$

$\Leftrightarrow 0,83 < f(\alpha) < 0,87.$

$$\boxed{0,83 < f(\alpha) < 0,87}$$

5./ Démontrons que la droite (Δ) d'équation $y = x-1$ est asymptote à (C) en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1) = \lim_{x\to+\infty} (x^2+2)e^{-x}$$

$$= 0$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1) = 0$. On en déduit que la droite (Δ) d'équation $y = x-1$ est asymptote à (C) en $+\infty$

Position relative de (C) et (Δ)

Posons $d(x) = f(x)-(x-1)$

$= (x^2+2)e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+2 > 0$ et $e^{-x} > 0$

$\Rightarrow (x^2+2)e^{-x} > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)-(x-1) > 0 \Leftrightarrow (C)$ est au dessus de (Δ).

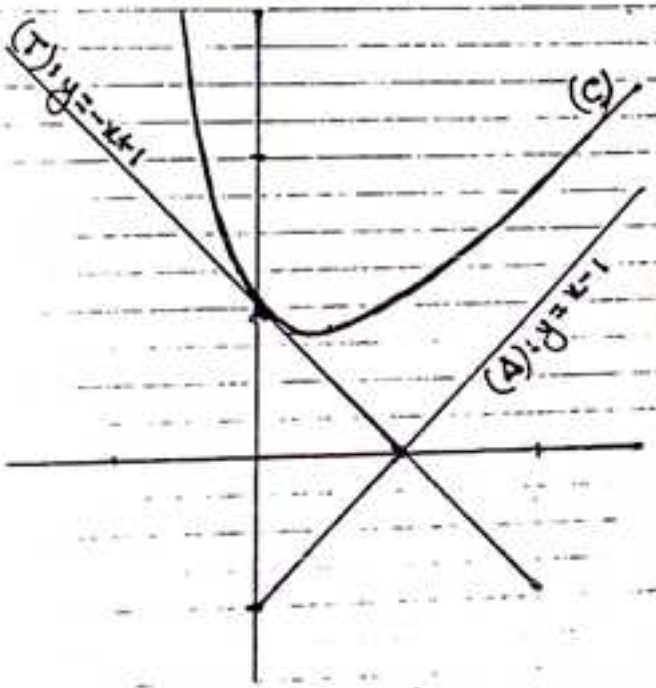
6./ Equation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

$(T): y = f'(0)x + f(0)$

$f'(0) = -1$ $\quad f(0) = 1$

$$\boxed{(T): y = -x+1}$$

7./ Traçons (Δ), (T) puis (C).



8./ a./ Déterminons les réels a, b et c tels que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par: $P(x) = (ax^2+bx+c)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de: $x \mapsto (x^2+2)e^{-x}$

$P(x) = (ax^2+bx+c)e^{-x}$

$P'(x) = (2ax+b)e^{-x} - (ax^2+bx+c)e^{-x}$

$= [-ax^2+(2a-b)x+b-c]e^{-x}$

P est une primitive de $x \mapsto (x^2+2)e^{-x}$

si $P'(x) = (x^2+2)e^{-x}$

$\Leftrightarrow (-ax^2+(2a-b)x+b-c)e^{-x} = (x^2+2)e^{-x}$

Par identification on a:

$$\begin{cases} -a = 1 \\ 2a-b = 0 \\ b-c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -4 \end{cases}$$

$a=-1$ $b=-2$ $c=-4$ sont

$P(x) = -(x^2+2x+4)e^{-x}$

b/ Calculons en fonction de α l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), (Δ) et les droites d'équations: $x=-\alpha$ et $x=0$

$\mathcal{A} = 4\int_{-\alpha}^{0} \left(f(x) - (x-1)\right) dx$

$= 4\int_{-\alpha}^{0} (x^2+2)e^{-x} dx$

$= -4\left[(x^2+2x+4)e^{-x}\right]_{-\alpha}^{0}$

$= -4\left(4 - (\alpha^2-2\alpha+4)e^{\alpha}\right)$

$\mathcal{A} = 4(\alpha^2-2\alpha+4)e^{\alpha} - 16$

c/ Justifions que $\mathcal{A} = 4e^{2\alpha} + 8e^{\alpha} - 16$

$A = 4(\alpha^2-2\alpha+4)e^{\alpha} - 16 = 4\left[(\alpha^2+2) - 2\alpha + 2\right]e^{\alpha} - 16$

ou $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\alpha^2-2\alpha+2)e^{-\alpha} = 1$

$\Leftrightarrow \alpha^2+2-2\alpha = e^{\alpha}$

$\Leftrightarrow \alpha^2+2 = e^{\alpha}+2\alpha$

$\mathcal{A} = 4\left(e^{\alpha}+2\alpha-2\alpha+2\right)e^{\alpha} - 16$

$= 4(e^{\alpha}+2)e^{\alpha} - 16 = 4e^{2\alpha}+8e^{\alpha}-16$

$\mathcal{A} = 4e^{2\alpha}+8e^{\alpha}-16$ cm^2

PARTIE C

1/ Démontrons que pour tout x de l'intervalle $[-1;2]$ on a: $1 \leq f(x) \leq 2$

On sait que f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc croissante sur $[-1;2]$

$-1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow f(-1) \leq f(x) \leq f(2)$

or $f(-1) \simeq 1,1$ et $f(2) \simeq 1,8$

$\Rightarrow 1 < 1,1 \leq f(x) \leq f(2) < 2$

$\Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq 2$

$\forall x \in [-1;2],\ 1 \leq f(x) \leq 2$

2/ Démontrons que pour tout x de l'intervalle $[-1;2]$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$.

On sait que: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$ et que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

donc: $-1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow f'(-1) \leq f'(x) \leq f'(2)$

or $f'(-1) \simeq 0,63 > 0$ et $f'(2) \simeq 0,73 < \frac{3}{4}$

donc: $\forall x \in [-1;2],\ 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$

$\forall x \in [-1;2],\ 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$

3/ Soit h la fonction définie sur $[-1;2]$ par: $h(x) = f(x) - x$.

Etudions le sens de variation de h.

$\forall x \in [-1;2]$, $h'(x) = f'(x) - 1$

or $\forall x \in [-1;2]$, $f'(x) < \frac{3}{4}$

$\Rightarrow f'(x) - 1 < -\frac{1}{4} < 0$

$\forall x \in [-1;2]$, $h'(x) < 0$

h est donc décroissante sur $[-1;2]$

De plus: $h(-1) = f(-1) - (-1) \simeq 1,1 + 1 \simeq 0,1$

$h(2) = f(2) - 2 \simeq 1,8 - 2 \simeq -0,2$

h est monotone sur $[-1;2]$ et $h(-1) \times h(2) < 0$ donc l'équat° $h(x) = 0$ admet une solution unique β sur $[-1;2]$. De plus $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$

Conclusion:

L'équation: $f(x) = x$ admet une solut° unique β sur $[-1;2]$

4/ Soit (U_n) la suite numérique définie par $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$

a/ Démontrons que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq 2$

* $U_0 = 1 \Rightarrow 1 \leq U_0 \leq 2$

* Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq 2$ et montrons qu'alors $1 \leq U_{n+1} \leq 2$

On sait que $\forall x \in [-1;2]$, $1 \leq f(x) \leq 2$

$1 \leq U_n \leq 2 \Rightarrow 1 \leq f(U_n) \leq 2$ soit

$1 \leq U_{n+1} \leq 2$.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq 2$

b/ Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{3}{4} |U_n - \beta|$$

La fonction f est dérivable sur $[-1;2]$ et $\forall x \in [-1;2]$, $0 < f'(x) \leq \frac{3}{4}$. De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, U_n et β appartiennent à $[-1;2]$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f entre β et U_n on a:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(U_n) - f(\beta)| \leq \frac{3}{4} |U_n - \beta|$

or $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f(\beta) = \beta$.

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \beta| \leq \frac{3}{4} |U_n - \beta|$$

c/ Démontrons que: $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \beta| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$\forall p \in \mathbb{N}$, $|U_{p+1} - \beta| \leq \frac{3}{4} |U_p - \beta|$ (1)

Remplaçons dans (1), p par $0, 1, 2 \ldots n-1$;

On a: $|U_1 - \beta| \leq \frac{3}{4} |U_0 - \beta|$

$|U_2 - \beta| \leq \frac{3}{4} |U_1 - \beta|$

$|U_3 - \beta| \leq \frac{3}{4} |U_2 - \beta|$

$\vdots$

$|U_n - \beta| \leq \frac{3}{4} |U_{n-1} - \beta|$

Multiplions membres à membres les n égalités obtenues et simplifions. On a:

$$|U_n - \beta| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |U_0 - \beta|$$

$1 \leq \beta \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq -\beta \leq -1$

$\Leftrightarrow -1 \leq U_0 - \beta \leq 0$

$\Leftrightarrow |U_0 - \beta| \leq 1$

$$|U_n - \beta| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |U_0 - \beta| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \beta| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

d/ Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente et donnons sa limite.

On sait que $\frac{3}{4} \in]-1;1[$ donc:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

la suite (U_n) est donc convergente et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = \beta.}$$

Déterminons n_0 tel que $\forall n \geq n_0$ on ait: $|U_n - \beta| \leq 10^{-2}$

$|U_n - \beta| \leq 10^{-2}$ si $\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 10^{-2}$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 10^{-2}}{\ln 3 - \ln 4} \simeq 16{,}008$$

On a donc: $\boxed{n_0 = 17}$

PROBLEME N°23

On considère la fonction de la variable réelle x définie par: $f_a(x) = x + ae^{-|x|}$ où a est un réel non nul, e la base des logarithmes néperiens et $|x|$ désigne la valeur absolue de x.

PARTIE A

1/ a/ Ensemble de définition de f_a

$$\boxed{\mathcal{D}f_a = \mathbb{R}}$$

Partie de $\mathcal{D}f_a$ où f_a est dérivable

f_a est dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

b/ Etudions la dérivabilité de f_a à gauche et à droite en 0

On sait que: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$f_a(0) = a$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_a(x) - f_a(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + ae^x - a}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} 1 + a\frac{e^x - 1}{x}$$

$$= 1 + a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_a(x) - f_a(0)}{x} = 1 + a.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_a(x) - f_a(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + ae^{-x} - a}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} 1 + a\frac{e^{-x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} 1 - a\frac{e^x - 1}{x}, \quad x = -x$$

$$= 1 - a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_a(x) - f_a(0)}{x} = 1 - a$$

f_a est dérivable à gauche en 0 avec $f'_{ag}(0) = 1 + a$; est dérivable à droite en 0 avec $f'_{ad}(0) = 1 - a$.

$\forall a \in \mathbb{R}^*$, $1 + a \neq 1 - a$; f_a n'est donc pas dérivable en 0.

c/ Montrons que pour tout a, la courbe (C_a) représentative de f_a admet une asymptotique oblique

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_a(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} ae^{-|x|}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} ae^{-x}, \quad x = |x|$$

$$= a \times 0 = 0$$

$\forall a \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_a(x) - x = 0$.

Conclusion :

Pour tout a non nul, la courbe (C_a) admet la droite (Δ) d'équation $y = x$ comme asymptote oblique.

2./a./ Valeur de x pour laquelle la dérivée s'annule.

$$f_a(x) = \begin{cases} x + ae^{-x}, & x \geq 0 \\ x + ae^{x}, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f'_a(x) = \begin{cases} 1 - ae^{-x}, & x \geq 0 \\ 1 + ae^{x}, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f'_a(x) = \begin{cases} 1 - ae^{-x} = 0, & x \geq 0 \quad (1) \\ \text{ou} \\ 1 + ae^{x} = 0, & x \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow x = \ln a$

$(2) \Leftrightarrow e^{x} = -\frac{1}{a} \Leftrightarrow x = -\ln(-a)$.

$\ln a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 1$

$-\ln(-a) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(-a) \geq 0 \Leftrightarrow -a \geq 1$

$\Leftrightarrow a \leq -1$

$$f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln a & a \geq 1 \\ \text{ou} \\ x = -\ln(-a), & a \leq -1 \end{cases}$$

Déduisons-en l'ensemble I des réels a pour lesquels f_a a un extrémum relatif :

$I =]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$

Nature de l'extrémum :

Tableau de signe de $f'_a(x)$

1er cas $a \leq -1$

x	$-\infty$		$-\ln(-a)$		0		$+\infty$
$f'_a(x)$		$+$	0	$-$	$1+a$	$1-a$	$+$

Pour $a \leq -1$, l'extrémum est un maximum relatif.

2e cas $a \geq 1$

x	$-\infty$		0		$\ln a$		$+\infty$
$f'_a(x)$		$+$	$1+a$	$1-a$	0	$+$	

Pour $a \geq 1$, l'extrémum est un minimum relatif.

b./ Soit x_a le point où f_a possède un extrémum relatif.

Déterminons l'ensemble des points $M(x_a, f_a(x_a))$ lorsque a décrit I

Pour $a \leq -1$, $x_a = -\ln(-a)$

$f_a(x_a) = \ln(-a) - 1$

Pour $a \geq 1$, $x_a = \ln a$

$f_a(x_a) = \ln a + 1$

$$\begin{cases} x = -\ln(-a) \\ y = \ln(-a) - 1 \\ a \leq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \ln a \\ y = \ln a + 1 \\ a \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

L'ensemble décrit par le point $M(x_a, f_a(x_a))$ lorsque a décrit I est

la réunion des demi-droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ d'équations respectives :

$(\mathcal{D}_1)$: $\begin{cases} y = -x - 1 \\ x \leq 0 \end{cases}$ $(\mathcal{D}_2)$: $\begin{cases} y = x + 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

3./a/ Tableau de variation de f_e

Pour $a = e$ $x_a = 1$ et $f_e(1) = 2$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'_e(x)$	$+$	$\|\|e$	$+e$	$-$	0	$+$	
$f_e(x)$	$-\infty$	↗	e	↘	2	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_e(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f_e(x) = +\infty$

b/ Traçons (C_e), ses demi-tangentes au point d'abscisse 0, son asymptote et l'ensemble D. (Voir page suivante)

4/ a/ Le réel a étant fixé, déterminons les points d'intersection P et Q de (C_a) avec la droite $(S) : y = x + m$, $m \in \mathbb{R}$

$f_a(x) = y \Leftrightarrow f_a(x) = x + m$

$\Leftrightarrow x + ae^{-|x|} = x + m$

$\Leftrightarrow e^{-|x|} = \frac{m}{a}$ (1)

1er cas : $\frac{m}{a} \leq 0$.

(1) n'a pas de sens et $(C_a) \cap (S) = \emptyset$

2e cas $\frac{m}{a} > 0$

(1) $\Leftrightarrow -|x| = \ln\left(\frac{m}{a}\right) \Leftrightarrow |x| = \ln\left(\frac{a}{m}\right)$

$\Leftrightarrow x_1 = \ln\left(\frac{a}{m}\right)$ ou $x_2 = -\ln\left(\frac{a}{m}\right) = \ln\left(\frac{m}{a}\right)$

$f_a(x_1) = m + \ln\left(\frac{a}{m}\right)$; $f_a(x_2) = m + \ln\left(\frac{m}{a}\right)$

$P\left(\ln\left(\frac{a}{m}\right); m + \ln\left(\frac{a}{m}\right)\right)$

$Q\left(\ln\left(\frac{m}{a}\right); m + \ln\left(\frac{m}{a}\right)\right)$

b/ – Coordonnées du point J milieu du segment [PQ]

$x_J = \frac{1}{2}(x_P + x_Q) = 0$

$y_J = \frac{1}{2}(y_P + y_Q) = m$

$J(0; m)$

– Ensemble des points J lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

J existe ssi $m \cdot a > 0$

L'ensemble des points J lorsque m varie est l'axe (oy) privé du point O.

PARTIE B

Dans cette partie on prend $a = 1$

1./ a/ Tableau de variation de f_1

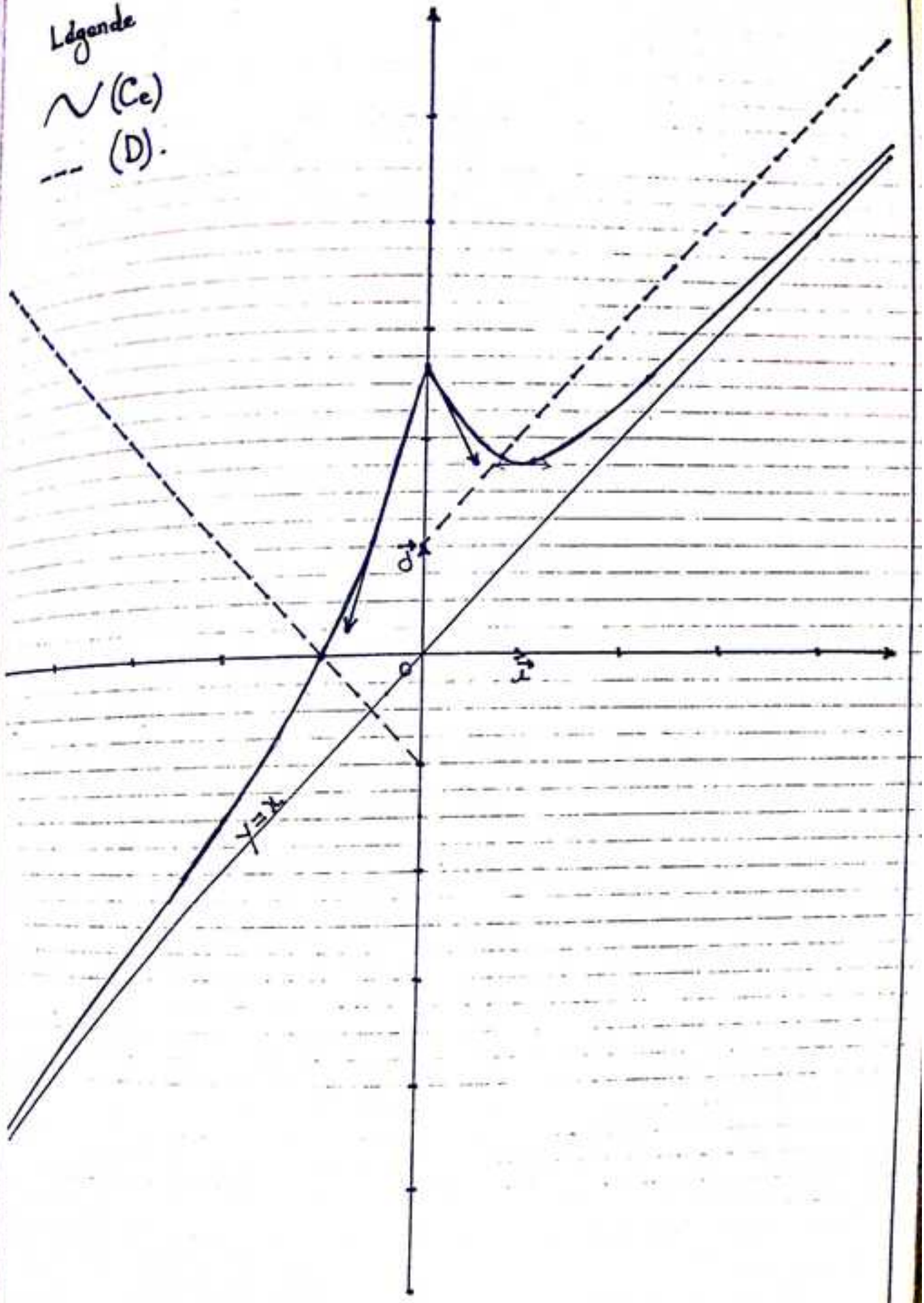
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_1(x)$	$+$	2	0	$+$	
$f_1(x)$	$-\infty$	↗	1	↗	$+\infty$

b/ Construction de (C_1), ses demi-tangentes au point d'abscisse 0 et son asymptote (Voir figure à la page

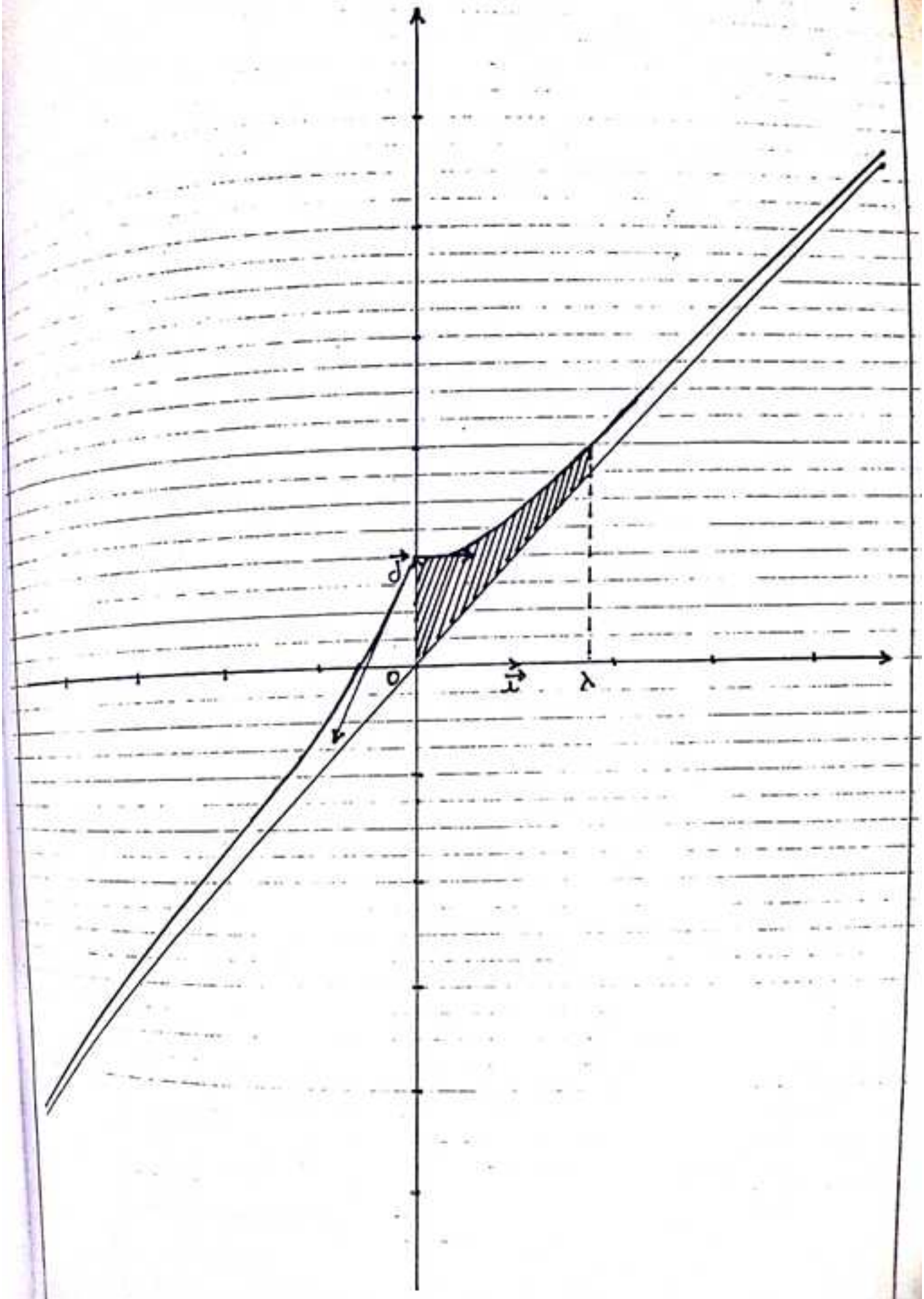
Légende

~ (Cf)

--- (D).



Construction de la courbe (C_1).



2/ Soit $\mathcal{E}'$ l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que: $\begin{cases} 0 \leq x \leq \lambda \\ x \leq y \leq f_1(x) \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

a/ Calculer l'aire S' de cet ensemble

$S' = \int_0^\lambda (f_1(x) - x)\,dx = \int_0^\lambda e^{-x}\,dx$

$= \left[-e^{-x}\right]_0^\lambda = (1 - e^{-\lambda})$ u.a.

$\boxed{S' = 4(1 - e^{-\lambda})\ cm^2}$

b/ Limite de S' lorsque λ tend vers l'infinie

$\lim_{\lambda \to +\infty} S' = \lim_{\lambda \to +\infty} 4(1 - e^{-\lambda}) = 4$ car $\lim_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda} = 0$

$\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} S' = 4\,cm^2}$

PROBLEME N°24

PARTIE A

On considère les fonctions numériques f_m de la variable réelle x définies par: $f_m(x) = e^x - m(x+1)$ $m \in \mathbb{R}$. On désigne par (C_m) leurs courbes dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2cm)

1/ Etude des variations de f_1

$f_1(x) = e^x - (x+1)$

$D_{f_1} = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x - (x+1)$

$\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = +\infty$ car $\left|\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{x \to -\infty} x+1 = -\infty \end{array}\right.$

$\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x - (x+1)$

$= \lim_{x \to +\infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$

$= +\infty$ car $\left|\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \end{array}\right.$

$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$

Dérivée

f_1 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = e^x - 1$

$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Signe de $f_1'(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	

D'après le tableau ci-dessus:

f_1 est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$, strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et admet un minimum au point 0. $f_1(0) = 0$

Tableau de variation de f_1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Construction de la courbe (C_1)

Branches infinies

$\lim_{x\to-\infty} f_1(x)+(x+1) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

La courbe (C_1) admet en $-\infty$ la droite d'équation $y = -x-1$ comme asymptote oblique.

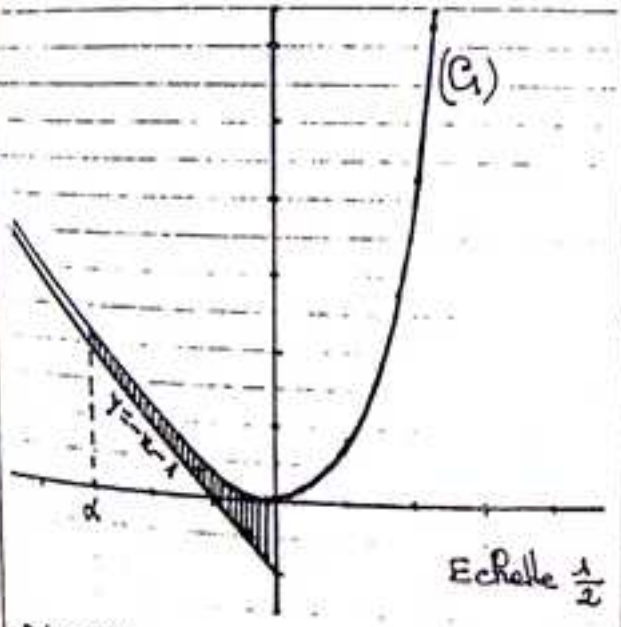
$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}$

$= +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = +\infty$

La courbe (C_1) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (oy)

Construction de (C_1)



2/ Soit (Δ_1) la droite d'équation $y=-x-1$ et $\alpha \in \mathbb{R}^-$

Calculons l'aire $A(\alpha)$ de la portion du plan limitée par (C_1), (Δ_1) et les droites d'équations : $x=0$ et $x=\alpha$

$A(\alpha) = \int_\alpha^0 \left(f_1(x) - (-x-1)\right) dx$

$= \int_\alpha^0 e^x dx = \left[e^x\right]_\alpha^0 = (1-e^\alpha)$ u.a

$A(\alpha) = (1-e^\alpha)$ u.a $= 4(1-e^\alpha)$ cm^2

$\boxed{A(\alpha) = 4(1-e^\alpha)\ \text{cm}^2}$

Calculons la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers $-\infty$

$\lim_{\alpha\to-\infty} A(\alpha) = \lim_{\alpha\to-\infty} 4(1-e^\alpha)$

$= 4$ car $\lim_{\alpha\to-\infty} e^\alpha = 0$

$\boxed{\lim_{\alpha\to-\infty} A(\alpha) = 4\text{cm}^2}$

3/ Pour tout entier naturel n, on définit par (D_n) le domaine limité par (Δ_1), (C_1) et les droites d'équations $x=-n-1$ et $x=-n$

a/ Calculons en cm^2 l'aire A_n du domaine (D_n).

$A_n = 4\int_{-n-1}^{-n} \left(f_1(x) - (-x-1)\right) dx$

$= 4\int_{-n-1}^{-n} e^x dx = 4\left[e^x\right]_{-n-1}^{-n}$

$= 4\left(e^{-n} - e^{-n-1}\right)$

$= 4e^{-n}\left(1-e^{-1}\right)$

$\boxed{A_n = \frac{4}{e}(e-1)e^{-n}}$

b/ Montrons que la suite (A_n) est une suite géométrique dont nous précisons le 1er terme A_0 et la raison

$A_n = \frac{4}{e}(e-1)e^{-n}$ $A_0 = \frac{4}{e}(e-1)$

$A_{n+1} = \frac{4}{e}(e-1)e^{-n-1}$

$= \frac{4}{e}(e-1)e^{-n}\cdot e^{-1} = \frac{1}{e}A_n$

$A_{n+1} = \frac{1}{e}A_n$.

La suite (A_n) est donc une suite géométrique de 1er terme $A_0 = \frac{4}{e}(e-1)$ et de raison $q = \frac{1}{e} = e^{-1}$

c/ Calculons $S_n = A_0 + A_1 + \cdots + A_n$

$S_n = A_0 \frac{1-(e^{-1})^{n+1}}{1-e^{-1}}$

$= 4(1-e^{-1})\frac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}}$

$\boxed{S_n = 4(1-e^{-n-1})}$

Déduisons-en la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 4(1-e^{-n-1})$

$= 4$ car $\lim_{n\to+\infty} e^{-n-1} = 0$

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = 4}$

4/ Etudions suivant les valeurs de m, les variations de f_m :

$f_m(x) = e^x - m(x+1)$

$D_{f_m} = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - m(x+1)$

$= \begin{cases} -\infty & \text{si } m<0 \\ +\infty & \text{si } m>0 \\ 0 & \text{si } m=0. \end{cases}$

$\forall m \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = +\infty$

Dérivée

f_m est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_m(x) = e^x - m$.

$\forall m \leq 0$, $f'_m(x) > 0$; f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1er cas $m<0$

Tableau de variation de f_m

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2e cas $m=0$

Tableau de variation de f_0

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_0(x)$		$+$	
$f_0(x)$	0	↗	$+\infty$

3e cas $m>0$

$f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = m \Leftrightarrow x = \ln m$.

$f_m(\ln m) = m - m(\ln m + 1) = -m\ln m$

Signe de $f'_m(x)$

x	$-\infty$		$\ln m$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	

Sens de variation de f_m

$\forall x \in]-\infty; \ln m[$ $f'_m(x) < 0$; f_m est strictement décroissante sur $]-\infty; \ln m[$

$\forall x \in]\ln m; +\infty[$ $f'_m(x) > 0$; f_m est strictement croissante sur $]\ln m; +\infty[$

* f_m admet un minimum au point $\ln m$

Tableau de variation de f_m

x	$-\infty$		$\ln m$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	$+\infty$	↘	$-m\ln m$	↗	$+\infty$

5/ Montrons que toutes courbes (C_m) passent par un point fixe B

Posons $y = f_m(x) \Leftrightarrow y = e^x - m(x+1)$

$\Leftrightarrow y - e^x = -m(x+1)$

$$\begin{cases} x+1=0 \\ y-e^x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=e^{-1}=\frac{1}{e} \end{cases}$$

Toutes les courbes (C_m) passant par le point $B\left(-1; \frac{1}{e}\right)$

6/ Montrons que la droite (Δ_m) : $y = -mx - m$ est asymptote à (C_m)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) + mx + m = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

La droite (Δ_m) : $y = -mx - m$ est asymptote oblique à (C_m) à $-\infty$.

Position relative de (C_m) et (Δ_m)

$f_m(x) - (-mx - m) = e^x > 0$

La courbe (C_m) est au dessus de (Δ_m)

PARTIE B

A tout point M du plan d'affixe $z = x+iy$, on associe par une transformation T, le point M' d'affixe $z' = x'+iy'$

$T : P \longrightarrow P$

$M \longmapsto M'$ et $z' = (1-i)z + 1 + i$

1/ Nature de T.

L'écriture complexe de (T) est sous la forme : $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

T est donc une similitude plane directe

2/ Définition analytique de T.

$z' = (1-i)z + 1 + i$

$= (1-i)(x+iy) + 1 + i$

$z' = x + y + 1 + i(-x+y+1)$, En posant $z' = x'+iy'$

on a:

$$\begin{cases} x' = x+y+1 \\ y' = -x+y+1 \end{cases}$$

3/ M étant un point de (C), déterminons en fonction de x, abscisse de M les coordonnées de M' = T(M)

$M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow y = e^x - x - 1$

$\begin{cases} x' = x + y + 1 = x + e^x - x - 1 + 1 = e^x \\ y' = -x + y + 1 = -x + e^x - x - 1 + 1 = e^x - 2x \end{cases}$

$\boxed{M'(e^x ; e^x - 2x)}$

4/ Déterminons l'ensemble (Γ), image par T de la courbe (C)

$\begin{cases} M(x;y) \in (C) \\ M'(x';y') = T(M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = e^x \\ y' = e^x - 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln x', \ x' > 0 \\ y' = x' - 2\ln x' \end{cases}$

L'ensemble (Γ) image par T de la courbe (C) est la courbe d'équation $y = x - 2\ln x$, $x > 0$

PARTIE C

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par:

$g(x) = x - \ln(x^2)$.

1/ Etudions les variations de g.

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$

$\boxed{D_g = \mathbb{R}^* =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[}$

Limites de g aux bornes de D_g

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x - \ln x^2$

$= -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty}$

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0^+$, $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x \to 0^<} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^>} g(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln(x^2)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x - 2\ln x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right)$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$

Dérivée:

g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Signe de $g'(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
g'(x)	+	+	‖	−	0	+	

Sens de variation de g

$\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[$ $g'(x) > 0$;

g est strictement croissante sur $]-\infty ; 0[$

et sur $]2;+\infty[$

$\forall x \in]0;2[$, $g'(x)<0$; g est strictement décroissante sur $]0;2[$.

g admet un minimum local au point 2

$g(2) = 2-\ln 4 = 2(1-\ln 2)$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2(1-\ln 2)$	↗	$+\infty$

Soit (Γ) la courbe de g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Précisons les branches infinies de (Γ)

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = +\infty$

La droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à la courbe (Γ).

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - 2\frac{\ln|x|}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - 2\frac{\ln(-x)}{x}$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} 1 + 2\frac{\ln X}{X}$, $X=-x$

$= 1$ car $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + 2\frac{\ln x}{x}$

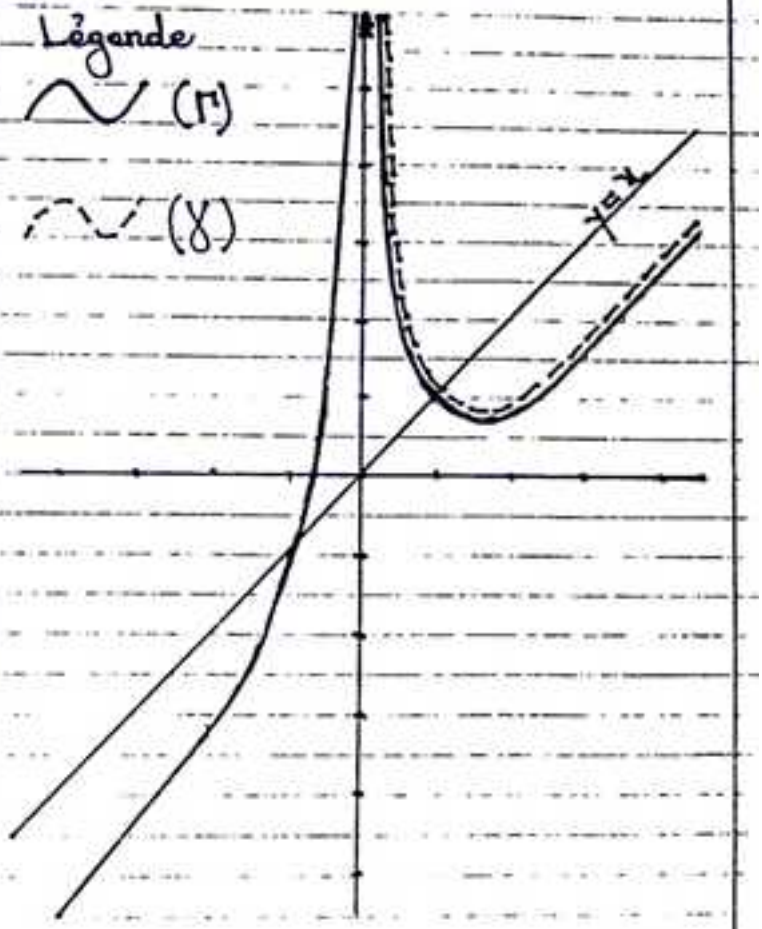
$= 1 + 2\times 0 = 1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) - x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} -\ln(x^2)$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} -\ln X$, $X=x^2$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) - x = -\infty$

La courbe (Γ) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=x$



2°/ Démontrons que l'équation $g(x)=0$ admet une seule solution dont nous donnerons un encadrement d'amplitude 10^{-1}

D'après les variations de g on a :

- $\forall x>0$, $g(x) \geqslant 2(1-\ln 2) > 0$
- la restriction de g à $]-\infty;0[$ définit

une bijection de $]-\infty;0[$ sur $\mathbb{R}$.

l'équation $g(x)=0$ admet donc une seule solution.

Notons α cette solution on a:

3/ Traçons (γ) dans le même repère que (Γ). (Voir figure à la page précédente)

PROBLEME N°25

Soit la fonction numérique f définie par: $f(x)=2x+\frac{e^x+1}{2(e^x-1)}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 1cm).

PARTIE A

1/ - Déterminons l'ensemble de définition D de f

$D=\{x\in\mathbb{R} / e^x-1\neq 0\}$

Posons $e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=\ln 1=0$

$D=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

- Etude de la parité de f

$\forall x\in\mathbb{R}^*, -x\in\mathbb{R}^*$

$f(-x)=2(-x)+\frac{e^{-x}+1}{2(e^{-x}-1)}$

$=-2x+\frac{e^{-x}(1+e^x)}{2e^{-x}(1-e^x)}$

$f(-x)=-2x-\frac{e^x+1}{2(e^x-1)}$

$=-\left(2x+\frac{e^x+1}{2(e^x-1)}\right)=-f(x)$

$f(-x)=-f(x)$.

On en déduit que f est une fonction impaire

2/ Montrons que pour tout x de D on a: $f(x)=2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}$

$\forall x\in D,\ f(x)=2x+\frac{e^x+1}{2(e^x-1)}$

$=2x+\frac{e^x-1+2}{2(e^x-1)}$

$=2x+\frac{e^x-1}{2(e^x-1)}+\frac{2}{2(e^x-1)}$

$=2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}$

$\forall x\in D,\ f(x)=2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}$

3/ Calcul des limites de f en 0 et en $+\infty$

- limites de f en 0

$f(x)=2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}$

Posons $D(x)=e^x-1$

Signe de $D(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$D(x)$		$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<}} 2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}$

$=-\infty$ car $\begin{cases} 2x+\frac{1}{2}\to\frac{1}{2} \\ e^x-1\to 0 \\ e^x-1<0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1}$

$= +\infty$ car $\begin{cases} 2x + \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \\ e^x - 1 \to 0 \\ e^x - 1 > 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

- limite de f en $+\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1}$

$= +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} 2x + \frac{1}{2} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

4/ a/ Montrons que la droite (Δ) d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (C) en $-\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (2x - \frac{1}{2}) \right] = \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{1}{e^x - 1}$

$= 0$ car $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (2x - \frac{1}{2}) \right] = 0.$

On en déduit que la droite $(\Delta) : y = 2x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$

b/ Etude de la position de (C) par rapport à (Δ)

Posons $g(x) = f(x) - (2x - \frac{1}{2}) = \frac{e^x}{e^x - 1}$

$g(x)$ est du signe de $e^x - 1$ sur D. car $e^x > 0$ sur D.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$		$+$
Position de (C) par rapport à (Δ)	(C) est en dessous de (Δ)		(C) est au dessus de (Δ)

c/ Déterminons les autres asymptotes à la courbe (C)

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (2x + \frac{1}{2}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$

Conclusion

La courbe (C) possède deux autres asymptotes dont une verticale d'équation $x = 0$ et une oblique d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$ en $+\infty$

PARTIE B

1/ Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0$ (I).

Posons $P(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$ (2)

Posons $X = e^x$

(2) $\Leftrightarrow 2X^2 - 5X + 2 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2$

$X_1 = \frac{1}{2}$ $X_2 = 2$

$e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2$

$e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

$P(x) = 2(e^x - \frac{1}{2})(e^x - 2)$

Signe de P(x)

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$\ln 2$	$+\infty$
$e^x+\frac{1}{2}$	−	+	+	
e^x-2	−	−	+	
P(x)	+	−	+	

(I) $\Leftrightarrow$ $P(x)>0$

$$S=]-\infty;-\ln 2[\cup]\ln 2;+\infty[$$

2/- Déterminons la fonction dérivée de f

f est dérivable sur D comme somme des fonctions :

$x\mapsto 2x+\frac{1}{2}$ et $x\mapsto \frac{1}{e^x-1}$ toutes dérivables sur D.

$\forall x\in D,\ f'(x)=2-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$

$$\forall x\in D,\ f'(x)=\frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}$$

$\forall x\in D,\ (e^x-1)^2>0$; $f'(x)$ est donc du signe de $2e^{2x}-5e^x+2$. Ainsi :

$\forall x\in]-\infty;-\ln 2[\cup]\ln 2;+\infty[,\ f'(x)>0$

f est strictement croissante sur $]-\infty;-\ln 2[$ et sur $]\ln 2;+\infty[$

$\forall x\in]-\ln 2;0[\cup]0;\ln 2[,\ f'(x)<0$

f est donc strictement décroissante sur $]-\ln 2;0[$ et sur $]0;\ln 2[$.

$f'(-\ln 2)=0$ $f'(\ln 2)=0$

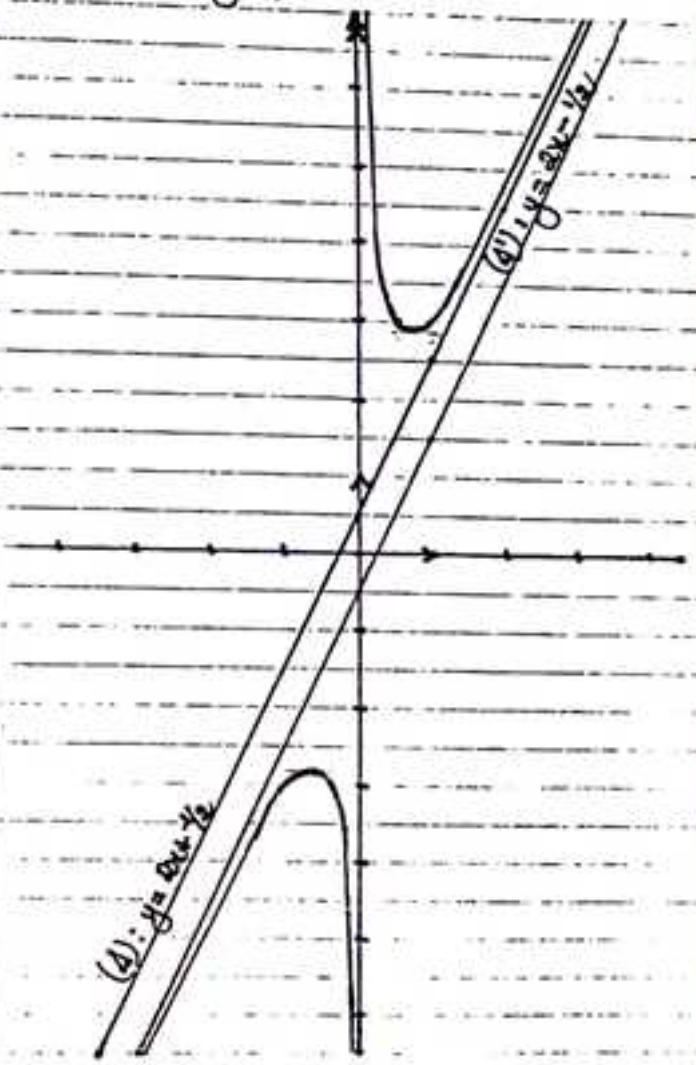
$f(-\ln 2)=-(2\ln 2+\frac{3}{2})$.

$f(\ln 2)=2\ln 2+\frac{3}{2}$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
f'(x)	+	0	−	− 0	+
f(x)	$-\infty$ ↗	$=(2\ln 2+\frac{3}{2})$ ↘	$+\infty$	↘ $2\ln 2+\frac{3}{2}$	↗ $+\infty$

3./ Construction de la courbe (C) et de ses asymptotes



4/ Déterminons l'intersection de (C) et de la droite (Dm) : $y=2x+m$ où m est un paramètre réel

Pour $m=-\frac{1}{2}$, $Dm=D_{-\frac{1}{2}}$ est confondue à Δ'

Pour $m=\frac{1}{2}$, $Dm=D_{\frac{1}{2}}$ est confondue à Δ'

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessous

m	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
Nombre de pts d'I' de (C) et (Dm)	1	0		1	
			0	0	

PARTIE C

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On définit : $I_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t-1}\,dt$

1./ a./ Interprétation graphique de I_n

$I_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t-1}\,dt = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \left(f(t) - \left(2t - \frac{1}{2}\right)\right)dt$

I_n est l'aide du domaine plan délimité par la courbe (C), la droite (Δ') d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$ et les droites d'équations $x = \ln n$ et $x = \ln(n+1)$

b./ Prouvons que $I_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$

$I_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t-1}\,dt = \left[\ln(e^t-1)\right]_{\ln n}^{\ln(n+1)}$

$= \ln(n+1-1) - \ln(n-1)$

$= \ln n - \ln(n-1)$

$= \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$

$\boxed{I_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)}$

c./ Calculons la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$

$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$

$= 0$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1} = 1$

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$

2./ On considère $S_n = I_2 + I_3 + \ldots + I_n$

A l'aide de la courbe (C) de f, donnons une interprétation graphique de S_n.

$S_n = I_2 + I_3 + \ldots + I_n$

$= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^t}{e^t-1}\,dt + \int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^t}{e^t-1}\,dt + \ldots + \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t-1}\,dt$

$S_n = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t-1}\,dt.$

S_n est l'aire du domaine limité par la courbe (C), la droite (Δ') d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$ et les droites d'équations $x = \ln 2$ et $x = \ln(n+1)$.

Calculons S_n

$S_n = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t-1}\,dt = \left[\ln(e^t-1)\right]_{\ln 2}^{\ln(n+1)}$

$= \ln(n+1-1) - \ln(2-1)$

$= \ln n$

$\boxed{S_n = \ln n}$

3./ Calcul de A_n en cm².

$A_n = S_n$ $\qquad \boxed{A_n = \ln n \text{ cm}^2}$

Calculons la limite de A_n en $+\infty$

$\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$ $\qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n = +\infty}$

PROBLEME N°26

1/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = (x+1)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a/ Etudions les variations de g

$D_g = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)e^{-x}$

$= -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{-x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} + e^{-x} = 0+0 = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Dérivée

g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit des fonctions $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto e^{-x}$ toutes dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$

$g'(x) = -xe^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$; $g'(x)$ a donc le signe de $-x$. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Signe de $g'(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

Sens de variation de g.

$\forall x \in]-\infty; 0[$, $g'(x) > 0$; g est donc strictement croissante sur $]-\infty; 0[$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $g'(x) < 0$; g est donc strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

g admet un maximum en 0

$g(0) = 1$

Tableau de variation de g.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

b/ Construction de (C) avec asymptotes

Branches infinies

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x}$

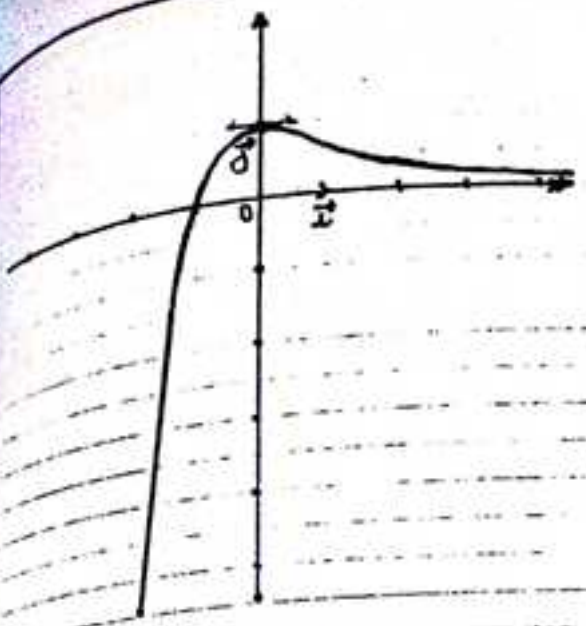
$= +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$. On en déduit que la courbe (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (oy)

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. (C) possède en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation: $y = 0$

Tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	$-e^2$	0	1	$\frac{2}{e}$	$\frac{3}{e^2}$



1/ Soit les fonctions f_a, de variable réelle x définies par: $f_a(x) = e^{-x} + ax$.
a a est un paramètre réel. On désignera par (C_a) la courbe représentative de la fonction f_a dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a/ Etudions les fonctions f_a pour $a \in \{-1; 0; 1\}$

* Etude de f_{-1}

$f_{-1}(x) = e^{-x} - x$; $\mathcal{D}f_{-1} = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_{-1}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} - x$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} + X$, $X = -x$

$= +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_{-1}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} - x$

$= -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_{-1}(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_{-1}(x) = -\infty$

Dérivée:

f_{-1} est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ étant somme de fonctions $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto -x$ toutes continues et dérivables sur $\mathbb{R}$; et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$f'_{-1}(x) = -e^{-x} - 1 = -(e^{-x} + 1)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_{-1}(x) < 0$; f_{-1} est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f_{-1}

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_{-1}(x)$		$-$	
$f_{-1}(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

* Etude de f_0

$f_0(x) = e^{-x}$ $\mathcal{D}f_0 = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X}$, $X = -x$

$= +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = 0$

Dérivée

f_0 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_0(x) = -e^{-x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_0(x) < 0$; f_0 est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f_0

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_0'(x)$		$-$	
$f_0(x)$	$+\infty$	↘	0

* Etude de f_1

$f_1(x) = e^{-x} + x$; $Df_1 = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} + x$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}(1 + xe^{x})$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} + x$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$

Dérivée :

f_1 est la somme de fonctions : $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto x$ toutes continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. f_1 est par conséquent continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = -e^{-x} + 1$

$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $f_1(0) = 1$

Signe de $f_1'(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	

Sens de variation de f_1

$\forall x \in]-\infty; 0[$, $f_1'(x) < 0$; f_1 est donc strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $f_1'(x) > 0$; f_1 est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$

f_1 admet un minimum au point 0.

Tableau de variation de f_1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Construction des courbes C_{-1}, C_0 et G

Branches infinies

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_{-1}(x) + x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

En $+\infty$, (C_{-1}) admet une asymptote oblique d'équation $y = -x$, (C_0) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et (G) admet une asymptote oblique d'équation $y = x$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_{-1}(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -1 + \frac{e^{-x}}{x}$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} -1 - \frac{e^{X}}{X}$, $X = -x$

$= -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{X\to+\infty} -\frac{e^X}{X}$, $X=-x$

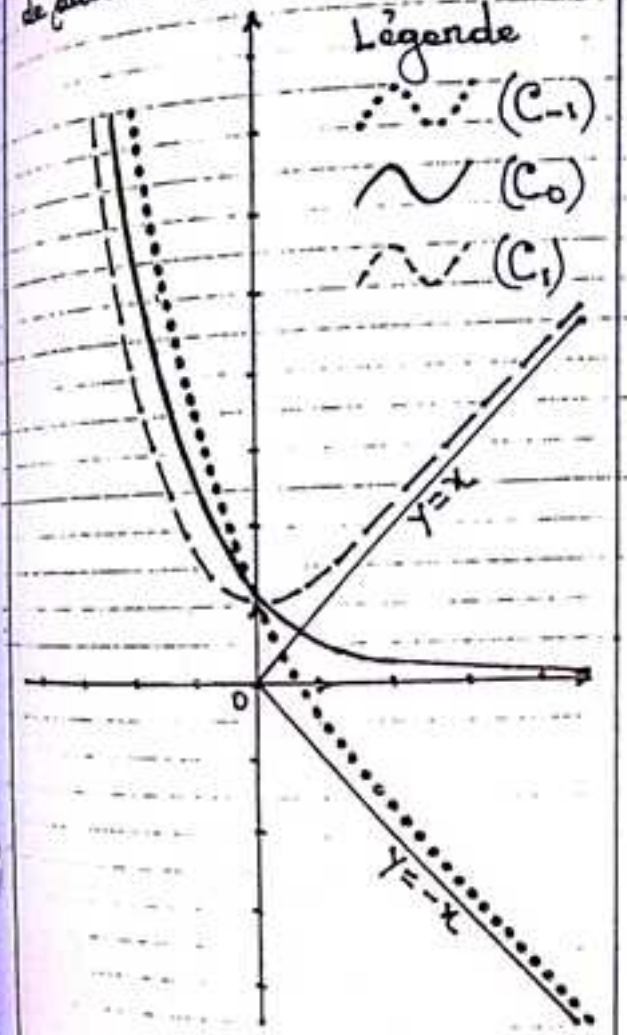
$= -\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{X\to+\infty} 1-\frac{e^X}{X}$, $X=-x$

$= -\infty$

Pour $a\in\{-1;0;1\}$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{f_a(x)}{x} = -\infty$.

En $-\infty$, les courbes (C_{-1}), (C_0) et (C_1) possèdent une branche parabolique de direction (Oy).



b/ Construisons le tableau de variation de f_a suivant les valeurs de a.

1er cas $a<0$

$\mathcal{D}f_a = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}+ax = +\infty$ car $e^{-x}\to+\infty$ et $ax\to+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}+ax$

$= -\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

Pour $a<0$ on a:

$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = -\infty$

Dérivée

f_a est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'_a(x) = -e^{-x}+a$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'_a(x)<0$; f_a est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f_a

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_a(x)$		$-$	
$f_a(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

2e cas $a=0$ Voir question précédente

3e cas $a>0$

$\mathcal{D}f_a = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}+ax$

$= \lim_{x\to-\infty} e^{-x}(1+axe^{x})$

$= +\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}+ax$

$= +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $a>0$

Dérivée

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_a(x) = -e^{-x} + a$

$f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = a \Leftrightarrow x = -\ln a$

$f_a(-\ln a) = e^{\ln a} - a\ln a = a(1-\ln a)$

Tableau de variation de f_a

x	$-\infty$		$-\ln a$		$+\infty$
$f'_a(x)$		$-$	0	$-$	
$f_a(x)$	$+\infty$	↘	$a(1-\ln a)$	↗	$+\infty$

- Valeurs de a pour lesquelles f_a réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

Soit E cet ensemble. On a d'après la question précédente :

$$E =]-\infty; 0[$$

- Valeurs de a pour lesquelles f_a admet un extrémum

D'après ce qui précède, f_a admet un extrémum pour $a > 0$.

- Soit I le point de (C_a) correspondant à cet extrémum

• Indiquons en fonction de a les coordonnées de I

$$I(-\ln a ; a(1-\ln a))$$

• Ensemble des points I lorsque a varie

$$\begin{cases} x = -\ln a \\ y = a(1-\ln a) \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = e^{-x} \\ y = e^{-x}(1+x) \end{cases}$$

L'ensemble des points I lorsque a varie est la courbe (C) représentative de la fonction g.

c-/ Utilisons les résultats précédents pour discuter suivant les valeurs de a, l'équation d'inconnue réelle x :

$$(E) : e^{-x} + ax = 0$$

$(E) \Leftrightarrow f_a(x) = 0$. Les solutions de (E) sont donc les abscisses des points d'intersection de (C_a) avec l'axe (ox)

1er cas $a < 0$

On sait que pour $a < 0$, f_a réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

(E) admet donc une seule solution

2e cas $a = 0$

Pour $a = 0$, f_0 réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$.

(E) n'admet donc pas de solution.

3e cas $a > 0$

f_a possède un minimum en $-\ln a$ et ce minimum est $a(1-\ln a)$.

Le nombre de solutions de (E) dépend du signe de $a(1-\ln a)$

a	0		e	$+\infty$
$1-\ln a$		$+$	0	$-$

• $0<a<e$

$a(1-\ln a)>0 \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}, f_a(x)>0$.

(E) n'admet donc pas de solution

• $a=e$

(E) admet une seule solution $x=-1$

• $a>e$

(E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2.

3/ a/ Montrons que quel que soit a, les fonctions f_a vérifient l'équation différentielle $y-xy'=(x+1)e^{-x}$

$f_a(x)=e^{-x}+ax$; $f'_a(x)=-e^{-x}+a$.

$y-xy'=f_a(x)-xf'_a(x)$

$=e^{-x}+ax-x(-e^{-x}+a)$

$=e^{-x}+ax+xe^{-x}-ax$

$=e^{-x}+xe^{-x}=(x+1)e^{-x}$

$\boxed{f_a(x)-xf'_a(x)=(x+1)e^{-x}.}$

$\forall a$, f_a vérifie l'équation différentielle : $y-xy'=(x+1)e^{-x}$.

b/ Equation de la tangente $\bar{a}(C_a)$ au point d'abscisse x_0

Soit (T) cette tangente en a:

(T): $y=f'_a(x_0)(x-x_0)+f_a(x_0)$

- Montrons que (T) coupe l'axe (oy) en un point indépendant de a.

Pour $x=0$ on a: $y=f_a(x_0)-x_0f'_a(x_0)$

$y=(x_0+1)e^{-x_0}$.

(T) coupe (oy) en $B(0;(x_0+1)e^{-x_0})$

c/ Soit P un point de (oy), d'ordonnée m. Etudions, selon les valeurs de m le nombre de tangente $\bar{a}(C_a)$ issues de P

$P(0;m)\in(T) \Leftrightarrow (x_0+1)e^{-x_0}=m$

$\Leftrightarrow g(x_0)=m$

le nombre de tangentes $\bar{a}(C_a)$ issues de P est le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x_0 : $g(x_0)=m$

En utilisant la courbe (C) de g dans la question on a:

m	$-\infty$	0	1	$+\infty$
nbre de tangentes issues de P	1	2	0	
		1	1	

4/ Déterminons les courbes (C'_a) et (C_a) ayant les deux propriétés suivantes :

- ces courbes sont orthogonales (P_1)
- les asymptotes de ces courbes sont perpendiculaires (P_2)

(P_1) signifie que les tangentes respectives $\bar{a}(C'_a)$ et $\bar{a}(C_a)$ en leur point d'intersection sont orthogonales

Or $(C_{a'})$ et (C_a) se coupent en $A(0;1)$ les tangentes à $(C_{a'})$ et à (C_a) en A ont respectivement pour coefficients directeurs $f'_{a'}(0)$ et $f'_a(0)$

$(P_1) \Leftrightarrow f'_{a'}(0) \cdot f'_a(0) = -1$

$\Leftrightarrow (a'-1)(a-1) = -1$

$(P_2) \Leftrightarrow aa' = -1$

(P_1) et $(P_2) \Leftrightarrow \begin{cases} aa' - (a+a') + 1 = -1 \\ aa' = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+a' = 1 \\ aa' = -1 \end{cases}$

a et a' sont solutions de l'équation

$t^2 - t - 1 = 0$

$\Delta = 1+4 = 5$

$t_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $t_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

On a donc:

$a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $a' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

ou inversement.

- Une droite parallèle à (oy) coupe (C_a) et $(C_{a'})$ en M' et M'' respectivement.

Déterminons l'ensemble (Γ) des milieux J de $[M'M'']$

Posons $x = k$ on a:

$M'\left(k, f_{a'}(k)\right)$ $M''\left(k, f_a(k)\right)$

$J\left(k; \frac{1}{2}\left(f_{a'}(k) + f_a(k)\right)\right)$ soit $J\left(k, \frac{e^{-k}+k}{2}\right)$

car $a+a' = 1$

$\begin{cases} x = k \\ y = \frac{e^{-k}+k}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{e^{-x}+x}{2} = f_{1/2}(x)$

L'ensemble des points J est la courbe $(C_{1/2})$

Etudions la fonction $f_{1/2}$

$f_{1/2}(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}x$ $D_{f_{1/2}} = \mathbb{R}$.

$\lim_{x \to -\infty} f_{1/2}(x) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f_{1/2}(x) = +\infty$

$f'_{1/2}(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2}$

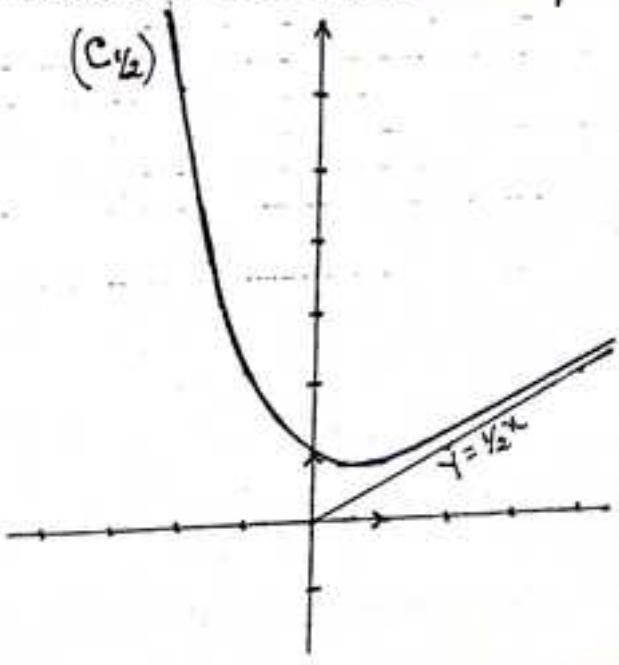
$f'_{1/2}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$

$f_{1/2}(\ln 2) = \frac{1}{2}(1 + \ln 2)$

Tableau de variation de $f_{1/2}$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'_{1/2}(x)$		$-$	0	$+$	
$f_{1/2}(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}(1+\ln 2)$	↗	$+\infty$

Construction de $C_{1/2}$ ensemble des points J



PROBLEME N° 27

Dans ce problème, k est un nombre réel et on considère la famille de fonctions f_k définies sur $]-1;+\infty[$ par : $f_k(x) = (x+1)\left(e^{-1-x} + k\right)$. On désigne par (C_k) la courbe représentative de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 4cm)

PARTIE A

1/ Etudions suivant les valeurs de k la limite de f_k en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)\left(e^{-1-x}+k\right)$$

$$= \lim_{X\to+\infty} Xe^{-X} + kX, \quad X = x+1$$

$$= \begin{cases} -\infty \text{ si } k<0 \\ 0 \text{ si } k=0 \\ +\infty \text{ si } k>0 \end{cases} \quad \text{car } \lim_{X\to+\infty} Xe^{-X} = 0$$

Conclusion

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } k<0 \\ 0 & \text{si } k=0 \\ +\infty & \text{si } k>0 \end{cases}$$

2/a/ Montrons que la droite (D_k) d'équation $y=kx+k$ est asymptote à (C_k) en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) - (kx+k) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)e^{-1-x}$$

$$= \lim_{X\to+\infty} Xe^{-X}, \quad X = x+1$$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0.$$

$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) - (kx+k) = 0$ d'où la droite $(D_k) : y = kx+k$ est asymptote à (C_k) en $+\infty$.

b/ Etudions la position relative de (C_k) et (D_k)

Posons $d(x) = f_k(x) - (kx+k)$

$$= (x+1)e^{-1-x}.$$

$\forall x \geq -1$, $d(x) \geq 0$

Conclusion

La courbe (C_k) est au dessus de la droite (D_k).

3/a/ Calculons la dérivée première f'_k et la dérivée seconde f''_k de f_k

$$f'_k(x) = e^{-1-x} + k - (x+1)e^{-1-x}$$

$$= k - xe^{-1-x}$$

$$f''_k(x) = -e^{-1-x} + xe^{-1-x} = (x-1)e^{-1-x}$$

$f'_k(x) = k - xe^{-1-x}$	$f''_k(x) = (x-1)e^{-1-x}$

b/ Etudions le sens de variation de f'_k

$f''_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\forall x \geq -1$, $e^{-1-x} > 0$; $f''_k(x)$ a donc le signe de $x-1$.

x	-1		1		$+\infty$
$f''_k(x)$		$-$	0	$+$	

D'après le tableau ci-dessus, f'_k est

strictement décroissante sur $]-1;-1[$, strictement croissante sur $]-1;+\infty[$ et admet un minimum au point -1.

4/ a/ * Dressons le tableau de variation de f_0

$f_0(x) = (x+1)e^{-1-x}$; $Df_0 = [-1;+\infty[$

$f_0(-1) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = 0$.

$f_0'(x) = -xe^{-1-x}$; $f_0'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\forall x \in Df_0$, $e^{-1-x} > 0$; $f_0'(x)$ a donc le signe de $-x$.

Signe de $f_0'(x)$

x	-1		0		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	0	$-$	

Sens de variation de f_0

$\forall x \in [-1;0[$, $f_0'(x) > 0$; f_0 est strictement croissante sur $[-1;0[$

$\forall x \in]0;+\infty[$, $f_0'(x) < 0$; f_0 est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

f_0 admet un maximum au point 0.

$f_0(0) = e^{-1}$

Tableau de variation de f_0

x	-1		0		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_0(x)$	0	↗	e^{-1}	↘	0

* Dressons le tableau de variation de f_1

$f_1(x) = (x+1)(e^{-1-x}+1)$; $Df_1 = [-1;+\infty[$

$f_1(-1) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$

$f_1'(x) = 1 - xe^{-1-x}$

D'après la question 3/ a/ f_1' admet un minimum au point -1. On a donc :

$\forall x \in [-1;+\infty[$, $f_1'(x) \geq f_1'(-1) = 1 - \frac{1}{e^2} > 0$

$\forall x \in [-1;+\infty[$, $f_1'(x) > 0$; f_1 est donc strictement croissante sur $[-1;+\infty[$

Tableau de variation de f_1

x	-1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	
$f_1(x)$	0	↗	$+\infty$

b/ Déterminons les tangentes (T_0) et (T_1) respectives aux courbes (C_0) et (C_1) au point d'abscisse -1

$(T_0) : y = f_0'(-1)(x+1) + f_0(-1)$; $f_0'(-1) = 1$; $f_0(-1) = 0$

$y = x+1$

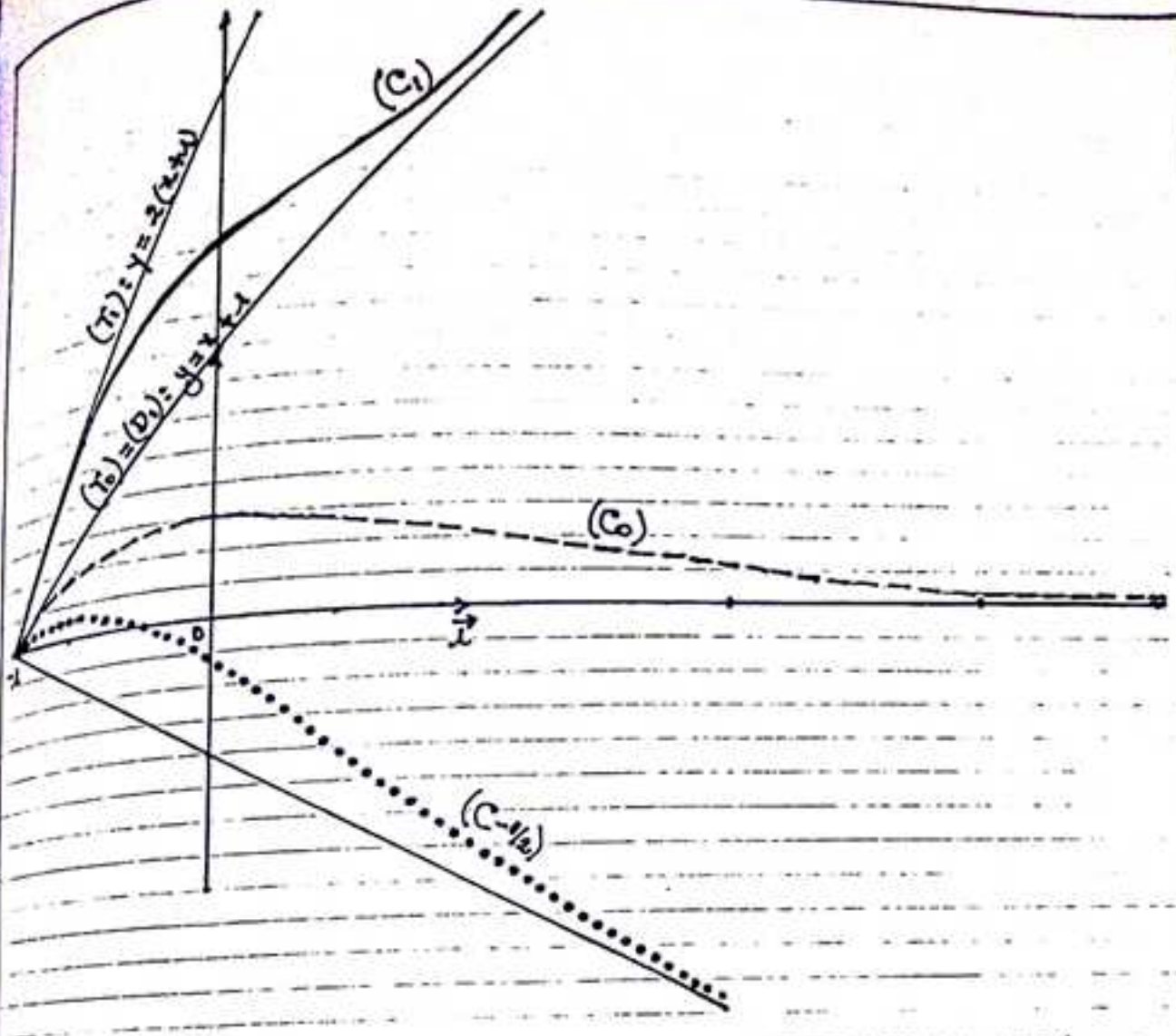
$(T_1) : y = f_1'(-1)(x+1) + f_1(-1)$; $f_1'(-1) = 2$; $f_1(-1) = 0$

$y = 2(x+1)$

$(T_0) : y = x+1$	$(T_1) : y = 2(x+1)$

c/ Tracer de (D_0), (D_1), (T_0), (T_1), (C_0) et (C_1)

(T_0) et (D_1) sont confondues



PARTIE B

1/ Montrons que l'équation $f'_{-\frac{1}{2}}(x) = 0$ admet une unique solution α et que $-1 < \alpha < -0,5$

Etudions la fonction $f'_{-\frac{1}{2}}$

$f'_{-\frac{1}{2}}(x) = -\frac{1}{2} - xe^{-1-x}$

$f'_{-\frac{1}{2}}(-1) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f'_{-\frac{1}{2}}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2} - xe^{-1-x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2} - \frac{1}{e}\cdot\frac{x}{e^x} = -\frac{1}{2}$

$f''_{-\frac{1}{2}}(x) = (x-1)e^{-1-x}$; $f''_{-\frac{1}{2}}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'_{-\frac{1}{2}}(1) = -\frac{1}{2} - e^{-2} < 0$

Tableau de variation de $f'_{-\frac{1}{2}}$

x	-1		1		$+\infty$
$f''_{-\frac{1}{2}}(x)$		$-$	0	$+$	
$f'_{-\frac{1}{2}}(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}-e^{-2}$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$

D'après le tableau de variation de $f'_{-\frac{1}{2}}$ on a :

* $\forall x \geq 1$, $f'_{-\frac{1}{2}}(x) < 0$.
* la restriction de $f'_{-\frac{1}{2}}$ sur $[-1;1]$ est définie une bijection de $[-1;1]$ vers

$f'_{-\frac{1}{2}}([-1;1]) = [-\frac{1}{2}-e^{-2}; \frac{1}{2}]$

$0 \in \left[-\frac{1}{2}-e^{-2}; \frac{1}{2}\right]$

Comme cette restriction définit une bijection de $[-1;1]$ sur $\left[-\frac{1}{2}-e^{-2}; \frac{1}{2}\right]$ qui contient 0.

L'équation $f'_{\left[-1;\frac{1}{2}\right]}(x) = 0$ admet donc une unique solution α.

De plus : $f'_{\left[-1;\frac{1}{2}\right]}(-0,5) = -0,1967$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires on a :

$$-1 \leq \alpha \leq -0,5$$

2./ Soit h l'application de $I = [-1; -\frac{1}{2}]$ sur $\mathbb{R}$, définie par : $h(x) = -\frac{1}{2}e^{1+x}$.

Démontrons que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$

$$h(x) = x \Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^{1+x} = x$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} = xe^{-1-x}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} - xe^{-1-x} = 0$$

$h(x) = x \Leftrightarrow f'_{\left[-1;\frac{1}{2}\right]}(x) = 0$

or l'équation $f'_{\left[-1;\frac{1}{2}\right]}(x) = 0$ a pour solution unique α et $-1 \leq \alpha \leq -\frac{1}{2}$

Conclusion

α est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$

3./ Etudions les variations de h

$h(x) = -\frac{1}{2}e^{1+x}$ $\quad D_h = [-1; -\frac{1}{2}]$

$h(-1) = -\frac{1}{2}$ $\quad h(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\sqrt{e}$

$\forall x \in [-1; -\frac{1}{2}]$, $h'(x) = -\frac{1}{2}e^{1+x}$

$\forall x \in [-1; -\frac{1}{2}]$, $h'(x) < 0$; h est donc strictement décroissante sur $[-1; -\frac{1}{2}]$.

Tableau de variation de h

x	-1		$-\frac{1}{2}$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$		$-\frac{1}{2}$ ↘	$-\frac{1}{2}\sqrt{e}$

$\forall x \in [-1; -\frac{1}{2}]$, $-\frac{1}{2}\sqrt{e} < h(x) < -\frac{1}{2}$

or $-1 < -\frac{1}{2}\sqrt{e}$. On peut alors écrire :

$\forall x \in [-1; -\frac{1}{2}]$, $-1 < h(x) < -\frac{1}{2}$.

Conclusion

$$\forall x \in I,\ h(x) \in I$$

4./ On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = -1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = h(U_n)$.

a./ Démontrons que tous les termes de la suite (U_n) appartiennent à I

$U_0 = -1 \in I$

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$ et montrons $U_{n+1} \in I$

On sait que : $\forall x \in I$, $h(x) \in I$ donc $U_n \in I \Leftrightarrow h(U_n) \in I \Leftrightarrow U_{n+1} \in I$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$

On suppose que pour tout n de $\mathbb{N}$,
$|U_{n+1}-\alpha| \leq 0{,}83|U_n-\alpha|$

b/ Démontrons que pour tout n de $\mathbb{N}$
$|U_n-\alpha| \leq (0{,}83)^n \cdot \frac{1}{2}$

On sait que $\forall p \in \mathbb{N}$,
$|U_{p+1}-\alpha| \leq 0{,}83|U_p-\alpha|$

Remplaçons p par : 0, 1; 2; ... n-1.

$|U_1-\alpha| \leq 0{,}83|U_0-\alpha|$

$|U_2-\alpha| \leq 0{,}83|U_1-\alpha|$

⋮

$|U_n-\alpha| \leq 0{,}83|U_{n-1}-\alpha|$

En multipliant membres à membres les n égalités obtenues et en simplifiant on a:

$|U_n-\alpha| \leq 0{,}83^n|U_0-\alpha|$

$-1 \leq \alpha \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq -\alpha \leq 1$

$\Leftrightarrow -1+\frac{1}{2} \leq -1-\alpha \leq 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq U_0-\alpha \leq 0$

$\Leftrightarrow |U_0-\alpha| \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0{,}83^n|U_0-\alpha| \leq 0{,}83^n \cdot \frac{1}{2}$

Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n-\alpha| \leq 0{,}83^n \cdot \frac{1}{2}$

Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente et donnons sa limite

$\lim_{n\to+\infty} 0{,}83^n = 0$ car $-1 < 0{,}83 < 1$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |U_n-\alpha| = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = \alpha$.

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \alpha$

c./ Trouvons le plus petit entier naturel p tel que $|U_p-\alpha| < 10^{-2}$

Cette condition est vérifiée ssi :

$0{,}83^p \cdot \frac{1}{2} < 10^{-2} \Leftrightarrow 0{,}83^p < 2 \cdot 10^{-2}$

$\Leftrightarrow p\ln(0{,}83) < \ln(0{,}02)$

$p > \frac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}83)} \simeq 20{,}99$

On en déduit que :

$\boxed{p = 21}$

5./ Dressons le tableau de variation de la fonction $f_{-1/2}$

$f_{-\frac{1}{2}}(x) = (x+1)\left(e^{-1-x} - \frac{1}{2}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f_{-\frac{1}{2}}(x) = -\infty$ $f_{-\frac{1}{2}}(-1) = 0$

A partir du tableau de variation de $f'_{-\frac{1}{2}}$ on déduit son tableau de signe

Signe de $f'_{-\frac{1}{2}}(x)$

x	-1		α		$+\infty$
$f'_{-\frac{1}{2}}(x)$		$+$	0	$-$	

Sens de variation de $f_{-\frac{1}{2}}$

$\forall x \in [-1; \alpha[$ $f'_{-\frac{1}{2}}(x) > 0$; $f_{-\frac{1}{2}}$ est donc strictement croissante sur $[-1; \alpha[$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $f'_{-\frac{1}{2}}(x) < 0$; $f_{-\frac{1}{2}}$ est donc strictement décroissante sur $]\alpha; +\infty[$

$f_{-\frac{1}{2}}$ admet un maximum au point α.

On suppose que pour tout n de $\mathbb{N}$,
$|U_{n+1}-\alpha| \leq 0{,}83|U_n-\alpha|$

b/ Démontrons que pour tout n de $\mathbb{N}$,
$|U_n-\alpha| \leq (0{,}83)^n \cdot \frac{1}{2}$

On sait que $\forall p \in \mathbb{N}$,
$|U_{p+1}-\alpha| \leq 0{,}83|U_p-\alpha|$

Remplaçons p par : 0; 1; 2; ... n-1.

$|U_1-\alpha| \leq 0{,}83|U_0-\alpha|$

$|U_2-\alpha| \leq 0{,}83|U_1-\alpha|$

⋮

$|U_n-\alpha| \leq 0{,}83|U_{n-1}-\alpha|$

En multipliant membres à membres les n égalités obtenues et en simplifiant on a:

$|U_n-\alpha| \leq 0{,}83^n|U_0-\alpha|$

$-1 \leq \alpha \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq -\alpha \leq 1$

$\Leftrightarrow -1+\frac{1}{2} \leq -1-\alpha \leq 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq U_0-\alpha \leq 0$

$\Leftrightarrow |U_0-\alpha| \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0{,}83^n|U_0-\alpha| \leq 0{,}83^n \cdot \frac{1}{2}$

Conclusion

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |U_n-\alpha| \leq 0{,}83^n \cdot \frac{1}{2}}$

Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente et donnons sa limite

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}83^n = 0$ car $-1 < 0{,}83 < 1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |U_n-\alpha| = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha$.

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha}$

c/ Trouvons le plus petit entier naturel p tel que $|U_p-\alpha| < 10^{-2}$

Cette condition est vérifiée ssi :

$0{,}83^p \cdot \frac{1}{2} < 10^{-2} \Leftrightarrow 0{,}83^p < 2 \cdot 10^{-2}$

$\Leftrightarrow p\ln(0{,}83) < \ln(0{,}02)$

$p > \frac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}83)} \simeq 20{,}99$

On en déduit que :

$\boxed{p = 21}$

5/ Dressons le tableau de variation de la fonction $f_{-\frac{1}{2}}$

$f_{-\frac{1}{2}}(x) = (x+1)\left(e^{-1-x} - \frac{1}{2}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_{-\frac{1}{2}}(x) = -\infty \quad f_{-\frac{1}{2}}(-1) = 0$

A partir du tableau de variation de $f'_{-\frac{1}{2}}$ on déduit son tableau de signe

Signe de $f'_{-\frac{1}{2}}(x)$

x	-1		α		$+\infty$
$f'_{-\frac{1}{2}}(x)$		$+$	0	$-$	

Sens de variation de $f_{-\frac{1}{2}}$

$\forall x \in [-1; \alpha[\quad f'_{-\frac{1}{2}}(x) > 0$; $f_{-\frac{1}{2}}$ est donc strictement croissante sur $[-1; \alpha[$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $f'_{-\frac{1}{2}}(x) < 0$; $f_{-\frac{1}{2}}$ est donc strictement décroissante sur $]\alpha; +\infty[$

$f_{-\frac{1}{2}}$ admet un maximum au point α.

Tableau de variation de $f_{-1/2}$

x	-1		α		$+\infty$
$f'_{-1/2}(x)$		$+$	0	$-$	
$f_{-1/2}(x)$	0	↗	$f_{-1/2}(\alpha)$	↘	$-\infty$

Démontrons que $f_{-\frac{1}{2}}(\alpha) = -\frac{1}{2\alpha}(\alpha+1)^2$

On sait que $h(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^{1+\alpha} = \alpha$

$\Leftrightarrow e^{1+\alpha} = -2\alpha$

$\Leftrightarrow e^{-1-\alpha} = -\frac{1}{2\alpha}$

$f_{-\frac{1}{2}}(\alpha) = (\alpha+1)\left(e^{-1-\alpha} - \frac{1}{2}\right)$

$= (\alpha+1)\left(-\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right)$

$= -(\alpha+1)\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right) = -\frac{1}{2\alpha}(\alpha+1)^2$

$$\boxed{f_{-\frac{1}{2}}(\alpha) = -\frac{1}{2\alpha}(\alpha+1)^2}$$

b/ On donne $U_{18} = -0,6854$.

Donnons la valeur approchée de α à 10^{-2} près

A l'aide de la calculatrice on a:

$U_{19} = -0,6848$; $U_{20} = -0,6852$

$U_{21} = -0,6849$.

On en déduit que: $\boxed{\alpha = -0,68}$

Construction de $(C_{-\frac{1}{2}})$

(Voir Figure précédente)

$f_{-\frac{1}{2}}(\alpha) = 0,07$. $\quad (D_{-\frac{1}{2}}) : y = -\frac{1}{2}(x+1)$

PROBLEME N°28

Soit λ un réel non nul, on considère la fonction f_λ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par: $f_\lambda(x) = x + \lambda(x+1)e^{-x}$. On désigne par (C_λ) la courbe représentative de f_λ dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

PARTIE A

1./ Déterminons f'_λ et f''_λ les fonctions dérivées première et seconde de f_λ

$f'_\lambda(x) = 1 + \lambda(1-x-1)e^{-x} = 1 - \lambda x e^{-x}$

$f''_\lambda(x) = -\lambda\left(e^{-x} - xe^{-x}\right) = \lambda(x-1)e^{-x}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall x \in \mathbb{R},\ f'_\lambda(x) = 1 - \lambda x e^{-x} \\ f''_\lambda(x) = \lambda(x-1)e^{-x}\end{array}}$$

2./ Etudions les variations de f'_λ

$f'_\lambda(x) = 1 - \lambda x e^{-x}$ $\quad D_{f'_\lambda} = \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'_\lambda(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \lambda x e^{-x}$

$= 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x e^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'_\lambda(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \lambda x e^{-x}$

$= \begin{cases} -\infty \text{ si } \lambda < 0 \\ +\infty \text{ si } \lambda > 0 \end{cases}$

Dérivée

f'_λ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''_\lambda(x) = \lambda(x-1)e^{-x}$

$f'_\lambda(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $f'_\lambda(1) = 1 - \frac{\lambda}{e}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$; $f''_\lambda(x)$ a donc le signe de $\lambda(x-1)$.

1er cas $\lambda < 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''_\lambda(x)$		$+$	0	$-$	

Sens de variation de f'_λ.

f'_λ est strictement croissante sur $]-\infty;1[$ strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ et admet un maximum au point 1

Tableau de variation de f'_λ pour $\lambda < 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''_\lambda(x)$		$+$	0	$-$	
$f'_\lambda(x)$	$-\infty$	↗	$1-\frac{\lambda}{e}$	↘	1

2e cas $\lambda > 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''_\lambda(x)$		$-$	0	$+$	

Sens de variation de f'_λ

f'_λ est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$, strictement croissante sur $]1;+\infty[$ et admet un minimum en 1

Tableau de variation de f'_λ pour $\lambda > 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''_\lambda(x)$		$-$	0	$+$	
$f'_\lambda(x)$	$+\infty$	↘	$1-\lambda/e$	↗	1

3./ Discutons suivant le réel λ, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x : $f'_\lambda(x) = 0$ et précisons la position des solutions éventuelles à 0 et à 1.

1er cas $\lambda < 0$

$1 - \frac{\lambda}{e} > 1$; la restriction de f'_λ sur $]-\infty;1]$ est monotone, strictement croissante avec $\lim_{x \to -\infty} f'_\lambda(x) = -\infty$ et $f'_\lambda(1) = 1 - \frac{\lambda}{e} > 1$

Cette restriction définit donc une bijection de $]-\infty;1]$ vers $]-\infty;1-\lambda/e]$ qui contient 0.

De plus $\forall x \geqslant 1$, $f'_\lambda(x) > 1$

L'équation $f'_\lambda(x) = 0$ admet donc une seule solution x_1

$f'_\lambda(x_1) = 0$ $f'_\lambda(0) = 1$

On a : $f'_\lambda(x_1) < f'_\lambda(0) \Leftrightarrow x_1 < 0$ car f'_λ est croissante sur $]-\infty;1]$.

Conclusion

Pour $\lambda < 0$, l'équation $f'_\lambda(x) = 0$ possède une seule solution $x_1 < 0$

* Cas de $\lambda > 0$

D'après le tableau de variation de f'_λ le nombre de solutions de l'équation $f'_\lambda(x) = 0$ dépend du signe de :

$f'_\lambda(1) = 1 - \frac{\lambda}{e}$

$f'_\lambda(1) = 1 - \frac{\lambda}{e}$; $f'_\lambda(1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = e$

Signe de $f'_\lambda(1)$ suivant les valeurs du réel λ

λ	0		e		$+\infty$
$f'_\lambda(1)$		$+$	0	$-$	

2e cas $0 < \lambda < e$.

D'après les variations de f'_λ, elle admet un minimum au point 1 qui est $f'_\lambda(1) > 0$ pour $0 < \lambda < e$.

L'équation $f'_\lambda(x) = 0$ n'admet donc pas de solution.

3e cas $\lambda = e$

On a: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_e(x) \geqslant f'_e(1) = 0$

L'équation $f'_e(x) = 0$ admet donc une seule solution qui est 1

4e cas $\lambda > e$.

$f'_\lambda(1) < 0$ L'équation $f'_\lambda(x) = 0$ admet donc 2 solutions distinctes $x_1 < 1 < x_2$.

$f'_\lambda(0) = 1$ or f'_λ est décroissante sur $]-\infty; 1]$ donc:

$f'_\lambda(x_1) < f'_\lambda(0) \Leftrightarrow 0 < x_1$.

On a donc deux solutions distinctes x_1 et x_2 telles que:

$0 < x_1 < 1 < x_2$

Résumons les résultats de la question dans le tableau ci-dessous.

	$-\infty$	0	e
nombre et position des sol % 0 et 1	1 $x_1 < 0$	0	2 $0 < x_1 < 1 < x_2$ / 1 $x_1 = 1$

3./ Déduisons de ce qui précède le sens de variation de f_λ suivant les valeurs du réel λ

1er cas $\lambda < 0$

Signe de $f'_\lambda(x)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		$-$	0	$+$	

Sens de variation de f_λ

f_λ est strictement décroissante sur $]-\infty; x_1[$, strictement croissante sur $]x_1; +\infty[$ et admet un minimum au point x_1.

2e cas $0 < \lambda < e$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_\lambda(x) > 0$; f_λ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$

3e cas $\lambda = e$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_e(x) \geqslant 0$; f_e est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

4e cas $\lambda > e$

Signe de $f'_\lambda(x)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- f_λ est strictement croissante sur $]-\infty; x_1[$ et sur $]x_2; +\infty[$
- f_λ est strictement décroissante sur $]x_1; x_2[$
- f_λ admet un maximum local au point x_1 et un minimum local au point x_2.

5/ Etude des limites de f_λ en $+\infty$ et en $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x\to+\infty} x+\lambda(x+1)e^{-x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x+\lambda\left(\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)$$
$$= +\infty \text{ car } \begin{cases}\frac{x}{e^x}\to 0\\ \frac{1}{e^x}\to 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x\to-\infty} x+\lambda(x+1)e^{-x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x\left[1+\lambda\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x}\right]$$
$$= \begin{cases}+\infty \text{ si } \lambda<0\\ -\infty \text{ si } \lambda>0\end{cases}$$

$\lim_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = \begin{cases}+\infty \text{ si } \lambda<0\\ -\infty \text{ si } \lambda>0\end{cases}$

Précisons les branches infinies de (C_λ)

$$\lim_{x\to+\infty} f_\lambda(x)-x = \lim_{x\to+\infty} \lambda\left(\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)$$
$$= \lambda(0+0) = 0$$

$\lim_{x\to+\infty} f_\lambda(x)-x = 0$; la courbe (C_λ) admet la droite d'équation $y=x$ comme asymptote oblique à $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f_\lambda(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1+\lambda\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x}$$
$$= \begin{cases}-\infty \text{ si } \lambda<0\\ +\infty \text{ si } \lambda>0.\end{cases}$$

La courbe (C_λ) admet à $-\infty$ une branche asymptotique de direction (oy)

6/ Montrons qu'il existe un unique point commun A à toutes les courbes (C_λ)

$\forall \lambda\in\mathbb{R}^*$, $f_\lambda(-1) = -1+\lambda(-1+1)e = -1$

Toutes les courbes (C_λ) passent par le point unique $A(-1;-1)$

7/ Soit I_λ le point de (C_λ) d'abscisse 1. Ecrivons l'équation de la tangente D_λ en I_λ à (C_λ)

$(D_\lambda) : y = f'_\lambda(1)(x-1)+f_\lambda(1)$

$f'_\lambda(1) = 1-\frac{\lambda}{e}$; $f_\lambda(1) = 1+\frac{2\lambda}{e}$.

$$(D_\lambda) : y = \left(1-\frac{\lambda}{e}\right)(x-1)+1+\frac{2\lambda}{e}$$

$$\boxed{(D_\lambda) : y = \left(1-\frac{\lambda}{e}\right)x+\frac{3\lambda}{e}}$$

Montrons que les droites D_λ ont un point commun B

$$y = \left(1-\frac{\lambda}{e}\right)x+\frac{3\lambda}{e}$$
$$\Leftrightarrow y-x = \frac{\lambda}{e}(3-x)$$
$$\begin{cases}3-x=0\\ y-x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\ y=3\end{cases}$$

Toutes les droites (D_λ) passent par $B(3;3)$

8/ a/ On prend $\lambda = -1$

Montrons que l'équation $f'_{-1}(x) = 0$ n'a qu'une solution notée x_1 comprise entre $-0,57$ et $-0,56$

D'après 3/, l'équation $f'_\lambda(x) = 0$ possède une unique solution x_1 $-1 < 0$. L'équation $f'_{-1}(x) = 0$ n'a donc qu'une solution notée x_1.

$$f'_{-1}(x) = 1 + xe^{-x}$$

$f'_{-1}(-0,57) = -0,079$; $f'_{-1}(-0,56) = 0,019$

$f'_{-1}(-0,57) \cdot f'_{-1}(-0,56) < 0$

$-0,57 < x_1 < -0,56$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires

Construction de la courbe (C_{-1})

Tableau de variation de f_{-1}

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$f'_{-1}(x)$		$-$	0	$+$	
$f_{-1}(x)$	$+\infty$	↘	$f_{-1}(x_1)$	↗	$+\infty$

Pour le tracer voir page suivante

b/ Traçons la courbe (C_e)

Tableau de variations de f_e

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'_e(x)$		$+$	0	$+$	
$f_e(x)$	$-\infty$	↗	$f_e(1)$	↗	$+\infty$

$f_e(x) = x + (x+1)e^{1-x}$ $\quad f_e(1) = 3$

Construction de C_e (Voir page suivante)

c/ Montrons que l'équation d'inconnue x, $f'_4(x) = 0$ a deux solutions x_1 comprise entre 0,35 et 0,36 et x_2 comprise entre 2,15 et 2,16

D'après 3/, l'équation $f'_\lambda(x) = 0$ possède deux solutions pour $\lambda > e$.

or $4 > e$, l'équation $f'_4(x) = 0$ possède donc deux solutions x_1 et x_2 telles que

$0 < x_1 < 1 < x_2$

$$f'_4(x) = 1 - 4xe^{-x}$$

$f'_4(0,35) = 0,0134$; $f'_4(0,36) = -0,0046$

$f'_4(2,15) = -0,0017$; $f'_4(2,16) = 0,0036$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires on a :

$0,35 < x_1 < 0,36$	$2,15 < x_2 < 2,16$

Tableau de variation de f_4

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'_4(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_4(x)$	$-\infty$	↗	$f_4(x_1)$	↘	$f_4(x_2)$	↗	$+\infty$

$f_4(x_1) = 4,15$; $f_4(x_2) = 3,61$

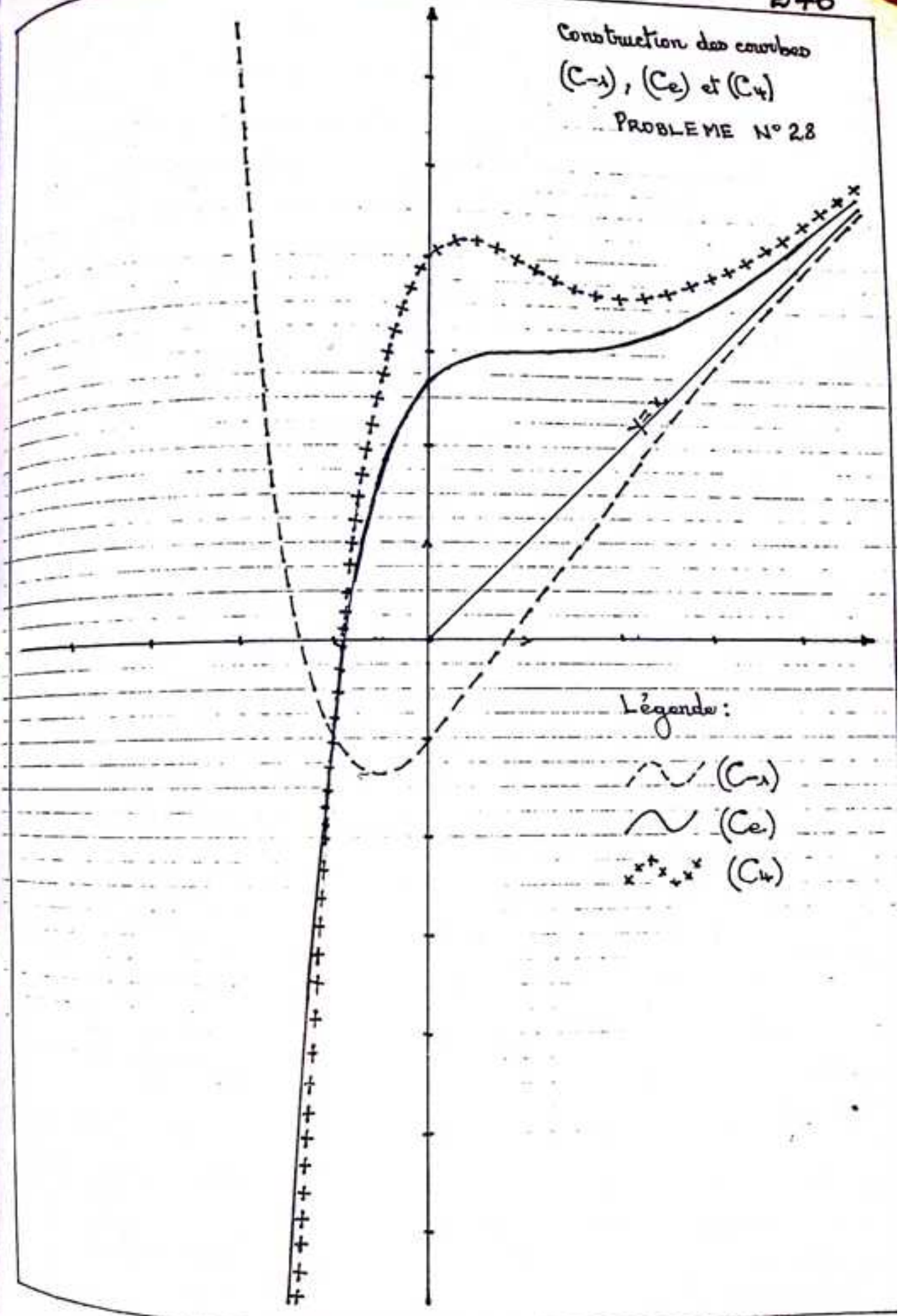
Construction de la courbe (C_4)

(Voir page suivante)

Construction des courbes

(C_{-1}), (C_e) et (C_4)

PROBLEME N° 28



PARTIE B

1/ Montrons que la fonction f_λ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et déterminons l'ensemble de ces primitives

Pour tout réel λ non nul, f_λ est continue sur $\mathbb{R}$; la fonction f_λ admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

Soit F_λ une primitive de f_λ sur $\mathbb{R}$

$F_\lambda(x)$ est de la forme :

$F_\lambda(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda(ax+b)e^{-x}$ où a et b sont des réels que nous allons déterminer

$F_\lambda'(x) = x + \lambda(-ax+a-b)e^{-x}$

Par identification on a : $\begin{cases} a = -1 \\ a-b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$

L'ensemble des primitives de f_λ est :

$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \lambda(x+2)e^{-x} + k$, $k \in \mathbb{R}$

2/ Pour tout λ réel non nul, on définit une suite de fonctions continues $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_1(x) = \int_0^x f_\lambda(t)\,dt - 2\lambda$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(t)\,dt + (-1)^{n+1}(n+2)\lambda$.

a/ Calcul de φ_1

$\varphi_1(x) = \int_0^x f_\lambda(t)\,dt - 2\lambda$

$= \left[\frac{1}{2}t^2 - \lambda(t+2)e^{-t}\right]_0^x - 2\lambda$

$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \lambda(x+2)e^{-x} + 2\lambda - 2\lambda$

$$\boxed{\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \lambda(x+2)e^{-x}}$$

b/ Montrons par récurrence que pour tout naturel n non nul et tout réel x :

$$\varphi_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^n\lambda(x+n+1)e^{-x}$$

$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \lambda(x+2)e^{-x}$

$= \frac{x^{1+1}}{(1+1)!} + (-1)^1\lambda(x+1+1)e^{-x}$ Vrai

Supposons que $\forall n \neq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\varphi_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^n\lambda(x+n+1)e^{-x}$ et montrons que : $\varphi_{n+1}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + (-1)^{n+1}\lambda(x+n+2)e^{-x}$

$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(t)\,dt + (-1)^{n+1}(n+2)\lambda$

$= \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^n\lambda(t+n+1)e^{-t}\right)dt + (-1)^{n+1}(n+2)\lambda$

$= \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^n\lambda(t+1)e^{-t} + (-1)^n\lambda n e^{-t}\right)dt + (-1)^{n+1}(n+2)\lambda$

$= \left[\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{t^{n+2}}{n+2} - (-1)^n\lambda(t+2)e^{-t} - (-1)^n\lambda n e^{-t}\right]_0^x + (-1)^{n+1}(n+2)\lambda$

$= \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + (-1)^{n+1}\lambda(x+2)e^{-x} + (-1)^{n+1}\lambda n e^{-x} - (-1)^{n+1}2\lambda - (-1)^{n+1}\lambda n + (-1)^{n+1}(n+2)\lambda$

$= \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + (-1)^{n+1}\lambda(x+n+2)e^{-x} - (-1)^{n+1}(n+2)\lambda + (-1)^{n+1}(n+2)\lambda$

$= \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + (-1)^{n+1}\lambda(x+n+2)e^{-x}$

Conclusion : $\varphi_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^n\lambda(x+n+1)e^{-x}$

PARTIE C

On suppose dans cette partie $-\frac{1}{e} < \lambda < 0$

1/ Montrons que le réel x_1 tel que $f'_\lambda(x_1) = 0$ est strictement inférieur à -1

$f'_\lambda(x) = 1 - \lambda x e^{-x}$; $f'_\lambda(-1) = 1 + \lambda e$.

$-\frac{1}{e} < \lambda < 0 \Rightarrow 1 + \lambda e > 0 \Rightarrow f'_\lambda(-1) > 0$

De plus pour $\lambda < 0$, f'_λ est croissante sur $]-\infty ; 1[$

$f'_\lambda(x_1) < f'_\lambda(-1)$

$\Leftrightarrow x_1 < -1$ car f'_λ est strictement croissante sur $]-\infty ; -1[$.

Conclusion

Le réel x_1 tel que $f'_\lambda(x_1) = 0$ est strictement inférieur à -1

Autre méthode

Dans A-I 8/ a/ On a montré que :

$-0,57 < x_1 < -0,56$ d'où $x_1 < -1$

Déduisons-en que si $-1 < x < 0$ alors

$-1 < f_\lambda(x) < 0$

D'après A-I 3/ on a :

Pour $\lambda < 0$, f_λ est croissante sur $]-\infty ; x_1[$

donc croissante sur $]-1 ; 0[$

$-1 < x < 0 \Leftrightarrow f_\lambda(-1) \leq f_\lambda(x) < f_\lambda(0)$ (1)

$f_\lambda(-1) = -1$ $f_\lambda(0) = \lambda < 0$

(1) $\Leftrightarrow -1 < f_\lambda(x) < 0$.

Conclusion

Si $-1 < x < 0$ alors $-1 < f_\lambda(x) < 0$

2/ On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = f_\lambda(U_n) \end{cases}$

Montrons que :

a/ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1 < U_n < 0$.

$U_1 = f_\lambda(U_0) = f_\lambda(0) = \lambda \in]-\frac{1}{e} ; 0[$

or $-1 < -\frac{1}{e}$ d'où $-1 < U_1 < 0$ Vrai

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1 < U_n < 0$

et montrons que $-1 < U_{n+1} < 0$

D'après la question C-I 1/ on a :

Si $-1 < x < 0$ alors $-1 < f_\lambda(x) < 0$

$-1 < U_n < 0 \Rightarrow -1 < f_\lambda(U_n) < 0$

$\Rightarrow -1 < U_{n+1} < 0$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1 < U_n < 0$

b/ Montrons que la suite (U_n) est décroissante

$f_\lambda(x) = x + \lambda(x+1)e^{-x}$

$\begin{cases} -1 < x < 0 \\ \text{et} \\ \lambda < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1) > 0 \\ \lambda < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda(x+1)e^{-x} < 0$

$\Rightarrow x + \lambda(x+1)e^{-x} < x$

$\begin{cases} -1 < x < 0 \\ \text{et} \\ \lambda < 0 \end{cases} \Rightarrow f_\lambda(x) < x$

donc $\begin{cases} -1 < U_n < 0 \\ \lambda < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f_\lambda(U_n) < U_n \Rightarrow U_{n+1} < U_n$

d'où (U_n) est décroissante

c/ Montrons que: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$0 < U_{n+1}+1 < (1+\lambda)(U_n+1)$

On sait que: $\forall n \in \mathbb{N}, -1 < U_{n+1}$

$\Rightarrow 0 < U_{n+1}+1$ (1).

De plus $-1 < U_n < 0 \Rightarrow \begin{cases} U_n+1 > 0 \\ e^{-U_n} > e^0 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow (U_n+1)e^{-U_n} > U_n+1$

$\Rightarrow \lambda(U_n+1)e^{-U_n} < \lambda(U_n+1)$ car $\lambda < 0$

$\Rightarrow U_n + \lambda(U_n+1)e^{-U_n} < U_n + \lambda(U_n+1)$

$\Rightarrow f_\lambda(U_n) < U_n + \lambda(U_n+1)$

$\Rightarrow U_{n+1} < U_n + \lambda(U_n+1)$

$\Rightarrow U_{n+1}+1 < U_n + 1 + \lambda(U_n+1)$ (2)

(1) et (2) nous permettent d'écrire:

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_{n+1}+1 < (1+\lambda)(U_n+1)$

Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente

$\begin{cases} -1 < U_n \Rightarrow (U_n) \text{ est minorée} \\ (U_n) \text{ est décroissante} \end{cases}$

(U_n) est convergente car elle est minorée et décroissante.

Trouvons sa limite

Soit ℓ la limite de (U_n); ℓ est solution de l'équation $f_\lambda(x) = x \Leftrightarrow x = -1$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = -1$$

PROBLEME N° 29

Soit la fonction f_m à variable réelle définie par: $f_m(x) = e^{x-1}(mx-m+1) - 1$

On désigne par (C_m) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

PARTIE A

On suppose dans cette partie que m est un paramètre réel non nul.

1./ a./ Montrons que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe dont nous préciserons les coordonnées

Posons $y = f_m(x)$

$\Rightarrow y = e^{x-1}(mx-m) - 1 + e^{x-1}$

$\Rightarrow (y+1-e^{x-1}) = m(x-1)e^{x-1}$

$\begin{cases} x-1=0 \\ y+1-e^{x-1}=0 \end{cases} \overset{(\Rightarrow)}{\Rightarrow} \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

Toutes les courbes (C_m) passant par le point $A(1; 0)$

b/ Soit M un point du plan.

Etudions suivant la position du point M dans le plan, le nombre de courbes (C_m) qui passent par M

Soit $M(a; b)$

$M \in (C_m) \Leftrightarrow (b+1)e^{1-a} = m(a-1)$

Soit (Δ) la droite du plan d'équation $x = 1$

1er cas $M \in \Delta$ privée de A.

Aucune courbe (C_m) ne passe par M

2e cas M appartient au plan privé de A

Une seule courbe (C_m) passe par M.

3e cas M confondu à A

Une infinité de courbes passent par A

2/a/ Calculons suivant les valeurs de m, les limites de f_m en $+\infty$ puis en $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x-1}(mx-m+1)-1$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{x-1}\left[m(x-1)+1\right]-1$$

$$= \lim_{X\to+\infty} e^{X}(mX+1)-1$$

$$= \begin{cases} +\infty \text{ si } m>0 \\ -\infty \text{ si } m<0 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = \begin{cases} -\infty \text{ si } m<0 \\ +\infty \text{ si } m>0 \end{cases}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x-1}(mx-m+1)-1$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (mxe^{x}-me^{x}+e^{x})e^{-1}-1$$

$= -1$ car $\lim_{x\to-\infty} xe^{x}=0$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{x}=0$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = -1}$$ Pour tout $m\in\mathbb{R}^*$

b/ Etudions les branches infinies de la courbe (C_m)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}+\left(m-\frac{m}{x}+\frac{1}{x}\right)e^{x-1}$$

$$= \begin{cases} -\infty \text{ si } m<0 \\ +\infty \text{ si } m>0 \end{cases}$$

La courbe (C_m) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction oy

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = -1$$

La courbe (C_m) admet en $-\infty$ une asymptote horizontale d'equation $y=-1$

3/a/ Calculons la dérivée f'_m de la fonction f_m et étudions son signe suivant les valeurs de m

f_m est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'_m(x) = e^{x-1}(mx-m+1+m)$$

$$= (1+mx)e^{x-1}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f'_m(x) = (1+mx)e^{x-1}}$$

Signe de $f'_m(x)$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{x-1}>0$; $f'_m(x)$ a donc le signe de $1+mx$.

$$f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow 1+mx=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{m}$$

1er cas $m<0$

x	$-\infty$		$-1/m$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	0	$-$	

2e cas : $m>0$

x	$-\infty$		$-1/m$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	

c/ Dressons les tableaux de variation de f_m selons les valeurs de m.

1er cas $m<0$

Sens de variation de f_m

$\forall x \in]-\infty; -1/m[$, $f'_m(x)>0$; f_m est donc strictement croissante sur $]-\infty; -1/m[$

$\forall x \in]-1/m; +\infty[$, $f'_m(x)<0$; f_m est donc strictement décroissante sur $]-1/m; +\infty[$

f_m admet un maximum en $-1/m$ et $f_m(-1/m) = -1-me^{-1/m-1}$

Tableau de variation de f_m pour $m<0$

x	$-\infty$		$-1/m$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	0	$-$	
$f_m(x)$	-1	↗	$-1-me^{-1/m-1}$	↘	$-\infty$

2e cas $m>0$

Sens de variation de f_m

$\forall x \in]-\infty; -1/m[$, $f'_m(x)<0$; f_m est décroissante sur $]-\infty; -1/m[$

$\forall x \in]-1/m; +\infty[$, $f'_m(x)>0$; f_m est donc croissante sur $]-1/m, +\infty[$

f_m admet un minimum en $-1/m$

Tableau de variation de f_m pour $m>0$

x	$-\infty$		$-1/m$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	$+\infty$	↘	$-1-me^{-1/m-1}$	↗	$+\infty$

4-/ Déterminons l'ensemble des extrémums de (C_m) lorsque m décrit $\mathbb{R}-\{0\}$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{m} \\ y = -1-me^{-1/m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{x} \\ y = -1+\frac{1}{x}e^{x-1} \end{cases}$$

L'ensemble des extrémums de (C_m) lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$ est la courbe Γ représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -1+\frac{1}{x}e^{x-1}$

5-/ Vérifions que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f'_m(x) = f_m(x) + me^{x-1} + 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_m(x) = (1+mx)e^{x-1}$

$= (1+mx)e^{x-1} - me^{x-1} + me^{-x-1}$

$= (mx-m+1)e^{x-1} + me^{x-1}$

$= (mx-m+1)e^{x-1} - 1 + me^{x-1} + 1$

$= f_m(x) + me^{x-1} + 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_m(x) = f_m(x) + me^{x-1} + 1$

Déduisons-en sans calculer $f_m''(x)$ la relation : $f_m''(x) - 2f_m'(x) + f_m(x) = -1$

$f_m'(x) = f_m(x) + me^{x-1} + 1$

$\Leftrightarrow f_m''(x) = f_m'(x) + me^{x-1}$

$f_m''(x) - 2f_m'(x) + f_m(x) = f_m'(x) + me^{x-1}$

$- 2\left(f_m(x) + me^{x-1} + 1\right) + f_m(x)$

$= f_m(x) + me^{x-1} + 1 + me^{x-1} - 2f_m(x) - 2me^{x-1} - 2 + f_m(x)$

$= -1$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_m''(x) - 2f_m'(x) + f_m(x) = -1$

6/ Etudions la position relative des courbes (C_{-m}) et (C_m)

Posons $d_m(x) = f_m(x) - f_{-m}(x)$

$= 2m(x-1)e^{x-1}$

$d_m(x) = 2m(x-1)e^{x-1}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x-1} > 0$; $d_m(x)$ est donc du signe de $m(x-1)$.

$d_m(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

1er cas $m < 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$d_m(x)$		$+$	0	$-$	
Position relative de (C_{-m}) et (C_m)	(C_m) est au dessus de (C_{-m})		(C_m) coupe (C_{-m})	(C_m) est en dessous de (C_{-m})	

2e cas $m > 0$

Comme précédemment, résumons les résultats de notre étude dans le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$d_m(x)$		$-$	0	$+$	
Position relative de (C_{-m}) et (C_m)	(C_m) est en dessous de (C_{-m})		(C_m) coupe (C_{-m})	(C_m) est au dessus de (C_{-m})	

PARTIE B

On pose $m = 1$ puis $m = -1$

1°/ Dressons les tableaux de variations des fonctions f_1 et f_{-1}

Tableau de variation de f_1

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	-1	↘	$-1-e^{-2}$	↗	$+\infty$

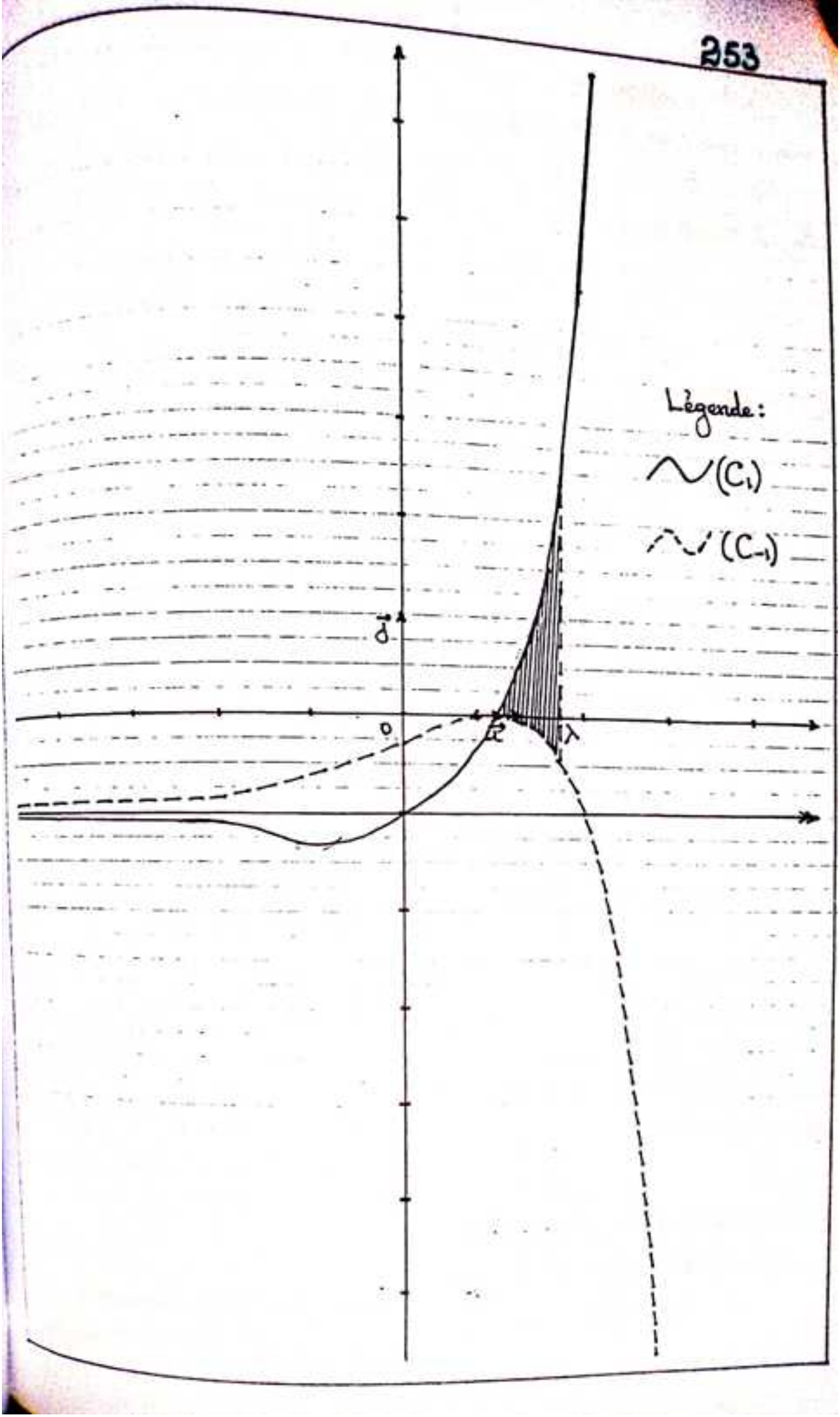
Tableau de variation de f_{-1}

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_{-1}'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_{-1}(x)$	-1	↗	0	↘	$-\infty$

2°/ Construction des courbes (C_1) et (C_{-1}) dans le même repère.

(Voir page suivante)

$f_1(x) = xe^{x-1} - 1$; $f_{-1}(x) = (2-x)e^{x-1} - 1$


Légende:
(C_1)
(C_{-1})
δ
0
α
λ

3/ Soit λ un réel tel que $\lambda > 1$

a/ Calculons l'aire $a(\lambda)$ de la portion du plan limitée par les courbes (C_{-1}), (C_1) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$

$$a(\lambda) = \int_1^\lambda \left(f_1(x) - f_{-1}(x)\right) dx = \int_1^\lambda 2(x-1)e^{x-1} dx$$

$$= 2\left[(x-2)e^{x-1}\right]_1^\lambda = 2(\lambda-2)e^{\lambda-1} + 2$$

$$\boxed{a(\lambda) = 2(\lambda-2)e^{\lambda-1} + 2}$$

b/ Déterminons $\lim_{\lambda \to +\infty} a(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} a(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} 2(\lambda-2)e^{\lambda-1} + 2$$

$= +\infty$ car $\lim_{\lambda \to +\infty} 2(\lambda-2) = +\infty$ et $\lim_{\lambda \to +\infty} e^{\lambda-1} = +\infty$

$$\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} a(\lambda) = +\infty}$$

PROBLEME N°30

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ on donne les points A(1;0), B(-1;0) et K(0;-1). A tout point M de P de coordonnées (x;y) on associe le nombre complexe $z = x+iy$, affixe de M.

PARTIE A

1/ * Démontrons qu'il existe une rotation T qui laisse le point K invariant et qui transforme A en B

Les points K, B et A sont deux à deux distincts. $KB = KA = \sqrt{2}$.

Il existe donc une rotation T de centre K transformant A en B.

* Précisons l'angle de T

L'angle de T est : $\text{Mes}(\widehat{\vec{KA}, \vec{KB}}) = \text{Arg}\left(\frac{z_{KB}}{z_{KA}}\right)$

$= \text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$

T est donc la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

* La transformation complexe associée à T est : $z \longmapsto iz - 1 - i$

2/ Soit $M_1 = T(M)$; $M_2 = T(M_1)$; $M_3 = T(M_2)$

a/ Position relative des droites (MM_1) et (M_2M_3) lorsque M est distinct de K

$T(MM_1) = (M_1M_2) \Rightarrow (MM_1) \perp (M_1M_2)$ ①

$T(M_1M_2) = (M_2M_3) \Rightarrow (M_1M_2) \perp (M_2M_3)$ ②

① et ② $\Rightarrow (MM_1) \parallel (M_2M_3)$

Lorsque M est distinct du point K, les droites (MM_1) et (M_2M_3) sont parallèles

b/ Déterminons l'ensemble des points M_1 de P lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB]

On sait que la rotation transforme un cercle en un cercle de même rayon.

$T(A) = B$; Posons $T(B) = B'$

on vérifie que $B' = S_K(A)$.

L'ensemble des points M_1 est donc le cercle de diamètre $[BB']$ avec $B' = S_K(A)$

PARTIE B

Soit α un réel fixé mais quelconque.

On considère l'application T_α de P dans P qui à tout point M, associe le point M' barycentre des points pondérés (M,α), $(M_1,-\alpha)$ et $(A,1)$, M_1 étant défini en A-2./

1./ Exprimons l'affixe z' du point M' en fonction de α et de l'affixe z de M

On sait que :

$\overrightarrow{OM'} = \alpha\overrightarrow{OM} - \alpha\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OA}$ donc

$$\boxed{z' = \alpha(1-i)z + \alpha + 1 + i\alpha}$$

2./ Déterminons, suivant les valeurs de α, la nature et les éléments caractéristiques de T_α

- Si $\alpha = 0$ alors T_α est une application constante. $T_0 : P \longrightarrow P$, $M_1 \longmapsto A$.

- si $|\alpha|\sqrt{2} = 1$ alors T_α est une rotation. $|\alpha|\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

* $\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z' = \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)z + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$T_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et de centre le point d'affixe $w = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)$

* $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$z' = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)z + \frac{\sqrt{2}+2}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$T_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de centre le point d'affixe $w = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1-i)$

- si $|\alpha| \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ alors T_α est la similitude directe de rapport $|\alpha|\sqrt{2}$, de centre le point d'affixe $w_\alpha = \frac{1-2i\alpha^2}{2\alpha^2-2\alpha+1}$

* si $\alpha \in \mathbb{R}^* - \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ alors T_α a pour angle $\frac{3\pi}{4}$

* si $\alpha \in \mathbb{R}^* - \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ alors T_α a pour angle $-\frac{\pi}{4}$.

3./ Exprimons les coordonnées (x',y') de M' en fonction des coordonnées (x,y) de M.

En posant $z' = x'+iy'$ et $z = x+iy$ on a :

après calcul. $\boxed{\begin{cases} x' = \alpha x + \alpha y + \alpha + 1 \\ y' = -\alpha x + \alpha y + \alpha \end{cases}}$

4./ Soit $E(-e^\alpha ; e^\alpha)$ $E' = T_\alpha(E)$

a./ Exprimons les coordonnées de E' en fonction de α

Après calcul on obtient :

$$\boxed{E'(\alpha+1 ; \alpha + 2\alpha e^\alpha)}$$

b./ Démontrons que lorsque α décrit $\mathbb{R}$, l'ensemble des points E' est la courbe (C) d'équation : $y = 2(x-1)e^{x-1} + x - 1$

$\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha + 2\alpha e^{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x - 1 \\ y = x - 1 + 2(x-1)e^{x-1} \end{cases}$

L'ensemble des points E' lorsque α décrit $\mathbb{R}$ est la courbe (C) d'équation:

$$y = 2(x-1)e^{x-1} + x - 1$$

PARTIE C

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = 2xe^{x} + x.$$

1/ Etudions le sens de variation de la fonction dérivée première f' de f

f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ car elle est produit et somme de deux fonct-s dérivables sur $\mathbb{R}$ et:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (2x+2)e^{x} + 1$

$f''(x) = (2x+4)e^{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x} > 0$ donc $f''(x)$ a le signe de $2x+4$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$\forall x \in]-\infty; -2[$ $f''(x) < 0$ donc f' est strictement décroissante sur $]-\infty; -2]$

$\forall x \in]-2; +\infty[$ $f''(x) > 0$ donc f' est strictement croissante sur $[-2; +\infty[$.

2/ Dressons le tableau de variation de f

$D_f = \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = (2x+2)e^{x} + 1$.

... Signe de $f'(x)$

Le sens de variation de f' montre que $f'(-2)$ est le minimum de f' sur $\mathbb{R}$.

Or $f'(-2) = 1 - \frac{2}{e^2} > 0$ donc

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ d'où f strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

3/ a/ Représentation graphique de f

Etude des branches infinies

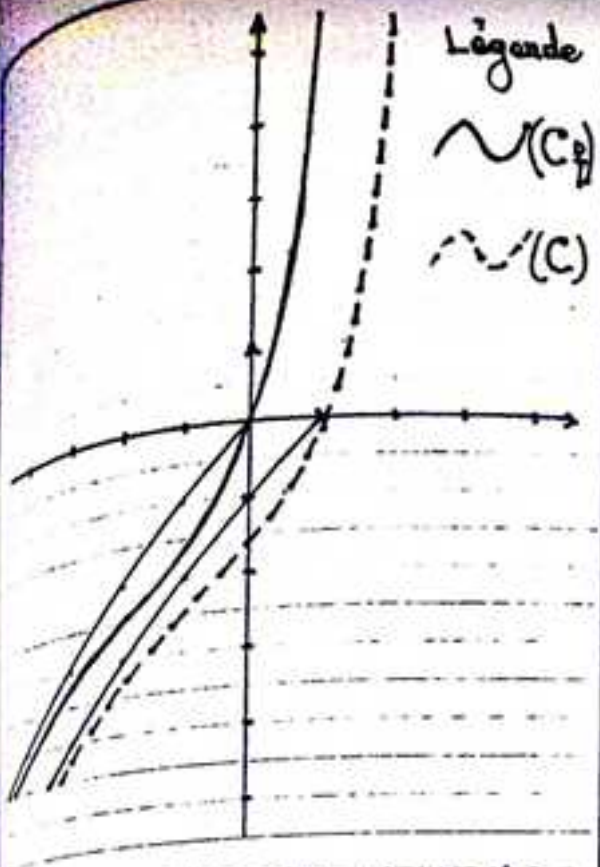
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2e^{x} + 1 = +\infty$ donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction (oy) à $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 2e^{x} + 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to -\infty} 2xe^{x} = 0$. donc la courbe de f admet la droite d'équation $y = x$ comme asymptote oblique à $-\infty$

Construction de la courbe (C_f)

(Voir page suivante)



b/ Transformation affine sur laquelle l'ensemble (C) des points E' du 8-4b/ est l'image de la courbe représentative de f:

Posons $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 2(x-1)e^{x-1} + x - 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x-1)$ donc la transformation demandée est la translation de vecteur $\vec{e_1}$.

c/ Traçons (C) dans le repère précédent

(Voir ci-dessus)

d/ Calcul d'aire

$A = \left(-\int_0^1 h(x)\,dx\right)$ u.a.

$$\boxed{A = \left(\frac{5}{2} - \frac{4}{e}\right) \text{u.a.}}$$

4/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = 2(x-1)e^{x-1}$.

On note $g', g'', g^{(3)}, \ldots g^{(n)}$ les dérivées successives de g.

a/ Démontrons que pour tout entier n non nul $g^{(n)}(x) = 2(x+n-1)e^{x-1}$, où x est un nombre réel

- Pour $n=1$, $g'(x) = 2xe^{x-1}$; la proposition est vraie au rang 1.
- Supposons que la proposition est vraie au rang n c'est-à-dire

$$g^{(n)}(x) = 2(x+n-1)e^{x-1}$$

$$g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}(x)\right)' = 2(x+n)e^{x-1}$$

donc $\left(g^{(n)}(x)\right)' = g^{(n+1)}(x)$.

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ g^{(n)}(x) = 2(x+n-1)e^{x-1}}$

b/ Calculons $\sum_{k=1}^{n} g^{(k)}(x)$.

Après calculs bien faits on a:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} g^{(k)}(x) = \left(2nx + n(n-1)\right)e^{x-1}}$$

PROBLEME N°3

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A(0;2), B(0;-1), C(1;-1), D(1;2) et E(2;-1). Soit f l'application affine du plan telle que f(O) = A et dont l'application linéaire associée est notée φ

PARTIE A

On suppose que pour tout point M de (BC), on a $\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{j}$.

1/ a/ Déterminons f(B) et f(C)

B et C appartiennent à (BC). On peut alors écrire : $\overrightarrow{Bf(B)} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{Cf(C)} = \vec{j}$

f(B) et f(C) sont les images respectives de B et C par la translation de vecteur $\vec{j}$ donc :

$$\begin{cases} x_{f(B)} = x_B + 0 = 0 \\ y_{f(B)} = y_B + 1 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{f(C)} = x_C + 0 = 1 \\ y_{f(C)} = y_C + 1 = 2 \end{cases}$$

$f(B)\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ $f(C)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

ie $A\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ d'où

$$\boxed{f(B) = A \text{ et } f(C) = D}$$

b/ Déterminons $\varphi(\vec{i})$ et $\varphi(\vec{j})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

$\vec{i} = \overrightarrow{BC}$ donc $\varphi(\vec{i}) = \varphi(\overrightarrow{BC})$

$= \overrightarrow{f(B)f(C)}$

$= \overrightarrow{AD} = \vec{i}$

$$\boxed{\varphi(\vec{i}) = \vec{i}}$$

$\vec{j} = \overrightarrow{OB}$ donc $\varphi(\vec{j}) = \varphi(\overrightarrow{OB})$

$= \overrightarrow{f(O)f(B)}$

or f(O) = A et f(B) = A d'où

$\varphi(\vec{j}) = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

$$\boxed{\varphi(\vec{j}) = \vec{0}}$$

2/ Soit M un point du plan de coordonnées (x;y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Démontrons que $\overrightarrow{Mf(M)} = (2-y)\vec{j}$

En utilisant chasles on a :

$\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{Af(M)}$

$= -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{f(O)f(M)}$

$= -(x\vec{i} + y\vec{j}) + 2\vec{j} + \varphi(\overrightarrow{OM})$

$= -x\vec{i} - y\vec{j} + 2\vec{j} + \varphi(x\vec{i} + y\vec{j})$

or $\varphi(x\vec{i} + y\vec{j}) = x\varphi(\vec{i}) + y\varphi(\vec{j})$ car φ est linéaire. On a donc :

$\overrightarrow{Mf(M)} = -x\vec{i} - y\vec{j} + 2\vec{j} + x\varphi(\vec{i}) + y\varphi(\vec{j})$

$= -x\vec{i} - y\vec{j} + 2\vec{j} + x\vec{i} + y\vec{0}$

$= (2-y)\vec{j}$

$$\boxed{\overrightarrow{Mf(M)} = (2-y)\vec{j}}$$

3/ Démontrons que $f \circ f = f$

$\varphi(\overrightarrow{Mf(M)}) = \varphi[(2-y)\vec{j}]$

$\varphi(\overrightarrow{Mf(M)}) = (2-y)\varphi(\vec{j})$ or $\varphi(\vec{j}) = \vec{0}$

$\varphi(\overrightarrow{Mf(M)}) = \vec{0}$

$\varphi(\overrightarrow{Mf(M)}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{f(M)f(f(M))} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{f(M)fof(M)} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow f(M) = fof(M)$

$\Leftrightarrow f = fof$.

$\boxed{fof = f}$

Déduisons-en la nature et les éléments caractéristiques de f

$fof = f \Rightarrow f$ est une projection

$\overrightarrow{Mf(M)} = (2-y)\vec{j} \Rightarrow f$ a pour direction l'axe $(O,\vec{j})$

$\begin{cases} f(B) = A \\ f(C) = D \end{cases} \Rightarrow$ l'axe de la projection f est la droite (AD).

De plus $\vec{j} \perp \overrightarrow{AD}$.

Conclusion

$\boxed{f \text{ est la projection orthogonale d'axe } (AD)}$

PARTIE B

On suppose que pour tout point M de (BC), on a: $\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{i}$.

1/ a./ Déterminons $f(B)$ et $f(C)$

B et C appartiennent à (BC) on a donc $\overrightarrow{Bf(B)} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{Cf(C)} = \vec{i}$

$f(B)$ et $f(C)$ sont les images respectives de B et C par la translation de vecteur $\vec{i}$

$\begin{cases} x_{f(B)} = x_B + 1 = 0+1 = 1 \\ y_{f(B)} = y_B + 0 = 1+0 = 1 \end{cases}$

$f(B)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ou $C(1;1)$ On a donc

$\boxed{f(B) = C}$

$\begin{cases} x_{f(C)} = x_C + 1 = 1+1 = 2 \\ y_{f(C)} = y_C + 0 = 1+0 = 1 \end{cases}$

$f(C)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ou $E(2;1)$ On a donc

$\boxed{f(C) = E}$

b./ Déterminons $\varphi(\vec{i})$ et $\varphi(\vec{j})$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$

$\varphi(\vec{i}) = \varphi(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{f(B)f(C)}$

$= \overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \vec{i}$

$\boxed{\varphi(\vec{i}) = \vec{i}}$

$\varphi(\vec{j}) = \varphi(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{f(O)f(B)}$

$= \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$

$= -2\vec{j} + \vec{i} + \vec{j}$

$= \vec{i} - \vec{j}$.

$\boxed{\varphi(\vec{j}) = \vec{i} - \vec{j}}$

2./ Démontrons que l'expression analytique de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est: $\begin{cases} x' = x+y \\ y' = -y+2 \end{cases}$

Soit $M(x;y)$ et $M'(x';y')$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$

$M' = f(M) \Rightarrow \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{Af(M)}$ or $f(O) = A$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{f(O)f(M)}$

$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{f(O)f(M)} \Rightarrow \overrightarrow{AM'} = \varphi(\overrightarrow{OM})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM'} = \varphi(x\vec{i} + y\vec{j})$

$= x\varphi(\vec{i}) + y\varphi(\vec{j})$

$= x\vec{i} + y(\vec{i} - \vec{j})$

$= (x+y)\vec{i} - y\vec{j}$

$\Rightarrow \begin{cases} x' - x_A = x + y \\ y' - y_A = -y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = x + y + x_A = x + y + 0 \\ y' = -y + y_A = -y + 2 \end{cases}$

L'expression analytique de f est donc

$f: \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -y + 2 \end{cases}$

3/ a/ Ensemble des points invariants par f.

M est invariant par f ssi :

$M = f(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x + y \\ y = -y + 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{et} \\ y = 1 \end{cases}$ impossible.

L'ensemble des points invariants par f est vide

b/ Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de fof

Expression analytique de fof

$\begin{cases} x' = x + y + (-y+2) = x + 2 \\ y' = -(-y+2) + 2 = y \end{cases}$

$f \circ f: \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y \end{cases}$

fof est donc la translation de vecteur $2\vec{i}$

4/ Soit t la translation de vecteur $-\vec{i}$.

Démontrons que tof est une symétrie axiale dont nous préciserons les éléments caractéristiques

$t: \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y \end{cases}$ $f: \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -y + 2 \end{cases}$

$\Rightarrow t \circ f: \begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = -y + 2 \end{cases}$

Posons $S = tof$

$S(M) = M \Rightarrow \begin{cases} x = x + y - 1 \\ y = -y + 2 \end{cases} \Rightarrow y = 1$

L'ensemble des points invariants par S est la droite d'équation $y = 1$ dirigée par le vecteur $\vec{i}$

De plus : soit $M'(x', y') = S(M)$

on a: $\overrightarrow{MM'} = (x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j}$

$= (y-1)\vec{i} + (2 - 2y)\vec{j}$

$= (y-1)(\vec{i} - 2\vec{j})$

$\overrightarrow{MM'}$ a la direction du vecteur $\vec{i} - 2\vec{j}$

SOS: $\begin{cases} x' = x + y - 1 - y + 2 - 1 = x \\ y' = -(-y+2) + 2 = y \end{cases}$

$sos: \begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$ $sos = Id_P$. donc s est une symétrie

Conclusion:

$t \circ f$ est la symétrie axiale d'axe la droite (BC) d'équation $y=1$, et de direction celle du vecteur $\vec{i}-2\vec{j}$

5/ On considère la suite des points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que:

$M_0 = O$ et $M_{n+1} = f(M_n)$

a/ Montrons que $\overrightarrow{M_n M_{n+2}} = 2\vec{i}$

$M_{n+2} = f(M_{n+1}) = f(f(M_n))$

$= f \circ f(M_n)$

or $f \circ f$ est la translation de vecteur $2\vec{i}$ (Voir question 3./ b). d'où

$M_{n+2} = t_{2\vec{i}}(M_n)$

$\Leftrightarrow \boxed{M_n M_{n+2} = 2\vec{i}}$

b/ Déduisons-en que les points M_n appartiennent à la réunion de deux droites que nous préciserons

On sait que $\begin{cases} M_0 = O \; ; \; M_1 = f(M_0) = A \\ \text{et} \\ \overrightarrow{M_n M_{n+2}} = 2\vec{i} \end{cases}$

On en déduis que les points M_n appartiennent:

soit à la droite passant par O et dirigée par $2\vec{i}$

soit à la droite $(A, 2\vec{i})$

- la droite passant par O et dirigée par $2\vec{i}$ est la droite $(O, \vec{i})$ c'est-à-dire l'axe des abscisses
- la droite $(A, 2\vec{i})$ est la droite (AD).

Conclusion

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M_n \in (O,\vec{i}) \cup (AD)}$

Remarque: $\begin{cases} M_n \in (O,\vec{i}) \text{ si } n \text{ est pair} \\ M_n \in (AD) \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

c./ Soit $(x_n ; y_n)$ les coordonnées de M_n

Exprimons x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n

$M_{n+1} = f(M_n) \Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = -y_n + 2 \end{cases}$

$$\boxed{\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = -y_n + 2 \end{cases}}$$

On pose $z_n = y_n - 1$.

Montrons que (z_n) est géométrique.

$z_{n+1} = y_{n+1} - 1 = -y_n + 2 - 1$

$= -y_n + 1$

$= -(y_n - 1)$

$z_{n+1} = -z_n \; ; \; z_0 = y_0 - 1 = -1$

(z_n) est donc une suite géométrique de 1er terme $z_0 = -1$ et de raison $q = -1$

Déduisons-en y_n en fonction de n

$z_n = z_0 q^n = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$

$z_n = y_n - 1 \Leftrightarrow y_n = 1 + z_n$

$= 1 + (-1)^{n+1}$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = 1 + (-1)^{n+1}}$

Démontrons que : $x_n = n - \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$

$x_{p+1} = x_p + y_p \quad \forall p \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow x_{p+1} - x_p = y_p = 1 + z_p$

$x_{p+1} - x_p = 1 + z_p$

$\Leftrightarrow \sum_{p=0}^{n-1} (x_{p+1} - x_p) = \sum_{p=0}^{n-1} 1 + z_p$

$\Leftrightarrow x_n = n + \sum_{p=0}^{n-1} z_p$

$= n + \frac{z_0(1-q^n)}{1-q}, \quad q = -1, \ z_0 = -1$

$x_n = n - \frac{1-(-1)^n}{1+1}$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = n - \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}}$

PARTIE C

Soit k un réel non nul et soit (Γ_k) la courbe d'équation : $x(y-1) = k$

1/ Montrons que (Γ_k) est une hyperbole dont nous préciserons le centre et les asymptotes

(Γ_k) a pour équation $y = 1 + \frac{k}{x}$

(Γ_k) est donc une hyperbole de centre $B(0;1)$ et dont les asymptotes sont les droites d'équations : $x = 0$ et $y = 1$

2/ On considère l'application affine f définie dans la partie B et on désigne par (Γ'_k) l'image de (Γ_k) par f.

a/ - Equation de (Γ'_k) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$f : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -y + 2 \end{cases} \quad \det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

f est bijective. Sa bijection réciproque est : $f^{-1} : \begin{cases} x = x' + y' - 2 \\ y = -y' + 2 \end{cases}$

$M(x;y) \in (\Gamma_k) \Leftrightarrow x(y-1) = k$

$\Leftrightarrow (x'+y'-2)(-y'+2-1) = k$

$\Leftrightarrow (x'+y'-2)(1-y') = k$

$\Leftrightarrow -y'^2 + x' + 3y' - x'y' - 2 = k$

$\boxed{\text{L'équation de } (\Gamma'_k) \text{ dans le repère } (O, \vec{i}, \vec{j}) \text{ est : } -y^2 + x + 3y - xy - 2 - k = 0}$

- Equation de (Γ'_k) dans le repère : $(C, \vec{I}, \vec{I} - \vec{J})$

Soit $M(X;Y)$ dans $(C, \vec{I}, \vec{I} - \vec{J})$

on a : $\overrightarrow{CM} = X\vec{I} + Y(\vec{I} - \vec{J})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OM} = (X+Y)\vec{I} - Y\vec{J}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (X+Y)\vec{I} - Y\vec{J} + \overrightarrow{OC}$

$\Leftrightarrow x\vec{i} + y\vec{j} = (X+Y)\vec{I} - Y\vec{J} + \vec{I} + \vec{J}$

$= (X+Y+1)\vec{I} + (-Y+1)\vec{J}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = X + Y + 1 \\ y = -Y + 1 \end{cases}$

Dans le repère $(C, \vec{i}, \vec{i}-\vec{j})$ (Γ'_k) a pour équation :

$(x+y+1-y+1-2)(1+y-1) = k$

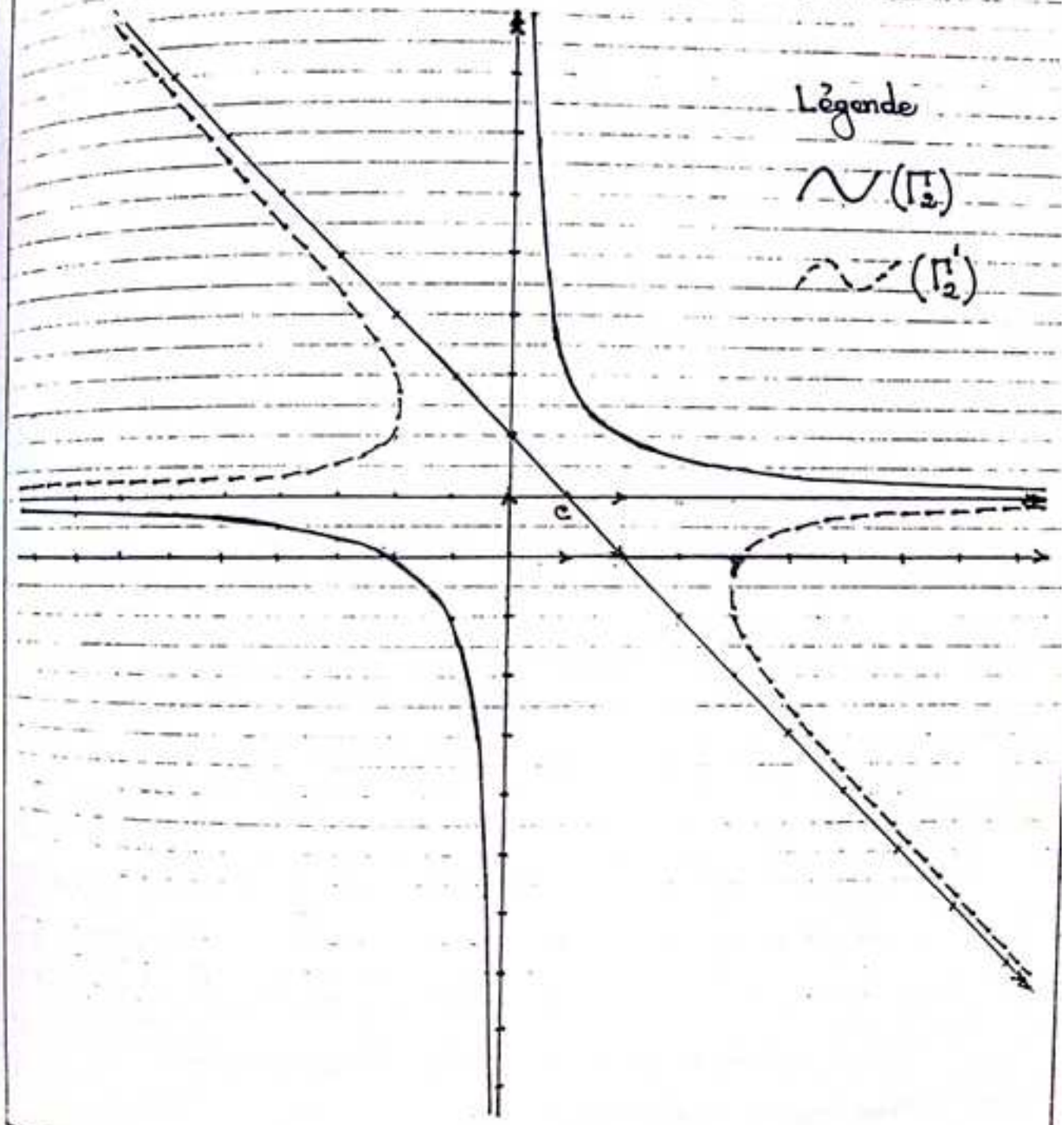
$\Leftrightarrow XY = k$

L'équation de (Γ'_k) dans le repère $(C, \vec{i}, \vec{i}-\vec{j})$ est $XY = k$.

b/ Déduction

(Γ'_k) est une hyperbole de centre C et dont les asymptotes sont les axes du repère $(C, \vec{i}, \vec{i}-\vec{j})$.

3°/ Construction de (Γ_2) et (Γ'_2)



PROBLEME N°32

Soit m un nombre réel et f_m la fonction à variable réelle définie par: $f_m(x) = e^{-2x} - (3+m)e^{-x} + 3m$. Soit (C_m) sa courbe représentative.

PARTIE A

1°a/ Montrons que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe A dont nous préciserons les coordonnées

Posons $y = f_m(x)$

$\Leftrightarrow y = e^{-2x} - (3+m)e^{-x} + 3m$

$= e^{-2x} - 3e^{-x} + m(3 - e^{-x})$

$\Leftrightarrow y - e^{-2x} + 3e^{-x} = m(3 - e^{-x})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - e^{-x} = 0 \\ y - e^{-2x} + 3e^{-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x} = 3 \\ y = e^{-x}(e^{-x} - 3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\ln 3 \\ y = 3(3-3) = 0 \end{cases}$

Toutes les courbes (C_m) passent par le point $A(-\ln 3; 0)$

b/ Soit M un point du plan

Etudions suivant la position du point dans le plan le nombre de courbes (C_m) passant par M

Soit $M(a; b)$

$M \in (C_m) \Leftrightarrow y - e^{-2a} + 3e^{-a} = m(3 - e^{-a})$

Soit (Δ) la droite d'équation : $x = -\ln 3$

1er cas : $M \in \Delta$ privée de A

Aucune courbe (C_m) ne passe par M.

2e cas M appartient au plan privé de Δ

Une seule courbe (C_m) passe par M.

3e cas M confondu à A

Une infinité de courbes passent par M.

2./ Discutons suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de (C_m) avec l'axe des abscisses

Soit $M(x; y)$; $M \in (C_m) \cap (ox)$ si

$\begin{cases} y = f_m(x) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow f_m(x) = 0$

$\Rightarrow e^{-2x} - (3+m)e^{-x} + 3m = 0$

$\Leftrightarrow (e^{-x})^2 - (3+m)e^{-x} + 3m = 0$ (1)

Posons $X = e^{-x} > 0$ (2)

(1) devient $X^2 - (3+m)X + 3m = 0$ (E)

$\Delta = (3+m)^2 - 4 \times 3m$

$= m^2 - 6m + 9$

$\Delta = (m-3)^2$

si $m \neq 3$, $X_1 = 3$ $X_2 = m$

si $m \neq 3$, (E) admet deux solutions distinctes $X_1 = 3$ et $X_2 = m$.

si $m = 3$ (E) admet une solution double $X_0 = 3$.

1er cas $m \leq 0$ ou $m = 3$

$e^{-x} = 3 \Leftrightarrow x = -\ln 3$

$e^{-x} = m$ impossible

Il existe donc un seul point d'inter-

section de (C_m) avec l'axe (ox).

2ème cas $m \in]0;3[\cup]3;+\infty[$

$e^{-x} = 3 \Leftrightarrow x = -\ln 3$

$e^{-x} = m \Leftrightarrow x = -\ln m$

Il existe deux points d'intersection de (C_m) avec l'axe (ox)

Résumons les résultats de cette discussion dans le tableau ci-dessous

m	$-\infty$		0		3		$+\infty$
nbre de pts d'I de (C_m) avec (ox)	1		2		2		
		1		1			

3/ a/ Calculons $f'_m(x)$

f_m est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}, f'_m(x) = -2e^{-2x} + (3+m)e^{-x}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_m(x) = (-2e^{-x} + 3 + m)e^{-x}$$

b/ Déterminons l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles la fonction f_m admet un extrémum I_m

$f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{m+3}{2}$ (2)

si $m \leq -3$, (2) est impossible.

si $x > -3$, (2) $\Leftrightarrow -x = \ln \frac{m+3}{2}$

$\Leftrightarrow x = -\ln \frac{m+3}{2}$

L'ensemble E des valeurs de m pour lesquelles f_m admet un extrémum I_m est $E =]-3;+\infty[$

c/ Déterminons les coordonnées du point I_m en fonction de m/

posons $x_m = -\ln \frac{m+3}{2}$

$f_m(x_m) = \left(\frac{m+3}{2}\right)^2 - (3+m)\left(\frac{m+3}{2}\right) + 3m$

$= -\frac{(m-3)^2}{4}$

$$I_m\left(-\ln\left(\frac{m+3}{2}\right); -\frac{(m-3)^2}{4}\right)$$

d/ Déterminons l'ensemble des points I_m lorsque m varie

$$\begin{cases} x = -\ln\left(\frac{m+3}{2}\right) \\ y = -\frac{(m-3)^2}{4} \\ m > -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2e^{-x} - 3 \\ y = \frac{(2e^{-x} - 3 - 3)^2}{4} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$y = -(e^{-x} - 3)^2$

L'ensemble des points I_m lorsque m varie est la courbe représentative de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$h(x) = -(e^{-x} - 3)^2$$

4/ Dans cette question m est un réel fixe.

a/ Montrons que (C_m) admet une asymptote horizontale (D_m) dont nous préciserons l'équation

$\lim_{x \to +\infty} f_m(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-2x} - (3+m)e^{-x} + 3m$

$= 0 - (3+m) \times 0 + 3m = 3m$

$\lim_{x \to +\infty} f_m(x) = 3m$

La droite (D_m) d'équation $y = 3m$ est asymptote horizontale à (C_m) en $+\infty$

b/ On suppose à présent que $m > -3$

Calculons en fonction de m les coordonnées du point J intersection de la courbe (C_m) et de la droite D_m

$$\begin{cases} y = f_m(x) \\ y = 3m \end{cases} \Rightarrow f_m(x) = 3m$$

$$\Rightarrow e^{-2x} - (3+m)e^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}(e^{-x} - 3 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = m + 3 > 0 \text{ car } m > -3$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln(m+3)$$

$$\boxed{J(-\ln(m+3); 3m)}$$

PARTIE B

1/ Etudions les variations de f_1

$$f_1(x) = e^{-2x} - 4e^{-x} + 3$$

$$D_{f_1} = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-2x} - 4e^{-x} + 3$$

$$= \lim_{X \to +\infty} e^{2X} - 4e^{X} + 3, \quad X = -x$$

$$= \lim_{X \to +\infty} e^{X}(e^{X} - 4) + 3$$

$$= +\infty \text{ car } \lim_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = +\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-2x} - 4e^{-x} + 3$$

$$= \lim_{x \to +\infty} X^2 - 4X + 3, \quad X = e^{-x}$$

$$= 3$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 3}$$

Dérivée :

f_1 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1'(x) = -2e^{-2x} + 4e^{-x}$$

$$f_1'(x) = 2(2 - e^{-x})e^{-x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $2e^{-x} > 0$ donc $f_1'(x)$ a le signe de $2 - e^{-x}$.

$$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 2 \Leftrightarrow x = -\ln 2$$

Signe de $f_1'(x)$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	

Sens de variation de f_1

D'après le tableau ci-dessus, f_1 est strictement décroissante sur $]-\infty; -\ln 2[$ strictement croissante sur $]-\ln 2; +\infty[$ et admet un minimum en $-\ln 2$

$$f_1(-\ln 2) = -1$$

Tableau de variation de f_1

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3

2/ Etudions les branches infinies de la courbe (C_1)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f_1(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-2x}}{x}-\frac{4}{x}e^{-x}+\frac{3}{x}$$

$$=\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}\left(e^X+4\right)-\frac{3}{X}\quad \text{avec } X=-x$$

$=-\infty$ car $\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$, $\lim_{X\to+\infty}e^X=+\infty$, $\lim_{X\to+\infty}\frac{3}{X}=0$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f_1(x)}{x}=-\infty$.

La courbe (C_1) admet une branche parabolique de direction (oy) en $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}f_1(x)=3$.

La droite d'équation $y=3$ est asymptote horizontale à (C_1) en $+\infty$

3/ Déterminons les coordonnées du point d'inflexion de (C_1)

$f_1'(x)=-2e^{-2x}+4e^{-x}$

$f_1''(x)=4e^{-2x}-4e^{-x}=4e^{-x}(e^{-x}-1)$

$f_1''(x)=0\Leftrightarrow e^{-x}=1\Leftrightarrow x=0$

$f_1(0)=1-4+3=0$

Le point d'inflexion de (C_1) est $O(0;0)$

Equation de la tangente (T) à (C_1) en O

$(T): y=f_1'(x)(x-0)+f_1(0)$

$(T): y=2x$

Construction soignée de la courbe (C_1) (Voir page suivante)

3/ Soit g l'application de $[-\ln 2;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(x)=f_1(x)$.

a/ Montrons que g admet une bijection réciproque

D'après les variations de f_1, g est continue, monotone strictement croissante sur $[-\ln 2;+\infty[$ avec :

$g(-\ln 2)=-1$ et $\lim_{x\to+\infty}g(x)=3$.

g définit donc une bijection de $[-\ln 2;+\infty[$ vers $[-1;3[$.

g admet donc une bijection réciproque

b/ Ensemble de définition de g^{-1}

$D_{g^{-1}}=[-1;3[$

4/ Soit $\alpha\geq 0$. Calculons l'aire $A(\alpha)$

$$A(\alpha)=\int_{-2\ln 2}^{\alpha}\left(3-f_1(x)\right)dx=\int_{-2\ln 2}^{\alpha}\left(4e^{-x}-e^{-2x}\right)dx$$

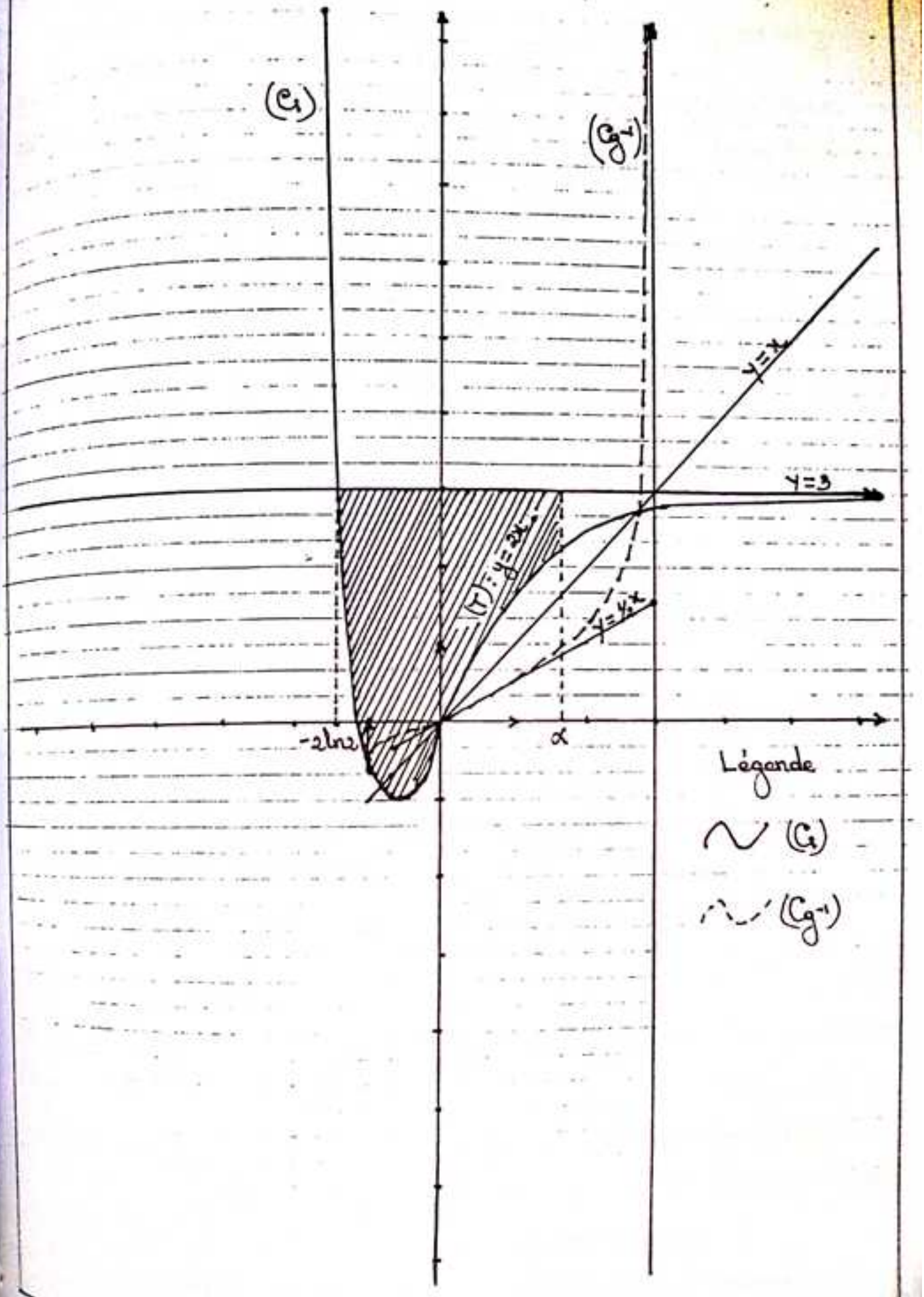
$$=\left[\frac{1}{2}e^{-2x}-4e^{-x}\right]_{-2\ln 2}^{\alpha}$$

$$A(\alpha)=\frac{1}{2}e^{-2\alpha}-4e^{-\alpha}+8$$

5/ Construction de la courbe $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère que (C_1)

(Voir page suivante)

Construction des courbes (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ PROBLEME N° 32.



PROBLEME N°33

Dans le plan P muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère la droite (D) d'équation : $y=\frac{1}{2}x$, la symétrie d'axe (D) et de direction celle de l'axe (Oy).

PARTIE A

Soit g l'application affine de P dans P qui au point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x+1 \\ y' = -\frac{3}{4}x+y+\frac{1}{2} \end{cases}$$

1/ Montrons que g est bijective et vérifions que $g\circ S = S\circ g$:

le déterminant du système est

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0.$$

g est donc bijective.

Vérifions que $g\circ S = S\circ g$:

Déterminons l'expression analytique de S. Soit $M(x;y)$ et $M_1(x_1;y_1)$ Soit I milieu de $[MM_1]$

$$S(M)=M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x \\ I\in(D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x \\ y_I = \frac{1}{2}x_I \end{cases} \quad (1)$$

Or $\begin{cases} x_I = \frac{x_1+x}{2} = x \\ y_I = \frac{y_1+y}{2} \end{cases}$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x \\ \frac{y_1+y}{2} = \frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = x-y \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = x-y \end{cases} \qquad g: \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x+1 \\ y' = -\frac{3}{4}x+y+\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$g\circ S: \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x+1 \\ y' = -\frac{3}{4}x+(x-y)+\frac{1}{2} = \frac{1}{4}x-y+\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S\circ g: \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x+1 \\ y' = -\frac{1}{2}x+1+\frac{3}{4}x-y-\frac{1}{2} = \frac{1}{4}x-y+\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$g\circ S: \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x+1 \\ y' = \frac{1}{4}x-y+\frac{1}{2} \end{cases} \qquad S\circ g: \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x+1 \\ y' = \frac{1}{4}x-y+\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{g\circ S = S\circ g}$$

2/ Déterminons l'ensemble (Δ) des points M de P invariants par g :

$$M\in(\Delta) \Leftrightarrow g(M)=M$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}x+1 \\ y = -\frac{3}{4}x+y+\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$$

L'ensemble (Δ) des points M de P invariants par g est la droite d'équation : $x=\frac{2}{3}$

3/ Montrons que, si $M\notin(\Delta)$ la droite (MM') garde une direction indépendante de M que nous préciserons

$$\overrightarrow{MM'} = (x'-x)\vec{i}+(y'-y)\vec{j}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}x+1-x\right)\vec{i}+\left(-\frac{3}{4}x+y+\frac{1}{2}-y\right)\vec{j}$$

$\overrightarrow{MM'} = \left(-\frac{3}{2}x+1\right)\vec{i} + \left(-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}\right)\vec{j}$

$= \left(-\frac{3}{2}x+1\right)\left(\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\right)$

$M \in (\Delta) \Rightarrow x \neq \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{3}{2}x+1 \neq 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{MM'} \neq \vec{0}$

$\overrightarrow{MM'}$ est donc colinéaire à $\vec{V} = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$

Or $\vec{V}$ est un vecteur directeur de (D).

Conclusion

Si M n'est pas invariant par g alors la droite (MM') garde la direction de la droite (D).

4/ Calculons les coordonnées du point M_1 intersection de (MM') et de (Δ).

Soit $M_1(x_1; y_1)$; $M_1 \in (MM')$ équivaut à $\overrightarrow{MM_1}$ et $\vec{V}$ colinéaires

$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{MM_1}; \vec{V}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1-x & 1 \\ y_1-y & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_1-x) - (y_1-y) = 0 \quad (1)$

$M_1 \in (\Delta) \Leftrightarrow x_1 = \frac{2}{3}$

$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-x\right) - y_1 + y = 0$

$\Leftrightarrow y_1 = -\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{3}$

$M_1\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}x+y+\frac{1}{3}\right)$

5/ Montrons que g est une affinité dont nous donnerons les éléments caractéristiques

$\overrightarrow{M_1M} = (x-x_1)\vec{i} + (y-y_1)\vec{j}$

$= \left(x-\frac{2}{3}\right)\vec{i} + \left(y+\frac{1}{2}x-y-\frac{1}{3}\right)\vec{j}$

$\overrightarrow{M_1M} = \left(x-\frac{2}{3}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)\vec{j}$

$\overrightarrow{M_1M'} = (x'-x)\vec{i} + (y'-y)\vec{j}$

$= \left(-\frac{1}{2}x+1-\frac{2}{3}\right)\vec{i} + \left(-\frac{3}{4}x+y+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}x-y-\frac{1}{3}\right)\vec{j}$

$= \left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)\vec{i} + \left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}\right)\vec{j}$

$= -\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)\vec{j}\right]$

$\overrightarrow{M_1M'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{M_1M}$

De plus (MM') a la direction de (D).

Conclusion

g est l'affinité de rapport $-\frac{1}{2}$, d'axe (Δ) et de direction celle de (D)

PARTIE B

On note Ψ l'application linéaire associée à S et F l'ensemble des applications affines bijectives f de P dans P telles que $f(O)$ appartient à (D) et dont l'application linéaire associée φ vérifie :

$\varphi(2\vec{i}+\vec{j}) = a(2\vec{i}+\vec{j})$ et $\varphi(\vec{j}) = b\vec{j}$

$(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

1-/ a/ Précisons le couple (a; b) pour lequel f est une homothétie

f est une homothétie si et seulement si

$\exists k \in \mathbb{R}^* - \{1\} / \forall \vec{u} \in \vec{V}, \varphi(\vec{u}) = k\vec{u}$

En particulier : $\varphi(\vec{j}) = k\vec{j}$ et

$\varphi(2\vec{i}+\vec{j}) = k(2\vec{i}+\vec{j})$

Conclusion

f est une homothétie ssi

$a = b = k$ avec $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

b/ Précisons le couple (a;b) pour que f soit une translation

f est une translation ssi $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}$, $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$. Ainsi :

$\varphi(2\vec{i}+\vec{j}) = 2\vec{i}+\vec{j}$ et $\varphi(\vec{j}) = \vec{j}$ On en déduit : $a = 1$ et $b = 1$

Conclusion

f est une translation ssi $a = b = 1$

2/ Soit A un point de P tel que le vecteur $\overrightarrow{OA}$ soit colinéaire à $\vec{j}$ et B un point de (D) distinct de O.

- Déterminons $\varphi(\overrightarrow{OA})$ et $\varphi(\overrightarrow{OB})$

$\varphi(\overrightarrow{OA}) = S(O)S(A) = \overrightarrow{OA'}$ où $A' = S(A)$ est le symétrie de A par rapport à O

$\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$

On a donc **$\varphi(\overrightarrow{OA}) = -\overrightarrow{OA}$**

$\varphi(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{S(O)S(B)} = \overrightarrow{OB}$ car

$\begin{cases} O \in (D) \Rightarrow S(O) = O \\ \text{et} \\ B \in (D) \Rightarrow S(B) = B. \end{cases}$

$\varphi(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB}$

Déduisons-en $\varphi(\vec{j})$ et $\varphi(2\vec{i}+\vec{j})$

$\overrightarrow{OA} = k\vec{j}$, $k \neq 0$ $\varphi(\overrightarrow{OA}) = \varphi(k\vec{j})$

$= k\varphi(\vec{j})$

or $\varphi(\overrightarrow{OA}) = -\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow k\varphi(\vec{j}) = -k\vec{j}$

$\Leftrightarrow \varphi(\vec{j}) = -\vec{j}$

$\varphi(\vec{j}) = -\vec{j}$

$2\vec{i}+\vec{j}$ est un vecteur directeur de (D)

On a donc $\overrightarrow{OB} = k(2\vec{i}+\vec{j})$ $k \neq 0$

$\varphi(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \varphi(k(2\vec{i}+\vec{j})) = k(2\vec{i}+\vec{j})$

$\Leftrightarrow k\varphi(2\vec{i}+\vec{j}) = k(2\vec{i}+\vec{j})$

$\Leftrightarrow \varphi(2\vec{i}+\vec{j}) = 2\vec{i}+\vec{j}$.

$\varphi(2\vec{i}+\vec{j}) = 2\vec{i}+\vec{j}$

3/ Démontrons que S et g appartiennent à $\mathcal{F}$

- $\varphi(2\vec{i}+\vec{j}) = a(2\vec{i}+\vec{j})$ avec $a = 1$

$\varphi(\vec{j}) = b\vec{j}$ avec $b = -1$

De plus S est une application affine bijective et $S(O) = O \in (D)$.

donc **$S \in \mathcal{F}$**

- g est affine, bijective.

$g(O)\left(-\frac{1}{2}\times 0 + 1 ; -\frac{3}{4}\times 0 + 0 + \frac{1}{2}\right)$

$g(O)\left(1 ; \frac{1}{2}\right) \in (D)$. Soit γ l'application linéaire associée à g on a:

$\gamma(\vec{j}) = \gamma(\overrightarrow{OJ})$ avec $J(0;1)$

$= \overrightarrow{g(O)g(J)}$

$g(J)\begin{cases} -\frac{1}{2}\times 0 + 1 = 1 \\ -\frac{3}{4}\times 0 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$ $g(J)\left(1 ; \frac{3}{2}\right)$

$\overrightarrow{g(O)g(J)}\begin{cases} 1-1 = 0 \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$ $\overrightarrow{g(O)g(J)}(0;1)$

On a donc $\overrightarrow{g(O)g(J)} = \vec{j}$

$\gamma(\vec{j}) = b\vec{j}$ avec $b = 1$

Soit $H(2;1)$ on a: $\overrightarrow{OH} = 2\vec{i}+\vec{j}$

$g(0)\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ On montre que $g(H)(0;0)$

$\overrightarrow{g(O)g(H)} = -\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} = -\frac{1}{2}(2\vec{i}+\vec{j})$

$\gamma(2\vec{i}+\vec{j}) = a(2\vec{i}+\vec{j})$ avec $a = -\frac{1}{2}$

Conclusion: $\boxed{g \in f_1}$

4/ On appelle f_1 le sous-ensemble des éléments de f dont l'application linéaire associée φ vérifie $\varphi(\vec{i}) = \vec{j}$

a/ Soit f_1 un élément de f_1.

Démontrons que le point $M(x;y)$ a pour image par f_1 le point $M'(x';y')$ tel que: $\begin{cases} x' = ax + 2\alpha \\ y' = \frac{a-1}{2}x + y + \alpha \end{cases}$ avec $\begin{pmatrix} a \in \mathbb{R}^* \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$

$f_1(M) = M' \Leftrightarrow \varphi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f_1(O)f_1(M)}$

$\varphi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f_1(O)M'}$

or $\varphi(\overrightarrow{OM}) = \varphi(x\vec{i}+y\vec{j}) = x\varphi(\vec{i}) + y\varphi(\vec{j})$

$\varphi(\vec{j}) = \vec{j}$.

Déterminons $\varphi(\vec{i})$

$\varphi(2\vec{i}+\vec{j}) = a(2\vec{i}+\vec{j})$

$\Leftrightarrow 2\varphi(\vec{i}) + \varphi(\vec{j}) = 2a\vec{i} + a\vec{j}$

$\Leftrightarrow 2\varphi(\vec{i}) + \vec{j} = 2a\vec{i} + a\vec{j}$

$\Leftrightarrow 2\varphi(\vec{i}) = 2a\vec{i} + (a-1)\vec{j}$

$\Leftrightarrow \varphi(\vec{i}) = a\vec{i} + \frac{a-1}{2}\vec{j}$

$\varphi(\overrightarrow{OM}) = x\varphi(\vec{i}) + y\varphi(\vec{j})$

$= x\left(a\vec{i} + \frac{a-1}{2}\vec{j}\right) + y\vec{j}$

$\varphi(\overrightarrow{OM}) = ax\vec{i} + \left(\frac{a-1}{2}x + y\right)\vec{j}$

$\varphi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f_1(O)M'} = \overrightarrow{f_1(O)O} + \overrightarrow{OM'}$

or $f_1(O) \in (D) \Rightarrow f_1(O)(2\alpha;\alpha)$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$\varphi(\overrightarrow{OM}) = ax\vec{i} + \left(\frac{a-1}{2}x + y\right)\vec{j}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{f_1(O)O} + \overrightarrow{OM'} = ax\vec{i} + \left(\frac{a-1}{2}x + y\right)\vec{j}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = ax\vec{i} + \left(\frac{a-1}{2}x + y\right)\vec{j} + \overrightarrow{Of_1(O)}$

$= ax\vec{i} + \left(\frac{a-1}{2}x + y\right)\vec{j} + 2\alpha\vec{i} + \alpha\vec{j}$

$\overrightarrow{OM'} = (ax + 2\alpha)\vec{i} + \left(\frac{a-1}{2}x + y + \alpha\right)\vec{j}$

d'où: $\boxed{\begin{cases} x' = ax + 2\alpha \\ y' = \frac{a-1}{2}x + y + \alpha \end{cases}}$

b/ Ensemble des points invariants par f_1

Soit (Γ) l'ensemble des points invariants par f_1 on a:

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} x = ax + 2\alpha \\ y = \frac{a-1}{2}x + y + \alpha \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)x = 2\alpha \\ (a-1)x = -2\alpha \end{cases}$

On a donc: $(a-1)x = -2\alpha$

- si $a = 1$ et $\alpha = 0$ alors $(\Gamma) = (P)$
- si $a = 1$ et $\alpha \neq 0$ alors $(\Gamma) = \emptyset$
- $a \neq 1$ alors (Γ) est la droite d'équation: $x = \frac{-2\alpha}{a-1}$.

c/ Dans cette question on prend $\alpha = 0$

Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan P.

On pose $M_1 = f_1(M_0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $M_{n+1} = f_1(M_n)$. Soit $M_n(x_n; y_n)$.

Calculons x_n et y_n en fonction de x_0 y_0 et a.

$$\begin{cases} x_{n+1} = a x_n \\ y_{n+1} = \frac{a-1}{2} x_n + y_n \end{cases}$$

(x_n) est une suite géométrique de 1er terme x_0 et de raison a d'où

$$\boxed{x_n = a^n x_0}$$

$$y_{n+1} = \frac{a-1}{2} x_n + y_n$$

$$\Leftrightarrow y_{n+1} - y_n = \frac{a-1}{2} x_n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{p=0}^{n-1} (y_{p+1} - y_p) = \frac{a-1}{2} \sum_{p=0}^{n-1} x_p$$

$$\Leftrightarrow y_n - y_0 = \frac{a-1}{2} \cdot x_0 \frac{1-a^n}{1-a}$$

$$= -\frac{1}{2} x_0 (1-a^n)$$

$y_n - y_0 = \frac{1}{2} x_0 (a^n - 1)$ d'où

$$\boxed{y_n = \frac{1}{2} x_0 (a^n - 1) + y_0}$$

Etudions la convergence des suites (x_n) et (y_n)

- Si $x_0 = 0$ alors $x_n = 0$ et $y_n = y_0$ (x_n) et (y_n) sont constantes donc convergentes.
- Si $x_0 \neq 0$, (x_n) et (y_n) sont convergentes pour $a \in]-1; +1[- \{0\}$ et divergentes pour $a \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

PARTIE C

1/ Soit F la fonction numérique définie par: $F(x) = \frac{1}{2}x + \ln x$.

Etudions les variations de F

$D_F =]0; +\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} F(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{2}x + \ln x$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} F(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}x + \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

Dérivée:

F est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ car elle est somme de deux fonctions continues et dérivables sur $]0; +\infty[$ et

$\forall x > 0$, $F'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{x} = \frac{x+2}{2x}$

$\forall x > 0$, $F'(x) > 0$ donc F est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation de F

x	0		$+\infty$
$F'(x)$	‖	$+$	
$F(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Représentons graphiquement F dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$

Branches infinies de la courbe (C) représentative de F.

$\lim_{x \to 0} F(x) = -\infty$.

La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation : $x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}$

$= \frac{1}{2}$ car $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \to +\infty} F(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

La courbe (C) admet à $+\infty$, une branche parabolique dirigée par la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

Construction de (C) : (Voir page suivante)

2°/ a/ Soit f_1 un élément quelconque de Γ_+.

Déterminons une équation cartésienne de l'image de (C) par f_1

$$\begin{cases} x' = ax + 2\alpha \\ y' = \frac{a-1}{2}x + y + \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{a}x' - \frac{2\alpha}{a} \\ y = y' - \frac{a-1}{2a}x' - \frac{\alpha}{a} \end{cases}$$

$M(x;y) \in (C) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \ln x$

$\Rightarrow y' - \frac{a-1}{2a}x' - \frac{\alpha}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}x' - \frac{2\alpha}{a}\right) + \ln\left(\frac{1}{a}x' - \frac{2\alpha}{a}\right)$

$y' = \frac{1}{2}x' + \ln\left(\frac{x' - 2\alpha}{a}\right)$

L'équation cartésienne de $f_1(C)$ est :

$y = \frac{1}{2}x + \ln\left(\frac{x - 2\alpha}{a}\right)$ avec $\frac{x-2\alpha}{a} > 0$

b/ Soient $(p;q) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $(C_{p;q})$ la courbe d'équation $y = \ln(px+q) + \frac{1}{2}x$

Démontrons que $(C_{p;q})$ est l'image de (C) par une application appartenant à Γ_+

$f_1(C) : y = \ln\left(\frac{1}{a}x - \frac{2\alpha}{a}\right) + \frac{1}{2}x$

Par identification on a :

$p = \frac{1}{a}$ et $q = -\frac{2\alpha}{a}$ d'où : $a = \frac{1}{p}$ et $\alpha = -\frac{q}{2p}$

Conclusion

$(C_{p;q})$ est l'image de (C) par l'application f_1 correspondant à : $a = \frac{1}{p}$ et $\alpha = \frac{-q}{2p}$

3°/ Soit (Γ) la courbe d'équation :

$y = \ln(2 - 2x) + \frac{1}{2}x$.

Reconnaissons l'application qui transforme (C) en (Γ)

Par identification on a :

$$\begin{cases} \frac{1}{a} = -2 \\ -\frac{2\alpha}{a} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1/2 \\ \alpha = 1/2 \end{cases}$$

(Γ) est l'image de (C) par l'application g de la partie A

4°/ Construisons $(C') = (g \circ S)(C)$

$(C') = (g \circ S)(C) = (S \circ g)(C)$

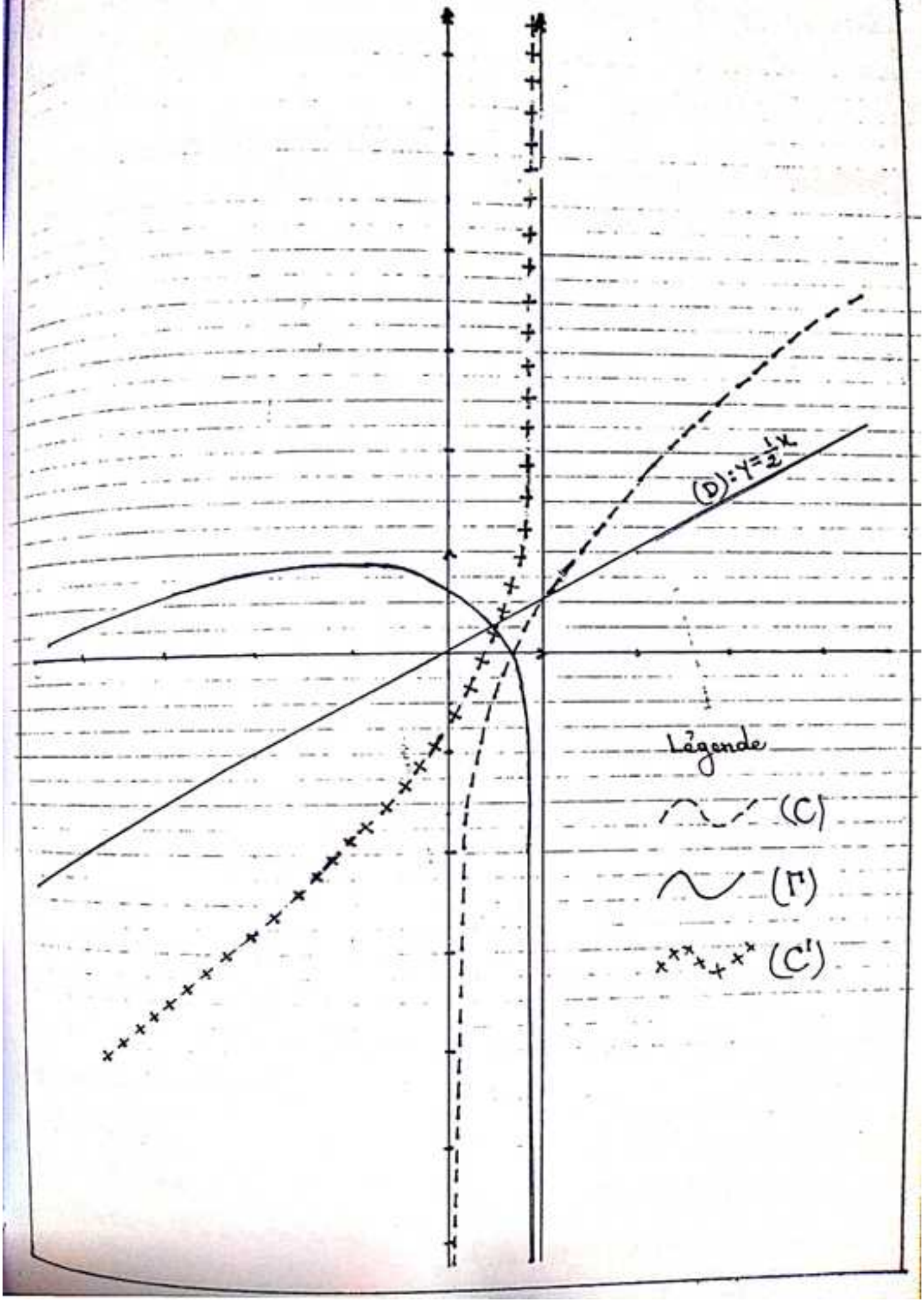
$= S[g(C)]$ or $g(C) = \Gamma$

$= S(\Gamma)$

$(\Gamma) : h(x) = \frac{1}{2}x + \ln(2 - 2x)$

On construira (Γ) puis $S(\Gamma) = (C')$.

Construction des courbes (C) et (C') PROBLEME N°33



PROBLEME N°34

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. L'unité graphique est 2cm.

Pour tout nombre réel non nul α, on considère la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $f_\alpha(x) = -x\ln(\alpha^2) - 2x\ln|x|$.

On note C_α, C_α^+, C_α^- les courbes représentatives de f_α et des restrictions de f_α à $]0;+\infty[$ et à $]-\infty;0[$ respectivement.

Soit g_α la restriction de f_α à $]0;+\infty[$

PARTIE A

Soit E l'ensemble des fonctions numériques dérivables sur $]0;+\infty[$ et telles que: $\forall x_1 \in]0;+\infty[, \forall x_2 \in]0;+\infty[$

$$f(x_1x_2) = x_1f(x_2) + x_2f(x_1)$$

1/ Démontrons que la fonction kg_1 où k est un nombre réel fixé, appartient à E.

$g_1(x) = -2x\ln x$

g_1 est dérivable sur $]0;+\infty[$ car elle est le produit de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, donc $kg_1, k\in\mathbb{R}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

D'autre part

$\forall x_1>0, \forall x_2>0$,

$(kg_1)(x_1x_2) = -2kx_1x_2\ln(x_1x_2)$

$(kg_1)(x_1x_2) = -2kx_1x_2(\ln x_1 + \ln x_2)$

$= x_1(-2kx_2\ln x_2) + x_2(-2kx_1\ln x_1)$

$= x_1(kg_1)(x_2) + x_2(kg_1)(x_1)$

Donc $\boxed{kg_1 \text{ est élément de } E}$

2/ a/ Démontrons que si f appartient à E alors $f(1)=0$

Posons $x_1 = x_2 = 1 \Rightarrow f(1) = f(1) + f(1)$

$\Rightarrow f(1) = 0$

$\boxed{\text{Si } f\in E \text{ alors } f(1)=0}$

b/ Démontrons que si f appartient à E alors $\forall x>0, xf'(x) - f(x) = xf'(1)$

$f(x_1x_2) = x_1f(x_2) + x_2f(x_1)$

Dérivons par rapport à x_1 on a:

$x_1f'(x_1x_2) = x_1f(x_2) + x_2f'(x_1)$

Posons $x_2 = x$ et $x_1 = 1$ on a le resultat

c/ En remarquant que la propriété (1) équivaut à: $\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f'(1)}{x}$

calculon $\frac{f(x)}{x}$ pour tout $x>0$

$\forall x>0, \frac{1}{x^2} > 0$

Multiplions (1) par $\frac{1}{x^2}$ on obtient

$\forall x>0, \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f'(1)}{x}$

ou $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(1)}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = f'(1)\ln x + c$

$f(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1)\times 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = f'(1)\ln x$, posons $f'(1) = k$

$$\boxed{\frac{f(x)}{x} = k\ln x,\ k \in \mathbb{R}}$$

d/ Déduisons-en l'ensemble des fonctions appartenant à E

$\frac{f(x)}{x} = k\ln x \Leftrightarrow f(x) = kx\ln x$

$$E = \left\{ f / \forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = kx\ln x,\ k \in \mathbb{R} \right\}$$

PARTIE B

1/ Valeurs de α pour lesquelles g_α appartient à E

$g_\alpha \in E \Leftrightarrow -x\ln(\alpha^2) = 0 \quad \forall x > 0$

$\Leftrightarrow \ln(\alpha^2) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 1$

$\Leftrightarrow \alpha = -1$ ou $\alpha = 1$

L'ensemble des valeurs de α pour lesquelles $g_\alpha \in E$ est la paire $\{-1;1\}$

2/ a/ Etude du sens de variat° de g_1

$g_1(x) = -2|x|\ln|x| = -2x\ln x$ pour $x > 0$

$g_1(x) = -2x\ln x$; $D_{g_1} =]0;+\infty[$

g_1 est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x > 0$

$g_1'(x) = -2(\ln x + 1)$

$g_1'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

Signe de $g_1'(x)$

x	0		$1/e$		$+\infty$
$g_1'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

Sens de variation de g_1

$\forall x \in]0;1/e[$, $g_1'(x) > 0$ donc g_1 est strictement croissante

$\forall x \in]1/e;+\infty[$, $g_1'(x) < 0$ donc g_1 est strictement décroissante sur $]1/e;+\infty[$

b/ Tableau de variation de f_1

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f_1(x) = -2|x|\ln|x|$

$= g_1(|x|)$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$ et :

$f_1(-x) = g_1(|-x|) = g_1(|x|) = f_1(x)$.

f_1 est donc une fonction paire.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f_1(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} -2x\ln x$

$= -2\times 0 = 0$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x\ln x = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f_1(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -2x\ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = -\infty$; $f_1(1/e) = g_1(1/e) = \frac{2}{e}$

Tableau de variation de f_1

x	$-\infty$		$-1/e$		0		$1/e$		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	$-\infty$

Remarque

La fonction f_1 est prolongeable par continuité en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Etudions la dérivabilité en 0 de la fonction prolongement.

$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} -2\ln x = +\infty$

$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} 2\ln(-x)$

$= \lim_{X\to 0} 2\ln X = -\infty$

Donc la fonction prolongée par continuité de f_1 en 0 n'est pas dérivable en 0.

Sa courbe admet une demi tangente verticale en 0.

Tableau de variation du prolongement par continuité de f_1 en 0

x	$-\infty$		$-1/e$		0		$1/e$		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$-\infty$	↗	$2/e$	↘	0	↗	$2/e$	↘	$-\infty$

c/ Tracons (C_1)

Branche infinie de (C_1)

$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x>0}} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ x>0}} -2\ln x = -\infty$

Donc (C_1) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Pour la construction, voir page suivante

d/ Calcul d'aire

Soit A cette aire en unité d'aire

$A = \int_{1/e}^{1} f_1(x)\,dx = -2\int_{1/e}^{1} (x\ln x)\,dx$

Posons $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}x^2$

$A = \left[-x^2\ln x\right]_{1/e}^{1} + \int_{1/e}^{1} x\,dx$

$= -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{1/e}^{1}$

$= -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2e^2}$

$A = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2e^2}\right)$ ua $= \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2e^2}\right) \times 4\,cm^2$

$$A = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2e^2}\right) ua = \left(2 - \frac{6}{e^2}\right) cm^2$$

Dans la suite du problème, on suppose α strictement supérieur à zéro.

3-/ a/ Montrons que pour tout $x>0$,

$$g_\alpha\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} g_1(x)$$

$g_1(x) = -2x\ln x$; $g_\alpha(x) = -x\ln x^2 - 2x\ln x$

$g_\alpha\left(\frac{x}{\alpha}\right) = -\frac{x}{\alpha}\ln(\alpha^2) - 2\frac{x}{\alpha}\ln\left(\frac{x}{\alpha}\right)$

$= -\frac{2x}{\alpha}\ln\alpha - \frac{2x}{\alpha}(\ln x - \ln\alpha)$

$= -\frac{2x}{\alpha}\ln\alpha - \frac{2x}{\alpha}\ln x + \frac{2x}{\alpha}\ln\alpha$

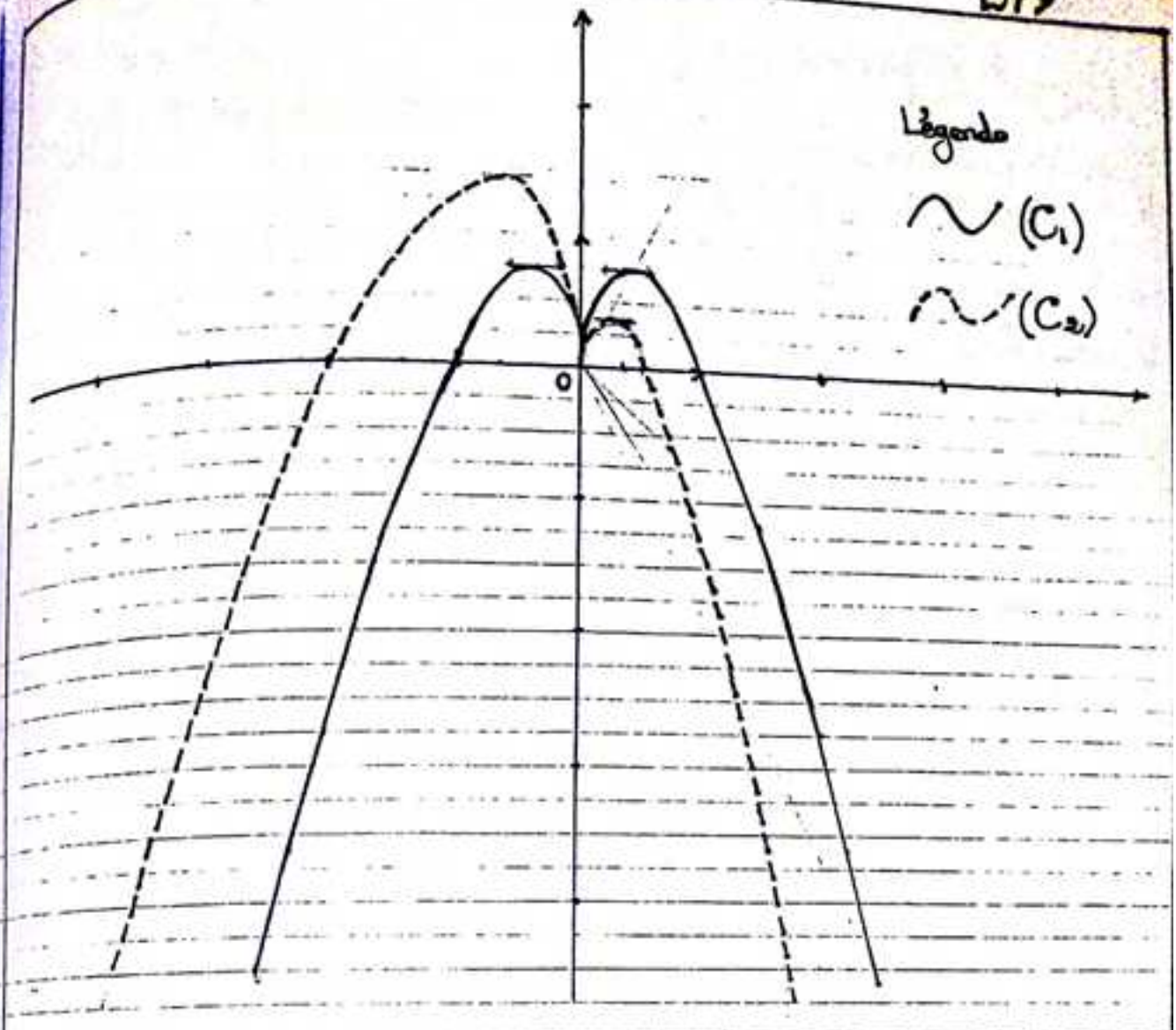
$= -\frac{2x}{\alpha}\ln x$

$= \frac{1}{\alpha}(-2x\ln x) = \frac{1}{\alpha} g_1(x)$.

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ g_\alpha\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} g_1(x)$$

b/ Déduisons-en que C_α^+ est l'image de C_1^+ par une homothétie dont nous préciserons le centre et le rapport

Soit $M(x; g_1(x))$ et $M'\left(\frac{x}{\alpha}; g_\alpha\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)$



$M \in C_1^+$ et $M' \in C_\alpha^+$

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + g_1(x)\vec{j}$

$\overrightarrow{OM'} = \frac{x}{\alpha}\vec{i} + g_\alpha\left(\frac{x}{\alpha}\right)\vec{j}$

$= \frac{x}{\alpha}\vec{i} + \frac{1}{\alpha} g_1(x)\vec{j}$

$= \frac{1}{\alpha}\left(x\vec{i} + g_1(x)\vec{j}\right)$

$\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{OM}$

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $k = \frac{1}{\alpha}$ on a: $h(M) = M'$ et partant $h(C_1^+) = C_\alpha^+$.

Conclusion: C_α^+ est l'image de C_1^+ par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{\alpha}$

c./ Déduisons-en le maximum de g_α

Le maximum de g_1 est $g_1\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$

donc celui de g_α est $g_\alpha\left(\frac{1}{\alpha e}\right) = \frac{2}{\alpha e}$

4./ Soit S_α l'application du plan dans lui même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe: $z' = -\alpha^2\bar{z}$

a./ Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de S_α

Recherche des points invariants

Soit $M(z)$, $z = x+iy$, $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$S_\alpha(M) = M' \Leftrightarrow x'+iy' = -\alpha^2(x-iy)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\alpha^2 x \\ y' = \alpha^2 y. \end{cases}$

$S_\alpha(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha^2 x \\ y = \alpha^2 y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(1+\alpha^2) = 0 \\ y(1-\alpha^2) = 0 \end{cases}$ (1)

1er cas $\alpha \neq 1$

(1) $\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{et} \\ y = 0 \end{cases}$ $O(0;0)$ est le seul point invariant par S_α

S_α est donc la similitude indirecte de centre O, de rapport α^2 et d'axe l'axe des ordonnées

2e cas $\alpha = 1$

(1) $\Rightarrow x = 0$; l'ensemble des points invariants est l'axe des ordonnées.

S_1 est la symétrie orthogonale d'axe l'axe des ordonnées.

b/ Montrons que C_α^- est l'image de C_α^+ par S_α

Posons $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$

$(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$.

Soit $M(x;y)$ et $M'(x', y')$.

$S_\alpha(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\alpha^2 x \\ y' = \alpha^2 y. \end{cases}$

$M \in C_\alpha^+ \Leftrightarrow y = g_\alpha(x)$, $x > 0$

$\Leftrightarrow \frac{y'}{\alpha^2} = g_\alpha\left(\frac{-x'}{\alpha^2}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{y'}{\alpha^2} = \frac{x'}{\alpha^2}\ln\alpha^2 - 2\left(\frac{-x'}{\alpha^2}\right)\ln\left(-\frac{x'}{\alpha^2}\right)$

$\Leftrightarrow y' = 2x'\ln\alpha + 2x'\left[\ln(-x') - 2\ln\alpha\right]$

$= -2x'\ln\alpha + 2x'\ln(-x')$

$= -x'\ln\alpha^2 + 2x'\ln(-x')$, $x' < 0$

or $\forall x < 0$, $f_\alpha(x) = -x\ln\alpha^2 + 2x\ln(-x)$

On a donc: $y' = f_\alpha(x')$ pour $x' < 0$

$\Leftrightarrow M' \in C_\alpha^-$

Conclusion

C_α^- est l'image de C_α^+ par S_α

5/ Construction point par point de C_2 à partir de C_1. (Voir page précédente)

$C_2 = C_2^- \cup C_2^+$

C_2^+ est l'image de C_1^+ par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$

$C_2^- = S_2(C_2^+)$.

PARTIE C

Soit (U_n) une suite numérique définie par: $U_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$2U_{n+1} = g_\alpha(U_n)$

1/- Résolution de l'inéquation $g_\alpha(x) > 0$

$g_\alpha(x) > 0 \Leftrightarrow -x\ln\alpha^2 - 2x\ln x > 0$

$\Leftrightarrow -2x\ln\alpha - 2x\ln x > 0$

$\Leftrightarrow -2x(\ln\alpha + \ln x) > 0$

$\Leftrightarrow -2x(\ln(\alpha x)) > 0$, $x > 0$

$\Leftrightarrow \ln(\alpha x) < 0$

$\Leftrightarrow 0 < \alpha x < 1$

$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{\alpha}$ car $\alpha > 0$

$$S =]0; \frac{1}{\alpha}[$$

- Résolution de l'inéquation $g_\alpha(x) - 2x > 0$

$g_\alpha(x) - 2x > 0 \Leftrightarrow -2x\ln(\alpha x) - 2x > 0$

$\Leftrightarrow -2x(\ln(\alpha x) + 1) > 0$

$\Leftrightarrow \ln(\alpha x) + 1 < 0$ car $x > 0$

$\Leftrightarrow \ln(\alpha x) < -1$

$\Leftrightarrow 0 < \alpha x < \frac{1}{e}$

$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{\alpha e}$

$$S =]0; \frac{1}{\alpha e}[$$

2.) Déterminons U_0 pour que la suite (U_n) soit constante

(U_n) est constante ssi $2U_0 = g_\alpha(U_0)$

$\Leftrightarrow -2U_0(\ln(\alpha U_0) + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(\alpha U_0) + 1 = 0$ car $U_0 > 0$

$\Leftrightarrow \ln(\alpha U_0) = -1$

$\Leftrightarrow \alpha U_0 = \frac{1}{e} \Leftrightarrow U_0 = \frac{1}{\alpha e}$

Pour $U_0 = \frac{1}{\alpha e}$, (U_n) est constante

3.) On choisit $U_0 \in]0; \frac{1}{\alpha}[$ et $U_0 \neq \frac{1}{\alpha e}$

a.) Démontrons par récurrence que:

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < U_n < \frac{1}{\alpha e}$

- $n = 1$

$U_0 \in]0; \frac{1}{\alpha}[\Rightarrow g_\alpha(U_0) > 0 \Rightarrow \frac{1}{2}g_\alpha(U_0) > 0$

$\Rightarrow U_1 > 0$ (1)

D'autre part, $\frac{2}{\alpha e}$ étant le maximum de g_α on a: $g_\alpha(U_0) < \frac{2}{\alpha e}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}g_\alpha(U_0) < \frac{1}{\alpha e}$

$\Leftrightarrow U_1 < \frac{1}{\alpha e}$ (2)

(1) et (2) $\Leftrightarrow 0 < U_1 < \frac{1}{\alpha e}$ Vrai

- Supposons que $0 < U_n < \frac{1}{\alpha e}$ et montrons que $0 < U_{n+1} < \frac{1}{\alpha e}$

$0 < U_n < \frac{1}{\alpha e} \Rightarrow 0 < U_n < \frac{1}{\alpha}$ car $\frac{1}{\alpha e} < \frac{1}{\alpha}$

$\Rightarrow g_\alpha(U_n) > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}g_\alpha(U_n) > 0$

$\Rightarrow U_{n+1} > 0$ (1)

D'autre part, $\frac{2}{\alpha e}$ étant le maximum de g_α on a: $g_\alpha(U_n) < \frac{2}{\alpha e}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}g_\alpha(U_n) < \frac{1}{\alpha e}$

$\Leftrightarrow U_{n+1} < \frac{1}{\alpha e}$ (2)

(1) et (2) $\Leftrightarrow 0 < U_{n+1} < \frac{1}{\alpha e}$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < U_n < \frac{1}{\alpha e}$$

b.) Démontrons que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < U_n < \frac{1}{\alpha e}$

$\Leftrightarrow g_\alpha(U_n) - 2U_n > 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}g_\alpha(U_n) - U_n > 0$

$\Leftrightarrow U_{n+1} - U_n > 0$

Conclusion:

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante

c/- Déduisons-en que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

$\begin{cases} 0 < U_n < \frac{1}{\alpha e} \Rightarrow (U_n) \text{ est majorée} \\ (U_n) \text{ est croissante.} \end{cases}$

Conclusion

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente car elle est majorée et croissante

- Précisons la limite de (U_n)

Soit l la limite de la suite (U_n); l est solution de l'équation :

$$\frac{1}{2} g_\alpha(x) = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{\alpha e}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{\alpha e}$$

PROBLEME N°35

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$

1°/ a/ Etudions le sens de variation et dressons le tableau de variation de f

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

Dérivée

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est le produit de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ $f'(x)$ a donc le signe de $-x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\forall x \in]-\infty; 0[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

$f'(0) = 0$ $f(0) = 1$

Dressons le tableau de variation de f

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+1)e^{-x}$

$= \lim_{X\to+\infty} (1-X)e^{X}$, $X = -x$

$= -\infty$ car $\lim_{X\to+\infty} 1-X = -\infty$, $\lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)e^{-x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} = 0+0 = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

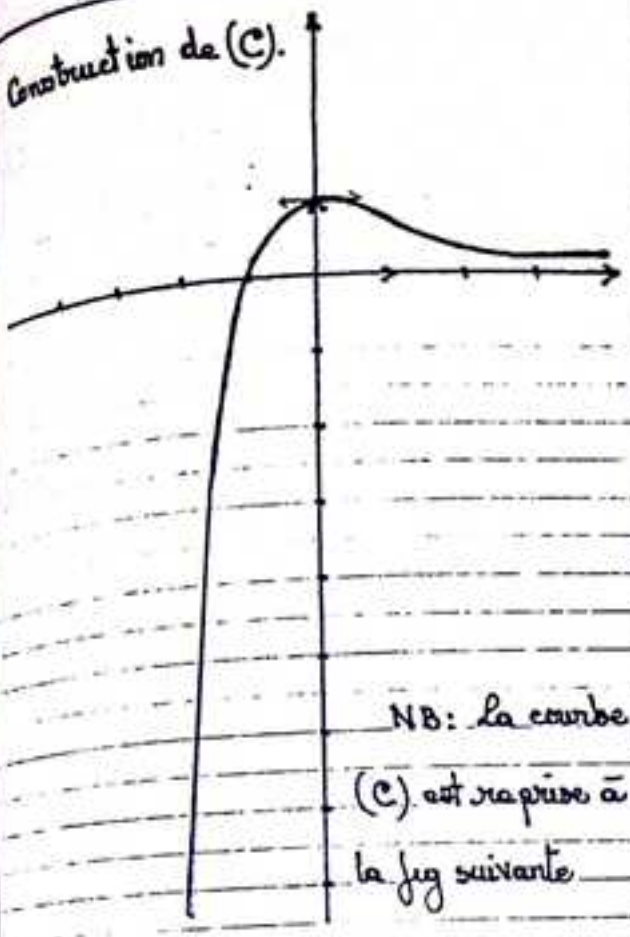
Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

b-/ Traçons la courbe (C) représentative de f de le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(Voir page suivante)

Construction de (C).



NB: La courbe (C) est reprise à la fig suivante

2/ Montrons que pour tout x de $\mathbb{R}$, f vérifie la relation : $f''(x)+2f'(x)+f(x)=0$

$f(x)=(x+1)e^{-x}$; $f'(x)=-xe^{-x}$; $f''(x)=(x-1)e^{-x}$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f''(x)+2f'(x)+f(x)=(x+1)e^{-x}-2xe^{-x}+(x-1)e^{-x}$

$=(x+1-2x+x-1)e^{-x}$

$=0$

$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)+2f'(x)+f(x)=0}$

3/ On considère l'équation différentielle

$(E): y''+2y'+y=0$

a/ On pose pour tout x réel $U(x)=e^{x}h(x)$ où h est une fonction au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrons que h est solution de (E) ssi pour tout x réel $U''(x)=0$

$U(x)=e^{x}h(x) \Leftrightarrow h(x)=U(x)e^{-x}$

$h'(x)=(U'(x)-U(x))e^{-x}$

$h''(x)=(U''(x)-2U'(x)+U(x))e^{-x}$

h est solution de (E) ssi $h''(x)+2h'(x)+h(x)=0$

$\Leftrightarrow (U''(x)-2U'(x)+U(x)+2U'(x)-2U(x)+U(x))e^{-x}=0$

$\Leftrightarrow U''(x)e^{-x}=0 \Leftrightarrow U''(x)=0$ car $e^{-x}\neq 0$.

Conclusion

$\boxed{\text{h est solution de (E) ssi } \forall x\in\mathbb{R},\ U''(x)=0}$

b/ Résolution de l'équation : $z''=0$ où z est une fonction réelle quelconque

$z''=0 \Leftrightarrow z'=a,\ a\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow z=ax+b,\ (a;b)\in\mathbb{R}^2$

$\boxed{z(x)=ax+b,\ (a;b)\in\mathbb{R}^2}$

Déterminons les solutions de (E)

$U''(x)=0 \Leftrightarrow U(x)=ax+b,\ (a;b)\in\mathbb{R}^2$

h(x) est solution de (E) et $h(x)=U(x)e^{-x}$

$\boxed{h(x)=(ax+b)e^{-x},\ (a;b)\in\mathbb{R}^2}$

c/ Démontrons que les conditions initiales $h(0)=\alpha$ et $h'(0)=\beta$ où α et β sont des réels, déterminant une solution unique de (E)

$h(x)=(ax+b)e^{-x} \Rightarrow h'(x)=(-ax+a-b)e^{-x}$

$h(0)=b \quad h'(0)=a-b$

$\begin{cases} h(0)=\alpha \\ h'(0)=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\alpha \\ a-b=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\alpha+\beta \\ b=\alpha \end{cases}$

le couple (a;b) est unique ce qui expli-

que l'unicité de la solution.
Cette solution est :

$$h(x) = \left[(\alpha+\beta)x+\beta\right]e^{-x}.$$

PARTIE B

Pour λ un nombre réel donné, on considère les fonctions g_λ définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$g_\lambda(x) = \left[(\lambda+1)x+1\right]e^{-x}$$

1/ Démontrons qu'il existe des valeurs de α et β définies dans A/3-c pour lesquelles g_λ est solution de (E).

g_λ solution de (E) $\Leftrightarrow g_\lambda(x) = h(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = \lambda+1 \\ \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \lambda \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$\alpha = \lambda$	$\beta = 1$

2/ On suppose dans la suite que $\lambda \neq -1$

a/ Discutons suivant les valeurs de λ les limites de g_λ en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} g_\lambda(x) = \lim_{x\to-\infty} \left[(\lambda+1)x+1\right]e^{-x}$$

$$= \lim_{X\to+\infty} \left[1-(\lambda+1)X\right]e^{X}, \quad X=-x$$

$$= \begin{cases} +\infty \text{ si } \lambda < -1 \\ -\infty \text{ si } \lambda > -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} g_\lambda(x) = \begin{cases} +\infty \text{ si } \lambda < -1 \\ -\infty \text{ si } \lambda > -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g_\lambda(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[(\lambda+1)x+1\right]e^{-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (\lambda+1)xe^{-x} + e^{-x}$$

$$= (\lambda+1)\times 0 + 0 = 0$$

Pour tout $\lambda \neq -1$, $\lim_{x\to+\infty} g_\lambda(x) = 0$

b/ Etudions suivant les valeurs de λ le sens de variation de g_λ et dressons dans chaque cas le tableau de variations

g_λ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'_\lambda(x) = \left[\lambda-(\lambda+1)x\right]e^{-x}$

1er cas $\lambda < -1$

$g'_\lambda(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\lambda}{\lambda+1}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ $g'_\lambda(x)$ est donc du signe de $\lambda-(\lambda+1)x$

Signe de $g'_\lambda(x)$

x	$-\infty$		$\frac{\lambda}{\lambda+1}$		$+\infty$
$g'_\lambda(x)$		$-$	0	$+$	

Sens de variation de g_λ

$\forall x \in \left]-\infty; \dfrac{\lambda}{\lambda+1}\right[$ $g'_\lambda(x) < 0$ donc g_λ est strictement décroissante sur $\left]-\infty; \dfrac{\lambda}{\lambda+1}\right[$

$\forall x \in \left]\dfrac{\lambda}{\lambda+1}; +\infty\right[$ $g'_\lambda(x) > 0$ donc g_λ est strictement croissante sur $\left]\dfrac{\lambda}{\lambda+1}; +\infty\right[$

g_λ admet un minimum en $\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$

Tableau de variation de g_λ

x	$-\infty$		$\lambda/\lambda+1$		$+\infty$
$g'_\lambda(x)$		$-$	0	$+$	
$g_\lambda(x)$	$+\infty$	↘	$g_\lambda\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$	↗	0

2° cas $\lambda > -1$

Signe de $g'_\lambda(x)$

x	$-\infty$		$\lambda/\lambda+1$		$+\infty$
$g'_\lambda(x)$		$+$	0	$-$	

Sens de variation de g_λ

g_λ est strictement croissante sur $\left]-\infty, \frac{\lambda}{\lambda+1}\right[$

strictement décroissante sur $\left]\frac{\lambda}{\lambda+1}; +\infty\right[$

et admet un maximum en $\frac{\lambda}{\lambda+1}$

Tableau de variation de g_λ

x	$-\infty$		$\lambda/\lambda+1$		$+\infty$
$g'_\lambda(x)$		$+$	0	$-$	
$g_\lambda(x)$	$-\infty$	↗	$g_\lambda(\lambda/\lambda+1)$	↘	0

$$g_\lambda\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right) = (\lambda+1)e^{-\lambda/\lambda+1}$$

c/ On appelle (Γ_λ) la courbe représentative de g_λ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Traçons sur la figure précédente $(\Gamma_{-1/2})$

$g_{-1/2}(x) = \left(1 + \frac{1}{2}x\right)e^{-x}$

Tableau de variation de $g_{-1/2}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'_{-1/2}(x)$		$+$	0	$-$	
$g_{-1/2}(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{e}{2}$	↘	0

Branches infinies de $\Gamma_{-1/2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g_{-1/2}(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g_{-1/2}(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{2}x\right)\frac{e^{-x}}{x}$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} \left(\frac{1}{2}X - 1\right)\frac{e^X}{X}, \quad X = -x$

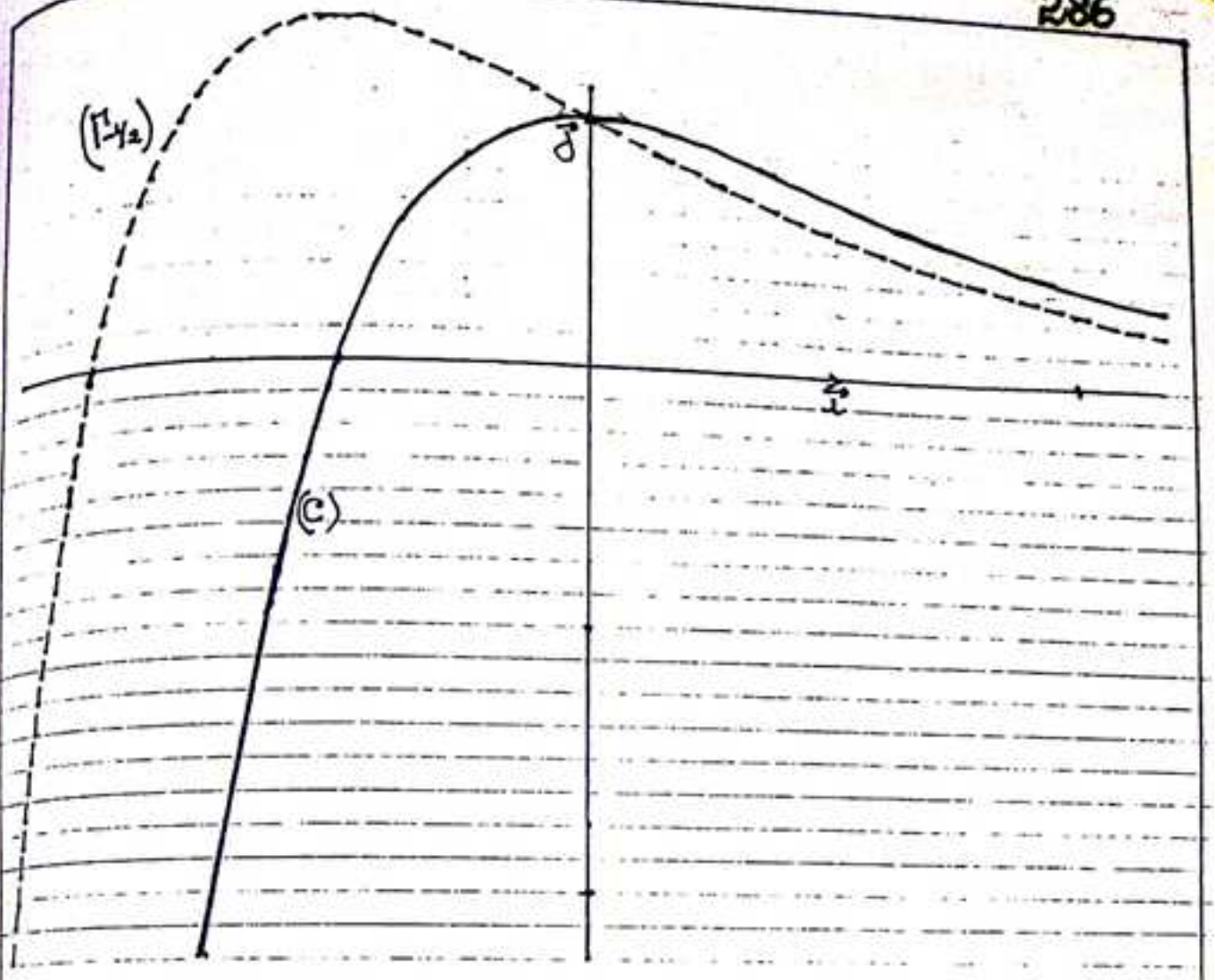
$= +\infty$ car $\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}x + 1 = +\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty\end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g_{-1/2}(x)}{x} = +\infty$

$(\Gamma_{-1/2})$ admet une branche parabolique de direction (oy) en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g_{-1/2}(x) = 0$ $(\Gamma_{-1/2})$ admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$

Construction de $(\Gamma_{-1/2})$ (Voir figure à la page suivante)



d/ Déterminons une équation cartésienne de l'ensemble (χ) des points M

D'après les variations de g_λ on a:

$$M\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}; (\lambda+1)e^{-\lambda/\lambda+1}\right)$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\lambda}{\lambda+1} \\ y = (\lambda+1)e^{-\lambda/\lambda+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{x}{1-x} \\ y = \left(\dfrac{x}{1-x}+1\right)e^{-x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{e^{-x}}{1-x} \quad x \neq 1$$

(χ) a pour équation : $y = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$, $x \neq 1$

3/ Montrons que pour tout $\lambda > -1$ et $\lambda \neq 0$ l'équation $g_\lambda(x) = 1$ a deux solutions et que la solution non nulle a même signe que λ.

Pour $\lambda = 0$, $g_0(x) = 1$ admet une seule solution nulle

Pour $\lambda > -1$ et $\lambda \neq 0$

g_λ admet un maximum qui est $(\lambda+1)e^{-\lambda/\lambda+1}$

Comparons ce maximum à 1 et pour ce faire étudions la fonction V définie par:

$\forall x > -1$, $V(x) = (x+1)e^{-x/x+1}$

$$V'(x) = \frac{x}{x+1}e^{-x/x+1}$$

x	-1		0		$+\infty$
$V'(x)$		$-$	0	$+$	

V admet un minimum en 0 qui V(0) = 1

$\forall x \in]-1;+\infty[- \{0\}$, $V(x) > 1$

Par conséquent :

$\forall \lambda \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$, g_λ admet un maximum $g_\lambda\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right) = (\lambda+1)e^{-\lambda/\lambda+1}$

$= V(\lambda) > 1$

De plus $g_\lambda(0) = 1$

1er cas $\lambda \in]-1;0[$

$\frac{\lambda}{\lambda+1} < 0$; On démontre que l'équation $g_\lambda(x) = 1$ admet deux solutions dont 0 et une inférieure à $\frac{\lambda}{\lambda+1} < 0$.

La deuxième solution est donc négative et est du même signe que λ

2e cas $\lambda > 0$

$\frac{\lambda}{\lambda+1} > 0$; l'équation $g_\lambda(x) = 1$ admet deux solutions dont 0 et une seconde supérieure à $\frac{\lambda}{\lambda+1} > 0$.

La deuxième solution est donc positive et est du même signe que λ

Conclusion

l'équation $g_\lambda(x) = 1$ pour tout $\lambda > -1$ et $\lambda \neq 0$ a deux solutions : une nulle et une seconde non nulle qui le même signe que λ

PROBLEME N°36

PARTIE A

On appelle E l'ensemble des fonctions numériques f admettant des dérivées f', f'' et $f^{(3)}$ continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation différentielle :

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0$$

1-/ Montrons que si f appartient à (E) alors $f^{(3)} = f''$ puis que f'' est solution d'équation différentielle de la forme $y' - my = 0$ $(m \in \mathbb{R})$

f appartient à (E)

$\Rightarrow (x-1)f''(x) - xf'(x) + f(x) = 0$

$\Rightarrow f''(x) + (x-1)f^{(3)}(x) - f'(x) - xf''(x) + f'(x) = 0$

$\Rightarrow (x-1)f^{(3)}(x) + (1-x)f''(x) = 0$

$\Rightarrow (x-1)\left(f^{(3)}(x) - f''(x)\right) = 0$

$\Rightarrow f^{(3)}(x) - f''(x) = 0 \Rightarrow f^{(3)}(x) = f''(x)$

Si f appartient à E alors $f^{(3)} = f''$

$f^{(3)} = f'' \Leftrightarrow f^{(3)} - f'' = 0$

$\Leftrightarrow (f'')' - f'' = 0$

En posant $f'' = y$ on a : $y' - y = 0$

f'' est donc solution de l'équation $y' - y = 0$

2-/ A l'aide de deux intégrations montrons que les éléments de (E) sont de la forme $f(x) = ax + be^x$, $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

1ère solution de $y'-y=0$

$\Leftrightarrow f''(x) = be^x \Leftrightarrow f'(x) = a+be^x$

$\Leftrightarrow f(x) = ax+be^x$

Les solutions de (E) sont de la forme $f(x) = ax+be^x$, $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

PARTIE B

Pour tout couple $(a;b)\in\mathbb{R}^2-\{(0;0)\}$ on appelle $f_{a,b}$ la fonction numérique de la variable réelle x définie par:

$f_{a,b}(x) = ax+be^x$. On désigne par $(C_{a,b})$ la courbe représentative de $f_{a,b}$

1/ Etudions la fonction $f_{1,1}$

$f_{1,1}(x) = x+e^x$. $Df_{1,1} = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_{1,1}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x+e^x$

$= -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_{1,1}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x+e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_{1,1}(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_{1,1}(x) = +\infty$

Dérivée

$f_{1,1}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'_{1,1}(x) = 1+e^x$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'_{1,1}(x) > 0$; $f_{1,1}$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations de $f_{1,1}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_{1,1}(x)$		$+$	
$f_{1,1}(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

Construction de la courbe (C) représentative de $f_{1,1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_{1,1}(x) - x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

La droite d'équation $y=x$ est asymptote oblique à la courbe (C) à $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_{1,1}(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{e^x}{x} = +\infty$

La courbe (C) admet une branche asymptotique de direction (oy).

Voir la page suivante pour la Construction de la courbe (C).

2/ Etudions suivant les valeurs de a et b, les variations de $f_{a,b}$.

1er cas $a>0$ $b>0$

$Df_{a,b} = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$

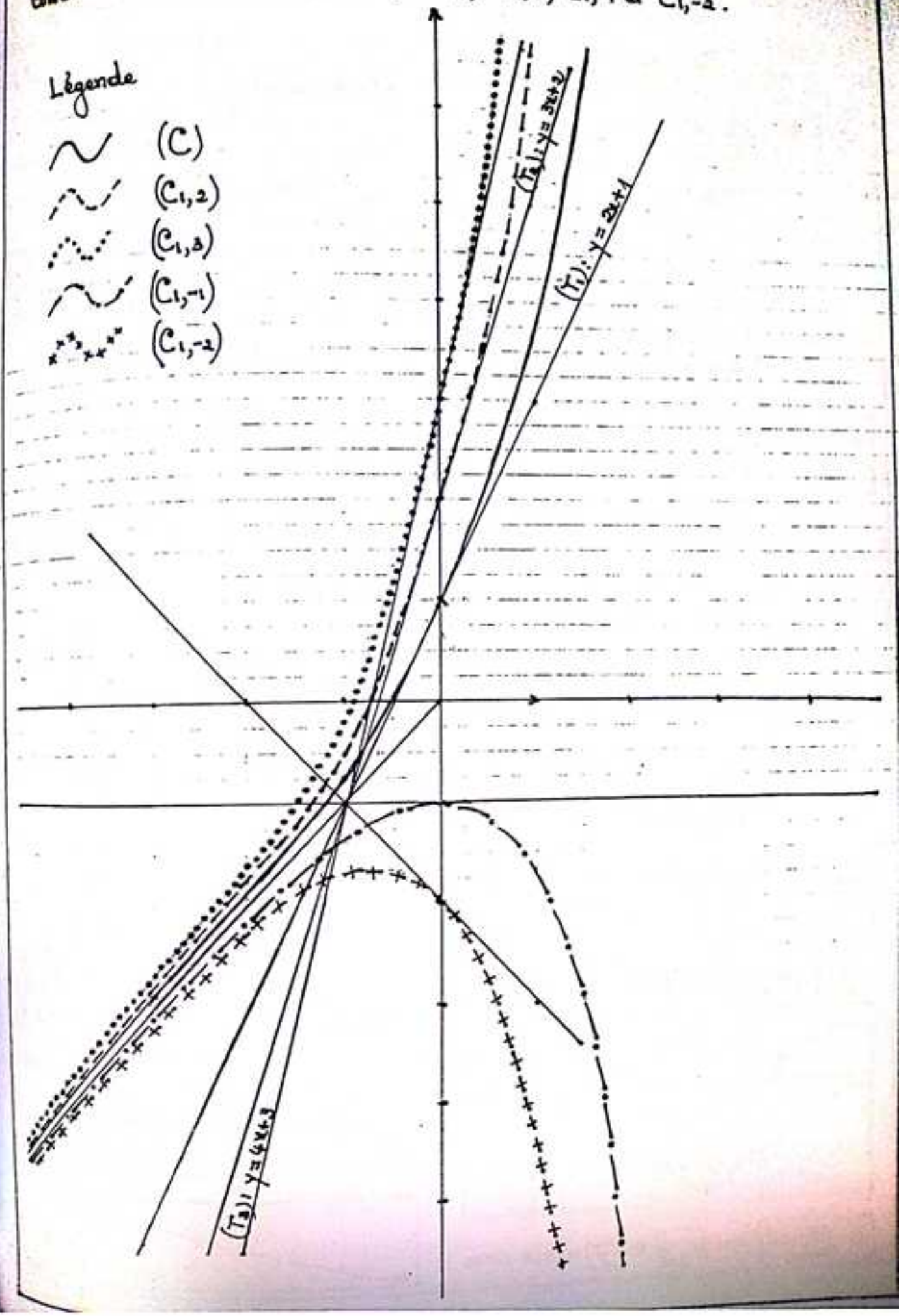
$\lim\limits_{x\to-\infty} f_{a,b}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} ax+be^x = -\infty$

car $a>0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_{a,b}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ax+be^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_{a,b}(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_{a,b}(x) = +\infty$

CONSTRUCTION DES COURBES: C; $C_{1,2}$; $C_{1,3}$; $C_{1,-1}$ et $C_{1,-2}$.



Soient
$f_{a,b}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_{a,b}(x) = a + be^x$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_{a,b}(x) > 0$; $f_{a,b}$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de $f_{a,b}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_{a,b}(x)$		$+$	
$f_{a,b}(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2e cas $a<0$ et $b<0$

$D_{f_{a,b}} = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_{a,b}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} ax + be^x$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $a<0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_{a,b}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ax + be^x$

$= -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_{a,b}(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_{a,b}(x) = -\infty$

$f'_{a,b}(x) = a + be^x$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_{a,b}(x) < 0$; $f_{a,b}$ est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Tableau de variations de $f_{a,b}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_{a,b}(x)$		$-$	
$f_{a,b}(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

3e cas $a<0$ et $b>0$

$D_{f_{a,b}} = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_{a,b}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} ax + be^x$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $a<0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_{a,b}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ax + be^x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(a + b\frac{e^x}{x}\right)$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $b>0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_{a,b}(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_{a,b}(x) = +\infty$

$f'_{a,b}(x) = a + be^x$

$f'_{a,b}(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = -\frac{a}{b}$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(-\frac{a}{b}\right) = x_1$

$f_{a,b}\left(\ln\left(-\frac{a}{b}\right)\right) = a\ln\left(-\frac{a}{b}\right) - a$.

$= a\left[\ln\left(-\frac{a}{b}\right) - 1\right]$

Signe de $f'_{a,b}(x)$

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$f'_{a,b}(x)$	$-$	0	$+$

Tableau de variations de $f_{a,b}(x)$

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$f'_{a,b}(x)$	$-$	0	$+$
$f_{a,b}(x)$	$+\infty$ ↘	$f_{a,b}(x_1)$	↗ $+\infty$

avec $x_1 = \ln\left(-\frac{a}{b}\right)$ et $f_{a,b}(x_1) = a\left[\ln\left(-\frac{a}{b}\right) - 1\right]$

4ème cas $a>0$ et $b<0$

$D_{f_{a,b}} = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_{a,b}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} ax+be^x$

$= -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $a>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_{a,b}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ax+be^x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(a+b\frac{e^x}{x}\right)$

$= -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $b>0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_{a,b}(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_{a,b}(x) = -\infty$

Dérivée

$\forall x\in\mathbb{R},\ f'_{a,b}(x) = a+be^x$

$f'_{a,b}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln\left(-\frac{a}{b}\right) = x_1$

$f_{a,b}(x_1) = a\left[\ln\left(-\frac{a}{b}\right)-1\right]$

Signe de $f'_{a,b}(x)$

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$f'_{a,b}(x)$		$+$	0	$-$	

Tableau de variations de $f_{a,b}$

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$f'_{a,b}(x)$		$+$	0	$-$	
	$-\infty$	↗	$f_{a,b}(x_1)$	↘	$-\infty$

avec $x_1 = \ln\left(-\frac{a}{b}\right)$ et $f_{a,b}(x_1) = a\left(\ln\left(-\frac{a}{b}\right)-1\right)$

3/ Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Pour $(\alpha;\beta)$ donné dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, on considère l'application $\varphi_{\alpha,\beta}$ de P dans P dont l'expression analytique relativement à $(O,\vec{i},\vec{j})$ est $\begin{cases} x' = x \\ y' = \alpha x+\beta y \end{cases}$.

Montrons que toute courbe $(C_{a,b})$ est l'image de (C) par une transformation $\varphi_{\alpha,\beta}$ que nous préciserons

Soit $M(x;y)$ et $M'(x';y') = \varphi_{\alpha,\beta}(M)$

$M\in(C) \Leftrightarrow y = x+e^x$

$\Leftrightarrow \left(y'-\alpha x'\right)\times\frac{1}{\beta} = x'+e^{x'}$

$\Leftrightarrow y' = (\alpha+\beta)x'+\beta e^{x'} = f_{\alpha+\beta,\beta}(x')$

Par identification on a:

$\begin{cases} \alpha+\beta = a \\ \beta = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = a-b \\ \beta = b \end{cases}$

Toute courbe $(C_{a,b})$ est l'image de (C) par $\varphi_{a-b,\,b}$.

Déduisons-en qu'il existe une transformation $\varphi_{\alpha,\beta}$ telle que:

$\varphi_{\alpha,\beta}(C_{a,b}) = (C_{a',b'})$

$M\in(C_{a,b}) \Leftrightarrow y = ax+be^x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\beta}\left(y'-\alpha x'\right) = ax'+be^{x'}$

$\Leftrightarrow y' = (\alpha+a\beta)x'+b\beta e^{x'}$

Par identification on a:

$(\alpha+a\beta)x'+\beta b e^{x'} = a'x'+b'e^{x'}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+a\beta = a' \\ \beta b = b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = a' - \frac{ab'}{b} \\ \beta = \frac{b'}{b} \end{cases}$

La transformation $\varphi_{a-\frac{ab'}{b}, \frac{b'}{b}}$ transforme $(C_{a,b})$ en $(C_{a',b'})$

4/ Dans cette question, on fixe la valeur de a.

a/ Montrons que toutes courbes $(C_{a,b})$ ont la même asymptote (D_a)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_{a,b}(x) - ax = \lim\limits_{x\to-\infty} be^x = b\times 0 = 0$

Toutes les courbes $(C_{a,b})$ ont la même asymptote oblique (D_a) d'équation $y=ax$ en $-\infty$

Déterminons l'application $\varphi_{\alpha,\beta}$ qui transforme $(C_{a,a})$ en $(C_{a,b})$

$M(x;y) \in (C_{a,a}) \Leftrightarrow y = ax + ae^x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\beta}(y'-\alpha x') = ax'+ae^{x'}$

$\Leftrightarrow y' = (\alpha+\beta a)x' + a\beta e^{x'}$

$(\alpha+\beta a)x' + a\beta e^{x'} = ax' + be^{x'}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta a = a \\ a\beta = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = a-b \\ \beta = \frac{b}{a} \end{cases}$

$\varphi_{a-b, \frac{b}{a}}$ transforme $(C_{a,a})$ en $(C_{a,b})$

b/ On appelle M_b le point de $(C_{a,b})$ d'abscisse 0.

Déterminons l'équation de la tangente (T_b) à $(C_{a,b})$ au point M_b

$(T_b) : y = f'_{a,b}(0)(x-0) + f_{a,b}(0)$

$f'_{a,b}(0) = a+be^0 = a+b$

$f_{a,b}(0) = a\times 0 + be^0 = b.$

$(T_b): y = (a+b)x + b$

Montrons que lorsque b décrit $\mathbb{R}^*$, toutes les droites (T_b) sont concourantes

$y = (a+b)x+b \Leftrightarrow y = (x+1)b + ax$

$\Leftrightarrow y - ax = (x+1)b$

$\Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ y-ax = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -a \end{cases}$

Toutes les droites (T_b) sont concourantes au point $A(-1;-a)$

Vérifions que A appartient à (D_a)

$(D_a): y = ax$ Pour $x=-1$, $y=-a$

$A \in (D_a)$

c/ Pour x_0 fixé, soit N_b le point de $(C_{a,b})$ d'abscisse x_0.

Montrons que toutes les tangentes aux courbes $(C_{a,b})$ en N_b sont concourantes en un point situé sur (D_a)

Soit T la tangente à $(C_{a,b})$ en N_b

$(T): y = f'_{a,b}(x_0)(x-x_0) + f_{a,b}(x_0)$

$= (a+be^{x_0})(x-x_0) + ax_0 + be^{x_0}$

(T) : $y = ax + (x+1)be^{x_0}$

$\Leftrightarrow y - ax = (x+1)be^{x_0}$

$\begin{cases} x+1=0 \\ y-ax=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-a \end{cases}$

Toutes les tangentes aux courbes $(C_{a,b})$ en Nb sont concourantes en A situé sur (D_a)

d-/ Construction des courbes :

$C_{1,2}$; $C_{1,3}$; $C_{1,-1}$ et $C_{1,-2}$ sur le même dessin que (C) (Voir figure)

Précisons les tangentes aux points d'abscisse 0

$(T_1) : y = 2x+1$ $(T_2) : y = 3x+2$

$(T_3) : y = 4x+3$ $(T_{-1}) : y = -1$

$(T_{-2}) : y = -x-2$.

PROBLEME N° 37

PARTIE A

Soit F l'ensemble des fonctions f numériques d'une variable réelle définies sur $]-1;+\infty[$, dérivables sur cet intervalle et vérifiant :

$\forall x \in]-1;+\infty[, (1+x)f'(x) + f(x) = 1+\ln(1+x)$

1-/ Soit $f \in F$ et soit g définie par :

$\forall x \in]-1;+\infty[$, $g(x) = (1+x)f(x)$.

Démontrons que g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et que g est une primitive de la fonction h définie par :

$\forall x \in]-1;+\infty[$, $h(x) = 1+\ln(1+x)$

$x \mapsto 1+x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-1;+\infty[$. De plus f est dérivable sur $]-1;+\infty[$.

g est donc dérivable sur $]-1;+\infty[$ car elle est le produit de deux fonctions dérivables sur $]-1;+\infty[$

$\forall x \in]-1;+\infty[$, $g(x) = (1+x)f(x)$

$g'(x) = f(x) + (1+x)f'(x)$

$= (1+x)f'(x) + f(x) = 1+\ln(1+x)$

$g'(x) = h(x)$. $\Rightarrow$ g est une primitive de h

Conclusion :

g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et g est une primitive de h

Réciproquement, soit g_1 une primitive de la fonction h.

Démontrons que la fonction f_1 définie par : $\forall x \in]-1;+\infty[$, $f_1(x) = \dfrac{g_1(x)}{1+x}$ est un élément de F

g_1 primitive de h $\Rightarrow g_1'(x) = h(x)$.

$f_1'(x) = \dfrac{g_1'(x)(1+x) - g_1(x)}{(1+x)^2}$

$(1+x)f_1'(x) + f_1(x) = \dfrac{g_1'(x)(1+x) - g_1(x)}{1+x} + \dfrac{g_1(x)}{1+x}$

$= g_1'(x)$

$(1+x)f_1'(x) + f_1(x) = h(x) = 1+\ln(1+x)$

f_1 est donc un élément de F

2/ a/ Déterminons les réels a et b tels que : $\forall x \in]-1;+\infty[, \frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$

$\forall x \in]-1;+\infty[, \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

$\forall x \in]-1;+\infty[, \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

$a = 1$	$b = -1$

b/ A l'aide d'une intégration par parties déterminons l'ensemble des primitives de la fonction h.

Soit H une primitive de h on a :

$H(x) = \int_1^x h(t)\,dt$

$= \int_1^x \left(1 + \ln(1+t)\right) dt$

$= \left[t\right]_1^x + \int_1^x \ln(1+t)\,dt$

Posons $U(t) = \ln(1+t) \Rightarrow U'(t) = \frac{1}{1+t}$

$V'(t) = 1 \Rightarrow V(t) = t$

$H(x) = x - 1 + \left[t\ln(1+t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{t}{1+t}\,dt$

$= (x-1) + x\ln(1+x) - \ln 2 - \int_1^x \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt$

$= x\ln(1+x) + x - 1 - \ln 2 - \left[t - \ln(1+t)\right]_1^x$

$H(x) = x\ln(1+x) + x - 1 - \ln 2 - (x - \ln(1+x)) + 1 - \ln 2$

$= (1+x)\ln(1+x) - 2\ln 2$

L'ensemble des primitives de h est $x \mapsto (1+x)\ln(1+x) + k,\ k \in \mathbb{R}$

3/ Déduisons-en l'ensemble F

L'ensemble F est l'ensemble des fonctions $x \mapsto \frac{H(x)}{1+x} = \ln(1+x) + \frac{k}{1+x}$

L'ensemble F est l'ensemble des fonctions $x \mapsto \frac{k}{1+x} + \ln(1+x),\ k \in \mathbb{R}$.

PARTIE B

On considère l'ensemble des fonctions f_k de $]-1;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$\forall x \in]-1;+\infty[,\ f_k(x) = \ln(1+x) + \frac{k}{1+x}$

k étant un paramètre réel.

1/ Discutons suivant les valeurs de k le sens de variations des fonctions f_k

$Df_k =]-1;+\infty[$

Dérivée

f_k est continue et dérivable sur $]-1;+\infty[$

et $\forall x > -1,\ f_k'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{k}{(1+x)^2}$

$= \frac{x+1-k}{(1+x)^2}$

$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1-k = 0 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k-1 \\ x > -1 \end{cases}$

1er cas $k \leq 0$

Signe de $f_k'(x)$

x	-1		$+\infty$
$f_k'(x)$	‖	$+$	

$\forall x \in]-1;+\infty[,\ f_k'(x) > 0$; f_k est donc strictement croissante sur $]-1;+\infty[$

2e cas $k > 0$

Signe de $f_k'(x)$

x	-1		$k-1$		$+\infty$
$f_k'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Sens de variations de f_k

$\forall x \in]-1; k-1[$, $f'_k(x) < 0$; f_k est strictement décroissante sur $]-1; k-1[$

$\forall x \in]k-1; +\infty[$, $f'_k(x) > 0$; f_k est strictement croissante sur $]k-1; +\infty[$

f_k admet un minimum en $k-1$.....

2°/ Construction des courbes représentatives des fonctions f_{-1}, f_0 et f_1.

Variations de f_{-1}

$f_{-1}(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{1+x}$; $Df_{-1} =]-1; +\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f_{-1}(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \ln(1+x) - \frac{1}{1+x}$

$= \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{(1+x)\ln(1+x) - 1}{1+x}$

$= \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ >}} \frac{X \ln X - 1}{X}$, $X = 1+x$

$= -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ >}} X \ln X = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_{-1}(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X - \frac{1}{X}$, $X = 1+x$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{X} = 0$

Tableau de variations de f_{-1}

x	-1		$+\infty$
$f'_{-1}(x)$	‖	$+$	
$f_{-1}(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Variations de f_0

$f_0(x) = \ln(1+x)$ $Df_0 =]-1; +\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f_0(x) = \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ >}} \ln X$, $X = 1+x$

$= -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln X$, $X = 1+x$

$= +\infty$

Tableau de variations de f_0

x	-1		$+\infty$
$f'_0(x)$	‖	$+$	
$f_0(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Variations de f_1

$f_1(x) = \ln(1+x) + \frac{1}{x+1}$; $Df_1 =]-1; +\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f_1(x) = \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ >}} \frac{X \ln X + 1}{X}$, $X = 1+x$

$= +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln X + \frac{1}{X}$, $X = 1+x$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{X} = 0$

Tableau de variations de f_1

x	-1		0		$+\infty$
$f'_1(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Pour la construction des courbes $C_{f_{-1}}$, C_{f_0} et C_{f_1} voir page suivante.

Branches infinies

$\lim\limits_{x \to -1} f_k(x) = \infty$

Toutes les courbes C_{f_k}, $k \in \{-1;0;1\}$ admettent la droite d'équation $x = -1$ comme asymptote verticale

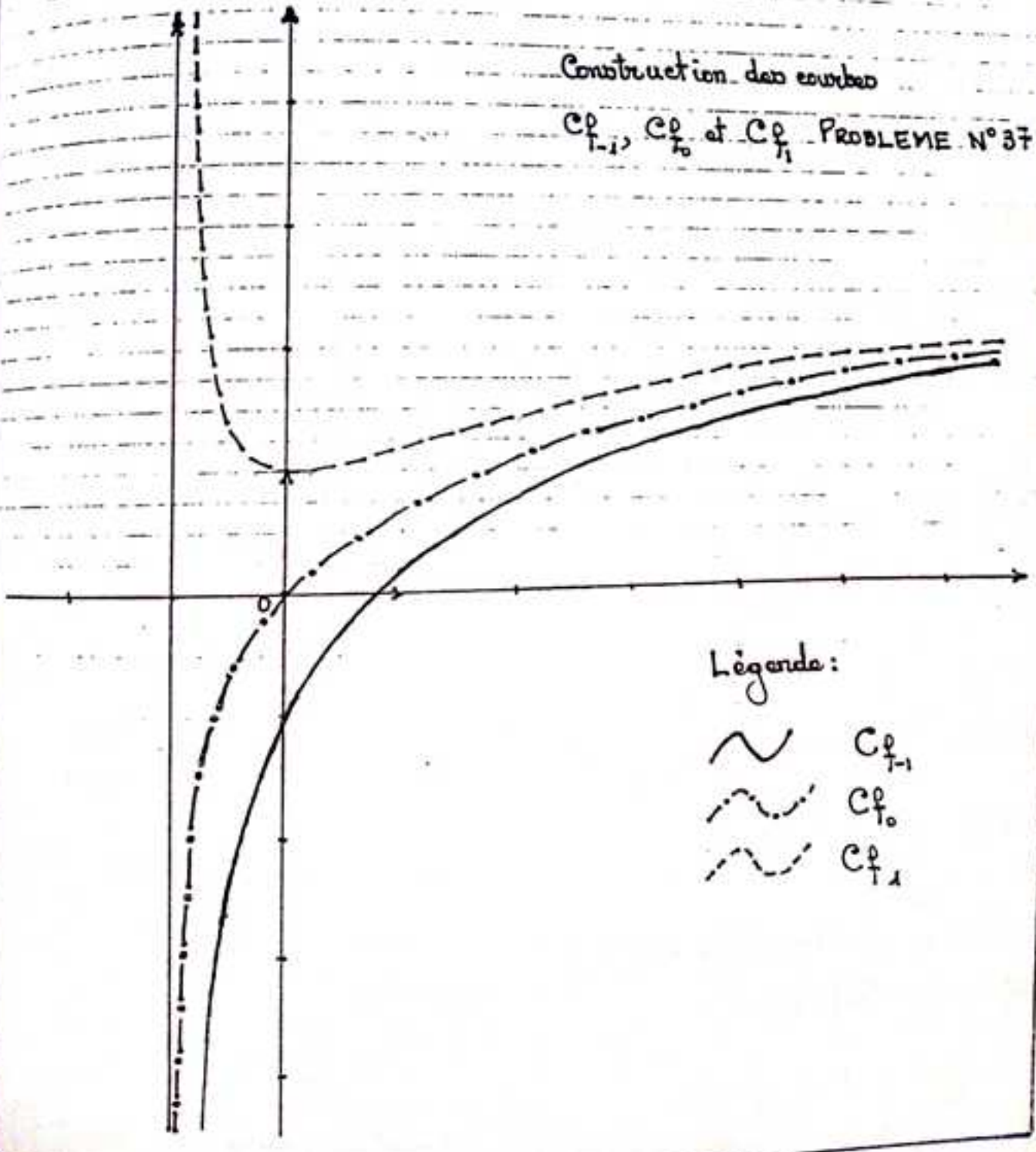
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_k(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{k}{x(x+1)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} \cdot \frac{\ln(1+x)}{1+x} + \frac{k}{x(x+1)}$$

$= 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Toutes les courbes C_{f_k} $k \in \{-1;0;1\}$ admettent une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.

Construction des courbes $C_{f_{-1}}$, C_{f_0} et C_{f_1} PROBLEME N°37



PARTIE C

1/ Soit $P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k (x)^k$.

$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{2n-1}$

Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout x de $]-1;+\infty[$

$$f_0'(x) = P_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x}$$

$P_n(x)$ est la somme des $2n$ premiers termes d'une suite géométrique de 1er terme 1 et de raison $-x$.

$$P_n(x) = \frac{1-(-x)^{2n}}{1+x} = \frac{1-x^{2n}}{1+x} \text{ car } 2n \text{ est pair}$$

$$P_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x} = \frac{1-x^{2n}+x^{2n}}{1+x}$$

$$= \frac{1}{1+x}$$

$$P_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x} = f_0'(x)$$

Conclusion

Pour tout entier $n \geq 1$ et $\forall x \in]-1;+\infty[$

$$f_0'(x) = P_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x}$$

2/ Démontrons que: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1]$

$$\frac{x^{2n}}{1+x} \leq x^{2n}$$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+x \leq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{1+x} \leq 1$ car $t \mapsto \frac{1}{t}$ est $\searrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow \frac{x^{2n}}{1+x} \leq x^{2n}$ car $x^{2n} \geq 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], \quad \frac{x^{2n}}{1+x} \leq x^{2n}$$

Déduisons-en pour tout entier $n \geq 1$ la double inégalité $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx \leq \frac{1}{2n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1]$

$$0 \leq \frac{x^{2n}}{1+x} \leq x^{2n}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx \leq \int_0^1 x^{2n}\,dx$$

or $\int_0^1 x^{2n}\,dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx \leq \frac{1}{2n+1}$$

3/ On considère la suite (W_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n}$$

Démontrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_0(1) = W_n + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx$$

D'après C-1/ on sait que $\forall n \geq 1$

$$f_0'(x) = P_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f_0'(x)\,dx = \int_0^1 P_n(x)\,dx + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \text{or } \int_0^1 f_0'(x)\,dx = \left[f_0(x)\right]_0^1 = f_0(1) - f_0(0)$$

$$= f_0(1) - 0 = f_0(1)$$

$$\int_0^1 P_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{2n-1}\right) dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots - \frac{1}{2n}x^{2n}\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n}$$

$$\int_0^1 P_n(x)\,dx = W_n$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_0(1) = W_n + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx.$$

Déduisons-en $\lim_{n\to+\infty} W_n$

D'après ce qui précède on a :

$$W_n = f_0(1) - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx,\quad f_0(1) = \ln 2$$

or $\begin{cases} 0 \le \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx \le \frac{1}{2n+1} \\ \text{et } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx = 0$ d'après le théorème des Gendarmes

On en déduit donc que :

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = \ln 2$$

Trouvons un entier n_0 tel que

$$\ln 2 - W_{n_0} < 0{,}1$$

$\ln 2 - W_2 = 0{,}109 > 0{,}1$

$\ln 2 - W_3 = 0{,}076 < 0{,}1$

On a donc $\boxed{n_0 = 3}$

PROBLEME N°38

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{|x^2-6x+5|}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{I},\vec{J})$ unité 1cm.

1°/ Etudions suivant les valeurs de x, le signe du polynôme x^2-6x+5

Posons $P(x) = x^2-6x+5$

$= (x-1)(x-5)$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 5$

Signe de $P(x)$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ecrivons $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue

On sait que $|x| = \begin{cases} -x \text{ si } x \le 0 \\ x \text{ si } x \ge 0 \end{cases}$

$$f(x) = \sqrt{|P(x)|} = \begin{cases} \sqrt{-P(x)} & \text{si } P(x) \le 0 \\ \sqrt{P(x)} & \text{si } P(x) \ge 0 \end{cases}$$

Finalement on a :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^2+6x-5} & \text{si } 1 \le x \le 5 \\ \sqrt{x^2-6x+5} & \text{si } x \le 1 \text{ ou } x \ge 5 \end{cases}$$

2°/ Etudions la continuité et la dérivabilité de f, en particulier aux points 1 et 5

- f est continue sur $D_f = \mathbb{R}$ donc continue en 1 et 5 ; $f(1) = f(5) = 0$
- f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1;5\}$.

Etudions la dérivabilité de f en 1

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{\sqrt{x^2-6x+5}}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)\sqrt{x^2-6x+5}}$$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-6x+5}} = -\infty$ car $\begin{cases} x-5 \to -4 < 0 \\ \sqrt{x^2-6x+5} \to 0 \\ \sqrt{x^2-6x+5} > 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$

f n'est pas dérivable au point 1

On pourra également démontrer que

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \dfrac{5-x}{\sqrt{-x^2+6x-5}} = -\infty$

Etudions la dérivabilité de f au point 5

$\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}} \dfrac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}} \dfrac{1-x}{\sqrt{-x^2+6x-5}} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}} \dfrac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-6x+5}} = +\infty$

f n'est pas dérivable au point 5

Conséquence géométrique

La courbe (C) admet une demi-tangente verticale aux points d'abscisses 1 et 5.

3/ Etude des variations de f.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2-6x+5}$

$= +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2-6x+5 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{cases}$

Dérivée

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x+3}{\sqrt{-x^2+6x-5}} & \text{si } x \in]1;5[\\ \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}} & \text{si } x<1 \text{ ou } x>5 \end{cases}$$

$\forall x<1, \begin{cases} x-3<0 \\ \sqrt{x^2-6x+5}>0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)<0$

$\forall x>5 \begin{cases} x-3>0 \\ \sqrt{x^2-6x+5}>0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)>0$

$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} -x+3=0 \\ x\in]1;5[\end{cases} \Rightarrow x=3$ $\quad f(3)=2$

Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Sens de variations de f.

$\forall x \in]-\infty;1[\cup]3;5[$, $f'(x)<0$

f est donc strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ et sur $]3;5[$

$\forall x \in]1;3[\cup]5;+\infty[$, $f'(x)>0$; f est donc strictement croissante sur $]1;3[$ et sur $]5;+\infty[$

f admet un maximum local au point 3

Tableau de variations de f

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

4/ Démontrons que la droite d'équation $x=3$ est axe de symétrie de (C)

$\forall x \in D_f$, $6-x \in D_f$ et

$f(6-x) = \sqrt{(6-x)^2-6(6-x)+5}$

$= \sqrt{|36-12x+x^2-36+6x+5|}$

$= \sqrt{|x^2-6x+5|} = f(x)$

$f(6-x) = f(x)$. On en déduit que:

la droite d'équation $x=3$ est axe de symétrie de (C)

5/ Démontrons que (C) admet deux asymptotes non parallèles aux axes de coordonnées; l'une à $+\infty$ et l'autre à $-\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-6x+8}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(1-6/x+5/x^2)}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1-6/x+5/x^2}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1-6/x+5/x^2}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{1-6/x+5/x^2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-6x+5}+x$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-6x+5-x^2}{\sqrt{x^2-6x+5}-x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-6+5/x}{-\sqrt{1-6/x+5/x^2}-1} = 3$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x = 3$.

la droite (Δ) d'équation $y=-x+3$ est asymptote oblique à la courbe (C) à $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1-6/x+5/x^2}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1-6/x+5/x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-6x+5-x^2}{\sqrt{x^2-6x+5}+x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-6+5/x}{\sqrt{1-6/x+5/x^2}+1} = -3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = -3$.

la droite (Δ) d'équation $y=x-3$ est asymptote oblique à (C) à $+\infty$.

6/ Déterminons les coordonnées des points A et B

$f(x) = -x+3 \Leftrightarrow \sqrt{|x^2-6x+5|} = -x+3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |x^2-6x+5| = (-x+3)^2 \quad (1) \\ x<3 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow |x^2-6x+5| = x^2-6x+9$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2-6x+5 = x^2-6x+9, & x<1 \quad (a) \\ -x^2+6x-5 = x^2-6x+9, & 1<x<3 \quad (b) \end{cases}$

$(a) \Leftrightarrow 5=9$ impossible

$(b) \Leftrightarrow 2x^2-12x+14=0 \quad 1<x<3$

$\Rightarrow x^2-6x+7=0 \quad 1<x<3$

$\Delta' = 9-7 = 2$

$x_1 = 3-\sqrt{2} \in]1;3[$

$x_2 = 3+\sqrt{2} > 3$

$(C) \cap (\Delta) = B(3-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

$f(x) = x-3 \Rightarrow \begin{cases} |x^2-6x+5| = (x-3)^2 \ (1) \\ x > 3 \end{cases}$

(1) $\Rightarrow |x^2-6x+5| = x^2-6x+9$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2-6x+5 = x^2-6x+9 \ (a') & x>5 \\ -x^2+6x-5 = x^2-6x+9 \ (b') & 3<x<5 \end{cases}$

(a') $\Rightarrow$ $5 = 9$ impossible.

(b') $\Rightarrow$ $x^2-6x+7 = 0$

$\Rightarrow$ $x = 3+\sqrt{2}$

$\boxed{(C) \cap (\Delta') = A(3+\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2})}$

7/ $I(3;0)$. Démontrons que $\forall x \in [1;5]$ $M(x;f(x))$ est à une distance constante de I.

Posons $y = f(x) = \sqrt{-x^2+6x-5}$

$\Leftrightarrow y^2 + x^2 - 6x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + y^2 + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4$

$\Leftrightarrow \boxed{MI = 2}$

Nature de (C) pour $1 \leq x \leq 5$.

Lorsque $x \in [1;5]$, (C) est le demi-cercle de centre I, de rayon 2, situé au dessus de l'axe des abscisses.

8/ Construction de (C), (Δ) et (Δ')

Voir figure ci-dessous

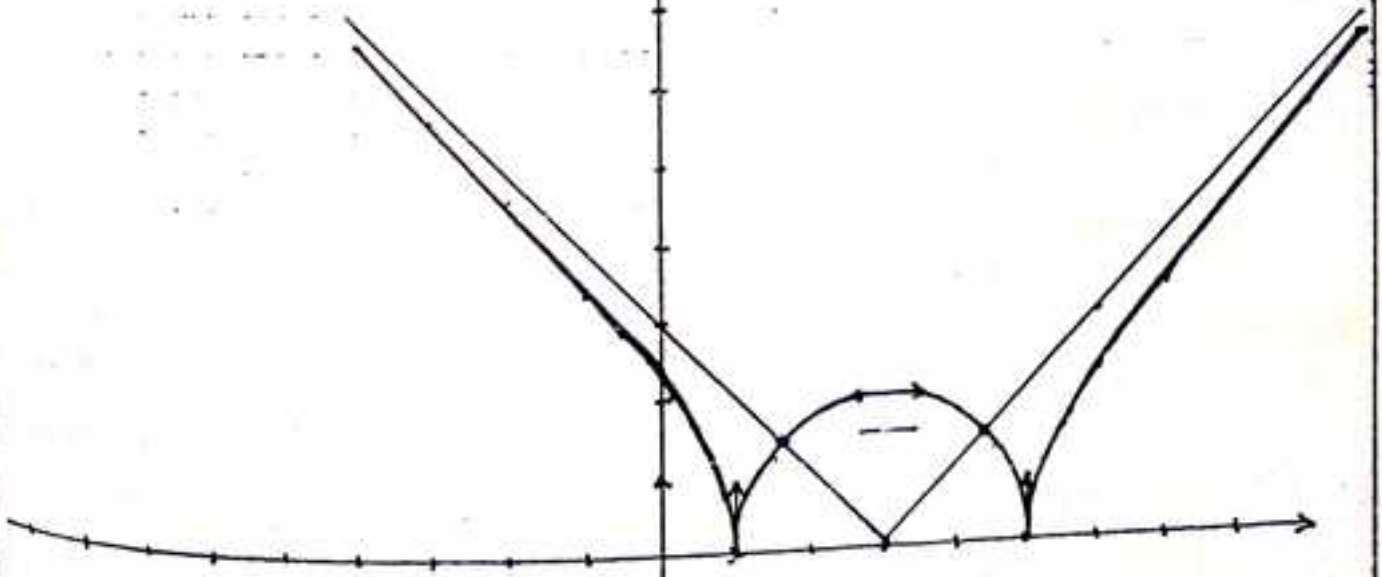
9/ Calculons en cm² l'aire S du domaine plan défini par: $1 \leq x \leq 5$ et $0 \leq y \leq f(x)$

S est l'aire d'un demi cercle de rayon 2; donc $S = \frac{1}{2}\pi(2)^2 = 2\pi$.

$\boxed{S = 2\pi \text{ cm}^2}$

Déduisons-en $\int_1^5 f(x)\,dx$.

$\boxed{\int_1^5 f(x)\,dx = S = 2\pi}$



PROBLEME N° 39

PARTIE A

Démontrons que pour tout réel x, on a : $\sqrt{x^2+3} > |x|$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+3}-|x| = \frac{(\sqrt{x^2+3}-|x|)(\sqrt{x^2+3}+|x|)}{\sqrt{x^2+3}+|x|}$$

$$= \frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+|x|}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x^2+3}+|x|}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{3}{\sqrt{x^2+3}+|x|} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}-|x| > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} > |x|$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+3} > |x|}$$

Autre méthode

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+3 > x^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} > \sqrt{x^2}$ car $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} > |x|$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+3} > |x|}$$

Déduisons-en le signe de $\sqrt{x^2+3}+x$ et celui de $\sqrt{x^2+3}-x$ sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq x$ et $|x| \geq -x$

or $\sqrt{x^2+3} > |x| \geq -x$ et $\sqrt{x^2+3} > |x| \geq x$

$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+3} > -x$ et $\sqrt{x^2+3} > x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}+x > 0$ et $\sqrt{x^2+3}-x > 0$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+3}+x > 0 \text{ et } \sqrt{x^2+3}-x > 0}$$

PARTIE B.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+3} - |x-1|$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1.|a.| Montrons que f est continue en $x_0 = 1$

$D_f = \mathbb{R}$, $f(1) = 2$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \sqrt{x^2+3} - |x-1| = 2$$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1)$. Donc f est continue en $x_0 = 1$

b/ Etudions la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

Ecrivons $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue $|x-1| = \begin{cases} -x+1 \text{ si } x \leq 1 \\ x-1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3}+x-1 \text{ si } x \leq 1 \\ \sqrt{x^2+3}-x+1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+x-1-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+x-3}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x^2+3}+x+3)(\sqrt{x^2+3}-(x-3))}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}-(x-3))}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x^2+3)-(x-3)^2}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}-x+3)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{6(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}-x+3)}$$

$\lim_{x<1,\ x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x<1,\ x\to 1} \frac{6}{\sqrt{x^2+3}-x+3} = \frac{3}{2}$

$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{3}{2}$

f est dérivable à gauche au point $x_0=1$

$\lim_{x>1,\ x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x>1,\ x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-x+1-3}{x-1}$

$= \lim_{x>1,\ x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-x-1}{x-1}$

$= \lim_{x>1,\ x\to 1} \frac{(x^2+3)-(x+1)^2}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+x+1)}$

$= \lim_{x>1,\ x\to 1} \frac{-2}{\sqrt{x^2+3}+x+1} = -\frac{1}{2}$

$\lim_{x>1,\ x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{1}{2}$

f est dérivable à droite au point $x_0=1$.

$\lim_{x<1,\ x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim_{x>1,\ x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

donc f n'est pas dérivable au point $x_0=1$

c/ Etude du sens de variation de f sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty$

$\forall x<1,\ f(x) = \sqrt{x^2+3}+x-1$

f est dérivable sur $]-\infty;1[$ car elle est la somme de fonctions dérivables sur $]-\infty;1[$

Dérivée de f sur $]-\infty;1[$

$\forall x\in]-\infty;1[,\ f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}+1$

$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}+x}{\sqrt{x^2+3}}$

$\forall x\in]-\infty;1[,\ f'(x)>0$ d'après A.

f est donc strictement croissante sur $]-\infty;1[$

Sens de variations de f sur $]1;+\infty[$

f est dérivable sur $]1;+\infty[$ car elle est la somme de fonctions dérivables sur $]1;+\infty[$.

$\forall x\in]1;+\infty[,\ f(x) = \sqrt{x^2+3}-x+1$

$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}-1$.

$f'(x) = -\frac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}}$

d'après A, $\forall x\in\mathbb{R},\ \sqrt{x^2+3}-x>0$

donc $\forall x\in\mathbb{R},\ -\frac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}}<0$

d'où $\forall x\in]1;+\infty[,\ f'(x)<0$ et f est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$

d/ Complétons l'étude des variations de f/

- limites de f aux bornes de D_f

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3}+x-1$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}-x}-1$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+3}-x}-1$

$= -1$ car $\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+3}-x}=0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3}-x+1$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x}+1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x} + 1$

$= 1$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x} = 0$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$

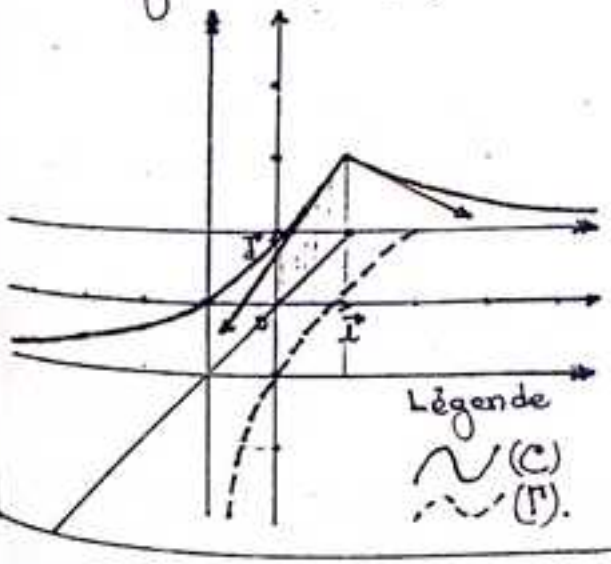
Tableau de variations de f

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\frac{3}{2}$ $\|$ $-\frac{1}{2}$	$-$	
$f(x)$	-1	↗	2	↘	1

La courbe (C) admet deux asymptotes horizontales : une d'équation $y=-1$ au $-\infty$ et une deuxième d'équation $y=1$ au $+\infty$.

c/ Comportement de (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$

Le point de (C) d'abscisse $x_0 = 1$ est un point anguleux où (C) admet 2 demi-tangentes (T_1) et (T_2).



2/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;-1]$

a/ Montrons que g admet une application réciproque notée g^{-1}

g est continue, monotone strictement croissante sur $]-\infty;-1]$ donc g est une bijection de $]-\infty;1]$ sur $]-1;2]$.

g admet donc une application réciproque $g^{-1} :]-1;2] \longrightarrow]-\infty;-1]$

b/ Définition explicite g^{-1}

Résolvons l'équation :

Soit $y \in]-1;2]$, $x \in]-\infty;1]$, $g(x) = y$.

$g(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} + x - 1 = y$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} = y - x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 + 3 = y^2 + x^2 + 1 - 2xy + 2y - 2x$

$\Leftrightarrow -y^2 + 2y + 2 = x(-2y-2)$

or $y \neq -1$ donc $x = \frac{y^2+2y-2}{2(y+1)}$

donc : $\boxed{g^{-1} :]-1;2] \longrightarrow]-\infty;-1], \quad x \longmapsto \frac{x^2+2x-2}{2(x+1)}}$

c/ Construction de la courbe (Γ) représentative de g^{-1} dans le même repère que (C)

(Voir figure)

$(\Gamma) = S_\Delta(C)$ avec $\Delta : y = x$

d/ Déterminons la fonction G primitive de g^{-1} et telle $G(0) = 0$

La division euclidienne de x^2+2x-2 par $2x+2$ donne :

$\forall x \in]-1;2]$, $g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2x+2}$

donc : $G(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\ln|x+1| + k$

$\forall x \in]-1;2]$, $x+1>0$

$G(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\ln(x+1) + k$

De plus $G(0)=0 \Leftrightarrow k=0$ d'où :

$$\boxed{G(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\ln(x+1)}$$

e/ Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'equations :

$x=-1$ et $x=1$

Calculons A en utilisant la courbe (Γ)

A est encore l'aire du domaine du plan limité par la courbe (Γ), la droite d'équation $y=1$ et les droites d'équat°s $x = g(-1) = 0$, $x = g(1) = 2$.

donc : $A = \int_0^2 (1 - g^{-1}(x))\,dx$ u.a

$= \left[x - G(x)\right]_0^2$

$= 2 - (2 - \frac{3}{2}\ln 3) = \frac{3}{2}\ln 3$

$$\boxed{A = \frac{3}{2}\ln 3 \text{ u.a}}$$

PARTIE C

On désigne par I l'intervalle $[-1;2]$

On définit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $U_0 = 1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$

1.|a.| Démontrons que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans I

Soit h la fonction définie sur $[-1;2]$ par $h(x) = f(x) - x$.

h est dérivable sur $[-1;2]$ et $\forall x \in [-1;2]$, $h'(x) = f'(x) - 1$.

Or $\forall x \in [-1;+\infty[$, $f'(x) < 0$ donc $\forall x \in [-1;2]$, $h'(x) < 0$. Par suite h est strictement décroissante sur $[-1;2]$

$h(-1) = 1$; $h(2) = \sqrt{7} - 3 < 0$

Conclusion

h est continue et strictement décroissante sur $[-1;2]$; de plus $h(-1)\cdot h(2) < 0$. d'où l'équation $h(x) = 0$ c'est-à-dire $f(x) = x$ admet une solution α dans I

b/ Démontrons que : $\forall x \in I$, $f(x) \in I$.

f est continue et strictement décroissante sur I.

$-1 \le x \le 2 \Leftrightarrow f(2) \le f(x) \le f(-1)$

$\Leftrightarrow \sqrt{7} - 1 \le f(x) \le 2$

or $[\sqrt{7}-1;2] \subset [-1;2]$ donc :

$$\boxed{\forall x \in I,\ f(x) \in I}$$

c/ Démontrons que : $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - 1$ pour tout x de I

$\Rightarrow f''(x) = \frac{3}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$

$\forall x \in [-1;2]$, $f''(x) > 0$ donc f' est croissante sur $[-1;2]$

$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f'(-1) \leq f'(x) \leq f'(2)$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{2}{\sqrt{7}} - 1 < 0$

$\Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$$\boxed{\forall x \in I, \ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}}$$

d/ Déduisons-en que pour tout x de I on a: $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

f est dérivable sur I et $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$\alpha \in I$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis on a:

$\forall x \in I, |f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

$\Leftrightarrow |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ car $f(\alpha) = \alpha$

$$\boxed{\forall x \in I, \left|f(x) - \alpha\right| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|}$$

2/ a-/ Démontrons que: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$

- $U_0 = 1$ donc $U_0 \in I$
- Supposons la proposition vraie à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) et démontrons qu'elle est aussi vraie à l'ordre $n+1$

$U_n \in I \Rightarrow f(U_n) \in I$ d'après b/

c'est-à-dire $U_{n+1} \in I$

Conclusion

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ U_n \in I}$$

b-/ Démontrons que :

$\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$, il résulte de ci-dessus que: $|f(U_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

or $f(U_n) = U_{n+1}$ d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|}$$

c-/ Etablir que: $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

$|U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_0 - \alpha|$

$|U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_1 - \alpha|$

$\vdots \qquad \vdots$

$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_{n-1} - \alpha|$

En multipliant membre à membre et en simplifiant on a:

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|U_0 - \alpha|$$

$\alpha \in [1;2] \Rightarrow 1 \leq \alpha \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq -\alpha \leq -1$

$\Leftrightarrow -1 \leq U_0 - \alpha \leq 0$

$\Rightarrow |U_0 - \alpha| \leq 1$

$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|U_0 - \alpha|$ et $|U_0 - \alpha| \leq 1$ d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}}$$

d-/ Déduisons de 2.c que la suite (U_n) est convergente et précisons sa limite

On a: $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

d'où d'après la comparaison: $\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = \alpha}$

PROBLEME N°40

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x - \sqrt{|x^2+2x-3|}$

(C) sa courbe représentative.

1°/ Continuité de f sur $\mathbb{R}$

$x \longmapsto |x^2+2x-3|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, |x^2+2x-3| \geq 0$, de plus $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc $x \longmapsto \sqrt{|x^2+2x-3|}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

f est donc continue sur $\mathbb{R}$ car elle est la somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$

2/ a-/ Dérivabilité de f au point -3

Posons $P(x) = x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 1$

Signe de $P(x)$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ecrivons $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{-x^2-2x+3} & \text{si } -3 \leq x \leq 1 \\ x - \sqrt{x^2+2x-3} & \text{si } x \leq -3 \text{ ou } x \geq 1 \end{cases}$$

f est continue au point -3 et $f(-3) = -3$

$$\lim_{x \to -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} \frac{x+3-\sqrt{-x^2-2x+3}}{x+3}$$

$$= \lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} 1 - \frac{\sqrt{-x^2-2x+3}}{x+3}$$

$$= \lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} 1 + \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)\sqrt{-x^2-2x+3}}$$

$$= \lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} 1 + \frac{x-1}{\sqrt{-x^2-2x+3}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} \frac{x+3-\sqrt{x^2+2x-3}}{x+3}$$

$$= \lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} 1 - \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = +\infty$$

f n'est pas dérivable au point -3

b-/ Dérivabilité de f au point 1

f est continue au point 1 et $f(1) = -1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{x-1-\sqrt{-x^2-2x+3}}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} 1 - \frac{\sqrt{-x^2-2x+3}}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} 1 + \frac{x+3}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x-1-\sqrt{x^2+2x-3}}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} 1 - \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} 1 - \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x-3}}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$$

f n'est pas dérivable au point 1

3°/ Calculons le nombre dérivé de f en un point x tel que:

$x \in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$

$\forall x \in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$,

$f(x) = x - \sqrt{x^2+2x-3}$

$\Rightarrow f'(x) = 1 - \dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-3}}$

$= 1 - \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$

$\forall x \in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}-x-1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$

b/ Calculons $f'(x)$ pour tout $x \in]-3;1[$

$\forall x \in]-3;1[$, $f(x) = x - \sqrt{-x^2-2x+3}$

$\Rightarrow f'(x) = 1 - \dfrac{-2x-2}{2\sqrt{-x^2-2x+3}}$

$= 1 + \dfrac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$

$\forall x \in]-3;1[$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{-x^2-2x+3}+x+1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$

4/ a/ Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation

$\sqrt{x^2+2x-3} - x - 1 < 0$ (E)

(E) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x-3} < x+1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-3 < (x+1)^2 \\ x \in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[\\ x \geqslant -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < 1 \\ x > 1 \end{cases}$ $\Rightarrow x \in]1;+\infty[$

$S =]1;+\infty[$

b/ Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation

$\sqrt{-x^2-2x+3} + x + 1 < 0$ (E')

(E') $\Leftrightarrow \sqrt{-x^2-2x+3} < -(x+1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2-2x+3 < (x+1)^2 \\ -3 < x < 1 \\ x < -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+4x-2 > 0 \ (a) \\ -3 < x < -1 \end{cases}$

Posons $2x^2+4x-2=0$

$\Leftrightarrow x^2+2x-1=0$

$\Delta' = 1+1 = 2$ $x_1 = -1-\sqrt{2} \in]-3;-1[$

$x_2 = -1+\sqrt{2} \notin]-3;-1[$

x	-3		$-1-\sqrt{2}$		-1
x^2+2x-1		$+$	0	$-$	

$S =]-3;-1-\sqrt{2}[$

c/ Déduisons-en le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

$\forall x < -3$, $-x-1 > 0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}-x-1}{\sqrt{x^2+2x-3}} > 0$

$\forall x < -3$, $f'(x) > 0$.

$\forall x \in]-3;-1-\sqrt{2}[$, $\sqrt{-x^2-2x+3}+x+1 < 0$

$\Rightarrow f'(x) < 0$

$\forall x \in]-1-\sqrt{2};1[$ $f'(x) > 0$

$\forall x \in]1;+\infty[$ $f'(x) < 0$

Tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		-3		$-1-\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

5/a/ Calculons les limites de $f(x)$

à $-\infty$ puis à $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x - \sqrt{x^2+2x-3}$$

$= -\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x-3} = +\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2+2x-3}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-(x^2+2x-3)}{x+\sqrt{x^2+2x-3}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3-2x}{x+x\sqrt{1+3/x-3/x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2+3/x}{1+\sqrt{1+3/x-3/x^2}}$$

$= -1$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1}$$

Tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-3		$-1-\sqrt{2}$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$f(-1-\sqrt{2})$	↗	-1	↘	-1

$f(-1-\sqrt{2}) = -1-2\sqrt{2}$.

b/ Montrons que (C) admet deux asymptotes dont nous préciserons les équat-

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1+\sqrt{1+2/x-3/x^2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x = \lim_{x\to-\infty} -x-\sqrt{x^2+2x-3}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3-2x}{-x+\sqrt{x^2+2x-3}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x(-2+3/x)}{-x-x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2-3/x}{1+\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x = 1$$

La droite d'équation $y = 2x+1$ est asymptote oblique à la courbe (C) en $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

La droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à la courbe (C) en $+\infty$

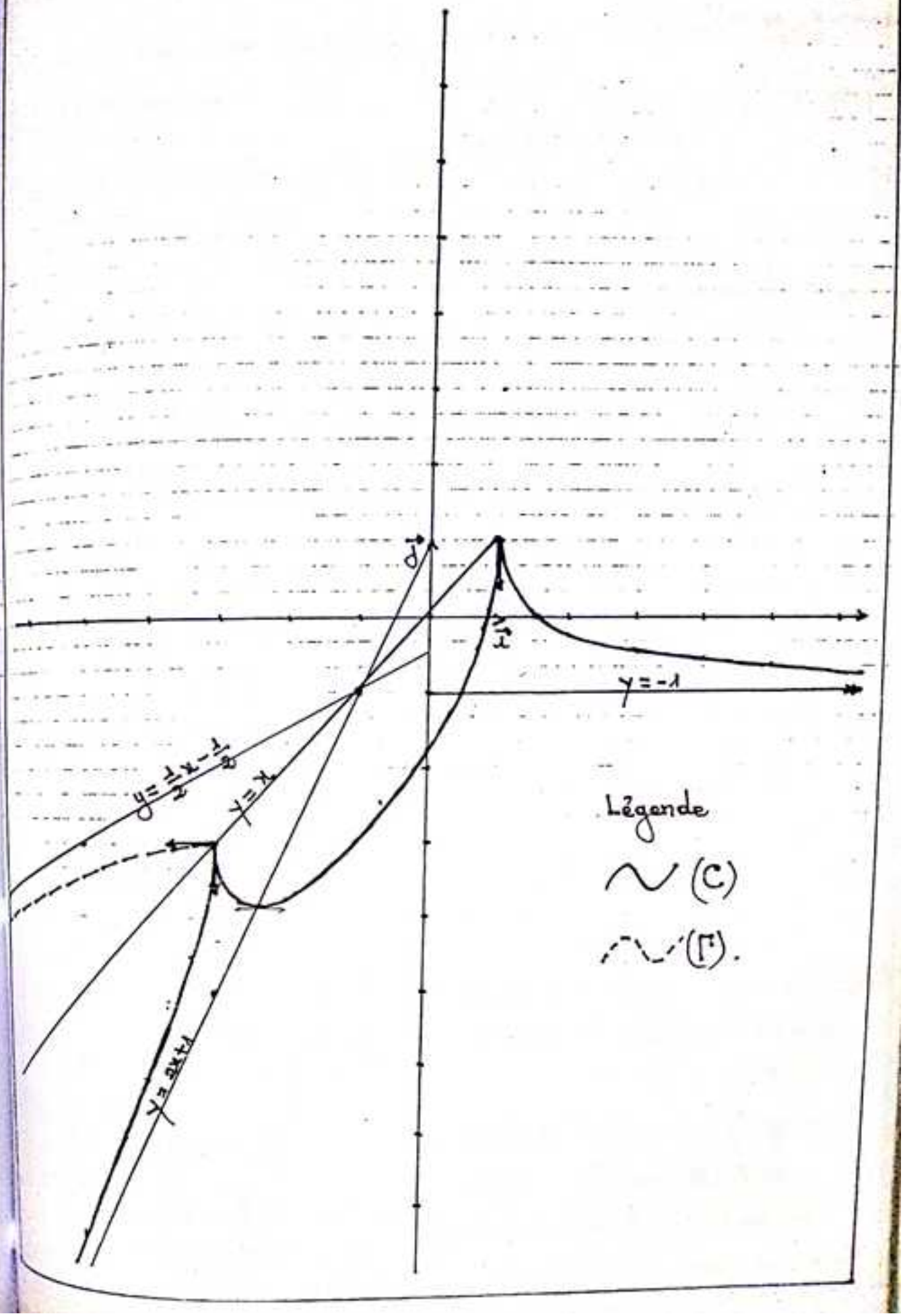
c/ Construction de la courbe (C)

(Voir page suivante)

6/ Soit h la restriction de f à $]-\infty;-3]$

a/ Montrons que h est une bijection de $]-\infty;-3]$ sur un intervalle J que nous préciserons

D'après les variations de f, h est continue, monotone, strictement croissante sur $]-\infty;-3]$ avec


y = -1
y = x
Légende
(C)
(Γ).

$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ et $h(-3) = -3$.

h définit donc une bijection de $]-\infty;-3]$ sur $]-\infty;-3]$.

b/ Soit h^{-1} la bijection réciproque de h. Calculons $h^{-1}(-5)$

$h^{-1}(-5)$ est la solution de l'équation $x \in]-\infty;-3]$, $h(x) = -5$ (E_1)

$(E_1) \Rightarrow x - \sqrt{x^2+2x-3} = -5$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x-3} = x+5$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2+2x-3 = (x+5)^2 \ (a) \\ -5 < x < -3 \end{cases}$

$(a) \Leftrightarrow 8x+28=0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2} \in]-5;-3[$

Conclusion : $\boxed{h^{-1}(-5) = -\frac{7}{2}}$

Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (Γ) représentative de h^{-1} au point $(-5;\ h^{-1}(-5))$

$(T) : y = (h^{-1})'(-5)(x+5) + h^{-1}(-5)$

$(h^{-1})'(-5) = \frac{1}{h'[h^{-1}(-5)]} = \frac{1}{h'(-7/2)}$

$= \frac{3}{8}$

$(T) : y = \frac{3}{8}(x+5) - \frac{7}{2}$

$\boxed{(T) : y = \frac{3}{8}x - \frac{13}{8}}$

c/ Construction de (Γ) sur le même graphique que (C) (Voir page précédente)

7/ Soit (C') la représentation graphique de la fonction :

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x + \sqrt{x^2+2x-3}$

et (G) celle de la restriction de f à :

$]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[$

a/ Montrons que (C') est le symétrique de (G) par rapport au milieu H du segment $[AB]$ $A(-3;-3)$ $B(1;1)$

$H(-1;-1)$ Soit $M(x;y)$ et $M'(x';y')$

$M' = S_H(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x-2 \\ y' = -y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x'-2 \\ y = -y'-2 \end{cases}$

$M \in (G) \Leftrightarrow y = x - \sqrt{x^2+2x-3}$

$\Leftrightarrow -y'-2 = -x'-2 - \sqrt{(-x'-2)^2+2(-x'-2)-3}$

$\Leftrightarrow y' = x' + \sqrt{x'^2+2x'-3}$

$\Leftrightarrow y' = g(x') \Leftrightarrow M' \in (C')$

Conclusion $\boxed{C' = S_H(G)}$

b/ Caractérisons analytiquement $(G) \cup (C')$

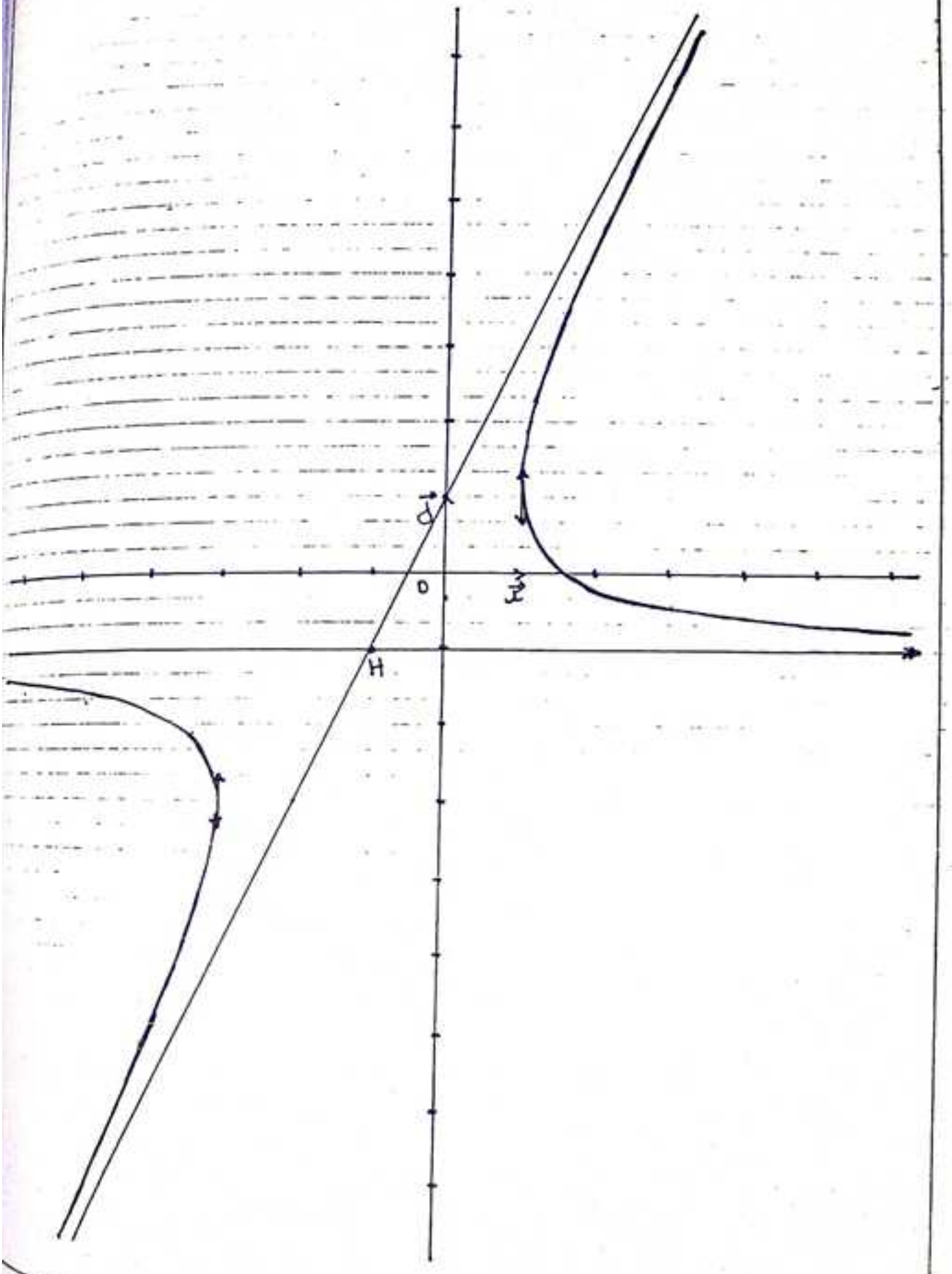
$M \in (G) \cup (C') \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + \sqrt{x^2+2x-3} \\ \text{ou} \\ y = x - \sqrt{x^2+2x-3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow (y-x)^2 = x^2+2x-3 \Leftrightarrow y^2 - 2xy = 2x-3$

soit $y^2 - 2xy - 2x + 3 = 0$

c/ Construction $(G) \cup (C')$ sur une autre figure (Voir page suivante)

CONSTRUCTION DE (C) U (C').



TROISIEME PARTIE :

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

ENONCES DES EXERCICES SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

EXERCICE 1

On considère l'équation différentielle (E): $y'' + 2y' + 5y = 2x+3$

1./ Déterminer les réels a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+b$ soit solution de cette équation.

2./ Soit g une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que g vérifie (E) si et seulement si g-f vérifie l'équation (E'): $y'' + 2y' + 5y = 0$

3./ Résoudre (E') et en déduire la solution générale de (E).

4./ Déterminer la fonction numérique h, solution particulière de (E) vérifiant les conditions initiales :

$h(0) = 1$ et $h'(0) = 1$

EXERCICE 2

1./ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $(E_0): y'' + 2y' + y = 0$

2./ Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ est solution de l'équation différentielle $(E_1): y'' + 2y' + y = -x^2 - x + 2$ pour des valeurs a, b et c que l'on déterminera.

3./ Montrer que f est solution de (E_1) équivaut à $h = f - g$ solution de (E_0)

En déduire les solutions de (E_1).

4./ Trouver une solution u de (E_1) dont la courbe représentative passe par le point A(0; 1) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -2.

EXERCICE 3

1./ On considère l'équation différentielle (E): $y'' + y = 0$

a./ Quelle est son équation caractéristique ?

b./ Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

2./ On considère l'équation différentielle (E'): $y'' + y = e^x + \bar{e}^x$. On note f une solution quelconque de (E') et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

(1) $g(x) = f(x) - m(e^x + \bar{e}^x)$. où m est un réel donné.

a./ Exprimer $g''(x)$ en fonction de $f''(x)$ et m.

b./ Déterminer la valeur du réel m pour que la fonction g soit solution de l'équation différentielle (E)

c./ Exprimer, à l'aide des fonctions trigonométriques et exponentielles toutes les solutions f de l'équation (E')

qui sont définies par la relation (1)

1.) Parmi les fonctions f définies en 2.c.) on note h celle dont la courbe représentative passe l'origine du repère et admet en ce point une tangente parallèle à la première bissectrice.

Déterminer h.

EXERCICE 4

Soit l'équation différentielle

(E) : $y' + 3y = -2 + 5x$.

1.) Déterminer les réels a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ soit solution de (E).

2.) Montrer que la fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle

(E') : $y' + 3y = 0$.

3.) a.) Résoudre (E')

b.) Déterminer la solution φ de (E) telle que $\varphi(0) = 1$

EXERCICE 5

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1+x)e^{-2x}$

1.) Déterminer les nombres réels a et b pour que f soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

(E) : $y'' + ay' + by = 0$

2.) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la dérivée d'ordre n de f est solution de (E).

3.) Déterminer, parmi les primitives de f, celle qui est solution de (E)

EXERCICE 6

On considère l'équation différentielle

(E) : $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$.

1.) Vérifier que la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E)

2.) Soit f une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)e^{-2x}$.

Démontrer que f est une solution de (E) si et seulement si g''' est la fonction nulle.

3.) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

EXERCICE 7

On considère l'équation différentielle

(E) : $x^2y'' - xy' + y = 0$.

1.) a.) Soit z une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.

Démontrer que xz est solution de (E) si et seulement si z est solution

de l'équation différentielle (E') :

$$xz' = A \quad (A \in \mathbb{R}).$$

b/ Résoudre sur $]0;+\infty[$, (E') puis (E).

2/ A l'aide d'un raisonnement analogue, résoudre sur $]-\infty;0[$, l'équation différentielle : $y' = \frac{x+y}{x}$.

EXERCICE 8

On considère l'équation différentielle (E) : $(x-1)y'' - xy' + y = 0$.

1/ Démontrer que si f est solution sur $]1;+\infty[$ de (E) alors f'' est dérivable sur $]1;+\infty[$ et est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle (E') : $y' = y$.

2/ Démontrer que si f'' est dérivable sur $]1;+\infty[$ et est solution de (E') alors :

$$f'(x) = f(x) + c_1 x + c_2 \quad (c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R})$$

Quelle relation doit lier c_1 et c_2 pour que f soit solution de (E) ?

3/ Résoudre (E) sur $]1;+\infty[$.

EXERCICE 9

On se propose de résoudre sur l'intervalle $I =]0;+\infty[$ l'équation différentielle définie par :

(E) : $x^2 f''(x) + x f'(x) = 0$

1/ a/ Montrer que les fonctions f_1 et f_2 définies respectivement par :

$f_1(x) = \ln x$ et $f_2(x) = 1$ sont des solutions de l'équation différentielle (E).

b/ On pose $g(x) = x f'(x)$ (pour $x \in I$)

A quelle équation différentielle la fonction g satisfait-elle ?

En déduire l'intégrale générale de (E).

2/ On considère l'équation différentielle définie sur I par :

(E') : $x^2 f''(x) + x f'(x) = \frac{4 + \ln x}{x}$

Résoudre (E') en cherchant une solution particulière de la forme :

$$x \mapsto \frac{a \ln x + b}{x}$$

EXERCICE 10

Soit (E) l'équation différentielle du second ordre :

(E) : $y'' - 3y' + 2y = 0$.

1/ a/ Quelles sont les solutions de (E) ?

b/ Quelle est la solution de (E) dont la courbe représentative (C) admet au point d'abscisse 0 la même tangente que la courbe (C') représentative de la fonction $x \mapsto e^{3x}$.

On dit que (C) et (C') sont tangentes

2/ λ étant un réel strictement positif, soit h_λ la fonction définie par:

$$h_\lambda(x) = -\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x}$$

Montrer que h_λ est solution de (E).

3/ Soit (E') l'équation différentielle

(E') : $y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2$

a/ Trouver un polynôme P du second dégré solution de l'équat° (E')

b/ On pose $f(x) = g(x) - \frac{1}{2}x^2 - x$.

Montrer que f est solution de (E') si et seulement si g est solution de (E).

En déduire les fonctions f solutions de l'équation (E).

4/ Déterminer la solution de (E') dont la courbe représentative passe par le point A(0; 2) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1

EXERCICE 11

On considère l'équation différentielle

(E) : $y'' - y' - 6y = -6x - 1$

1/ Déterminer a et b réels tels que la fonction polynôme g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E).

2/ a/ Démontrer que f, fonction numérique de variable réelle, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation différentielle

(E') : $y'' - y' - 6y = 0$.

b/ Résoudre (E')

c/ En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

d/ Trouver la solution de l'équation (E) vérifiant : $f(-1) = 2$ et $f'(-1) = 4$

EXERCICE 12

On considère le système

$$(\Sigma): \begin{cases} y' = -z \\ z' = y - 2z \end{cases}$$ où les inconnues sont les fonctions y et z.

1/ Démontrer que si (y; z) est solution de (Σ) alors les fonctions y et z sont deux fois dérivables et vérifient l'équation différentielle (E): $u'' + 2u' + u = 0$

2/ a/ En écrivant (E) sous la forme:

$$u'' + u' + u' + u = 0,$$

démontrer qu'une fonction est solution de (E) si et seulement si elle est solution de l'équation différentielle

(E') : $v' + v = ae^{-x}$ $(a \in \mathbb{R})$.

b/ vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = axe^{-x}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E').

c/ Démontrer qu'une fonction f est solution de (E') si la fonction $f - g$

est solution de l'équation différentielle : $v'+v=0$

d/ En déduire la résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

3/ Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système (Σ)

EXERCICE 13

On considère l'équation différentielle (E): $y''+2y'+5y=-10\sin x$.

1/ Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x)=a\cos x+b\sin x$ soit solution de l'équation différentielle (E).

2/ Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si, $f-g$ est solution de l'équation différentielle (E'): $y''+2y'+5y=0$

3/ a/ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E')

b/ En déduire les solutions de (E)

4/ Déterminer la solution h de l'équation différentielle (E) dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées (0; 3) et admet en ce point une tangente parallèle à la droite (Δ) d'équation $y+6x-5=0$.

EXERCICE 14

On considère l'équation différentielle $(E_\lambda): y''-2\lambda y'+4y=x^2+(2\lambda+8)x-2\lambda^2-4\lambda+\frac{1}{2}$ où λ est un paramètre réel.

1/ Déterminer en fonction de λ les réels a, b et c tels que la fonction h_λ définie sur $\mathbb{R}$ par: $h_\lambda(x)=ax^2+bx+c$ soit solution de l'équation (E)

2/ Montrer qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si $g-h_\lambda$ est solution de l'équation différentielle $(E'_\lambda): y''-2\lambda y'+4y=0$

3/ a/ Résoudre (E'_λ) suivant les valeurs du réel λ.

b/ Résoudre (E_0), (E_2) et $(E_{6,4})$

c/ Déterminer la solution de (E_2) dont la courbe représentative passe par l'origine du repère et admet en ce point une tangente de vecteur directeur $\vec{i}$.

CORRIGES DES EXERCICES SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

EXERCICE 1

On considère l'équation différentielle

(E) : $y'' + 2y' + 5y = 2x + 3$.

1./ Déterminons les réels a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ soit solution de (E)

$f(x) = ax + b$; $f'(x) = a$; $f''(x) = 0$

f est solution de (E) ssi :

$f''(x) + 2f'(x) + 5f(x) = 2x + 3$

$\Leftrightarrow 0 + 2a + 5(ax + b) = 2x + 3$

$\Leftrightarrow 5ax + 2a + 5b = 2x + 3$

Par identification on a :

$$\begin{cases} 5a = 2 \\ 2a + 5b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{5} \\ b = \frac{11}{25} \end{cases}$$

$a = \frac{2}{5}$	$b = \frac{11}{25}$

2./ Soit g une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$.

Montrons que g vérifie (E) ssi g − f vérifie l'équation (E') : $y'' + 2y' + 5y = 0$

g − f solution de (E') équivaut à :

$(g-f)'' + 2(g-f)' + 5(g-f) = 0$

$\Leftrightarrow g''(x) - f''(x) + 2g'(x) - 2f'(x) + 5g(x) - 5f(x) = 0$

$\Leftrightarrow g''(x) + 2g'(x) + 5g(x) = f''(x) + 2f'(x) + 5f(x)$

or f est solution de (E) ce qui équivaut à $f''(x) + 2f'(x) + 5f(x) = 2x + 3$.

d'où $g''(x) + 2g'(x) + 5g(x) = 2x + 3$

$\Leftrightarrow$ g solution de (E).

Conclusion

g vérifie (E) ssi g − f vérifie (E')

3./ Résolvons l'équation (E')

(E') : $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Equation caractéristique :

$r^2 + 2r + 5 = 0$

$\Delta' = 1 - 5 = -4 = (2i)^2$

$r_1 = -1 - 2i$ $r_2 = -1 + 2i$

$y = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{-x}$

Les solutions de (E') sont les fonctions $x \mapsto (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{-x}$, $(A;B) \in \mathbb{R}^2$

Déduisons-en la solution générale de (E)

On sait que g − f solution de (E') ssi g solution de (E).

g − f solution de (E') équivaut à :

$g(x) - f(x) = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{-x}$

$\Leftrightarrow g(x) = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{-x} + f(x)$

$= (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{-x} + \frac{2}{5}x + \frac{11}{25}$

La solution générale de (E) est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{-x} + \frac{2}{5}x + \frac{11}{25}$ $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

4./ Déterminons la fonction numérique h solution de (E) vérifiant : $h(0) = 1$ et $h'(0) = 1$

$h(x) = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{-x} + \frac{2}{5}x + \frac{11}{25}$

$h'(x) = (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x - A\cos 2x - B\sin 2x)e^{-x} + \frac{2}{5}$

$= [(2B-A)\cos 2x - (2A+B)\sin 2x]e^{-x} + \frac{2}{5}$

$h(0) = A + \frac{11}{25}$ $\quad h'(0) = 2B - A + \frac{2}{5}$

$\begin{cases} h(0) = 1 \\ h'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + \frac{11}{25} = 1 \\ 2B - A + \frac{2}{5} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{14}{25} \\ B = \frac{28}{50} \end{cases}$

$h(x) = \left(\frac{14}{25}\cos 2x + \frac{28}{50}\sin 2x\right)e^{-x} + \frac{2}{5}x + \frac{11}{25}$

EXERCICE 2

1./ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) : $y'' + 2y' + y = 0$

Equation caractéristique :

$r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow r = -1$

Les solutions de (E_0) sont les fonctions $x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{-x}$, $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$

2./ Soit g la fonction définie par : $g(x) = ax^2 + bx + c$.

Déterminons a, b et c pour que g soit solution de l'équation différentielle

(E_1) : $y'' + 2y' + y = -x^2 - x + 2$.

$g(x) = ax^2 + bx + c$; $g'(x) = 2ax + b$; $g''(x) = 2a$

g solution de (E_1) équivaut à :

$g''(x) + 2g'(x) + g(x) = -x^2 - x + 2$

$\Leftrightarrow 2a + 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c = -x^2 - x + 2$

$\Leftrightarrow ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c = -x^2 - x + 2$

Par identification on a :

$\begin{cases} a = -1 \\ 4a + b = -1 \\ 2a + 2b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases}$

$a = -1$	$b = 3$	$c = -2$	$g(x) = -x^2 + 3x - 2$

3./ Montrons que f est solution de (E_1) équivaut à $h = f - g$ solution de (E_0)

h solution de (E_0) équivaut à :

$h''(x) + 2h'(x) + h(x) = 0$

$\Leftrightarrow f''(x) - g''(x) + 2f'(x) - 2g'(x) + f(x) - g(x) = 0$

$\Leftrightarrow f''(x) + 2f'(x) + f(x) = g''(x) + 2g'(x) + g(x)$

g solution de (E_1) équivaut à :

$g''(x) + 2g'(x) + g(x) = -x^2 - x + 2$

$\Leftrightarrow f''(x) + 2f'(x) + f(x) = -x^2 - x + 2$

$\Leftrightarrow f$ solution de (E_1).

Conclusion

f est solution de (E_1) équivaut à $h = f - g$ solution de (E_0)

Déduisons-en les solutions de (E_1)

$f - g$ solution de (E_0) équivaut à :

$f(x) - g(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + (\alpha x + \beta)e^{-x}$

$= -x^2 + 3x - 2 + (\alpha x + \beta)e^{-x}$

De plus $f - g$ solution de (E_0) équivaut à f solution de (E_1).

Conclusion : Les solutions de (E_1) sont les fonctions $x \mapsto -x^2 + 3x - 2 + (\alpha x + \beta)e^{-x}$

4/ Trouvons une solution U de (E_1) dont la courbe représentative passe par le point A(0;1) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur −2

$U(x) = -x^2+3x-2+(\alpha x+\beta)e^{-x}$

$U'(x) = -2x+3+(-\alpha x+\alpha-\beta)e^{-x}$

$U(0) = -2+\beta$. $U'(0) = 3+\alpha-\beta$

Les conditions ci-dessus se traduisant sous la forme: $\begin{cases} U(0)=1 \\ U'(0)=-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta-2=1 \\ \alpha-\beta+3=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-2 \\ \beta=3 \end{cases}$

$$\boxed{U(x) = -x^2+3x-2+(-2x+3)e^{-x}}$$

EXERCICE 3

1./ On considère l'équation différentielle

(E) : $y''+y=0$.

a./ Equation caractéristique de (E)

$r^2+1=0$.

b./ Déterminons toutes les solutions de l'équation différentielle (E)

$r^2+1=0 \Leftrightarrow r_1=-i$; $r_2=i$

$\Leftrightarrow y = a\cos x + b\sin x, (a;b)\in\mathbb{R}^2$

Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto a\cos x + b\sin x$, $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

2./ On considère l'équation différentielle (E') : $y''+y = e^x+e^{-x}$. On note f une solution quelconque de (E') et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

(1) : $g(x) = f(x) - m(e^x+e^{-x})$ où m est un réel donné.

a./ Exprimons g''(x) en fonction de f''(x) et m.

$g(x) = f(x) - m(e^x+e^{-x})$

$g'(x) = f'(x) - m(e^x-e^{-x})$; $g''(x) = f''(x) - m(e^x+e^{-x})$

$$\boxed{g''(x) = f''(x) - m(e^x+e^{-x})}$$

b./ Déterminons la valeur de m pour que la fonction g soit solution de (E)

On sait que f est solution de (E') ce qui nous permet d'écrire $f''(x)+f(x) = e^x+e^{-x}$

g solution de (E) $\Leftrightarrow g''(x)+g(x) = 0$

$\Leftrightarrow f''(x) - m(e^x+e^{-x}) + f(x) - m(e^x+e^{-x}) = 0$

$\Leftrightarrow f''(x) + f(x) - 2m(e^x+e^{-x}) = 0$

$\Leftrightarrow e^x+e^{-x} - 2m(e^x+e^{-x}) = 0$

$\Leftrightarrow (1-2m)(e^x+e^{-x}) = 0$

$\Leftrightarrow 1-2m = 0$ car e^x+e^{-x}

$\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{m = \frac{1}{2}}$$

c./ Exprimons les solutions f de (E')

Pour $m = \frac{1}{2}$, g solution de (E)

Ce qui entraine $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

$g(x) = a\cos x + b\sin x$

$(1) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$f(x) = a\cos x + b\sin x + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

Les solutions f de (E') définies par la relation sont les fonctions :

$x \mapsto a\cos x + b\sin x + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\ (a;b) \in \mathbb{R}^2$

d./ Déterminons h

$h(x) = a\cos x + b\sin x + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$h(0) = a + 1$

$h'(x) = -a\sin x + b\cos x + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$h'(0) = b$.

Les conditions de l'énoncé se traduisent par le système : $\begin{cases} h(0) = 0 \\ h'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1=0 \\ b=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$

$h(x) = \sin x - \cos x + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

EXERCICE 4

Soit l'équation différentielle

$(E) : y' + 3y = -2 + 5x$.

1./ Déterminons les réels a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ soit solution de E

$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$

f solution de $(E) \Leftrightarrow f'(x) + 3f(x) = -2 + 5x$

$\Leftrightarrow a + 3(ax + b) = -2 + 5x$

$\Leftrightarrow 3ax + a + 3b = -2 + 5x$

Par identification on a :

$\begin{cases} 3a = 5 \\ a + 3b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{3} \\ b = -\frac{11}{9} \end{cases}$

$a = \frac{5}{3}$	$b = -\frac{11}{9}$	$f(x) = \frac{5}{3}x - \frac{11}{9}$

2./ Montrons que la fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle

$(E') : y' + 3y = 0$

$\varphi - f$ solution de (E') équivaut à :

$(\varphi - f)' + 3(\varphi - f) = 0$

$\Leftrightarrow \varphi'(x) - f'(x) + 3\varphi(x) - 3f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \varphi'(x) + 3\varphi(x) = f'(x) + 3f(x)$ (1)

or $f'(x) + 3f(x) = -2 + 5x$

(1) $\Leftrightarrow \varphi'(x) + 3\varphi(x) = -2 + 5x$

$\Leftrightarrow \varphi$ solution de (E)

Conclusion :

φ est solution de (E) ssi $\varphi - f$ est solution de (E')

3.1 a./ Résolution de (E').

$y' + 3y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -3$

$\Leftrightarrow \ln|y| = -3x + c$

$\Leftrightarrow |y| = e^c \cdot e^{-3x}$

$y = ke^{-3x}$, $k \in$

Les solutions de (E') sont les fonctions $x \mapsto ke^{-3x}$, $k \in \mathbb{R}$

b/ Déterminons la solution φ de (E) telle que $\varphi(0) = 1$

φ solution de (E) équivaut à $\varphi - f$ solution de (E'); ce qui équivaut à :

$\varphi(x) - f(x) = ke^{-3x}$ $k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \varphi(x) = f(x) + ke^{-3x}$

$\varphi(x) = \frac{5}{3}x - \frac{11}{9} + ke^{-3x}$

$\varphi(0) = 1 \Leftrightarrow -\frac{11}{9} + k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{20}{9}$

$$\varphi(x) = \frac{5}{3}x - \frac{11}{9} + \frac{20}{9}e^{-3x}$$

EXERCICE 5

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1+x)e^{-2x}$.

1/ Déterminons les nombres réels a et b pour que f soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$(E) : y'' + ay' + by = 0$

$f(x) = (1+x)e^{-2x}$

$f'(x) = (-2x-1)e^{-2x}$

$f''(x) = 4xe^{-2x}$

f solution de $(E) \Leftrightarrow f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$

$\Leftrightarrow 4xe^{-2x} + a(-2x-1)e^{-2x} + b(1+x)e^{-2x} = 0$

$\Leftrightarrow \left[(-2a+b+4)x - a + b\right]e^{-2x} = 0$

$\Leftrightarrow (-2a+b+4)x - a + b = 0$ car $e^{-2x} \neq 0$

Par identification on a :

$$\begin{cases} -2a+b+4=0 \\ -a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=4 \end{cases}$$

$a = 4 \quad b = 4$

f est solution de l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4 = 0$

2-/ Démontrons que pour tout entier naturel n non nul, la dérivée d'ordre n de f est solution de (E)

On sait que f est solution de (E)

$\Leftrightarrow f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \left(f''(x) + 4f'(x) + 4f(x)\right)' = 0$

$\Leftrightarrow \left(f^{(2)}\right)''(x) + 4\left(f'\right)'(x) + 4f'(x) = 0$

$\Rightarrow f'$ solution de (E).

La proposition est vraie au rang 1

Supposons $f^{(n)}$ solution de (E) et montrons que $f^{(n+1)}$ est solution de (E).

f^n solution de $(E) \Leftrightarrow \left(f^n\right)''(x) + 4\left(f^n\right)'(x) + 4f^n(x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\left(f^n\right)''(x) + 4\left(f^n\right)'(x) + 4f^n(x)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left(f^{n+1}\right)''(x) + 4\left(f^{n+1}\right)'(x) + 4f^{n+1}(x) = 0$

$\Rightarrow f^{n+1}$ solution de E.

Conclusion

f^n est solution de (E) pour tout entier naturel n non nul.

3/ Déterminons, parmi les primitives de f, celle qui est solution de (E)

Posons $F(x) = (ax+b)e^{-2x}$

F primitive de $f \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

$\Leftrightarrow (-2ax+a-2b)e^{-2x} = (1+x)e^{-x}$

Par identification on a:

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ a-2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

L'ensemble des primitives de f est:

$x \mapsto \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)e^{-2x} + k, \; k \in \mathbb{R}$

Posons $G(x) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)e^{-2x} + k$

$G'(x) = (1+x)e^{2x}$ $G''(x) = (-2x-1)e^{-2x}$

G solution de (E) équivaut à:

$G''(x) + 4G'(x) + 4G(x) = 0$

$\Leftrightarrow (-2x-1)e^{-2x} + 4(1+x)e^{-2x} + 4\left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)e^{-2x} + 4k = 0$

$\Leftrightarrow 4k = 0 \Leftrightarrow k = 0$.

La primitive de f qui est solution de (E) est la fonction: $x \mapsto \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)e^{-2x}$

EXERCICE 6

On considère l'équation différentielle

(E): $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

1/ Vérifions que la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de E

Posons $h(x) = e^{2x}$; $h'(x) = 2e^{2x}$

$h''(x) = 4e^{2x}$; $h'''(x) = 8e^{2x}$.

$h'''(x) - 6h''(x) + 12h'(x) - 8h(x) =$

$8e^{2x} - 6(4e^{2x}) + 12(2e^{2x}) - 8e^{2x}$

$= 8e^{2x} - 24e^{2x} + 24e^{2x} - 8e^{2x} = 0$

$\Leftrightarrow h$ solution de (E).

Conclusion:

La fonction $x \mapsto e^{2x}$ est solution de (E)

2/ Soit f une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et g la fonction définie par: $g(x) = f(x)e^{-2x}$.

Démontrons que f est une solution de (E) si et seulement si $g'''(x) = 0$

$g(x) = f(x)e^{-2x} \Leftrightarrow f(x) = g(x)e^{2x}$

$f'(x) = (2g(x) + g'(x))e^{2x}$

$f''(x) = (4g(x) + 4g'(x) + g''(x))e^{2x}$

$f'''(x) = (8g(x) + 12g'(x) + 6g''(x) + g'''(x))e^{2x}$

f solution de (E) équivaut à:

$f'''(x) - 6f''(x) + 12f'(x) - 8f(x) = 0$

$\Leftrightarrow (8g(x) + 12g'(x) + 6g''(x) + g'''(x))e^{2x} - 6(4g(x) + 4g'(x) + g''(x))e^{2x} + 12(2g(x) + g'(x))e^{2x} - 8g(x)e^{2x} = 0$

$\Leftrightarrow g'''(x)e^{2x} = 0$

$\Leftrightarrow g'''(x) = 0$ car $e^{2x} \neq 0$

Conclusion

f est solution de (E) ssi $g'''(x) = 0$

3/ Déduisons-en les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E)

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow g''(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow g'(x) = ax + b$, $b \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$, $c \in \mathbb{R}$

Posons $\frac{1}{2}a = k \in \mathbb{R}$ on a:

$g(x) = kx^2 + bx + c$, $(k; b; c) \in \mathbb{R}^3$

$g''(x) = 0$ ($\Leftrightarrow$ f solution de (E) avec $f(x) = g(x)e^{2x} = (kx^2 + bx + c).e^{2x}$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions :

$x \longmapsto (kx^2 + bx + c)e^{2x}$, $(k; b; c) \in \mathbb{R}^3$.

EXERCICE 7

On considère l'équation différentielle

(E) : $x^2y'' - xy' + y = 0$.

1/ a/ Soit z une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$

Démontrons que xz est solution de (E) ssi z est solution de l'équation différentielle (E') : $xz' = A$, $(A \in \mathbb{R})$

$(xz)' = z + xz'$

$(xz)'' = (z + xz')' = z' + z' + xz''$

$= 2z' + xz''$

xz solution de (E) équivaut à :

$x^2(xz)'' - x(xz)' + xz = 0$

$\Leftrightarrow x^2(2z' + xz'') - x(z + xz') + xz = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2z' + x^3z'' - x^2z' = 0$

$\Leftrightarrow x^2z' + x^3z'' = 0$

$\Leftrightarrow x^2(z' + xz'') = 0$

$\Leftrightarrow z' + xz'' = 0$ car $x > 0$

$\Leftrightarrow (xz')' = 0 \Leftrightarrow xz' = A$

Conclusion.

xz est solution de (E) ssi $xz' = A$, $(A \in \mathbb{R})$

b/ Résolvons sur $]0; +\infty[$, (E')

$xz' = A \Leftrightarrow z' = \frac{A}{x}$

$\Leftrightarrow z = A\ln x + B$.

Les solutions sur $]0; +\infty[$ de (E') sont les fonctions : $x \longmapsto A\ln x + B$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Résolvons sur $]0; +\infty[$, (E)

z solution de (E') $\Leftrightarrow$ xz solution de (E)

Les solutions de (E) sur $]0; +\infty[$ sont les fonctions $x \longmapsto x(A\ln x + B)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

2/ A l'aide d'un raisonnement analogue, résolvons sur $]-\infty; 0[$, l'équation (E_0) : $y' = \frac{x + y}{x}$

Soit z une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$(E_0) \Leftrightarrow xy' - x - y = 0$

Supposons xz solution de (E_0), cela équivaut à

$x(xz)' - x - xz = 0$

$\Leftrightarrow x(z + xz') - x - xz = 0$

$\Leftrightarrow x^2z' - x = 0 \Leftrightarrow x(xz' - 1) = 0$

$\Leftrightarrow xz' - 1 = 0$ car $x \neq 0$

$\Leftrightarrow z' = \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow z = \ln|x| + k, k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow z = \ln(-x) + k$ car $x < 0$

$z = \ln(-x) + k \Leftrightarrow xz = x(\ln(-x) + k)$

Conclusion

Les solutions sur $]-\infty; 0[$ de l'équation (E_0) sont les fonctions :

$x \longmapsto x[\ln(-x) + k]$, $k \in \mathbb{R}$

EXERCICE 8

On considère l'équation différentielle

$(E) : (x-1)y'' - xy' + y = 0$.

1/ Démontrons que si f est solution sur $]1; +\infty[$ de (E) alors f'' est dérivable sur $]1; +\infty[$ et est solution sur cet intervalle de l'équation $(E') : y' = y$

f solution de (E) équivaut à :

$(x-1)f''(x) - xf'(x) + f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \left((x-1)f''(x) - xf'(x) + f(x)\right)' = 0$

$\Leftrightarrow f''(x) + (x-1)f'''(x) - f'(x) - xf''(x) + f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)f'''(x) + (1-x)f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)f'''(x) - (x-1)f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(f'''(x) - f''(x)\right) = 0$

$\Leftrightarrow f'''(x) - f''(x) = 0$ car $x > 1$

$\Leftrightarrow \left(f''\right)'(x) = f''(x)$

Conclusion

f'' est dérivable et est solution sur $]1; +\infty[$ de l'équation différentielle $(E') : y' = y$

2/ Démontrons que si f'' est solution de (E') alors : $f'(x) = f(x) + c_1x + c_2$ $(c_1; c_2) \in \mathbb{R}^2$

f'' solution de $(E') \Leftrightarrow f'''(x) = f''(x)$

$\Leftrightarrow f''(x) = f'(x) + c_1$

$\Leftrightarrow f'(x) = f(x) + c_1x + c_2, (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$

Conclusion

Si f'' est dérivable sur $]1; +\infty[$ et est solution de (E') alors :

$f'(x) = f(x) + c_1x + c_2$, $(c_1; c_2) \in \mathbb{R}^2$

Relation entre c_1 et c_2 pour que f soit solution de (E)

$f'(x) = f(x) + c_1x + c_2$ ①

① $\Rightarrow \begin{cases} f''(x) = f'(x) + c_1 \\ f(x) = f'(x) - c_1x - c_2 \end{cases}$

f solution de (E) équivaut à :

$(x-1)f''(x) - xf'(x) + f(x) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(f'(x) + c_1\right) - xf'(x) + f'(x) - c_1x - c_2 = 0$

$\Leftrightarrow c_1x - c_1 - c_1x - c_2 = 0$

$\Leftrightarrow -c_1 - c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = -c_1$.

f est solution de (E) si $c_2 = -c_1$

3/ Résolution de (E) sur $]1;+\infty[$

f solution de (E) équivaut à :

$f'(x) = f(x) + ax - a$

$\Leftrightarrow f'(x) - f(x) = a(x-1)$

$(E) \Leftrightarrow (E_1) : y' - y = a(x-1)$

Posons $g(x) = ax+b$ et déterminons a et b pour que g soit solution de (E_1)

$g'(x) = a$; g solution de (E_1) équivaut à : $a - ax - b = ax - a$

Par identification on a :

$$\begin{cases} -a = a \\ a - b = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -a \\ b = 0 \end{cases}$$

$g(x) = -ax$.

g et f solution de (E_1) équivaut à :

$$\begin{cases} f'(x) - f(x) = a(x-1) \\ g'(x) - g(x) = a(x-1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow f'(x) - g'(x) - f(x) + g(x) = 0$

$\Leftrightarrow (f(x) - g(x))' - (f(x) - g(x)) = 0$

$\Leftrightarrow f - g$ solution de l'équation différentielle $(E_0) : y' - y = 0$

$(E_0) \Leftrightarrow y' = y \Leftrightarrow y = ke^x$, $k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow f(x) - g(x) = ke^x$

$\Leftrightarrow f(x) = ke^x + g(x)$

$= ke^x - ax$, $(k; a) \in \mathbb{R}^2$

Conclusion

Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto ke^x - ax$, $(a; k) \in \mathbb{R}^2$

EXERCICE 9

On se propose de résoudre sur $I =]0; +\infty[$ l'équation différentielle

$(E) : x^2 f''(x) + x f'(x) = 0$.

1./ a./ Montrons que les fonctions f_1 et f_2 définies respectivement par :

$f_1(x) = \ln x$ et $f_2(x) = 1$ sont des solutions de (E) :

$f_1(x) = \ln x \Rightarrow f_1'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f_1''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$x^2 f_1''(x) + x f_1'(x) = x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right) + x\left(\frac{1}{x}\right)$

$= -1 + 1 = 0$

$x^2 f_1''(x) + x f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow f_1$ solution de (E)

$f_2(x) = 1 \Rightarrow f_2'(x) = 0 \Rightarrow f_2''(x) = 0$

$x^2 f_2''(x) + x f_2'(x) = x^2 \times 0 + x \times 0$

$= 0$

$x^2 f_2''(x) + x f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow f_2$ solution de (E)

Conclusion

Les fonctions f_1 et f_2 définies respectivement par : $f_1(x) = \ln x$ et $f_2(x) = 1$ sont solutions de (E)

b./ On pose $g(x) = x f'(x)$ pour $x \in I$

Equation différentielle à laquelle satisfait la fonction g.

$g(x) = x f'(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

On sait que f est solution de (E)

$f'(x) = \frac{g(x)}{x} \Rightarrow f''(x) = \frac{x g'(x) - g(x)}{x^2}$

f solution de $(E) \Leftrightarrow x^2 f''(x) + x f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{x g'(x) - g(x)}{x^2}\right) + x\frac{g(x)}{x} = 0$

$\Leftrightarrow x g'(x) - g(x) + g(x) = 0$

$\Leftrightarrow x g'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0$ car $x > 0$

La fonction g satisfait à l'équation différentielle : $y' = 0$

Déduisons-en l'intégrale générale de E

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

$g(x) = x f'(x) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{x} = \frac{a}{x}$

$\Leftrightarrow f(x) = a\ln|x| + b$

$= a\ln x + b$ car $x > 0$

Les solutions de (E) sur $]0;+\infty[$ sont les fonctions : $x \longmapsto a\ln x + b$, $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

2/ On considère l'équation différentielle définie sur I par :

$(E') : x^2 f''(x) + x f'(x) = \frac{4 + \ln x}{x}$

Résolvons (E') en cherchant une solution particulière de la forme :

$x \longmapsto \frac{a\ln x + b}{x}$

Posons $g(x) = \frac{a\ln x + b}{x}$

$g'(x) = \frac{a - a\ln x - b}{x^2} = \frac{-a\ln x + a - b}{x^2}$

$g''(x) = \frac{-ax - 2x(-a\ln x + a - b)}{x^4}$

$g''(x) = \frac{2a\ln x - 3a + 2b}{x^3}$

g solution de (E') équivaut à :

$x^2 g''(x) + x g'(x) = \frac{4 + \ln x}{x}$

$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{2a\ln x - 3a + 2b}{x^3}\right) + x\left(\frac{-a\ln x + a - b}{x^2}\right) = \frac{4 + \ln x}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{a\ln x - 2a + b}{x} = \frac{4 + \ln x}{x}$

Par identification on a :

$\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 6. \end{cases}$

La fonction g définie sur I par $g(x) = \frac{\ln x + 6}{x}$ est solution de (E').

On montre aisément que g est solution de (E') ssi $f - g$ solution de (E).

$f - g$ solution de (E) équivaut à :

$f(x) - g(x) = a\ln x + b$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + a\ln x + b$

$f(x) = \frac{\ln x + 6}{x} + a\ln x + b$

Conclusion

Les solutions de (E') sur $I =]0;+\infty[$ sont les fonctions :

$x \longmapsto \frac{\ln x + 6}{x} + a\ln x + b$, $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

EXERCICE 10

Soit (E) l'équation différentielle du second ordre :

$(E) : y'' - 3y' + 2y = 0$

1./ a./ Déterminons les solutions de (E).

Equation caractéristique

$(\lambda) : r^2 - 3r + 2 = 0$

$(\Delta) \Leftrightarrow (r-1)(r-2) = 0$

$r_1 = 1 \quad r_2 = 2$

Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{2x}$, $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$

b/ Solution de (E) dont la courbe représentative (C) admet au point d'abscisse 0 la même tangente que la courbe (C') représentative de la fonct: $x \mapsto e^{3x}$

Posons $f(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x}$

$f'(x) = \alpha e^x + 2\beta e^{2x}$

$f(0) = \alpha + \beta$ et $f'(0) = \alpha + 2\beta$

Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 0 on a:

$(T) : y = (\alpha + 2\beta)x + \alpha + \beta$.

Posons $g(x) = e^{3x}$; $g'(x) = 3e^{3x}$

$g(0) = 1$ et $g'(0) = 3$

Soit (T') la tangente à (C') au point d'abscisse 0. On a:

$(T') : y = x + 3$

(T) confondue à (T') équivaut à:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = 5 \end{cases}$$

La solution de (E) qui vérifie la condition ci-dessus est la fonction: $x \mapsto 5e^x - 2e^{2x}$

2/ λ étant un réel strictement positif, soit h_λ la fonction définie par:

$h_\lambda(x) = -\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x}$

Montrons que h_λ est solution de (E)

h_λ est une fonction de la forme $\alpha e^x + \beta e^{2x}$ avec $\alpha = -\lambda^2$ et $\beta = 2\lambda$.

h_λ est donc solution de (E).

3/ Soit l'équation différentielle

(E'): $y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2$

a/ Trouvons un polynome P du second dégré solution de (E')

Posons $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

$P'(x) = 2ax + b$; $P''(x) = 2a$

P solution à (E') équivaut à:

$P''(x) - 3P'(x) + 2P(x) = -x^2 + x + 2$

$\Leftrightarrow 2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = -x^2 + x + 2$

$\Leftrightarrow 2ax^2 + (2b - 6a)x + 2a - 3b + 2c = -x^2 + x + 2$

Par identification on a:

$$\begin{cases} 2a = -1 \\ 2b - 6a = 1 \\ 2a - 3b + 2c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1/2 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$$

On a donc: $a = -\frac{1}{2}$ $b = -1$ $c = 0$

$P(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x$

b/ On pose $f(x) = g(x) - \frac{1}{2}x^2 - x$

Montrons que f est solution de (E') si et seulement si g est solution de (E)

$f'(x) = g'(x) - x - 1$; $f''(x) = g''(x) - 1$

f solution de (E') équivaut à :

$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = -x^2+x+2$

$\Leftrightarrow g''(x) - 1 - 3\left(g'(x) - x - 1\right) + 2\left(g(x) - \frac{1}{2}x^2 - x\right) = -x^2+x+2$

$\Leftrightarrow g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) - x^2 + x + 2 = -x^2+x+2$

$\Leftrightarrow g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) = 0$

$\Leftrightarrow$ g solution de (E)

Conclusion

f est solution de (E') ssi g solution de (E)

Déduisons-en les fonctions f solutions de l'équation (E')

g solution de (E) $\Leftrightarrow g(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x}$

De plus g solution $\Leftrightarrow f(x) = g(x) - \frac{1}{2}x^2 - x$ solution de (E').

Conclusion

Les solutions de (E') sont les fonctions f définies par: $f(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - x$

$(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$

4./ Déterminons la solution de (E') dont la courbe représentative passe par le point A(0;2) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1

Posons $f(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - x$

$f'(x) = \alpha e^x + 2\beta e^{2x} - x - 1$

$f(0) = \alpha + \beta$; $f'(0) = \alpha + 2\beta - 1$

Les conditions de l'énoncé se traduisent par: $\begin{cases} \alpha+\beta = 2 \\ \alpha+2\beta-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 0 \end{cases}$

La fonction demandée est la fonction f définie par: $f(x) = 2e^x - \frac{1}{2}x^2 - x$.

EXERCICE II

On considère l'équation différentielle

(E): $y'' - y' - 6y = -6x - 1$

1./ Déterminons les réels a et b tels que la fonction polynôme g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax+b$ soit solution de (E)

$g(x) = ax+b$; $g'(x) = a$; $g''(x) = 0$

g solution de (E) équivaut à :

$g''(x) - g'(x) - 6g(x) = -6x - 1$

$\Leftrightarrow -6ax - 6b - a = -6x - 1$

Par identification on a:

$\begin{cases} -6a = -6 \\ -a - 6b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

a = 1	b = 0	g(x) = x

2./ Soit f une fonction numérique de variable réelle deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

a./ Montrons que f est solution de (E) ssi f-g est solution de l'équation différentielle (E'): $y'' - y' - 6y = 0$

f-g solution de (E') équivaut à :

$(f(x)-g(x))''-(f(x)-g(x))'-6(f(x)-g(x))=0$

$\Leftrightarrow f''(x)-f'(x)-6f(x)=g''(x)-g'(x)-6g(x)$

or $g''(x)-g'(x)-6g(x)=-6x-1$

$\Leftrightarrow f''(x)-f'(x)-6f(x)=-6x-1$

Conclusion

f est solution de (E) si et seulement si, f-g est solution de l'équation différentielle (E') : $y''-y'-6y=0$

b./ Résoudre (E')

(E') : $y''-y'-6y=0$

Equation caractéristique :

$r^2-r-6=0 \Leftrightarrow (r-3)(r+2)=0$

$\Leftrightarrow r_1=3 \; ; \; r_2=-2$

Les solutions de (E') sont les fonctions $x \mapsto \alpha e^{-2x}+\beta e^{3x}$, $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

c./ Déduisons-en l'ensemble des solutions de l'équation de (E)

f solution de (E) équivaut à f-g solution de (E') $\Leftrightarrow f(x)-g(x)=\alpha e^{-2x}+\beta e^{3x}$

$\Leftrightarrow f(x)=g(x)+\alpha e^{-2x}+\beta e^{3x}$

Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=x+\alpha e^{-2x}+\beta e^{3x}$, $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

d./ Trouvons la solution de l'équation (E) vérifiant : $f(1)=2$ et $f'(1)=4$

$f(x)=x+\alpha e^{-2x}+\beta e^{3x}$; $f'(x)=1-2\alpha e^{-2x}+3\beta e^{3x}$

$f(1)=1+\alpha e^{-2}+\beta e^{3}$; $f'(1)=1-2\alpha e^{-2}+3\beta e^{3}$

$\begin{cases} f(1)=2 \\ f'(1)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha e^{-2}+\beta e^{3}=1 \\ -2\alpha e^{-2}+3\beta e^{3}=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5\alpha e^{-2}=0 \\ \beta e^{3}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=e^{-3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow f(x)=x+e^{-3}e^{3x}=x+e^{3x-3}$

$f(x)=x+e^{3x-3}$

EXERCICE 12

On considère le système

(Σ) : $\begin{cases} y'=-z \\ z'=y-2z \end{cases}$ où les inconnues sont les fonctions y et z

1./ Démontrons que si (y; z) est solution de (Σ) alors y et z vérifient l'équation différentielle (E) : $u''+2u'+u=0$

(y; z) solution de (Σ) équivaut à :

$\begin{cases} y'=-z \\ z'=y-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y''=-z' & (1) \\ z''=y'-2z' & (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow y''=-z'$ or $z'=y-2z$

$\Leftrightarrow y''=-y+2z$ or $z=-y'$

$\Leftrightarrow y''=-y-2y'$

$\Leftrightarrow y''+2y'+y=0$

$\Leftrightarrow$ y solution de (E).

(2) $\Leftrightarrow z'' = y' - 2z'$ ou $y' = -z$

$\Leftrightarrow z'' = -z - 2z' \Leftrightarrow z'' + 2z' + z = 0$

$\Leftrightarrow z$ solution de (E)

Conclusion

Si $(y; z)$ est solution de (Σ) alors les fonctions y et z vérifient l'équation différentielle (E) : $u'' + 2u' + u = 0$

2./ Démontrons qu'une fonction solution de (E) ssi elle est solution de l'équation différentielle (E') : $v' + v = ae^{-x}$

(E) : $u'' + 2u' + u = 0$

$\Leftrightarrow u'' + u' + u' + u = 0$

$\Leftrightarrow (u' + u)' + u' + u$ (1)

Posons $h = u' + u \Rightarrow h' = u'' + u'$

(1) $\Leftrightarrow h' + h = 0 \Leftrightarrow h(x) = ae^{-x}, a \in \mathbb{R}$

$h = u' + u \Leftrightarrow u' + u = ae^{-x}$

Conclusion

Une fonction solution de (E) ssi elle est solution de l'équation différentielle (E') : $v' + v = ae^{-x}, (a \in \mathbb{R})$

b./ Vérifions que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = axe^{-x}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E')

$g(x) = axe^{-x} \Rightarrow g'(x) = a(1-x)e^{-x}$

$g'(x) + g(x) = a(1-x)e^{-x} + axe^{-x}$

$= ae^{-x} - axe^{-x} + axe^{-x}$

$g'(x) + g(x) = ae^{-x}$

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = axe^{-x}$ est solution de (E')

c./ Démontrons qu'une fonction f est solution de (E') ssi la fonction f-g est solution de l'équat- : $v' + v = 0$

f-g solution de l'équation $v' + v = 0$

$\Leftrightarrow (f(x) - g(x))' + (f(x) - g(x)) = 0$

$\Leftrightarrow f'(x) - g'(x) + f(x) - g(x) = 0$

$\Leftrightarrow f'(x) + f(x) = g'(x) + g(x)$

$\Leftrightarrow f'(x) + f(x) = ae^{-x}$

$\Leftrightarrow f$ solution de (E').

Conclusion

Une fonction f est solution de (E') ssi f-g solution de l'équation : $v' + v = 0$

d./ Résolution sur $\mathbb{R}$ de (E)

f-g solution de l'équation : $v' + v = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - g(x) = ae^{-x} \\ f \text{ solution de (E)} ; \end{cases}$ (E) $\overset{\text{en plus}}{\Leftrightarrow}$ (E').

$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + ae^{-x}$

$= axe^{-x} + ae^{-x}$

$= a(x+1)e^{-x}$

Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto a(x+1)e^{-x}, a \in \mathbb{R}$

3/ Résolution sur $\mathbb{R}$ du système (Σ)

On sait que toute solution de (E) est égale à l'une des composantes y ou z du couple $(y;z)$ solution de (Σ).

Posons $y = f(x) = a(x+1)e^{-x}$

$y' = a(1-x-1)e^{-x} = -axe^{-x}$

or $y' = -z \Leftrightarrow z = -y' = axe^{-x}$

$(a(x+1)e^{-x}; axe^{-x})$ est solution de (Σ)

Posons $z = a(x+1)e^{-x} \Rightarrow z' = -axe^{-x}$

or $y = z' + 2z$

$= -axe^{-x} + 2a(x+1)e^{-x}$

$= a(x+2)e^{-x}$

$(a(x+2)e^{-x}; a(x+1)e^{-x})$ est solution de (Σ)

L'ensemble solution de (Σ) est :

$$S = \left\{\left(a(x+1)e^{-x}; axe^{-x}\right); \left(a(x+2)e^{-x}; a(x+1)e^{-x}\right)\right\}_{a\in\mathbb{R}}$$

EXERCICE 13

On considère l'équation différentielle

(E) : $y'' + 2y' + 5y = -10\sin x$

1/ Déterminons les réels a et b tels la fonction g définie par : $g(x) = a\cos x + b\sin x$ soit solution de (E).

$g(x) = a\cos x + b\sin x$; $g'(x) = -a\sin x + b\cos x$

$g''(x) = -a\cos x - b\sin x$

g solution de $(E) \Leftrightarrow g''(x) + 2g'(x) + 5g(x) = -10\sin x$

$\Rightarrow (2b-4a)\cos x - (2a+4b)\sin x = -10\sin x$

Par identification on a : $\begin{cases} 2a - 4b = 0 \\ 2a + 4b = 10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{a = 1 \quad b = 2}$

2/ Démontrons qu'une fonction f est solution de (E) ssi $f-g$ est solution de l'équation (E') : $y'' + 2y' + 5y = 0$

$f-g$ solution de (E') équivaut à :

$(f-g)'' + 2(f-g)' + 5(f-g) = 0$

$\Leftrightarrow f''(x) + 2f'(x) + 5f(x) = g''(x) + 2g'(x) + 5g(x)$

$\Leftrightarrow f''(x) + 2f'(x) + 5f(x) = -10\sin x$

$\Leftrightarrow$ f solution de (E).

Conclusion

f est solution de (E) si et seulement si $f-g$ est solution de (E')

3/ a/ Résolution de (E') sur $\mathbb{R}$

(E') : $y'' + 2y' + 5y = 0$

Equation caractéristique :

$r^2 + 2r + 5 = 0$

$\Delta' = 1 - 5 = -4 = (2i)^2$

$r_1 = -1 - 2i \quad r_2 = -1 + 2i$

Les solutions de (E') sont les fonctions $x \mapsto (\alpha\cos 2x + \beta\sin 2x)e^{-x}$, $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

b/ Déduisons-en les solutions de (E).

f solution de $(E) \Rightarrow f-g$ solution de (E')

$\Leftrightarrow f(x) - g(x) = (\alpha\cos 2x + \beta\sin 2x)e^{-x}$

$\Leftrightarrow f(x) = (\alpha\cos 2x + \beta\sin 2x)e^{-x} + g(x)$

$\Leftrightarrow f(x) = (\alpha\cos 2x + \beta\sin 2x)e^{-x} + \cos x + 2\sin x$

Les solutions de (E) sont les fonctions :

$x \mapsto (\alpha\cos 2x + \beta\sin 2x)e^{-x} + \cos x + 2\sin x$

$(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$

4/ Déterminons la solution h de l'équation différentielle (E) dont la courbe (Ch) passe par le point A(0;3) et admet en ce point une tangente parallèle à la droite (Δ) : $y + 6x - 5 = 0$

$h(x) = (\alpha\cos 2x + \beta\sin 2x)e^{-x} + \cos x + 2\sin x$

$h'(x) = ((2\beta - \alpha)\cos 2x - (2\alpha + \beta)\sin 2x)e^{-x} - \sin x + 2\cos x$

$h(0) = \alpha + 1$

$h'(0) = 2\beta - \alpha + 2$

Les conditions ci-dessus se traduisent par :

$$\begin{cases} h(0) = 3 \\ h'(0) = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 1 = 3 \\ 2\beta - \alpha + 2 = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{cases}.$$

$h(x) = (2\cos 2x - 3\sin 2x)e^{-x} + \cos x + 2\sin x$

EXERCICE 14

On considère l'équation différentielle (E_λ) :

$y'' - 2\lambda y' + 4y = x^2 + (3\lambda + 8)x - 2\lambda^2 - 4\lambda + \frac{1}{2}$

où λ est un paramètre réel.

1./ Déterminons en fonction de λ les réels a, b et c tels que la fonction h_λ définie sur ℝ par : $h_\lambda(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E)

$h_\lambda(x) = ax^2 + bx + c$

$\Rightarrow h'_\lambda(x) = 2ax + b \Rightarrow h''_\lambda(x) = 2a.$

h_λ solution de (E) équivaut à :

$h''_\lambda(x) - 2\lambda h'_\lambda(x) + 4h_\lambda(x) = x^2 + (3\lambda + 8)x - 2\lambda^2 - 4\lambda + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2a - 2\lambda(2ax + b) + 4(ax^2 + bx + c) = x^2 + (3\lambda + 8)x - 2\lambda^2 - 4\lambda + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 4ax^2 + (4b - 4a\lambda)x + 2a - 2\lambda b + 4c = x^2 + (3\lambda + 8)x - 2\lambda^2 - 4\lambda + \frac{1}{2}$

Par identification on a :

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 4b - 4a\lambda = 3\lambda + 8 \\ 2a - 2\lambda b + 4c = -2\lambda^2 - 4\lambda + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \lambda + 2 \\ c = 0 \end{cases}$$

$a = \frac{1}{4}$	$b = \lambda + 2$	$c = 0$	$h_\lambda(x) = \frac{1}{4}x^2 + (\lambda + 2)x$

2./ Montrons qu'une fonction g est solution de (E) ssi $g - h_\lambda$ est solution de l'équation différentielle

$(E'_\lambda) : y'' - 2\lambda y' + 4y = 0$

$g - h_\lambda$ solution de (E'_λ) équivaut à :

$(g-h_\lambda)'' - 2\lambda(g-h_\lambda)' + 4(g-h_\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow g''(x) - 2\lambda g'(x) + 4g(x) = h''_\lambda(x) - 2\lambda h'_\lambda(x) + 4h_\lambda(x)$

$\Leftrightarrow g''(x) - 2\lambda g'(x) + 4g(x) = x^2 + (-2\lambda+8)x - 2\lambda^2 - 4\lambda + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ g solution de (E_λ).

Conclusion

Une fonction g est solution de (E_λ) si et seulement si, $g-h_\lambda$ est solution de (E'_λ).

3/ a/ Résolution de (E'_λ) suivant les valeurs du réel λ

(E'_λ) : $y'' - 2\lambda y' + 4y = 0$

Equation caractéristique :

$r^2 - 2\lambda r + 4 = 0$ (1)

$\Delta' = \lambda^2 - 4$.

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$ ou $\lambda = 2$.

Signe de Δ'

λ	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Δ'		$+$	0	$-$	0	$+$	

1er cas $\lambda \in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

$\Delta' > 0$; (1) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2.

Les solutions de (E'_λ) sont les fonctions

$x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

2e cas $\lambda \in]-2;2[$

$\Delta' < 0$; (1) admet deux solutions complexes conjuguées :

$r_1 = p + iq$ et $r_2 = p - iq$

Les solutions de (E'_λ) sont les fonctions

$x \mapsto (\alpha \cos qx + \beta \sin qx) e^{px}$; $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

3e cas $\lambda = -2$

(1) $\Leftrightarrow r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r = -2$

Les solutions de (E'_{-2}) sont les fonctions

$x \mapsto (\alpha x + \beta) e^{-2x}$ $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

4e cas $\lambda = 2$

(1) $\Leftrightarrow r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = 2$

Les solutions de (E_2) sont les fonctions

$x \mapsto (\alpha x + \beta) e^{2x}$ $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

b/ Résolution de (E_0)

(E'_0) : $y'' + 4y = 0$

$\Leftrightarrow y = \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$ $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

$h_0(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x$

g solution de $(E_0) \Leftrightarrow g - h_0$ solution de $(E'_0) \Rightarrow g(x) - h_0(x) = \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$

$\Leftrightarrow g(x) = h_0(x) + \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$

$\Leftrightarrow g(x) = \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x + \frac{1}{4}x^2 + 2x$

Les solutions de (E_0) sont les fonctions

$x \mapsto \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x + \frac{1}{4}x^2 + 2x$

Résolution de (E_2)

(E'_2) : $y'' - 4y' + 4y = 0$

$\Leftrightarrow y = (\alpha x + \beta) e^{2x}$, $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

g solution de $(E_2) \Leftrightarrow g - h_2$ solution de $(E'_2) \Leftrightarrow g(x) - h_2(x) = (\alpha x + \beta)e^{2x}$

$\Leftrightarrow g(x) = (\alpha x + \beta)e^{2x} + h_2(x)$

$h_2(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4x$

Les solutions de (E_2) sont les fonctions $x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + 4x$, $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$

Résolution de $(E_{5/2})$

(1) $\Rightarrow r^2 - 5r + 4 = 0$

$\Leftrightarrow r_1 = 1 ; r_2 = 4$

Les solutions de $(E'_{5/2})$ sont les fonctions : $x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{4x}$

$g - h_{5/2}$ solution de $(E'_{5/2}) \Leftrightarrow g$ solution de $(E_{5/2})$.

$\Leftrightarrow (g - h_{5/2})(x) = \alpha e^x + \beta e^{4x}$

$\Leftrightarrow g(x) = \alpha e^x + \beta e^{4x} + h_{5/2}(x)$

$h_{5/2}(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{2}x$

Les solutions de $(E_{5/2})$ sont les fonctions $x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{4x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{2}x$, $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$

c/ Déterminons la solution de (E_2) dont la courbe représentative passe par l'origine du repère et admet en ce point une tangente dirigée par $\vec{i}$

Posons :

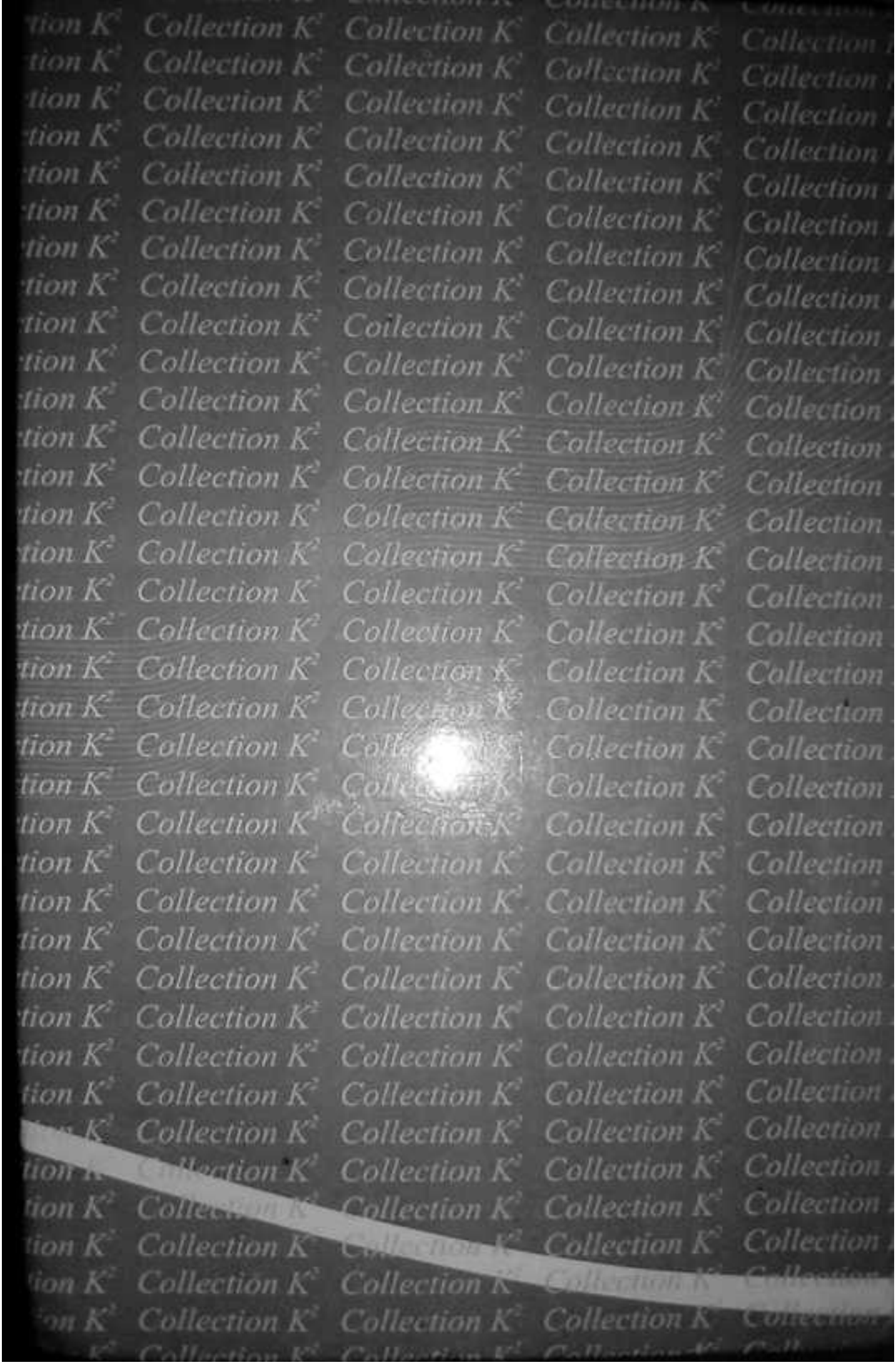
$g(x) = (\alpha x + \beta)e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + 4x$

$g'(x) = (2\alpha x + 2\beta + \alpha)e^{2x} + \frac{1}{2}x + 4$

$g(0) = \beta \quad g'(0) = 2\beta + \alpha + 4$

Les conditions de l'énoncé se traduisant par : $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ 2\beta + \alpha + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = -4 \end{cases}$

$$g(x) = -4xe^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + 4x$$


Collection K