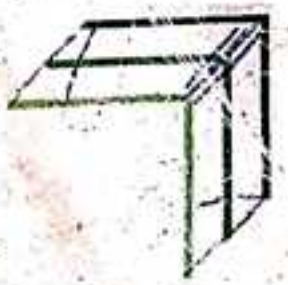
Collection Maths faciles

- Rappel du cours et points méthodes
- Exercices pour comprendre le cours
- Exercices corrigés pour s'auto-évaluer.

BAMPENA YONG E.



OSWALD

OSWALD

MATHEMATIQUES

Terminale SM

Volume 1

(Analyse et probabilités)

---

441 exercice et problèmes et corrigés et commentés par objectifs pour réussir:

- le baccalauréat SM
- La Préparation aux concours d'entrée dans les grandes écoles

eux.compredre le cours de maths ...es exercices

CAMEDIT



Scanned by CamScanner

Scanned by CamScanner

Collection Maths Faciles

Mieux comprendre le cours de Maths par les exercices.

- Rappel du cours et points méthodes
- Exercices pour comprendre le cours
- Exercices corrigés pour s'auto-évaluer.

441 exercices et problèmes corrigés et commentés, proposés par objectifs, pour :

- les baccalauréats C et E
- les concours d'entrée dans les grandes écoles

Conforme au programme
Terminale SM

Volume I

(Analyse et probabilités)

Par M. BAMPENA YONG. E.
Enseignant de mathématiques

Avec les conseils de :

- M. BITJOKA ETOUA Samuel	Inspecteur national de Maths
- Mme Alice KAMGA	Inspectrice nationale de maths
- M. Charles FOGUE	Inspecteur régional de maths (littoral)
- M. Simplice TANKOUA	Enseignant de mathématiques-Collège St Charles Borromée

Scanned by CamScanner

Sommaire :

pages

Présentation du manuel..... 10
Introduction 11

Chapitre 0 : Principe du raisonnement par récurrence 16 à 24

Rappel du cours.
Exercices pour comprendre le cours

Chapitre 1 : Etude générale des fonctions 25 à 104

Rappel du cours.
Exercices pour comprendre le cours
A – Etudier la limite d'une fonction
1 – Etudier la limite d'une fonction rationnelle
2 – Etudier la limite d'une composée de fonctions
3 – Lever l'indétermination dans le cas des fonctions trigonométriques
4 – Utiliser la comparaison de fonctions pour calculer les limites
5 – Lever certaines indéterminations dans le cas des fonctions irrationnelles
6 – Utiliser la dérivabilité pour calculer la limite
B – Etudier les branches infinies – déterminer les asymptotes
C – Etudier la continuité en un réel – étudier le prolongement par continuité
1 – Etudier la continuité en un réel
2 – Montrer qu'une fonction admet un prolongement par continuité
D – Etudier la dérivabilité en un réel – préciser les tangentes et les demi-tangentes
E – Appliquer l'inégalité des accroissements finis
F – Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue
G – Prouver que l'équation f(x) = a admet des solutions dans un intervalle donné
– Encadrer les solutions éventuelles
H – Déduire le signe d'une fonction à partir de son tableau de variation
I – Etudier les fonctions continues strictement monotones et leurs réciproques
J – Calculer avec les puissances rationnelles
K – Déterminer des primitives
L – Etudier quelques fonctions
Exercices pour s'auto-évaluer
Exercices pour s'auto-évaluer-Solutions

Chapitre 2 : Fonctions logarithmes 105 à 158

Rappel du cours.
Exercices pour comprendre le cours
A – Calculer avec le logarithme népérien
B – Déterminer l'ensemble de définition des fonctions faisant intervenir la fonction logarithme népérien
C – Résoudre les équations et inéquations faisant intervenir le logarithme népérien
D – Etudier les limites des fonctions faisant intervenir la fonction logarithme népérien
E – Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions faisant intervenir la fonction logarithme népérien
F – Calculer les dérivées des fonctions faisant intervenir la fonction logarithme népérien
G – Déterminer les primitives des fonctions faisant intervenir la fonction logarithme népérien
H – Etudier les fonctions faisant intervenir la fonction logarithme népérien

Scanned by CamScanner

Exercices pour s'auto-évaluer
Exercices pour s'auto-évaluer-Solutions

Chapitre 3 : Fonctions exponentielles - fonctions puissances réelles 159 à 222

Rappel du cours.
Exercices pour comprendre le cours
A – Calculer avec les exponentielles
B – Résoudre les équations et inéquations faisant intervenir l'exponentielle
C – Etudier les limites des fonctions faisant intervenir la fonction exponentielle
D – Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions faisant intervenir la fonction exponentielle
E – Calculer les dérivées des fonctions faisant intervenir la fonction exponentielle
F – Calculer les primitives des fonctions faisant intervenir la fonction exponentielle
I – Etudier des fonctions faisant intervenir la fonction exponentielle
J – Etudier autres fonctions exponentielles et les fonctions puissances réelles
1 – Calculer
2 – Résoudre des équations et inéquations
3 – Etudier les limites
4 – Déterminer les dérivées et les primitives
5 – Etudier des fonctions
Exercices pour s'auto-évaluer
Exercices pour s'auto-évaluer-Solutions

Chapitre 4 : Suites numériques 223 à 284

Rappel du cours.
Exercices pour comprendre le cours
A – Etudier le sens de variation d'une suite
1 – En utilisant le calcul de $u_{n+1} - u_n$
2 – En utilisant le calcul du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$
3 – En utilisant un raisonnement par récurrence
4 – En utilisant les variations d'une fonction
B – Majorer, minorer ou borner une suite
1 – En utilisant les opérations sur les encadrements
2 – En utilisant un raisonnement par récurrence
3 – En exploitant les variations d'une fonction
C – Etudier la convergence d'une suite
1 – En exploitant les limites usuelles
2 – En utilisant les propriétés de comparaison
3 – En utilisant la monotonie de la suite
4 – Suites définies par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$
5 – Suites définies par la relation $u_n = f(n)$
D – Etudier des suites arithmétiques et des suites géométriques
1 – Montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique et donner son expression explicite
2 – Calculer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique
Exercices pour s'auto-évaluer
Exercices pour s'auto-évaluer-Solutions

Chapitre 5 : Intégration 285 à 370

Rappel du cours.

Scanned by CamScanner

Exercices pour comprendre le cours
A – Calculer une intégrale en utilisant les primitives
1 – La primitive peut être évidente
2 – Cas des fonctions rationnelles
3 – Cas des fonctions trigonométriques
B – Calculer une intégrale en utilisant la formule d'intégration par parties
C – Calculer une intégrale en utilisant
1 – La relation de Chasles
2 – La parité de la fonction à intégrer
D – Calculer une intégrale en utilisant un changement de variable affine
E – Etudier une fonction définie à l'aide d'une intégrale
F – Calculer une aire, un volume, une longueur
G – Déterminer la valeur moyenne d'une fonction
H – Majorer, minorer, encadrer une intégrale – donner une valeur moyenne d'une intégrale
I – Etudier une suite définie à l'aide d'une intégrale
J – Encadrer une intégrale par la méthode des rectangles
Exercices pour s'auto-évaluer
Exercices pour s'auto-évaluer-Solutions

Chapitre 6 : Equations différentielles 371 à 413

Rappel du cours.
Exercices pour comprendre le cours
A – Résoudre une équation différentielle linéaire
1 – Du premier ordre sans second membre
2 – Du second ordre sans second membre
B – Déterminer des solutions particulières d'une équation différentielle
C – Résoudre certaines équations différentielles linéaires avec second membre
D – Résoudre des problèmes conduisant à la résolution d'une équation différentielle
E – Résoudre d'autres types d'équations différentielles
Exercices pour s'auto-évaluer
Exercices pour s'auto-évaluer-Solutions

Chapitre 7 : Calcul des probabilités 414 à 452

Rappel du cours.
Exercices pour comprendre le cours
A – Calcul des probabilités
1 – En utilisant la formule : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
2 – Sachant qu'il n'y a pas équiprobabilité
3 – Sachant qu'il y a équiprobabilité
4 – Sachant que les événements sont indépendants
5 – En utilisant le schéma de Bernoulli
6 – En utilisant les formules des probabilités conditionnelles
B – Etudier les variables aléatoires réelles
1 – Déterminer la loi de probabilité et la fonction de répartition d'une V.A.R.
2 – Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type d'une V.A.R.
Exercices pour s'auto-évaluer
Exercices pour s'auto-évaluer-Solutions

Scanned by CamScanner

Présentation du manuel

Ce livre a pour objectif la préparation des épreuves écrites aux baccalauréats scientifiques de spécialité mathématiques ainsi que la préparation à une entrée dans l'enseignement supérieur.

Il a deux volumes :

- ✓ Le premier volume porte sur l'analyse et les probabilités
- ✓ Et le second porte sur la géométrie, l'arithmétique et les nombres complexes.

Ce dernier volume contient un complément sur la géométrie vectorielle et les applications affines.

Le premier volume que voici, contient une synthèse du cours par chapitre et 441 exercices de niveaux variés entièrement corrigés, regroupés par objectifs et couvrant tous les programmes de mathématiques des classes de Terminales SM. Les exercices sans triangle, applications directes du cours, demandent à l'élève d'exercer des capacités exigibles, ceux indiqués par un triangle nécessitent une technique plus élaborée et enfin, ceux indiquées par deux triangles sont particulièrement difficiles et demandent à l'élève un effort de recherche important.

L'esprit de ce manuel est d'apporter aux élèves des Terminales SM, les techniques usuelles de calculs, l'acquisition de méthodes de raisonnement en répondant à deux exigences :

- apporter une préparation efficace à l'examen du baccalauréat SM.
- donner des exercices d'un niveau supérieur (mais accessible) pour se préparer à une entrée dans l'enseignement supérieur.

Chaque chapitre est découpé en savoir-faire fondamentaux pour permettre à l'élève de s'entraîner sur des situations précises et pour faciliter sa période de révision.

Je compte sur les professeurs et sur les élèves pour me faire part de leurs commentaires, de leurs critiques et de leurs suggestions ; je les en remercie d'avance.

Remerciements à tous les inspecteurs pédagogiques, collègues et amis qui par leurs remarques m'ont accompagné durant l'élaboration de cette collection.

Scanned by CamScanner

INTRODUCTION

AVANT L'EXAMEN, UNE METHODE DE TRAVAIL EFFICACE

Si, par chance (.. !!) vous lisez ce texte alors que l'année scolaire n'est pas encore trop avancée, voici quelques conseils pour être plus performant.

➢ **A la fin de chaque chapitre traité en cours, faites une fiche de synthèse.**

Certes il existe des résumés tout prêts dans les manuels mais aussi excellents soient-ils, ils ne remplacent pas votre propre travail : la réalisation de cette fiche sera l'occasion d'apprendre votre cours, d'en faire ressortir les points importants.

➢ **Faites des fiches de méthodes.**

Par exemple : « comment étudier le sens de variation d'une suite ? ». Vous y dresserez la liste de toutes les méthodes dont vous disposez pour résoudre ce type de question. Ainsi face à une question de ce type, vous saurez ce qu 'il convient de mettre en œuvre pour y répondre.
De plus, notez toutes les "astuces" que votre professeur ne manquera pas de vous indiquer au profil de l'année.

➢ **Faites une correction active.**

A chaque remise d'un devoir corrigé, repérez vos erreurs et analysez-les.
Commencez par en déterminer la nature :

- erreur de calcul,
- manque de connaissances,
- affirmation non démontrée,
- erreur de raisonnement,
- rédaction incorrecte,
- erreur d'étourderie...

Analysez-les sans complaisance. Trop d'élèves considèrent comme des étourderies des erreurs qui ne sont que la traduction d'une incompréhension plus profonde.

Ensuite, cherchez à les comprendre, seul d'abord, puis, si cela ne suffit pas à vous éclairer, essayez le travail en binôme, souvent fructueux. N'hésitez pas à demander, avec diplomatie, un complément d'information à votre professeur si vous avez l'impression d'avoir "tout comme dans le corrigé"... sans pour autant avoir les points correspondants. Il y a certainement quelque chose qui vous a échappé !

Enfin, corrigez-les.
Une correction efficace comprend non seulement la bonne réponse à la question (établie éventuellement avec plusieurs méthodes) mais aussi des éléments d'analyse de l'erreur commise destinés à éviter qu'elle ne se reproduise.

PENDANT L'EXAMEN, UNE STRATÉGIE GAGNANTE

➢ **Lire le problème en entier.**

Procédez à deux lectures successives : la première globale, la seconde pas à pas pour effectuer le décryptage de l'énoncé.

Scanned by CamScanner

Contrairement à une idée trop répandue parmi les élèves, ce n'est pas du temps perdu ! Bien au contraire, c'est un investissement profitable.
Ainsi, vous pourrez :

- comprendre l'esprit du sujet pour voir quelles méthodes vont être mises en jeu,
- percevoir la structure du problème, les liens logiques, les questions indépendantes etc.
- vous faire une idée relative de la difficulté des questions : application directe du cours, question de « réflexion », question déjà rencontrée au cours de l'année ?
- voir si les questions placées plus bas dans un exercice ne fournissent pas la réponse à une question ou une indication sur une méthode à utiliser pour une question placée en début de l'exercice.

➢ **Utiliser deux sortes de brouillons.**

Non, un brouillon n'est pas un instrument préhistorique et son emploi peut se révéler fort utile.
La première feuille vous **servira à stocker les hypothèses et réponses successives.** Ainsi vous n'aurez plus besoin de rechercher dans vos multiples copies la réponse de la question 2)b) lorsque vous en aurez besoin !
Une seconde feuille **servira pour les calculs intermédiaires, les essais...**
En revanche, il est indispensable de rédiger directement au propre. Si votre travail au brouillon est assez approfondi, il n'y aura pas de problème.

➢ **Soigner la rédaction.**

Ne négligez pas les qualités matérielles du devoir.
Certes une copie bien présentée mais remplie d'inepties ne vous permettra pas d'atteindre la moyenne. Néanmoins, certaines copies à peine lisibles risquent d'être sous-évaluées par un examinateur exaspéré et migraineux. Alors veillez à :

- l'écriture ;
- au soin (on peut barrer, mais proprement...) ;
- aérer votre devoir en sautant des lignes entre les questions ;
- faire des figures claires et assez grandes.

Trois critères d'une rédaction correcte :

- Les réponses aux questions sont clairement formulées et mises en évidence (soulignées, encadrées) ;
- le fil conducteur de la démonstration et les étapes intermédiaires apparaissent clairement ;
- tout ce qui est affirmé est justifié.

Néanmoins, gardez toujours à l'esprit que pour une question donnée, il peut exister plusieurs rédactions correctes. Vous l'aviez certainement déjà constaté au lycée ou au collège si au cours de ces années, vous avez eu différents enseignants de mathématiques.
Vous le retrouverez dans cet ouvrage : pour certains exercices, plusieurs corrections seront proposées.
Cela peut différer de vos propres habitudes. Cependant, c'est un repère intéressant pour vous indiquer quels niveaux d'exigence vous pourrez rencontrer le jour de l'examen.

➢ **Mettez à profit les dernières minutes avant de rendre votre copie pour :**

- relire globalement et faire la chasse aux étourderies ;
- vérifier la cohérence des résultats et corriger ou signaler toute anomalie ;
- dans la mesure du possible s'auto-vérifier. Cette démarche sera mise en évidence le plus souvent possible dans cet ouvrage.

Scanned by CamScanner

RÉPONSES A UN CERTAIN NOMBRE DE QUESTIONS

Voici, pêle-mêle, les réponses à quelques questions que vous n'avez jamais osé poser en classe.

Tous les résultats du cours sont-ils dans le formulaire ?

Non ! C'est pour cela qu'il est important de se familiariser avec le formulaire au cours de l'année afin d'en connaître le contenu et les limites.

Ainsi, on pourra apprendre par cœur les formules qui n'y figurent pas et se familiariser avec les énoncés dont la formulation est différente de celle à laquelle on est habitué.

N'oublier pas cependant qu'il ne s'agit que d'un aide-mémoire et que cela ne vous dispense pas d'apprendre votre cours.

Peut-on admettre un résultat seulement conjecturé?

Cette situation est différente de celle que nous avons déjà évoquée : admettre un résultat donné par le texte.

Prenons un exemple. Dans la situation précédente, le texte dirait :

« Montrer que pour tout réel x, f '(x) est positif » alors que dans le cas actuel, la question reste ouverte : « quel est le signe de f '(x) ? ».

Or, grâce à votre calculatrice, vous pensez que f '(x) est positif mais vous êtes incapable de le démontrer. Si ce résultat bloque votre poursuite du problème, alors, sans hésiter, admettez-le (en le disant clairement) et continuez votre résolution.

Comment rédiger la démonstration d'une équivalence ?

Point délicat s'il en est, la démonstration d'équivalences fait souvent des ravages dans les copies d'élèves.

On y rencontre principalement deux types d'écueils.

- L'élève considère comme équivalentes des propositions qui ne le sont pas. Ainsi, pour a et b réels quelconques, $a^2 = b^2$ n'est pas équivalent à $a = b$ puisque $a^2 = b^2$ implique $a = b$ ou $a = -b$.
- Le fond mathématique semble correct mais l'emploi malencontreux d'un "donc" sème le doute dans l'esprit du correcteur : implication ? équivalence ?

Une solution sage consiste alors à rédiger en deux temps.

Pour montrer que les propositions P et Q sont équivalentes, on montrera successivement que P implique Q, puis que Q implique P.

Un seul inconvénient à signaler : une telle rédaction est souvent assez longue ce qui conduit certains élèves à y renoncer, à tort.

Attention aussi à l'emploi des symboles logiques $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$.

Ils ont connu leur heure de gloire dans les programmes antérieurs lorsqu'une initiation à la logique figurait au programme de seconde.

Comme ce n'est plus le cas, le programme actuel précise :

« Les élèves peuvent utiliser les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ mais il convient d'éviter tout recours systématique à ces symboles ».

En conséquence, dans cet ouvrage, il leur sera souvent préféré une rédaction plus littéraire.

Le correcteur peut-il me retirer des points si je ne respecte pas la méthode demandée ?

Dans un certain nombre d'exercices, on trouve des questions débutant par « en déduire que ». Ainsi dans l'exercice suivant :

a) Montrer que le point K est le milieu des segments [BD] et [AC].

b) Montrer que $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$.

c) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

L'examinateur attend alors clairement que vous exploitiez les réponses des questions a) et b). Si vous ne le faites pas, vous serez pénalisé même si votre démonstration est par ailleurs correcte.

Scanned by CamScanner

En effet, l'évaluation porte ici sur deux points : la détermination de la nature de ABCD et votre aptitude à exploiter les résultats des questions antérieures dans ce but. Si vous procédez autrement, même avec une démonstration plus simple à vos yeux, vous ne remplissez pas le contrat : d'où une pénalisation.

Un cas un peu différent, du moins en apparence : l'énoncé n'emploie pas l'expression "déduire" mais après la question mentionne "on pourra utiliser.." ou "en remarquant que" là aussi, il vous est très fortement conseillé d'exploiter la suggestion du texte.
En bref, exploiter au maximum les indications données par l'énoncé sur les méthodes à mettre en œuvre. En vous en éloignant, vous prenez le risque d'une pénalisation facilement évitable.

Dois-je rédiger plusieurs fois une démonstration identique ?
Il arrive que dans certains problèmes, on soit confronté plusieurs fois à des démonstrations identiques.
Commencez par vous assurez qu'on est réellement dans la même situation.
N'y a-t-il pas un détail subtil qui vous a échappé ?
Si vraiment c'est le cas, rédigez de manière précise la première démonstration puis abrégez les démonstrations suivantes en utilisant une formule comme "on démontrerait de même que.. !!

Faut-il recopier le texte ?
NON ! Certains élèves confondent à tort recopiage du texte et rédaction.
Vous pouvez, si vous le souhaitez présenter les hypothèses d'un problème avant de commencer la rédaction mais un recopiage mot à mot du texte n'apporte rien.
En revanche, l'examinateur appréciera que la réponse à chaque question débute par un titre. Il pourra ainsi se repérer facilement dans la progression du problème. Cette démarche sera utilisée dans certaines solutions de cet ouvrage.

ET ENFIN, LES ERREURS A NE PAS COMMETTRE

Voici, enfin, le récapitulatif de quelques erreurs qui peuvent vous coûter cher.

- **Mal comprendre le préambule d'un problème.**

Un certain nombre de problèmes commencent par une phrase destinée à planter le décor. Ainsi "on se propose de placer les points A, B et C dans un repère à l'aide d'un compas" ne doit pas vous inciter à vous jeter sur votre propre compas pour construire immédiatement la figure. La construction effective des points A, B et C n'interviendra que plusieurs questions plus loin après une étude sur une rotation ...
Il ne s'agissait que d'annoncer le but recherché. Il fallait ensuite se laisser guider par l'énoncé.

- **Anticiper la réponse à une question.**

On ne le répétera jamais assez ! Si on vous demande de prouver à la question 5) qu'une fonction f est croissante, ce n'est pas normal de l'avoir prouvé à la question 2). Il y avait alors certainement une autre manière de procéder qui vous éviterait de donner trop tôt la réponse à une question postérieure. Vous risquez alors une double pénalisation : à la question 2) pour ne pas avoir respecté la méthode attendue puis à la question 5) pour ne pas y donner la réponse prévue !
Normalement, il y a un conducteur logique dans un problème et si votre résolution ne le respecte pas, cela vaut la peine d'y réfléchir.

- **Laissez subsister des incohérences.**

Contradiction entre le tableau de variation d'une fonction et sa courbe représentative, probabilité supérieur à 1, cosinus d'un angle égal à $2+\sqrt{3}$ ...

Les examinateurs au baccalauréat en rencontre chaque année. Or, dans la majorité des cas, les élèves sont conscients qu'il y a un problème mais ne retrouvent pas leur erreur et continuent...

Scanned by CamScanner

Traquez les incohérences sans pitié. Relisez-vous, recherchez l'erreur et si vous ne la retrouvez pas dans le temps imparti, signaler que vous avez conscience du problème. Il y aura certes encore une erreur mais pas une absurdité.

- **Ne maltraiter pas (trop) l'orthographe, en particulier les noms des mathématiciens.**

Entendre parler de la relation de Shall est encore amusant chez un collégien de troisième mais plutôt ridicule chez un presque bachelier.
Renoncez définitivement à employer des abréviations. Ni nbre, ni fct, ni Mq, ni Dq ... n'ont leur place dans une copie d'examen.

- **Eviter le gaspillage de points.**

Une copie à trous où l'élève a papillonné à la recherche des points faciles devient vite lassante pour l'examinateur qui a bien du mal à évaluer le niveau réel du candidat.

Mais soyez sans crainte, après avoir travaillé d'arrache-pied les exercices proposés qui suivent et les méthodes qui s'y rattachent, l'avenir ne peut être que radieux !

BON COURAGE !

Cette introduction est inspirée du « GUIDE pour la préparation au BAC » de Bénédicte BOURGEOIS, Marc LANGLET, Bernard MEYSSIREL et Claire TCHOBROUTSKY.
Des éditions ellipses.

Du même Auteur et de la même collection :

1. **Maths types Terminale SM – Volume 2- Arithmétiques, Nombres complexes & Géométrie**
2. **Maths types Terminale SE**
3. **Maths types Prémière SM – Volume 1- Analyse, Dénombrements & Statistiques**
4. **Maths types Prémière SM – Volume 2- Géométrie & Algèbre linéaire**
5. **Maths types Prémière SE**
6. **Maths types Seconde S**
7. **Maths types Troisième**

Scanned by CamScanner

0 RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

RAPPEL DU COURS

Le raisonnement par récurrence permet de montrer qu'une propriété P_n, qui dépend d'un entier naturel n, est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 donné.

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ (n_0 étant un entier naturel donné), on peut respecter les quatre étapes suivantes :

- **1ère étape :** on identifie la propriété P_n.
- **2e étape :** on vérifie que P_{n_0} est vraie.
- **3e étape :** on suppose que P_k est vraie pour un certain entier $k \geq n_0$ ***(cette supposition est appelée l'hypothèse de récurrence).***

  On montre qu'alors P_{k+1} est aussi vraie ***(On dit alors que la propriété P_n est héréditaire).***
- **4e étape :** lorsque les 2e et 3e étapes sont satisfaites, on conclut, d'après le principe du raisonnement par récurrence que, P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Scanned by CamScanner

EXERCICES POUR COMPRENDRE LE COURS

Exercice 1

Montrer par récurrence que : pour tout entier naturel non nul n, $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Solution 1

- Considérons la propriété P_n : « $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ».
- Pour n = 1 :

Le membre de gauche est : 1

Le membre de droite est : $\frac{1\times(1+1)}{2}=1$. D'où P_1 est vraie.

- Supposons P_k vraie pour un certain entier naturel non nul k (c'est-à-dire $1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$), et montrons qu'alors P_{k+1} est aussi vraie (c'est-à-dire $1+2+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$).

D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$.

Ainsi en ajoutant aux deux membres de l'égalité k + 1, on a :

$$1+2+\ldots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

D'où P_{k+1} est aussi vraie.

- On peut alors conclure, d'après le principe du raisonnement par récurrence que : pour tout entier naturel non nul n, $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 2

Montrer par récurrence que : pour tout entier naturel n, $1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, avec q différent de 0 et 1.

Solution 2

- Considérons la propriété P_n : « $1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ».
- Pour n = 0 :

Le membre de gauche est 1 et celui de droite est $\frac{1-q}{1-q}=1$. D'où P_0 est vraie.

- Supposons P_k vraie pour un certain entier naturel k (c'est-à-dire $1+q+q^2+\ldots+q^k=\frac{1-q^{k+1}}{1-q}$), et montrons qu'alors P_{k+1} est aussi vraie (c'est-à-dire $1+q+q^2+\ldots+q^k+q^{k+1}=\frac{1-q^{k+2}}{1-q}$).

D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $1+q+q^2+\ldots+q^k=\frac{1-q^{k+1}}{1-q}$.

Ainsi, en ajoutant aux deux membres de l'égalité q^{k+1}, on a :

$$1+q+q^2+\ldots+q^k+q^{k+1}=\frac{1-q^{k+1}}{1-q}+q^{k+1}=\frac{1-q^{k+1}+q^{k+1}-q^{k+2}}{1-q}=\frac{1-q^{k+2}}{1-q}.$$

Scanned by CamScanner

D'où P_{k+1} est aussi vraie.

- On peut alors conclure, d'après le principe du raisonnement par récurrence que : pour tout entier naturel n, on a :

$1+q+q^2+\ldots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Point méthode :

Les propriétés démontrées aux exercices 1 et 2 sont très importantes. Car elles interviennent dans grand nombre d'exercices. Elles sont donc à mémoriser.

Exercice 3

Montrer par récurrence que : pour tout entier naturel non nul n, $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solution 3

- Considérons la propriété P_n : « $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».
- Pour n = 1 :

Le membre de gauche est : $1^2 = 1$.

Le membre de droite est : $\dfrac{1\times(1+1)(2\times1+1)}{6}=1$. Puisque $\dfrac{1\times(1+1)(2\times1+1)}{6}=1^2$, alors P_1 est vraie.

- Supposons P_k vraie pour un entier naturel non nul k (c'est-à-dire $1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$), et montrons qu'alors P_{k+1} est aussi vraie (c'est-à-dire $1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$).

D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Ainsi en ajoutant aux deux membres de l'égalité $(k+1)^2$, on a :

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}.$$

Donc, $1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\dfrac{2(k+1)\left(k^2+\frac{7}{2}k+3\right)}{6}=\dfrac{2(k+1)\left[\left(k+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]}{6}=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

D'où P_{k+1} est aussi vraie.

- On peut alors conclure que, pour tout entier naturel non nul n, $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 4

On pose $S_n=\sum_{p=1}^{n}p.(p!)$ pour n entier naturel non nul.

Montrer par récurrence que : pour tout entier naturel non nul n, $S_n = (n+1)! - 1$.

Solution 4

- Considérons la propriété P_n : « $S_n = (n+1)! - 1$ ».
- Pour n = 1 :

Le membre de gauche est : $S_1=\sum_{p=1}^{1}p.(p!)=1\times(1!)=1$.

Le membre de droite est : $(1+1)! - 1 = 1$. D'où P_1 est vraie.

- Supposons P_k vraie pour un certain entier naturel non nul k (c'est-à-dire, $S_k = (k+1)! - 1$), et montrons qu'alors P_{k+1} est aussi vraie (c'est-à-dire, $S_{k+1} = (k+2)! - 1$).

D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $S_k = (k+1)! - 1$.

Ainsi en ajoutant aux deux membres de l'égalité $(k+1)!(k+1)$, on a :

Scanned by CamScanner

$S_k + (k+1)!(k+1) = (k+1)! - 1 + (k+1)!(k+1) = (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1$.

Or $S_{k+1} = \sum_{p=1}^{k+1} p.(p!) = \sum_{p=1}^{k} p.(p!) + (k+1)!(k+1) = S_k + (k+1)!(k+1)$, d'où, $S_{k+1} = (k+2)! - 1$.

D'où P_{k+1} est aussi vraie.

- On peut alors conclure, d'après le principe du raisonnement par récurrence que : pour tout entier naturel non nul n, $S_n = (n+1)! - 1$.

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout n entier naturel $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2}$.

Montrer par récurrence que : pour tout entier naturel n, $u_n = 4\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2$.

Solution 5

- Considérons la propriété P_n : « $u_n = 4\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2$ ».
- Pour n = 0 :

D'après l'énoncé, $u_0 = 2$. Or $4\left(\frac{3}{4}\right)^0 - 2 = 2$. Donc $u_0 = 4\left(\frac{3}{4}\right)^0 - 2$. D'où P_0 est vraie.

- Supposons P_k vraie pour un certain entier naturel k (c'est-à-dire, $u_k = 4\left(\frac{3}{4}\right)^k - 2$), et montrons qu'alors P_{k+1} est aussi vraie (c'est-à-dire, $u_{k+1} = 4\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} - 2$).

D'après l'énoncé, $u_{k+1} = \frac{3}{4}u_k - \frac{1}{2}$. Or d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $u_k = 4\left(\frac{3}{4}\right)^k - 2$.

D'où $u_{k+1} = \frac{3}{4}\left(4\left(\frac{3}{4}\right)^k - 2\right) - \frac{1}{2} = 4\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} - 2$.

D'où P_{k+1} est aussi vraie.

- On conclut, d'après le principe du raisonnement par récurrence que : pour tout entier naturel n, $u_n = 4\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2$.

Exercice 6 ►►

Démontrer que tout entier n supérieur ou égal à 24 peut s'écrire sous la forme : n = 5a + 7b, où a et b sont entiers naturels

Solution 6

- Considérons la propriété P_n : « n = 5a + 7b où a et b sont des entiers naturels ».
- Pour n = 24 :

  $24 = 5\times2 + 7\times2$. D'où P_{24} est vraie.

- Supposons P_k vraie pour un certain entier naturel $k \geq 24$ (c'est-à-dire, k = 5a + 7b où a et b sont des entiers naturels), et montrons qu'alors P_{k+1} est aussi vraie (c'est-à-dire, k + 1 = 5a' + 7b' où a' et b' sont des entiers naturels).

D'après l'hypothèse de récurrence, on a : k = 5a + 7b. Donc k + 1 = 5a + 7b + 1.

Si $b \geq 2$, alors on peut écrire k + 1 = 5a + 7b + 15 − 14 = 5(a + 3) + 7(b − 2) = 5a' + 7b', avec a' = a + 3 et b' = b − 2 Puisque a et b sont des entiers naturels et b > 1, alors a' et b' sont des entiers naturels.

Si $b \leq 1$, alors puisque $k \geq 24$, on a obligatoirement $a \geq 4$.

On peut alors écrire k + 1 = 5a + 7b + 1 = 5a + 7b + 21 − 20 = 5(a − 4) + 7(b + 3) = 5a' + 7b', où a' = a − 4 et b' = b + 3. Puisque a et b sont des entiers naturels et $a \geq 4$, alors a' et b' sont des entiers naturels.

Scanned by CamScanner

Finalement, $k + 1 = 5a' + 7b'$, où a' et b' sont des entiers naturels. D'où P_{k+1} est aussi vraie.

- On peut alors conclure, d'après le principe du raisonnement par récurrence que : pour tout entier naturel n avec $n \geq 24$, $n = 5a + 7b$ où a et b sont des entiers naturels.

Exercice 7

Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle I. Noter que $f^0(x) = 1$.

Prouver que la fonction f^n est dérivable sur I pour tout entier naturel n non nul et que : $[f^n]'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x)$.

Solution 7

- Considérons la propriété P_n : « f^n est dérivable sur I et que : $[f^n]'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x)$ ».
- Pour n = 1 :

Par définition de f, f est dérivable sur I et $f'(x) = 1 \times f^0(x)f'(x)$. D'où P_1 est vraie.

- Supposons P_k vraie pour un certain entier naturel $k \geq 1$ (c'est-à-dire, f^k est dérivable et que : $[f^k]'(x) = kf^{k-1}(x)f'(x)$), et montrons qu'alors P_{k+1} est aussi vraie (c'est-à-dire, f^{k+1} est dérivable et que : $[f^{k+1}]'(x) = (k + 1)f^k(x)f'(x)$).

$f^{k+1} = f^k \times f$. Par hypothèse de récurrence, f^k est dérivable sur I et d'après l'énoncé, f est dérivable sur I, donc f^{k+1} est un produit de fonctions dérivables sur I, donc f^{k+1} est dérivable sur I.

Et $[f^{k+1}]'(x) = [f^k \times f]'(x) = [f^k]'(x) \times f(x) + f^k(x) \times f'(x)$

Or d'après l'hypothèse de récurrence, $[f^k]'(x) = kf^{k-1}(x)f'(x)$, alors,

$[f^{k+1}]'(x) = kf^{k-1}(x)f'(x) \times f(x) + f^k(x) \times f'(x) = kf^k(x)f'(x) + f^k(x) \times f'(x) = (k + 1)f^k(x)f'(x)$.

D'où P_{k+1} est aussi vraie.

- On peut alors conclure, d'après le principe du raisonnement par récurrence que : pour tout entier naturel non nul n, f^n est dérivable sur I et que : $[f^n]'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x)$.

Exercice 2 ▶▶

Soit x un nombre réel non multiple de 2π .

Montrer par récurrence que : pour tout entier naturel non nul n : $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$.

Solution 8

- Considérons la propriété P_n : « $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$ ».
- Pour n = 1 :

Le membre de gauche est : $\frac{1}{2} + \cos x$.

Le membre de droite est : $\frac{\sin\left(x+\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin x\cos\frac{x}{2} + \cos x\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\cos x = \cos^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos x$.

Donc $\frac{\sin\left(x+\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}} = \cos^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2} + \cos x$. D'où P_1 est vraie.

- Supposons P_k vraie, pour un entier naturel non nul k (ie. $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos kx = \frac{\sin\left((2k+1)\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$) et,

Scanned by CamScanner

montrons qu'alors P_{k+1} est aussi vraie (ie. $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos kx+\cos(k+1)x=\frac{\sin\left((2k+3)\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$).

D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos kx=\frac{\sin\left((2k+1)\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$.

$$\frac{1}{2}+\cos x+\ldots+\cos kx+\cos(k+1)x=\frac{\sin\left((2k+1)\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}+\cos(k+1)x=\frac{\sin\left((2k+1)\frac{x}{2}\right)+2\cos[(k+1)x]\times\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Or $2\sin a\cos b=\sin(a+b)+\sin(a-b)$, alors

$$2\cos[(k+1)x]\times\sin\frac{x}{2}=\sin\left[\frac{x}{2}+(k+1)x\right]+\sin\left[\frac{x}{2}-(k+1)x\right]=\sin\left[(2k+3)\frac{x}{2}\right]-\sin\left[(2k+1)\frac{x}{2}\right].$$

D'où, $\frac{1}{2}+\cos x+\ldots+\cos kx+\cos(k+1)x=\frac{\sin\left((2k+1)\frac{x}{2}\right)+\sin\left[(2k+3)\frac{x}{2}\right]-\sin\left[(2k+1)\frac{x}{2}\right]}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\left[(2k+3)\frac{x}{2}\right]}{2\sin\frac{x}{2}}$.

D'où P_{k+1} est aussi vraie.

- On peut alors conclure, d'après le principe du raisonnement par récurrence que : pour tout entier naturel non nul n,

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Exercice 9

Démontrer que, pour tout entier supérieur ou égal à 5, $2^n > n^2$.

Solution 9

- Considérons la propriété P_n : « $2^n > n^2$ ».
- Pour n = 5 : $2^5 = 32$ et $5^2 = 25$. Puisque 32 > 25, alors P_5 est vraie.
- Supposons P_k vraie pour un certain entier naturel $k \geq 5$ (c'est-à-dire, $2^k > k^2$) et, montrons qu'alors P_{k+1} est aussi vraie (c'est-à-dire, $2^{k+1} > (k+1)^2$).

Par hypothèse, on a $2^k > k^2$. Donc en multipliant par 2, on a : $2^{k+1} > 2k^2$. (1)

Comparons alors $2k^2$ et $(k+1)^2$:

On a $2k^2-(k+1)^2 = k^2-2k-1 = (k-1)^2-2$.

Puisque k > 4, alors k – 1 > 3, donc $(k-1)^2 > 9$ donc $(k+1)^2-2 > 7$.

D'où $2k^2-(k-1)^2 > 0$, donc $2k^2 > (k+1)^2$. (2)

Des inégalités (1) et (2), on a : $2^{k+1} > 2k^2 > (k+1)^2$. D'où $2^{k+1} > (k+1)^2$.

D'où P_{k+1} est aussi vraie.

- On conclut, d'après le principe du raisonnement par récurrence que : pour tout entier naturel $n \geq 5$, $2^n > n^2$.

Point méthode :
Dans les démonstrations par récurrence d'inégalités (du type $a < b$ ou $a \leq b$), on peut dans grand nombre de cas, pour montrer l'hérédité (c'est-à-dire le passage de P_k à P_{k+1}), faire intervenir la propriété suivante : si $c < d$ et $d < e$, alors on a : $c < e$ (ou si $c \leq d$ et $d \leq e$, alors $c \leq e$).

Exercice 10

Montrer que, pour tout entier naturel non nul n : $\sum_{p=0}^{n-1} p! \leq n!$

Solution 10

- Considérons la propriété P_n : « $\sum_{p=0}^{n-1} p! \leq n!$ ».

Scanned by CamScanner

- Pour n = 1 : on a $\sum_{p=0}^{0} p! = 0! \leq 1!$; alors P_1 est vraie.

- Supposons P_k vraie pour un certain entier naturel $k \geq 1$ (c'est-à-dire, $\sum_{p=0}^{k-1} p! \leq k!$) et, montrons qu'alors P_{k+1} est aussi vraie (c'est-à-dire, $\sum_{p=0}^{k} p! \leq (k+1)!$).

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $\sum_{p=0}^{k-1} p! \leq k!$.

Et en ajoutant k! aux deux membres, on a : $\sum_{p=0}^{k-1} p! + k! \leq k! + k!$. C'est-à-dire $\sum_{p=0}^{k} p! \leq 2(k!)$. **(1)**

Comparons alors 2(k!) et (k + 1)! :
On a : $2(k!) - (k+1)! = k!(2 - k - 1) = k!(1 - k)$.
Puisque $k \geq 1$, alors $k - 1 \geq 0$, donc $k!(1-k) \leq 0$, donc $2(k!) - (k+1)! \leq 0$. Donc $2(k!) \leq (k+1)!$. **(2)**

Des inégalités **(1)** et **(2)**, on a : $\sum_{p=0}^{k} p! \leq 2(k!) \leq (k+1)!$. Par suite, $\sum_{p=0}^{k} p! \leq (k+1)!$.

D'où P_{k+1} est aussi vraie.

- On peut conclure, d'après le principe du raisonnement par récurrence que : pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{p=0}^{n-1} p! \leq n!$.

Exercice 11

Soit $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ pour tout n entier naturel non nul.

1) Montrer que $S_{2n} - S_n \geq \frac{n}{n+n}$.

2) En déduire par récurrence, que, pour tout entier naturel non nul n : $S_{2^n} \geq \frac{n}{2} + 1$

Solution 11

1) Soit n entier naturel non nul, on a :

$$S_{2n} - S_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Puisque pour tout entier naturel non nul $k \leq n$, on a $0 < n + k \leq n + n$, alors $\frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{n+n}$.

Ainsi, on a : $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n+n}$, c'est-à-dire $\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{n+n}$.

D'où pour tout entier naturel non nul n, on a : $S_{2n} - S_n \geq \frac{n}{n+n}$.

2) • Considérons la propriété P_n : « $S_{2^n} \geq \frac{n}{2} + 1$ ».

- Pour n = 1 : $S_{2^1} = S_2 = 1 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} + 1$. Alors P_1 est vraie.

- Supposons P_k vraie pour un certain entier naturel $k \geq 1$ (c'est-à-dire, $S_{2^k} \geq \frac{k}{2} + 1$) et, montrons qu'alors P_{k+1} est

Scanned by CamScanner

aussi vraie (c'est-à-dire, $S_{2^{k+1}} \geq \frac{k+1}{2}+1$).

D'après la question 1), on a : $S_{2\times 2^k} - S_{2^k} \geq \frac{2^k}{2^k+2^k}$, c'est-à-dire $S_{2^{k+1}} \geq S_{2^k} + \frac{1}{2}$. (1)

D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $S_{2^k} \geq \frac{k}{2}+1$, alors en ajoutant $\frac{1}{2}$ au deux membres de cette dernière inégalité, on a : $S_{2^k} + \frac{1}{2} \geq \frac{k}{2}+1+\frac{1}{2}$. C'est-à-dire $S_{2^k} + \frac{1}{2} \geq \frac{k+1}{2}+1$. (2)

Des inégalités (1) et (2), on déduit que : $S_{2^{k+1}} \geq \frac{k+1}{2}+1$. D'où P_{k+1} est vraie.

Finalement, pour tout entier naturel non nul n, on a : $S_{2^n} \geq \frac{n}{2}+1$.

Exercice 12

a) Démontrer par récurrence que $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 pour tout entier naturel.
b) Démontrer par récurrence que $3\times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17 pour tout entier naturel non nul.

Solution 12

a) • Considérons la propriété P_n : « $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 ».
• Pour n = 0 : $3^{2\times 0} - 2^0 = 0$, qui est divisible par 7. Alors P_0 est vraie.
• Supposons P_k vraie pour un certain entier naturel k (c'est-à-dire, $3^{2k} - 2^k$ est divisible par 7), et montrons qu'alors P_{k+1} est aussi vraie (c'est-à-dire, $3^{2k+2} - 2^{k+1}$ est divisible par 7).
D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $3^{2k} - 2^k = 7q$, où q est un entier, alors $3^{2k} = 7q + 2^k$.
Ainsi, $3^{2k+2} - 2^{k+1} = 3^2\times 3^{2k} - 2\times 2^k = 9(7q + 2^k) - 2\times 2^k = 63q + 7\times 2^k = 7(9q + 2^k)$.
Puisque q et 2^k sont des entiers, alors $9q + 2^k$ est un entier. Donc $3^{2k+2} - 2^{k+1}$ est divisible par 7.
D'où P_{k+1} est aussi vraie.
• On peut alors conclure, d'après le principe du raisonnement par récurrence que : $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 pour tout entier naturel.

b) • Considérons la propriété P_n : « $3\times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17 ».
• Pour n = 1 : $3\times 5^{2\times 1-1} + 2^{3\times 1-2} = 17$, qui est divisible par 17. Alors P_1 est vraie.
• Supposons P_k vraie pour un certain entier naturel non nul k (c'est-à-dire, $3\times 5^{2k-1} + 2^{3k-2}$ est divisible par 17), et montrons qu'alors P_{k+1} est aussi vraie (c'est-à-dire $3\times 5^{2k+1} + 2^{3k+1}$ est divisible par 17).
D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $3\times 5^{2k-1} + 2^{3k-2} = 17q$, où q est un entier, alors $2^{3k-2} = 17q - 3\times 5^{2k-1}$.
Ainsi, $3\times 5^{2k+1} + 2^{3k+1} = 3\times 5^2\times 5^{2k-1} + 2^3\times 2^{3k-2} = 3\times 5^2\times 5^{2k-1} + 2^3\times(17q - 3\times 5^{2k-1}) = 8\times 17q + 51\times 5^{2k-1}$
$= 17(8q + 3\times 5^{2k-1})$
$= 17q'$ où $q' = 8q + 3\times 5^{2k-1}$.

Puisque q et 5^{2k-1} sont des entiers, alors $q' = 8q + 3\times 5^{2k-1}$ est un entier.
Donc $3\times 5^{2k+1} + 2^{3k+1}$ est divisible par 17. D'où P_{k+1} est aussi vraie.
• On peut alors conclure, d'après le principe du raisonnement par récurrence que : $3\times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17 pour tout entier naturel non nul.

Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35}$ où $u_0 = 0$.
Prouver par récurrence que cette suite est croissante et majorée par 7.

Solution 13

Pour tout entier naturel n, et par définition, on a $u_n \geq 0$.
Montrons que la suite est croissante : c'est-à-dire que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
• Considérons la propriété P_n : « $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ».
• Pour n = 0 : $u_1 - u_0 = \sqrt{35} \geq 0$. Alors P_0 est vraie.
• Supposons P_k vraie pour un certain entier naturel k (c'est-à-dire, $u_{k+1} - u_k \geq 0$) et, montrons qu'alors P_{k+1} est aussi vraie (c'est-à-dire, $u_{k+2} - u_{k+1} \geq 0$).

Scanned by CamScanner

$$u_{k+2}-u_{k+1}=\sqrt{2u_{k+1}+35}-\sqrt{2u_k+35}=\frac{(\sqrt{2u_{k+1}+35}-\sqrt{2u_k+35})(\sqrt{2u_{k+1}+35}+\sqrt{2u_k+35})}{\sqrt{2u_{k+1}+35}+\sqrt{2u_k+35}}$$

$$=\frac{(2u_{k+1}+35)-(2u_k+35)}{\sqrt{2u_{k+1}+35}+\sqrt{2u_k+35}}$$

$$=\frac{2(u_{k+1}-u_k)}{\sqrt{2u_{k+1}+35}+\sqrt{2u_k+35}}$$

Comme $\sqrt{2u_{k+1}+35}+\sqrt{2u_k+35}>0$, alors $u_{k+2}-u_{k+1}$ et $u_{k+1}-u_k$ sont de même signe.

Et puisque d'après l'hypothèse de récurrence, on a $u_{k+1}-u_k\geq 0$, alors on peut conclure que $u_{k+2}-u_{k+1}\geq 0$.
D'où P_{k+1} est aussi vraie.

- On peut alors conclure, d'après le principe du raisonnement par récurrence que : pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n\geq 0$. C'est-à-dire la suite (u_n) est croissante.

Montrons que la suite est majorée par 7 : c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n\leq 7$.

- Considérons la propriété P_n : « $u_n\leq 7$ ».
- Pour n = 0 : on a $u_0=0\leq 7$. Alors P_0 est vraie.
- Supposons P_k vraie pour un certain entier naturel k (c'est-à-dire, $u_k\leq 7$) et, montrons qu'alors P_{k+1} est aussi vraie (c'est-à-dire, $u_{k+1}\leq 7$).

D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $0\leq u_k\leq 7$, alors $0\leq 2u_k\leq 14$.
Donc $2u_k+35\leq 49$, alors $\sqrt{2u_k+35}\leq 7$. C'est-à-dire $u_{k+1}\leq 7$. D'où P_{k+1} est aussi vraie.

- On peut alors conclure, d'après le principe du raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n\leq 7$. C'est-à-dire la suite (u_n) est majorée par 7.

Exercice 14

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_1=1$, $u_2=-5$ et pour tout entier naturel $n\geq 2$, $u_{n+1}=5u_n-6u_{n-1}$.

Etablir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $u_n=4\times 2^n-7\times 3^{n-1}$.

Solution 14

- Considérons la propriété P_n : "$u_n=4\times 2^n-7\times 3^{n-1}$".
- **Pour n = 2 :**

$u_2=-5$ par définition de u_2. Et $4\times 2^2-7\times 3^{2-1}=16-21=-5$. Donc, $u_2=4\times 2^2-7\times 3^{2-1}$.
D'où P_2 est vraie.

Pour n = 3 :

$u_3=5\times u_2-6\times u_1=5\times(-5)-6\times 1=-31$ et $4\times 2^3-7\times 3^{3-1}=-31$. Donc $u_3=4\times 2^3-7\times 3^{3-1}$. D'où P_3 est aussi vraie.

- Supposons P_k vraie jusqu'à un certain entier naturel non nul k, et montrons qu'alors P_{k+1} est aussi vraie (c'est-à-dire, $u_{k+1}=4\times 2^{k+1}-7\times 3^k$).

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $u_k=4\times 2^k-7\times 3^{k-1}$ et, $u_{k-1}=4\times 2^{k-1}-7\times 3^{k-2}$.
Or d'après l'énoncé, on a $u_{k+1}=5u_k-6u_{k-1}$.

Alors $u_{k+1}=5(4\times 2^k-7\times 3^{k-1})-6(4\times 2^{k-1}-7\times 3^{k-2})=10\times 2^{k+1}-35\times 3^{k-1}-6\times 2^{k+1}+14\times 3^{k-1}$

Finalement, $u_{k+1}=4\times 2^{k+1}-7\times 3^k$. D'où P_{k+1} est aussi vraie.

- On peut alors conclure, d'après le principe du raisonnement par récurrence que :

pour tout entier naturel n avec $n\geq 2$, $u_n=4\times 2^n-7\times 3^{n-1}$.

Scanned by CamScanner

1 ETUDE GENERALE SUR LES FONCTIONS

RAPPEL DU COURS

A. Calcul des limites

A_1 – Condition nécessaire pour l'étude d'une limite

Soit a un nombre réel.

- Pour étudier la limite d'une fonction en a, il est nécessaire que cette fonction soit définie sur un intervalle de la forme $]a - \varepsilon , a + \varepsilon[$, où ε est un réel strictement positif, sauf peut-être en a.
- Pour étudier la limite d'une fonction en a à gauche (resp. à droite), il est nécessaire que cette fonction soit définie sur un intervalle de la forme $]a - \varepsilon , a[$ (resp. $]a , a + \varepsilon[$), où ε est un réel strictement positif.
- Pour étudier la limite d'une fonction en $-\infty$ (resp. $+\infty$), il est nécessaire que cette fonction soit définie sur un intervalle de la forme $]-\infty , A[$ (resp. $]A , +\infty[$.

A_2 – Calcul des limites

a) Opérations sur les fonctions et limites :

a désigne un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$, m et m' désignent des nombres réels, f et g sont deux fonctions définies au voisinage de a.

x tend vers a (éventuellement à gauche ou à droite)

Limite d'une somme de fonctions :

Si la limite de f est	m	M	m	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si la limite de g est	m'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors la limite de f+g est	m + m'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

« ? » signifie que l'on a une forme indéterminée.

Limite d'un produit de fonctions :

Si la limite de f est	m	m > 0	m > 0	m < 0	m < 0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si la limite de g est	m'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors la limite de fg est	mm'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Limite d'un quotient de fonctions :

Notons que la limite de $\frac{f}{g}$ est la limite de $f \times \frac{1}{g}$. Et la limite de $\frac{1}{g}$ s'obtient grâce au tableau suivant :

Si la limite de g est	$m \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0 (g > 0au voisinage de a)	0 (g < 0 au voisinage de a)
Alors la limite de $\frac{1}{g}$ est	$\frac{1}{m}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

« Il faut éviter les écritures : $\infty + \infty$, $\infty - \infty$, $-\infty - \infty$, $m + \infty$, $\infty \times \infty$, $m \times \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{m}{0}$, $\frac{\infty}{m}$, $\frac{m}{\infty}$, $\frac{\infty}{\infty}$ ».

b) Limite et continuité – limite et dérivabilité :

- Si f est continue en un réel a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Si f est dérivable en a, alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

Cette dernière propriété permet parfois de lever les formes indéterminées du type $\frac{0}{0}$.

Scanned by CamScanner

c) Limite d'une composée :

Soit f et g deux fonctions numériques ; a, b et c désignent des réels, $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$, alors $\lim\limits_{x\to a} gof(x) = c$.

d) Limite et comparaison des fonctions :

Soit f, g et h trois fonctions ; a désigne un réel, $+\infty$ ou $-\infty$ et b est un nombre réel.

- Si on a $f \le g$ dans un voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.
- Si on a $f \le g$ dans un voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.
- Si $g \le f \le h$ dans un voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. (Cette propriété porte le nom de : « théorème des gendarmes »).
- Si dans un voisinage de a on a $|f(x) - b| \le g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

B. Les branches infinies

B_1 – Définition

La courbe d'une fonction f présente une branche infinie lorsque la fonction f est définie au voisinage de $-\infty$ ou de $+\infty$, ou lorsque la limite de f en un réel est infinie.

Etudier les branches infinies de la courbe de f revient à dire si sa courbe admet une asymptote, une branche parabolique ou une direction asymptotique.

B_2 – Asymptotes – branche parabolique – direction asymptotique

Soit a et b deux nombres réels et f une fonction numérique.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ est infinie, alors la courbe de f admet une asymptote (verticale) d'équation $x = a$.

Si $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$) est un réel b, alors la courbe de f admet une asymptote (horizontale) d'équation $y = b$ en $-\infty$ (resp. en $+\infty$).

Si $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$) est infinie, alors on calcule $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ (resp. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$) :

- Si $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ (resp. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$) est infinie, alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de l'axe des ordonnées en $-\infty$ (resp. $+\infty$).
- Si $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ (resp. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$) est égale à 0, alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de l'axe des abscisses en $-\infty$ (resp. $+\infty$).
- Si $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ (resp. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$) est égale à un réel non nul a, alors on calcule $\lim\limits_{x\to -\infty} (f(x) - ax)$ (resp. $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - ax)$).
  - Si $\lim\limits_{x\to -\infty} (f(x) - ax)$ (resp. $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - ax)$) est un réel b, alors la courbe de f admet une asymptote (oblique) d'équation $y = ax + b$ en $-\infty$ (resp.en ∞)
  - Si $\lim\limits_{x\to -\infty} (f(x) - ax)$ (resp. $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - ax)$) est infinie, alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite d'équation $y = ax$.

Scanned by CamScanner

- Si $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)$ (resp. $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$) n'existe pas, alors la courbe f de présente une direction asymptotique, mais pas une branche parabolique, ni d'asymptote oblique.

- Si $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ (resp. $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$) n'existe pas, alors la courbe de f n'admet ni branche parabolique, ni direction asymptotique.

C. Continuité

C_1 – Continuité en un réel

- Soit a un nombre réel et f une fonction définie en a et dans un voisinage de a.

On dit que f est continue en a lorsque la courbe de f ***"ne fait pas de saut au passage"*** du point A(a , f(a)).

- f est continue en a lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- f est continue en a à gauche (resp. à droite), lorsque $\lim_{x\xrightarrow{<}a} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim_{x\xrightarrow{>}a} f(x) = f(a)$).

Remarque :
f est continue en a si et seulement si f est continue en a, à gauche et à droite.
C'est-à-dire lorsque $\lim_{x\xrightarrow{<}a} f(x) = \lim_{x\xrightarrow{>}a} f(x) = f(a)$.

- On dit qu'une fonction f admet un prolongement par continuité en un réel a, lorsque f n'est pas définie en a, mais $\lim_{x\to a} f(x)$ est un réel b.

Ainsi, la fonction g définie sur $D_f \cup \{a\}$ par : $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \in D_f \\ g(a) = b \end{cases}$ est le **prolongement par continuité de f en a.**

C_2 – Opérations sur les fonctions continues

- Une fonction est dite continue sur un intervalle lorsqu'elle est continue en tout réel de cet intervalle.
- Les fonctions usuelles ($x \mapsto a$ (a constante), $x \mapsto x^n$ (n entier naturel), $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \tan x$ et $x \mapsto |x|$) sont continues sur leurs ensembles de définition.
- Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, les fonctions f + g, αf, fg sont aussi continues sur I.

  Si de plus, g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.

- Si f est continue sur un intervalle I et g continue sur f(I), alors la fonction gof est continue sur I.

De ce dernier résultat, on déduit que :

Si f est continue sur I, alors les fonctions cosf, sinf, f^n (n entier naturel) et $|f|$ sont continues sur I.

Si f est continue et positive sur I, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Si f est continue sur I et pour tout x dans I on a $f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, alors tanf est continue sur I.

C_3 – Théorème des valeurs intermédiaires

a) Enoncé général :

Soit f, fonction définie sur un intervalle I, m un nombre réel.

Si f est continue sur I et m appartient à f(I), alors l'équation **f(x) = m admet au moins une solution** dans I.

Si f est continue, strictement monotone sur I et m appartient à f(I), alors l'équation ***f(x) = m admet une unique solution sur I.***

Scanned by CamScanner

b) Enoncé particulier :

Soit f, fonction numérique, a et b deux réels (avec a < b).

Si f est continue sur [a , b] et f(a)f(b) < 0, alors l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans]a , b[.

Si f est continue, strictement monotone sur [a , b] et f(a)f(b) < 0, alors l'équation f(x) = 0 admet une unique solution dans]a , b[.

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de justifier l'existence et le nombre de solutions de l'équation f(x) = m, de localiser et même de trouver des valeurs approchées de ces solutions lorsqu'elles existent. Mais il ne précise pas les valeurs exactes des solutions.

c) corollaire :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Si l'équation f(x) = 0 n'a pas de solution dans I, alors la fonction f garde un signe constant sur I.

C_4 – Théorème de la bijection réciproque

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Si f est **continue et strictement monotone** sur I, alors **f réalise une bijection de I vers J = f(I).**

Par conséquent f admet une bijection réciproque f^{-1} définie de J vers I.

f^{-1} est continue sur J et a le même sens de variation que f sur J.

Pour les propriétés entre la bijection et sa réciproque, voir le cours de première.

D. Dérivation

D_1 – Dérivabilité en un réel

- Soit a un nombre réel et f une fonction définie en a et dans un voisinage de a.

f est dérivable en a lorsque $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (ou $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+a)-f(a)}{h}$) est un nombre réel b.

Le réel b est alors appelé le nombre dérivé de f en a et est noté f '(a).

- f est dérivable en a à gauche (resp. à droite), lorsque $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (ou $\lim\limits_{h\xrightarrow{<}0}\dfrac{f(h+a)-f(a)}{h}$) (resp. $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (ou $\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(h+a)-f(a)}{h}$)) est un réel b.

Le réel b est alors appelé le nombre dérivé de f en a à gauche (resp. à droite) et noté $f_g'(a)$ (resp. $f_d'(a)$).

Remarque :

f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable en a, à gauche et à droite et $f_g'(a) = f_d'(a)$.

C'est-à-dire lorsque $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\xrightarrow{>}a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ***est un réel.***

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a. La réciproque n'est pas toujours vraie.

D_2 – Opérations sur les fonctions dérivables

- Une fonction est dite dérivable sur un intervalle lorsqu'elle est dérivable en tout réel de cet intervalle.
- Les fonctions usuelles ($x\mapsto a$ (a constante), $x\mapsto x^n$ (n entier naturel), $x\mapsto\dfrac{1}{x}$, $x\mapsto\cos x$, $x\mapsto\sin x$, $x\mapsto\tan x$ et $x\mapsto|x|$) sont dérivables sur leurs ensembles de définition.

La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Elle n'est pas dérivable en 0.

- Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et α un nombre réel.

Les fonctions f + g, αf, fg sont aussi dérivables sur I.

Scanned by CamScanner

Si de plus, g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I.

D3 – Tangente et demi tangente

Soit a un nombre réel et f une fonction définie en a.

Si f est dérivable en a, alors sa courbe admet en son point A(a , f(a)) une tangente d'équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ **est infinie,** alors f n'est pas dérivable en a et la courbe de f admet en son point A(a , f(a)), une tangente ou une demi tangente verticale d'équation $x = a$.

Si $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \neq \lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, alors f n'est pas dérivable en a et sa courbe admet en son point A(a , f(a)) deux demi-tangentes.

D4 – La fonction dérivée

- On appelle **ensemble de dérivabilité de f,** que l'on note $D_{f'}$, l'ensemble des éléments de D_f en lesquels f est dérivable.
- On appelle **fonction dérivée** d'une fonction f, que l'on note f ' ou $\frac{df}{dx}$ ou $f^{(1)}$, l'application de $D_{f'}$ vers $\mathbb{R}$, qui à tout x de $D_{f'}$, associe f '(x), où f '(x) désigne le nombre dérivé de f en x.
- La dérivée de f ' est notée f '' ou $f^{(2)}$ ou $\frac{d^2f}{dx^2}$: **c'est la dérivée seconde ou dérivée d'ordre 2 de f.**

De façon générale, soit n entier naturel non nul, la dérivée de $f^{(n-1)}$ est notée $f^{(n)}$ ou $\frac{d^nf}{dx^n}$: **c'est la dérivée $n^{ième}$ ou dérivée d'ordre n de f.**

Par convention, la dérivée d'ordre zéro $f^{(0)}$ de f est f

D5 – Dérivées usuelles

f est la fonction définie par :	Sa dérivée f ' est la fonction définie par :
f(x) = a (a constante réelle)	f '(x) = 0
f(x) = x	f '(x) = 1
$f(x) = x^n$ (n entier relatif non nul)	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ (n entier relatif non nul)	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
f(x) = sinx	f '(x) = cosx
f(x) = cosx	f '(x) = - sinx
f(x) = tanx	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

D6 – Dérivée d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de fonctions

Soit f et g deux fonctions dérivables et a un nombre réel.

- La dérivée de f + g est : f ' + g '.
- La dérivée de af est : af '.
- La dérivée de fg est : f 'g + g 'f.

Scanned by CamScanner

- La dérivée de $\frac{1}{g}$ est : $-\frac{g'}{g^2}$
- La dérivée de $\frac{f}{g}$ est : $\frac{f'g - g'f}{g^2}$, g ne s'annulant pas.

D_7 – Dérivée d'une composée de deux fonctions

a) Théorème :

Soit f et g deux fonctions et I un intervalle.
Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur f(I), alors la fonction gof est dérivable sur I et la dérivée de gof est :
$(gof)' = f' \times (g'of)$.

b) Corollaire :

Soit f, fonction définie sur un intervalle I.

- Si f est dérivable sur I, alors les fonctions f^n (n entier naturel non nul), sinf, cosf sont dérivables sur I et :
$(f^n)' = nf' \times f^{n-1}$; $(\sin f)' = f' \times \cos f$; $(\cos f)' = -f' \times \sin f$.
- Si f est dérivable sur I et ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{f^n}$ (n entier naturel non nul) est dérivable sur I et la dérivée de $\frac{1}{f^n}$ est $-\frac{nf'}{f^{n+1}}$.
- Si f est dérivable et strictement positive sur I, alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et sa dérivée est $\frac{f'}{2\sqrt{f}}$.
- Si f est dérivable sur I et pour tout x dans I, on a $f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k entier relatif), alors tanf est dérivable sur I et sa dérivée est $f' \times (1 + \tan^2 f)$ ou encore $\frac{f'}{\cos^2 f}$.

Remarque :
Lorsqu'on observe la formule de la dérivée de $\sqrt{f}$, on constate qu'il y'a problème pour les valeurs qui annulent $\sqrt{f}$. En ces points, il faudra toujours étudier la dérivabilité en revenant à la définition d'une fonction dérivable en un point.

D_8 – Dérivée de la fonction réciproque

Soit f fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $a \in I$. Posons $f(a) = b$

- Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.
- Ainsi, si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I, alors sa réciproque f^{-1} est dérivable sur f(I) et la dérivée de f^{-1} est : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' of^{-1}}$.
- L'ensemble de dérivabilité de f^{-1} est l'image par f de l'ensemble de dérivabilité de f privée des images par f des valeurs en lesquelles f' s'annule.

D_9 – Inégalité des accroissements finis

a) Théorème (première version) :

Soit f fonction dérivable sur un intervalle I. Soit a et b deux éléments de I tels que $a < b$.
S'il existe deux réels m et M tels que, pour tout élément x de I, $m \leq f'(x) \leq M$, alors on a :
$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

b) Théorème (deuxième version) :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Scanned by CamScanner

S'il existe un réel positif M tel que, pour tout élément x de I, $|f'(x)| \leq M$, alors pour tous éléments a et b de I, on a :

$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Chacun de ces deux théorèmes est appelé « inégalité des accroissements finis ».
Ils sont utilisés parfois pour encadrer ou trouver des valeurs approchées.

D_{10} – Point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivable en un réel a.

- Le point A(a , f(a)) est appelé point d'inflexion à la courbe de f lorsqu'en A, la courbe de f traverse sa tangente.

En ce point, la courbe de f change de courbure (concavité).

- Si la dérivée seconde de f s'annule en a, en changeant de signe, alors le point A(a , f(a)) est point d'inflexion à la courbe de f.

E. Puissances rationnelles

E_1 – La racine $n^{ième}$

a) Théorème et définition :

Soit n un entier naturel non nul.
La fonction f_n définie sur $[0 , +\infty[$ par $f_n(x) = x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0 , +\infty[$.
Elle réalise alors une bijection de $[0 , +\infty[$ vers $f_n([0 , +\infty[) = [0 , +\infty[$.
Elle admet donc une réciproque notée $\sqrt[n]{\ }$, appelée la fonction racine $n^{ième}$.
L'image d'un réel positif x par $\sqrt[n]{\ }$ sera notée $\sqrt[n]{x}$.

b) Remarques :

Soit n un entier naturel non nul.
R_1) Lorsque n est impair, alors la fonction qui à x associe x^n est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
R_2) Soit x un réel positif :

- $\sqrt[n]{x^n} = x$
- $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

R_3) Résolution de l'équation $x^n = y$, où y est un nombre réel.

1er cas : *n est pair.*

- Si y est strictement négatif, alors l'équation $x^n = y$ n'a pas de solution.
- Si y est positif ou nul, alors l'équation $x^n = y$ a deux solutions : $x_1 = \sqrt[n]{y}$ et $x_2 = -\sqrt[n]{y}$.

2nd cas : *n est impair.*

- Si y est positif, alors l'équation $x^n = y$ admet une unique solution $x = \sqrt[n]{y}$.
- Si y est strictement négatif, alors l'équation $x^n = y$ admet une unique solution $x = -\sqrt[n]{-y}$.

c) Règles de calcul :

Soit n et p deux entiers naturels non nuls, a et b deux réels positifs.

- $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$
- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$
- $\sqrt[p]{a^q} = (\sqrt[p]{a})^q$ $(q \in \ )$

E_2 – Puissances rationnelles

a) Notation et définition :

Soit p un entier naturel non nul et q un entier relatif.

- Pour tout réel positif x, on convient de noter : $\sqrt[p]{x} = x^{\frac{1}{p}}$.

Scanned by CamScanner

- On définit ainsi la puissance rationnelle d'un réel x strictement positif : $x^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{x^q}$.

En d'autres termes, $x^{\frac{q}{p}} = (x^q)^{\frac{1}{p}} = \left(x^{\frac{1}{p}}\right)^q$

b) Règles de calcul :

Les règles de calcul sur les puissances rationnelles sont identiques à celles sur les puissances entières.

c) Dérivées :

Soit r un nombre rationnel.

- La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est la fonction qui à tout réel $x > 0$, associe rx^{r-1}.
- Si U est dérivable et **strictement positive sur I**, alors U^r est dérivable sur I et sa dérivée est $rU'U^{r-1}$.

F. Primitives

F_1 – Les primitives éventuelles d'une fonction

- Soit f fonction définie sur un intervalle I.

On dit qu'une fonction F est une primitive de f sur I, lorsque F est dérivable sur I et pour tout x de I, F'(x) = f(x).

- Lorsqu'une fonction f admet une primitive, elle admet une infinité de primitives.

Et si F est une primitive connue de f sur I, alors toute autre fonction G est primitive de f si et seulement si on peut trouver un réel k tel que, pour tout x de I, G(x) = F(x) + k.

- Il existe des fonctions qui n'admettent pas de primitive, mais toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.

F_2 – Calcul des primitives

a) primitives de fonctions usuelles :

Si f est la fonction définie par :	Une primitive de f est la fonction F définie par :
f(x) = 0	F(x) = k (k constante réelle)
f(x) = a (a constante réelle connue)	F(x) = ax
f(x) = x	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$
$f(x) = x^n$ (n est un nombre rationnel autre que 0 et -1)	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ (n est un nombre rationnel autre que 0 et 1)	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
f(x) = sinx	F(x) = -cosx
f(x) = cosx	F(x) = sinx
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ou $f(x) = 1 + \tan^2 x$	F(x) = tanx

b) Primitive et somme, produit ou quotient de fonctions :

Soit f et g deux fonctions admettant F et G comme primitives respectives sur un intervalle I et a un nombre réel.

- F + G est une primitive de f + g sur I.
- aF est une primitive de af sur I.

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Scanned by CamScanner

- une primitive de f'g + g'f est fg.
- une primitive de $\frac{f'g-g'f}{g^2}$ est $\frac{f}{g}$; g ne s'annulant pas.

c) Primitive et composée de fonctions :

Soit f et g deux fonctions dérivables à dérivées continues.

Une primitive de f '×g'of est gof.

D'où le tableau suivant dans lequel f est une fonction dérivable à dérivée continue.

Une primitive de la fonction	est la fonction
$f^n f'$ (n est un nombre rationnel autre que 0 et -1)	$\frac{1}{n+1}f^{n+1}$
$f^n f'$ (n est un nombre rationnel autre que 1 et 2)	$\frac{-1}{(n-1)f^{n-1}}$
$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f}$
f' sinf	-cosf
f' cosf	sinf
$\frac{f'}{\cos^2 f}$	tanf

Scanned by CamScanner

EXERCICES POUR COMPRENDRE LE COURS

A. Etudier la limite d'une fonction

1 – Calculer la limite d'une fonction rationnelle

Exercice 1

Calculer les limites éventuelles en 2, en –3, en + ∞ et en - ∞ de la fonction $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{3x^3 - 3x - 18}{x^2 + x - 6}$.

Solution 1

- f(x) existe si et seulement si $x^2 + x - 6 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 2$ et $x \neq -3$.
- **Limites en 2 :**

On a : $\lim\limits_{x \to 2} (3x^3 - 3x - 18) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + x - 6) = 0$.

Nous sommes en présence d'une forme indéterminée en 2.

Or on a : $3x^3 - 3x - 18 = 3(x - 2)(x^2 + 2x + 3)$ et $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$

D'où $f(x) = \dfrac{3(x-2)(x^2+2x+3)}{(x-2)(x+3)} = \dfrac{3(x^2+2x+3)}{x+3}$. Et par suite, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3(x^2+2x+3)}{x+3} = \dfrac{33}{5}$.

- **Limite en - 3 :**

On a : $\lim\limits_{x \to -3} (3x^3 - 3x - 18) = -90$ et $\lim\limits_{x \to -3} (x^2 + x - 6) = 0$.

On dresse alors le tableau de signe du dénominateur $x^2 + x - 6$:

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
Signe de $x^2 + x - 6$		+	0	-	0	+	

D'où $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -3} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -3} f(x) = +\infty$.

- **Limite en -∞ et en +∞ :**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x = +\infty$.

Point méthode :

Soit une fonction rationnelle.

- *Si un réel a annule le dénominateur de f, alors pour calculer la limite de f, on calcule la limite de son numérateur.*
  - *Si celle-ci est non nulle, alors la limite de f est infinie. Et le signe qui accompagne l'infini est le produit des signes du dénominateur et de la limite du numérateur.*
  - *Si celle-ci est nulle, alors on factorise le numérateur et le dénominateur de f par $(x - a)$ que l'on simplifie. La limite de f est celle de sa forme simplifiée.*

2 – Calculer la limite d'une composée de fonctions :

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \sqrt{\dfrac{2x^2+5}{x-2}}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{2x^2+5}{x-2}}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x-1}{2x^2+1}}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sin\left[\pi\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)\right]$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \tan\dfrac{\pi x}{4(x+1)}$.

Solution 2

a) $\sqrt{\dfrac{2x^2+5}{x-2}}$ existe si et seulement si $\dfrac{2x^2+5}{x-2} \geq 0$, c'est-à-dire $x - 2 > 0$ (car pour tout réel x, on a : $2x^2 + 5 > 0$).

D'où $\sqrt{\dfrac{2x^2+5}{x-2}}$ existe si et seulement $x > 2$.

Scanned by CamScanner

Or $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \dfrac{2x^2+5}{x-2} = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \sqrt{\dfrac{2x^2+5}{x-2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

b) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2+5}{x-2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{2x^2+5}{x-2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{2x^2+1} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x-1}{2x^2+1}} = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \pi\left(\dfrac{x+1}{2x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left[\pi\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)\right] = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\pi x}{4(x-1)} = \dfrac{\pi}{4}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \tan\dfrac{\pi x}{4(x+1)} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan x = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$

Point méthode :

Soit u fonction numérique définie au voisinage de a appartenant à $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Pour calculer les limites éventuelles de tan(u(x)), cos(u(x)), sin(u(x)), $\sqrt{u(x)}$ ... quand x tend vers a :

- *on peut d'abord calculer* $\lim\limits_{x \to a} u(x)$
- *Si* $\lim\limits_{x \to a} u(x) = l$, *avec l appartenant à* $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, *alors :*

$\lim\limits_{x \to a} \tan(u(x)) = \lim\limits_{x \to l} \tan(x)$,

$\lim\limits_{x \to a} \cos(u(x)) = \lim\limits_{x \to l} \cos(x)$,

$\lim\limits_{x \to a} \sin(u(x)) = \lim\limits_{x \to l} \sin(x)$,

$\lim\limits_{x \to a} \sqrt{u(x)} = \lim\limits_{x \to l} \sqrt{x}$, ...

3 – Lever certaines indéterminations dans le cas des fonctions trigonométriques :

Exercice 3

Déterminer la limite éventuelle en 0 de la fonction :

a) $f : x \mapsto \dfrac{3x}{\sin(5x)}$ b) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x + \sin(2x)}{\sin x - \sin(2x)}$ c) $f : x \mapsto \dfrac{\tan(4x)}{\sin(3x)}$.

Solution 3

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{\sin(5x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\frac{\sin(5x)}{5x}} \times \dfrac{3x}{5x} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{\frac{\sin(5x)}{5x}}$.

Or $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{5x} = 1$, alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{\sin 5x} = \dfrac{3}{5}$.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x + \sin 2x}{\sin x - \sin 2x} = \dfrac{\sin x + 2\sin x \cos x}{\sin x - 2\sin x \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x(1+2\cos x)}{\sin x(1-2\cos x)}$.

D'où $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x + \sin 2x}{\sin x - \sin 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1+2\cos x}{1-2\cos x} = -3$.

Point méthode :

Soit u fonction numérique définie au voisinage de a appartenant à $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$,

- *Si* $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$, *alors*

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin u(x)}{u(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 4x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{\cos 4x} \times \dfrac{1}{\sin 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{\cos 4x} \times \dfrac{\sin 4x}{4x} \times \dfrac{3x}{\sin 3x} \times \dfrac{1}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4}{3\cos 4x} \times \dfrac{\sin 4x}{4x} \times \dfrac{1}{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)}$.

Or $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{4x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4}{3\cos 4x} = \dfrac{4}{3}$, alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 4x}{\sin 3x} = \dfrac{4}{3}$.

Exercice 4

Calculer les limites éventuelles suivantes : a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin 4x}$ b) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x + \sqrt{3}\cos x}{-\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x}$.

Scanned by CamScanner

Solution 4

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{\sin 4x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)}{\sin 4x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x-\sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)}{\sin 4x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\times\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\times\dfrac{x-\frac{\pi}{4}}{\sin 4x}$

Or $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} x-\dfrac{\pi}{4}=0$, alors $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Puisque la fonction $x\mapsto \sin 4x$ est dérivable en $\dfrac{\pi}{4}$, alors, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 4x}{x-\frac{\pi}{4}}$ est le nombre dérivé de la fonction :

$x\mapsto \sin 4x$ en $\dfrac{\pi}{4}$, soit $4\cos\left(4\times\dfrac{\pi}{4}\right)=-4$. D'où $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{\sin 4x}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

b) $\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{-\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x} = \dfrac{\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x}{-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x}{\cos\frac{2\pi}{3}\sin 2x+\sin\frac{2\pi}{3}\cos 2x} = \dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)} = \dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]}$.

D'où $\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{-\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x} = \dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{1}{2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$.

Finalement $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{-\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x} = \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}} \dfrac{1}{2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{1}{2}$.

4 – Utiliser la comparaison des fonctions pour calculer les limites :

Exercice 5

Etudier le comportement de chacune de ces fonctions en $+\infty$.

a) $x\mapsto x^2-2\sin x$ b) $x\mapsto \dfrac{2x+\sin x}{x}$ c) $x\mapsto \dfrac{\cos x}{1-x}$ d) $x\mapsto \dfrac{E(x)}{x}$.

Solution 5

a) Soit x un nombre réel, on a : $-1\le \sin x\le 1$, donc $-2\le -2\sin x\le 2$, et par suite $x^2-2\le x^2-2\sin x\le x^2+2$.

Or on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2\sin x=+\infty$.

b) Soit x un nombre réel, on a : $-1\le \sin x\le 1$, donc $2x-1\le 2x+\sin x\le 2x+1$.

Puisque x tend vers $+\infty$, on peut supposer $x>0$.

On obtient alors, $\dfrac{2x-1}{x}\le\dfrac{2x+\sin x}{x}\le\dfrac{2x+1}{x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x}=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x}=2$, alors d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\sin x}{x}=2$.

c) Soit x un nombre réel, on a : $-1\le \cos x\le 1$.

Puisque x tend vers $+\infty$, alors on peut supposer $x>1$, donc $1-x<0$. On a alors $\dfrac{1}{1-x}\le\dfrac{\cos x}{1-x}\le-\dfrac{1}{1-x}$.

Scanned by CamScanner

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1-x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{1-x}=0$, alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{1-x}=0$.

d) Pour tout réel x, on a : $x-1<E(x)\le x$. Puisque x tend vers $+\infty$, on suppose $x>0$, et on a : $\frac{x-1}{x}\le\frac{E(x)}{x}\le 1$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$, alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{E(x)}{x}=1$.

Exercice 6

1) Trouver deux constantes m et M telles que : $m\le\frac{1}{2-\sin x}\le M$, pour tout réel x.

2) En déduire le comportement en $+\infty$ de : $x\mapsto\frac{x}{2-\sin x}$ et $x\mapsto\frac{x+\sin x}{2-\sin x}$.

Solution 6

1) On sait que, pour tout réel x, on a : $-1\le\sin x\le 1$, donc $-1\le -\sin x\le 1$, donc $1\le 2-\sin x\le 3$.

On déduit en prenant l'inverse que : $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2-\sin x}\le 1$. On peut prendre $m=\frac{1}{3}$ et $M=1$.

2) • Pour la fonction : $x\mapsto\frac{x}{2-\sin x}$.

Puisque x tend vers $+\infty$, on suppose $x>0$, et d'après la question 1) on a :

$\frac{1}{3}\le\frac{1}{2-\sin x}\le 1$, alors $\frac{x}{3}\le\frac{x}{2-\sin x}\le x$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{3}=+\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2-\sin x}=+\infty$.

• Pour la fonction : $x\mapsto\frac{x+\sin x}{2-\sin x}$.

On a pour tout réel x, $-1\le\sin x\le 1$, donc $x-1\le x+\sin x\le x+1$.

Puisque x tend vers $+\infty$, on suppose $x>1$.

Ainsi, on a $0<x-1\le x+\sin x\le x+1$ et $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2-\sin x}\le 1$ (d'après la question 1).

Ce qui implique que $\frac{x-1}{3}\le\frac{x+\sin x}{2-\sin x}\le x+1$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{3}=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{2-\sin x}=+\infty$.

5 – Lever certaines indéterminations dans le cas des fonctions irrationnelles :

Exercice 7

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+3x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+5}-x}{\sqrt{x^2-x}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+3}-x$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4x+3}+2x+1$.

Solution 7

a) Comme x tend vers $+\infty$, on va supposer $x>0$, donc $|x|=x$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+3x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+3x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+3x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+3=4.$$

b) Comme x tend vers $+\infty$, on va supposer $x>1$, donc $|x|=x$.

Scanned by CamScanner

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+5}-x}{\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}-x}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}-x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=-1.$$

c) Comme x tend vers $+\infty$, on va supposer $x>0$, donc $|x|=x$.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+3}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+3}{\sqrt{x^2+4x+3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4+\frac{3}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(4+\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=2.$$

d) Comme x tend vers $-\infty$, on va supposer $x<0$, donc $|x|=-x$. Alors,

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4x+3}+2x+1=\lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+2x+1=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+2+\frac{1}{x}\right)=-\infty.$$

Exercice 8

Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt{x+1}-3}$.

Solution 8

a) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}=\frac{1}{6}$.

b) $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt{x+1}-3}=\lim\limits_{x\to8}\frac{(\sqrt{2x}-4)(\sqrt{2x}+4)(\sqrt{x+1}+3)}{(\sqrt{x+1}-3)(\sqrt{x+1}+3)(\sqrt{2x}+4)}=\lim\limits_{x\to8}\frac{(2x-16)(\sqrt{x+1}+3)}{(x-8)(\sqrt{2x}+4)}=\lim\limits_{x\to8}\frac{2(\sqrt{x+1}+3)}{\sqrt{2x}+4}$.

Finalement, $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt{x+1}-3}=\lim\limits_{x\to8}\frac{2(\sqrt{x+1}+3)}{(\sqrt{2x}+4)}=\frac{3}{2}$.

6 – Utiliser la dérivabilité pour calculer la limite :

Exercice 9

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to58}\frac{(2x+5)^2-121^2}{x-58}$ b) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{x-\pi}$ d) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{\sin3x}{3x+\pi}$

Solution 9

a) La fonction $f:x\mapsto(2x+5)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en 58 et $f(58)=121^2$.

D'où $\lim\limits_{x\to58}\frac{(2x+5)^2-121^2}{x-58}=\lim\limits_{x\to58}\frac{f(x)-f(58)}{x-58}=f'(58)$.

Or $f'(x) = 4(2x + 5)$, alors $f'(58) = 484$. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to58}\frac{(2x+5)^2-121^2}{x-58}=484$.

b) La fonction $f:x\mapsto\sqrt{x+6}$ est dérivable sur $]-6,+\infty[$, donc en 3, car fonction racine de fonction polynôme strictement positive sur $]-6,+\infty[$ et $f(3) = 3$.

D'où $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$.

Scanned by CamScanner

Or $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+6}}$, alors $f'(3)=\frac{1}{6}$. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\frac{1}{6}$.

c) La fonction $f: x\mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f(\pi)=-1$.

D'où $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)$.

Or $f'(x)=-\sin x$, alors $f'(\pi)=0$ et finalement, $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{x-\pi}=0$.

Point méthode :

- *Cette méthode repose sur la définition d'une fonction dérivable en un réel a.*
- *En effet si on sait qu'une fonction f est dérivable en un réel a, alors on peut écrire* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.
- *Nous utiliserons cette méthode pour lever les formes indéterminées du type* $\frac{0}{0}$.

d) La fonction $f: x\mapsto \sin 3x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=0$.

D'où $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x}{3x+\pi}=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{3}\times\frac{\sin 3x}{x+\frac{\pi}{3}}\right)=\frac{1}{3}\times\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x}{x+\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{3}\times\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{f(x)-f(-\frac{\pi}{3})}{x+\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{3}\times f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Or $f'(x)=3\cos 3x$, alors $f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-3$ et finalement, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x}{3x+\pi}=-1$.

B. Etudier les branches infinies - Déterminer les asymptotes

Exercice 10

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{2x^2+3}{x-2}$.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x différent de 2, $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$.

2) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
Déterminer les équations des asymptotes à la courbe de f.
Etudier la position de la courbe de f par rapport à son asymptote oblique.

Solution 10

1) En effectuant la division de $2x^2+3$ par $x-2$, on obtient : $2x^2+3=(x-2)(2x+4)+11$.

D'où pour tout réel x différent de 2, on a : $\frac{2x^2+3}{x-2}=2x+4+\frac{11}{x-2}$. D'où, $f(x)=2x+4+\frac{11}{x-2}$, pour tout x différent de 2. Et par identification, on a : $a=2$, $b=4$ et $c=11$.

2) f est définie si et seulement si $x\neq 2$. D'où $D_f=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+4+\frac{11}{x-2}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+4+\frac{11}{x-2}\right)=-\infty$.
- Puisque $\lim\limits_{x\to 2}2x+4=8$, $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\frac{11}{x-2}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}\frac{11}{x-2}=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}f(x)=+\infty$.

Les asymptotes à la courbe de f :

- $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}f(x)=+\infty$, d'où la droite d'équation $x=2$ est asymptote à la courbe de f.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+4)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{11}{x-2}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(2x+4)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{11}{x-2}=0$.

Il en résulte que la droite d'équation $y=2x+4$ est asymptote (oblique) à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Scanned by CamScanner

• Pour étudier la position de la courbe de f par rapport à son asymptote oblique, il suffit d'avoir le signe de $f(x)-(2x+4)$. Or $f(x)-(2x+4)=\dfrac{11}{x-2}$ et son signe s'obtient grâce au tableau suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)-(2x+4)$	-	‖	+

D'où, dans $]-\infty, 2[$, on a $f(x)-(2x+4)<0$. Donc la courbe de f est en- dessous de cette asymptote dans $]-\infty, 2[$ dans $]2, +\infty[$, on a $f(x)-(2x+4)>0$. Donc la courbe de f est au dessus de cette asymptote dans $]2, +\infty[$.

Exercice 11

On veut étudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x^2-3x+1}$.

1) Etudier l'ensemble de définition de f et montrer que : $f(x)=\sqrt{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}}$.

En déduire que la courbe de f admet un axe de symétrie.

2) Montrer que la droite d'équation $y=x-\dfrac{3}{2}$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et étudier la position de la courbe par rapport à cette droite.

3) A l'aide de la question 1), étudier la branche infinie en $-\infty$ à la courbe de f.

Solution 11

1) • f(x) existe si et seulement si $x^2-3x+1\geq 0$. C'est-à-dire, $x\in\left]-\infty, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$

Finalement l'ensemble de définition de f est : $D_f=\left]-\infty, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$.

• Et pour tout x élément de D_f, on a : $f(x)=\sqrt{x^2-3x+1}=\sqrt{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+1}=\sqrt{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}}$.

Soit $x\in D_f$, $3-x$ est élément de Df et $f(3-x)=\sqrt{\left(3-x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}-x\right)^2-\dfrac{5}{4}}=\sqrt{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}}=f(x)$.

D'où la courbe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\dfrac{3}{2}$.

2) • $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}}-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2}{\sqrt{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}}+\left(x-\dfrac{3}{2}\right)}$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{5}{4}}{\sqrt{x^2-3x+1}+\left(x-\dfrac{3}{2}\right)}=0$.

D'ou la droite d'équation $y=x-\dfrac{3}{2}$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

• Soit x élément de D_f. Posons $d(x)=f(x)-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$, on aura $d(x)=\sqrt{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}}-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$.

Si $x\leq\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, alors $x-\dfrac{3}{2}\leq-\dfrac{\sqrt{5}}{2}<0$. D'où $-x+\dfrac{3}{2}>0$.

Scanned by CamScanner

Et puisque $\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}>0$ sur D_f, alors on peut conclure que $d(x)=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}-\left(x-\frac{3}{2}\right)>0$.

Si $x\geq\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, alors $x-\frac{3}{2}\geq\frac{\sqrt{5}}{2}>0$. Et on a : $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}<\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$.

Donc $\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}<\left|x-\frac{3}{2}\right|$. Or on a $x-\frac{3}{2}>0$, alors $\left|x-\frac{3}{2}\right|=x-\frac{3}{2}$.

Donc on a : $\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}<\left(x-\frac{3}{2}\right)$. D'où, $d(x)=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}-\left(x-\frac{3}{2}\right)<0$.

D'où : dans $\left]-\infty,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[$, on a $d(x)>0$ et donc la courbe de f est au-dessus de son asymptote oblique.

dans $\left]\frac{3+\sqrt{5}}{2},+\infty\right[$, on a $d(x)<0$, d'où la courbe de f est en dessous de son asymptote oblique.

- **Etudions la branche infinie en $-\infty$:**

La courbe de f est symétrique par rapport à la droite Δ, d'équation $x=\frac{3}{2}$.

D'où la courbe de f admet en $-\infty$, une asymptote, symétrique à son asymptote en $+\infty$, par rapport à la droite Δ.

Or, soit M(x , y) un point de la droite D d'équation $y=x-\frac{3}{2}$ et M'(X , Y) son symétrique orthogonal par rapport à Δ, on a : $\begin{cases}x+X=3\\Y=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-X\\y=Y\end{cases}$.

Ainsi, M(x , y) appartient à D : $y=x-\frac{3}{2}$, équivaut à $Y=3-X-\frac{3}{2}=-X+\frac{3}{2}$.

Le symétrique de la droite D par rapport à Δ est la droite d'équation : $y=-x+\frac{3}{2}$, qui est une équation de l'asymptote à la courbe de f en $-\infty$.

Exercice 12

Etudier les branches infinies des courbes représentatives des fonctions suivantes :

a) $f:x\mapsto\frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)^2}$ b) $f:x\mapsto\sqrt{(x+2)^2}-\frac{3}{x-1}$ c) $f:x\mapsto\frac{x^2+\sin x}{x}$

d) $f:x\mapsto\sqrt{x^2-4}$ e) $f:x\mapsto x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ f) $f:x\mapsto 3x-3\sqrt{x}$

g) $f:x\mapsto\frac{1}{x}-\sqrt{x}$ h) $f:x\mapsto\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$ i) $f:x\mapsto 2x-\sin x$.

Solution 12

a) f(x) existe si et seulement si $x\neq 0$ et $x\neq 1$.

D'où l'ensemble de définition de f est $D_f=]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2+1}{x^3-2x^2+x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{x^3-2x^2+x}=1$.

D'où la droite d'équation $y=1$ est asymptote (horizontale) à la courbe de f, en $+\infty$ et en $-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to0}(x^3+x^2+1)=1$ et $\lim\limits_{x\to0}x(x-1)^2=0$.

En plus, si $x<0$, alors $x(x-1)^2<0$ et si $x>0$, alors $x(x-1)^2>0$ sauf pour $x=1$.

Scanned by CamScanner

D'où $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$.

D'où la droite d'équation x = 0 est asymptote verticale à la courbe de f.

- $\lim\limits_{x \to 1} x^3 + x^2 + 1 = 3$ et $\lim\limits_{x \to 1} x(x-1)^2 = 0$.

Or si x appartient à $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $x(x-1)^2 > 0$. D'où $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

Et la droite d'équation x = 1 est asymptote verticale à la courbe de f.

b) $f(x) = \sqrt{(x+2)^2} - \dfrac{3}{x-1} = |x+2| - \dfrac{3}{x-1}$.

f(x) existe si et seulement si $x \neq 1$. D'où l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

On a : $\begin{cases} f(x) = -x - 2 - \dfrac{3}{x-1} & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = x + 2 - \dfrac{3}{x-1} & \text{si } x \geq -2 \text{ et } x \neq 1 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x - 2 - \dfrac{3}{x-1}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x + 2 - \dfrac{3}{x-1} = +\infty$.

Et $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (-x-2)] = \lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{3}{x-1} = 0$.

D'où la droite d'équation y = -x - 2 est asymptote oblique à la courbe de f en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{3}{x-1} = 0$.

D'où la droite d'équation y = x + 2 est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

- $\lim\limits_{x \to 1} (x+2) = 3$, $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} -\dfrac{3}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} -\dfrac{3}{x-1} = -\infty$.

D'où $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = -\infty$.

D'où la droite d'équation x = 1 est asymptote verticale à la courbe de f.

c) L'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Pour x < 0, on a : $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $x^2 - 1 \leq x^2 + \sin x \leq x^2 + 1$, donc $\dfrac{x^2+1}{x} \leq \dfrac{x^2+\sin x}{x} \leq \dfrac{x^2-1}{x}$ (car $x < 0$).

De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$. D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{x} = -\infty$.

Pour x > 0, on a : $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $x^2 - 1 \leq x^2 + \sin x \leq x^2 + 1$, donc $\dfrac{x^2-1}{x} \leq \dfrac{x^2+\sin x}{x} \leq \dfrac{x^2+1}{x}$.

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$. D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{x} = +\infty$.

- $f(x) = x + \dfrac{\sin x}{x}$. Or $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Attention: *La droite d'équation x = 0 n'est pas asymptote verticale à la courbe de f, car la limite de f en 1 n'est pas infinie.*

- Soit x un réel différent de 0, on a : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2+\sin x}{x^2}$.

On a : $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $x^2 - 1 \leq x^2 + \sin x \leq x^2 + 1$, donc $\dfrac{x^2-1}{x^2} \leq \dfrac{x^2+\sin x}{x^2} \leq \dfrac{x^2+1}{x^2}$.

Scanned by CamScanner

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1$, alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$.

De plus, on a : $f(x)-x=\frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

D'où $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$ et $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=0$.

D'où la droite d'équation y = x est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

d) f(x) existe si et seulement si $x^2-4\geq 0$, c'est-à-dire x appartient à $]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$.

D'où l'ensemble de définition de f est : $D_f=]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$.

Or $\lim_{x\to+\infty}(x^2-4)=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}(x^2-4)=+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}=1$,

et $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-4}-x)(\sqrt{x^2-4}+x)}{\sqrt{x^2-4}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}=0$.

D'où la droite d'équation y = x est asymptote (oblique) à la courbe de f en $+\infty$.

- $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}=-1$ et

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-4}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2-4}-x)(\sqrt{x^2-4}+x)}{\sqrt{x^2-4}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}-x}=0$.

D'où la droite d'équation y = – x est asymptote oblique à la courbe de f en $-\infty$.

e) f(x) existe si et seulement si, $\frac{x+1}{x-1}\geq 0$, c'est-à-dire x appartient à $]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[$.

D'où l'ensemble de définition de f est $D_f=]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[$.

- $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$, d'où $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=1$.

Par suite, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=1$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=1$.

De plus, $f(x)-x=x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-x=x\left(\frac{\frac{x+1}{x-1}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}\right)=\frac{\frac{2x}{x-1}}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}$.

Or $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-1}=2$ et $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1=2$, alors

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=1$.

Et finalement, la droite d'équation y = x + 1 est asymptote (oblique) à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

- $\lim_{x\xrightarrow{>}1}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$, d'où $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\sqrt{x}=+\infty$.

Scanned by CamScanner

Puisque, $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = +\infty$, alors, la droite d'équation x = 1 est asymptote (verticale) à la courbe de f.

f) f(x) existe si et seulement si $x \geq 0$. D'où l'ensemble de définition de f est : $D_f = [0, +\infty[$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}(3\sqrt{x} - 3) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 3 - \frac{3}{\sqrt{x}} = 3$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 3x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -3\sqrt{x} = -\infty$.

D'où la courbe de f a en $+\infty$, une branche parabolique de direction asymptotique, celle de la droite d'équation y = 3x.

g) f(x) existe si et seulement si, x > 0. D'où $D_f =]0, +\infty[$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

D'où, la courbe de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique, celle de l'axe des abscisses.

- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right) = +\infty$. D'où la droite d'équation x = 0 est asymptote à la courbe de f.

h) f(x) existe si et seulement si, $x \geq -1$ et $x \geq -2$, c'est-à-dire $x \geq -1$.

D'où, l'ensemble de définition de f est : $D_f = [-1, +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}\right) = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 0$.

D'où, la courbe de f admet en $+\infty$, une branche parabolique, de direction asymptotique, celle de l'axe des abscisses.

i) • L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

Soit x, un nombre réel. On a : $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $-1 \leq -\sin x \leq 1$, donc $2x - 1 \leq 2x - \sin x \leq 2x + 1$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 1) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x - 1) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

- Soit x un réel différent de 0, on a : $\frac{f(x)}{x} = 2 - \frac{\sin x}{x}$.

On a aussi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \frac{\sin x}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 2 - \frac{\sin x}{x} = 2$.

Puisque f(x) - 2x = - sinx n'admet pas de limite en l'infini, alors la courbe de f n'admet pas de branche parabolique, mais une direction asymptotique celle de la droite d'équation y = 2x, en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 13

Montrer que la courbe (C) d'équation $y = \frac{x^3 + 1}{x}$ est asymptote à la parabole P, d'équation $y = x^2$.

Solution 13

Soit x réel différent de 0, on a : $\frac{x^3 + 1}{x} - x^2 = \frac{1}{x}$.

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors P est asymptote à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 14

Soit a et b deux nombres réels, f la fonction définie par : $f(x) = ax + b - \sqrt{x^2 + 1}$.

1) Etudier la limite de f en $-\infty$. (On discutera suivant les valeurs de a)

2) Déterminer a et b pour que la droite d'équation 2x – y + 2 = 0 soit asymptote à la courbe de f en $-\infty$.

Scanned by CamScanner

Solution 14

1) Si $a>0$: $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax+b)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

Si $a=0$: $f(x)=b-\sqrt{x^2+1}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

Si $-1<a<0$: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}ax+b-\sqrt{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(a+\frac{b}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=-\infty$.

Si $a=-1$: $f(x)=-x+b-\sqrt{x^2+1}=\dfrac{(-x-\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})}{-x+\sqrt{x^2+1}}+b=\dfrac{-1}{-x+\sqrt{x^2+1}}+b$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}-x+\sqrt{x^2+1}=+\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$.

Si $a<-1$: On suppose $x<0$, alors $f(x)=x\left(a+\frac{b}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ (car $a+1<0$).

2) La droite d'équation $y=2x+2$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$ si et seulement,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2 \quad\text{et}\quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x)=2.$$

Or pour $x<0$, on a : $\dfrac{f(x)}{x}=a+\dfrac{b}{x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}a+\dfrac{b}{x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=a+1$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$, alors $a+1=2$, c'est-à-dire $a=1$. Et par suite, $f(x)=x+b-\sqrt{x^2+1}$.

Il en résulte que : $f(x)-2x=-x+b-\sqrt{x^2+1}=\dfrac{(-x-\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})}{-x+\sqrt{x^2+1}}+b=\dfrac{-1}{-x+\sqrt{x^2+1}}+b$.

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-2x=b$; et par suite $b=2$.

Finalement la droite d'équation $y=2x+2$ est asymptote à la courbe de f si et seulement si, $a=1$ et $b=2$.

C. Etudier la continuité en un réel - Etudier le prolongement par continuité

1 – Etudier la continuité en un réel

Exercice 15

Etudier la continuité de la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x^2-4|}{(x-2)(x^2+1)} & \text{si } x\neq 2 \\ f(2)=\dfrac{4}{5} & \end{cases}$ en 2 et en -2

Solution 15

Remarquons qu'on a : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-4}{(x-2)(x^2+1)} & \text{si } x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]2,+\infty\right[\\ f(x)=\dfrac{4-x^2}{(x-2)(x^2+1)} & \text{si } x\in\left]-2,2\right[\\ f(2)=\dfrac{4}{5} \text{ et } f(-2)=0 & \end{cases}$

Scanned by CamScanner

- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{4-x^2}{(x-2)(x^2+1)} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{-2-x}{x^2+1} = \dfrac{-4}{5}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \dfrac{x+2}{x^2+1} = \dfrac{4}{5}$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)$, alors f n'est pas continue en 2. Mais f est continue en 2 à droite car $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = f(2)$

- La fonction $x \mapsto x^2 - 4$ est continue en 2, donc la fonction $x \mapsto |x^2 - 4|$ est continue en 2.

De plus, la fonction $x \mapsto (x-2)(x^2+1)$ est continue et ne s'annule pas en 2, alors la fonction f est continue en 2, comme quotient de fonctions continues en 2.

Exercice 16

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|(x-1)(2x+1)|}{(x-1)(x^2+x+1)} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en x = 1 et en $x = -\dfrac{1}{2}$.

2) Préciser les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels f est continue.

Solution 16

1) f est définie sur $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} \text{ si } x \in \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[\cup]1, +\infty[\\ f(x) = \dfrac{-(2x+1)}{x^2+x+1} \text{ si } x \in \left]-\dfrac{1}{2}, 1\right[\end{cases}$ avec $f(1) = 1$ et $f(-\dfrac{1}{2}) = 0$.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{-(2x+1)}{x^2+x+1} = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} = 1$.

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$, alors f n'est pas continue en 1.

- La fonction $x \mapsto (x-1)(2x+1)$ est continue en $-\dfrac{1}{2}$, donc la fonction $x \mapsto |(x-1)(2x+1)|$ est continue en $-\dfrac{1}{2}$.

De plus, la fonction $x \mapsto (x-1)(x^2+x+1)$ est continue et ne s'annule pas en $-\dfrac{1}{2}$, alors la fonction f est continue en $-\dfrac{1}{2}$, comme quotient de fonctions continues en $-\dfrac{1}{2}$.

2) f est continue sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[$, sur $\left]-\dfrac{1}{2}, 1\right[$ et sur $]1, +\infty[$, car ses restrictions à ces intervalles, qui sont des fonctions rationnelles, y sont définies, donc continues.

Et en plus, f est continue en $-\dfrac{1}{2}$ et n'est pas continue en 1, alors f est continue sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

Exercice 17

Etudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = (1-x)^2 & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = x^2 + x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Solution 17

f est continue sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$, car ses restrictions à ces intervalles, qui sont des fonctions polynômes, y sont définies, donc continues.

Etudions la continuité de f en 2.

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} (1-x)^2 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} (x^2+x-5) = 1$.

Scanned by CamScanner

Puisque $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = f(2)$, alors f est aussi continue en 2. Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = (x+k)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 2\sqrt{x} - x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Déterminer le réel k pour que f soit continue en 1.

Solution 18

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} (x+k)^2 = (1+k)^2$, $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} (2\sqrt{x} - x + 1) = 2$ et $f(1) = (1+k)^2$.

f est continue en 1 si et seulement si, $(1+k)^2 = 2$. C'est-à-dire, $1+k = \sqrt{2}$ ou $1+k = -\sqrt{2}$.

D'où f est continue en 1 si et seulement si $k = -1+\sqrt{2}$ ou $k = -1-\sqrt{2}$.

Exercice 19

Déterminer le réel a pour que la fonction f qui suit soit continue sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = a \end{cases}$

Solution 19

f est continue sur $\mathbb{R}^*$, car sa restriction à $\mathbb{R}^*$, qui est une fonction rationnelle, y est définie, donc continue.

Etudions la continuité de f en 0 :

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} (x-1) = -1$.

f est continue en 0 si et seulement si a = - 1. D'où f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si a = - 1.

Exercice 20

Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto E(x) + [x - E(x)]^2$, où E(x) désigne la fonction partie entière.

Solution 20

Soit p un entier relatif.

Si x appartient à [p , p + 1[: alors E(x) = p et donc $f(x) = p + (x-p)^2 = x^2 - 2px + p^2 + p$.

f est continue sur]p , p + 1[, car sa restriction à cet intervalle est une fonction polynôme.

On peut donc conclure que f est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Etudions la continuité en tout entier relatif :

Soit p un entier relatif.

Dans [p - 1 , p[, E(x) = p - 1, donc $f(x) = (p-1) + (x-p+1)^2$.

Dans [p , p + 1[, E(x) = p, donc $f(x) = p + (x-p)^2$. Ainsi,

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} p} f(x) = \lim\limits_{x \to p} (p-1) + (x-p+1)^2 = p$, $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} p} f(x) = \lim\limits_{x \to p} p + (x-p)^2 = p$ et $f(p) = E(p) + (p - E(p))^2 = p$.

Comme $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} p} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} p} f(x) = f(p)$, alors f est donc continue en p.

D'où f est continue en tout entier relatif p. Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21

Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto x - E(x)$, où E(x) désigne la fonction partie entière

Solution 21

Soit p un entier relatif. **Si x appartient à [p, p + 1[,** alors E(x) = p et donc f(x) = x - p.

f est continue sur tout intervalle]p , p + 1[, d'où f est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Scanned by CamScanner

Etudions la continuité en tout entier relatif :
Soit p entier relatif.
Dans $]p-1, p[$, $f(x) = x - p + 1$.
Dans $]p, p+1[$, $f(x) = x - p$.
On a $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to p} (x - p + 1) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to p} (x - p) = 0$.
Puisque $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to p \\ >}} f(x)$, alors f n'est pas continue en p. D'où f est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

2 – Montrer qu'une fonction admet un prolongement par continuité

Exercice 22

Soit la fonction $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$.

1) Calculer la limite de la fonction f en 1.
2) En déduire une fonction g, prolongement par continuité de f en 1.

Solution 22

1) Soit x un réel différent de 1, on a :

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1} = \frac{(3x^2+1)-4}{(x-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)} = \frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)} = \frac{3(x+1)}{\sqrt{3x^2+1}+2}.$$ D'où, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{3}{2}$.

2) L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \{1\}$.

f n'est donc pas définie en 1, mais f admet en 1, une limite réelle $\frac{3}{2}$. D'où f admet un prolongement par continuité en 1, qui est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ g(1) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Exercice 23

Soit a un réel.

Déterminer suivant les valeurs de a, les limites en $+\infty$, en $-\infty$, en 5 de la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{ax^2 + (a^2+1)x + a}{x-5}$.

Cette fonction admet-elle un prolongement par continuité en 5 ?

Solution 23

- f(x) existe si et seulement si $x \neq 5$.

Limite en $-\infty$ et en $+\infty$:

Si a = 0, $f(x) = \dfrac{x}{x-5}$. Et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Si a < 0, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} ax = -\infty$.

Si a > 0, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} ax = +\infty$.

Limite en 5 :

$\lim\limits_{x \to 5} (ax^2 + (a^2+1)x + a) = 5a^2 + 26a + 5$ et $\lim\limits_{x \to 5} (x-5) = 0$.

Il faut donc savoir si $5a^2 + 26a + 5$ est positif, négatif ou nul. Pour cela, dressons son tableau de signe :

Scanned by CamScanner

x	$-\infty$		-5		$-\frac{1}{5}$		$+\infty$
$5a^2+26a+5$		+	0	-	0	+	

Ainsi,

Si $a \in]-\infty,-5[\cup\left]-\frac{1}{5},+\infty\right[$, alors on a $5a^2+26a+5>0$. Or le tableau de signe de $x-5$ est le suivant :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$x-5$		-	0	+	

D'où $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 5} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 5} f(x) = +\infty$.

Si $a \in \left]-5,-\frac{1}{5}\right[$, alors on a $5a^2+26a+5<0$. D'où, $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 5} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 5} f(x) = -\infty$.

Si $a = -5$, alors $f(x) = \dfrac{-5x^2+26x-5}{x-5} = \dfrac{(x-5)(-5x+1)}{x-5} = -5x+1$.

D'où, $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \lim\limits_{x\to 5}(-5x+1) = -24$.

Si $a = -\frac{1}{5}$, alors $f(x) = \dfrac{-\frac{1}{5}x^2+\frac{26}{25}x-\frac{1}{5}}{x-5} = \dfrac{-(x-5)(5x-1)}{25(x-5)} = -\frac{1}{25}(5x-1)$.

D'où, $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \lim\limits_{x\to 5} -\frac{1}{25}(5x-1) = -\frac{24}{25}$.

- D'après les calculs des limites ci-dessus, on remarque que, f n'est pas définie en 5, par contre, pour a = -5 et pour $a = -\frac{1}{5}$, on a respectivement $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = -24$ et $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = -\frac{24}{25}$ qui sont des réels.

D'où f admet un prolongement par continuité en 5 si et seulement si a prend l'une des valeurs – 5 ou $\frac{1}{5}$.

D. Etudier la dérivabilité en un réel - Préciser les tangentes et les demi tangentes

Exercice 24

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = 3-2x^2 & \text{si } x<0 \\ f(x) = 2x+3+\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1) Préciser l'ensemble de définition de f.
Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
Etudier la branche infinie en $+\infty$.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f.
Démontrer que la courbe de f admet deux demi tangentes au point d'abscisse zéro.
3) Etudier les variations de f. Tracer sa courbe.

Solution 24

1) • f est définie sur $\mathbb{R}$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(3-2x^2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x+3+\sqrt{x} = +\infty$.

• **Etudions la branche infinie en $+\infty$:**

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3+\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 2$.

Scanned by CamScanner

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}3+\sqrt{x}=+\infty$.

D'où la courbe de f admet en $+\infty$, une branche parabolique de direction la droite Δ d'équation $y = 2x$.

2) • f est continue et dérivable sur $]-\infty, 0[$, car sa restriction à cet intervalle, qui est une fonction polynôme, y est définie, donc continue et dérivable.

f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$, car sa restriction à cet intervalle est une somme de fonctions continues et dérivables sur $]0, +\infty[$.

Etudions la continuité de f en 0 :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(3-2x^2)=3$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}2x+3+\sqrt{x}=3$ et $f(0)=2(0)+3+\sqrt{0}=3$.

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=f(0)$, alors f est continue en 0. D'où, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Etudions la dérivabilité de f en 0 :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{3-2x^2-3}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}-2x=0.$$

0 est un réel, d'où f est dérivable en 0 à gauche et le nombre dérivé de f en 0 à gauche est $f'_g(0) = 0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{2x+3+\sqrt{x}-3}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}2+\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty.$$

D'où f n'est pas dérivable en 0 à droite. En définitive, f n'est pas dérivable en 0. Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

• Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)-f(0)}{x}$, alors la courbe de f admet en son point d'abscisse 0, deux demi tangentes.

3) Variations de f :

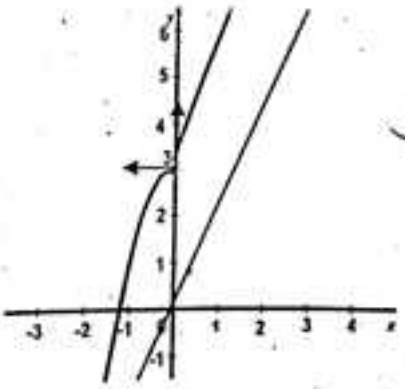
Soit x réel non nul. **Si $x < 0$,** alors $f'(x) = -4x$. Donc on a $f'(x) > 0$ lorsque $x < 0$.

Si $x > 0$, alors $f'(x)=2+\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc on a $f'(x) > 0$ lorsque $x > 0$.

D'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	3	↗	$+\infty$

La courbe de f :



Exercice 25

Etudier la dérivabilité de f la fonction définie par, $f(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}$ sur son ensemble de définition.

Scanned by CamScanner

Solution 25

- f est définie sur [-1, 1].
- La fonction $u : x \longmapsto 1 - x^2$ est dérivable sur]-1 , 1[et pour tout x appartenant à]-1 , 1[, on a $u(x) > 0$.

  La fonction $v : x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0 , +\infty[$.

D'où la fonction $v \circ u : x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur]-1 , 1[.

On en déduit que f est dérivable sur]-1 , 1[, car produit de deux fonctions dérivables sur]-1 , 1[($x \longmapsto 1-x$ et $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$).

- **Etudions la dérivabilité en -1 et en 1 :**

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \longrightarrow 1 \\ <}} \frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim_{\substack{x \longrightarrow 1 \\ <}} -\sqrt{1-x^2} = 0.$$

Comme 0 est un réel, alors on peut conclure que f est dérivable en 1 à gauche.

Puisque f n'est pas définie à droite de 1, on conclut que f est dérivable en 1.

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow -1 \\ >}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x \longrightarrow -1 \\ >}} \frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \lim_{\substack{x \longrightarrow -1 \\ >}} \frac{(1-x)^2(1+x)}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{x \longrightarrow -1 \\ >}} \frac{(1-x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty.$$

D'où f n'est pas dérivable en -1. Alors f est dérivable sur]-1 , 1].

Notons que puisque $\lim_{\substack{x \longrightarrow -1 \\ >}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = +\infty$, *alors la courbe de f admet au point d'abscisse -1, une demi tangente verticale.*

Point méthode :

Pour étudier la dérivabilité d'une fonction du type $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$:

- *On étudie la dérivabilité sur son ensemble de définition, sauf pour les valeurs a qui annulent u(x), en utilisant la dérivabilité des fonctions composées : en effet, si u est dérivable sur un intervalle I et si pour tout x dans I on au(x) > 0, alors la fonction* $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ *est dérivable sur I.*
- *Et on étudie la dérivabilité de f pour les valeurs a, en revenant à la définition.*

E. Appliquer l'inégalité des accroissements finis

Exercice 26

1) Démontrer que pour tout nombre réel a de l'intervalle $\left[0 , \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $a \leq \tan a \leq 2a$.

2) Démontrer que pour tous les nombres a et b dans $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$, avec a < b, on a : $\frac{b-a}{(\cos a)^2} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{(\cos b)^2}$.

Solution 26

1) Considérons la fonction f définie sur $\left[0 , \frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \tan x$.

f est dérivable sur $\left[0 , \frac{\pi}{4}\right]$ et pour tout x élément de $\left[0 , \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $f'(x) = 1 + \tan^2 x$.

Notons que, la fonction tangente est croissante sur $\left[0 , \frac{\pi}{4}\right]$.

Donc, comme $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, alors on a $0 \leq \tan x \leq 1$, donc $0 \leq \tan^2 x \leq 1$, d'où $1 \leq 1 + \tan^2 x \leq 2$.

Donc, pour tout x dans $\left[0 , \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $1 \leq f'(x) \leq 2$.

Scanned by CamScanner

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a : pour tout réel a dans $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $1(a-0) \leq f(a) - f(0) \leq 2(a-0)$.

D'où pour tout réel a dans $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $a \leq \tan a \leq 2a$.

2) La fonction tangente est dérivable dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout x dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Soit a et b appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, avec a < b, et x appartenant à [a , b].

Puisque la fonction cosinus est strictement décroissante et strictement positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$a \leq x \leq b$, donc $0 < \cos b \leq \cos x \leq \cos a$, donc $\cos^2 b \leq \cos^2 x \leq \cos^2 a$, donc $\frac{1}{\cos^2 a} \leq \frac{1}{\cos^2 x} \leq \frac{1}{\cos^2 b}$.

Donc pour tout x dans [a , b], on a : $\frac{1}{\cos^2 a} \leq f'(x) \leq \frac{1}{\cos^2 b}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors : $\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$.

Exercice 27

La fonction f est définie sur]0, +∞[par : $f(x) = \sqrt{x}$.

1) Soit x > 0 ; montrer que, pour tout t de [x , x + 1], on a : $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2) Déduire de l'inégalité des accroissements finis que, pour x > 0, on a : $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3) Retrouver ce résultat par un calcul algébrique.

Solution 27

1) f est dérivable sur]0 , +∞[et pour tout réel strictement positif t, $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

Soit x > 0, on a :

Si $x \leq t \leq x+1$, alors on a $\sqrt{x} \leq \sqrt{t} \leq \sqrt{x+1}$, donc $2\sqrt{x} \leq 2\sqrt{t} \leq 2\sqrt{x+1}$, d'où $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{t}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Par conséquent, pour tout t de [x , x + 1], on a : $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2) Soit x > 0, f est dérivable sur [x , x + 1] et pour tout t dans [x , x + 1], on a : $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Alors, d'après l'inégalité des accroissements finis, appliquée à f sur [x , x + 1], on a :

$$\frac{x+1-x}{2\sqrt{x+1}} \leq f(x+1) - f(x) \leq \frac{x+1-x}{2\sqrt{x}}.$$

D'où pour tout x > 0, on a : $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3) Soit x > 0, on a : $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$.

Comme $x + 1 \geq x$, alors $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x}$ (1). D'où,

d'une part, $2\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ *(en ajoutant $\sqrt{x+1}$ aux deux membres de l'inégalité (1))*

Scanned by CamScanner

. et d'autre part, $\sqrt{x+1}+\sqrt{x} \geq 2\sqrt{x}$ *(en ajoutant $\sqrt{x}$ aux deux membres de l'inégalité (1)).*

On en déduit alors que : $2\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x+1}+\sqrt{x} \geq 2\sqrt{x}$ et par suite, $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Comme $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$, alors on peut conclure que $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1}-\sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x > 0$.

Exercice 28

Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour obtenir une majoration du nombre : $\sqrt{33}-\sqrt{32}$.

Solution 28

Soit f la fonction définie sur [25 , 36] par : $f(x) = \sqrt{x}$.

f est dérivable sur [25 , 36] et pour tout x dans [25 , 36], on a : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Or $25 \leq x \leq 36$, donc $5 \leq \sqrt{x} \leq 6$, donc $10 \leq 2\sqrt{x} \leq 12$, alors $\frac{1}{12} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{10}$.

f est dérivable sur [25 , 36] et pour tout x dans [25 , 36], on a : $\frac{1}{12} \leq f'(x) \leq \frac{1}{10}$.

Ainsi, puisque [32 , 33] $\subset$ [25 , 36], d'après l'inégalité des accroissements finis, appliquée à f sur [32 , 33], on a :

$\frac{1}{12}(33-32) \leq f(33)-f(32) \leq \frac{1}{10}(33-32)$. C'est-à-dire $\frac{1}{12} \leq \sqrt{33}-\sqrt{32} \leq \frac{1}{10}$.

En définitive, un majorant de $\sqrt{33}-\sqrt{32}$ est 0,1.

Exercice 29

Soit f la fonction définie par : $f(x) = -0{,}5x^2 + x + 1$.

1) Montrer que pour tout x de [1 ; 1,5], on a : $|f'(x)| \leq 0{,}5$.

2) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, prouver que pour x dans [1 ; 1,5], on a : $|f(x)-\sqrt{2}| \leq 0{,}5|x-\sqrt{2}|$.

Solution 29

1) f est définie, continue et dérivable sur [1 ; 1,5] et pour tout x dans [1 ; 1,5], on a : $f'(x) = -x + 1$.

Soit x élément de [1 ; 1,5], on a : $1 \leq x \leq 1{,}5$, donc $-1{,}5 \leq -x \leq -1$, donc $-0{,}5 \leq -x + 1 \leq 0$, donc $|f'(x)| \leq 0{,}5$.

2) Remarquons que, $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ est élément de [1 ; 1,5].

On a montré que, pour tout x élément de [1 ; 1,5], on a $|f'(x)| \leq 0{,}5$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis, on a : pour tout x dans [1 ; 1,5], $|f(x)-f(\sqrt{2})| \leq 0{,}5|x-\sqrt{2}|$. C'est-à-dire $|f(x)-\sqrt{2}| \leq 0{,}5|x-\sqrt{2}|$.

F. Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue

Exercice 30

Soit f, fonction définie par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1) Etudier le sens de variation de f.

2) Déterminer les images des intervalles suivants : $]-\infty , 0]$, $\left]0 , \frac{1}{2}\right]$ et $[-2 , +\infty[$.

Solution 30

1) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, car fonction polynôme. Et pour tout réel x, $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.

D'où f ' est positive dans $]-\infty , 0]$ et dans $[1 , +\infty[$ et négative dans $[0 , 1]$.

Scanned by CamScanner

Avec f '(x) = 0 si et seulement si, x = 0 ou x = 1.
D'où f est strictement croissante dans]-∞, 0] et dans [1 , +∞[, et strictement décroissante dans [0 , 1].
On a donc le tableau de variations de f ci-dessous :

x	-∞		0		1		+∞
f '(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	-∞	↗	-1	↘	-2	↗	+∞

2) • f est croissante dans]-∞ , 0]. D'où, $f(]-\infty , 0]) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x) , f(0)\right] =]-\infty , -1]$.

• f est décroissante dans $\left]0 , \frac{1}{2}\right]$. D'où, $f\left(\left]0 , \frac{1}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right) , \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)\right[= \left[-\frac{3}{2} , -1\right[$.

• $[-2 , +\infty[= [-2 , 0] \cup [0 , 1] \cup [1 , +\infty[$, alors :

$$f([-2 , +\infty[) = f([-2 , 0]) \cup f([0 , 1]) \cup f([1 , +\infty[) = [f(-2) , f(0)] \cup [f(1) , f(0)] \cup \left[f(1) , \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$$

$$= [-29 , -1] \cup [-2 , -1] \cup [-2 , +\infty[$$

$$= [-29 , +\infty[.$$

G. Prouver que l'équation f(x) = a admet des solutions sur un intervalle donné - Encadrer les solutions éventuelles

Exercice 31

Soit f, fonction définie par : $f(x) = -2x^3 - 7x + 14$.

a) Etudier le sens de variation de f.

b) Déterminer $f(\mathbb{R})$, en déduire que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution a dans $\mathbb{R}$.

c) Montrer que a est compris entre 1 et 1,5.

Solution 31

a) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, car fonction polynôme.
Et pour tout réel x, $f'(x) = -6x^2 - 7$.
On remarque que, pour tout réel x, on a : f '(x) < 0. D'où f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) • $f(\mathbb{R}) = f(]-\infty , +\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x) , \lim_{x\to-\infty} f(x)\right[=]-\infty , +\infty[= \mathbb{R}$. Car f est continue et décroissante.

• f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $0 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
D'où l'équation f(x) = 0 admet une unique solution a sur $\mathbb{R}$.

c) f(1) = 5 et $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{13}{4}$. Puisque $f(1) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, alors on a : $1 < a < \frac{3}{2}$.

Exercice 32

Démontrer que l'équation $2x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ admet, dans $\mathbb{R}$, une unique solution α.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Solution 32

• f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, car fonction polynôme. Et pour tout réel x, $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$.
On a donc le tableau de variations de f ci-dessous :

x	-∞		0		1		+∞
f '(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	-∞	↗	-1	↘	-2	↗	+∞

Scanned by CamScanner

On constate que dans $]-\infty , 1]$, la fonction f est majorée par -1.
D'où pour tout $x \leq 1$, on a $f(x) \leq -1$. On en déduit que, pour tout $x \leq 1$, on a $f(x) < 0$.
L'équation $f(x) = 0$ n'a donc pas de solution dans $]-\infty, 1]$.

f est continue et strictement croissante sur $[1 , +\infty[$ et $f([1 , +\infty[) = \left]f(1) , \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= [-2 , +\infty[$.

Comme 0 appartient à $[-2 , +\infty[$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1 , +\infty[$.
En définitive, l'équation $2x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

- Encadrons la solution à 10^{-2} près :

Encadrons d'abord cette solution à 1 près : $f(1) = -2$, $f(2) = 3$ et donc $f(1)f(2) < 0$. On en déduit que $1 < \alpha < 2$.
Encadrons ensuite cette solution à 10^{-1} près : on a, à l'aide de la calculatrice :
$f(1,6)\times f(1,7) < 0$, donc on a $1,6 < \alpha < 1,7$.
Encadrons enfin cette solution à 10^{-2} près : on a à l'aide de la calculatrice :
$f(1,67)\times f(1,68) < 0$, donc on a $1,67 < \alpha < 1,68$.

Exercice 33

1) Montrer que si p(x) est un polynôme de degré impair, alors l'équation $P(x) = 0$ a au moins une solution réelle.
2) Vérifier que l'équation $x^5 + x - 1 = 0$ a une seule solution α, dont on déterminera une valeur approchée à 10^{-2} près.

Solution 33

1) P est un polynôme, donc P est continue sur $\mathbb{R}$. Or le degré du polynôme P est impair, alors :
Soit $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, soit $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$.
Dans tous les cas, $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Et comme $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

2) Soit P fonction telle que : $P(x) = x^5 + x - 1$.
P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : $P'(x) = 5x^4 + 1$ et $P'(x) > 0$.
D'où P est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $P(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) , \lim\limits_{x\to+\infty} P(x)\right[=]-\infty , +\infty[= \mathbb{R}$.

Comme $0 \in \mathbb{R}$, alors l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution réelle α

- On a : $P(0) = -1$ et $P(1) = 1$, d'où $0 < \alpha < 1$.
- On a, à l'aide de la calculatrice : $P(0,7).P(0,8) < 0$, d'où $0,7 < \alpha < 0,8$.
- On a, à l'aide de la calculatrice : $P(0,75).P(0,76) < 0$, d'où $0,75 < \alpha < 0,76$. D'où $\alpha \approx 0,755$.

Notons qu'une valeur approchée à 10^{-2} par défaut de α est 0,75 et par excès est 0,76.

Point méthode :
- *Pour montrer que l'équation $f(x) = a$ admet au moins une solution dans un intervalle I, il suffit de montrer que f est continue sur I et a appartient à f(I).*
- *Pour montrer que cette solution est unique, il suffit de montrer qu'en plus des conditions précédentes, f est strictement monotone sur I.*

Exercice 34

Montrer que l'équation $x^2 = x\sin x + \cos x$ admet deux solutions distinctes.

Solution 34

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$.
f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, car somme et produit de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a : $f'(x) = 2x - \sin x - x\cos x + \sin x = x(2 - \cos x)$.
Or pour tout réel x, on a $2 - \cos x > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est celui de x.
On en déduit que f est strictement croissante sur $[0 , +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty , 0]$.
Pour $x < 0$, on a :
$-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $x \leq -x\sin x \leq -x$ et $-1 \leq -\cos x \leq 1$, donc $x - 1 \leq -x\sin x - \cos x \leq -x + 1$.
On en déduit que $x^2 + x - 1 \leq x^2 - x\sin x - \cos x \leq x^2 - x + 1$. C'est-à-dire $x^2 + x - 1 \leq f(x) \leq x^2 - x + 1$.
On a donc : $x^2 + x - 1 \leq f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 + x - 1) = +\infty$, alors on peut écrire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Pour $x > 0$ on a :
$-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $-x \leq -x\sin x \leq x$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $-x - 1 \leq -x\sin x + \cos x \leq x + 1$.
On en déduit que $x^2 - x - 1 \leq x^2 - x\sin x + \cos x \leq x^2 + x + 1$. C'est-à-dire $x^2 - x - 1 \leq f(x) \leq x^2 + x + 1$.

Scanned by CamScanner

On a donc : $x^2 - x - 1 \leq f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x - 1) = +\infty$, alors on peut écrire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

- f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty , 0]$. $f(]-\infty , 0]) = \left[f(0) , \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\right[= [-1, +\infty[$ et $0 \in [-1 , +\infty[$. D'où l'équation f(x) = 0 admet une solution et une seule dans $]-\infty , 0]$.
- De même, f est continue et strictement croissante dans $[0 , +\infty[$,

$$f([0 , +\infty[) = \left[f(0) , \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[= [-1, +\infty[\quad \text{et} \quad 0 \in [-1 , +\infty[.$$

D'où l'équation f(x) = 0 a une unique solution dans $[0 , +\infty[$.
Finalement, comme $f(0) \neq 0$, alors l'équation f(x) = 0 admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

Exercice 35

f est une fonction continue sur [0, 1] et telle que, pour tout x dans [0, 1], f(x) appartient à [0, 1].
1) Démontrer qu'il existe au moins un réel a de [0, 1] vérifiant f(a) = a.
2) On suppose de plus que f est dérivable sur]0, 1[et que sa fonction dérivée vérifie, pour tout x dans]0, 1[, la condition $f'(x) < 1$. Démontrer qu'alors a est unique.

Solution 35

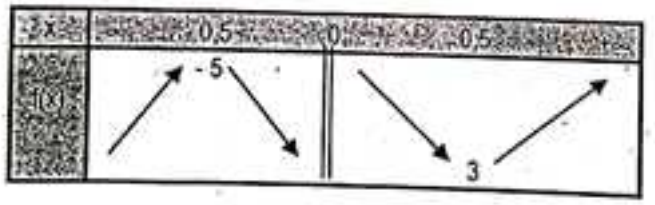
1) Notons g la fonction définie sur [0 , 1] par g(x) = f(x) – x.
g est continue sur [0 , 1] comme différence de deux fonctions continues sur [0 , 1].
g(0) = f((0) ∈ [0 , 1] et g(1) = f(1) – 1 .
Or f(1)∈ [0 , 1], donc g(1) = f(1) – 1∈ [-1 , 0].
alors g(0)×g(1) ≤ 0, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation g(x) = 0 possède au moins une solution a, dans [0 , 1].
Or g(x) = 0 équivaut à f(x) = x. Ainsi l'équation f(x) = x admet au moins une solution a dans [0 , 1].
2) g est dérivable sur]0 , 1[, car somme de fonctions dérivables sur]0 , 1[et pour tout x dans]0 , 1[, on a :
g'(x) = f '(x) – 1. Et d'après l'énoncé, on a f '(x) < 1, alors g'(x) < 0. D'où g est strictement décroissante sur [0 , 1].
g est aussi continue sur [0 , 1] et g(0)×g(1) < 0, alors l'équation g(x) = 0 admet une unique solution a dans [0 , 1].
Puisque g(x) = 0 équivaut à f(x) = x, alors l'équation f(x) = x admet une unique solution a.

H. Déduire le signe d'une fonction à partir de son tableau de variation

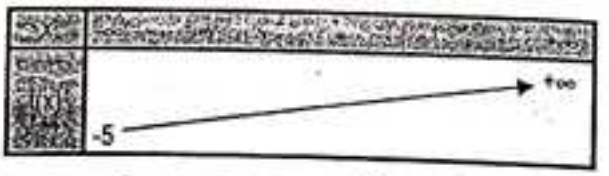
Exercice 36

Dans chacun des cas suivants, en utilisant le tableau de variation de f, déterminer le signe de f(x) :

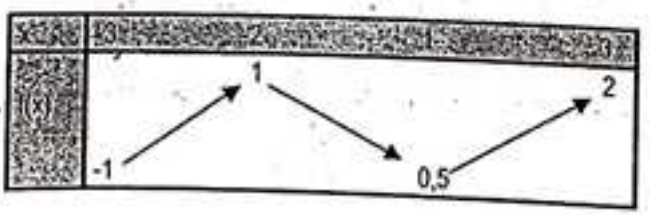
a)



b)

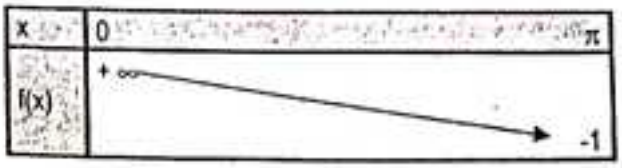


c)

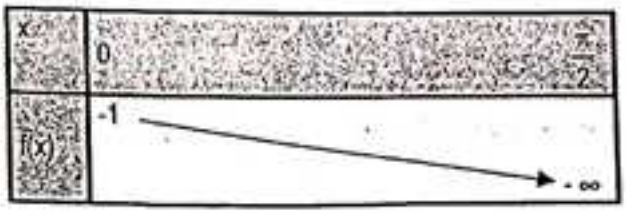


Scanned by CamScanner

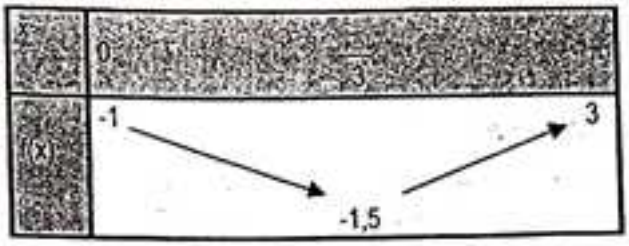
d)



e)



f)



Solution 36

a) Notons que f est définie pour tout réel non nul.

Dans $]-\infty, 0[$, f est majorée par –5, d'où pour tout réel $x < 0$, on a $f(x) \leq -5$, donc $f(x) < 0$.

Dans $]0, +\infty[$, f est minorée par 3, d'où pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) \geq 3$, donc $f(x) > 0$.

On conclut alors que : si $x < 0$, alors $f(x) < 0$ et si $x > 0$, alors $f(x) > 0$.

b) f est continue et strictement croissante dans $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) =]-5, +\infty[$.

Comme $0 \in]-5, +\infty[$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

D'où : **si** $x < \alpha$, alors, comme f est strictement croissante, on a $f(x) < f(\alpha)$, c'est-à-dire $f(x) < 0$.

si $\alpha < x$, alors, comme f est strictement croissante, on a $f(x) > f(\alpha)$, c'est-à-dire $f(x) > 0$.

c) Dans $[-2, 3]$, f est minorée par $\frac{1}{2}$, donc pour tout x dans $[-2, 3]$, on a $f(x) \geq \frac{1}{2}$. D'où on a $f(x) > 0$.

Dans $[-3, -2]$, f est continue et strictement croissante et $f([-3, -2]) = [-1, 1]$.

Or $0 \in [-1, 1]$, alors il existe un unique réel α dans $[-3, -2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Si $x < \alpha$, alors $f(x) < 0$ et si $\alpha < x < -2$, alors $f(x) > 0$.

Finalement **si** $-3 \leq x < \alpha$, alors $f(x) < 0$ et **si** $\alpha < x \leq 3$, alors $f(x) > 0$.

d) f est continue et strictement décroissante sur $]0, \pi[$ et $f(]0, \pi[) =]-1, +\infty[$.

$0 \in]-1, +\infty[$, donc il existe un unique réel α dans $]0, \pi[$ tel que $f(\alpha) = 0$. Et donc :

- Si $0 < x < \alpha$, alors, f étant strictement décroissante, on a $f(x) > f(\alpha)$. Donc $f(x) > 0$.
- Si $\alpha < x < 0$, alors, f étant strictement décroissante, on a $f(x) < f(\alpha)$. Donc $f(x) < 0$.

e) f est majorée par -1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc pour tout x dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $f(x) \leq -1$.

Donc pour tout x dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $f(x) < 0$.

f)• $f\left(\left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right) = \left[-1, -\frac{3}{2}\right]$. D'où pour tout x dans $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, on a $f(x) < 0$.

- f est continue et strictement croissante dans $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ et $f\left(\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]\right) = \left[-\frac{3}{2}, 3\right]$.

$0 \in \left[-\frac{3}{2}, 3\right]$, alors il existe exactement un réel α dans $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Point méthode :

• Il ne faut pas confondre le sens de variation et le signe d'une fonction. C'est l'erreur que commettent beaucoup d'élèves. Une fonction croissante n'est pas obligatoirement positive, de même qu'une fonction décroissante n'est pas obligatoirement négative. Et même, le signe de la dérivée d'une fonction f, n'est pas celui de la fonction f.

• Si une fonction continue sur un intervalle I ne s'annule pas sur cet intervalle, alors elle garde un signe constant dans cet intervalle. Cette propriété qui est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires nous sera très utile pour l'étude du signe de certaines fonctions.

Pour étudier le signe de f dans I sachant que f ne s'annule pas sur I, on choisit arbitrairement un nombre a dans I, on calcule f(a). Et le signe de f(x) sur I est celui de f(a).

Scanned by CamScanner

Ainsi, Si $\frac{\pi}{3} < x < \alpha$, alors, puisque f est strictement croissante, on a $f(x) < f(\alpha)$, c'est-à-dire $f(x) < 0$.

Si $\alpha < x < \pi$, alors, puisque f est strictement croissante, on a $f(\alpha) < f(x)$, c'est-à-dire $f(x) > 0$.

En définitive, si $x \in [0, \alpha[$, alors on a $f(x) < 0$.

Et si $x \in]\alpha, \pi]$, alors on a $f(x) > 0$.

I. Etudier les fonctions continues, strictement monotones sur un intervalle et leurs réciproques

Exercice 37

Soit f la fonction qui à x, associe $f(x) = x^3 + x + 1$.

Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on déterminera.

Comment déduire la courbe de f^{-1} de celle de f.

Solution 37

- La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a : $f'(x) = 3x^2 + 1$.

Puisque pour tout réel x, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

f étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, f établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

- Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 38

Le tableau de variation qui suit est celui d'une fonction f définie et continue sur un intervalle]-1 , 10] :

La fonction f est dérivable sur]-1 , 10], sauf en 1

x	-1	0	1	2	10
f'(x)	-	0	-	5	-
f(x)	$+\infty$	3	2	1	-1

1) Justifier que f admet une réciproque g. Préciser l'ensemble de définition et le sens de variation de g.

2) La fonction g est-elle dérivable en 1 ? En 2 ? En 3 ?

Justifier votre réponse et donner le nombre dérivé lorsque g est dérivable.

3) Préciser l'ensemble de dérivabilité de g.

Solution 38

1) Puisque f est continue et strictement décroissante sur]-1 , 10], alors f réalise une bijection de]-1 , 10] dans $f(]-1, 10]) = [-1, +\infty[$. D'où, f admet une réciproque g définie et strictement décroissante (même sens de variation que f) sur $[-1, +\infty[$.

2) • f est dérivable en 0, mais sa dérivée s'annule en 0, donc sa réciproque g n'est pas dérivable en $f(0) = 3$.

• f n'est pas dérivable en 1, donc g n'est pas dérivable en $f(1) = 2$.

• f est dérivable en 2 et $f'(2) = 5 \neq 0$, alors g est dérivable en $f(2) = 1$ et $g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{5}$.

3) f est dérivable sur $]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, 10]$ et sa dérivée ne s'annule pas sur cet ensemble, donc g est dérivable sur $g(]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, 10]) = [-1, 2[\cup]2, 3[\cup]3, +\infty[$.

Exercice 39

Soit f l'application de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers [0, 1] définie par : $f(x) = \sin^2 x$.

1) Démontrer que f admet une réciproque f^{-1}. Préciser le sens de variation de f^{-1}.

Scanned by CamScanner

2) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} et démontrer que sa dérivée est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$.

Solution 39

1) • f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, car produit de fonctions dérivables sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$f'(x) = 2\sin x.\cos x = \sin 2x$.

Comme $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $2x \in]0, \pi]$ et donc on a $\sin 2x \geq 0$, avec $\sin 2x = 0$ si et seulement $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2}$.

D'où f est strictement croissante sur $[0, \pi]$.

f étant continue et strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, f définit une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur

$f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left]f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] =]0, 1]$. Donc f admet une réciproque f^{-1}.

• f^{-1} a le même sens de variation que f, donc f^{-1} est strictement croissante sur $[0, 1]$.

2) f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, et $f'(x)$ s'annule en 0 et en $\frac{\pi}{2}$. D'où f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right) =]0, 1[$.

Et on a, pour tout x dans $]0, 1[$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{1}{2\sin[f^{-1}(x)].\cos[f^{-1}(x)]}$.

Or on a, pour x dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x > 0$ et $\cos x > 0$. D'où, $\sin x = \sqrt{\sin^2 x}$ et $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$.

C'est-à-dire $\sin x = \sqrt{f(x)}$ et $\cos x = \sqrt{1-f(x)}$.

On peut alors écrire $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(f^{-1}(x))}\sqrt{1-f(f^{-1}(x))}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$.

En définitive, f^{-1} est dérivable sur $]0, 1[$ et pour tout x dans $]0, 1[$, on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$.

Point méthode :

- *Si la dérivée s'annule en des valeurs isolées et garde un signe constant dans un intervalle, alors la fonction f est strictement monotone sur cet intervalle.*

Comme exemple, soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est $f'(x) = \sin^2 x$.

On a bien $f'(x) \geq 0$ et $f'(x)$ s'annule pour les $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On remarque que f' s'annule pour une infinité de valeurs, mais qui sont des valeurs isolées (elles ne forment pas un intervalle), donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- *Pour montrer qu'une fonction admet une réciproque, il suffit de montrer qu'elle est bijective.*

Les propriétés suivantes existent en une bijection f sur I et sa réciproque f^{-1} :

- f^{-1} est une bijection de $f(I)$ vers I.

- Pour tout x dans I, $f^{-1}of(x) = x$.

Pour tout x dans $f(I)$, $fof^{-1}(x) = x$

- Soit x dans I et y dans $f(I)$, $f(x) = y$ si et seulement si $f^{-1}(y) = x$.

- Soit a dans I et b dans $f(I)$ tels que $f(a) = b$.

- *Lorsque f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en b.*
- *Pour déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction réciproque f^{-1}, on calcule l'image par f de l'ensemble de dérivabilité de f auquel on enlève les images des valeurs en lesquelles f' s'annule.*

Exercice 40

Soit la fonction de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $[1, +\infty[$ définie par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

1) Démontrer que f admet une bijection réciproque f^{-1}.

Scanned by CamScanner

2) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} et démontrer que sa dérivée est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Solution 40

1) f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout x appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Or x appartient $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\sin x \geq 0$, avec $\sin x = 0$ si et seulement si $x = 0$.

D'où $f'(x) \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, et $f'(x)$ s'annule si et seulement si $x = 0$. f est donc strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

f étant continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, f définit une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur

$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left[f(0), \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)\right[= [1, +\infty[$. Donc f admet une bijection réciproque f^{-1}.

2) • f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(x)$ s'annule en $x = 0$. D'où f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]1, +\infty[$.

• Pour $x > 1$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{1}{\frac{\sin(f^{-1}(x))}{\cos^2(f^{-1}(x))}} = \frac{\cos^2(f^{-1}(x))}{\sin(f^{-1}(x))}$. Or $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, donc $\cos x = \frac{1}{f(x)}$.

Et comme dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin x > 0$, alors $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2} = \frac{\sqrt{(f(x))^2-1}}{f(x)}$.

D'où $(f^{-1})'(x) = \frac{\frac{1}{(f(f^{-1}(x)))^2}}{\frac{\sqrt{(f(f^{-1}(x)))^2-1}}{f(f^{-1}(x))}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

D'où f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour tout $x > 1$, on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

J. Calculer avec les puissances rationnelles

Exercice 41

Simplifier les écritures suivantes :

$A = 2\sqrt[4]{6561} - 5\sqrt[3]{27} - 3\sqrt{36}$ $\quad B = \frac{4\sqrt[3]{4} \times 2\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}}$ $\quad C = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ $\quad D = \sqrt{\sqrt{3}} + \sqrt[4]{1875} - \sqrt[4]{243}$.

Solution 41

• $A = 2\sqrt[4]{6561} - 5\sqrt[3]{27} - 3\sqrt{36} = 2\sqrt[4]{9^4} - 5\sqrt[3]{3^3} - 3\sqrt{6^2} = 2 \times 9 - 5 \times 3 - 3 \times 6 = -15$.

• $B = \frac{4\sqrt[3]{4} \times 2\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}} = \frac{4\sqrt[3]{2^2} \times 2\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}} = \frac{8 \times 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}} = \frac{8 \times 2^{\frac{7}{6}}}{2^{\frac{1}{6}}} = 8 \times 2 = 16$.

Point méthode

Soit x réel strictement positif.

• Notons que $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}$.

• Les règles de calcul sur les puissances rationnelles sont identiques à celles sur les puissances entières.

Scanned by CamScanner

- $C=\dfrac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}=\dfrac{2^{\frac{1}{5}}\times\sqrt{2^3}}{\sqrt{\sqrt[5]{2^7}}}=\dfrac{2^{\frac{1}{5}}\times 2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2^{\frac{7}{5}}}}=\dfrac{2^{\frac{17}{10}}}{\left(2^{\frac{7}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{2^{\frac{17}{10}}}{2^{\frac{7}{10}}}=2.$

- $D=\sqrt{\sqrt{3}}+\sqrt[4]{1875}-\sqrt[4]{243}=\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{3\times5^4}-\sqrt[4]{3\times3^4}=\sqrt[4]{3}+5\sqrt[4]{3}-3\sqrt[4]{3}=3\sqrt[4]{3}.$

Exercice 42

Mettre A sous la forme d'un quotient dont le dénominateur est rationnel.

a) $A=\dfrac{10^{\frac{3}{2}}\times 8^{-\frac{4}{3}}}{5\times4^{-\frac{7}{3}}}$ b) $A=\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}-1}$ c) $A=\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$.

Solution 42

a) $A=\dfrac{10^{\frac{3}{2}}\times 8^{-\frac{4}{3}}}{5\times4^{-\frac{7}{3}}}=\dfrac{5^{\frac{3}{2}}\times2^{\frac{3}{2}}\times(2^3)^{-\frac{4}{3}}}{5\times(2^2)^{-\frac{7}{3}}}=\dfrac{5^{\frac{3}{2}}\times2^{\frac{3}{2}}\times2^{-4}}{5\times2^{-\frac{14}{3}}}=\dfrac{5^{\frac{3}{2}}\times2^{\frac{3}{2}}\times(2^3)^{-\frac{4}{3}}}{5\times(2^2)^{-\frac{7}{3}}}=5^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{13}{6}}=4\sqrt{5}\times\sqrt[6]{2}.$

b) Soit a un réel, on a : $a^4-1=(a-1)(a^3+a^2+a+1)$.

Pour $a=\sqrt[4]{5}$, cette égalité devient : $5-1=(\sqrt[4]{5}-1)(\sqrt[4]{5^3}+\sqrt[4]{5^2}+\sqrt[4]{5}+1)$.

D'où $\sqrt[4]{5}-1=\dfrac{4}{\sqrt[4]{125}+\sqrt[4]{25}+\sqrt[4]{5}+1}$.

Finalement, $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}-1}=\dfrac{1}{4}(\sqrt[4]{5^3}+\sqrt[4]{5^2}+\sqrt[4]{5}+1)$.

c) On a : $1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}=1+\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2=\dfrac{1-(\sqrt[3]{3})^3}{1-\sqrt[3]{3}}=\dfrac{-2}{1-\sqrt[3]{3}}$. D'où $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}=\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2}$.

Exercice 43

Soit a et b deux réels.

1) Exprimer a en fonction de b pour que l'on ait : $a^{\frac{4}{5}}-2b^2a^{\frac{2}{5}}+b^4=0$.

2) Simplifier : $\dfrac{a^{\frac{6}{5}}-3a^{\frac{4}{5}}b^2+3a^{\frac{2}{5}}b^4-b^6}{a^{\frac{4}{5}}-2b^2a^{\frac{2}{5}}+b^4}$.

Solution 43

1) $a^{\frac{4}{5}}-2b^2a^{\frac{2}{5}}+b^4=0 \Leftrightarrow \left(a^{\frac{2}{5}}\right)^2-2b^2a^{\frac{2}{5}}+(b^2)^2=0 \Leftrightarrow \left(a^{\frac{2}{5}}-b^2\right)^2=0 \Leftrightarrow a^{\frac{2}{5}}-b^2=0 \Leftrightarrow a^{\frac{2}{5}}=b^2.$

Finalement, on a : $a=(b^2)^{\frac{5}{2}}=b^5$. C'est-à-dire $a=b^5$.

2) $\dfrac{a^{\frac{6}{5}}-3a^{\frac{4}{5}}b^2+3a^{\frac{2}{5}}b^4-b^6}{a^{\frac{4}{5}}-2b^2a^{\frac{2}{5}}+b^4}=\dfrac{\left(a^{\frac{2}{5}}-b^2\right)^3}{\left(a^{\frac{2}{5}}-b^2\right)^2}=a^{\frac{2}{5}}-b^2.$

Scanned by CamScanner

Exercice 44

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}}\right)^3 + 125 = 0$.

Solution 44

$$\left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}}\right)^3 + 125 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}}\right)^3 = (-5)^3 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}} = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-\sqrt[3]{x} \neq 0 \\ 1-\sqrt[3]{x} = -15+5\sqrt[3]{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} \neq 3 \\ 6\sqrt[3]{x} = 16 \end{cases}$$

On en déduit que $\begin{cases} x \neq 27 \\ \sqrt[3]{x} = \frac{8}{3} \end{cases}$. C'est-à-dire, $x = \frac{512}{27}$.

Finalement, l'ensemble solution de l'équation est $S = \left\{\frac{512}{27}\right\}$.

Exercice 45

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{2}} = 0 \\ x^{\frac{3}{4}} - 32y^{\frac{1}{4}} = 0 \end{cases}$, d'inconnue le couple (x, y).

Solution 45

Ce système est résolu sous la condition $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

Et : $\begin{cases} x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{2}} = 0 \\ x^{\frac{3}{4}} - 32y^{\frac{1}{4}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{\frac{1}{4}} - \left(y^{\frac{1}{4}}\right)^2 = 0 \\ \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^3 - 32y^{\frac{1}{4}} = 0 \end{cases}$

Point méthode :
a et b sont deux réels strictement positifs.
Notons que $a^{\frac{p}{q}} = b$ *signifie* $a = b^{\frac{q}{p}}$

On pose alors : $X = x^{\frac{1}{4}}$ et $Y = y^{\frac{1}{4}}$. On a alors :

$$\begin{cases} X - Y^2 = 0 \\ X^3 - 32Y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = Y^2 \\ Y^6 - 32Y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = Y^2 \\ Y(Y^5 - 2^5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = Y^2 \\ Y = 0 \text{ ou } Y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} X = 4 \\ Y = 2 \end{cases}$$

Pour X = 0 et Y = 0, on a : $x^{\frac{1}{4}} = 0$ et $y^{\frac{1}{4}} = 0$. C'est-à-dire $x = 0$ et $y = 0$.

Pour X = 4 et Y = 2, on a : $x^{\frac{1}{4}} = 4$ et $y^{\frac{1}{4}} = 2$. C'est-à-dire, $x = 4^4 = 256$ et $y = 2^4 = 16$.

D'où, l'ensemble solution du système est : $S = \{(0, 0), (256, 16)\}$.

Exercice 46

Soit $A = \sqrt[3]{28 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}} + \sqrt[3]{28 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}}$.

On se propose de déterminer la valeur exacte de A, sans utiliser la calculatrice. On pose pour cela : $\alpha = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}$,

$u = \sqrt[3]{28 + \alpha}$ et $v = \sqrt[3]{28 - \alpha}$. De ce fait, $A = u + v$.

1) Montrer que $A^3 = 56 + 3uvA$.
Calculer $u^3 v^3$ et en déduire que $A^3 = 56 + 2A$.

Scanned by CamScanner

2) Etudier la fonction f : $x \to x^3 - 2x - 56$ et montrer que l'équation f(x) = 0 admet une seule solution positive. Calculer f(4) et en déduire la valeur exacte de A.

Solution 46

1) • On a : $A^3 = (u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 = 28 + \alpha + 28 - \alpha + 3uv(u+v) = 56 + 3uvA$. D'où $A^3 = 56 + 3uvA$.

• On a aussi : $u^3v^3 = (28+\alpha)(28-\alpha) = 784 - \frac{4}{9} \times \frac{5290}{3} = \frac{8}{27}$.

• Puisque $(uv)^3 = \frac{8}{27}$, alors $uv = \frac{2}{3}$. Et par suite, $A^3 = 56 + 3 \times \frac{2}{3}A = 56 + 2A$. D'où $A^3 = 56 + 2A$.

2) • f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : $f'(x) = 3x^2 - 2$.

D'où f est strictement croissante dans chacun des intervalles $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ et $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right[$.

f est strictement décroissante dans $\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$. On a le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

• **Montrons que l'équation f(x) = 0 admet une solution positive et une seule.**

• f est strictement décroissante dans $\left]0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$. D'où, pour tout x dans $\left]0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$, on a $f(x) \leq f(0) = -56$.

D'où pour tout x dans $\left]0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$, on a f(x) < 0. Finalement l'équation f(x) = 0 n'a pas de solution dans $\left]0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$.

• Par contre, f est continue et strictement croissante sur $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right[$ et $f\left(\left[\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right[\right) = \left[-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 56, +\infty\right[$.

. Comme $0 \in \left[-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 56, +\infty\right[$, alors l'équation f(x) = 0 a une unique solution dans $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right[$.

Par conséquent l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α positive.

• Or f(4) = 64 – 8 – 56 = 0. D'où 4 est l'unique racine positive de l'équation f(x) = 0.

Comme A est aussi une racine positive de l'équation f(x) = 0, alors A = 4.

K. Déterminer les primitives

Exercice 47

Déterminer l'ensemble des primitives, sur un ensemble I que l'on précisera, de chacune des fonctions définies ci-dessous :

a) $f(x) = x^{16} - 35x^{15} + 14x^{12} - 7x^8 - 17x + 1$

b) $f(x) = \frac{2x^5 + 3x^3 + x^2 + 5}{x^2}$

c) $f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2$

d) $f(x) = f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + x^{\frac{5}{3}}$

e) $f(x) = \tan^2 x$

Solution 47

a) f est continue sur $\mathbb{R}$, d'où f y admet des primitives. Une primitive de f est la fonction F définie par :

Scanned by CamScanner

$$F(x)=\frac{1}{16+1}x^{16+1}-35\frac{1}{15+1}x^{15+1}+14\frac{1}{12+1}x^{12+1}-7\frac{1}{8+1}x^{8+1}-17\frac{1}{1+1}x^{1+1}+x,$$

soit $F(x)=\frac{1}{17}x^{17}-\frac{35}{16}x^{16}+\frac{14}{13}x^{13}-\frac{7}{9}x^{9}-\frac{17}{2}x^{2}+x.$.

D'où les primitives de f sont les fonctions F_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_k(x)=\frac{1}{17}x^{17}-\frac{35}{16}x^{16}+\frac{14}{13}x^{13}-\frac{7}{9}x^{9}-\frac{17}{2}x^{2}+x+k\text{, où k est une constante réelle.}$$

b) f est continue sur $\mathbb{R}^*$, d'où f y admet des primitives. Pour tout réel non nul x, $f(x)=2x^3+3x+1+5\frac{1}{x^2}$.

Donc une primitive de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$, par :

$$F(x)=2\frac{1}{4}x^4+3\frac{1}{2}x^2+x+5\frac{-1}{(2-1)x^{2-1}},\quad\text{soit}\quad F(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{2}x^2+x-\frac{5}{x}.$$

D'où les primitives de f sont les fonctions F_k définies sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$F_k(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{2}x^2+x-\frac{5}{x}+k\text{, où k est une constante réelle.}$$

c) f est continue sur $\mathbb{R}^*$, d'où f y admet des primitives. Pour tout réel non nul x, $f(x)=x^4+2+\frac{1}{x^4}$.

Donc une primitive de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$, par : $F(x)=\frac{1}{5}x^5+2x-\frac{1}{3x^3}$.

D'où les primitives de f sont les fonctions F_k définies sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$F_k(x)=\frac{1}{5}x^5+2x-\frac{1}{3x^3}+k\text{, où k est une constante réelle.}$$

d) f est continue sur $]0,+\infty[$, d'où f y admet des primitives.

Pour tout réel non nul x, $f(x)=x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}+x^{\frac{5}{3}}$.

Donc une primitive de f est la fonction F définie sur $]0,+\infty[$, par :

$$F(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+1}+2\sqrt{x}+\frac{1}{1+\frac{5}{3}}x^{\frac{5}{3}+1},\quad\text{soit}\quad F(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x}+\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}.$$

D'où les primitives de f sont les fonctions F_k définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$F_k(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x}+\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}+k\text{, où k est une constante réelle.}$$

e) f est continue sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\text{ où }k\in\mathbb{Z}\right\}$, d'où f y admet des primitives.

Pour tout réel x dans $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\text{ où }k\in\mathbb{Z}\right\}$, $f(x) = (1 + \tan^2 x) - 1$.

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\text{ où }k\in\mathbb{Z}\right\}$ est la fonction F définie par $F(x) = \tan x - x$.

D'où les primitives de f sont les fonctions F_k définies sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\text{ où }k\in\mathbb{Z}\right\}$ par :

$F_k(x) = \tan x - x + k$, où k est une constante réelle.

Exercice 48

Déterminer une primitive sur un ensemble I à préciser si possible, de chacune des fonctions ci-dessous :

Scanned by CamScanner

Pour tout réel $x \geq 3$, $f(x) = (x-3)(x-3)^{\frac{1}{2}} = (x-3)^{\frac{3}{2}}$.

Posons $u(x) = x - 3$, on a alors $u'(x) = 1$. Ainsi, pour tout réel $x \geq 3$, $f(x) = u'(x)(u(x))^{\frac{3}{2}}$.

Alors une primitive de f est la fonction F définie sur $[3, +\infty[$ par :

$F(x) = \dfrac{1}{1+\frac{3}{2}}(u(x))^{\frac{3}{2}+1}$, soit $F(x) = \dfrac{2}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}} = \dfrac{2}{5}(x-3)^2\sqrt{x-3}$.

g) f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Donc f y admet des primitives.

Posons $u(x) = x^2 + x + 1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x + 1$. D'où pour tout réel x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$.

Alors une primitive de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = 2\sqrt{u(x)}$, soit $F(x) = 2\sqrt{x^2+x+1}$.

h) f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Donc f y admet des primitives.

Une primitive de $x \mapsto \cos 3x$ est $x \mapsto \dfrac{1}{3}\sin 3x$.

Une primitive de $x \mapsto \sin 3x$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{3}\cos 3x$.

Une primitive de $x \mapsto \sin(2x+5)$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\cos(2x+5)$.

Une primitive de $x \mapsto \cos x$ est $x \mapsto \sin x$.

Donc une primitive de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \dfrac{5}{3}\sin 3x + \cos 3x - 2\cos(2x+5) - 2\sin x$.

i) f(x) existe si et seulement si, $x^2 \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{N}$, soit $x \neq \sqrt{\dfrac{\pi}{2}+k\pi}$ et $x \neq -\sqrt{\dfrac{\pi}{2}+k\pi}$, avec $k \in \mathbb{N}$.

f est définie et continue sur $D_f = \mathbb{R} - \left\{\sqrt{\dfrac{\pi}{2}+k\pi}, -\sqrt{\dfrac{\pi}{2}+k\pi}, k \in \mathbb{N}\right\}$. f y admet donc des primitives.

Posons $u(x) = x^2$, alors on a $u'(x) = 2x$ et $f(x) = \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$.

Une primitive de f est alors la fonction F définie par : $F(x) = \tan(u(x))$, soit $F(x) = \tan(x^2)$.

Exercice 49

La fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{3x^2-6x+5}{(x-1)^2}$.

1) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout réel x différent de 1, on a : $f(x) = a + \dfrac{b}{(x-1)^2}$.

2) En déduire une primitive de f sur $]1, +\infty[$.

3) Déterminer la primitive de f sur $]1, +\infty[$ prenant la valeur 8 en 3.

Solution 49

1) Soit x réel différent de 1, on a :

$$f(x) = \frac{3x^2-6x+5}{(x-1)^2} = \frac{3(x^2-2x+1)+2}{(x-1)^2} = \frac{3(x-1)^2+2}{(x-1)^2} = 3 + \frac{2}{(x-1)^2}.$$

Par identification, a = 3 et b = 2.

2) Soit $x > 1$, on a : $f(x) = 3 + \dfrac{2}{(x-1)^2}$.

Scanned by CamScanner

a) $f(x)=\dfrac{2}{(3+2x)^2}$ b) $f(x)=\dfrac{x+1}{(x^2+2x+1)^4}$ c) $f(x)=\cos x \sin^4 x$

d) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ e) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ f) $f(x)=(x-3)\sqrt{x-3}$

g) $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ h) $f(x)=5\cos 3x-3\sin 3x+4\sin(2x+5)-2\cos x$ i) $f(x)=\dfrac{2x}{\cos^2 x^2}$

Solution 48

a) f est définie et continue sur $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$. Donc f y admet des primitives.

Posons $u(x) = 3 + 2x$. u est dérivable sur $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$ et $u'(x) = 2$.

D'où pour tout réel x dans $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$, $f(x)=\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$.

Alors une primitive de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$ par $F(x)=\dfrac{-1}{(2-1)u(x)}$, soit $F(x)=\dfrac{-1}{3+2x}$.

b) f est définie et continue sur $\mathbb{R}-\{1\}$. Donc f y admet des primitives.

Posons $u(x) = x^2 + 2x + 1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$ et $u'(x) = 2x + 2 = 2(x + 1)$.

D'où pour tout réel x dans $\mathbb{R}-\{1\}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{(u(x))^4}$.

Une primitive de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $F(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{-1}{(4-1)(u(x))^3}$, soit $F(x)=\dfrac{-1}{6(x^2+2x+1)^3}$.

c) f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc y admet des primitives.
Posons $u(x) = \sin x$, on a alors $u'(x) = \cos x$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = u'(x)(u(x))^4$.

Donc une primitive de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\dfrac{1}{4+1}\sin^{4+1}x$, soit $F(x)=\dfrac{1}{5}\sin^5 x$.

d) f est définie et continue sur $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \text{ où } k\in\mathbb{Z}\right\}$. Donc f y admet des primitives.

Posons $u(x) = \cos x$. u est dérivable sur $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \text{ où } k\in\mathbb{Z}\right\}$ et $u'(x) = -\sin x$.

D'où pour tout réel x dans $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \text{ où } k\in\mathbb{Z}\right\}$, $f(x)=-\dfrac{u'(x)}{(u(x))^3}$.

Alors une primitive de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \text{ où } k\in\mathbb{Z}\right\}$ par :

$$F(x)=-\frac{-1}{(3-1)(u(x))^{3-1}}, \text{ soit } F(x)=\frac{1}{2\cos^2 x}.$$

e) f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Donc f y admet des primitives.

Posons $u(x)=\dfrac{1}{x}$. u est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $u'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

D'où pour tout réel x dans $\mathbb{R}^*$, $f(x) = -u'(x)\sin(u(x))$.

Alors une primitive de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $F(x) = \cos(u(x))$, soit $F(x)=\cos\dfrac{1}{x}$.

f) f est définie et continue sur $[3, +\infty[$. Donc f y admet des primitives.

Scanned by CamScanner

Posons $u(x) = x - 1$, on a $u'(x) = 1$ et $f(x) = 3 + 2\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$.

Donc une primitive de f sur $]1, +\infty[$ est la fonction F définie par : $F(x) = 3x + 2\dfrac{-1}{u(x)}$. Soit $F(x) = 3x - \dfrac{2}{x-1}$.

3) Les primitives de f sur $]1, +\infty[$ sont les fonctions G définies par : $G(x) = 3x - \dfrac{2}{x-1} + k$, où k est une constante réelle. Or $G(3) = 8$, c'est-à-dire $9 - 1 + k = 8$. Alors $k = 0$. D'où $G(x) = 3x - \dfrac{2}{x-1}$.

Finalement, la primitive de f sur $]1, +\infty[$ prenant la valeur 8 en 3 est la fonction F définie par : $F(x) = 3x - \dfrac{2}{x-1}$.

Exercice 50

1) Linéariser $\cos^4 x$

2) Utiliser cette linéarisation pour déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $f : x \mapsto \cos^4 x$.

Solution 50

1) Soit x un nombre réel,

$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16} = \frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{16} + \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{4} + \frac{3}{8}.$$

D'où, $\cos^4 x = \dfrac{1}{8}\cos 4x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{3}{8}$.

Point méthode :

Pour déterminer une primitive de $\cos^n x$ ou de $\sin^n x$: avec n pair, on peut linéariser $\cos^n x$, puis calculer les primitives en utilisant les primitives de : $x \mapsto \sin(ax+b)$ ou $x \mapsto \cos(ax+b)$ qui sont respectivement $x \mapsto -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$

(voir exercice 50)

2) Pour tout réel x,

$$f(x) = \cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}.$$

D'où une primitive de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x.$$

Exercice 51

1) Développer $(1 - \cos^2 x)^2$.

2) En remarquant que $\sin^5 x = \sin^4 x \sin x$, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $f : x \mapsto \sin^5 x$.

3) Utiliser une méthode analogue pour déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $f : x \mapsto \cos^5 x$.

Solution 51

1) soit x un nombre réel, $(1 - \cos^2 x)^2 = 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$

2) soit x un nombre réel,

$\sin^5 x = \sin^4 x \sin x$

$= (1 - \cos^2 x)^2 \sin x$

$= (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)\sin x$

$= \sin x - 2\cos^2 x \sin x + \cos^4 x \sin x$.

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par : $F(x) = -\cos x + \dfrac{2}{3}\cos^3 x - \dfrac{1}{5}\cos^5 x$.

3) Soit x un nombre réel, $(1 - \sin^2 x)^2 = 1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x$

Point méthode :

Pour déterminer une primitive de $\cos^n x$ ou de $\sin^n x$: avec n impair, on peut écrire

$$\cos^n x = \cos^{n-1} x \cos x = (\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cos x = (1 - \sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cos x$$

$$\text{ou } \sin^n x = \sin^{n-1} x \sin x = (\sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \sin x = (1 - \cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \sin x$$

, puis développer les expressions obtenues, et enfin déterminer les primitives en utilisant les primitives de $x \mapsto \sin x \cos^n x$ et $x \mapsto \cos x \sin^n x$, qui sont respectivement, $x \mapsto -\dfrac{1}{n+1}\cos^{n+1} x$ et $x \mapsto \dfrac{1}{n+1}\sin^{n+1} x$.

(voir exercice 51).

Donc, $\cos^5 x = \cos^4 x \cos x = (1 - \sin^2 x)^2 \cos x = (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\cos x = \cos x - 2\sin^2 x \cos x + \sin^4 x \cos x$.

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par : $F(x) = \sin x - \dfrac{2}{3}\sin^3 x + \dfrac{1}{5}\sin^5 x$.

Scanned by CamScanner

I. Etudier quelques fonctions

Exercice 52

1) Etudier les variations de la fonction f définie par : $f(x)=\frac{2x^3+27}{2x^2}$.

2) Etudier les branches infinies à la courbe de f. Tracer cette courbe

Solution 52

1) L'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R}^*$.

Il n'y a pas de symétrie évidente, on étudie alors f sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction f étant rationnelle, elle est continue et dérivable sur son ensemble de définition $D_f=\mathbb{R}^*$.

Soit f ' sa fonction dérivée, on a pour tout $x\neq 0$, $f'(x)=\frac{6x^2\times 2x^2-4x(2x^3+27)}{4x^4}=\frac{4x^4-4\times 27x}{4x^4}=\frac{4x(x^3-27)}{4x^4}$.

Pour tout réel non nul x, on a $4x^4>0$. Donc le signe de f '(x) est celui de $4x(x^3-27)$.

Or $x^3-27>0$ si et seulement si $x>3$. Il en résulte donc que le signe de f '(x) est celui de $x(x-3)$.

On a donc pour x dans $]-\infty,0[\cup]3,+\infty[$ f '(x) > 0 et pour x dans $]0,3[$, f '(x) < 0.

Donc f est strictement croissante dans $]-\infty,0[$ et dans $]3,+\infty[$ et f est strictement décroissante dans $]0,3[$.

$\lim\limits_{x\to 0}(2x^3+27)=27$ et $\lim\limits_{x\to 0}2x^2=0$. Comme pour tout réel non nul x, on a $x^2>0$, alors :

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3+27}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
f '(x)		+		-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	4,5	↗	$+\infty$

2) Etudions les branches infinies :

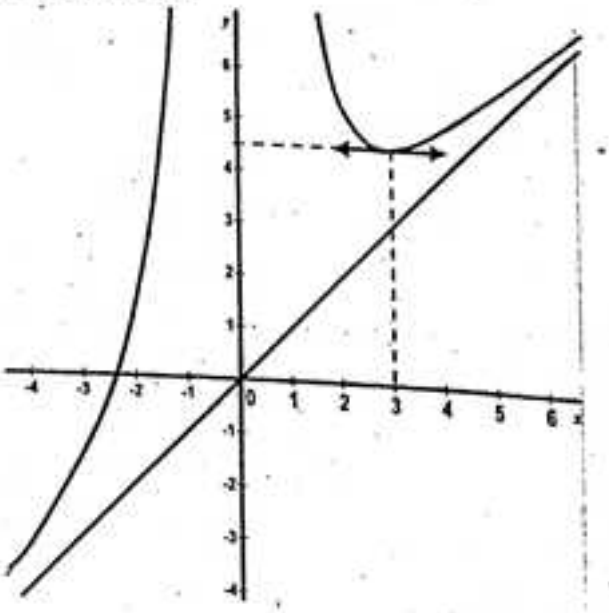
- $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$, donc l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe de f.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3+27}{2x^3}=1$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3+27}{2x^3}=1$.

Et pour tout réel x non nul, $f(x)-x=\frac{27}{2x^2}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{27}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{27}{2x^2}=0$, alors la droite d'équation y = x est asymptote oblique à la courbe de f.

$2x^3+27=0$ signifie $x=-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$. La courbe de f coupe alors l'axe des abscisses au point d'abscisse $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.



Scanned by CamScanner

Exercice 53

1) Etudier les variations de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2}$.

2) Montrer que la courbe de f et la parabole P d'équation $y = x^2 + 2$ sont asymptotes l'une de l'autre. Déterminer l'autre asymptote.

3) Montrer que la courbe de f admet deux points d'inflexion dont on précisera les coordonnées.

4) Tracer sa courbe et la parabole P.

Solution 53

1) L'ensemble de définition de f est $D_f=\mathbb{R}^*$.

On a pour tout x dans $\mathbb{R}^*$, $f(-x) = f(x)$. Donc la fonction f est paire. Sa courbe est par conséquent symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Nous allons alors étudier f sur $]0, +\infty[$.

La fonction f étant rationnelle, elle est continue et dérivable sur D_f.

On a pour tout $x \neq 0$, $f'(x)=\dfrac{(4x^3+4x)x^2-2x(x^4+2x^2-3)}{x^4}=\dfrac{2x^5+6x}{x^4}=\dfrac{2x(x^4+3)}{x^4}$.

Par suite, pour tout $x > 0$, on a $f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante dans $]0, +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 0}(x^4+2x^2-3)=-3$ et $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$. Comme pour tout réel $x \neq 0$, on a $x^2 > 0$, alors $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$. Donc le tableau de variation suivant sur $]0, +\infty[$:

x	0	
f'(x)	||	+
f(x)	||	$+\infty$
	||	$-\infty$

2) • $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x^2+2))=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(x^2+2))=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3}{x^2}=0$.

Donc la courbe de f et la parabole P d'équation $y = x^2 + 2$, sont asymptotes l'une de l'autre en $+\infty$ et en $-\infty$.

• $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$, donc l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe de f.

3) On a pour tout $x \neq 0$, $f''(x)=\dfrac{(10x^4+6)x^4-4x^3(2x^5+6x)}{x^8}=\dfrac{2(x^4-9)}{x^4}=\dfrac{2(x^2-3)(x^2+3)}{x^4}$.

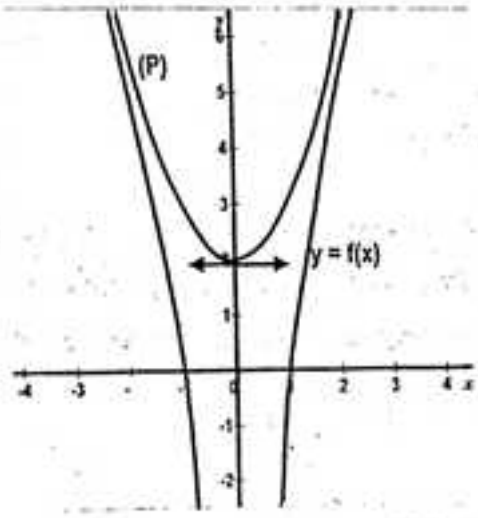
$f''(x) = 0$ si et seulement si $x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$.

De plus, le signe de $f''(x)$ est celui de $x^2 - 3$. Ainsi, $f''(x)$ change de signe aux passages de $\sqrt{3}$ et de $-\sqrt{3}$, d'où les points $A(\sqrt{3}, f(\sqrt{3}))$ et $B(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3}))$, c'est-à-dire $A(\sqrt{3}, 4)$ et $B(-\sqrt{3}, 4)$ sont des points d'inflexion pour la courbe de f.

4) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ si et seulement si $(x^2 - 1)(x^2 + 3) = 0$, c'est-à-dire $x = 1$ ou $x = -1$.

La courbe de f coupe donc l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 1.

Notons que P est une parabole de sommet G de coordonnées (0 , 2).



Scanned by CamScanner

Exercice 54

On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ et on désigne par (C) sa courbe représentative.

1)a) Déterminer la limite de u en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Etudier les branches infinies de (C).

c) Montrer que pour tout réel x, on a $u(x) > 0$. En déduire le signe de $u(x) + 2x$.

Interpréter géométriquement ces résultats.

2)a) Montrer que la dérivée de u est définie sur $\mathbb{R}$ par : $u'(x)=\dfrac{-u(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

b) Etudier les variations de u.

c) Tracer la courbe (C) et ses asymptotes.

3)a) Justifier que u est bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à préciser.

Donner le sens de variation de sa réciproque u^{-1}.

b) Tracer la courbe (Γ) de u^{-1} dans le même repère que (C).

c) Montrer que, pour tout x de J, on a : $u^{-1}(x)=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2x}$.

Solution 54

1)a) • $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$

b) • $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=0$, donc la courbe (C) admet en $+\infty$, une asymptote d'équation $y = 0$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{u(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1=-2$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}(u(x)+2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}+x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0.$

D'où la courbe (C) admet en $-\infty$ une asymptote d'équation $y = -2x$.

c) • Soit x un nombre réel, on a $x^2 + 1 > x^2$, donc $\sqrt{x^2+1}>|x|$.

Or on a $|x|\geq x$, alors on en déduit que $\sqrt{x^2+1}>x$, et donc $\sqrt{x^2+1}-x>0$.

Finalement, pour tout réel, on a $u(x) > 0$.

• Soit x un nombre réel, on a $u(x)+2x=\sqrt{x^2+1}+x=\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\dfrac{1}{u(x)}$.

Comme $u(x) > 0$, alors on peut conclure que $u(x) + 2x > 0$.

• Comme pour tout réel x on a $u(x) > 0$, alors la courbe (C) est toujours au dessus de l'axe des abscisses.

Comme pour tout réel x, $u(x) + 2x > 0$, alors (C) est toujours au dessus de son asymptote oblique.

2)a) La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

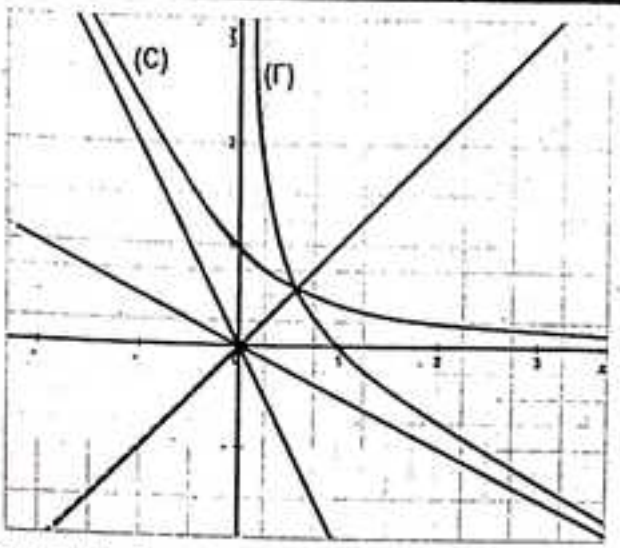
Et pour tout réel x, on a : $u'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{-u(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

b) D'après la question 1)c), pour tout réel x, on a $u'(x) < 0$.

Alors u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) La courbe (C) et ses asymptotes :

Scanned by CamScanner



3)a) • u est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc u réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

• La fonction u et sa réciproque ont le même sens de variation, donc u^{-1} est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

b) La courbe (Γ) de u^{-1} est dans le même repère que (C) ci-dessus.

c) Soit x un réel strictement positif et y un nombre réel.

$u^{-1}(x) = y$ est équivalent à $u(y) = x$, c'est-à-dire à $\sqrt{y^2+1} - y = x$, donc à $\sqrt{y^2+1} = x + y$,

donc a $y^2 + 1 = (y + x)^2$. Puis à $y^2 + 1 = y^2 + 2xy + x^2$. On a donc $2xy = 1 - x^2$. Finalement, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}$.

On peut alors conclure que $u^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}$.

Exercice 55

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x + \sin x$.

1)a) Montrer que f est impaire et que pour tout réel x, on a $f(x + 2\pi) = f(x) + \pi$.

b) Soit M et M' deux points de la courbe (C) de f d'abscisses respectives x et $x + 2\pi$.
Montrer que M' est image de M par une translation dont on précisera le vecteur.

c) Justifier comment à partir de la courbe de f dans $[0, \pi]$, on peut avoir la courbe de f sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que les points $S_k(2k\pi, k\pi)$, où k est un entier relatif, sont centres de symétrie à la courbe (C).

e) Montrer que ces centres de symétrie appartiennent à une droite dont on précisera une équation.

2) Déterminer la dérivée f ' de f et étudier son signe dans $[0, \pi]$.
Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.

3)a) Montrer que la courbe (C) est comprise entre les droites (D) et (D') d'équations respectives :

$y = \frac{1}{2}x - 1$ et $y = \frac{1}{2}x + 1$.

b) Déterminer les points de rencontre de (C) avec les droites (D) et (D').
Justifier qu'en ces points, les droites (D) et (D') sont tangentes à (C).

4) Tracer la restriction de la courbe de f dans l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$, ainsi que les droites (D) et (D') sur $\mathbb{R}$.

Solution 55

1)a) • Notons que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on a $f(-x) = \frac{1}{2}(-x) + \sin(-x) = -\frac{1}{2}x - \sin x = -\left(\frac{1}{2}x + \sin x\right) = -f(x)$.

Puisque pour tout réel x, f(-x) = -f(x), alors f est impaire.

• Soit x un nombre réel.

Scanned by CamScanner

$f(x+2\pi)=\frac{1}{2}(x+2\pi)+\sin(x+2\pi)=\frac{1}{2}x+\pi+\sin x=\left(\frac{1}{2}x+\sin x\right)+\pi=f(x)+\pi$.

b) Le point M a pour coordonnées $(x\ ,\ f(x))$ et M' a pour coordonnées $(x+2\pi\ ,\ f(x)+\pi)$.
Donc le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coorodonnées $(2\pi\ ,\ \pi)$ qui ne dépendent pas du point M, donc M' est image de M par la translation de vecteur $\vec{u}(2\pi\ ,\ \pi)$.

c) D'après la question précédente, si M est un point de la courbe de f, alors son image M' par la translation de vecteur $\vec{u}(2\pi\ ,\ \pi)$ est aussi un point de cette courbe.
Il suffit donc d'avoir la courbe de f sur un intervalle de longueur 2π, par exemple l'intervalle $[-\pi\ ,\ \pi]$, le reste de la courbe de f se déduit par des translations successives de vecteur $\vec{u}(2\pi\ ,\ \pi)$ ou $-\vec{u}(-2\pi\ ,\ -\pi)$.
Comme de plus f est impaire ayant la courbe de f sur $[0\ ,\ \pi]$, on peut avoir la courbe de f dans $[-\pi\ ,\ 0]$, donc dans $[-\pi\ ,\ \pi]$ par symétrie par rapport à l'origine du repère.
Finalement, avec la courbe de f dans $[0\ ,\ \pi]$, on peut avoir la courbe de f sur $\mathbb{R}$.

d) Soit k un entier relatif et x un nombre réel.

$f(4k\pi-x)=\frac{1}{2}(4k\pi-x)+\sin(4k\pi-x)=-\frac{1}{2}x+k2\pi+\sin(-x)=-\left(\frac{1}{2}x+\sin x\right)+k2\pi=k2\pi-f(x)$.

On a donc $f(x)=2k\pi-f(4k\pi-x)$.
D'où les points $S_k(2k\pi\ ,\ k\pi)$, où k est un entier relatif, sont centres de symétrie à la courbe (C).

e) Notons $(x_k\ ,\ y_k)$ les coordonnées de S_k. On a : $x_k=2k\pi$ et $y_k=k\pi$.
On remarque que, $2y_k=x_k$. Par conséquent, les centres de symétrie appartiennent à la droite (Δ) d'équation $x-2y=0$, lorsque k varie dans $\mathbb{Z}$.

2) • f est dérivable sur $[0\ ,\ \pi]$, car somme de fonctions dérivables sur $[0\ ,\ \pi]$ et pour tout réel x, $f'(x)=\frac{1}{2}+\cos x$.

• Dans l'intervalle $[0,\ \pi]$, $f'(x)=0$ si et seulement si, $\cos x=-\frac{1}{2}$. C'est-à-dire $x=\frac{2\pi}{3}$.

$f'(x)>0$ si et seulement si, $\cos x>-\frac{1}{2}$. C'est-à-dire $x\in\left[0\ ,\ \frac{2\pi}{3}\right[$.

$f'(x)<0$ si et seulement si, $\cos x<-\frac{1}{2}$. C'est-à-dire $x\in\left]\frac{2\pi}{3}\ ,\ \pi\right]$.

• D'après la question précédente :

La fonction f est strictement croissante sur $\left[0\ ,\ \frac{2\pi}{3}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}\ ,\ \pi\right]$. D'où le tableau de variation qui suit :

x	0		π
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\nearrow\ \frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow\ \frac{\pi}{2}$

3)a) Soit x un nombre réel, on a :
$-1\leq\sin x\leq 1$, donc $\frac{1}{2}x-1\leq\frac{1}{2}x+\sin x\leq\frac{1}{2}x+1$. C'est-à-dire $\frac{1}{2}x-1\leq f(x)\leq\frac{1}{2}x+1$.

Donc la courbe (C) est au dessus de la droite (D) d'équation $y=\frac{1}{2}x-1$ et en dessous de la droite (D') d'équation $y=\frac{1}{2}x+1$. C'est-à-dire (C) est entre les droites (D) et (D').

b) • **Intersection de (C) et (D') :**
Soit M(x , y) un point du plan.

Scanned by CamScanner

$$M\in(C)\cap(D') \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x+\sin x \\ y=\frac{1}{2}x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x+1=\frac{1}{2}x+\sin x \\ y=\frac{1}{2}x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=1 \\ y=\frac{1}{2}x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ y=\frac{\pi}{4}+1+k\pi \end{cases}$$

D'où (C) rencontre (D) aux points de coordonnées $M_k'\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi\,,\,\frac{\pi}{4}+1+k\pi\right)$, k étant un entier relatif.

- **Intersection de (C) et (D) :**

Soit M(x , y) un point du plan.

$$M\in(C)\cap(D) \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x+\sin x \\ y=\frac{1}{2}x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x-1=\frac{1}{2}x+\sin x \\ y=\frac{1}{2}x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=-1 \\ y=\frac{1}{2}x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ y=-\frac{\pi}{4}-1+k\pi \end{cases}$$

D'où (C) rencontre (D) aux points de coordonnées $M_k\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi\,,\,-\frac{\pi}{4}-1+k\pi\right)$, k étant un entier relatif.

- **Tangente à (C) en $M_k\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi\,,\,-\frac{\pi}{4}-1+k\pi\right)$:**

On a $f'\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)=\frac{1}{2}+\cos\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)=\frac{1}{2}$.

D'où la tangente à (C) en $M_k\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi\,,\,-\frac{\pi}{4}-1+k\pi\right)$ a pour équation :

$y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{2}-k2\pi\right)-\frac{\pi}{4}+k\pi$, c'est-à-dire $y=\frac{1}{2}x-1$ qui est une équation de (D).

D'où (D) est tangente à (C) en tout point $M_k\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi\,,\,-\frac{\pi}{4}-1+k\pi\right)$.

- **Tangente à (C) en $M_k'\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi\,,\,\frac{\pi}{4}+1+k\pi\right)$:**

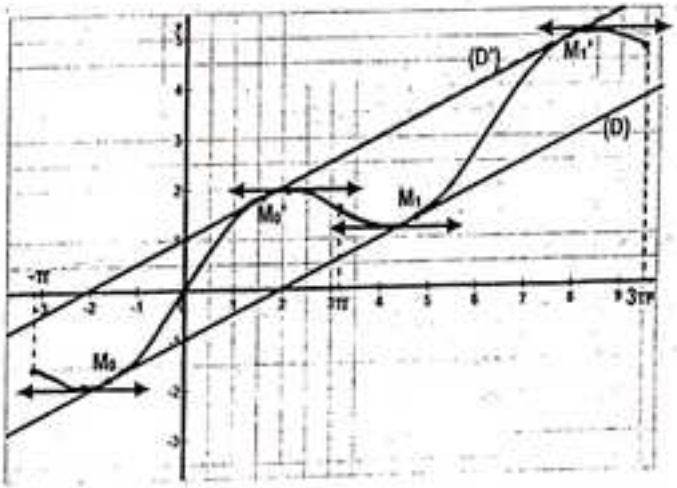
On a $f'\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)=\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)=\frac{1}{2}$.

D'où la tangente à (C) en $M_k'\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi\,,\,\frac{\pi}{4}+1+k\pi\right)$ a pour équation :

$y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}-k2\pi\right)+\frac{\pi}{4}+k\pi$, c'est-à-dire $y=\frac{1}{2}x+1$ qui est une équation de (D').

D'où (D') est tangente à (C) en tout point $M_k'\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi\,,\,\frac{\pi}{4}+1+k\pi\right)$.

4) Traçons la restriction de la courbe de f dans l'intervalle $[-\pi\,,\,3\pi]$, ainsi que les droites (D) et (D') sur $\mathbb{R}$.



Scanned by CamScanner

Exercice 56

Soit la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{2-x}+1$.

1) Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans le plan (on étudiera en particulier la dérivabilité en 2 et la branche infinie en $-\infty$).

2) En déduire l'étude et la courbe représentative de $g : x \mapsto (2-x)\sqrt{x}+1$.

Solution 56

1) Etude de la fonction f :

f(x) existe si et seulement si $2 - x \geq 0$, c'est-à-dire $x \leq 2$.

D'où l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty, 2]$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2-x = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{2-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

f est continue sur $]-\infty, 2]$, car somme et produit de fonctions continues sur $]-\infty, 2]$.

La fonction $x \mapsto 2-x$ est dérivable et strictement positive sur $]-\infty, 2[$, donc la fonction $x \mapsto \sqrt{2-x}$ est dérivable sur $]-\infty, 2[$. f est donc dérivable sur $]-\infty, 2[$, car produit et somme de fonctions dérivables sur $]-\infty, 2[$.

Etudions la dérivabilité de f en 2 :

$$\lim_{x\xrightarrow{<}2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\xrightarrow{<}2} \frac{x\sqrt{2-x}}{x-2} = \lim_{x\xrightarrow{<}2} \frac{-x}{\sqrt{2-x}} = -\infty.$$

D'où f n'est pas dérivable en 2 et aussi, la courbe de f admet au point d'abscisse 2, une demi tangente verticale.

f est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et pour tout $x < 2$, on a : $f'(x) = \sqrt{2-x} + \frac{-x}{2\sqrt{2-x}} = \frac{4-3x}{2\sqrt{2-x}}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $4 - 3x$. D'où dans $\left]-\infty, \frac{4}{3}\right]$, f est strictement croissante et dans $\left[\frac{4}{3}, 2\right]$, f est strictement décroissante. On résume alors ces variations dans le tableau :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		2
f'(x)		+	0	-	∞
f(x)	$-\infty$	↗	$1+\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$	↘	1

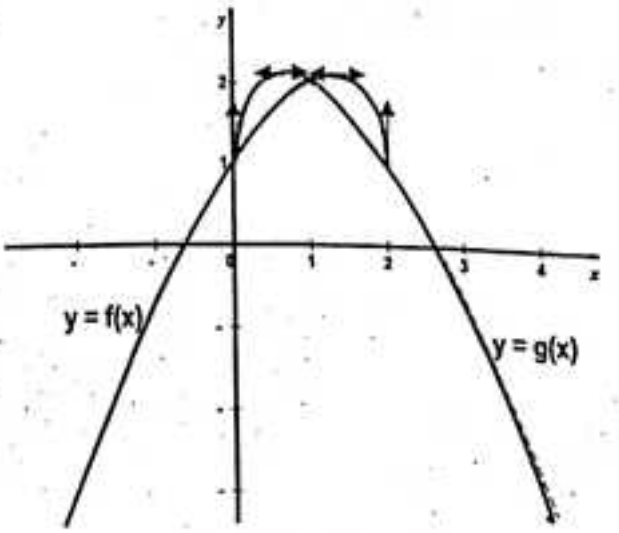
Etudions la branche infinie en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{2-x} + \frac{1}{x} = +\infty.$$

D'où la courbe de f présente en $-\infty$, une branche parabolique, de direction asymptotique celle de l'axe des ordonnées.

2) On remarque que : $g(x) = f(2-x)$ pour tout $x \geq 0$.

D'où la courbe de g est symétrique de celle de f, par rapport à la droite d'équation $x = 1$.



Scanned by CamScanner

Exercice 57

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{|x^2-1|}}{2}$.

1) Etudier la fonction f et tracer la courbe représentative (C) de f dans le plan rapporté à un repère.

2) En déduire l'ensemble Γ des points M du plan P dont les coordonnées (x , y) satisfont à : $4y^2 = |x^2-1|$.

Solution 57

1) f(x) existe pour tout réel x. D'où l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$.

Remarquons que : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2} & \text{si } x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\\ f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2} & \text{si } x \in [-1, 1] \end{cases}$

f est continue et dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, car ses restrictions à ces intervalles y sont continues et dérivables.

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2} = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2} = 0$.

  $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = f(-1)$. D'où f est continue en -1.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2} = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2} = 0$.

  $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = f(1)$. D'où f est continue en 1. On conclut alors que f est continue sur $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2(x+1)} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{x-1}{2\sqrt{x^2-1}} = -\infty$

  et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{1-x}{2\sqrt{1-x^2}} = +\infty$.

D'où f n'est pas dérivable en -1.

Et la courbe de f admet au point d'abscisse -1, une tangente ou une demi-tangente verticale.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{-x-1}{2\sqrt{1-x^2}} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{x+1}{2\sqrt{x^2-1}} = +\infty$.

D'où f n'est pas dérivable en 1.

Et sa courbe admet au point d'abscisse 1, une tangente ou une demi-tangente verticale.

f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ et : pour $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{x^2-1}}$.

pour $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = \dfrac{-x}{2\sqrt{1-x^2}}$.

De ce qui précède, on déduit les variations de f, résumées dans le tableau suivant :

x									
f'(x)	-	+∞	+∞	+	0	-	-∞	+∞	+
f(x)	+∞	↘	0	↗	0,5	↘	0	↗	+∞

Etude des branches infinies en +∞ et en -∞ :

Scanned by CamScanner

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2-1 = +\infty$, donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2} = +\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{2}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} = -\dfrac{1}{2}$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+\dfrac{1}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2}(\sqrt{x^2-1}+x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}\right) = 0$.

D'où la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\dfrac{1}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}(\sqrt{x^2-1}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}\right) = 0$.

D'où la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

Voir la courbe à la fin de la correction

2) $M(x,y)\in\Gamma \Leftrightarrow 4y^2 = |x^2-1|$.

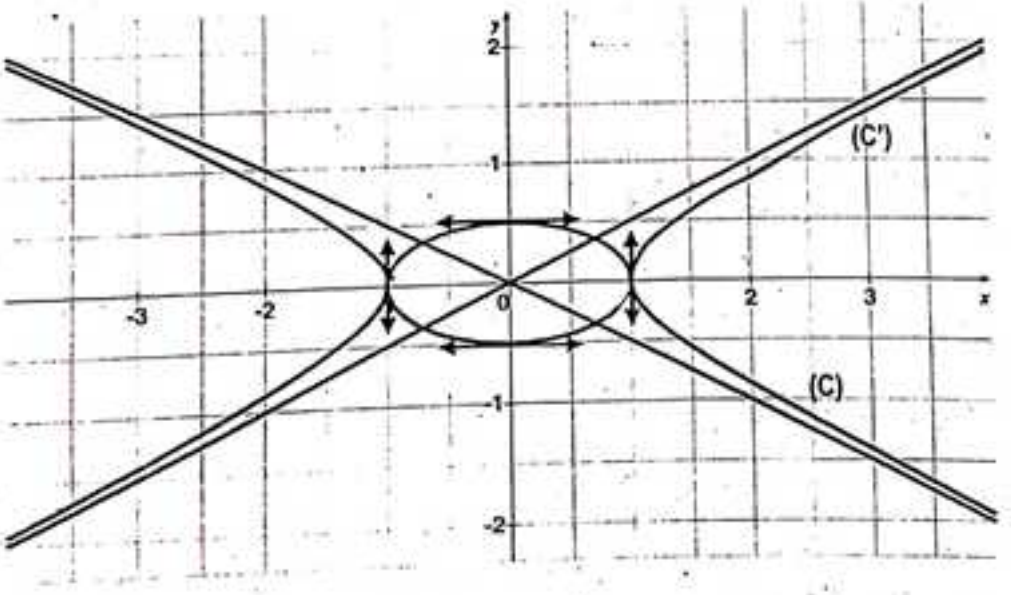
$\Leftrightarrow y = \dfrac{\sqrt{|x^2-1|}}{2}$ ou $y = -\dfrac{\sqrt{|x^2-1|}}{2}$

$\Leftrightarrow$ $M\in(C)$ ou $M\in(C')$. où (C') est la courbe d'équation $y = -\dfrac{\sqrt{|x^2-1|}}{2}$

$\Leftrightarrow M\in(C)\cup(C')$

Si l'on pose $g(x) = -\dfrac{\sqrt{|x^2-1|}}{2}$, on a $g(x) = -f(x)$.

D'où la courbe (C') est symétrique de (C) par rapport à l'axe des abscisses. $\Gamma = (C)\cup(C')$.



Scanned by CamScanner

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER

Exercice 58

25 minutes

Soit n un entier naturel non nul.

1) Etudier la limite en zéro de : $x \mapsto \frac{1}{x^n}\left[\frac{1}{1-x} - (1+x+\ldots+x^n)\right]$

2) En déduire qu'il existe une fonction ε_n telle que, pour tout $x \neq 1$,

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+\ldots+x^n+x^n\varepsilon_n(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_n(x) = 0.$$

Exercice 59

30 minutes

Trouver le minimum sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

En déduire que $\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right) \geq 2\sqrt{2}$, pour tous réels strictement positifs a et b ; l'égalité n'ayant lieu que lorsque a = b.

Exercice 60 BAC CE – National – septembre 1988 (français)

50 minutes

1) On considère la fonction polynôme P telle que, pour tout réel x, on a $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
   a) Etudier les variations de P.
   b) Montrer que l'équation P(x) = 0 admet une unique racine réelle α, et que α est compris entre 1,6 et 1,7.

2) Soit D = $]-1, +\infty[$.

On considère la fonction numérique f définie sur D par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

a) Etudier les variations de f. (On utilisera 1)).

b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^2+1)}$. Donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 0,1.

c) Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
Etudier la position de (C) par rapport à (T).

d) Tracer la courbe (C) et les tangentes aux points de (C) d'abscisses 0 et 1.

Exercice 61

50 minutes

Le but de cet exercice est l'étude de la position de la courbe (C) d'une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle I, par rapport à sa tangente (T) au point A(a, f(a)), où a appartient à I.

On considère à cet effet la fonction $\varphi : x \to \varphi(x) = f(x) - [f'(a)(x-a) + f(a)]$

1) Calculer $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'(a)$, $\varphi(a)$.

2) Montrer que :
   a) Si f " > 0 sur I, alors (C) est au-dessus de (T) sur I.
   b) Si f " < 0 sur I, alors (C) est en dessous de (T) sur I.
   c) Si f " s'annule en a, en changeant de signe alors (C) « traverse » (T) au point A(a, f(a)).

3) Que représente alors f(a) si :
   a) f '(a) = 0 et f " > 0 sur I ?
   b) f '(a) = 0 et f " < 0 sur I ?

Exercice 62

60 minutes

Soit f une application de [0, 1] dans [0 , 1], continue sur [0, 1].

A tout entier naturel non nul n, on a considéré la fonction $g_n : x \mapsto f(x) - x^n$.

1) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, la fonction g_n est définie et continue sur [0, 1].
2) Calculer $g_n(0)$ et $g_n(1)$ et déduire qu'il existe un réel a_n de [0 , 1] tel que l'on ait $g_n(a_n) = 0$.
3) On suppose, dans cette question, que f est strictement décroissante sur [0 , 1].

Scanned by CamScanner

a) Démontrer qu'il en est de même, quelque soit n, pour la fonction g_n. Que peut-on alors dire de a_n ?
b) Démontrer que, pour n et p entiers naturels non nuls et pour tout x dans [0, 1], on a : si $n > p$, $g_n(x) \geq g_p(x)$.
c) Déduire des questions a) et b) que la suite (a_n) est croissante.
d) Démontrer que la suite (a_n) est convergente.
4) Application au cas où $f(x) = -x^2 + 1$ pour tout x appartenant à [0, 1].
Calculer a_1, a_2, a_4. Donner un encadrement de a_3.

Exercice 63

70 minutes

1)a) Démontrer que la courbe représentative, sur l'intervalle $[0, +\infty[$, de la fonction $f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{1+x}$, est au-dessus de sa tangente en tout point.

b) En déduire que pour tout réel α positif, on a : $\frac{1}{1+\alpha} \geq 1-\alpha$. (1)

2) Soit la fonction $g : x \mapsto g(x) = \sqrt{1+x}$ et a un réel strictement positif.

a) Déterminer les dérivées première et seconde de g sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

b) Vérifier que, pour tout x appartenant à [0, a], on a : $\frac{1}{2\sqrt{1+a}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$.

c) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur [0, a], démontrer que :

$$1+\frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} \leq 1+\frac{a}{2}. \qquad (2)$$

3) Déduire des inégalités (1) et (2) que pour tout réel a strictement positif, $1+\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4} \leq \sqrt{1+a} \leq 1+\frac{a}{2}$.

4) *Application :* établir les inégalités suivantes :

- $1,0475 \leq \sqrt{1,1} \leq 1,05$.
- $100,00499975 \leq \sqrt{10001} \leq 100,005$
- $5,098 \leq \sqrt{26} \leq 5,1$

En déduire une valeur approchée des nombres $\sqrt{1,1}$, $\sqrt{10001}$ et $\sqrt{26}$, en précisant à chaque fois l'incertitude.

Exercice 64

60 minutes

1) Soit la fonction g telle que : $g(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$.

Etudier les variations de g. Montrer que, pour tout réel x, g(x) appartient à $]-1, 0[$.

2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = -\frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$.

a) Dresser le tableau de variation de f.
b) Montrer que la courbe de f admet une asymptote oblique en $-\infty$, dont on précisera une équation.
c) Etudier la position de la courbe (C) de f par rapport à ses asymptotes.
d) Construire (C) dans un repère orthonormé. (unité : 2cm)
3) Déduire de l'étude précédente que f permet de définir une bijection de $\mathbf{R}$ sur un intervalle E, à préciser.
Préciser l'ensemble de dérivabilité et le sens de variation de f^{-1}.

Vérifier que la bijection réciproque f^{-1} est définie, pour tout x de E par : $f^{-1}(x) = \frac{1}{4(x-1)} + 1 - x$.

Tracer la courbe (C^{-1}) de f^{-1} dans le même repère que (C).

Exercice 65

45 minutes

On se propose de déterminer la limite de $\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$ quand x tend vers 0 par valeurs positives.

1) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}$.

a) Déterminer les dérivées $f^{(n)}$ d'ordre n de f, pour n appartenant à {1, 2, 3, 4, 5}.

Scanned by CamScanner

b) A partir du signe de la dérivée $f^{(5)}$, déterminer successivement le sens de variation et le signe des fonctions $f^{(4)}$, $f^{(3)}$, f '', f ' et f sur $[0, +\infty[$.

c) En déduire que, pour tout $x \geq 0$ on a : $1-\frac{x^2}{2!} \leq \cos x \leq 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ et $x-\frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$.

2) Utiliser ces inégalités pour encadrer, pour tout $x > 0$, $\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$, et déterminer la limite demandée.

Exercice 66 — BAC CE – Nancy Metz – 1987 — 50 minutes

On considère les fonctions : $f : x \mapsto \frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)$ et $g : x \mapsto 2x^3+x^2-1$.

1) Montrer que pour tout réel $x \neq 0$, les nombres f '(x) et g(x) ont le même signe.
2) Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'équation g(x) = 0 admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α, avec $0 < \alpha < 1$. (On ne cherchera pas à calculer α).
3) Dresser le tableau de variations de f.
On désigne par (C), la courbe de f, par I le point de (C) d'abscisse –1 et par J le point de (C) d'abscisse 1.
4) a) Vérifier que la droite (IJ) est tangente en J à (C).
b) Déterminer une équation de la tangente (T) en I à (C).
5) Etudier la position de (C) par rapport à (T).
6) Utiliser les résultats précédents pour construire la courbe (C). (Prendre $\frac{2}{3}$ pour valeur approchée de α).

Exercice 67 — 50 minutes

Soit f fonction définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ telle que : pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ et f(1) = 0.

1) Donner le sens de variation de f.
Pour tout y strictement positif, on définit, sur $]0, +\infty[$, la fonction g par g(x) = f(xy) – f(x).
2) Déterminer, pour tout $x > 0$, g'(x). Que peut-on en conclure pour le sens de variation de g ?
3) En déduire que, pour tout $x > 0$ et pour tout $y > 0$, f(xy) = f(x) + f(y).
4) Montrer que, pour tout entier naturel n, $f(2^n) = nf(2)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
5) Montrer que, pour tout $x > 0$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
6) On définit, sur $]0, +\infty[$, la fonction h par : $h(x) = f(x) - 2\sqrt{x}$.

Déterminer le sens de variation de h. En déduire que, pour tout $x > 0$, $f(x) \leq 2\sqrt{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Exercice 68 — 20 minutes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

On cherche à encadrer par des fonctions simples, la primitive F de f nulle en zéro.
1) Montrer que, pour tout nombre réel x, on a $0 < F'(x) \leq 1$.
2)a) Soit un nombre réel positif x, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction F sur [0, x], démontrer que $0 \leq F(x) \leq x$.
b) Etablir de même que, pour tout $x \leq 0$, on a : $x \leq F(x) \leq 0$.

Exercice 69 — 60 minutes

- Partie 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par : $f(x) = \frac{1-x^2}{x+2}$.

Scanned by CamScanner

1) Pour tout réel x différent de – 2, vérifier l'égalité : $f(x) = -x + 2 - \frac{3}{x+2}$.

2) Déterminer les limites de f aux bornes des intervalles constituant l'ensemble de définition puis déterminer les asymptotes à C_f, courbe représentative de f.

3) Etudier les variations de f. Démontrer que C_f admet un centre de symétrie.

Partie 2 :

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = \frac{1-\sin^2(t)}{2+\sin t}$.

1) Pour tout réel t, montrer que $\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$.

Expliquer comment l'étude des variations de la restriction de φ à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ permet de construire la courbe de φ.

2) Le but de cette question est de prouver que l'équation $\varphi'(t) = 0$ a upe solution, notée α, dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Montrer que f ' est strictement décroissante sur [-1 , 1]. Quelle est l'image de [-1 , 1] par f ' ?

Pour tout réel t, prouver l'égalité $\varphi'(t) = f'(\sin t) \times \cos t$. Prouver l'existence et l'unicité de α.

Calculer la valeur exacte de φ(α). Calculer $\varphi(0)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\varphi'(0)$.

3) Etudier les variations de la restriction de φ à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4) Prouver que, dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'équation $\varphi(t) = t$ admet une solution unique, notée x_0.

Montrer que x_0 est la seule solution de l'équation $\varphi(t) = t$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 70

25 minutes

Soit f une fonction dérivable sur [0 , 1] avec f(0) = -1, f(1) = 0,5 et, pour tout $x \in [0, 1]$, $1 \leq f'(x) \leq 2$.

1) Montrer que f est continue sur [0 , 1].

2) Monter que l'équation f(x) = 0 possède une unique solution α, dans [0, 1].

3) Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que, pour tout $x \in [0, 1]$, $x - 1 \leq f(x) \leq 2x - 1$.

Montrer alors que $\alpha \in [0{,}5 ; 1]$.

Exercice 71

40 minutes

Soit f fonction définie sur]0 , +∞[par $f(x) = f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{x}$.

1) Justifier la dérivabilité de f, puis calculer f '(x).

2) Donner le sens de variation de f ' sur l'intervalle]0,. - .[.

3) Soit A le point de la courbe (C_f) d'abscisse 1. Donner une équation de la tangente (T_A) en A à (C_f).

4) On pose $\varphi(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$.

Montrer que, pour tout x > 0, on a : $\varphi'(x) = f'(x) - f'(1)$. Déterminer le signe de φ' sur]0 , + ∞[.

Déterminer alors les variations de φ et le signe de φ sur]0 , +∞[.

En déduire la position de (C_f) par rapport à la tangente (T_A) sur]0 , +∞[.

Exercice 72

45 minutes

Soit la fonction f, définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} \text{ pour } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Préciser l'ensemble de définition de f. Ecrire f(x) sans le symbole de valeur absolue.

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

3) Etudier les variations de f et tracer sa courbe.

Scanned by CamScanner

4) Montrer que f induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.
Tracer la courbe de la réciproque de f.
Vérifier que la fonction réciproque de f est la fonction : $x \mapsto |x|x$.

Exercice 73 — 60 minutes

Soit n entier naturel non nul, on considère la fonction f_n telle que, à tout réel strictement positif x, associe $f_n(x) = \frac{x^n + 1}{4x^2}$. Soit C_n la courbe de f_n.

1) Etudier les variations de f_1 et f_2 et tracer les courbes C_1 et C_2.
2) Pour $n > 2$, étudier la fonction f_n : on étudiera en particulier sa continuité, son sens de variation (on désigne par x_n le réel en lequel f_n a un minimum), les limites éventuelles en $+\infty$ et à droite en 0, l'existence suivant l'entier n, d'asymptotes à la courbe C_n. Tracer C_3.
3) Etudier l'intersection des courbes C_n et $C_{n'}$, pour deux entiers naturels distincts n et n'.
En déduire que toutes les courbes C_n passent par un même point B dont on précisera les coordonnées.
On suppose $n < n'$, étudier la position relative de C_n et $C_{n'}$.

Exercice 74 — 50 minutes

Soit la fonction g, définie sur $]0, 2[$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \tan\left|\frac{\pi}{2}(x-1)\right|$.

1)a) Justifier que g est une bijection de $]0, 2[$ sur $\mathbb{R}$.
b) Soit h la fonction réciproque de g. Calculer h'(x) pour tout x dans $\mathbb{R}$.

2) On considère la fonction : $k : x \mapsto h(x) + h\left(\frac{1}{x}\right)$.

Calculer k'(x) pour tout réel x non nul, puis en déduire explicitement k(x) pour tout réel x non nul.

Exercice 75 — 70 minutes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{14}(-9x + 5\sqrt{x^2+1})$.

1) Etudier le comportement de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Montrer que la courbe (C) de g admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$. Déterminer la dérivée g' de g. En déduire la variation de g.
3) Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{1}{14}(-9x - 5\sqrt{x^2+1})$.

En remarquant que pour tout réel x, $h(x) = -g(-x)$, indiquer la transformation qui permet de passer de la courbe (C) de g à la courbe (C') de h.
4) On considère la courbe (Γ) d'équation $28(2x + 7y)(x + y) - 25 = 0$.
Montrer que (Γ) est la réunion des courbes (C) et (C').
Déduire de tout ce qui précède, le tracé de la courbe (Γ).
5) Soit $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = 7\vec{i} - 2\vec{j}$.
Montrer que le triplet $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan.
Trouver une équation de la courbe (Γ) dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 76 — 60 minutes

1) On se propose dans cette question de résoudre l'équation (E) : $x^3 - x^2 + 3x + 1 = 0$.
a) Démontrer que cette équation (E) a une solution réelle et une seule notée a.
b) Déterminer l'entier relatif k tel que : $\frac{k}{10} < a < \frac{k+1}{10}$.
c) Démontrer que l'équation (E) est équivalente à $x = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$.

Scanned by CamScanner

On définit dans la suite, la fonction h sur [-1 , 0] par : $h(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+3}$ et la suite (u_n) par $u_0 = -0{,}5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = h(u_n)$.

2)a) Etudier les variations de h.

b) Montrer que pour tout réel x dans [-1 , 0], on a h(x) dans [-1 , 0].

c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n appartient à [-1 , 0].

3)a) Montrer que pour tout réel x dans [-1 , 0], on a : $|h'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$|u_{n+1} - a| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - a|$.

c) Montrer alors par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $|u_n - a| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - a|$.

Scanned by CamScanner

Solution 58

1) Soit x un réel différent de 0 et 1, on a :

$1+x+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ donc $\frac{1}{x^n}\left|\frac{1}{1-x}-(1+x+\ldots+x^n)\right|=\frac{1}{x^n}\left|\frac{1}{1-x}-\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right|=\frac{x^{n+1}}{x^n(1-x)}=\frac{x}{1-x}$.

D'où $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\left|\frac{1}{1-x}-(1+x+\ldots+x^n)\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-x}=0$.

2) Soit x un réel différent de 0 et 1.

Posons $\varepsilon_n(x)=\frac{1}{x^n}\left|\frac{1}{1-x}-(1+x+\ldots+x^n)\right|$, on a :

$\frac{1}{1-x}-(1+x+\ldots+x^n)=x^n\varepsilon_n(x)$ et $\frac{1}{1-x}=1+x+\ldots+x^n+x^n\varepsilon_n(x)$.

D'après la question 1) on a, $\lim_{x\to 0}\varepsilon_n(x)=0$.

D'où il existe une fonction ε_n telle que, pour tout $x\neq 1$, $\frac{1}{1-x}=1+x+\ldots+x^n+x^n\varepsilon_n(x)$, avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_n(x)=0$.

Solution 59

- f est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout x dans $]0,+\infty[$, on a :

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\sqrt{1+x}\left(\frac{1}{-2x\sqrt{x}}\right)=\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{2x\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{x}-1}{2x\sqrt{x}\sqrt{1+x}}.$$

Le signe de f '(x) est celui de $x\sqrt{x}-1$. Car pour tout $x>0$, on a $2x\sqrt{x}\sqrt{1+x}>0$. Ainsi :

f '(x) = 0 si et seulement si, $x\sqrt{x}=1$. C'est-à-dire $x^3=1$. On en déduit que x = 1.

f '(x) > 0 si et seulement si, $x\sqrt{x}>1$. C'est-à-dire, $x^3>1$. On en déduit que x > 1.

D'où f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]0,1[$. D'où le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
f '(x)	‖	-	0	+	
f(x)	‖	$+\infty$ ↘	$2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

On peut donc conclure que f admet un minimum sur $]0,+\infty[$, qui est $2\sqrt{2}$, et qui est atteint pour x = 1.

Ainsi, pour tout x > 0, on a : $f(x)\geq 2\sqrt{2}$.

Soit a et b appartenant à $]0,+\infty[$, $\frac{a}{b}$ appartient à $]0,+\infty[$ et :

$$f\left(\frac{a}{b}\right)=\sqrt{1+\frac{a}{b}}\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{b}}\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)=\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right).$$

Or pour tout x > 0, on a $f(x)\geq 2\sqrt{2}$, donc $f\left(\frac{a}{b}\right)\geq 2\sqrt{2}$. C'est-à-dire : $\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\geq 2\sqrt{2}$.

- $f\left(\frac{a}{b}\right)=2\sqrt{2}$ si et seulement si, $\frac{a}{b}=1$. C'est-à-dire a = b.

Solution 60

1)a) P est définie; continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Car fonction polynôme. Et pour tout réel x, on a :
$P'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$. Le tableau ci-dessous résume les variations de P :

Scanned by CamScanner

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
P'(x)		+	0	-	0	+	
P(x)	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

b) • On constate que dans $]-\infty, 1]$, la fonction P est majorée par -1.
D'où pour tout $x \leq 1$, on a $P(x) \leq -1$. On en déduit que, pour tout $x \leq 1$, on a $P(x) < 0$.
L'équation $P(x) = 0$ n'a donc pas de solution dans $]-\infty, 1]$.

P est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et $P([1, +\infty[) = \left[P(1), \lim_{x \to +\infty} P(x)\right[= [-2, +\infty[$.

Comme 0 appartient à $[-2, +\infty[$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$.
En définitive, l'équation $2x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

• De plus, on a $P(1,6) \times P(1,7) < 0$, d'où $\alpha \in]1,6 ; 1,7[$.

2)a) f est dérivable sur D, car fonction rationnelle définie sur D. Et pour tout x appartenant à D, on a :

$$f'(x) = \frac{-(1+x^3) - 3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(1+x^3)^2} = \frac{P(x)}{(1+x^3)^2}.$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $P(x)$, car pour tout x dans D, on a $(1 + x^3)^2 > 0$. Et d'après l'étude de P, on a :

- Pour $x \in]-1, \alpha[$, $f'(x) < 0$.
- Pour $x \in]\alpha, +\infty[$, $f'(x) > 0$.

Finalement, f est strictement croissante sur $]\alpha, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-1, \alpha[$.
On a alors le tableau de variation de f qui suit :

x	-1		α		$+\infty$
f'(x)	||	-	0	+	
f(x)	|| $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	0

b) • On a : $f(\alpha) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha^3}$. Or α est solution de l'équation $P(x) = 0$, c'est-à-dire $P(\alpha) = 0$. Alors $2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 1 = 0$.

Donc $\alpha^3 = \frac{3\alpha^2 + 1}{2}$. Et par suite, $f(\alpha) = \frac{1-\alpha}{1 + \frac{3\alpha^2+1}{2}} = \frac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^2+1)}$. D'où $f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^2+1)}$.

• On sait, d'après la question 1)b) que $1,6 < \alpha < 1,7$. Ce qui implique que $-1,4 \leq 2(1 - \alpha) \leq -1,2$.
Donc $1,2 \leq -2(1 - \alpha) \leq 1,4$ (1).

De plus $1,6 \leq \alpha \leq 1,7$, donc $10,68 \leq 3(\alpha^2 + 1) \leq 11,67$, donc $0,08 \leq \frac{1}{3(\alpha^2+1)} \leq 0,094$ (2).

En multipliant membre à membre les encadrements (1) et (2), on obtient : $0,096 \leq -\frac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^2+1)} \leq 0,14$.

C'est-à-dire, $0,096 \leq -f(x) \leq 0,14$. Donc, $0,09 \leq -f(x) \leq 0,19$. En conclusion, on a : $-0,19 \leq f(\alpha) \leq -0,09$.

c) • Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est : $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$. Soit $y = -x + 1$.
La position de la courbe de f par rapport à (T) s'obtient en étudiant le signe de $f(x) + x - 1$.

On a $f(x) + x - 1 = \frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$.

Or pour $x > -1$, on a $x^3 + 1 > 0$, donc le signe de $\frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$ est celui de $x(x - 1)$:

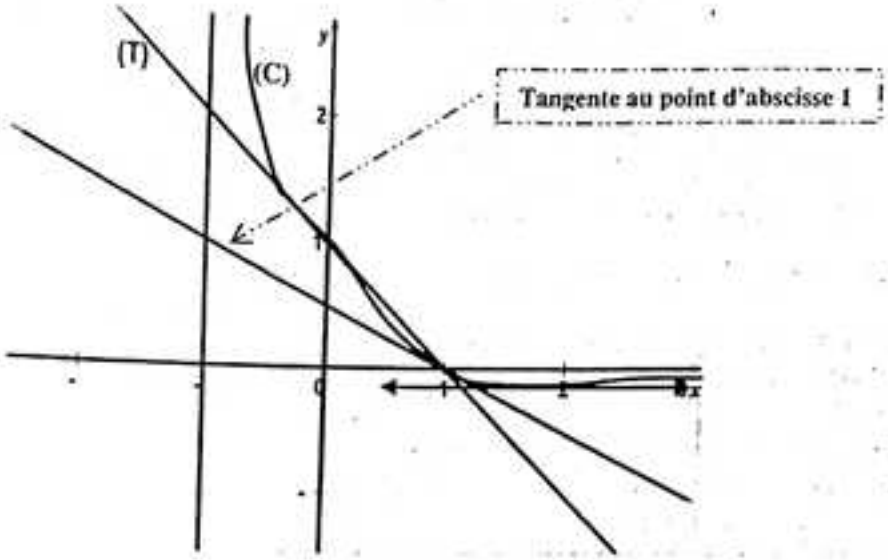
x	-1		0		1	
x(x-1)	||	+	0	-	0	+

D'où dans $]-1, 0[$ et dans $]1, +\infty[$, on a $f(x) + x - 1 > 0$, donc (C) est au-dessus de (T).

Scanned by CamScanner

Dans]0 , 1[, on a f(x) + x – 1 < 0. Donc (C) est en dessous de (T).

d) La courbe de f :



Solution 61

1) φ est dérivable sur I, car somme de fonctions dérivables sur I, et pour tout x ∈ I, φ'(x) = f '(x) –f '(a).
φ' est dérivable sur I, car somme de fonctions dérivables sur I, et pour tout x dans I, φ''(x) = f ''(x).
φ'(a) = f '(a) – f '(a), d'où φ'(a) = 0. φ(a) = f(a) – [f '(a)(a – a) + f(a)] = 0, d'où φ(a) = 0.
2)a) Si f '' > 0 sur I, alors φ'' > 0, et donc φ' est strictement croissante sur I. Or φ'(a) = 0, alors :
Si x < a, alors φ'(x) < φ'(a), c'est-à-dire φ'(x) < 0.
Si x > a, alors φ'(x) > φ'(a), c'est-à-dire φ'(x) > 0. On a alors le tableau de variation de φ qui suit :

x		a	
φ'(x)	–	0	+
φ(x)	↘	0	↗

D'où φ est minorée par 0 dans I. Donc pour tout x dans I, on a φ(x) ≥ 0.
C'est-à-dire f(x) ≥ f '(a)(x – a) + f(a), pour tout x dans I.
On peut donc conclure que (C) est au-dessus de (T) sur I.
b) Si f ''< 0 sur I, alors φ'' < 0 sur I. Donc φ' est strictement décroissante sur I.
Comme de plus φ'(a) = 0, alors : si x < a, alors on a : φ'(x) > 0 et si x > a, alors on a : φ'(x) < 0.
On a alors le tableau de variation de φ qui suit :

x		a	
φ'(x)	+	0	–
φ(x)	↗	0	↘

D'où φ est majorée par 0 sur I, et par conséquent, pour tout x dans I, on a φ(x) ≤ 0.
C'est-à-dire f(x) ≤ f '(a)(x – a) + f(a). On en déduit que (C) est en dessous de (T) sur I.
c) Si f '' s'annule en a en changeant de signe,
alors le tableau de variation de φ' est l'un des suivants :

x		a	
φ''(x)	+	0	–
φ'(x)	↗	0	↘

Ou

Point méthode :
Soit f fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
- *Si f '' > 0 sur I, alors dans I, la courbe de f reste au dessus de ses tangentes.*
- *Si f '' < 0 sur I, alors dans I, la courbe de f reste en dessous de ses tangentes.*

Scanned by CamScanner

x	a	
φ''(x)	-	0 +
φ'(x)	↘	0 ↗

• **Dans le premier cas**, on a $\varphi'(x) \leq 0$, avec $\varphi'(x) = 0$ si et seulement si $x = a$.
D'où φ est strictement décroissante sur I. Or $\varphi(a) = 0$. Alors : Si $x < a$, on a $\varphi(x) > 0$ et si $x > a$, on a $\varphi(x) < 0$.
Par conséquent, avant le point A, (C) est au-dessus de (T), et après le point A, (C) est au-dessous de (T).
• **Dans le deuxième cas**, on a $\varphi'(x) \geq 0$, avec $\varphi'(x) = 0$ si et seulement si $x = a$.
D'où φ est strictement croissante sur I et $\varphi(a) = 0$, alors : Si $x < a$, on a $\varphi(x) < 0$ et si $x > a$, on a $\varphi(x) > 0$.
Par conséquent, avant le point A, (C) est au-dessous de (T), et après le point A, (C) est au-dessus de (T).
3)a) Si $f'(a) = 0$ et $f'' > 0$ sur I, alors f(a) est le minimum de f sur I.
b) Si $f'(a) = 0$ et $f'' < 0$ sur I, alors f(a) est le maximum de f sur I.

Solution 62

1) g_n est définie et continue sur [0 , 1], car somme de fonctions définies et continues sur [0 , 1]. (f et $x \mapsto x^n$).
2) • $g_n(0) = f(0)$ et $g_n(1) = f(1) - 1$.
• **Montrons qu'il existe un réel a_n dans [0 , 1] tel que $g_n(a_n) = 0$:**
En effet, nous savons que $f(0) \in [0 , 1]$. Donc $g_n(0) \geq 0$.
f(1) appartient [0 , 1], donc f(1) – 1 appartient [-1 , 0]. D'où $g_n(1) \leq 0$.
Puisque g_n est continue sur [0 , 1] et $g_n(0).g_n(1) \leq 0$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel a_n dans [0 , 1] tel que $g_n(a_n) = 0$.
3)a) • **Montrons que g_n est strictement décroissante sur [0 , 1] :**
Soit a et b appartiennent [0 , 1], avec $a < b$, et n entier naturel non nul.
$0 < a < b$, donc $a^n < b^n$, donc $-b^n < -a^n$ (1)
Or f est strictement décroissante sur [0 , 1], donc on a aussi $f(b) < f(a)$ (2).
Des inégalités (1) et (2), on déduit que :
Si $a < b$, alors $f(b) - b^n < f(a) - a^n$. C'est-à-dire $g_n(b) < g_n(a)$.
D'où g_n est strictement décroissante sur [0 , 1].
• g_n est continue et strictement décroissante sur [0, 1]. D'où g_n est une bijection.
Ainsi l'équation $g_n(x) = 0$ admettant une solution a_n, celle-ci est unique.
b) **Montrons que si $n > p$, alors $g_n(x) \geq g_p(x)$ pour tout x dans [0 , 1] :**
Soit x appartenant à [0 , 1], comparons d'abord x^n et x^p.
Puisque $n > p$, alors $n - p > 0$ et $n - p$ est un entier naturel. Donc $0 \leq x \leq 1$ implique que $0 \leq x^{n-p} \leq 1$.
On a $x^n - x^p = x^p(x^{n-p} - 1)$.
Et comme $x^{n-p} - 1 \leq 0$ et $x^p \geq 0$, alors on a $x^n - x^p \leq 0$, c'est-à-dire $x^n \leq x^p$.
Par suite, on a $-x^p \leq -x^n$ et donc $f(x) - x^p \leq f(x) - x^n$. On en déduit que pour $n > p$, $g_p(x) \leq g_n(x)$.
c) **Montrons que la suite (a_n) est croissante :**
Soit n entier naturel non nul, on a : $g_{n+1}(a_n) \geq g_n(a_n)$ (3) d'après 3)b).
Or $g_n(a_n) = g_{n+1}(a_{n+1}) = 0$ (4).
Alors des égalités (3) et (4), on en déduit que $g_{n+1}(a_n) \geq g_{n+1}(a_{n+1})$.
Et comme la fonction g_{n+1} est décroissante alors on a : $a_{n+1} \geq a_n$. D'où la suite (a_n) est croissante.
d) **Démontrons que la suite (a_n) converge :**
(a_n) est une suite croissante, d'après 3)c). Et pour tout n entier naturel, $a_n \in [0 , 1]$.
D'où (a_n) est majorée par 1. (a_n) est une suite croissante et majorée, donc elle converge.
4) $f(x) = -x^2 + 1$, d'où $g_n(x) = -x^n - x^2 + 1$.
Calculons a_1

$$g_1(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Or a_1 est la solution de l'équation $g_1(x) = 0$ dans [0 , 1]. D'où $a_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Calculons a_2

Scanned by CamScanner

$g_2(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Or a_2 est la solution de l'équation $g_2(x) = 0$ dans $[0, 1]$. D'où $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Calculons a_4

$g_4(x) = 0 \Leftrightarrow -x^4 - x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

Or a_4 est la solution de l'équation $g_4(x) = 0$ dans $[0, 1]$. D'où $a_4 = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

Encadrement de a_3 :

Remarquons que la fonction $f : x \to -x^2 + 1$ est strictement décroissante dans $[0, 1]$.
D'où d'après la question 3), (a_n) est croissante. On peut alors dire que $a_2 \le a_3 \le a_4$. C'est-à-dire

Solution 63

1)a) f est une fonction deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \ge 0$, on a : $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ et $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$.

Pour tout x positif, on a $f''(x) > 0$. En procédant comme à l'exercice 61, on peut conclure que la courbe de f est au-dessus de sa tangente en tout point.

b) La tangente (T) au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, donc $y = -x + 1$.

Or la courbe de f est au-dessus de la tangente (T), alors pour tout $\alpha \ge 0$, on a : $f(\alpha) \ge -\alpha + 1$, donc $\frac{1}{1+\alpha} \ge 1 - \alpha$.

2)a) g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout x dans $[0, +\infty[$, on a : $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$.

g' est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a : $g''(x) = \frac{1 - \frac{2\sqrt{1+x}}{1+x}}{2} = \frac{-1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$.

b) Soit $x \in [0, a]$, on a :
méthode 1 : $0 \le x \le a$, donc $1 \le x + 1 \le a + 1$, donc

$1 \le \sqrt{1+x} \le \sqrt{1+a}$, donc $2 \le 2\sqrt{1+x} \le 2\sqrt{1+a}$, donc $\frac{1}{2\sqrt{1+a}} \le \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \le \frac{1}{2}$.

On peut alors conclure que pour tout $x \in [0, a]$, on a : $\frac{1}{2\sqrt{1+a}} \le g'(x) \le \frac{1}{2}$.

méthode 2 : D'après le calcul de g'', on a $g'' < 0$ sur $[0, +\infty[$.
D'où g' est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Donc soit x dans $[0, a]$, on a : $0 \le x \le a$, donc $g'(a) \le g'(x) \le g'(0)$. C'est-à-dire $\frac{1}{2\sqrt{1+a}} \le g'(x) \le \frac{1}{2}$.

c) g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et soit $a > 0$, on a pour tout x dans $[0, a]$, $\frac{1}{2\sqrt{1+a}} \le g'(x) \le \frac{1}{2}$.

D'où, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a : $\frac{1}{2\sqrt{1+a}}(a - 0) \le g(a) - g(0) \le \frac{1}{2}(a - 0)$.

C'est-à-dire $\frac{a}{2\sqrt{1+a}} \le \sqrt{1+a} - 1 \le \frac{a}{2}$. En définitive, on a : $1 + \frac{a}{2\sqrt{1+a}} \le \sqrt{1+a} \le 1 + \frac{a}{2}$.

3) • Soit $a > 0$, on a montré à la question 2c) que $\sqrt{1+a} \le 1 + \frac{a}{2}$. (1)

• Il suffit donc de montrer que $1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} \le \sqrt{1+a}$.

Scanned by CamScanner

En effet, d'après l'inégalité de 2)c), on a : $\sqrt{1+a} \leq 1+\frac{a}{2}$, donc $\frac{1}{1+\frac{a}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+a}}$.

Dans la question 1)b), si on prend $\alpha = \frac{a}{2}$, on aura : $1-\frac{a}{2} \leq \frac{1}{1+\frac{a}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+a}}$. Donc on a : $1-\frac{a}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+a}}$.

En divisant les membres de cette dernière inégalité par 2, on a : $\frac{1}{2}-\frac{a}{4} \leq \frac{1}{2\sqrt{1+a}}$.

En multipliant les membres de cette inégalité obtenue par a, on a :

$\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4} \leq \frac{a}{2\sqrt{1+a}}$, et par suite, $1+\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4} \leq 1+\frac{a}{2\sqrt{1+a}}$. (2)

Or d'après la question 2)c), on a : $1+\frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a}$ (3).

Des inégalités (2) et (3), on conclut que : $1+\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4} \leq \sqrt{1+a}$. (4)

Finalement, avec les inégalités (1) et (4), on peut écrire que, pour $a > 0$, on a : $1+\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4} \leq \sqrt{1+a} \leq 1+\frac{a}{2}$.

4) • Pour a = 0,1, dans l'inégalité de la question 3), on a : $1+\frac{0,1}{2}-\frac{0,01}{4} \leq \sqrt{1+0,1} \leq 1+\frac{0,1}{2}$.

C'est-à-dire $1,0475 \leq \sqrt{1,1} \leq 1,05$.

• $\sqrt{10001} = \sqrt{1,0001 \times 10^4} = 100\sqrt{1,0001}$. Si on pose a = 0,0001, dans l'inégalité de la question 3), on a :

$1+\frac{0,0001}{2}-\frac{(0,0001)^2}{4} \leq \sqrt{1+0,0001} \leq 1+\frac{0,0001}{2}$. Ce qui aboutit à : $1,0000499975 \leq \sqrt{1,0001} \leq 1,00005$.

En multipliant le dernier encadrement par 100, on a : $100,00499975 \leq \sqrt{10001} \leq 100,005$.

• $\sqrt{26} = 5\sqrt{\frac{26}{25}} = 5\sqrt{1,04}$.

Si on pose a = 0,04. On a : $1+0,02-0,0004 \leq \sqrt{1,04} \leq 1+0,2$. C'est-à-dire $1,0196 \leq \sqrt{1,04} \leq 1,02$.

En multipliant cet encadrement par 5, on a : $5,096 \leq \sqrt{26} \leq 5,1$.

• Les valeurs approchées de $\sqrt{1,1}$, $\sqrt{10001}$ et $\sqrt{26}$ sont :

$\sqrt{1,1} \approx 1,04875 \pm 125 \times 10^{-5}$; $\sqrt{10001} \approx 100,004999875 \pm 125 \times 10^{-7}$ et $\sqrt{26} \approx 5,099 \pm 10^{-3}$.

Solution 64

1) • g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2}+\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1.$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}+\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 0.$$

Et pour tout réel x, on a : $g'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\right) = \frac{1}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Scanned by CamScanner

On a pour tout réel x, $g'(x) > 0$. D'où g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• $g(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty} g(x), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[=]-1, 0[$. C'est-à-dire, pour tout réel x, on a $g(x) \in]-1, 0[$.

2)a) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et pour tout réel x, on a : $f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}} = g(x)$.

D'après ce qui précède, pour tout réel x, $f'(x) \in]-1, 0[$, donc $f'(x) < 0$.
f est par conséquent strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2(x+\sqrt{x^2+1})} + 1 = 1$.

D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		−	
f(x)	$+\infty$	↘	1

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = -1$ et

$\lim_{x\to-\infty} (f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+1}) + 1\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{2x - 2\sqrt{x^2+1}} + 1 = 1$.

D'où la droite d'équation $y = -x + 1$ est asymptote (oblique) à la courbe de f.
Notons que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe de f.

c) • Position de la courbe par rapport à son asymptote horizontale :

$f(x) - 1 = \frac{-x + \sqrt{x^2+1}}{2}$ pour tout réel x.

Or pour tout réel x, on a : $x^2 + 1 > x^2$, donc $\sqrt{x^2+1} > |x|$.

Et comme on a pour tout réel x $|x| \geq x$, alors on peut écrire $\sqrt{x^2+1} > x$. C'est-à-dire $\sqrt{x^2+1} - x > 0$.

On en déduit que pour tout réel x, on a $f(x) - 1 > 0$.
La courbe de f est donc toujours au-dessus de son asymptote horizontale.

• Position de la courbe par rapport à son asymptote oblique :

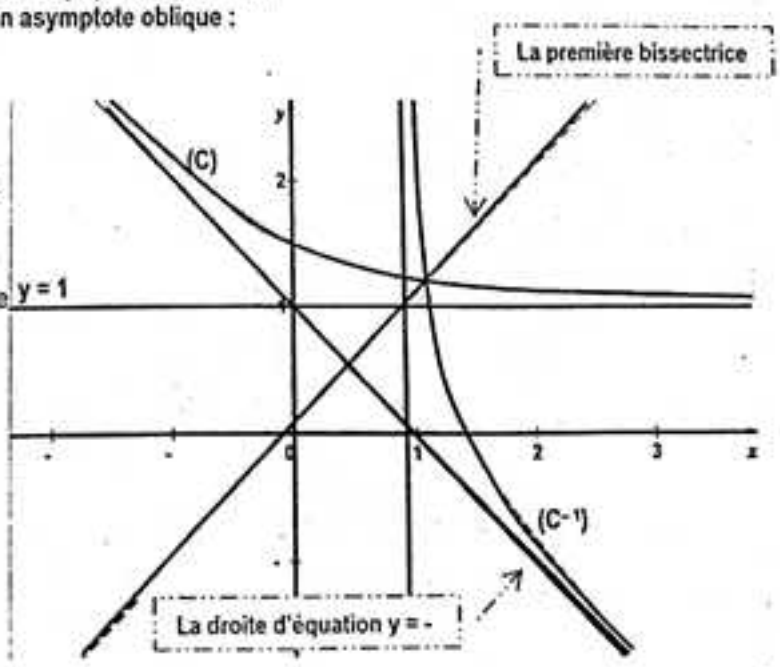
Soit un nombre réel x, on a :

$f(x) + x - 1 = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{2}$.

Or on a $\sqrt{x^2+1} > |x|$, et comme on a toujours $|x| \geq -x$, alors on peut écrire $\sqrt{x^2+1} > -x$.

C'est-à-dire $\sqrt{x^2+1} + x > 0$. On en déduit que pour tout réel x, on a $f(x) + x - 1 > 0$.
Donc la courbe de f est toujours au-dessus de son asymptote oblique.

d) La courbe (C) :



Scanned by CamScanner

3) • f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
D'où f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $E = f(\mathbb{R}) =]1, +\infty[$.

• f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc f^{-1} est dérivable sur $f(\mathbb{R}) =]1, +\infty[$.

• f^{-1} a le même sens de variation que f. D'où f^{-1} est aussi strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

• Soit $x \in]1, +\infty[$ et $y \in \mathbb{R}$.

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$
$$\Leftrightarrow -\frac{y}{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{y^2+1} = x$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2+1} = 2x + y - 2$$
$$\Leftrightarrow y^2 + 1 = 4x^2 + y^2 + 4 - 8x - 4y + 4xy$$
$$\Leftrightarrow 4y(x-1) = -4x^2 + 8x - 3$$
$$\Leftrightarrow 4y(x-1) = -4(x-1)^2 + 1$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{4(x-1)} + 1 - x$$

D'où $f^{-1}(x) = \frac{1}{4(x-1)} + 1 - x$, pour tout x élément de $]1, +\infty[$.

• La courbe (C^{-1}) de f^{-1} est symétrique de celle de f par rapport à la première bissectrice.

Solution 65

1)a) f est la somme d'une fonction polynôme et de la fonction sinus, qui sont des fonctions 5 fois dérivables sur $[0, +\infty[$, donc f est 5 fois dérivable sur $[0, +\infty[$. Et pour tout réel x, on a :

$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}$, $f''(x) = -\sin x + x - \frac{x^3}{3!}$, $f^{(3)}(x) = -\cos x + 1 - \frac{x^2}{2!}$,

$f^{(4)}(x) = \sin x - x$ $f^{(5)}(x) = \cos x - 1$.

b) Pour tout x dans $[0, +\infty[$, on a $\cos x \leq 1$, d'où $\cos x - 1 \leq 0$. Donc pour tout x dans $[0, +\infty[$, $f^{(5)}(x) \leq 0$.

Et $f^{(5)}(x)$ s'annule pour des valeurs isolées : les $x_k = k2\pi$, k étant un entier relatif quelconque.

D'où $f^{(4)}$ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Comme $f^{(4)}(0) = 0$, alors pour tout $x > 0$, $f^{(4)}(x) < 0$.
$f^{(3)}$ est donc strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Or $f^{(3)}(0) = 0$, alors $f^{(3)}(x) < 0$, pour tout $x > 0$.
f '' est donc strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Or $f''(0) = 0$, alors $f''(x) < 0$, pour tout $x > 0$.
D'où f ' est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Or $f'(0) = 0$, alors $f'(x) < 0$, pour tout $x > 0$.
D'où f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Or $f(0) = 0$, alors $f(x) < 0$, pour tout $x > 0$.

c) D'après la question précédente, pour tout $x \geq 0$, on a :

• $f(x) \leq 0$, donc $\sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ (1)

• $f'(x) \leq 0$, donc $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$. (2)

• $f''(x) \leq 0$, donc $x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x$. (3)

• $f^{(3)}(x) \leq 0$, donc $1 - \frac{x^2}{2!} \leq \cos x$. (4)

Des inégalités (2) et (4) d'une part puis (1) et (3) d'autre part, on déduit respectivement les encadrements :

$1 - \frac{x^2}{2!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ et $x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ pour tout $x > 0$.

2) On a pour tout $x > 0$, $1 - \frac{x^2}{2!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ et $x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$.

Donc $-x + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^5}{4!} \leq -x\cos x \leq -x + \frac{x^3}{2!}$ (5) et $x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ (car $x > 0$) (6).

En additionnant membre à membre les inégalités (5) et (6), on déduit que $\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{24} \leq \sin x - x\cos x \leq \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{120}$.

Scanned by CamScanner

D'où $\frac{1}{3}-\frac{x^2}{24}\le\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\le\frac{1}{3}+\frac{x^2}{120}$. Puisqu'en plus $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{3}-\frac{x^2}{24}=\frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{3}+\frac{x^2}{120}=\frac{1}{3}$, alors d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\frac{1}{3}$.

Solution 66

1) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel $x\neq 0$, on a : $f'(x)=\frac{1}{3}\left(2x+1-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2x^3+x^2-1}{3x^2}=\frac{g(x)}{3x^2}$.

Pour tout réel non nul x, on a $3x^2>0$. D'où le signe de f '(x) est celui de g(x).

2) • g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a $g'(x)=6x^2+2x=2x(3x+1)$.

On a $g'(x)>0$ si et seulement si, $x\in\left]-\infty,-\frac{1}{3}\right[\cup]0,+\infty[$.

et $g'(x)<0$ si et seulement si x appartient à $\left]-\frac{1}{3},0\right[$.

Donc g est strictement croissante sur $\left]-\infty,-\frac{1}{3}\right[$ et sur $]0,+\infty[$, et strictement décroissante sur $\left]-\frac{1}{3},0\right[$.

D'où le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	0	+	
g(x)	$-\infty$	↗	$-\frac{26}{27}$	↘	-1	↗	$+\infty$

• On constate que dans $]-\infty,0]$, la fonction g est majorée par $-\frac{26}{27}$.

D'où pour tout $x\le 0$, on a $g(x)\le-\frac{26}{27}$. On en déduit que, pour tout $x\le 0$, on a $g(x)<0$.

L'équation g(x) = 0 n'a donc pas de solution dans $]-\infty,0]$.

g est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et $g([0,+\infty[)=\left[g(0),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right[=[-1,+\infty[$.

Comme 0 appartient à $[-1,+\infty[$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$.

En définitive, l'équation g(x) = 0 a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

• De plus, on a g(0) = -1 et g(1) = 2, donc $g(0)\times g(1)<0$. Par conséquent, $\alpha\in]0,1[$.

3) f ' a le même signe que g. Or dans $]-\infty,0]$, on a $g(x)<0$.

dans $[0,\alpha[$, g est strictement croissante. Or $g(\alpha)=0$, donc $g<0$.

dans $]\alpha,+\infty[$, g est strictement croissante. Comme $g(\alpha)=0$, alors $g>0$.

D'où dans $]-\infty,\alpha[$, on a $f'<0$ et donc f est strictement décroissante.

dans $]\alpha,+\infty[$, on a $f'>0$ et donc f est strictement croissante.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. D'où le tableau de variation de f qui suit :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
f'(x)		-	||	-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	f(α)	↗	$+\infty$

4) a) • Le point I a pour coordonnées $\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$ et J a pour coordonnées (1 , 1).

Scanned by CamScanner

- Une équation de la tangente en J est : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, soit $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

Or $\frac{2}{3} \times (-1) + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$. D'où I appartient à la tangente à J en (C) qui contient déjà le point J.

Par conséquent, la droite (IJ) est la tangente en J à (C).

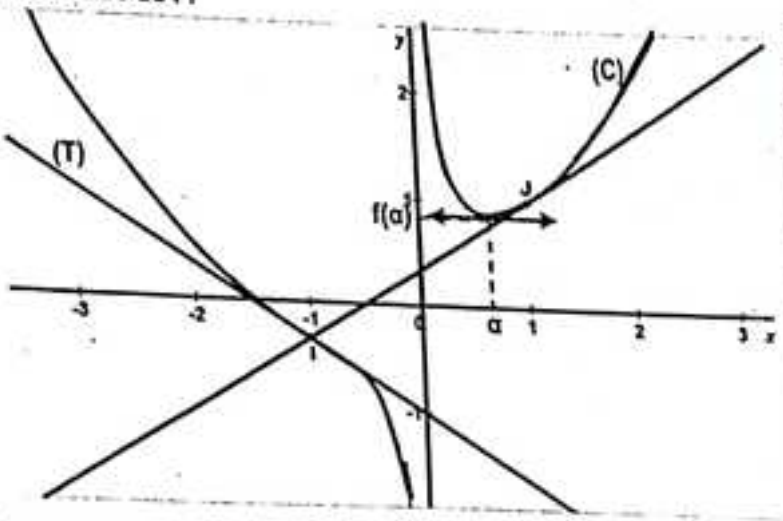
b) Une équation de la tangente (T) en I est : $y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$, soit $y = -\frac{2}{3}x - 1$.

5) Soit x un nombre réel non nul, on a $f(x) + \frac{2}{3}x + 1 = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{3x} = \frac{(x+1)^3}{3x}$. On en déduit que :

Dans $]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[$, on a $f(x) + \frac{2}{3}x + 1 \geq 0$. Donc la courbe de f est au-dessus de sa tangente (T).

Dans $[-1, 0[$, on a $f(x) + \frac{2}{3}x + 1 \leq 0$. Donc la courbe de f est en dessous de sa tangente (T).

6) La courbe de f :



Point méthode :

Soit f une fonction numérique, et (C) sa courbe représentative dans un repère donné.

Notons $y = g(x)$ l'équation réduite de la tangente à (C) en son point d'abscisse a.

- *a est au moins racine double de l'équation $f(x) = g(x)$.*
- *Soit d la fonction définie par $d(x) = f(x) - g(x)$.*

Notons que a et sa dérivée première d' s'annulent en a.

Solution 67

1) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$. Donc, $f'(x) > 0$.

Par conséquent, f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

2) Soit $y > 0$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $g'(x) = y \times \frac{1}{xy} - \frac{1}{x} = 0$. Donc $g'(x) = 0$.

D'où g est une fonction constante sur $]0, +\infty[$.

3) g étant constante sur $]0, +\infty[$, on a pour tout $x > 0$, $g(x) = g(1)$, c'est-à-dire, $f(xy) - f(x) = f(y) - f(1)$.

Donc $f(xy) = f(x) + f(y)$.

4) • Notons P_n la propriété : « $f(2^n) = nf(2)$ ».

$f(2^0) = f(1) = 0 = 0 \times f(2)$. D'où P_0 est vraie.

Supposons P_k vraie, pour un certain entier naturel k, alors, on a $f(2^k) = kf(2)$.

Donc $f(2^{k+1}) = f(2 \times 2^k)$

$= f(2) + f(2^k)$ d'après la question 3)

$= f(2) + kf(2)$ d'après l'hypothèse de récurrence

$= (k + 1)f(2)$.

Alors P_{k+1} est vraie.

D'où par récurrence, on conclut que pour tout entier naturel n, on a : $f(2^n) = nf(2)$.

- f étant strictement croissante et $2 > 1$, on a $f(2) > f(1)$. C'est-à-dire $f(2) > 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} nf(2) = +\infty$. C'est-à-dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(2^n) = +\infty$. f n'est donc pas majorée.

Scanned by CamScanner

f étant croissante et non majorée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

5) • Soit $x > 0$, on a : $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(x \times \frac{1}{x}\right) = f(1) = 0$. D'où Comme $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, alors $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} -f(x) = -\infty$ *(car* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$*)*.

6) • h est dérivable sur $]0, +\infty[$, comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

Et pour tout $x > 0$, on a : $h'(x) = f'(x) - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$.

x étant strictement positif, le signe de $f'(x)$ est celui de $1-\sqrt{x}$.

Or $1-\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow x < 1$. Avec $1-\sqrt{x} = 0$ si et seulement si $x = 1$.

Ainsi, dans $]0, 1[$, h est strictement croissante, et dans $]1, +\infty[$, h est strictement décroissante.

Dressons le tableau de variation de h :

x	0		1		$+\infty$
h'(x)	‖	+	0	-	
h(x)	‖	↗	-2	↘	

• h est majorée par -2 dans $]0, +\infty[$. Donc pour tout $x > 0$, on a : $h(x) < 0$.

Et par suite, pour tout $x > 0$, on a : $f(x) < 2\sqrt{x}$.

• f étant strictement croissante, pour tout $x > 0$, on a : $f(x) \geq f(1)$. C'est-à-dire $f(x) \geq 0$.

Ainsi, pour tout $x \geq 1$, on a $0 \leq f(x) < 2\sqrt{x}$. Et par suite $0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Solution 68

1) F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, d'où F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F'(x) = f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Or pour tout réel x, on a $0 \leq x^2$, donc $1 \leq x^2 + 1$, donc $0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$. D'où pour tout réel x, on a : $0 < F'(x) \leq 1$.

2)a) F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : $0 < F'(x) \leq 1$.

D'où, soit $x \geq 0$, on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à F sur $[0, x]$, et on a :

$0\times(x-0) \leq F(x) - F(0) \leq 1\times(x-0)$, donc $0 \leq F(x) \leq x$ *(car F(0) = 0)*

b) F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : $0 < F'(x) \leq 1$.

D'où, soit $x \leq 0$, on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à F sur $[x, 0]$, et on a :

$0\times(0-x) \leq F(0) - F(x) \leq 1\times(0-x)$, donc $0 \leq -F(x) \leq -x$, donc $x \leq F(x) \leq 0$.

Solution 69

Partie 1 :

1) Soit x réel différent de -2, on a : $-x+2-\frac{3}{x+2} = \frac{-x(x+2)+2(x+2)-3}{x+2} = \frac{1-x^2}{x+2} = f(x)$.

D'où $f(x) = -x+2-\frac{3}{x+2}$

2) • L'ensemble de définition de f est : $]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$.

Scanned by CamScanner

$\lim\limits_{x\to -2} 1-x^2=-3$ et $\lim\limits_{x\to -2} x+2=0$.

Or si $x < -2$, on a $x+2<0$ et si $x > -2$, on a $x+2>0$. D'où $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=-\infty$.

- Puisque $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=-\infty$, alors la droite d'équation $x = -2$ est asymptote à C_f.

On a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(-x+2))=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3}{x+2}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-x+2))=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3}{x+2}=0$.

D'où la droite d'équation $y = -x + 2$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3) f est continue et dérivable sur son ensemble de définition, car fonction rationnelle.

Pour tout $x \neq -2$, on a : $f'(x)=-1+\frac{3}{(x+2)^2}=\frac{3-(x+2)^2}{(x+2)^2}=\frac{(\sqrt{3}-2-x)(\sqrt{3}+2+x)}{(x+2)^2}$.

Si $x\in]-\infty,-2-\sqrt{3}[\cup]-2+\sqrt{3},+\infty[$, alors $f'(x) < 0$ et si $x\in]-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}[$, alors $f'(x) > 0$.

D'où f est strictement décroissante dans $]-\infty,-2-\sqrt{3}[$ et dans $]-2+\sqrt{3},+\infty[$.

f est strictement croissante dans $]-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}[$. On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		-2		$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	||	+	0	-	
f(x)	$+\infty$	↘	$f(-2-\sqrt{3})$	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	$f(-2+\sqrt{3})$	↘	$-\infty$

Le point de rencontre des asymptotes est $\Omega(-2, 4)$.

Vérifions que Ω est centre de symétrie de la courbe de f :

Pour tout $x \neq -2$, on a $-x \neq 2$, donc $-4-x \neq -2$ et

$8-f(-4-x)=8+(-4-x)-2+\frac{3}{-4-x+2}=2-x-\frac{3}{x+2}=f(x)$.

Puisque, $8 - f(-4 - x) = f(x)$, alors Ω est centre de symétrie de C_f.

Partie 2 :

1) Soit t un nombre réel, on a : $\varphi(\pi-t)=\frac{1-\sin^2(\pi-t)}{2+\sin(\pi-t)}=\frac{1-\sin^2 t}{2+\sin t}=\varphi(t)$.

Remarquons que pour tout réel t, on a : $\varphi(t+2\pi)=\frac{1-\sin^2(t+2\pi)}{2+\sin(t+2\pi)}=\frac{1-\sin^2(t)}{2+\sin t}=\varphi(t)$.

Puisque $\varphi(t+2\pi)=\varphi(t)$, alors φ est périodique de période 2π.

Donc on peut étudier la fonction φ dans un intervalle de longueur 2π, comme l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

Puisqu'en plus $\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$, alors la droite d'équation $x=\frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie à la courbe de φ. On peut alors limiter l'étude de φ à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; tracer sa courbe dans cet intervalle et compléter le tracé par une symétrie d'axe la droite d'équation $x=\frac{\pi}{2}$, puis par des translations successives de vecteur $k2\pi\vec{i}$, où $k\in\mathbb{Z}$.

2) • Pour tout x différent de -2, $f'(x)=-1+\frac{3}{(x+2)^2}$.

Donc f ' est dérivable sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ et sur [-1 , 1] en particulier. Et on a $f''(x)=\frac{-6}{(x+2)^3}$.

Scanned by CamScanner

Puisque x est dans [-1 , 1], alors on a : f ''(x) < 0. Par conséquent f ' est strictement décroissante sur [-1 , 1].

- f ' étant continue et strictement décroissante sur [-1 , 1], $f'([-1,1]) = [f'(1), f'(-1)] = \left]-\frac{2}{3}, 2\right[$.
- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans [-1 , 1]. Or la fonction f est dérivable sur [-1 , 1], alors $\varphi = f \circ \sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\varphi' = \sin' \times f' \circ \sin = \cos \times f' \circ \sin$. D'où pour tout réel t, $\varphi'(t) = f'(\sin t) \times \cos t$.

$$\varphi'(t) = 0,\ t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \Leftrightarrow \quad f'(\sin t) \times \cos t = 0,\ t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(\sin t) = 0,\ t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad (\text{car } t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \text{ donc } \cos t \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (f' \circ \sin)(t) = 0,\ t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

$f' \circ \sin$ est continue et strictement décroissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (car composée d'une fonction continue et strictement décroissante et d'une fonction continue et strictement croissante).

Donc réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $f' \circ \sin\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim_{t \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} f' \circ \sin t,\ \lim_{t \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} f' \circ \sin t\right[= \left]-\frac{2}{3}, 2\right[$.

Comme $0 \in \left]-\frac{2}{3}, 2\right[$, alors l'équation f '(sint) = 0 admet une unique solution α dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; et par conséquent, l'équation $\varphi'(t) = 0$ admet sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ une unique solution α.

- D'après la *Partie 1*, question 2), $f'(\sin\alpha) = 0$ si et seulement si, $\sin\alpha = -2-\sqrt{3}$ ou $\sin\alpha = -2+\sqrt{3}$.

Or on sait que $\sin\alpha$ appartient à]-1 , 1[, donc $\sin\alpha = -2+\sqrt{3}$.

D'où $\varphi(\alpha) = \frac{1-\sin^2\alpha}{2+\sin\alpha} = \frac{1-(-2+\sqrt{3})^2}{2+(-2+\sqrt{3})} = \frac{-6+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4-2\sqrt{3}$.

- $\varphi(0) = \frac{1}{2}$; $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{10}$; $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4+\sqrt{2}}$; $\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{8+2\sqrt{3}}$; $\varphi'(0) = -\frac{1}{4}$.

3) $f' \circ \sin$ est continue et strictement décroissante dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $f' \circ \sin\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]-\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}\right[$.

Ainsi, lorsque $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a cost > 0, f 'osint < 0, donc $\varphi'(t) < 0$. Notons que $\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

D'où la fonction φ est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4) Posons pour tout t dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $g(t) = \varphi(t) - t$.

g est une fonction dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et, pour tout t dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $g'(t) = \varphi'(t) - 1$.

Or pour tout t dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi'(t) \leq 0$, donc $g'(t) < 0$. Donc g est continue et strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

g réalise alors une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[g\left(\frac{\pi}{2}\right), g(0)\right] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Comme 0 appartient à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right]$, alors il existe un unique réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$, c'est-à-dire $\varphi(x_0) = x_0$.

- Soit t un nombre réel, on a :

Scanned by CamScanner

$-1 \le \sin t \le 1$, donc $0 \le \sin^2 t \le 1$ et $1 \le 2 + \sin t \le 3$, donc $-1 \le -\sin^2 t \le 0$ et $\frac{1}{3} \le \frac{1}{2+\sin t} \le 1$, donc

$0 \le 1 - \sin^2 t \le 1$ et $\frac{1}{3} \le \frac{1}{2+\sin t} \le 1$. Enfin, on peut écrire : $0 \le \frac{1-\sin^2 t}{2+\sin t} \le 1$.

Donc pour tout réel t, $\varphi(t)$ appartient à $[0, 1]$.

Ainsi, les solutions de l'équation $\varphi(t) = t$ sont à chercher dans $[0, 1]$. A fortiori dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Or cette équation n'a qu'une solution dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. D'où l'équation $\varphi(t) = t$ n'a qu'une solution dans $\mathbf{R}$.

Solution 70

1) D'après l'énoncé, f est dérivable sur $[0, 1]$. Donc f est continue sur $[0, 1]$.

2) f est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout réel x dans $[0, 1]$, on a $1 \le f'(x) \le 2$, donc $f'(x) > 0$.
Ainsi, f est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$.
De plus, $f(0) \times f(1) = -0,5 < 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0, 1]$, une unique solution α.

3) • f est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout réel t dans $[0, 1]$, on a $1 \le f'(x) \le 2$.
Soit $x \in [0, 1]$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à f sur $[0, x]$, on a :
$1 \times (x - 0) \le f(x) - f(0) \le 2 \times (x - 0)$, c'est-à-dire $x \le f(x) + 1 \le 2x$. Finalement, on a $x - 1 \le f(x) \le 2x - 1$.

• Puisque $\alpha \in [0,5 ; 1]$, posons $x = \alpha$ dans l'encadrement précédent, on aura : $\alpha - 1 \le f(\alpha) \le 2\alpha - 1$.
Comme $f(\alpha) = 0$, alors on a : $\alpha - 1 \le 0 \le 2\alpha - 1$, c'est-à-dire $\alpha - 1 \le 0$ et $0 \le 2\alpha - 1$. Donc $\alpha \le 1$ et $0,5 \le \alpha$.
Finalement, $\alpha \in [0,5 ; 1]$.

Solution 71

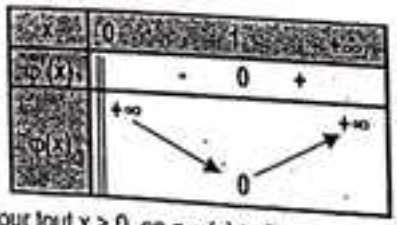
1) f est dérivable sur $Df =]0, +\infty[$ car fonction rationnelle, et pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$.

2) f ' est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f''(x) = 6x^2 + \frac{2}{x^3}$.

Et on a, pour tout $x > 0$, $f''(x) > 0$. D'où f ' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

3) Une équation de la tangente (T_A) en A est : $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, soit $y = x + \frac{1}{2}$.

4) Montrons que pour tout $x > 0$, $\varphi'(x) = f'(x) - f'(1)$:
On a $\varphi'(x) = f'(x) - 1$, or $f'(1) = 1$ d'où $\varphi'(x) = f'(x) - f'(1)$.
Déterminons le signe de φ' sur $]0, +\infty[$:
$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(1) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow x > 1$ car f esr strictement croissante
$\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(1) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow x < 1$ car f est strictement croissante.
D'où si $x < 1$, $\varphi'(x) < 0$.
Si $x > 1$, $\varphi'(x) > 0$.
Si $x = 1$, $\varphi'(x) = 0$.
Déterminons alors les variations de φ et son signe sur $]0, +\infty[$:
Si $x \in]0, 1[$, $\varphi'(x) < 0$. D'où φ est strictement décroissante sur $]0, 1[$.
Si $x \in]1, +\infty[$ $\varphi'(x) > 0$. d'où φ est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
D'où le tableau des variations de φ qui suit :



φ est minorée par 0 sur $]0, +\infty[$. D'où pour tout $x > 0$, on a $\varphi(x) \ge 0$.
Déduisons-en la position de (C_f) par rapport à (T_A) sur $]0, +\infty[$:

Scanned by CamScanner

D'après ce qui précède, on a $\varphi(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à $]0, +\infty[$. D'où $f(x) \geq x + \frac{1}{2}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Donc (C_f) est au-dessus de la tangente au point d'abscisse 1 sur $]0, +\infty[$.

Solution 72

1) f est définie sur $\mathbb{R}$. Et, $\begin{cases} f(x) = \frac{-x}{x}\sqrt{-x} = -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{x}{x}\sqrt{x} = \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

2) • f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$, car ses restrictions à ces intervalles y sont continues et dérivables.

De plus, $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} -\sqrt{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \sqrt{x} = 0$.

Comme $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = f(0)$, alors f est aussi continue en 0.

Par suite f est continue sur $\mathbb{R}$.

- Mais aussi, $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{-\sqrt{-x}}{x} = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{\sqrt{-x}} = +\infty$ et

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

f n'est donc pas dérivable en 0, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Notons que la courbe de f admet au point d'abscisse 0, une tangente verticale.

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel x, on a : $\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}} > 0 \text{ pour } x < 0 \\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \text{ pour } x > 0 \end{cases}$

f étant continue sur $\mathbb{R}$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a le tableau de variations de f qui suit :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	∞ | ∞	+	
$f(x)$		↗	0	↗	$+\infty$
	$-\infty$				

4) • f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc f induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

- La courbe de f^{-1} est symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.
- Notons que, si $x < 0$, alors on a $f(x) < 0$ et si $x > 0$, on a $f(x) > 0$.

$f(0) = 0$ donc $f^{-1}(0) = 0 = 0 \times |0|$.

Soit x et y deux nombres réels non nuls.

$f(y) = x$ si et seulement si, $\frac{|y|}{y}\sqrt{|y|} = x$. C'est-à-dire $\frac{|y|^2}{y^2}|y| = x^2$. Ce qui équivaut à $|y| = x^2$.

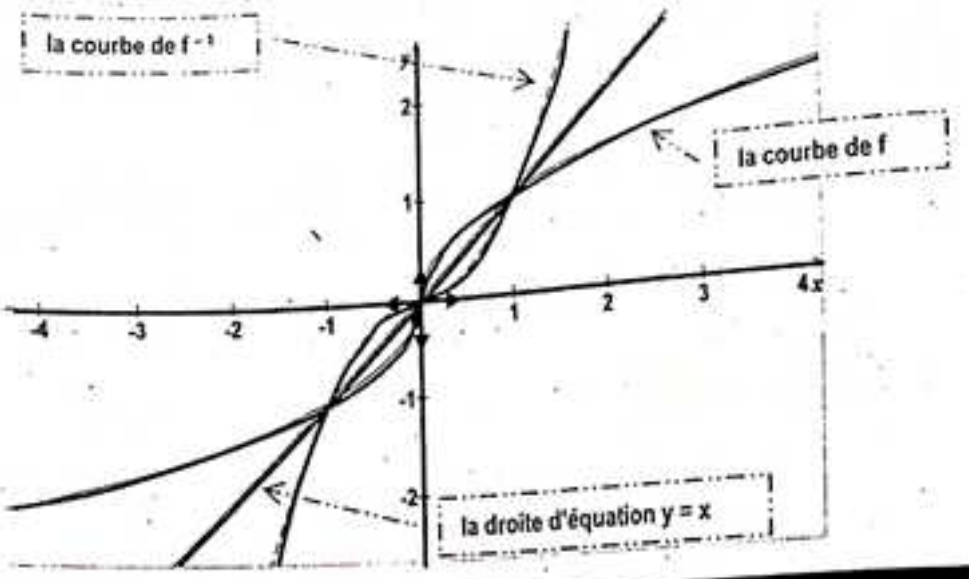
Si $y < 0$, alors on a $x < 0$ et $-y = x^2$, donc $y = -x^2 = -x \times x = |x| x$.

Si $y > 0$, alors on a $x > 0$ et $y = x^2 = x \times x = |x| x$.

Finalement, Soit x et y deux nombres réels, $f(y) = x$ si et seulement si $y = |x| x$.

D'où la fonction réciproque de f est la fonction : $x \mapsto |x| x$.

Scanned by CamScanner



Solution 73

1) • f_1 est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$, car fonction rationnelle, et pour tout réel $x > 0$, on a :

$f_1(x) = \frac{x+1}{4x^2}$, donc $f_1'(x) = \frac{4x^2 - 8x(x+1)}{16x^4} = \frac{-x-2}{4x^3}$. Donc pour tout $x > 0$, on a $f'(x) < 0$.

On en déduit que f_1 est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f_1(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x+1}{4x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{4x^2} = 0$.

Donc le tableau de variation de f qui suit :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f_1(x)$		$\searrow$	$+\infty$ ‖	$\searrow$	0

La courbe de f_1 a une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

• f_2 est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$, car fonction rationnelle, et pour tout réel $x > 0$, on a :

$f_2(x) = \frac{x^2+1}{4x^2}$, donc $f_2'(x) = \frac{8x^3 - 8x(x^2+1)}{16x^4} = \frac{-1}{2x^3}$. Pour tout $x > 0$, on a $f'(x) < 0$.

Donc f_2 est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f_2(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x^2+1}{4x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{4x^2} = \frac{1}{4}$.

Donc le tableau de variation de f qui suit :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f_2(x)$		$\searrow$	$+\infty$ ‖	$\searrow$	$\frac{1}{4}$

La courbe de f_2 admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une horizontale d'équation $y = \frac{1}{4}$ en $+\infty$.

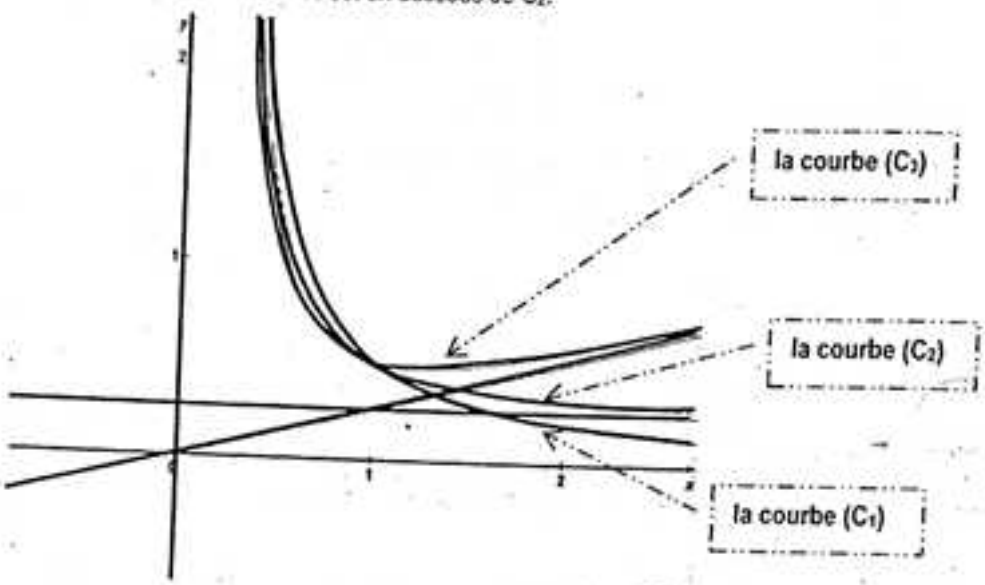
Etudions les positions relatives des courbes C_1 et C_2 :

Soit $x > 0$, $f_1(x) - f_2(x) = \frac{x+1}{4x^2} - \frac{x^2+1}{4x^2} = \frac{1-x}{4x}$.

Scanned by CamScanner

Pour tout $x > 0$, le signe de $\frac{1-x}{4x}$ est celui de $1 - x$, car $4x > 0$.

Ainsi, dans $]0\ ,\ 1]$, on a $f_1(x) - f_2(x) > 0$, et donc C_1 est au-dessus de C_2.
Et dans $[1\ ,\ +\infty[$, on a $f_1(x) - f_2(x) < 0$, et donc C_1 est en dessous de C_2.



2) Soit $n > 2$, f_n est définie, continue et dérivable sur $]0\ ,\ +\infty[$, car fonction rationnelle, et pour tout $x > 0$, on a :

$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(4x^2) - 8x(x^n+1)}{16x^4} = \frac{4nx^{n+1} - 8x^{n+1} - 8x}{16x^4} = \frac{(n-2)x^n - 2}{4x^3}.$$

Pour tout $x > 0$, le signe de $f_n'(x)$ est celui de $(n-2)x^n - 2$, car $4x^3 > 0$.

Soit $x > 0$, on a $(n-2)x^n - 2 > 0$ si et seulement si $x > \sqrt[n]{\frac{2}{n-2}}$ et $f_n'(x) = 0$ si et seulement si $x = \sqrt[n]{\frac{2}{n-2}}$.

Ainsi, f_n est strictement décroissante sur $\left]0\ ,\ \sqrt[n]{\frac{2}{n-2}}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\sqrt[n]{\frac{2}{n-2}}\ ,\ +\infty\right[$.

On posera dans la suite $x_n = \sqrt[n]{\frac{2}{n-2}}$.

Calculons les limites en 0 et en $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n+1}{4x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{n-2}}{4} = +\infty$, car $n > 2$. Et $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>}} f_n(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>}} \frac{x^n+1}{4x^2} = +\infty$.

La courbe de f_n admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
On a le tableau de variation qui suit :

x	0		x_n		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f_n(x_n)$	↗	$+\infty$

Etudions la branche infinie en $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n+1}{4x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{n-3}}{4}$. Ainsi :

Si $n = 3$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \frac{1}{4}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) - \frac{1}{4}x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{4x^2} = 0$.

Donc la courbe de f_3 admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{4}x$.

Scanned by CamScanner

Si $n > 3$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{n-3}}{4} = +\infty$.

La courbe C_n admet donc en $+\infty$, une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.

3) Intersection de C_n et $C_{n'}$:

- Soit n et n' deux entiers naturels distincts, $f_n(x) - f_{n'}(x) = \dfrac{x^n+1}{4x^2} - \dfrac{x^{n'}+1}{4x^2} = \dfrac{x^{n'}(x^{n-n'}-1)}{4x^2}$.

Puisque $x > 0$, $f_n(x) - f_{n'}(x) = 0$ si et seulement si $x^{n-n'} - 1 = 0$. C'est-à-dire $x = 1$.

Donc C_n et $C_{n'}$ se rencontrent au point de coordonnées $(1 , f_n(1))$, soit $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

- Toutes les courbes C_n se rencontrent au point $B\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ dont les coordonnées ne dépendent pas de n.

Donc toutes les courbes C_n passent par le même point, le point fixe $B\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

Position des courbes C_n et $C_{n'}$:

Soit n et n' deux entiers naturels tels que $n < n'$, $f_n(x) - f_{n'}(x) = \dfrac{x^n+1}{4x^2} - \dfrac{x^{n'}+1}{4x^2} = \dfrac{x^{n'}(x^{n-n'}-1)}{4x^2}$.

Puisque $x > 0$, le signe de $f_n(x) - f_{n'}(x)$ est celui de $x^{n-n'} - 1$.
Or $x^{n-n'} - 1 > 0$ si et seulement si $x > 1$.
Alors, dans $[1 , +\infty[$, C_n est au-dessus de $C_{n'}$ et dans $]0 , 1[$, C_n est en dessous de $C_{n'}$.

Solution 74

1)a) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\pi}{2}(x-1)$ est dérivable et strictement croissante sur $]0 , 2[$ et la fonction tan est dérivable sur $f(]0 , 2[) = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. D'où la fonction $g = \tan\circ f$ est dérivable sur $]0 , 2[$.

Et pour tout x dans $]0 , 2[$, $g'(x) = \dfrac{\pi}{2}\left(1 + \tan^2\left(\dfrac{\pi}{2}(x-1)\right)\right)$.

On constate que, pour tout x dans $]0 , 2[$, on a $g'(x) > 0$. D'où g est strictement croissante sur $]0 , 2[$.

De plus $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\dfrac{\pi}{2}(x-1) = -\dfrac{\pi}{2}$, donc $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$.

Et $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2}\dfrac{\pi}{2}(x-1) = \dfrac{\pi}{2}$, donc $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$.

Finalement, g est continue et strictement croissante sur $]0 , 2[$.

Donc g est une bijection de $]0 , 2[$ sur $g(]0 , 2[) = \left]\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) , \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} g(x)\right[= \mathbb{R}$.

b) g est dérivable sur $]0 , 2[$ et g' ne s'annule pas sur $]0 , 2[$, donc h est dérivable sur $g(]0 , 2[) = \mathbb{R}$.

Et pour tout réel x, on a $h'(x) = \dfrac{1}{g'(h(x))}$.

Or $g'(x) = \dfrac{\pi}{2}\left(1 + \tan^2\left(\dfrac{\pi}{2}(x-1)\right)\right) = \dfrac{\pi}{2}\left[1 + (g(x))^2\right]$, alors $g'(h(x)) = \dfrac{\pi}{2}\left[1 + (g(h(x)))^2\right] = \dfrac{\pi}{2}(1+x^2)$.

Finalement, $h'(x) = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}(1+x^2)}$.

Scanned by CamScanner

2) • La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, alors la fonction $x \mapsto h\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Finalement, la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel x non nul, on a :

$$k'(x) = h'(x) - \frac{1}{x^2}h'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}(1+x^2)} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}(1+x^2)} - \frac{1}{\frac{\pi}{2}(1+x^2)} = 0.$$

D'où pour tout réel non nul, on a k'(x) = 0.

• k' est nulle donc k est une fonction constante dans chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Ainsi :

pour tout réel x > 0, on a : k(x) = k(1) = h(1) + h(1) = 2h(1).

Or h(1) = a équivaut à g(a) = 1, c'est-à-dire $\tan\left[\frac{\pi}{2}(a-1)\right] = 1$, avec a dans $]0, 2[$.

On en déduit que $\frac{\pi}{2}(a-1) = \frac{\pi}{4} + q\pi$, q appartenant à $\mathbb{Z}$. Donc $a = \frac{3}{2} + 2q$ avec q dans $\mathbb{Z}$.

Puisque a appartient $]0, 2[$, alors q = 0 et $a = \frac{3}{2}$. Et donc k(x) = 3 pour tout réel x non nul.

pour tout réel x < 0, on a : k(x) = k(-1) = h(-1) + h(-1) = 2h(-1).

Or h(-1) = a équivaut à g(a) = -1, c'est-à-dire $\tan\left[\frac{\pi}{2}(a-1)\right] = -1$, avec a dans $]0, 2[$.

On en déduit que $\frac{\pi}{2}(a-1) = -\frac{\pi}{4} + q\pi$, q appartenant à $\mathbb{Z}$. Donc $a = \frac{1}{2} + 2q$ avec q dans $\mathbb{Z}$.

Puisque a appartient $]0, 2[$, alors q = 0 et $a = \frac{1}{2}$. Et donc k(x) = 1 pour tout réel x non nul.

Finalement, **pour tout réel x > 0**, on a : k(x) = 3.
pour tout réel x < 0, on a : k(x) = 1.

Solution 75

1) Etudions le comportement de f en $-\infty$ et en $+\infty$:

Notons que pour tout réel x, on a $x^2 + 1 > 0$. Donc g est définie sur $\mathbb{R}$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{14}(-9x + 5\sqrt{x^2+1}) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{14}(-9x + 5\sqrt{x^2+1}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{14}(-9x + 5x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{14}x(-9 + 5\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}) = -\infty$.

Montrons que la courbe (C) de g admet deux asymptotes dont nous préciserons les équations :

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{14} \cdot \frac{-9x + 5\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{14} \cdot \frac{-9x - 5x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{14}\left(-9 - 5\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = -1$

Et $\lim\limits_{x\to-\infty} (g(x) + x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{14}(5x + 5\sqrt{x^2+1}) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{14} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = 0$.

D'où la droite d'équation y = -x est asymptote à (C) en $-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{14} \cdot \frac{-9x + 5x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{14}\left(-9 + 5\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = -\frac{2}{7}$.

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(g(x) + \frac{4}{14}x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{14}(-5x + 5\sqrt{x^2+1}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{14} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$.

Scanned by CamScanner

D'où la droite d'équation $y = -\frac{2}{7}x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

2) Etudions la continuité et la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$:

La fonction qui x associe $x^2 + 1$ est continue, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Finalement g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, car somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Déterminons la dérivée g' de g :

Pour tout réel x, on a : $g'(x) = \frac{1}{14}\left(-9 + 5\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{5x - 9\sqrt{x^2+1}}{14\sqrt{x^2+1}}$

Déduisons-en la variation de g :

Le signe de g'(x) est celui de $5x - 9\sqrt{x^2+1}$ car pour tout réel x, on a : $14\sqrt{x^2+1} > 0$.

Posons $f(x) = 5x - 9\sqrt{x^2+1}$.

$5x - 9\sqrt{x^2+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9\sqrt{x^2+1} = 5x \quad \Leftrightarrow \quad 81x^2 + 81 = 25x^2$ avec $x \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 56x^2 = -81$ impossible

Puisque f est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors f(x) garde un signe contant sur $\mathbb{R}$.

Comme f(0) = -9 <0, alors pour tout réel x, on a f(x) < 0.

Par conséquent, pour tout réel x, on a g'(x) < 0. On en déduit que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3) Soit x un nombre réel.

$-g(-x) = -\frac{1}{14}(9(-x) + 5\sqrt{(-x)^2+1}) = \frac{1}{14}(-9x - 5\sqrt{x^2+1}) = h(x)$.

Comme h(x) = -g(-x), alors (C') est le symétrique de (C) par rapport à l'origine O du repère.

4) Soit M(x , y) un point du plan.

$M(x, y) \in (\Gamma') \quad \Leftrightarrow \quad 28(2x + 7y)(x + y) - 25 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 196y^2 + 252xy + 56x^2 - 25 = 0$.

Considérons l'équation $196y^2 + 252xy + 56x^2 - 25 = 0$, d'inconnue réelle y.

Son discriminant est : $\Delta = 63504x^2 - 4(196)(56x^2 - 25) = 19600x^2 + 19600 = 19600(x^2 + 1)$.

On a donc : $y = \frac{-252x - 140\sqrt{x^2+1}}{392} = \frac{1}{14}(-9x - 5\sqrt{x^2+1})$ ou $y = \frac{1}{14}(-9x + 5\sqrt{x^2+1})$.

Finalement M(x , y) appartient à (Γ) si et seulement si, $y = \frac{1}{14}(-9x - 5\sqrt{x^2+1})$ ou $y = \frac{1}{14}(-9x + 5\sqrt{x^2+1})$.

C'est-à-dire M appartient à (C) ou M appartient à (C').

D'où (Γ) est la réunion de (C) et (C').

Traçons alors la courbe (Γ) : Voir la courbe au bas de cette solution.

5) Montrons que le triplet $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan :

On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 5$.

Comme $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$, alors $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre et par conséquent, $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan.

Trouvons une équation de la courbe (Γ) dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$:

Ainsi, soit M(x , y) dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et M(X , Y) dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On a : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM} = X\vec{u} + Y\vec{v} = X(\vec{i} - \vec{j}) + Y(7\vec{i} - 2\vec{j}) = (X + 7Y)\vec{i} + (-X - 2Y)\vec{j}$.

On en déduit que $x\vec{i} + y\vec{j} = (X + 7Y)\vec{i} + (-X - 2Y)\vec{j}$. C'est-à-dire $\begin{cases} x = X + 7Y \\ y = -X - 2Y \end{cases}$.

Scanned by CamScanner

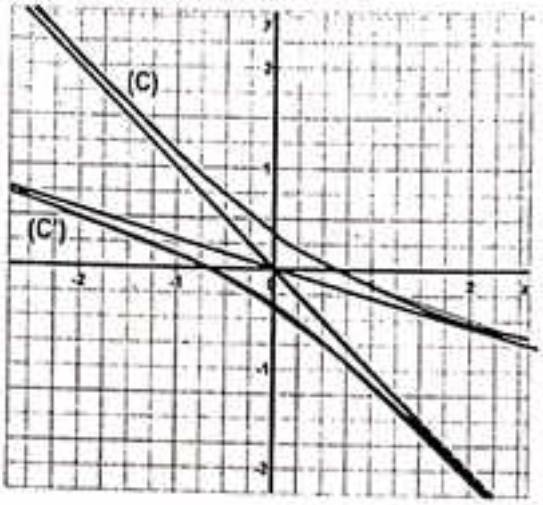
Ainsi,

$M(x\,;y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow 28(2x+7y)(x+y)-25=0 \Leftrightarrow 28(2X+14Y-7X-14Y)(X+7Y-X-2Y)-25=0$

$\Leftrightarrow 28(-5X)(5Y)-25=0$

$\Leftrightarrow 28XY=-1$

D'où une équation de (Γ) dans le repère $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ est : $28XY = -1$.



Solution 76

1)a) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$.
g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Et pour tout réel x, on a : $g'(x) = 3x^2 - 2x + 3$.
Ce polynôme a pour discriminant $\Delta = 4 - 36 = -32 < 0$. Donc pour tout réel x, on a $g'(x) > 0$. g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Puisque g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et 0 appartient à $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, alors l'équation (E) : $g(x) = 0$ admet une unique solution a dans $\mathbb{R}$.

b) Ceci revient à donner un encadrement de a à 10^{-1} près.

- $g(0) = 1$ et $g(-1) = -4$. Comme $g(0)g(-1) < 0$, alors on a : $-1 < a < 0$.
- $g(-0,3) = -0,017$ et $g(-0,2) = 0,352$. Comme $g(-0,3)g(-0,2) < 0$, alors on a : $-0,3 < a < -0,2$.

C'est-à-dire $-\frac{3}{10} < a < -\frac{2}{10}$. D'où $k = -3$.

c) $x^3 - x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x(x^2+3) = x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{x^2-1}{x^2+3}$. D'où (E) est équivalente à $x = \frac{x^2-1}{x^2+3}$.

2)a) h est définie, continue et dérivable sur [-1 , 0] et pour tout réel x dans [-1 , 0], on a :

$$h'(x) = \frac{2x(x^2+3) - 2x(x^2-1)}{(x^2+3)^2} = \frac{8x}{(x^2+3)^2}.$$

Pour tout x dans [-1 , 0[, on a $h'(x) < 0$ avec $h'(0) = 0$.
D'où h est strictement décroissante sur [-1 , 0].

b) Notons que $h([-1,0]) = [h(0)\,,h(-1)] = \left[-\frac{1}{3}\,,0\right]$.

Ainsi, si x appartient à [-1 , 0], alors h(x) appartient à $\left[-\frac{1}{3}\,,0\right]$.

Comme $\left[-\frac{1}{3}\,,0\right] \subset [-1,0]$, alors h(x) appartient à [-1 , 0].

En définitive, pour tout réel x dans [-1 , 0], on a h(x) dans [-1 , 0].

c) • $u_0 = -0,5$, donc u_0 appartient à [-1 , 0].

• Supposons que u_k appartient à [-1 , 0] pour un entier naturel k donné.

Alors d'après la question précédente, $h(u_k)$ appartient aussi à [-1 , 0].

Scanned by CamScanner

Or $h(u_k) = u_{k+1}$, alors u_{n+1} appartient à [-1 , 0].
On peut alors conclure d'après le principe du raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à [-1 , 0].

3)a) h' est dérivable sur [-1 , 0] et pour tout réel x, on a : $h''(x) = \dfrac{8(x^2+3)^2 - 32x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^4} = \dfrac{24(1-x^2)}{(x^2+3)^3}$.

Comme pour tout réel x dans [-1 , 0] on a $h''(x) \geq 0$, alors h' est croissante dans [-1 , 0].

Ainsi, $-1 \leq x \leq 0$ implique $h'(-1) \leq h'(x) \leq h'(0)$. C'est-à-dire $-\dfrac{1}{2} \leq h'(x) \leq 0$. D'où on a $|h'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

Remarque : ***On peut aussi réaliser cet encadrement de h'(x) en utilisant une méthode algébrique (en utilisant des encadrements successifs) comme suit :***

Pour $-1 \leq x \leq 0$, on aura $0 \leq -8x \leq 8$ et $9 \leq (x^2+3)^2 \leq 16$. Donc $0 \leq -8x \leq 0$ et $\dfrac{1}{16} \leq \dfrac{1}{(x^2+3)^2} \leq \dfrac{1}{9}$.

En multipliant membre à membre ces deux dernières inégalités, on a : $0 \leq \dfrac{-8x}{(x^2+3)^2} \leq \dfrac{8}{9} \leq \dfrac{1}{2}$.

On obtient ainsi, $0 \leq |h'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

b) D'après la question 3)a), h est dérivable sur [-1 , 0] et pour tout réel x dans [-1 , 0], on a $|h'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

Comme a appartient à [-1 , 0] et pour tout entier naturel n, u_n appartient à [-1 , 0], alors d'après l'inégalité des accroissements finis, on a : $|h(u_n) - h(a)| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - a|$. (1)

Rappelons que a est solution l'équation (E) qui est équivalente à l'équation h(x) = x, alors h(a) = a.

De plus, $h(u_n) = u_{n+1}$, alors l'inégalité (1) devient $|u_{n+1} - a| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - a|$.

c) • $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 |u_0 - a| = |u_0 - a|$, donc $|u_0 - a| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 |u_0 - a|$. Donc l'inégalité est vraie pour n = 0.

• Supposons $|u_k - a| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^k |u_0 - a|$ pour un entier naturel k donné.

Alors on a : $\dfrac{1}{2}|u_k - a| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1} |u_0 - a|$ (2) (en multipliant les deux membres de l'inégalité précédente par $\dfrac{1}{2}$).

D'après la question 3)b), on a $|u_{k+1} - a| \leq \dfrac{1}{2}|u_k - a|$. (3)

Des inégalités (2) et (3), on peut écrire $|u_{k+1} - a| \leq \dfrac{1}{2}|u_k - a| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1} |u_0 - a|$.

Donc : $|u_{k+1} - a| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1} |u_0 - a|$.

Alors d'après le principe du raisonnement par récurrence, on a pour tout entier naturel n, $|u_n - a| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - a|$.

Scanned by CamScanner

2 FONCTIONS LOGARITHMES

RAPPEL DU COURS

A. Définition - propriétés immédiates

A_1 – Théorème et définition

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Elle admet donc des primitives sur cet intervalle.

On appelle fonction **logarithme népérien**, que l'on note ln, la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, qui s'annule pour $x = 1$.
Soit $x > 0$, le logarithme népérien de x est noté lnx.

A_2 – Propriétés immédiates

- La fonction ln est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

  En d'autres termes, soit x un nombre réel, lnx existe si et seulement si $x > 0$.
- La fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- Soit x un réel strictement positif. On a :
  $\ln x > 0$ si et seulement si $x > 1$.
  $\ln x < 0$ si et seulement si, $0 < x < 1$.
  $\ln x = 0$ si et seulement si $x = 1$.
- $\ln x = \ln a$ si et seulement si, $(a > 0, x > 0$ et $x = a)$.
- $\ln x < \ln a$ si et seulement si, $(a > 0, x > 0$ et $x < a)$.

B. Règles de calcul

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs et m un nombre rationnel.

- $\ln ab = \ln a + \ln b$
- $\ln a^m = m \ln a$
- $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

C. Calcul des limites

C_1 – Limites usuelles

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

Scanned by CamScanner

C_2 – Autres limites

- Soit a un réel strictement positif, $\lim\limits_{x \to a} \ln x = \ln a$.
- Soit u une fonction numérique, a un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et b un réel positif ou nul ou $+\infty$.
  Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$, alors $\lim\limits_{x \to a} \ln(u(x)) = \lim\limits_{x \to b} \ln x$.
- Soit m et n deux nombres rationnels strictement positifs.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^n x}{x^m} = 0$
- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^m \ln^n x = 0$.

D. Dérivées et primitives

D_1 – Autres dérivées

- Soit u une fonction numérique.

La fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur un ensemble E si et seulement si u est dérivable et strictement positive sur E.

Et la dérivée de $x \mapsto \ln(u(x))$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

- Soit u une fonction numérique dérivable et ne s'annulant pas.

La dérivée de $x \mapsto \ln|u(x)|$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

D_2 – Primitives

- La fonction $x \mapsto \ln|x|$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
- La fonction $x \mapsto \ln|u(x)|$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

E. Le nombre e : l'équation $\ln x = m$, où m est un nombre rationnel

E_1 – Le nombre e

La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Elle réalise alors une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\ln(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$. Comme 1 appartient à $\mathbb{R}$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique nombre réel e tel que $\ln e = 1$.
Le nombre e est appelé la **base du logarithme népérien**. On a : $e \approx 2{,}718281828459045235360287471352 7$.

E_2 – L'équation $\ln x = m$:

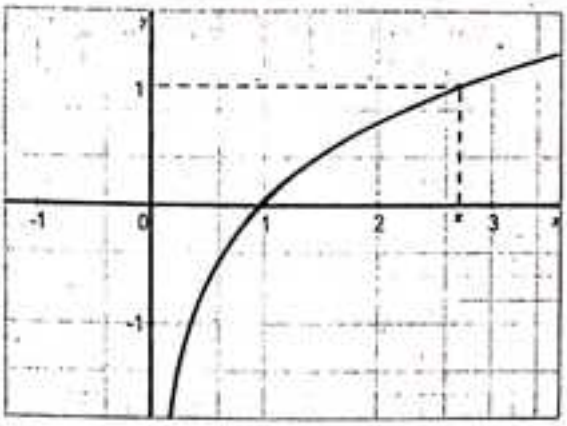
Soit m un nombre rationnel.

- $\ln x = m$ si et seulement si $x = e^m$.
- $\ln x > m$ si et seulement si, $x > e^m$.
- $\ln x < m$ si et seulement si, $0 < x < e^m$.

F. La courbe de la fonction ln

La courbe de la fonction ln admet une asymptote (verticale) d'équation $x = 0$ et une branche parabolique de direction asymptotique celle de l'axe des abscisses.

Scanned by CamScanner



G. Autres logarithmes

G_1 – Définition

- Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction logarithme de base a, notée $\log_a$, est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : soit $x > 0$, $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.

- Si a = e, $\log_a$ est le logarithme népérien.
  Si a = 10, $\log_a$ est le logarithme décimal, que l'on note log.

G_2 – Propriétés

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

- $\log_a a = 1$.
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a$ a les mêmes règles de calcul que ln.

Scanned by CamScanner

EXERCICES POUR COMPRENDRE LE COURS

A. Calculer avec le logarithme népérien

Exercice 1

Exprimer en fonction de ln2 les nombres suivants :

a) ln16 b) ln512 c) ln0,125 d) $\frac{1}{8}\ln\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\ln\frac{1}{8}$ e) ln72 – 2ln3.

Solution 1

a) $\ln16=\ln(2^4)=4\ln2$. b) $\ln512=\ln(2^9)=9\ln2$. c) $\ln0,125=\ln\frac{1}{8}=-\ln8=-\ln(2^3)=-3\ln2$.

d) $\frac{1}{8}\ln\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\ln\frac{1}{8}=-\frac{1}{8}\ln4+\frac{1}{4}\ln8=-\frac{1}{8}\ln2^2+\frac{1}{4}\ln2^3=-\frac{1}{4}\ln2+\frac{3}{4}\ln2=\frac{1}{2}\ln2$.

e) $\ln72-2\ln3=\ln(2^3\times3^2)-2\ln3=\ln2^3+\ln3^2-2\ln3=3\ln2+2\ln3-2\ln3=3\ln2$.

Exercice 2

Exprimer en fonction de ln2 et ln5 :

a) ln500 b) $\ln\frac{16}{25}$ c) ln6,25 d) $\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ldots+\ln\frac{98}{99}+\ln\frac{99}{100}$.

Solution 2

a) $\ln500=\ln(5^3.2^2)=3\ln5+2\ln2$. b) $\ln\frac{16}{25}=\ln16-\ln25=\ln(2^4)-\ln(5^2)=4\ln2-2\ln5$.

c) $\ln6,25=\ln(625\times10^{-2})=\ln(5^4\times5^{-2}\times2^{-2})=\ln(5^2\times2^{-2})=2\ln5-2\ln2$.

d) $\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ldots+\ln\frac{98}{99}+\ln\frac{99}{100}=\ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\ldots\times\frac{98}{99}\times\frac{99}{100}\right)=\ln\left(\frac{1}{100}\right)=-\ln(5^2\times2^2)=-2\ln5-2\ln2$.

Exercice 3

Simplifier les écritures: a) $\ln(2+\sqrt{3})^{20}+\ln(2-\sqrt{3})^{20}$ b) $\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

Solution 3

a) $\ln(2+\sqrt{3})^{20}+\ln(2-\sqrt{3})^{20}=20\ln(2+\sqrt{3})+20\ln(2-\sqrt{3})=20\ln[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]=20\ln1=0$.

b) $\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=\ln\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right]=\ln\left(\frac{5-1}{4}\right)=\ln1=0$.

Exercice 4

Montrer que les fonctions suivantes sont impaires :

a) $f:x\to\ln\frac{1995+x}{1995-x}$ sur $]-1995,1995[$ b) $f:x\to\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ sur $\mathbf{R}$.

Solution 4

a) Soit x appartenant à]-1995 , 1995[, - x appartient à]-1995 , 1995[et on a :

$f(-x)+f(x)=\ln\left(\frac{1995-x}{1995+x}\right)+\ln\left(\frac{1995+x}{1995-x}\right)=\ln\left(\frac{1995-x}{1995+x}\times\frac{1995+x}{1995-x}\right)=\ln1=0$.

D'où f(-x) = -f(x) et par suite, f est impaire

Scanned by CamScanner

b) Soit x appartenant à $\mathbb{R}$, -x appartient à $\mathbb{R}$ et

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\left(\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)=\ln\left(\frac{-x^2+x^2+1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$$

Donc, $f(-x)=\ln\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$. D'où f est impaire.

Exercice 5

Simplifier les expressions suivantes:

a) $\ln e^2-\ln e^3$ b) $\ln\sqrt{e}+\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ c) $5\ln(e^{-1})+4\ln(e^3\sqrt{e})$.

Solution 4

a) $\ln e^2-\ln e^3=2\ln e-3\ln e=2-3=-1$.

b) $\ln\sqrt{e}+\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\ln e^{\frac{1}{2}}-\ln e=\frac{1}{2}\ln e-\ln e=-\frac{1}{2}$.

c) $5\ln e^{-1}+4\ln(e^3\sqrt{e})=-5\ln e+4(\ln e^3+\ln e^{\frac{1}{2}})=-5+4(3+\frac{1}{2})=9$.

B. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions faisant intervenir la fonction logarithme népérien

Exercice 6

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes:

a) $f:x\mapsto \ln x+\ln(2-x)$ b) $f:x\mapsto \ln(\sin x)$ c) $f:x\mapsto \frac{1}{\ln x}$

d) $f:x\mapsto \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right)$ e) $f:x\mapsto \ln(\ln x)$ f) $f:x\mapsto \ln(\ln(\ln x))$

g) $f:x\mapsto \frac{\ln x-2}{\ln x+1}$, h) $f:x\mapsto \sqrt{\frac{\ln x-1}{\ln x+1}}$ i) $f:x\mapsto \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

Solution 6

a) $\ln x+\ln(2-x)$ existe si et seulement si $x>0$ et $2-x>0$, c'est-à-dire ($x>0$ et $x<2$), soit $0<x<2$:
D'où l'ensemble de définition de f est $]0,2[$.

b) f(x) existe si et seulement si, $\sin x>0$, c'est-à-dire x appartient à $]k2\pi,\pi+k2\pi[$, k étant un entier relatif.
D'où l'ensemble de définition de f est la réunion des intervalles du type $]k2\pi,\pi+k2\pi[$, k étant un entier relatif.

c) f(x) existe si et seulement si $x>0$ et $\ln x\neq 0$, c'est-à-dire $x>0$ et $x\neq 1$.
D'où l'ensemble de définition de f est $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

d) f(x) existe si et seulement si $\frac{x+1}{2-x}>0$, c'est-à-dire x appartient à $]-1,2[$.
D'où l'ensemble de définition de f est $]-1,2[$.

e) f(x) existe si et seulement si $x>0$ et $\ln x>0$, c'est-à-dire ($x>0$ et $x>1$), soit $x>1$.
D'où l'ensemble de définition de f est $]1,+\infty[$.

f) f(x) existe si et seulement si $\ln(\ln x)>0$ et $\ln(\ln x)$ existe, c'est-à-dire ($\ln x>1$, $x>0$ et $\ln x>0$), soit ($x>e$, $x>0$ et $x>1$). On en déduit que f(x) existe si et seulement si $x>e$.
D'où l'ensemble de définition de f est $]e,+\infty[$.

g) f(x) existe si et seulement si ($x>0$ et $\ln x+1\neq 0$), c'est-à-dire ($x>0$ et $\ln x\neq -1$), soit $x>0$ et $x\neq e^{-1}$.
D'où l'ensemble de définition de f est $]0,e^{-1}[\cup]e^{-1},+\infty[$.

h) f(x) existe si et seulement si ($x>0$ et $\frac{\ln x-1}{\ln x+1}>0$), c'est-à-dire ($x>0$ et $\ln x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$).

Scanned by CamScanner

Pour résoudre l'inéquation $\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1} > 0$, on pose X = lnx. On obtient alors l'inéquation $\frac{X-1}{X+1} > 0$.

On dresse le tableau de signe de $\frac{X-1}{X+1}$, qui nous permet de conclure que X appartient à $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Ainsi, ($x > 0$ et $\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1} > 0$) si et seulement si, ($x > 0$ et $\ln x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$).

C'est-à-dire x appartient à $]0, e^{-1}[\cup]e, +\infty[$. D'où l'ensemble de définition de f est $]0, e^{-1}[\cup]e, +\infty[$.

i) f(x) existe si et seulement si $x \neq 1$ et $x \neq -1$. D'où l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Point méthode :

- *$\ln x$ existe si et seulement si $x > 0$.*
- *Soit u une fonction numérique :*

$\ln u(x)$ existe si et seulement si $u(x)$ existe et $u(x) > 0$.

$\ln|u(x)|$ existe si et seulement si $u(x)$ existe et $u(x) \neq 0$.

- *Il ne faut jamais transformer une expression lorsqu'on n'a pas précisé son ensemble de définition. Vous risquerez de commettre des erreurs très graves :*

Si vous écrivez $f(x) = \ln x + \ln(x+1) = \ln(x(x+1))$ ou encore $f(x) = \ln x^2 = 2\ln x$, vous commettez une grave erreur, car $\ln x + \ln(x+1)$ et $\ln(x(x+1))$ d'une part et $\ln x^2$ et $2\ln x$ d'autre part n'ont pas le même ensemble de définition, donc les égalités sont fausses.

Il convient de noter que les formules $\ln ab = \ln a + \ln b$, $\ln a^n = n\ln a$ ... ne sont en général valables que si a et b sont strictement positifs.

De façon générale, si n est pair, $\ln a^n = n\ln|a|$ et si n est impair, $\ln a^n = n\ln a$.

C. Résoudre les équations et inéquations faisant intervenir le logarithme népérien

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes:

a) $(x+3)\ln(x+3) = 0$

b) $\ln(1+x) = \ln(1-2x)$

c) $\ln(3+x) + \ln(x-3) = \ln 5$

d) $\ln(3+x) - \ln(x+13) + \ln(x+1) = 0$.

Solution 7

a) Cette équation est résolue sous la condition $x + 3 > 0$, c'est-à-dire $x > -3$. Sous cette condition,

$(x+3)\ln(x+3) = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0$ ou $\ln(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = -2$.

Or, on a $x > -3$, donc $x = -2$. L'ensemble solution de cette équation est donc $S = \{-2\}$.

b) Cette équation est résolue sous la condition $1 + x > 0$ et $1 - 2x > 0$; soit $x > -1$ et $x < \frac{1}{2}$. Donc x appartient $\left]-1, \frac{1}{2}\right[$.

Sous cette condition, $\ln(1+x) = \ln(1-2x) \Leftrightarrow 1 + x = 1 - 2x \Leftrightarrow x = 0$.

Puisque 0 appartient à $\left]-1, \frac{1}{2}\right[$, alors $x = 0$. L'ensemble solution de cette équation est alors : $S = \{0\}$.

c) Cette équation est résolue sous la condition $3 + x > 0$ et $x - 3 > 0$. C'est-à-dire $x > 3$.

Sous cette condition,

$\ln(3+x) + \ln(x-3) = \ln 5 \Leftrightarrow \ln[(3+x)(x-3)] = \ln 5 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 9) = \ln 5 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 5$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{14}$ ou $x = -\sqrt{14}$.

Puisque $x > 3$, alors $x = \sqrt{14}$. Finalement l'ensemble solution de cette équation est $S = \{\sqrt{14}\}$.

d) Cette équation est résolue sous la condition $3 + x > 0$, $x + 13 > 0$ et $x + 1 > 0$; c'est-à-dire $x > -1$.

Sous cette condition,

$\ln(3+x) - \ln(x+13) + \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(3+x) + \ln(x+1) = \ln(x+13) \Leftrightarrow \ln[(3+x)(x+1)] = \ln(x+13)$

$\Leftrightarrow (3+x)(x+1) = x + 13$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$

$\Leftrightarrow x = -5$ ou $x = 2$.

Scanned by CamScanner

Puisque $x > -1$, alors $x = 2$. Finalement, l'ensemble solution de cette équation est $S = \{2\}$.

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(ex + 1) = 1$ b) $\ln x = 1 + \ln(2 - x)$ c) $\ln\frac{x+1}{x} \geq 4$

d) $2(\ln x)^2 = 7\ln x$ e) $(\ln x)^2 - \ln x - 42 = 0$.

Solution 8

a) $\ln(ex + 1) = 1 \Leftrightarrow ex + 1 = e \Leftrightarrow x = \frac{e-1}{e}$

L'ensemble solution de cette équation est $\left\{\frac{e-1}{e}\right\}$.

b) Cette équation est résolue sous la condition $x > 0$ et $2 - x > 0$; c'est-à-dire $0 < x < 2$. Sous cette condition,

$\ln x = 1 + \ln(2-x) \Leftrightarrow \ln x - \ln(2-x) = 1 \Leftrightarrow \ln\frac{x}{2-x} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2-x} = e \Leftrightarrow x = \frac{2e}{1+e}$.

Puisque $0 < \frac{2e}{1+e} < 2$, alors l'ensemble solution de cette équation est $S = \left\{\frac{2e}{1+e}\right\}$.

c) Cette équation est résolue sous la condition $\frac{x+1}{x} > 0$, c'est-à-dire $x < -1$ ou $x > 0$ *(le lecteur fera le tableau de signe de* $\frac{x+1}{x}$*)*. Sous cette condition, on a :

$\ln\frac{x+1}{x} = 4 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = e^4 \Leftrightarrow x + 1 = xe^4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^4 - 1}$.

Puisque $\frac{1}{e^4-1} > 0$, alors l'ensemble solution de cette équation est : $S = \left\{\frac{1}{e^4-1}\right\}$.

d) Cette équation est résolue sous la condition $x > 0$. Sous cette condition,

$2(\ln x)^2 = 7\ln x \Leftrightarrow (2\ln x - 7)\ln x = 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 7 = 0$ ou $\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{7}{2}$ ou $x = 1 \Leftrightarrow x = e^{\frac{7}{2}}$ ou $x = 1$.

D'où l'ensemble solution de cette équation est $\left\{1, e^{\frac{7}{2}}\right\}$.

e) Cette équation est résolue sous la condition $x > 0$. Posons $X = \ln x$. On a alors :

$(\ln x)^2 - \ln x - 42 = 0 \Leftrightarrow X^2 - X - 42 = 0 \Leftrightarrow X = -6$ ou $X = 7 \Leftrightarrow \ln x = -6$ ou $\ln x = 7 \Leftrightarrow x = e^{-6}$ ou $x = e^7$.

L'ensemble solution de cette équation est $\{e^{-6}, e^7\}$.

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $2\ln^3 x + 5\ln^2 x + \ln x - 2 = 0$ b) $[\ln(\ln x)]^4 - 25[\ln(\ln x)]^2 + 144 = 0$.

Solution 9

a) Cette équation est résolue sous la condition $x > 0$.

On pose $X = \ln x$, on a alors :

$2\ln^3 x + 5\ln^2 x + \ln x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2X^3 + 5X^2 + X - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (X + 1)(2X^2 + 3X - 2) = 0$

$\Leftrightarrow X + 1 = 0$ ou $2X^2 + 3X - 2 = 0$

$\Leftrightarrow X = -1$ ou $X = -2$ ou $X = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \ln x = -1$ ou $\ln x = -2$ ou $\ln x = \frac{1}{2}$

Point méthode :

Pour résoudre une équation faisant intervenir la fonction ln :

- *On précise la condition pour laquelle les termes intervenant dans l'équation existent.*
- *On ramène l'équation sous l'une des formes* $\ln u(x) = \ln v(x)$ *ou* $\ln u(x) = a$ *(a étant une constante réelle)*
- *Ce qui nous amène à résoudre l'une des équations :* $u(x) = v(x)$ *ou* $u(x) = e^a$.
- *On déduit alors l'ensemble solution.*

Scanned by CamScanner

Ainsi, $2\ln^3 x + 5\ln^2 x + \ln x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$ ou $x = e^{-2}$ ou $x = e^{\frac{1}{2}}$.

L'ensemble solution de cette équation est $\{e^{-1}, e^{-2}, e^{\frac{1}{2}}\}$.

b) Cette équation est résolue sous la condition $x > 0$ et $\ln x > 0$, c'est-à-dire $x > 1$.

Sous cette condition, posons $X = [\ln(\ln x)]^2$, on a alors :

$[\ln(\ln x)]^4 - 25[\ln(\ln x)]^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 25X + 144 = 0$

$\Leftrightarrow X = 9$ ou $X = 16$

$\Leftrightarrow [\ln(\ln x)]^2 = 9$ ou $[\ln(\ln x)]^2 = 16$

$\Leftrightarrow \ln(\ln x) = -3$ ou $\ln(\ln x) = 3$ ou $\ln(\ln x) = -4$ ou $\ln(\ln x) = 4$

$\Leftrightarrow \ln x = e^{-3}$ ou $\ln x = e^{3}$ ou $\ln x = e^{-4}$ ou $\ln x = e^{4}$

$\Leftrightarrow x = e^{e^{-3}}$ ou $x = e^{e^{3}}$ ou $x = e^{e^{-4}}$ ou $x = e^{e^{4}}$

D'où l'ensemble solution de cette équation est $\left\{e^{e^{-3}}, e^{e^{3}}, e^{e^{4}}, e^{e^{-4}}\right\}$.

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

a) $\ln x \geq -5$ b) $2\ln x < 1$ c) $(1 - \ln x)(3 - 2\ln x) \geq 0$.

Solution 10

a) $\ln x \geq -5 \Leftrightarrow x \geq e^{-5}$. D'où l'ensemble solution de cette inéquation est alors $S = [e^{-5}, +\infty[$.

b) $2\ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{2}}$ avec $x > 0$ $\Leftrightarrow 0 < x < e^{\frac{1}{2}}$.

D'où l'ensemble solution de cette inéquation est $\left]0, e^{\frac{1}{2}}\right[$.

c) Cette inéquation est résolue sous la condition $x > 0$. Sous cette condition, posons $X = \ln x$, on a alors:

$(1 - \ln x)(3 - 2\ln x) \geq 0 \Leftrightarrow (1 - X)(3 - 2X) \geq 0 \Leftrightarrow X \leq 1$ ou $X \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln x \leq 1$ ou $\ln x \geq \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow (x \leq e$ ou $x \geq e^{\frac{3}{2}})$, avec $x > 0$

$\Leftrightarrow x \in]0, e] \cup \left[e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right[$.

Donc l'ensemble solution de cette inéquation est $]0, e] \cup \left[e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right[$.

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln(-x^2 + 4x + 6) < 0$

b) $\ln x + \ln(2 - x) + \ln(x + 4) \geq \ln 5x$

c) $\ln(x^2 + 9x + 20) < \ln(x + 13)$

d) $\ln x - \frac{1}{\ln x} > \frac{3}{2}$.

Solution 11

a) $\ln(-x^2 + 4x + 6) < 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 6 < 1$ avec $-x^2 + 4x + 6 > 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 4x + 5 < 0$ avec $-x^2 + 4x + 6 > 0$ *(Dresser les tableaux de signe)*

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]5, +\infty[$ et $x \in \left]2 - \sqrt{10}, 2 + \sqrt{10}\right[$

$\Leftrightarrow x \in \left]2 - \sqrt{10}, -1\right[\cup \left]5, 2 + \sqrt{10}\right[$ *(Faire l'intersection des deux ensembles de la*

Scanned by CamScanner

ligne précédente).

L'ensemble solution de cette inéquation est $]2-\sqrt{10},-1[\cup]5,2+\sqrt{10}[$.

b) Cette inéquation est résolue sous la condition $x>0$, $2-x>0$ et $x+4>0$; c'est-à-dire $0<x<2$.
Sous cette condition,

$\ln x + \ln(2-x) + \ln(x+4) \geq \ln 5x \Leftrightarrow \ln[x(2-x)(x+4)] \geq \ln 5x$ avec $0<x<2$

$\Leftrightarrow x(2-x)(x+4) \geq 5x$ avec $0<x<2$

$\Leftrightarrow x(-x^2-2x+3) \geq 0$ avec $0<x<2$ *(Dresser un tableau de signe)*

$\Leftrightarrow x \in]-\infty,-3]\cup[0,1]$ avec $0<x<2$

$\Leftrightarrow x \in]0,1]$. (On fait l'intersection des deux ensembles)

D'où l'ensemble solution de cette inéquation est $]0,1]$.

c) $\ln(x^2+9x+20) < \ln(x+13)$

$\Leftrightarrow x^2+9x+20>0$, $x+13>0$ et $x^2+9x+20<x+13$

$\Leftrightarrow x^2+9x+20>0$, $x+13>0$ et $x^2+8x+7<0$.

$\Leftrightarrow x\in]-\infty,-5[\cup]-4,+\infty[$, $x\in]-13,+\infty[$ et $x\in]-7,-1[$.

$\Leftrightarrow x\in]-7,-5[\cup]-4,-1[$. *(Faire l'intersection des trois ensembles de la ligne précédente).*

L'ensemble solution de inéquation est $]-7,-5[\cup]-4,-1[$.

d) Cette inéquation est résolue sous la condition $x>0$ et $\ln x \neq 0$; c'est-à-dire $x>0$ et $x\neq 1$, soit $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Sous cette condition, posons $X = \ln x$, on a alors :

$\ln x - \frac{1}{\ln x} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow X - \frac{1}{X} > \frac{3}{2}$.

$\Leftrightarrow \frac{2X^2-3X-2}{2X} > 0$. *(Dresser le tableau de signe de $\frac{2X^2-3X-2}{2X}$)*

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < X < 0$ ou $2<X$.

$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2} < \ln x < 0 \text{ ou } 2 < \ln x\right)$.

$\Leftrightarrow \left(e^{-\frac{1}{2}} < x < 1 \text{ ou } e^2 < x\right)$.

$\Leftrightarrow x \in \left]e^{-\frac{1}{2}},1\right[\cup]e^2,+\infty[$.

Comme de plus x appartient à $]0,1[\cup]1,+\infty[$, alors $x \in \left]e^{-\frac{1}{2}},1\right[\cup]e^2,+\infty[$. *(Faire une intersection des deux ensembles $\left]e^{-\frac{1}{2}},1\right[\cup]e^2,+\infty[$ et $]0,1[\cup]1,+\infty[$)*

Finalement, l'ensemble solution de cette inéquation est $\left]e^{-\frac{1}{2}},1\right[\cup]e^2,+\infty[$.

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $\ln\left|\frac{x-3}{2x-5}\right| - \ln 2 \geq 0$.

Solution 12

Cette inéquation est résolue sous la condition $x\neq 3$ et $x\neq\frac{5}{2}$, c'est-à-dire x appartient à $\mathbb{R}-\left\{3,\frac{5}{2}\right\}$.

Sous cette condition, on a :

Scanned by CamScanner

$$\ln\left|\frac{x-3}{2x-5}\right| - \ln 2 \geq 0 \Leftrightarrow \ln\left|\frac{x-3}{2x-5}\right| \geq \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{x-3}{2x-5}\right| \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-3}{2x-5}\right)^2 \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-3}{2x-5}-2\right)\left(\frac{x-3}{2x-5}+2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(-3x+7)(5x-13)}{(2x-5)^2} \geq 0$$

$\Leftrightarrow$ $(-3x + 7)(5x - 13) \geq 0$, car $(2x - 5)^2$ est strictement positif dans $\mathbb{R} - \left\{3, \frac{5}{2}\right\}$

$\Leftrightarrow$ x appartient à $\left[\frac{7}{3}, \frac{13}{5}\right] - \left\{\frac{5}{2}\right\}$ .Puisque x est différent de 3 et $\frac{5}{2}$.

Alors l'ensemble solution de cette inéquation est $\left[\frac{7}{3}, \frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2}, \frac{13}{5}\right]$.

Exercice 13

Déterminer les entiers naturels n vérifiant les inégalités :

a) $7{,}5975 < \ln n < 7{,}6$ b) $1{,}003^n \geq 100$ c) $(\sqrt{13} - \sqrt{11})^n \leq 10^{-20}$

Solution 13

a) $7{,}5975 < \ln n < 7{,}6 \Leftrightarrow e^{7.5975} < n < e^{7.6} \Leftrightarrow 1993 < n < 1999$.

Donc les entiers naturels cherchés sont : 1994 , 1995 , 1996 , 1997 et 1998.

b) $1{,}003^n \geq 100 \Leftrightarrow n\ln 1{,}003 \geq \ln 100$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 100}{\ln 1{,}003} \quad \left(1537 < \frac{\ln 100}{\ln 1{,}003} < 1538\right)$$

$\Leftrightarrow$ $n \geq 1538$ (car n est un entier naturel)

D'où les entiers cherchés sont les entiers naturels supérieurs ou égaux à 1538.

c) $(\sqrt{13} - \sqrt{11})^n \leq 10^{-20} \Leftrightarrow n\ln(\sqrt{13} - \sqrt{11}) \leq -20\ln 10$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-20\ln 10}{\ln(\sqrt{13} - \sqrt{11})}$$ (Remarquons que l'inégalité est inversée car $\ln(\sqrt{13} - \sqrt{11})$ est un nombre négatif).

$\Leftrightarrow$ $n \geq 38$ car n est un entier naturel et $37 < \frac{-20\ln 10}{\ln(\sqrt{13} - \sqrt{11})} < 38$.

D'où les entiers naturels cherchés sont les entiers naturels supérieurs ou égaux à 38.

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x + y = 65 \\ \ln x + \ln y = \ln 1000 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = \frac{3}{2} \\ \ln x^2 + \ln y^2 = -\ln 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ \ln x + \ln y = \ln 60 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \ln\left(\frac{x^2}{y^3}\right) = 9 \\ \ln(xy^5) = -\frac{17}{2} \end{cases}$

Solution 14

a) Ce système est résolu sous la condition $x > 0$ et $y > 0$.

Scanned by CamScanner

Sous cette condition, on a : $\begin{cases} x+y=65 \\ \ln x+\ln y=\ln 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=65 \\ \ln(xy)=\ln 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=65 \\ xy=1000 \end{cases}$.

x et y sont donc les solutions de l'équation $X^2 - 65X + 1000 = 0$.

Or cette équation a pour solutions : 40 et 25.

Ces solutions étant positives, les couples (x , y) solutions du système sont : (40 , 25) et (25 , 40).

b) Ce système est résolu sous la condition $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Sous cette condition, on a :

$$\begin{cases} x+y=\frac{3}{2} \\ \ln x^2+\ln y^2=-\ln 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{3}{2} \\ \ln(xy)^2=2\ln\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{3}{2} \\ \ln|xy|=\ln\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{3}{2} \\ |xy|=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Finalement, on a : $\begin{cases} x+y=\frac{3}{2} \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases}$ (1) ou $\begin{cases} x+y=\frac{3}{2} \\ xy=-\frac{1}{2} \end{cases}$ (2).

- Dans le système (1), x et y sont les solutions de l'équation : $X^2-\frac{3}{2}X+\frac{1}{2}=0$.

Or cette équation a deux solutions non nulles : 1 et $\frac{1}{2}$.

Alors les couples (x , y) solutions du système (1) sont : $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

- Dans le système (2), x et y sont les solutions de l'équation : $X^2-\frac{3}{2}X-\frac{1}{2}=0$.

Or cette équation a deux solutions non nulles : $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}$ et $\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}$.

Alors les couples (x , y) solutions du système (2) sont : $\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4},\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}\right)$ et $\left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4},\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}\right)$.

D'où les couples (x , y) solutions du système initial sont :

$$\left(1,\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2},1\right), \left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4},\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}\right) \text{ et } \left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4},\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}\right).$$

c) Ce système est résolu sous la condition $x > 0$ et $y > 0$.

Sous cette condition, on a :

$$\begin{cases} x^2+y^2=169 \\ \ln x+\ln y=\ln 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=169 \\ \ln(xy)=\ln 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=169 \\ xy=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=169 \\ x^2y^2=3600 \end{cases}.$$

x^2 et y^2 sont les solutions de l'équation $X^2 - 169X + 3600 = 0$.

Or les solutions de cette équation sont 25 et 144. Ces deux solutions étant strictement positives, on a : ($x^2 = 25$ et $y^2 = 144$) ou ($x^2 = 144$ et $y^2 = 25$). Puisque x et y sont strictement positifs, alors les couples (x , y) solutions du système sont : (5 , 12) et (12 , 5).

d) Puisque x^2 est positif, ce système est résolu sous la condition $x > 0$ et $y > 0$.

Sous cette condition, on a : $\begin{cases} \ln\left(\frac{x^2}{y^3}\right)=9 \\ \ln(xy^5)=-\frac{17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\ln x-3\ln y=9 \\ \ln x+5\ln y=-\frac{17}{2} \end{cases}$.

On pose $X = \ln x$ et $Y = \ln y$. Le système devient : $\begin{cases} 2X-3Y=9 \\ X+5Y=-\frac{17}{2} \end{cases}$.

Scanned by CamScanner

Ce système a pour solution, $X=\frac{3}{2}$ et $Y=-2$. Ainsi $\ln x=\frac{3}{2}$ et $\ln y=-2$; c'est-à-dire $x=e^{\frac{3}{2}}$ et $y=e^{-2}$.

Donc l'unique couple (x , y) solution de ce système est $\left(e^{\frac{3}{2}}, e^{-2}\right)$.

D. Etudier les limites des fonctions faisant intervenir la fonction logarithme népérien

Exercice 15

Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f :

a) $f(x)=\ln x-x$

b) $f(x)=x+\ln(x+1)-\ln x$

c) $f(x)=x+\ln\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)$

d) $f(x)=\ln\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2-x+1}\right)$

e) $f(x)=\frac{\ln x-2}{\ln x+1}$

f) $f(x)=\frac{\ln x-2}{x-1}$.

Solution 15

a) f(x) existe si et seulement si $x>0$. D'où l'ensemble de définition de f est $]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)=-\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$;
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$.

b) f(x) existe si et seulement si $x+1>0$ et $x>0$, c'est-à-dire $x>0$.
Donc l'ensemble de définition de f est $]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x+1)=0$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{\ln(x+1)}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{x+1}{x}\times\frac{\ln(x+1)}{x+1}-\frac{\ln x}{x}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Autre méthode :

On a : $x+\ln(x+1)-\ln x=x+\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$.

Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Point méthode :

- *Dans le calcul des limites, on ne cherchera à transformer l'écriture de la fonction que si l'on est devant une forme indéterminée. Donc il faudra d'abord chercher à calculer la limite sans transformer l'écriture de la fonction en utilisant les limites usuelles et « les opérations sur les limites ». Ce calcul pourra se faire oralement.*
- *Si l'on rencontre une forme indéterminée du type $\infty-\infty$, on peut, pour la lever, mettre en facteur le terme le plus fort ou alors le terme le plus faible (notons que soit r une fraction rationnelle strictement positive, x^r est plus fort que $\ln x$).*

c) f(x) existe si et seulement si, $\frac{x-1}{2x+3}>0$,

c'est-à-dire que x appartient à $\left]-\infty,-\frac{3}{2}\right[\cup]1,+\infty[$.

L'ensemble de définition de f est donc : $\left]-\infty,-\frac{3}{2}\right[\cup]1,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2x+3}=\frac{1}{2}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\ln x=\ln\frac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Scanned by CamScanner

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{2x+3}=\dfrac{1}{2}$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\dfrac{x-1}{2x+3}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\ln x=\ln\dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

- $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\dfrac{x-1}{2x+3}=0$, (avec $\dfrac{x-1}{2x+3}>0$, au voisinage à droite de 1),

alors $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\ln\left(\dfrac{x-1}{2x+3}\right)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty$. Donc $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=-\infty$.

- $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-\frac{3}{2}}\dfrac{x-1}{2x+3}=+\infty$, (avec $\dfrac{x-1}{2x+3}>0$ au voisinage à gauche de $-\dfrac{3}{2}$), alors

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-\frac{3}{2}}\ln\left(\dfrac{x-1}{2x+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-\frac{3}{2}}f(x)=+\infty$.

Point méthode :
Soit $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ et une fonction définie au voisinage de a.
Pour calculer la $\lim\limits_{x\to a}\ln u(x)$:
- *On calcule d'abord $\lim\limits_{x\to a}u(x)$.*
- *Si $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$, où $b\in]0,+\infty[\cup\{+\infty\}$, alors $\lim\limits_{x\to a}\ln u(x)=\lim\limits_{x\to b}\ln x$.*

d) f(x) existe si et seulement si $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x+1}>0$.

Or pour tout réel x, on a : $x^2-x+1>0$, alors on a

$\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x+1}>0$ si et seulement si $x^2+3x+2>0$;

c'est-à-dire que x appartient à $]-\infty,-2[\cup]-1,+\infty[$.
Donc l'ensemble de définition de f est : $]-\infty,-2[\cup]-1,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x+1}=1$. D'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\ln x=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\ln x=0$.

- $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x+1}=0$ (et on a $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x+1}>0$, pour $x<-2$), d'où $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x+1}=0$ (et on a $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x+1}>0$, pour $x>-1$), d'où $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty$.

e) D'après l'exercice 6, question g), l'ensemble de définition de f est $]0,e^{-1}[\cup]e^{-1},+\infty[$.

- Pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de f, $f(x)=\dfrac{\ln x-2}{\ln x+1}=\dfrac{\ln x}{\ln x}\times\dfrac{\left(1-\frac{2}{\ln x}\right)}{\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)}=\dfrac{1-\frac{2}{\ln x}}{1+\frac{1}{\ln x}}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}=0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-2x}{1+x}=1$.

Point méthode :
Pour lever une indétermination du type $\dfrac{\infty}{\infty}$, on peut mettre en facteur au numérateur et au dénominateur, un des termes à l'origine (un des termes qui tendent vers ∞) de la forme indéterminée, et simplifier si possible.

- $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1}{\ln x}=0$.

Par conséquent $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-2x}{1+x}=1$.

- $\lim\limits_{x\to e^{-1}}(\ln x-2)=-3$ et $\lim\limits_{x\to e^{-1}}(\ln x+1)=0$; or le tableau de signe de $\ln x+1$ est :

x	0	e^{-1}	
$\ln x+1$	|| -	0	+

D'où $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}e^{-1}}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}e^{-1}}f(x)=-\infty$.

f) f(x) existe si et seulement si $x>0$ et $x\neq1$, d'où l'ensemble de définition de f est $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

Scanned by CamScanner

- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x - 2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x - 1 = -1$, d'où $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 1} (\ln x - 2) = -2$ et $\lim\limits_{x \to 1} x - 1 = 0$; or $x - 1 > 0$ pour $x > 1$, et $x - 1 < 0$ pour $x < 1$.

D'où $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = -\infty$.

- $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{1 - \dfrac{2}{\ln x}}{1 - \dfrac{1}{x}}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\ln x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 16

Déterminer la limite de f en $+\infty$:

a) $f(x) = \dfrac{\ln(2x+3)}{\ln x}$ b) $f(x) = \dfrac{\ln(x-2)}{x^2+1}$ c) $f(x) = \dfrac{\ln(2x-1)}{\sqrt{x}}$ d) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{2x+1}$.

Solution 16

a) Pour tout x dans $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, on a : $\dfrac{\ln(2x+3)}{\ln x} = \dfrac{\ln\left[x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)\right]}{\ln x} = \dfrac{\ln x + \ln\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}{\ln x} = 1 + \dfrac{\ln\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}{\ln x}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \dfrac{3}{x} = 2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(2+\dfrac{3}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \ln x = \ln 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$. D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

b) Pour tout $x > 2$, $\dfrac{\ln(x-2)}{x^2+1} = \dfrac{\ln(x-2)}{x-2} \times \dfrac{x-2}{x^2+1}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-2) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-2}{x^2+1} = 0$, alors, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

c) Pour tout $x > \dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{\ln(2x-1)}{\sqrt{x}} = \dfrac{\ln\left[x\left(2-\dfrac{1}{x}\right)\right]}{\sqrt{x}} = \dfrac{\ln x + \ln\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} + \dfrac{\ln\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} = 2 \times \dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{\ln\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2-\dfrac{1}{x}\right) = 2$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(2-\dfrac{1}{x}\right) = \ln 2$.

Et puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

d) Soit $x > 0$, $\dfrac{\ln(x^2+1)}{2x+1} = \dfrac{\ln\left[x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]}{x\left(2+\dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{\ln x^2 + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(2+\dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{2}{2+\dfrac{1}{x}} + \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{2x+1}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = 1$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0$.

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left| \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{2}{2+\dfrac{1}{x}} + \dfrac{\ln(1+\dfrac{1}{x^2})}{2x+1} \right| = 0$.

Scanned by CamScanner

Exercice 17

Déterminer la limite en $+\infty$ de f :

a) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ b) $f(x)=2x^2-\ln x$ c) $f(x)=\ln^5 x-\sqrt{x}$ d) $f(x)=\dfrac{\ln x+x}{x^2+1}$.

Solution 17

a) Pour tout $x>0$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\ln x^2}{x^2}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

b) Pour tout $x>0$, $f(x)=x^2\left(2-\dfrac{\ln x}{x^2}\right)$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c) Pour tout $x>0$, $\ln^5 x-\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(\dfrac{\ln^5 x}{\sqrt{x}}-1\right)$.

Pour le calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^5 x}{\sqrt{x}}$, posons $X=x^{\frac{1}{10}}$, c'est-à-dire $x=X^{10}$. On a alors $\dfrac{\ln^5 x}{\sqrt{x}}=\dfrac{10^5\ln^5 X}{X^5}=10^5\left(\dfrac{\ln X}{X}\right)^5$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} X=\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{10}}=+\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^5 x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{X\to+\infty} 10^5\left(\dfrac{\ln X}{X}\right)^5=0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\dfrac{\ln^5 x}{\sqrt{x}}-1\right)=-\infty$.

d) Soit $x>0$, on a : $f(x)=\dfrac{x}{x^2}\times\dfrac{\frac{\ln x}{x}+1}{1+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{x}\times\dfrac{\frac{\ln x}{x}+1}{1+\frac{1}{x^2}}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Exercice 18

Calculer la limite en x_0 de la fonction f :

a) $f(x)=x^2\ln x$, avec $x_0=0$ b) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$, avec $x_0=0$

c) $f(x)=(x-2)\ln(x-2)$, avec $x_0=2$ d) $f(x)=(x-2)\ln\left(\dfrac{x+1}{x^2-4x+4}\right)$, avec $x_0=2$

e) $f(x)=(3x-5)\ln\sqrt{3x^2+x-10}$, avec $x_0=\dfrac{5}{3}$ f) $f(x)=\sqrt{x}(\ln x)^2$, avec $x_0=0$.

Point méthode :

Soit $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)=0$, alors

$\lim\limits_{x\to a} u(x)\ln(u(x))=\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$.

Solution 18

a) f est définie sur $]0,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x(x\ln x)=0$, car $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=0$.

b) f est définie sur $]0,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}+\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\ln x}{x}=+\infty$. Car $\lim\limits_{x\to 0}(1+x\ln x)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0} x=0$, avec $x>0$.

c) f est définie sur $]2,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\ln(x-2)=\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$.

Scanned by CamScanner

d) f est définie sur $]-1\,;2[\cup]2\,;+\infty[$.

$f(x)=(x-2)\ln(x+1)-2(x-2)\ln|x-2|$.

Si $x<2$: $f(x)=(x-2)\ln(x+1)+2(2-x)\ln(2-x)$. $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}(2-x)\ln(2-x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x\ln x=0$, d'où $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}f(x)=0$.

Si $x>2$: $f(x)=(x-2)\ln(x+1)-2(x-2)\ln(x-2)$. $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}(x-2)\ln(x-2)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x\ln x=0$, d'où $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}f(x)=0$.

e) $f(x)$ existe si et seulement si, $3x^2+x-10>0$. On dresse le tableau de signe de $3x^2+x-10$.

On en déduit que, l'ensemble de définition de f est $]-\infty\,,-2[\cup\left]\frac{5}{3}\,,+\infty\right[$.

Pour $x>\frac{5}{3}$, $f(x)=(3x-5)\ln(\sqrt{3x^2+x-10})=\frac{1}{2}(3x-5)\ln[(3x-5)(x+2)]=\frac{1}{2}(3x-5)\ln(3x-5)+\frac{1}{2}(3x-5)\ln(x+2)$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{5}{3}}(3x-5)\ln(3x-5)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x\ln x=0$ et $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{5}{3}}(3x-5)\ln(x+2)=0\times\ln\frac{11}{3}=0$. D'où $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{5}{3}}f(x)=0$.

f) f est définie sur $]0\,,+\infty[$. Posons $X=x^{\frac{1}{4}}$, donc $x=X^4$.

On a alors $\sqrt{x}(\ln x)^2=X^2\ln^2(X^4)=16(X\ln X)^2$.

Or $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}X=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x^{\frac{1}{4}}=0$ (avec $x^{\frac{1}{4}}>0$), alors

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\sqrt{x}(\ln x)^2=\lim\limits_{X\xrightarrow{>}0}16(X\ln X)^2=0$.

Point méthode :

- *Notons que :*

$\lim\limits_{x\to0}x^m\ln^n x=0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^n x}{x^m}=0$

- *Pour prouver ces limites, on peut faire un changement de variable, en posant :*

$X=x^{\frac{m}{n}}$ *donc* $x=X^{\frac{n}{m}}$.

Exercice 19

Calculer la limite de f en 0 : a) $f(x)=\frac{\ln(1+5x)}{\sqrt{x}}$ b) $f(x)=\frac{\ln(2x^2+1)}{x}$.

Solution 19

a) Soit $x>0$, on a : $\frac{\ln(1+5x)}{\sqrt{x}}=\frac{\ln(1+5x)}{5x}\times\frac{5x}{\sqrt{x}}=\frac{\ln(1+5x)}{5x}\times5\sqrt{x}$.

Or $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}5x=0$, alors $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln(1+5x)}{5x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$. Comme $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}5\sqrt{x}=0$, alors : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=0$.

b) Soit $x\neq0$, on a : $\frac{\ln(2x^2+1)}{x}=\frac{\ln(2x^2+1)}{2x^2}\times\frac{2x^2}{x}=\frac{\ln(2x^2+1)}{2x^2}\times2x$.

Or $\lim\limits_{x\to0}2x^2=0$, alors $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(2x^2+1)}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$. D'où $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=0$.

E. Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions faisant intervenir la fonction logarithme népérien

Exercice 20

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases}f(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x\neq0\\ f(0)=0\end{cases}$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et étudier sa dérivabilité en 0.

Scanned by CamScanner

Solution 20

a) f est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x^2+1$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, d'où la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ car produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.

Etudions la continuité de f en 0 :

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(X+1)}{X} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} \times x = 0$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, alors f est continue en 0. On en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction $x \mapsto x^2+1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, d'où la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

Etudions la dérivabilité de f en 0 :

Soit $x \neq 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$. Or $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

Puisque cette limite est réelle, alors f est dérivable en 0 et le nombre dérivé de f en 0 est f '(0) = 1.

Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur R par : $\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et étudier sa dérivabilité en 1.

Solution 21

a) f est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $]-\infty, 1[$.

Les fonctions ln et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont continues sur $]1, +\infty[$, alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}\ln x$, produit de fonctions continues sur $]1, +\infty[$ est aussi continue sur $]1, +\infty[$.

Par conséquent, la fonction $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}\ln x$, somme de fonctions continues sur $]1, +\infty[$ est continue sur cet intervalle.

La fonction f est donc continue sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$, car ses restrictions à ces intervalles y sont continues.

Etudions la continuité de f en 1 :

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} x^2 = 1$, $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} 1 + \frac{\ln x}{x} = 1$ et $f(1) = 1^2 = 1$.

Puisque $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = f(1)$, alors f est continue en 1. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $]-\infty, 1[$.

Scanned by CamScanner

Les fonctions ln et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont dérivables sur $]1, +\infty[$, alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}\ln x$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ (car produit de fonctions dérivables sur $]1, +\infty[$).

Par conséquent, la fonction $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}\ln x$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ car somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

La fonction f est donc dérivable sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, car ses restrictions à ces intervalles y sont dérivables.

D'où f est dérivable sur $\mathbf{R} - \{1\}$.

Etudions la dérivabilité de f en 1 :

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} (x + 1) = 2.$$

D'où f est dérivable en 1 à gauche et le nombre dérivé de f en 1 à gauche est $f_g'(1) = 2$.

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{\ln x}{x(x-1)} = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{\ln x}{(x-1)} \times \frac{1}{x} = 1. \text{ Car, } \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1.$$

D'où f est dérivable en 1 à droite et le nombre dérivé de f en 1 à droite est $f_d(1) = 1$.

Or $f_g'(1) \neq f_d(1)$, alors f n'est pas dérivable en 1. f est donc dérivable sur $\mathbf{R} - \{1\}$.

F. Calculer la dérivée d'une fonction faisant intervenir la fonction logarithme népérien

Exercice 22

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, on admettra qu'elles sont dérivables sur I :

a) $f(x) = \ln(5x^2 - x + 1)$, $I = \mathbf{R}$

b) $g(x) = 5\ln^2 x - \ln x + 1$, $I =]0, +\infty[$

c) $h(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x - 2}\right)$, $I =]2, +\infty[$

d) $j(x) = \frac{(\ln x)^2 + 2\ln x - 1}{\ln x - 2}$, $I =]e^2, +\infty[$.

e) $k(x) = x\ln|x - 1|$ sur $I = \mathbf{R} - \{1\}$

f) $l(x) = \frac{\ln x}{x + 1}$ sur $I =]0, +\infty[$

Solution 22

a) f est définie sur $\mathbf{R}$. Pour tout réel x, posons $u(x) = 5x^2 - x + 1$, on a $f(x) = \ln(u(x))$.
u est dérivable et strictement positive sur $\mathbf{R}$, alors la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.

Et pour tout réel x, $u'(x) = 10x - 1$ et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{10x - 1}{5x^2 - x + 1}$.

b) On peut remarquer que, pour tout $x > 0$, $g(x) = u(\ln x)$.
n est dérivable sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, et u est dérivable sur $\mathbf{R}$ donc la fonction $x \mapsto u(\ln x)$ est dérivable sur
$0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a $g'(x) = \frac{1}{x}u'(\ln x) = \frac{1}{x}(10\ln x - 1)$.

) Pour tout $x > 2$, $v(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 2}$, $h(x) = \ln(v(x))$.
est dérivable et strictement positive sur $]2, +\infty[$, alors la fonction $x \mapsto \ln(v(x))$ est dérivable sur $]2, +\infty[$.
pour tout $x > 2$, on a :

Scanned by CamScanner

$v'(x)=\dfrac{(2x+2)(x-2)-(x^2+2x-1)}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}$, alors $h'(x)=\dfrac{v'(x)}{v(x)}=\dfrac{\frac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}}{\frac{x^2+2x-1}{x-2}}=\dfrac{x^2-4x-3}{(x-2)(x^2+2x-1)}$.

d) On peut remarquer que pour tout $x > e^2$, $j(x) = v(\ln x)$.
La fonction ln est dérivable sur $]e^2, +\infty[$ à valeurs dans $]2, +\infty[$, et v est dérivable sur $]2, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto v(\ln x)$ est dérivable sur $]e^2, +\infty[$. Et pour tout $x > e^2$, on a : $j'(x)=\dfrac{1}{x}v'(\ln(x))=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\ln^2 x-4\ln x-3}{(\ln x-2)^2}\right)$.

e) k est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}-\{1\}$, donc k est dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$.

Pour tout réel x différent de 1, on a : $k'(x)=\ln|x-1|+x\times\dfrac{1}{x-1}=\ln|x-1|+\dfrac{x}{x-1}$.

f) I est un quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et son dénominateur x + 1 ne s'annule pas sur cet intervalle.

D'où I est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $I'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times(x+1)-1\times\ln x}{(x+1)^2}=\dfrac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2}$.

Exercice 23

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes.
On précisera l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions et l'ensemble de dérivabilité.

a) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ b) $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$.

Solution 23

1) Pour tout réel x, on a : $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}$ et $\sqrt{x^2}=|x|$.

Or pour tout réel x, on a $|x|\geq -x$, alors, pour tout réel x, on a $\sqrt{x^2+1}+x>0$. D'où f est définie sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x)=\sqrt{x^2+1}+x$. La fonction u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $u'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$. Donc $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

2) $\sqrt{x^2-1}$ existe si et seulement si $x^2-1\geq 0$. C'est-à-dire x appartient à $]-\infty, -1]\cup[1, +\infty[$.

De plus : • si x appartient à $]-\infty, -1]$, alors on a : $x-\sqrt{x^2-1}<0$.

• si x appartient à $[1, +\infty[$ on a : $\sqrt{x^2-1}<\sqrt{x^2}$ et $\sqrt{x^2}=|x|=x$. Alors on a : $x-\sqrt{x^2-1}>0$.

D'où pour tout réel $x\geq 1$, on a $x-\sqrt{x^2-1}>0$. Par conséquent, l'ensemble de définition de f est $[1, +\infty[$.

On pose $v(x)=x-\sqrt{x^2-1}$.
La fonction v est dérivable et strictement positive sur $]1, +\infty[$, alors f, est définie et dérivable sur $]1, +\infty[$.

On a $v'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{-x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$, donc $f'(x)=\dfrac{v'(x)}{v(x)}=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

G. Déterminer les primitives des fonctions faisant intervenir la fonction logarithme népérien

Exercice 24

Soit la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

1) Montrer que la fonction f admet des primitives sur $I=]-\infty, 1[$.

Scanned by CamScanner

2) Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

Solution 24

1) La fonction f est continue sur I, car fonction rationnelle définie sur I. Par conséquent, f admet des primitives sur I.

2) Soit $x < 1$, si nous posons $u(x) = x - 1$, on a : $u'(x) = 1$ et donc $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur I par : $F(x) = \ln|x-1|$.

Or pour tout x appartenant à I, on a $x - 1 < 0$, d'où $|x-1| = 1-x$. Par conséquent, $F(x) = \ln(1-x)$.

Exercice 25

Soit la fonction f définie sur $\left]-\infty, \frac{1}{5}\right[\cup \left]\frac{1}{5}, +\infty\right[$ par : $f(x) = \frac{1}{5x-1}$.

1) Montrer que la fonction f admet des primitives sur $I = \left]\frac{1}{5}, +\infty\right[$.

2) Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

Solution 25

1) La fonction f est continue sur $I = \left]\frac{1}{5}, +\infty\right[$, car fonction rationnelle définie sur I. D'où f admet des primitives sur I.

2) Pour x appartenant à $I = \left]\frac{1}{5}, +\infty\right[$, si on pose $u(x) = 5x - 1$, on a : $u'(x) = 5$ et $f(x) = \frac{1}{5} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Une primitive de f est la fonction F définie sur I par : $F(x) = \frac{1}{5}\ln|5x-1|$.

Or dans I, on a $5x - 1 > 0$. Donc $F(x) = \frac{1}{5}\ln(5x-1)$.

Exercice 26

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{3x^2+2x-1}{x^3+x^2-x+2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et montrer qu'elle admet des primitives sur $I =]-\infty, -2[$.
2) Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

Solution 26

1) • f(x) existe si et seulement si $x^3 + x^2 - x + 2 \neq 0$.
Or pour tout réel x, $x^3 + x^2 - x + 2 = (x + 2)(x^2 - x + 1)$, où $x^2 - x + 1$ est un trinôme de degré deux dont le discriminant égal à -3 est négatif. L'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'a donc pas de solution.
Finalement, $x^3 + x^2 - x + 2 \neq 0$ si et seulement si $x \neq -2$. L'ensemble de définition de f est : $]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$.

• f est continue sur $I =]-\infty, -2[$, car fonction rationnelle définie sur I. D'où f admet des primitives sur I.

2) Pour x appartenant à $]-\infty, -2[$, si on pose $u(x) = x^3 + x^2 - x + 2$, on a : $u'(x) = 3x^2 + 2x - 1$ et $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Une primitive de f est la fonction F définie sur I par : $F(x) = \ln|x^3 + x^2 - x + 2|$.

Or dans I, on a $x^3 + x^2 - x + 2 < 0$, car le signe de $x^3 + x^2 - x + 2$ est celui de $x + 2$. Donc $F(x) = \ln(-x^3 - x^2 + x - 2)$.

Exercice 27

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \tan x$.

1) Montrer que la fonction f admet des primitives sur $I = \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

2) Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

Scanned by CamScanner

Solution 27

1) La fonction tan est continue sur $I=\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$, donc elle admet des primitives sur cet intervalle.

2) Pour x appartenant à $I=\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$, si on pose $u(x)=\cos x$, on a $u'(x)=-\sin x$ et $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{u'(x)}{u(x)}$.

Une primitive de f est la fonction F définie sur I par $F(x)=-\ln|\cos x|$.

Or dans I, on a $\cos x>0$, alors $F(x)=-\ln(\cos x)$.

Exercice 28

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$.

1) Montrer que la fonction f admet des primitives sur $I=]1,+\infty[$.

2) Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

Solution 28

1) La fonction $x\mapsto x\ln x$ est définie et continue sur $]1,+\infty[$ et ne s'annule pas sur cet intervalle.

D'où la fonction f est continue sur cet intervalle et elle y admet par conséquent des primitives.

2) Pour x appartenant à $]1,+\infty[$, si on pose $u(x)=\ln x$, on a : $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $f(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\frac{u'(x)}{u(x)}$.

Une primitive de f est la fonction F définie sur I par $F(x)=\ln|\ln x|$.

Or dans I, on a $\ln x>0$, alors $F(x)=\ln(\ln x)$.

Exercice 29

A) Calculer pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\frac{\cos x}{2(1-\sin x)}+\frac{\cos x}{2(1+\sin x)}$. En déduire une primitive de $x\mapsto\frac{1}{\cos x}$ sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

B) On pose, pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$: $f(x)=\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}$ et $g(x)=\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}$.

Déterminer une primitive sur $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ de f + g, f − g puis de f et g.

Solution 29

A) • Soit x élément de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, on a :

$$\frac{\cos x}{2(1-\sin x)}+\frac{\cos x}{2(1+\sin x)}=\frac{\cos x(1+\sin x)+\cos x(1-\sin x)}{2(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{2\cos x}{2(1-(\sin x)^2)}=\frac{\cos x}{(\cos x)^2}=\frac{1}{\cos x}.$$

D'où pour tout réel x dans $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, on a : $\frac{\cos x}{2(1-\sin x)}+\frac{\cos x}{2(1+\sin x)}=\frac{1}{\cos x}$.

• On pose $u(x)=1-\sin x$ et $u'(x)=-\cos x$, $v(x)=1+\sin x$ et $v'(x)=\cos x$.

Alors $\frac{\cos x}{2(1-\sin x)}+\frac{\cos x}{2(1+\sin x)}=-\frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)}+\frac{1}{2}\times\frac{v'(x)}{v(x)}$.

Une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{1}{\cos x}$ est donc la fonction : $x\mapsto-\frac{1}{2}\ln|1-\sin x|+\frac{1}{2}\ln|1+\sin x|$.

Or pour tout x appartenant à $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, on a : $1-\sin x>0$ et $1+\sin x>0$.

On conclut alors qu'une primitive de $x\mapsto\frac{1}{\cos x}$ sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ est la fonction :

Scanned by CamScanner

$$x \mapsto -\frac{1}{2}\ln(1-\sin x)+\frac{1}{2}\ln(1+\sin x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right).$$

B) • Soit x appartenant à $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$, f(x) + g(x) = 1, alors une primitive de f + g sur $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ est la fonction : $x \mapsto x$.

• $f(x)-g(x)=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$.

Si on pose t(x) = cosx + sinx, alors t'(x) = cosx – sinx et $\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\frac{t'(x)}{t(x)}$.

Une primitive de f – g est donc la fonction : $x \mapsto \ln|\cos x+\sin x|$.

Or pour tout x dans $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$, on a cosx > 0 et sinx > 0, donc cosx + sinx > 0.

On déduit alors qu'une primitive de f – g sur $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ est la fonction : $x \mapsto \ln(\cos x+\sin x)$.

• Posons F(x) + G(x) = x et F(x) – G(x) = ln(cosx + sinx), où F et G sont des primitives de f et g respectivement.

On a alors $F(x)=\frac{1}{2}(x+\ln(\cos x+\sin x))$ et $G(x)=\frac{1}{2}(x-\ln(\cos x+\sin x))$.

Exercice 30

On pose pour tout x > 1, $f(x)=\frac{5x^2-16x-16}{2(x-1)(2x+1)(x+2)^2}$.

1) Etudier le signe de f(x) sur $]1,+\infty[$.

2) Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x)=\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{(x+2)^2}+\frac{c}{2(x-1)}$.

3) Montrer que f admet des primitives sur $]1,+\infty[$.

Déterminer la primitive F de f sur $]1,+\infty[$ vérifiant $F(2)=\frac{\ln 5-1}{2}$.

4) On pose, pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = F(n)$. Exprimer u_n en fonction de n pour $n \geq 2$.

5) Montrer que $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante à partir du rang 4.

6) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution 30

1) Pour tout x > 1, on a : x – 1 > 0, 2x + 1 > 0 et $(x + 2)^2 > 0$. D'où le signe de f(x) sur $]1,+\infty[$ est celui de son numérateur $5x^2 – 16x – 16$, trinôme de degré deux qui s'annule en $-\frac{4}{5}$ et 4.

Ainsi, si x appartient à $]1,4[$, on a f(x) < 0 et si x appartient à $]4,+\infty[$, on a f(x) > 0.

2) Pour tout x > 1, on a :

$$\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{(x+2)^2}+\frac{c}{2(x-1)}=\frac{2a(x-1)(x+2)^2+2b(2x+1)(x-1)+c(2x+1)(x+2)^2}{2(x-1)(2x+1)(x+2)^2}$$

$$=\frac{(2a+2c)x^3+(6a+4b+9c)x^2+(12c-2b)x-8a-2b+4c}{2(x-1)(2x+1)(x+2)^2}$$

Pour tout réel x différent de -2 et $-\frac{1}{2}$: $f(x)=\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{(x+2)^2}+\frac{c}{2(x-1)}$ si et seulement si pour tout réel x différent de -1 et 1, $\frac{(2a+2c)x^3+(6a+4b+9c)x^2+(12c-2b)x-8a-2b+4c}{2(x-1)(2x+1)(x+2)^2}=\frac{5x^2-16x-16}{2(x-1)(2x+1)(x+2)^2}$. C'est-à-dire :

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases} 2a+2c=0 \\ 6a+4b+9c=5 \\ 12c-2b=-16 \\ -8a-2b+4c=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-c \\ 4b+3c=5 \\ 6c-b=-8 \\ -b+6c=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-c \\ b=6c+8 \\ 27c=-27 \end{cases}$$. On a donc a = 1, b = 2 et c = - 1.

Ainsi, pour tout $x > 1$, $f(x)=\frac{1}{2x+1}+\frac{2}{(x+2)^2}-\frac{1}{2(x-1)}$.

3) • La fonction f est continue sur $]1, +\infty[$, car fonction rationnelle définie sur cet intervalle.
Elle y admet donc des primitives.

• Pour $x > 1$, on a $x - 1 > 0$, $(x + 2)^2 > 0$ et $2x + 1 > 0$.

Si F est une primitive de f sur $]1, +\infty[$, alors pour tout $x > 1$, on aura :

$$F(x)=-\frac{1}{2}\ln(x-1)+\frac{1}{2}\ln(2x+1)-\frac{2}{x+2}+k=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)-\frac{2}{x+2}+k$$, où k est une constante réelle.

Donc $F(2)=\frac{\ln 5-1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 5-\frac{1}{2}+k=\frac{\ln 5-1}{2} \Leftrightarrow k=0$.

Et donc la primitive F cherchée est définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)-\frac{2}{x+2}.$$

4) $u_n = F(n)$, donc $u_n=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2n+1}{n-1}\right)-\frac{2}{n+2}$.

5) F est un primitive de f sur $]1, +\infty[$, donc F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour tout réel x dans $]1, +\infty[$, $F'(x) = f(x)$.
D'après la question 1), on sait que si x appartient à $]1, 4[$, $f(x) < 0$; si x appartient à $]4, +\infty[$, $f(x) > 0$ et $f(4) = 0$
Donc F est strictement croissante sur $[4, +\infty[$. Alors, pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a $F(n) < F(n + 1)$.
C'est-à-dire que $u_n < u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est alors strictement croissante à partir du rang 4.

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-1}=2$, et $\lim\limits_{x\to 2}\ln x=\ln 2$.

Comme de plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{x+2}=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\frac{\ln 2}{2}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{\ln 2}{2}$.

Exercice 31

Déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\frac{1}{x\ln^n x}$ pour n entier naturel et $n > 1$, sur $]1, +\infty[$.

2) $f(x)=\frac{1}{x}\ln^n x$ pour n entier naturel non nul, sur $]0, +\infty[$.

Solution 31

1) Posons $u(x) = \ln x$. u est dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour tout $x > 1$, on a $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $f=\frac{u'}{u^n}$.

Donc une primitive de f est F définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$F(x)=-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}(x)}=-\frac{1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}}.$$

2) Posons $u(x) = \ln x$. u est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $f=u'u^n$.

Donc une primitive de f est la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$F(x)=\frac{1}{n+1}(u(x))^{n+1}=\frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1}.$$

Scanned by CamScanner

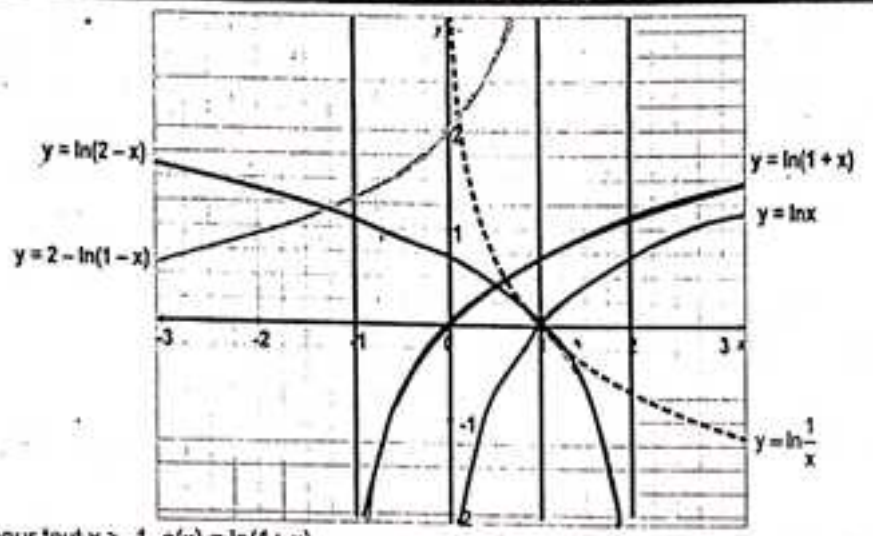
H. Etudier les fonctions faisant intervenir la fonction logarithme népérien

Exercice 32

Utiliser la courbe représentant la fonction ln pour représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto \ln(1+x)$ b) $x \mapsto \ln\frac{1}{x}$ c) $x \mapsto \ln(2-x)$ d) $x \mapsto 2-\ln(1-x)$.

Solution 32



a) Posons pour tout $x > -1$, $g(x) = \ln(1+x)$.
La courbe de g est le translaté de celle de ln suivant le vecteur de coordonnées (-1 , 0).

b) Posons pour tout $x > 0$, $h(x) = \ln\frac{1}{x}$. On a $h(x) = -\ln x$.

La courbe de h est le symétrique de celle de ln par rapport à l'axe des abscisses.
c) Posons pour tout $x < 2$, $f(x) = \ln(2-x)$.
La courbe de f est le symétrique de celle de ln par rapport à la droite d'équation $x = 1$.
d) Posons pour tout $x < 1$, $k(x) = 2 - \ln(1-x)$.

La courbe de k est le symétrique de celle de ln par rapport au point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Exercice 33 (BAC C Espagne – Amérique du Nord – 1991)

1) Soit f la fonction définie sur $]-1, 1[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

a) Etudier la parité de f et calculer ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.
b) Etudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe (C) dans un repère orthonormal.

2) Pour tout réel x de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on pose : $g(x) = f(\sin x)$

Montrer que la fonction g est une primitive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction h telle que $h(x) = \frac{1}{\cos x}$.

Solution 33

1)a) • La fonction f est définie sur $]-1, 1[$ et pour tout réel x appartenant à $]-1, 1[$, $-x$ appartient à $]-1, 1[$ et

$$f(-x)+f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\times\frac{1+x}{1-x}\right) = -\frac{1}{2}\ln 1 = 0.$$

D'où $f(-x) = -f(x)$, alors f est impaire.

Scanned by CamScanner

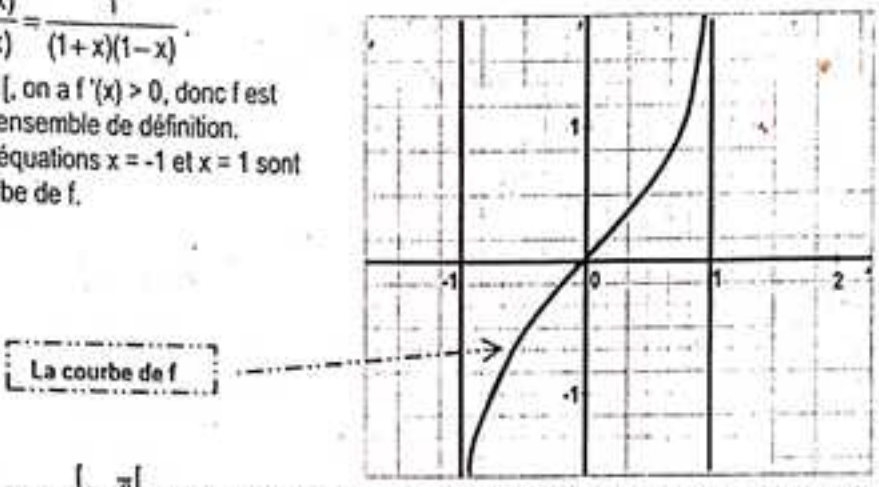
• Posons $u(x)=\frac{1+x}{1-x}$, alors $f(x)=\frac{1}{2}\ln(u(x))$.

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} u(x)=0$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{2}\ln x=-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} u(x)=+\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\ln x=+\infty$.

b) La fonction u est dérivable sur]–1 , 1[, à valeurs dans]0 , +∞[, d'où f est dérivable sur son ensemble de définition, et pour tout réel x, $f'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{1}{(1+x)(1-x)}$.

Or pour tout réel x dans]– 1 , 1[, on a f '(x) > 0, donc f est strictement croissante sur son ensemble de définition.
Remarquons que les droites d'équations x = -1 et x = 1 sont asymptotes verticales à la courbe de f.



2) La fonction sinus est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et à valeurs dans]–1 , 1[. Comme f est dérivable sur]–1 , 1[, alors fosin, donc g, est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, et pour tout x dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, g'(x) = cosx×f '(sinx).

C'est-à-dire $g'(x)=\frac{\cos x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}=\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}=\frac{\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}$.

La dérivée de g est h, d'où g est une primitive de h sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 34

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x}{x^2-1}+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

1) Montrer que f est une fonction impaire et étudier ses variations.
2) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
3) Calculer la dérivée de la fonction g définie par : g(x) = (x + 1)ln(x + 1) – (x – 1)ln(x – 1).
En déduire la primitive F de f sur]1 , +∞[telle que $F(\sqrt{2})=0$.

Solution 34

1) • f(x) existe si et seulement si $\frac{x+1}{x-1}>0$ et $x^2-1\neq 0$; c'est-à-dire x appartient à]-∞, -1[∪]1 , +∞[.
D'où l'ensemble de définition de f est]-∞, -1[∪]1 , +∞[.
Si x appartient à]-∞, -1[∪]1 , +∞[, il en est de même de – x.
Et pour tout x dans]-∞, -1[∪]1 , +∞[:

$$f(-x)+f(x)=\frac{-x}{x^2-1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\frac{x}{x^2-1}+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\times\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln 1=0.$$

D'où pour tout x dans]-∞, -1[∪]1 , +∞[, f(-x) = - f(x). f est donc impaire.
• On va donc étudier f sur E_1 =]1 , +∞[.
f est continue et dérivable sur E_1 et pour tout x > 1,

Scanned by CamScanner

$$f'(x)=\frac{(x^2-1)-2x^2}{(x^2-1)^2}+\frac{\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{-x^2-1-2x^2+2}{(x^2-1)^2}=\frac{-3x^2+1}{(x^2-1)^2}.$$

Pour tout $x > 1$, on a $(x^2 - 1)^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-3x^2 + 1$.
Or si $x > 1$, alors $x^2 > 1$, donc $-3x^2 < -3$. Et finalement, $-3x^2 + 1 < -2$.
D'où, pour $x > 1$, on a $f'(x) < 0$. f est donc strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

Calculons les limites aux bornes de $]1, +\infty[$.

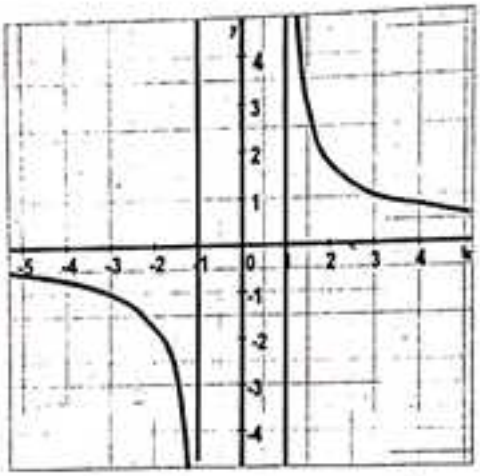
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\ln x=0$. Et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

Or $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\frac{x}{x^2-1}=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=+\infty$.

D'où les droites d'équation $x = 1$ et $y = 0$, sont respectivement asymptote verticale et asymptote horizontale à la courbe de f.

2) f étant impaire, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine O du repère.



3) • g est définie et dérivable sur $]1, +\infty[$. Et pour tout réel $x > 1$, on a :

$$g'(x)=\ln(x+1)+(x+1)\frac{1}{x+1}-\ln(x-1)-(x-1)\frac{1}{x-1}=\ln(x+1)-\ln(x-1)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

• une primitive de $x\mapsto\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ sur $]1, +\infty[$ est g.

Posons $u(x)=\frac{x}{x^2-1}$, on a $u(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2-1}$.

Donc une primitive de u sur $]1, +\infty[$ est la fonction $x\mapsto\frac{1}{2}\ln(x^2-1)$.

La primitive F cherchée est définie pour $x > 1$, par :

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+(x+1)\ln(x+1)-(x-1)\ln(x-1)+k, \text{ où k est une constante réelle}$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+x(\ln(x+1)-x\ln(x-1))+\ln(x+1)+\ln(x-1)+k$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\ln(x^2-1)+k$$
$$=x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\frac{3}{2}\ln(x^2-1)+k$$

$$F(\sqrt{2})=\sqrt{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)+\frac{3}{2}\ln(2-1)+k=\sqrt{2}\ln(2\sqrt{2}+3)+k.$$

Ainsi $F(\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\ln(2\sqrt{2}+3)+k=0 \Leftrightarrow k=-\sqrt{2}\ln(2\sqrt{2}+3)$.

Scanned by CamScanner

La primitive F cherchée est définie pour tout $x > 1$ par : $F(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \frac{3}{2}\ln(x^2-1) - \sqrt{2}\ln(2\sqrt{2}+3)$.

Exercice 35

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$. (C) est la courbe de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Vérifier que l'ensemble de définition de la fonction f est]0 , 2[.
2) Calculer la dérivée de la fonction f.
3) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
4) Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite (T).
5) Etudier brièvement la fonction f puis tracer la courbe (C) et sa tangente (T).

Solution 35

1) f(x) existe si et seulement si $\frac{x}{2-x} > 0$. Dressons le tableau de signe de $\frac{x}{2-x}$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		-	0	+		+	
2 - x		+		+	0	-	
$\frac{x}{2-x}$		-	0	+	‖	-	

On déduit de ce tableau que $\frac{x}{2-x} > 0$ si et seulement si x appartient à]0 , 2[.

D'où l'ensemble de définition de f est]0 , 2[.

2) f est dérivable sur son ensemble de définition]0 , 2[, et pour tout x dans]0 , 2[,

$f(x) = \ln(u(x))$, où $u(x) = \frac{x}{2-x}$. $u'(x) = \frac{(2-x)+x}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2}$ et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2}{(2-x)^2} \times \frac{2-x}{x} = \frac{2}{x(2-x)}$.

D'où pour tout réel x dans]0 , 2[, on a : $f'(x) = \frac{2}{x(2-x)}$.

3) On a : f(1) = ln1 = 0, f '(1) = 2.
D'où une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1 est : y – f(1) = f '(1)(x – 1). C'est-à-dire y = 2x – 2.

4) Soit x un réel appartenant à]0 , 2[, posons d(x) = f(x) – (2x – 2), donc $d(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right) - (2x-2)$.

d est définie, continue et dérivable sur]0 , 2[, et pour tout x dans]0 , 2[, on a :

$d'(x) = f'(x) - 2 = \frac{2}{x(2-x)} - 2 = \frac{2(x-1)^2}{x(2-x)}$.

Pour tout x dans]0 , 2[– {1}, $(x-1)^2$, x et 2 – x sont strictement positifs.
D'où dans]0 , 2[, $d'(x) \geq 0$ et $d'(x) = 0$ si et seulement si x = 1, donc d est strictement croissante sur]0 , 2[.
Comme d(1) = 0, alors : si x appartient à]0 , 1[, alors on a d(x) < 0, et donc (C) est en dessous de (T).
si x appartient à]1 , 2[, alors on a d(x) > 0, et (C) est au-dessus de (T).

Remarquons que le point de coordonnées (1 , 0) est point d'inflexion à la courbe (C), car (C) traverse sa tangente en ce point.

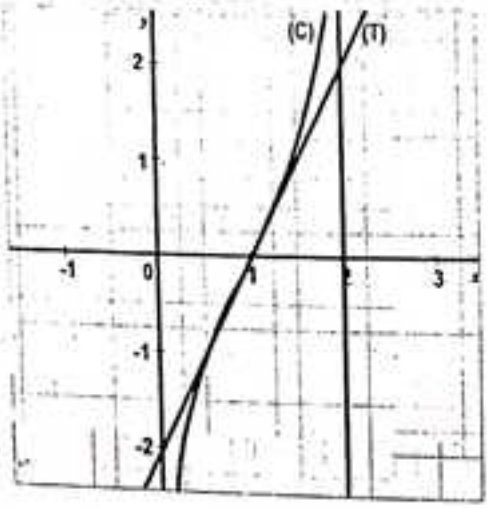
5) Pour tout x dans]0 , 2[, on a f '(x) > 0, donc f est strictement croissante.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} u(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} u(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

D'où les droites d'équations x = 0 et x = 2 sont asymptotes à la courbe de f.

Scanned by CamScanner



Exercice 36

On pose $f(x) = -\frac{x^2}{2} - 3x + 3x\ln x$, pour $x > 0$.

1) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 3.
2) Etudier la position de C_f par rapport à cette tangente.

Solution 36

1) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a : $f'(x) = -x - 3 + 3\ln x + 3 = -x + 3\ln x$.
$f'(3) = -3 + 3\ln 3 = 3(-1 + \ln 3)$, donc une équation de la tangente au point d'abscisse 3 est :
$y = 3(-1+\ln 3)(x-3) - \frac{27}{2} + 9\ln 3$, soit $y = 3(-1+\ln 3)x - \frac{9}{2}$.

2) Pour tout $x > 0$, posons $g(x) = f(x) - 3(-1+\ln 3)x + \frac{9}{2} = -\frac{x^2}{2} - 3x\ln 3 + 3x\ln x + \frac{9}{2}$.
Pour tout réel $x > 0$, on a $g'(x) = -x - 3\ln 3 + 3\ln x + 3$ et $g''(x) = -1 + \frac{3}{x} = \frac{3-x}{x}$.
Pour tout $x > 0$, le signe de $g''(x)$ est celui de $3 - x$. D'où le tableau de variation de g' :

x	0		3		$+\infty$
$g''(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	‖	↗	0	↘	

$g'(3) = -3 - 3\ln 3 + 3\ln 3 + 3 = 0$. D'où pour tout réel $x > 0$, on a $g'(x) \leq 0$, avec $g'(x) = 0$ si et seulement si $x = 3$.
Donc g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
Or $g(3) = 0$ alors, si x appartient à $]0, 3[$, on a $g(x) > 0$, et si x appartient à $]3, +\infty[$, on a $g(x) < 0$.
D'où dans $]0, 3]$, la courbe (C) est au-dessus de sa tangente et dans $[3, +\infty[$, (C) est en dessous de sa tangente.

Exercice 37

On considère, pour tout $x > 0$, les fonctions $f : x \mapsto x^2 - 2\ln x$ et $g : x \mapsto x^2 - 2(\ln x)^2$.

1) Etudier les variations de f, montrer que $f(x) \geq 1$ pour tout $x > 0$, et tracer C_f.
2)a) Etudier les variations de g.
b) Préciser les points d'intersection de C_f et C_g et les positions relatives de ces courbes.
c) Tracer C_g.

Solution 37

1) f est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$.

Scanned by CamScanner

Pour tout $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 1$, car $\frac{2(x+1)}{x} > 0$.

On résume les variations de f dans le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
f'(x)	‖	-	0	+	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(x - 2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.

- On constate que f admet un minimum en 1 qui est 1. D'où pour tout $x > 0$, on a $f(x) \geq 1$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(x - 2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$, donc la courbe de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.

2) a) g est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour tout $x > 0$, on a :

$$g'(x) = 2x - 4 \times \frac{1}{x}\ln x = 2\left(x - 2\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{2f(x)}{x}.$$

Et pour tout $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $f(x)$.
Or d'après la question précédente, on a $f > 0$, donc g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

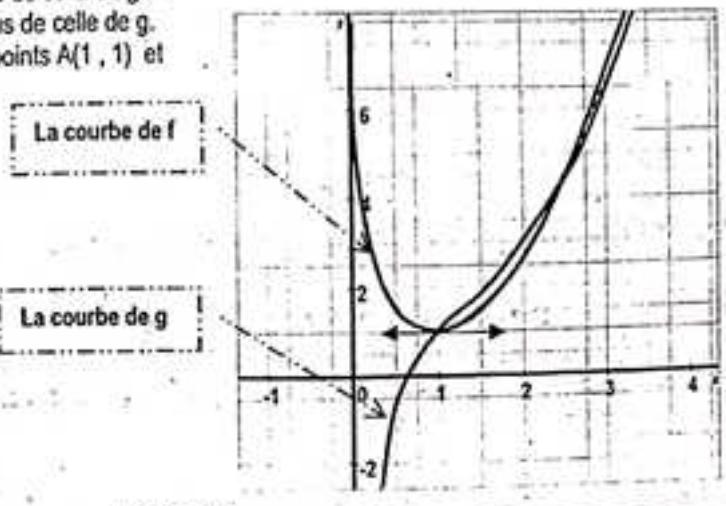
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left[1 - 2 \times \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right] = +\infty$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

x	0		$+\infty$
g'(x)	‖	+	
g(x)	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

b) Position relative des courbes de f et g :
Soit $x > 0$, on a : $f(x) - g(x) = 2(-1 + \ln x)\ln x$.
Or : $-1 + \ln x > 0$ équivaut à $x > e$. Le tableau de signe de $f(x) - g(x)$ est donc :

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$	‖	-	0	+		+	
$-1 + \ln x$	‖	-		-	0	+	
$2(-1 + \ln x)\ln x$	‖	+	0	-	0	+	

De ce tableau, on déduit que :
dans $]0, 1[$, la courbe de f est au-dessus de celle de g.
dans $]1, e[$, la courbe de f est en dessous de celle de g.
dans $]e, +\infty[$, la courbe de f est au-dessus de celle de g.
Les courbes de f et g se rencontrent aux points A(1 , 1) et B(e , $e^2 - 2$).



Scanned by CamScanner

Exercice 38

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par : $f(x)=\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$.

Etudier f et construire sa courbe (C) dans un repère orthonormal.

Solution 38

1) • La fonction f est définie si et seulement si $x+1\neq 0$ et $x-1\neq 0$, soit $x\neq -1$ et $x\neq 1$.
D'où l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$.

$\lim\limits_{x\to-1}\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=0$, donc $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to 1}\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

• f est dérivable sur $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ et pour tout réel x dans $\mathbb{R}-\{-1,1\}$, on a :

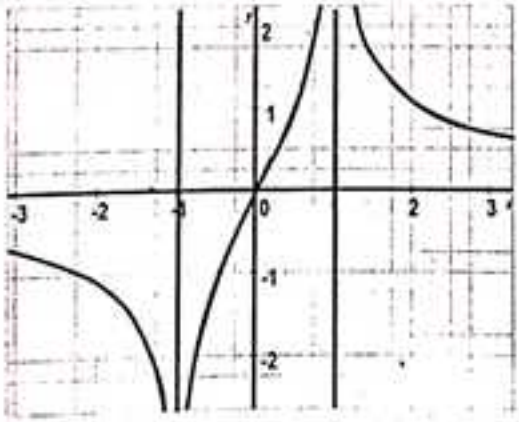
$$f'(x)=\frac{\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{-2}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x+1}=\frac{-2}{(x-1)(x+1)}.$$

Le signe de f '(x) est celui de (1 – x)(x + 1), sauf pour x = 1 et x = -1. D'où le tableau de variation de f suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		-	‖	+	‖	-	
f(x)	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	0

Les droites d'équations x = 1, x = -1 et y = 0 sont des asymptotes à la courbe de f.

Courbe de f :



Exercice 39

Soit f la fonction : $x\mapsto \ln x^2$.

1) Etudier la fonction f et tracer sa courbe (C) dans un repère orthonormé.

2) Ecrire une équation de la tangente (D) à (C) au point d'abscisse e.

3) Vérifier que la fonction $F: x\mapsto x\ln(x^2)-2x$ est une primitive de f sur chacun des intervalles où f est définie.

Solution 39

1) f(x) existe si et seulement si x est non nul, donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.

Scanned by CamScanner

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout x non nul, $f'(x)=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$.

Ainsi, si $x<0$ alors, on a $f'(x)<0$ et si $x>0$, alors $f'(x)>0$.
Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$,

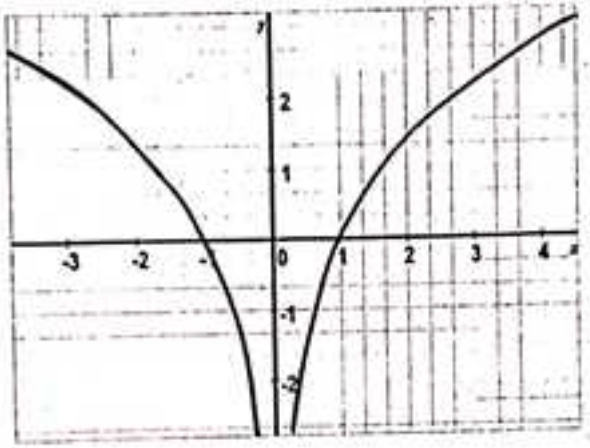
donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to0} x^2=0$, donc $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \ln x=-\infty$.

- Remarquons que pour tout réel x, $f(x)=2\ln|x|$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-2\frac{\ln(-x)}{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-2\frac{\ln x}{x}=0$.

D'où la courbe de f admet en $+\infty$ et en $-\infty$ des branches paraboliques de direction asymptotique l'axe des abscisses.



2) $f(e)=\ln e^2=2$ et $f'(e)=\frac{2}{e}$.

Une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse e est : $y=f'(e)(x-e)+f(e)$. Soit $y=\frac{2}{e}x$.

3) F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, car somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

Et pour tout réel non nul x, $F'(x)=\ln(x^2)+x\times\frac{2}{x}-2=\ln(x^2)=f(x)$. D'où F est une primitive de f sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 40

A) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x(\ln x)^2-e$.

1) Résoudre dans $]0,+\infty[$, l'inéquation : $\ln x(\ln x+2)>0$.

2) Calculer la dérivée de g et indiquer dans un tableau le sens de variation de g.
On calculera les valeurs de $g(e^{-2})$ et $g(1)$.

3) Calculer g(e) et déterminer, suivant les valeurs de x, le signe de g(x).

B) Soit la fonction f définie sur $E=[0,1[\cup]1,+\infty[$ par : $f(x)=x-2+\frac{e}{\ln x}$, si $x>0$ et par $f(0)=-2$.

1) Vérifier que f est continue en 0. Etudier $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

Que peut-on déduire sur la dérivabilité de f en 0 ?

2) Etudier les variations de f. (On pourra utiliser les résultats de la partie A)

3) Soit (C) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ [unité 1 cm].
Montrer que (C) admet une asymptote oblique (D) dont on précisera une équation.

4) Tracer (D) et (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Scanned by CamScanner

Solution 40

A)1) L'inéquation est résolue sous la condition $x > 0$.
Posons $X = \ln x$, l'inéquation devient $X^2 + 2X > 0$. Or $X^2 + 2X > 0$ équivaut à $X < -2$ ou $X > 0$.
C'est-à-dire $\ln x < -2$ ou $\ln x > 0$. Ce qui équivaut à $0 < x < e^{-2}$ ou $x > 1$.
Finalement $\ln x(\ln x + 2) > 0$ signifie x appartient à $]0 , e^{-2}[\cup]1 , +\infty[$.

2) g est continue et dérivable sur $]0 , +\infty[$, car somme et produit de fonctions continues et dérivables sur $]0 , +\infty[$.
Et pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = \ln^2 x + 2\ln x = \ln x(\ln x + 2)$. D'après la question précédente,
Dans $]0 , e^{-2}[$, on a $g' > 0$, donc g est strictement croissante sur cet intervalle.
Dans $]1 , +\infty[$, on a $g' > 0$, donc g est strictement croissante sur cet intervalle.
Dans $]e^{-2}, 1[$, $g' < 0$, donc g est strictement décroissante sur cet intervalle.
On a le tableau de variation suivant :

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	+	0	-	0	+	
g(x)	‖ $-\infty$	↗	$4e^{-2} - e$	↘	$-e$	↗	$+\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
- Pour le calcul de $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$, Posons $X = \sqrt{x}$, donc $x = X^2$.

X tend vers 0, lorsque x tend vers 0. Et $x(\ln x)^2 = X^2(\ln X^2)^2 = 4X^2(\ln X)^2 = 4(X\ln X)^2$.
Alors $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 4(X\ln X)^2 - e = -e$.

- $g(e^{-2}) = e^{-2}(\ln e^{-2})^2 - e = 4e^{-2} - e$ et $g(1) = 1.(\ln 1)^2 - e = -e$.

3) • $g(e) = e(\ln e)^2 - e = e - e = 0$.
• Dans l'intervalle $]0 , 1]$, g est majorée par $4e^{-2} - e$, qui est un nombre strictement négatif.
Donc pour tout réel x dans $]0 , 1]$, on a $g(x) < 0$.
Dans l'intervalle $]1 , +\infty[$, g est continue et strictement croissante, et $g(e) = 0$. Donc dans $]1 , e[$, on a $g(x) < 0$ et dans $]e , +\infty[$, on a $g(x) > 0$.
Finalement, g(x) est strictement négatif dans $]0 , e[$ et strictement positif dans $]e , +\infty[$.

B)1) • $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -2 = f(0)$. Donc f est continue en 0.

- $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 1 + \dfrac{e}{x\ln x}$. Comme dans $]0 , 1[$ on a $x\ln x < 0$, alors $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{e}{x\ln x} = -\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 1 + \dfrac{e}{x\ln x} = -\infty$.

On peut donc conclure que f n'est pas dérivable en 0.

2) f est définie et continue sur $[0 , +\infty[$, mais f est dérivable sur $]0 , +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 - e \times \dfrac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{x(\ln x)^2 - e}{x(\ln x)^2} = \dfrac{g(x)}{x(\ln x)^2}$.

Puisque dans $]0 , +\infty[- \{1\}$ on a $x(\ln x)^2 > 0$, alors le signe $f'(x)$ est celui de $g(x)$.
Ainsi, d'après la partie A), dans $]0 , e[$, f est strictement décroissante et dans $]e , +\infty[$, f est strictement croissante.
On a alors le tableau de variations suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-\infty$	-	‖	-	0	+	
f(x)	-2	↘	$+\infty$	↘	$2e - 2$	↗	$+\infty$

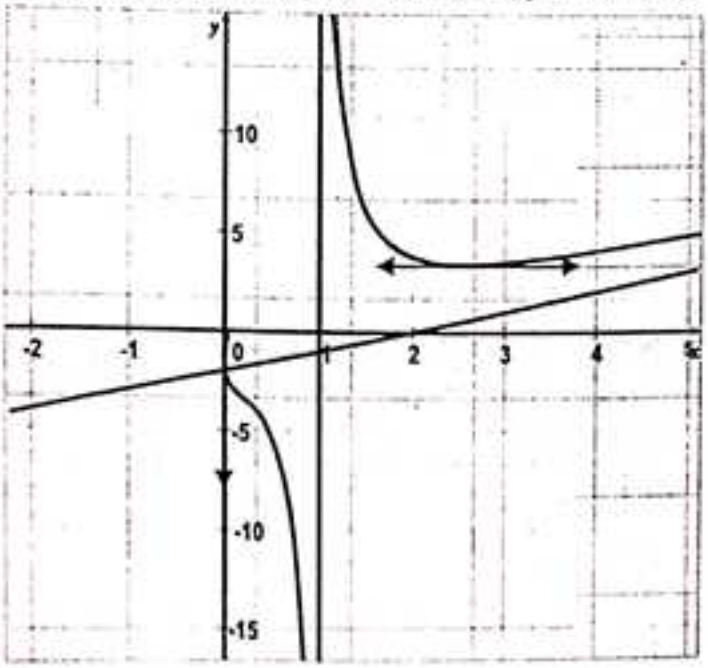
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e}{\ln x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. $f(e) = 2e - 2$.

Scanned by CamScanner

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{e}{x\ln x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}-2+\dfrac{e}{\ln x}=-2$.

D'où la courbe de f admet en $+\infty$ une asymptote oblique (D) d'équation $y = x - 2$.

4) Notons que la courbe de f admet au point d'abscisse 0, une demi tangente verticale.



Exercice 41

Etudier le sens de variation de la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}+x-1$

(On pourra étudier la fonction auxiliaire $g : x \longmapsto x^3 - 2\ln x + 1$ et montrer que $g(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$.

Solution 41

- La fonction f est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $x > 0$, on a : $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x^2-2x\ln x}{x^4}+1=\dfrac{x^3-2\ln x+1}{x^3}$.

Puisque $x > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est celui de $x^3 - 2\ln x + 1$.

- Etudions le signe de $g(x) = x^3 - 2\ln x + 1$. Pour cela, on étudiera les variations de g.

g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $g'(x)=3x^2-\dfrac{2}{x}=\dfrac{3x^3-2}{x}$.

Le signe de $g'(x)$ est celui de $3x^3 - 2$, qui s'annule en $x=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$.

Et on a : $g'(x) < 0$, si $0<x<\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$ et $g'(x) > 0$, si $x>\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$.

D'où la fonction g est minorée par $g\left(\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}\right)=\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{3}\ln\dfrac{2}{3}$.

Puisque $\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{3}\ln\dfrac{2}{3}>0$, alors g est strictement positive, et par suite f ' est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

Par conséquent, f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Scanned by CamScanner

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER

Exercice 42

35 minutes

On se propose d'établir que, pour tout $x > 0$, $x \neq 1$, on a : $0 < \frac{x\ln x}{x^2-1} < \frac{1}{2}$.

1) Montrer, à l'aide d'un tableau de signe, que : $0 < \frac{x\ln x}{x^2-1}$.

2) Soit φ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x^2-1) - x\ln x$

a) Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x) > 0$, pour tout $x \neq 1$. (On étudiera les variations de φ' en calculant φ'').
b) En déduire que si $x > 1$, $\varphi(x) > 0$ et que si $0 < x < 1$, $\varphi(x) < 0$.
c) Conclure.

Exercice 43 BAC D – Etranger - 1987

50 minutes

On considère la fonction numérique d'une variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x^2 + 6\frac{\ln x}{x}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal, l'unité étant de 2 cm sur l'axe des abscisses et de 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) En étudiant le sens de variation de la fonction $g : x \mapsto x^3 + 3 - 3\ln x$, montrer que pour tout réel strictement positif x, on a $g(x) > 0$.

3) Calculer la dérivée de f. En se servant de la question précédente, étudier le sens de variation de f.

4) Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

5) Etudier la position de (C) par rapport à la parabole (P) d'équation $y = x^2$ dans $[0, +\infty[$. Préciser le comportement des deux courbes l'une par rapport à l'autre quand x tend vers $+\infty$ (on montrera que $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x^2) = 0$).

6) Tracer sur le même graphique (C), (T) et (P).

7) Montrer graphiquement que, pour toute valeur du réel m, l'équation $f(x) = m$ a une solution et une seule.
Dans le cas où $m = 0$, trouver une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de la solution x_0 de l'équation $f(x) = 0$. (On calculera $f(0,8)$ et $f(0,9)$).

Exercice 44 BAC E – Lille – 1985

50 minutes

Pour n entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x) = x(\ln x)^n$ pour tout $x > 0$ et $f_n(0) = 0$.
On appelle (C_n) la courbe de f_n dans le plan P rapporté à un repère orthonormal, (unité : 5 cm).

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0.
b) Etudier les variations de f_1 et construire la courbe (C_1).
c) Etudier les variations de f_n pour $n > 1$ (on distinguera deux cas suivant la parité de n).
d) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par 3 points fixes.
e) Etudier les positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1}) lorsque x décrit l'intervalle $[1, +\infty[$.
f) Construire la courbe (C_2) dans le repère précédent.

Exercice 45

50 minutes

Ce problème propose l'étude de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 2\ln(1+x^2) + \frac{1}{x}$.

1) Etude d'une fonction auxiliaire :
Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = 4x^3 - x^2 - 1$.

a) Etudier les variations de g.
b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[0, +\infty[$ une solution unique, notée α.
c) Démontrer que $\alpha \in]0,7 ; 0,8[$.
d) Déterminer le signe de $g(x)$.

Scanned by CamScanner

2) **Etude de la fonction f :**

a) Déterminer les limites de f aux bornes de $]0, +\infty[$.

b) Calculer $f'(x)$ et montrer que le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

c) Dresser le tableau de variations de f. (On notera $f(\alpha)$ l'image de α par f, sans la calculer pour l'instant).

3) **Recherche d'une valeur approchée de $f(\alpha)$:**

a) Vérifier que $f''(x) = 4\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} + \dfrac{2}{x^3}$, et prouver que f' est croissante sur $]0, 1]$.

b) En déduire que, pour tout x de $[0,7 ; 0,8]$, on a : $|f'(x)| \leq 0,4$.

c) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, prouver que $|f(\alpha) - f(0,7)| \leq 0,04$.

d) Démontrer que $f(0,7)$ est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 4×10^{-2} près par excès.

Exercice 46 — 70 minutes

On se propose de résoudre l'équation (E) : $x^2 + \ln x - 2 = 0$.

1)a) Etudier les variations de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x - 2$, pour prouver que l'équation (E) admet une solution unique α.

b) Etablir l'encadrement : $1,30 \leq \alpha \leq 1,35$.

2)a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur $I = [1,30 ; 1,35]$ par $h(x) = \sqrt{2 - \ln x}$.

b) Justifier la décroissance de h sur I et prouver que, pour tout élément x de I, $h(x)$ appartient à I.

c) Etablir que, pour tout x de I, $-\dfrac{1}{3} \leq h'(x) \leq 0$.

d) En déduire que, pour tout x de I, $|h(x) - \alpha| \leq \dfrac{1}{3}|x - \alpha|$.

3) Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par la relation $u_{n+1} = h(u_n)$ et la condition $u_0 = 1,30$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{3}|u_n - \alpha|$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{5}{100}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, et déterminer la limite de la suite (u_n).

c) Déterminer un entier naturel n_0 tel que $|u_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-6}$.

d) En utilisant le sens de variation de h, prouver que $u_{n_0} - \alpha$ et $u_{n_0+1} - \alpha$ sont de signes contraires.

En déduire que α est compris entre u_{n_0} et u_{n_0+1}.

e) Déterminer l'entier a tel que : $a\times10^{-6} < \alpha < (a+1)\times10^{-6}$.

Exercice 47 — 30 minutes

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{1+x}$.

1) Construire la courbe (C) représentant f dans un repère orthonormal.

2) Déterminer l'intersection de (C) avec l'axe des abscisses, et la tangente à (C) en ce point.

3) On note g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{\ln x}{1+x}\cos^2 x$, dont la courbe représentative est notée (Γ).

Préciser les points de (Γ) où (Γ) et (C) sont tangentes, puis de (Γ) où (Γ) est tangente à l'axe des abscisses.

Exercice 48 — 35 minutes

1) Etudier les fonctions : $u : x \mapsto \ln x - \dfrac{x-1}{x}$ et $v : x \mapsto x - 1 - \ln x$.

En déduire que, pour tout réel $x > 1$, on a : $\dfrac{x-1}{x} < \ln x < x - 1$.

2) Appliquer l'inégalité au nombre $\sqrt[n]{e}$.

Scanned by CamScanner

En déduire, pour tout entier naturel $n > 1$, qu'on a : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Exercice 49

50 minutes

A) Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x - 3x\ln x$.

1) Etudier les limites de g lorsque x tend vers 0, lorsque x tend vers $+\infty$.

2) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3) Montrer que, dans $[1, 2]$, l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, que l'on notera α.
Montrer que α est compris entre 1,69 et 1,7.

B) On étudie maintenant la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{(1+x)^3}$.

1) a) Etudier la limite de f lorsque x tend vers 0.

b) Démontrer que, pour tout $x > 1$, on a : $0 < f(x) < \frac{\ln x}{x^3}$. En déduire la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Préciser les asymptotes à la courbe de f.

2) Déterminer la fonction dérivée f ' de f. Montrer que pour tout x appartenant à $]0, +\infty[$, $f'(x)$ a le signe de $g(x)$.

3) Dresser le tableau de variation de f.

On montrera que le maximum de f est égal à $\frac{1}{3\alpha(1+\alpha)^2}$, α étant le réel introduit en A)3).

4) Soit (C) la courbe de f dans un repère orthogonal (unités : 2 cm en abscisses, 20 cm en ordonnées).

a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

b) Tracer (T) et (C).

Exercice 50

80 minutes

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On note (C) sa courbe dans un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).

Encadrement de ln(1 + x) :

1) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $1 - x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$.

2) Etudier rapidement les fonctions : $x \mapsto \ln(1+x) - x$ et $x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$, puis en déduire que, pour tout réel $x \geq 0$, on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ (1).

Etude d'une fonction auxiliaire :

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g : x \mapsto \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$.

3) Montrer que g est dérivable et calculer g'.

4) Prouver que pour tout $x \geq 0$, $0 \leq g'(x) \leq \frac{x^2}{4}$.

En déduire que, pour tout $x \geq 0$, $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{12}$ (2) (on pourra étudier la fonction $x \mapsto g(x) - \frac{x^3}{12}$).

Les variations de f :

5) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.

6) Etablir que pour tout $x \geq 0$, on a : $g(x) \leq \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$.

Scanned by CamScanner

Grâce à (2), déduire le sens de variation de f.

Etude de f aux bornes de son intervalle de définition :

7) Déterminer la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$.

8) Montrer que $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$ (on pourra utiliser (2)). En déduire que f est dérivable en 0 et calculer f '(0).

Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 et, grâce à l'encadrement (1), préciser la position de (C) par rapport à (T).

9) Dresser le tableau de variation de f puis tracer la courbe (C) et la droite (T).

Exercice 51

70 minutes

A)1) Soit a et b deux nombres réels strictement positifs, tels que $a \le b$.

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, établir que : $1-\frac{a}{b}\le \ln\frac{b}{a}\le \frac{b}{a}-1$.

2) Démonter que, pour tout réel $x > 0$, on a : $1-\frac{1}{x}\le \ln x\le x-1$.

3) Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

a) Tracer dans des couleurs différentes et avec précision, les courbes (D), (H) et (C) d'équations respectives :

$y = x-1$, $y=1-\frac{1}{x}$ et $y = \ln x$.

b) Contrôler sur le graphique l'encadrement obtenu à la question 2).

B) On se propose de résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation $x\ln x = 1$.

1) Déduire des variations de f, définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x\ln x$, que l'équation $x\ln x = 1$ admet une et une seule solution x_1.

2)a) Utiliser l'encadrement établi au A) pour prouver que, pour tout $x > 0$, on a : $x-1\le f(x)\le x^2-x$.

b) En déduire que $x_1-1\le 1\le x_1^2-x_1$.

c) Déduire que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\le x_1\le 2$.

3) On désire déterminer une valeur approchée de x_1 à 10^{-2} près.

a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.

b) Calculer l'abscisse x_2 du point d'intersection de la droite (T), et de la droite d'équation $y = 1$.

Donner l'approximation décimale $\overline{x_2}$ d'ordre 2 par défaut de x_2.

c) Etablir l'encadrement $\overline{x_2}-10^{-2}\le x_1\le \overline{x_2}$ (on pourra comparer les images par f de ces trois nombres).

Exercice 52

50 minutes

1) Etudions la variation de la fonction f définie par : $f_n(x)=n\sqrt[n]{x}-e\ln x$ (n est un entier naturel non nul).

2) on note (C_n) la courbe de f_n. Tracer les courbes représentatives (C_1), (C_2) et (C_3).

3) Etudier l'intersection de (C_n) et (C_{n+1}), pour tout n entier naturel non nul.

Déterminer l'abscisse x_n du point d'intersection de ces courbes.

4) Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, $\ln x\le \frac{n\sqrt[n]{x}}{e}$. En déduire la limite en $+\infty$ de $\frac{\ln x}{x}$.

Exercice 53

45 minutes

Soit a et b réels tels que $0 < a < b$. Soit la fonction f telle que : $f(x)=\frac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)}$.

1) pour quelles valeurs de x, la fonction f est définie ?

2) Calculer f '(x).

3) On pose : $g(x) = a(bx+1)\ln(bx+1) - b(ax+1)\ln(ax+1)$.

Calculer g'(x), et en déduire que f est strictement croissante.

4) Démontrer que $\ln\left(\frac{a}{b}+1\right)\ln\left(\frac{b}{a}+1\right)<(\ln 2)^2$.

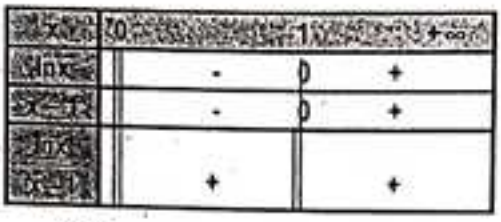
Scanned by CamScanner

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER – SOLUTIONS

Solution 42

1) Soit $x > 0$, on a $\frac{x\ln x}{x^2-1} = \frac{x\ln x}{(x-1)(x+1)}$ et $\frac{x}{x+1} > 0$, donc le signe de $\frac{x\ln x}{x^2-1}$ est celui de $\frac{\ln x}{x-1}$.

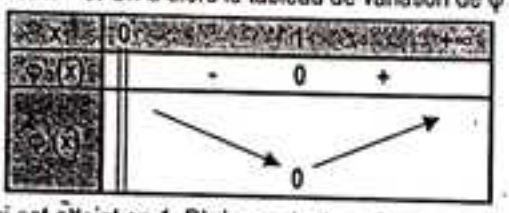
Or le tableau de signe de $\frac{\ln x}{x-1}$ est le suivant :



D'où pour tout réel $x > 0$ et $x \neq 1$, on a : $\frac{x\ln x}{x^2-1} > 0$.

2)a) φ est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a $\varphi'(x) = x - 1 - \ln x$ et $\varphi''(x) = \frac{x-1}{x}$.

Le signe de $\varphi''(x)$ est celui de $x - 1$, car $x > 0$. On a alors le tableau de variation de φ' qui suit :



φ' admet un minimum qui est 0 et qui est atteint en 1. D'où pour tout $x > 0$, avec $x \neq 1$, on a $\varphi'(x) > 0$.

b) D'après la question 2)a), φ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Or $\varphi(1) = 0$, alors pour $x > 1$, on a $\varphi(x) > 0$, et pour $0 < x < 1$, on a $\varphi(x) < 0$.

c) Si $x > 1$, alors on a : $\varphi(x) > 0$ et $x^2 - 1 > 0$. C'est-à-dire $\frac{1}{2}(x^2-1) - x\ln x > 0$ et $x^2 - 1 > 0$.

On en déduit que $\frac{\frac{1}{2}(x^2-1) - x\ln x}{x^2-1} > 0$. Et par suite $\frac{1}{2} - \frac{x\ln x}{x^2-1} > 0$. D'où $\frac{x\ln x}{x^2-1} < \frac{1}{2}$.

Si $0 < x < 1$, alors on a : $\varphi(x) < 0$ et $x^2 - 1 < 0$. C'est-à-dire $\frac{1}{2}(x^2-1) - x\ln x < 0$ et $x^2 - 1 < 0$.

On en déduit que $\frac{\frac{1}{2}(x^2-1) - x\ln x}{x^2-1} > 0$. Et par suite $\frac{1}{2} - \frac{x\ln x}{x^2-1} > 0$. D'où $\frac{x\ln x}{x^2-1} < \frac{1}{2}$.

Finalement, pour tout $x > 0$ et $x \neq 1$, $0 < \frac{x\ln x}{x^2-1} < \frac{1}{2}$.

Solution 43

1) f est définie sur $]0, +\infty[$.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2) • g est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

Et pour tout réel $x > 0$, on a $g'(x) = 3x^2 - 3 \times \frac{1}{x} = \frac{3(x^3-1)}{x}$. Le signe de $g'(x)$ est celui de $x^3 - 1$.

Or $x^3 - 1 > 0$ si et seulement si $x > 1$, avec $x^3 - 1 = 0$ si et seulement si $x = 1$.

Scanned by CamScanner

Dans]0 , 1[, g est strictement décroissante et dans]1 , +∞[, g est strictement croissante. D'où le tableau qui suit :

x	0		1		+∞
g'(x)	‖	-	0	+	
g(x)	‖	↘	4	↗	

On remarque que g est minorée par 4. Donc pour tout réel x > 0, on a : g(x) > 0.

3) f est dérivable sur]0 , +∞[, et pour tout x > 0, on a : $f'(x) = 2x + 6\dfrac{1-\ln x}{x^2} = \dfrac{2x^3+6-6\ln x}{x^2} = \dfrac{2g(x)}{x^2}$.

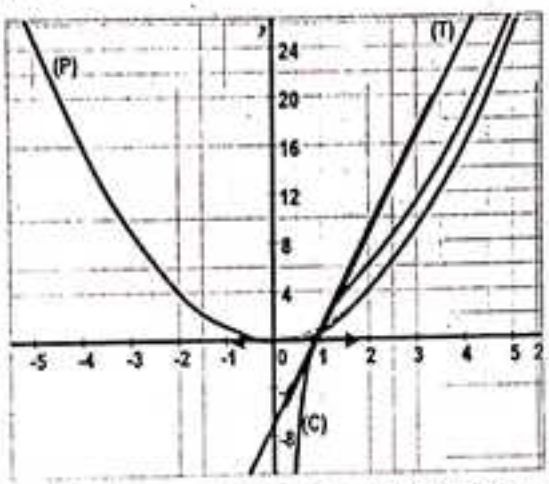
Le signe f '(x) est celui de g(x), car x² > 0.
Or d'après la question 2), pour x > 0 on a g(x) > 0, alors f '(x) > 0, et f est strictement croissante sur]0 , + ∞ [.
4) f(1) = 1 et f '(1) = 8.
Donc une équation de la tangente (T) est : y = 8(x – 1) + 1, soit y = 8x – 7.

5) • Soit x > 0, on a $f(x) - x^2 = 6\dfrac{\ln x}{x}$. Le signe de f(x) – x² est celui de lnx.

Or lnx < 0 si 0 < x < 1 et lnx > 0 si x > 1. Alors :
la courbe (C) est en dessous de (P) dans]0 , 1[et (C) est au-dessus de (P) dans]1 , +∞[.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x^2) = \lim\limits_{x\to+\infty} 6\times\dfrac{\ln x}{x} = 0$. Donc les courbes (C) et (P) sont asymptotes l'une de l'autre en +∞.

6)



7) • Pour tout réel m, la droite d'équation y = m rencontre la courbe (C) une et une seule fois.
D'où pour tout réel m, l'équation f(x) = m admet une solution et une seule.
• On a, à l'aide de la calculatrice, f(0,8) < 0 et f(0,9) > 0. D'où l'unique solution x_0 de l'équation f(x) = 0, est comprise entre 0,8 et 0,9. D'où une valeur approchée à 10^{-1} par défaut de $x_0 \approx 0,8$

Solution 44

1)a) • Soit x > 0, posons $x = X^n$, donc $X = \sqrt[n]{x}$, on a $x(\ln x)^n = X^n(\ln X^n)^n = n^n (X\ln X)^n$.

Puisque $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} X = 0$ et X > 0, alors $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f_n(x) = \lim\limits_{X\xrightarrow{>}0} n^n(X\ln X)^n = 0$.

Comme $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f_n(x) = f_n(0) = 0$, alors f_n est continue en 0.

• $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \dfrac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} (\ln x)^n = \begin{cases} -\infty \text{ si } n \text{ impair} \\ +\infty \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$. D'où f_n n'est pas dérivable en 0.

b) f_1 est définie et continue sur [0 , +∞[, f_1 est dérivable sur]0 , +∞[.
Et pour tout x > 0, $f_1(x) = x\ln x$ et $f_1'(x) = 1 + \ln x$.
Or 1 + lnx > 0 si et seulement si, $x > e^{-1}$.
Donc f est strictement croissante dans $[e^{-1}, +\infty[$ et strictement décroissante sur $[0 , e^{-1}[$.

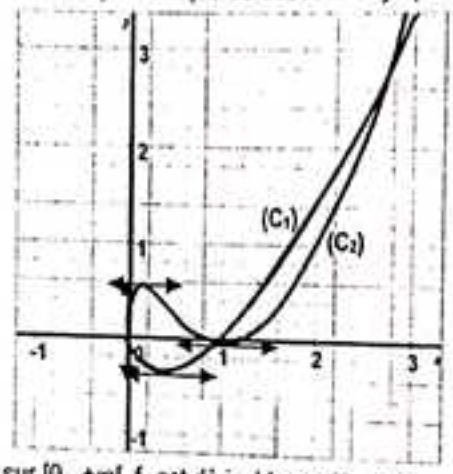
Scanned by CamScanner

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$. D'où le tableau de variations de f_1 :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖ ∞	-	0	+	
$f_1(x)$	0	↘	$-e^{-1}$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

D'où la courbe (C_1) admet en $+\infty$, une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.



c) Soit $n > 1$, f_n est définie et continue sur $[0, +\infty[$, f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$.
Pour tout $x > 0$, on a $f_n'(x) = (\ln x)^n + n(\ln x)^{n-1} = (\ln x + n)(\ln x)^{n-1}$.

Si n est impair : $n - 1$ est pair, et pour tout $x \neq 1$, on a $(\ln x)^{n-1} > 0$. Alors le signe de $f_n'(x)$ est celui de $\ln x + n$.
Or, $\ln x + n > 0$ si et seulement si $x > e^{-n}$. D'où le tableau de variation de f_n est le suivant :

x	0		e^{-n}		1		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	-	0	+	0	+	
$f_n(x)$	0	↘	$(-n)^n e^{-n}$	↗			$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

Si n est pair : $n - 1$ est impair.
On dresse le tableau de signe de la dérivée f_n' :

x	0		e^{-n}		1		$+\infty$
$(\ln x)^n$	‖	-		-	0	+	
$\ln x + n$	‖	-	0	+		+	
$f_n'(x)$	‖	+	0	-	0	+	

'où le tableau de variation de f_n est le suivant :

x	0		e^{-n}		1		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	+	0	-	0	+	
$f_n(x)$	0	↗	$(-n)^n e^{-n}$	↘	0	↗	$+\infty$

d) Méthode 1 :
Soit n et m deux entiers naturels distincts non nuls (on supposera $m < n$) et $M(x, y)$ un point du plan.
$M(x, y)$ appartient à $(C_m) \cap (C_n)$ $\Leftrightarrow$ $y = x(\ln x)^n$ et $y = x(\ln x)^m$, ou $(x, y) = (0, 0)$.
$\Leftrightarrow$ $x(\ln x)^n = x(\ln x)^m$ et $y = x(\ln x)^n$, ou $(x, y) = (0, 0)$.
$\Leftrightarrow$ $x(\ln x)^n[(\ln x)^{n-m} - 1] = 0$ et $y = x(\ln x)^n$, ou $(x, y) = (0, 0)$
$\Leftrightarrow$ $(x = 1$ et $y = 0)$ ou $(x = e$ et $y = e)$, ou $(x, y) = (0, 0)$.

Scanned by CamScanner

D'où toutes les courbes (C_n) se rencontrent en trois points fixes O(0 , 0) , A(1 , 0) et B(e , e).

Méthode 2 :

Déterminons les points de rencontre des courbes (C_1) et (C_2) .

M(x , y) appartient à $(C_1) \cap (C_2)$ $\Leftrightarrow$ $y = x(\ln x)$ et $y = x(\ln x)^2$, ou (x , y) = (0 , 0).

$\Leftrightarrow$ $x(\ln x) = x(\ln x)^2$ et $y = x(\ln x)$, ou (x , y) = (0 , 0)

$\Leftrightarrow$ $x(\ln x)[(\ln x) - 1] = 0$ et $y = x(\ln x)$, ou (x , y) = (0 , 0)

$\Leftrightarrow$ (x = 1 et y = 0) ou (x = e et y = e) ou (x , y) = (0 , 0).

D'où les courbes (C_1) et (C_2) se rencontrent en trois points fixes O(0 , 0), A(1 , 0) et B(e , e).

Vérifions que les points O, A et B appartiennent à toutes les courbes (C_n).

En effet, $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 0$ et $f_n(e) = e$.

D'où toutes les courbes (C_n) se rencontrent en trois points fixes O(0 , 0), A(1 , 0) et B(e , e).

e) Soit x > 1, n un entier naturel non nul.

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x(\ln x)^{n+1} - x(\ln x)^n = x(\ln x)^n[(\ln x) - 1]$.

Pour x > 1, on a $x(\ln x)^n > 0$, donc le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ est celui de ln x – 1.

Or ln x – 1 > 0 si et seulement si x > e ; avec ln x – 1 = 0 si et seulement si, x = e. Donc :

Dans]1 , e], $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$. Donc (C_n) est au-dessus de (C_{n+1}) dans l'intervalle]1 , e[.

Dans [e , +∞[, $f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0$. Donc (C_n) est en dessous de (C_{n+1}) dans]e , +∞[.

f) Sachant que 2 est pair, on déduit la courbe (C_2) de l'étude de la question c).

Solution 45

1)a) g est définie, continue et dérivable sur]0 , +∞[, et pour tout $x \geq 0$, $g'(x) = 12x^2 - 2x$.

Donc : $g'(x) < 0$ si et seulement si x appartient à $\left]0 , \frac{1}{6}\right[$, donc dans cet intervalle g est strictement décroissante,

$g'(x) > 0$ si et seulement si x appartient à $\left]\frac{1}{6} , +\infty\right[$, donc dans cet intervalle g est strictement croissante.

D'où le tableau suivant qui résume les variations de g :

x	0		$\frac{1}{6}$		+∞
g'(x)		−	0	+	
g(x)	-1	↘	$-\frac{109}{108}$	↗	+∞

b) • g est continue et strictement croissante dans l'intervalle $\left[\frac{1}{6} , +\infty\right[$.

D'où g réalise une bijection de $\left[\frac{1}{6} , +\infty\right[$ sur $g\left(\left[\frac{1}{6} , +\infty\right[\right) = \left[-\frac{109}{108} , +\infty\right[$.

Comme 0 appartient à $\left[-\frac{109}{108} , +\infty\right[$, alors l'équation g(x) = 0 admet dans $\left]\frac{1}{6} , +\infty\right[$, une unique solution α.

• Dans $\left]0 , \frac{1}{6}\right[$, g est majorée par -1 , donc g est strictement négative dans cet intervalle. L'équation g(x) = 0 ne peut donc y avoir de solution. Finalement, l'équation g(x) = 0 admet dans l'intervalle [0, +∞[une solution unique α.

c) A l'aide de la calculatrice, on obtient g(0,7) < 0 et g(0,8) > 0, d'où $\alpha \in]0{,}7 ; 0{,}8[$.

d) On a g(x) < 0 si x appartient à]0 , α[et g(x) > 0 si x appartient à]α , +∞[, avec g(α) = 0.

2)a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + x^2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln(1 + x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$.

b) f est dérivable sur]0 , +∞[et pour tout x > 0, on a : $f'(x) = 2x \times \frac{2x}{1 + x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{4x^3 - x^2 - 1}{x^2(1 + x^2)} = \frac{g(x)}{x^2(1 + x^2)}$.

Scanned by CamScanner

Or pour tout réel $x > 0$, on a $x^2(1 + x^2) > 0$, d'où le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

c) Des questions 2)a) et b) on déduit le tableau de variations suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3)a) • f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$f''(x) = \frac{x^2(1+x^2)(12x^2-2x)-(4x^3+2x)(4x^3-x^2-1)}{[x^2(1+x^2)]^2} = \frac{-4x^5+2x^4+4x^3+4x^2+2}{x^3(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{(-4x^5+4x^3)+(2x^4+4x^2+2)}{x^3(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{4x^3(1-x^2)+2(1+x^2)^2}{x^3(1+x^2)^2}$$

$$= 4\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{2}{x^3}$$

D'où pour tout $x > 0$, $f''(x) = 4\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}+\dfrac{2}{x^3}$.

• Pour tout x dans $]0, 1]$, on a $1 - x^2 \geq 0$, $x^3 > 0$ et $(1 + x^2)^2 > 0$, donc $f''(x) \geq 0$.

Finalement f' est croissante dans $]0, 1]$.

b) f' est croissante dans $]0, 1]$, donc dans $[0,7 ; 0,8]$. Ainsi, si x appartient à $[0,7 ; 0,8]$, on a $f'(0,7) \leq f'(x) \leq f'(0,8)$.

Or en utilisant la calculatrice, on a : $f'(0,7) \approx -0,161$ (valeur approchée par défaut) et $f'(0,8) = 0,4$ (valeur approchée par excès). Donc pour tout x dans $]0, 1]$, on a : $-0,161 \leq f'(x) \leq 0,4$

On en conclut que pour tout x de $[0,7 ; 0,8]$, on a : $|f'(x)| \leq 0,4$.

c) f est dérivable sur $[0,7 ; 0,8]$, pour tout x de $[0,7 ; 0,8]$, on a : $|f'(x)| \leq 0,4$.

Puisque $0,7$ et $\alpha \in [0,7 ; 0,8]$, alors d'après l'inégalité des accroissements finis, $|f(\alpha) - f(0,7)| \leq 0,4|\alpha - 0,7|$. (1)

Or α appartient à $[0,7 ; 0,8]$, alors on a $|\alpha - 0,7| \leq |0,8 - 0,7| \leq 0,1$. Il s'en suit que $0,4|\alpha - 0,7| \leq 0,04$. (2)

Des inégalités (1) et (2), on conclut que $|f(\alpha) - f(0,7)| \leq 0,04$.

d) D'après la question précédente, on a $|f(\alpha) - f(0,7)| \leq 4 \times 10^{-2}$, donc $f(0,7)$ est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 4×10^{-2} près.

Solution 46

1)a) • g est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour tout réel $x > 0$, on a : $g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0$.

Donc g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

• g étant continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur

$$g(]0, +\infty[) = \left]\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x), \lim_{x \to +\infty} g(x)\right[= \ldots$$

Comme 0 appartient à $\mathbb{R}$, alors l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$, une unique solution α.

b) De plus, à l'aide de la calculatrice, on a $g(1,30) < 0$ et $g(1,35) > 0$. D'où $1,30 \leq \alpha \leq 1,35$.

2)a) soit x dans $[1,30 ; 1,35]$, $g(x) = 0$ équivaut à $x^2 + \ln x - 2 = 0$. C'est-à-dire $x^2 = 2 - \ln x$.

C'est-à-dire $x = \sqrt{2 - \ln x}$ (car x est dans $[1,30 ; 1,35]$, donc $x > 0$).

Notons que, puisque x appartient à $[1,30 ; 1,35]$, alors on a $2 - \ln x > 0$.

Alors, l'équation (E) est équivalente à $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur $I = [1,30 ; 1,35]$ par $h(x) = \sqrt{2 - \ln x}$.

b) • Soit x élément de I, on a : $h'(x) = \dfrac{-1}{2x\sqrt{2 - \ln x}} < 0$. Donc h est strictement décroissante sur I.

Scanned by CamScanner

• Soit x dans I, on a $1,30 \le x \le 1,35$. Or h est décroissante, alors on a $h(1,35) \le h(x) \le h(1,30)$.
En calculant h(1,30) et h(1,35) à l'aide de la calculatrice, on remarque que $1,30 \le h(1,35)$ et $h(1,30) \le 1,35$.
Alors on en déduit que $1,30 \le h(x) \le 1,35$. C'est-à-dire h(x) appartient à I.

c) Soit x élément de I, on a :

$1,30 \le x \le 1,35$ donc $1,30 \le h(x) \le 1,35$ et $1,30 \le x \le 1,35$ (d'après la question 2)b))

donc $1,30^2 \le xh(x) \le 1,35^2$ (en multipliant membre à membre les encadrements précédents)

donc $1,69 \le xh(x) \le 1,8225$

donc $3 \le 3,38 \le 2x\sqrt{2-\ln x} \le 3,645 \le 4$.

donc $\frac{1}{4} \le \frac{1}{2x\sqrt{2-\ln x}} \le \frac{1}{3}$.

donc $-\frac{1}{3} \le -\frac{1}{2x\sqrt{2-\ln x}} \le -\frac{1}{4} < 0$.

• donc $-\frac{1}{3} \le h'(x) \le 0$.

D'où pour tout x élément de I, on a : $-\frac{1}{3} \le h'(x) \le 0$.

d) h est dérivable sur I et pour tout x élément de I, on a d'après la question précédente $|h'(x)| \le \frac{1}{3}$. Alors d'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour tout x dans I, puisque α appartient à I, $|h(x) - h(\alpha)| \le \frac{1}{3}|x - \alpha|$.

Or l'équation (E) est équivalente à l'équation h(x) = x, alors α étant solution de (E), α est aussi solution de h(x) = x.

C'est-à-dire $h(\alpha) = \alpha$. Finalement, pour tout x appartenant à I, on a : $|h(x) - \alpha| \le \frac{1}{3}|x - \alpha|$ (1).

3)a) Soit n entier naturel, d'après l'énoncé, u_n appartient à I.

Alors on peut remplacer x par u_n dans l'inégalité (1) et on aura : $|h(u_n) - \alpha| \le \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$.

C'est-à-dire $|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$ (car $h(u_n) = u_{n+1}$).

Finalement, pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$

b) • Soit P_n la proposition : « $|u_n - \alpha| \le \frac{5}{100}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ».

Pour n = 0,

$|u_0 - \alpha| = |1,30 - \alpha|$. Or α appartient à I, alors on a : $|1,30 - \alpha| \le |1,30 - 1,35|$.

Comme $|1,30 - 1,35| = 0,05 = \frac{5}{100} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0$, alors $|u_0 - \alpha| \le \frac{5}{100} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0$. Donc P_0 est vraie.

Supposons P_k vraie pour un certain entier naturel k (c'est-à-dire $|u_k - \alpha| \le \frac{5}{100}\left(\frac{1}{3}\right)^k$), et montrons que P_{k+1} est aussi vraie, (c'est-à-dire $|u_{k+1} - \alpha| \le \frac{5}{100}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$).

D'après la question 3)a), on a $|u_{k+1} - \alpha| \le \frac{1}{3}|u_k - \alpha|$. (2)

Et d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $|u_k - \alpha| \le \frac{5}{100}\left(\frac{1}{3}\right)^k$, donc en multipliant les membres de cette

Scanned by CamScanner

inégalité par $\frac{1}{3}$, on obtient $\frac{1}{3}\times|u_k-\alpha|\le\frac{1}{3}\times\frac{5}{100}\left(\frac{1}{3}\right)^k$. (3)

Des inégalités (2) et (3), on déduit que $|u_{k+1}-\alpha|\le\frac{5}{100}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$. D'où P_{k+1} est aussi vraie.

Et finalement pour tout entier naturel n, on a : $|u_n-\alpha|\le\frac{5}{100}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

- Puisque pour tout entier naturel n, on a :

$|u_n-\alpha|\le\frac{5}{100}\left(\frac{1}{3}\right)^n$, et que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5}{100}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$, (car $-1<\frac{1}{3}<1$), alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$.

c) Puisque pour tout entier naturel n, on a :

$|u_n-\alpha|\le\frac{5}{100}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ alors, dire que $\frac{5}{100}\left(\frac{1}{3}\right)^n\le10^{-6}$ entraîne à conclure que $|u_n-\alpha|\le10^{-6}$.

Or $\frac{5}{100}\left(\frac{1}{3}\right)^n\le10^{-6}$ équivaut à $\left(\frac{1}{3}\right)^n\le2\times10^{-5}$. C'est-à-dire $-n\ln3\le\ln2-5\ln10$. Soit $n\ge\frac{-\ln2+5\ln10}{\ln3}$.

Ce qui signifie que $n\ge10$. Donc si $n\ge10$, alors on a $|u_n-\alpha|\le10^{-6}$.

Il suffit donc de prendre un entier n supérieur ou égal à 10 quelconque comme n_0, et on a : $|u_{n_0}-\alpha|\le10^{-6}$.

d) • Des deux situations suivantes, une est vraie : $u_{n_0}<\alpha$, ou alors $u_{n_0}>\alpha$.

Si $u_{n_0}<\alpha$, alors h étant décroissante, on a $h(u_{n_0})>h(\alpha)$, soit $u_{n_0+1}>\alpha$.

Donc si $u_{n_0}-\alpha<0$, alors $u_{n_0+1}-\alpha>0$.

Si $u_{n_0}>\alpha$, alors h étant décroissante, on a $h(u_{n_0})<h(\alpha)$, soit $u_{n_0+1}<\alpha$.

Donc si $u_{n_0}-\alpha>0$, alors $u_{n_0+1}-\alpha<0$

Finalement, $u_{n_0}-\alpha$ et $u_{n_0+1}-\alpha$ sont de signes contraires.

- Si $u_{n_0}-\alpha<0$ et $u_{n_0+1}-\alpha>0$, alors on a $u_{n_0}-\alpha<0<u_{n_0+1}-\alpha$.

En ajoutant α à tous les membres de cet encadrement, on obtient $u_{n_0}<\alpha<u_{n_0+1}$.

Si $u_{n_0}-\alpha>0$ et $u_{n_0+1}-\alpha<0$, alors on a $u_{n_0}-\alpha>0>u_{n_0+1}-\alpha$.

En ajoutant α à tous les membres de cet encadrement, on obtient $u_{n_0}>\alpha>u_{n_0+1}$.

D'où α est compris entre u_{n_0} et u_{n_0+1}.

e) Soit a un entier naturel, on a :

$a\times10^{-6}<\alpha<(a+1)\times10^{-6}$ équivaut à $-(a+1)\times10^{-6}<-\alpha<-a\times10^{-6}$. C'est-à-dire $-(a+1)<-\alpha\times10^6<-a$.

Ce qui signifie que $-1<a-\alpha\times10^6<0$. Soit $\alpha\times10^6-1<a<\alpha\times10^6$.

A l'aide de la calculatrice, on a : $u_{10}\approx1{,}3140967$ (valeur approchée par défaut) et $u_{11}\approx1{,}3140969$ (valeur approchée par excès). Comme d'après la question 3)d), α est compris entre $u_{10}<\alpha<u_{11}$, alors on a :

$1314095{,}7<\alpha\times10^6-1<a<\alpha\times10^6<1314096{,}9$. D'où $a=1314096$.

Solution 47

1) f est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x>0$,

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1+x)-\ln x}{(1+x)^2}=\frac{1+x-x\ln x}{x(1+x)^2}.$$

Pour tout $x>0$, on a $x(1+x)^2>0$. Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1+x-x\ln x$.

Pour avoir le signe de $1+x-x\ln x$, étudions les variations de la fonction $g:x\mapsto1+x-x\ln x$.

g est dérivable sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x>0$, $g'(x)=-\ln x$.

Scanned by CamScanner

Donc dans]0 , 1[, on a g'(x) > 0, c'est-à-dire g est strictement croissante.
dans]1 , +∞[, on a g'(x) < 0, c'est-à-dire g est strictement décroissante.
Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x(1-\ln x)=-\infty$. D'où le tableau de variations de g :

x	0		1		+∞
g'(x)	‖	+	0	-	
g(x)	‖ 1	↗	2	↘	-∞

Dans l'intervalle]0 , 1], g est minorée par 1, donc pour tout x dans]0 , 1], on a g(x) > 0.
Dans]1 , +∞[, g est continue et strictement décroissante.
Donc g réalise une bijection de]1 , +∞[sur]-∞ , 2[.
Comme 0 appartient à]-∞ , 2[, alors l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans]1 , +∞[.
Donc on a g(x) > 0 dans]1 , α[et g(x) < 0 dans] α , +∞[.
Finalement, dans]0 , α[, on a g(x) > 0 et dans] α , +∞[, g(x) < 0.
f est donc strictement croissante dans]0 , α[et strictement décroissante dans]α , +∞[.
D'où le tableau de variations de f :

x	0		α		+∞
f'(x)	‖	+	0	-	
f(x)	‖ -∞	↗	f(α)	↘	0

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}\times\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=0$.

Remarquons en utilisant la calculatrice qu'on a :
g(4)×g(3) < 0, donc 3 < α < 4.
g(3,5)×g(3,6) < 0 ; donc 3,5 < α < 3,6
g(3,59)×g(3,60) < 0, donc 3,59 < α < 3,6
Ainsi de suite, on montre qu'une valeur approchée de α est 3,59112148. ***(Voir la courbe ci-dessous)***
2) f(x) = 0 équivaut à lnx = 0. C'est-à-dire x = 1.
D'où la courbe (C) rencontre l'axe des abscisses au point A(1 , 0).

En ce point, la tangente à la courbe (C) est la droite d'équation y = f '(1)(x – 1) + f(1). Soit $y=\dfrac{1}{2}(x-1)$.

3) • (C) et (Γ) sont tangentes au point d'abscisse a, si et seulement si g(a) = f(a) et g'(a) = f '(a).

$g(x)=f(x) \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{1+x}=\dfrac{\ln x}{1+x}\cos^2 x \Leftrightarrow (1-\cos^2 x)\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=0$ ou cosx = 1 ou cosx = -1.

Ce qui signifie que : x = 1 ou x = kπ ($k\in\mathbb{N}^*$).
Or g(x) = f(x)cos²x, donc g est dérivable sur]0 , +∞[et pour tout x > 0, g'(x) = f '(x)cos²x – 2f(x)sinxcosx.

Si x = 1, $f'(1)=\dfrac{1}{2}$, f(1) = 0 et $g'(1)=\dfrac{1}{2}\cos^2(1)$. On remarque que f '(1) ≠ g'(1).

Si x = k2π, g'(2kπ) = f '(2kπ)cos²(2kπ) – 2f(2kπ)sin(2kπ)cos(2kπ) = f '(2kπ).
Si x = (2k + 1)π,
g'((2k + 1)π) = f '((2k + 1)π)cos²((2k + 1)π) – 2f((2k + 1)π)sin((2k + 1)π)cos((2k + 1)π) = f '((2k + 1)π).
Finalement on a, g(x) = f(x) et g'(x) = f '(x) si et seulement si x = kπ, k étant un entier naturel non nul.

Or $f(k\pi)=\dfrac{\ln(k\pi)}{1+k\pi}$, alors (C) et (Γ) sont tangentes aux points $M_k\left(k\pi\,,\dfrac{\ln(k\pi)}{1+k\pi}\right)$, où k est un entier naturel non nul quelconque.

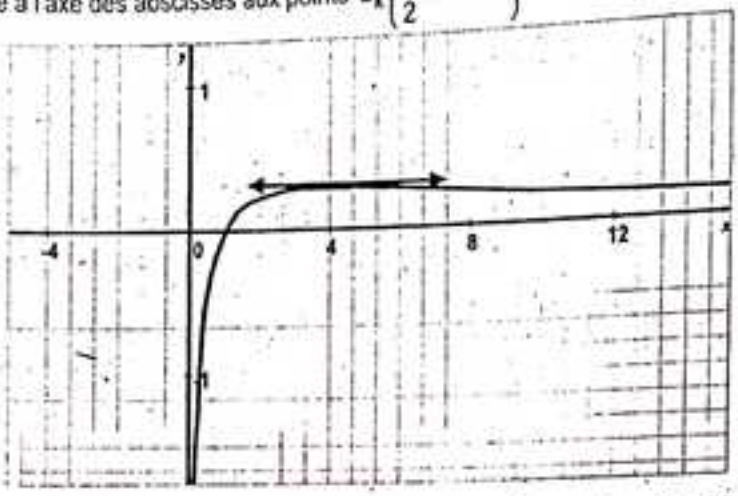
• (Γ) est tangente à l'axe des abscisses, si et seulement si g(x) = 0 et g'(x) = 0.

$g(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{1+x}\cos^2 x=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, où k est un entier naturel.

Scanned by CamScanner

Or $g'(1) \neq 0$ et $g'\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=0$ (pour tout entier naturel k).

D'où (Γ) est tangente à l'axe des abscisses aux points $B_k\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, 0\right)$, où k est un entier naturel quelconque.



Remarque :

Les courbes des fonctions f et g sont tangentes au point d'abscisse a si et seulement si $g(a) = f(a)$ et $g'(a) = f'(a)$.

Solution 48

1) • La fonction u est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour tout $x > 0$, $u'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$.

Le signe de u'(x) est celui de $x - 1$.
Donc u est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, 1]$.
On a le tableau de variations de u qui suit :

x	0		1		$+\infty$
u'(x)	‖	-	0	+	
u(x)	‖	↘	0	↗	

On remarque que u admet un minimum qui est 0, et qui est atteint pour $x = 1$.

Donc pour tout $x > 1$, on a $u(x) > 0$, soit $\ln x-\frac{x-1}{x}>0$. Et donc $\frac{x-1}{x}<\ln x$. (1)

• La fonction v est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a : $v'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$.

Le signe de v'(x) est celui de $x - 1$.
Donc v est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, 1]$.
On a le tableau de variations de v qui suit :

x	0		1		$+\infty$
v'(x)	‖	-	0	+	
v(x)	‖	↘	0	↗	

On remarque que v admet un minimum qui est 0, qui est atteint pour $x = 1$.
Donc pour tout $x > 1$, on a $v(x) > 0$, soit $x - 1 - \ln x > 0$. Et donc $\ln x < x - 1$. (2)

Des inégalités (1) et (2), on peut conclure que pour tout réel $x > 1$, on a : $\frac{x-1}{x}<\ln x<x-1$.

2) • Notons que $\sqrt[9]{e}$ appartient à $]1, +\infty[$.

Scanned by CamScanner

Si on pose $x=\sqrt[n]{e}$, on aura : $\frac{\sqrt[n]{e}-1}{\sqrt[n]{e}}<\ln\sqrt[n]{e}<\sqrt[n]{e}-1$. Or $\ln\sqrt[n]{e}=\ln e^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}$, alors $\frac{\sqrt[n]{e}-1}{\sqrt[n]{e}}<\frac{1}{n}<\sqrt[n]{e}-1$.

- Puisque $\frac{1}{n}<\sqrt[n]{e}-1$, alors $1+\frac{1}{n}<\sqrt[n]{e}$. Donc $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<e$. (3)

De même, $\frac{\sqrt[n]{e}-1}{\sqrt[n]{e}}<\frac{1}{n}$, alors $\sqrt[n]{e}-1<\frac{1}{n}\sqrt[n]{e}$, c'est-à-dire $\sqrt[n]{e}\left(1-\frac{1}{n}\right)<1$. Donc $\sqrt[n]{e}<\frac{1}{1-\frac{1}{n}}$, soit $e<\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$. (4)

Finalement des inégalités (3) et (4), on conclut que pour tout $n>1$, on a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$.

Solution 49

A)1) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=1$, car $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x\ln x=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x(1-3\ln x)=-\infty$.

2) g est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x>0$, on a : $g'(x)=1-3\ln x-3x\times\frac{1}{x}=-3\ln x-2$.

Ainsi, $g'(x)>0$ équivaut à $-3\ln x-2>0$. C'est-à-dire $\ln x<-\frac{2}{3}$. Ce qui signifie que $0<x<e^{-\frac{2}{3}}$.

Et $g'(x)=0$ si et seulement si $x=e^{-\frac{2}{3}}$.

Donc g est strictement croissante sur $\left]0,e^{-\frac{2}{3}}\right[$ et strictement décroissante dans $\left]e^{-\frac{2}{3}},+\infty\right[$. D'où le tableau :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$ 0	$-$
$g(x)$	‖ 0	↗ $1+3e^{-\frac{2}{3}}$	↘ $-\infty$

3) • Dans l'intervalle [1 , 2], g est continue et strictement décroissante.
Donc g réalise une bijection de [1 , 2] sur $g([1,2])=[g(2),g(1)]=[3-6\ln 2,2]$.
Or 0 appartient à $[3-6\ln 2,2]$ alors, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans [1 , 2].
• De plus $g(1,69)>0$ et $g(1,7)<0$, alors on peut conclure qu'on a : $1,69<\alpha<1,7$.

B)1)a) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$.

b) • Soit x un nombre réel.

$x>1$ implique $0<x^3<(1+x)^3$ et $\ln x>0$, donc $0<\frac{1}{(1+x)^3}<\frac{1}{x^3}$ et $\ln x>0$, donc $0<\frac{\ln x}{(1+x)^3}<\frac{\ln x}{x^3}$.

D'où pour tout $x>1$, on a : $0<f(x)<\frac{\ln x}{x^3}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}=0$, alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

c) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$, d'où la droite d'équation $x=0$, est asymptote verticale à la courbe de f.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, d'où la droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à la courbe de f.

Scanned by CamScanner

2) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\frac{(1+x)^3}{x} - 3(1+x)^2 \ln x}{(1+x)^6} = \dfrac{1+x-3x\ln x}{x(1+x)^4} = \dfrac{g(x)}{x(1+x)^4}$.

Or pour $x > 0$, on a $x(1+x)^4 > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

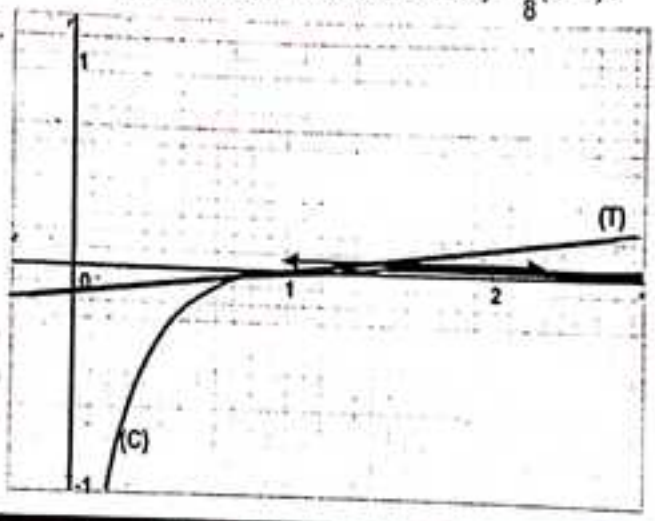
3) $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$. Or d'après la partie A), dans $]0, \alpha[$, on a $g(x) > 0$ et dans $]\alpha, +\infty[$, on a $g(x) < 0$.
Et $g(\alpha) = 0$. D'où le tableau de variations de f :

x	0		α		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	-	
f(x)	‖	↗	$f(\alpha)$	↘	0
	‖	$-\infty$			

$f(\alpha) = \dfrac{\ln\alpha}{(1+\alpha)^3}$. Or $g(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $1 + \alpha - 3\alpha\ln\alpha = 0$, alors $\ln\alpha = \dfrac{1+\alpha}{3\alpha}$ et $f(\alpha) = \dfrac{\frac{1+\alpha}{3\alpha}}{(1+\alpha)^3} = \dfrac{1}{3\alpha(1+\alpha)^2}$.

4)a) $f'(1) = \dfrac{1}{8}$ et $f(1) = 0$, donc une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1 est $y = \dfrac{1}{8}(x-1)$.

b) Pour le tracé, on peut prendre $\alpha = 1{,}7$.



Solution 50

1) Soit $x \geq 0$, on a : $1 - x - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1-x^2-1}{1+x} = \dfrac{-x^2}{1+x} \leq 0$, donc $1 - x \leq \dfrac{1}{1+x}$.

De plus, on a : $1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1+x-1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} \geq 0$, d'où $\dfrac{1}{1+x} \leq 1$.

On en déduit que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $1 - x \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 1$.

2) • Soit $u : x \mapsto \ln(1+x) - x$.

Pour tout $x \geq 0$, $u'(x) = -\dfrac{x}{1+x} \leq 0$. Donc u est décroissante sur $[0, +\infty[$.

Comme $u(0) = 0$, alors pour tout $x \geq 0$, on a $u(x) \leq 0$, c'est-à-dire $\ln(1+x) \leq x$.

• Soit $v(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$. Pour tout $x \geq 0$, $v'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x$.

En utilisant la question 1), on a $v'(x) \geq 0$, donc v est croissante sur $[0, +\infty[$ et $v(0) = 0$.

On en déduit que pour tout $x \geq 0$, on a $v(x) \geq 0$, c'est-à-dire $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

Finalement, on a montré que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Scanned by CamScanner

3) g est une somme de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$, donc g est dérivable sur $[0, +\infty[$.

Et pour tout $x \geq 0$, on a $g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(2+x)^2} = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}$.

4) • Pour tout $x \geq 0$, il est clair que $\frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} \geq 0$.

De plus, $x \geq 0$ implique $x+1 \geq 1$ et $x+2 \geq 2$, donc $x+1 \geq 1$ et $(x+2)^2 \geq 4$. Donc $(1+x)(x+2)^2 \geq 4$.

On en déduit que $\frac{1}{(1+x)(x+2)^2} \leq \frac{1}{4}$. D'où $\frac{x^2}{(1+x)(x+2)^2} \leq \frac{x^2}{4}$.

Et finalement, on peut conclure que pour tout $x \geq 0$, on a : $0 \leq g'(x) \leq \frac{x^2}{4}$.

• - Puisque $g' \geq 0$, alors g est croissante. Comme $g(0) = 0$, alors g est minorée par 0.
Donc pour tout $x \geq 0$, on a $g(x) \geq 0$.

- Considérons la fonction $w : x \mapsto g(x) - \frac{x^3}{12}$, définie sur $[0, +\infty[$.

Cette fonction est dérivable sur $[0, +\infty[$, et pour tout $x \geq 0$, on a $w'(x) = g'(x) - \frac{x^2}{4}$.

D'après le résultat de la question précédente, on a $0 \leq g'(x) \leq \frac{x^2}{4}$, donc $w'(x) \leq 0$, pour tout $x \geq 0$.

Ainsi, w est décroissante sur $[0, +\infty[$ et $w(0) = 0$. Donc pour tout $x \geq 0$, on a $w(x) \leq 0$, soit $g(x) \leq \frac{x^3}{12}$.

Finalement, pour tout $x \geq 0$, $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{12}$.

5) f est un quotient de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$, le dénominateur de f ne s'annulant pas sur cet intervalle, f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} \times x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$.

6) • Soit $x \geq 0$, on a : $g(x) - \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} = -\frac{2x}{2+x} + \frac{x}{1+x} = -\frac{x^2}{(1+x)(2+x)} \leq 0$.

D'où pour tout $x \geq 0$, on a : $g(x) \leq \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$.

• Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$. Donc pour tout $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$.

Puisque pour tout $x > 0$, on a $g(x) \leq \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$, alors $-\ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \leq -g(x) \leq 0$, car d'après la question 4), on a $g(x) \geq 0$. Donc pour tout $x > 0$, on a $f'(x) \leq 0$. f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

7) Soit $x > 0$, on a : $f(x) = \frac{x+1}{x} \times \frac{\ln(x+1)}{x+1}$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. .

8) • Soit $x > 0$, D'après la question 4), on a $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{12}$. Donc $0 \leq \ln(x+1) - \frac{2x}{2+x} \leq \frac{x^3}{12}$.

D'où $\frac{2x}{x+2} \leq \ln(x+1) \leq \frac{x^3}{12} + \frac{2x}{x+2}$ et $\frac{2x}{x+2} - x \leq \ln(x+1) - x \leq \frac{x^3}{12} + \frac{2x}{x+2} - x$, soit

Scanned by CamScanner

$\frac{-x^2}{x+2} \le \ln(x+1)-x \le \frac{x^3}{12}-\frac{x^2}{x+2}$. Ainsi, pour tout $x>0$, on a $\frac{-1}{x+2} \le \frac{\ln(x+1)-x}{x^2} \le \frac{x}{12}-\frac{1}{x+2}$.

Et comme $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{x+2}=-\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{12}-\frac{1}{x+2}=-\frac{1}{2}$, alors d'après le théorème des gendarmes, on a :

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$.

- Or $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$, alors $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\frac{1}{2}$.

f est donc dérivable en 0 et $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

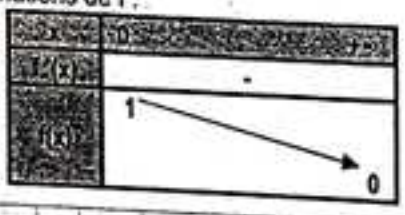
- f est dérivable en 0, donc la courbe de f admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation :

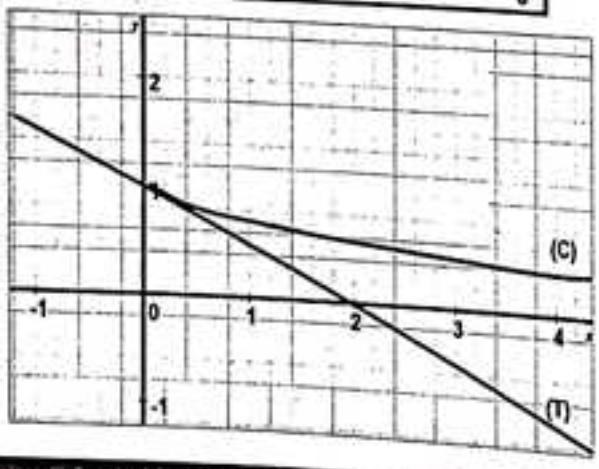
$y = f'(0)(x-0)+f(0)$, soit $y=-\frac{1}{2}x+1$.

- Soit $x>0$, on a montré à la question 2) que : $x-\frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$.

En multipliant l'inégalité par $\frac{1}{x}$, on obtient $1-\frac{x}{2} \le \frac{\ln(x+1)}{x}$. D'où (C) est au-dessus de sa tangente (T).

9) On peut alors dresser le tableau de variations de f :





Solution 51

A)1) La fonction ln est dérivable sur $\left[1,\frac{b}{a}\right]$, et pour tout réel x dans cet intervalle, on a : $\ln' x=\frac{1}{x}$.

Or $1 \le x \le \frac{b}{a}$ implique $\frac{a}{b} \le \frac{1}{x} \le 1$; c'est-à-dire $\frac{a}{b} \le \ln' x \le 1$.

Alors appliquons l'inégalité des accroissements finis à ln dans $\left[1,\frac{b}{a}\right]$, et on a : $\frac{a}{b}\left(\frac{b}{a}-1\right) \le \ln\left(\frac{b}{a}\right)-\ln 1 \le 1\left(\frac{b}{a}-1\right)$.

On conclut alors que pour deux réels a et b strictement positifs, tels que $a \le b$, on a : $1-\frac{a}{b} \le \ln\frac{b}{a} \le \frac{b}{a}-1$.

2) Soit x un réel strictement positif. Distinguons deux cas :
Si $0 < x \le 1$, dans l'inégalité précédente, prenons $a = x$ et $b = 1$.

On a alors $1-x \le \ln\frac{1}{x} \le \frac{1}{x}-1$. C'est-à-dire $1-x \le -\ln x \le \frac{1}{x}-1$. On peut alors dire que $1-\frac{1}{x} \le \ln x \le x-1$.

Scanned by CamScanner

Si $x \geq 1$, dans l'inégalité de la question 1), prenons a = 1 et b = x. On a alors $1-\frac{1}{x} \leq \ln x \leq x-1$.

Finalement, pour tout réel $x > 0$, on a : $1-\frac{1}{x} \leq \ln x \leq x-1$.

3)a) *(Voir la courbe à la ci-dessous)*

b) On remarque que dans $]0, +\infty[$, (D) est au-dessus de (C) qui est au-dessus de (H).
Ce qui justifie l'encadrement obtenu à la question A)2).

B)1) f est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour tout $x > 0$, on a : $f'(x) = 1 + \ln x$.
Donc $f'(x) > 0$ si et seulement si, $\ln x > -1$. C'est-à-dire $x > e^{-1}$.
Donc f est strictement décroissante sur $]0, e^{-1}[$, et strictement croissante sur $]e^{-1}, +\infty[$.
D'où le tableau de variations de f est le suivant :

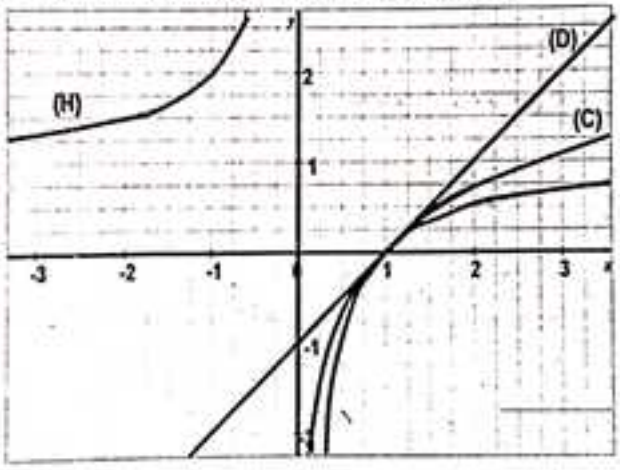
x	0		e^{-1}		$+\infty$
f'(x)	‖	-	0	+	
f(x)	‖ 0	↘	$-e^{-1}$	↗	$+\infty$

- Dans l'intervalle $]0, e^{-1}[$, f est majorée par 0. D'où pour tout x dans $]0, e^{-1}[$, on a $f(x) < 1$.

L'équation f(x) = 1 n'a donc pas de solution dans cet intervalle.

- Dans l'intervalle $]e^{-1}, +\infty[$, f est continue et strictement croissante,

Donc f induit une bijection de $]e^{-1}, +\infty[$ vers $]-e^{-1}, +\infty[$, et comme 1 appartient à $]-e^{-1}, +\infty[$, alors l'équation f(x) = 1 admet sur $]e^{-1}, +\infty[$ une unique solution x_1.
Par conséquent, l'équation $x\ln x = 1$ admet une et une seule solution x_1 sur $]0, +\infty[$.



2)a) Soit $x > 0$, on a d'après A)2), $1-\frac{1}{x} \leq \ln x \leq x-1$.

En multipliant par x les membres de cette inégalité, on obtient : $x - 1 \leq f(x) \leq x^2 - x$.

b) Puisque $x_1 > 0$, en remplaçant x par x_1 dans l'encadrement de la question A)2)a), on a $x_1 - 1 \leq f(x_1) \leq x_1^2 - x_1$.
Or $f(x_1) = 1$, alors on conclut que $x_1 - 1 \leq 1 \leq x_1^2 - x_1$.

c) D'après l'encadrement de 2)b), on a $x_1 - 1 \leq 1 \leq x_1^2 - x_1$.
Or $x_1 - 1 \leq 1$ équivaut à $x_1 \leq 2$ (1).

Et $1 \leq x_1^2 - x_1$ équivaut à $x_1^2 - x_1 - 1 \geq 0$. C'est-à-dire $x_1 \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x_1 \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Or on a $x > 0$, donc $x_1 \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (2).

Des inégalités (1) et (2), on déduit l'encadrement $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq x_1 \leq 2$.

3)a) $f(2) = 2\ln 2$ et $f'(2) = 1 + \ln 2$.
Donc une équation de (T) est $y = (1 + \ln 2)(x - 2) + 2\ln 2$, soit $y = (1 + \ln 2)x - 2$.

Scanned by CamScanner

b) Soit (Δ) la droite d'équation y = 1.

M(x , y) appartient à (Δ) ∩ (T) si et seulement si y = 1 et y = (1 + ln2)x – 2. C'est-à-dire y = 1 et $x=\frac{3}{1+\ln 2}$.

Et donc $x_2=\frac{3}{1+\ln 2}$. Grâce à la calculatrice, l'approximation décimale $\overline{x_2}$ d'ordre 2 par défaut de x_2 est 1,77.

c) En utilisant la calculatrice, le calcul de f(1,76) et f(1,77) permet d'écrire f(1,76) < 1 < f(1,77).

Or $f(x_1) = 1$, $\overline{x_2}-10^{-2}=1{,}76$ et $\overline{x_2}=1{,}77$, alors, on a : $f(\overline{x_2}-10^{-2})\le f(x_1)\le f(\overline{x_2})$.

f étant strictement croissante sur $]e^{-1}, +\infty[$, on conclut que $\overline{x_2}-10^{-2}\le x_1\le\overline{x_2}$.

Solution 52

1) f est définie, continue et dérivable sur]0 , +∞[.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\sqrt[n]{x}=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln x=-\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f_n(x)=+\infty$.

Pour x > 0, on a $f_n(x)=n\sqrt[n]{x}-e\ln x=\sqrt[n]{x}\left(n-e\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}=0$ (en utilisant les croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$.

Et pour tout réel x > 0, on a $f_n'(x)=n\times\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}-e\times\frac{1}{x}=\frac{x^{\frac{1}{n}}-e}{x}=\frac{\sqrt[n]{x}-e}{x}$.

Pour x > 0, le signe de $f_n'(x)$ est celui de $\sqrt[n]{x}-e$.

On a $\sqrt[n]{x}-e>0$ équivaut à $\sqrt[n]{x}>e$. C'est-à-dire $x>e^n$. Et $\sqrt[n]{x}-e=0$ équivaut à $\sqrt[n]{x}=e$, soit $x=e^n$.

Par conséquent, f_n est strictement décroissante sur $]0, e^n]$ et strictement croissante sur $[e^n, +\infty[$.

On a le tableau de variation suivant :

x	0		e^n		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	-	0	+	
$f_n(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

2) Pour n > 1 : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(n\frac{\sqrt[n]{x}}{x}-e\frac{\ln x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} n\frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}}-e\frac{\ln x}{x}=0$.

D'ou la courbe de f_n admet en +∞, une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses.

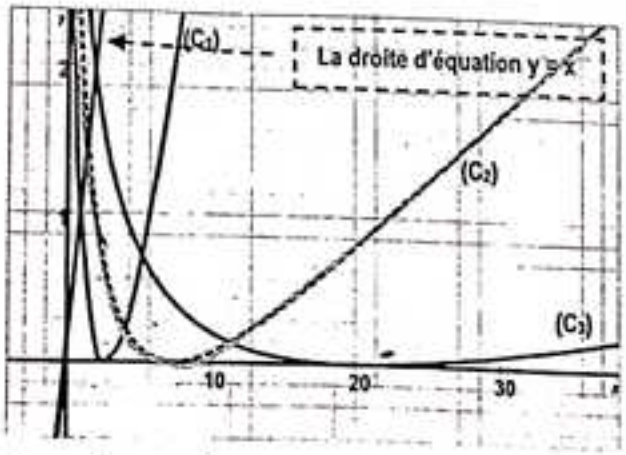
Pour n = 1 :

$f_1(x)=x-e\ln x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-e\frac{\ln x}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_1(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-e\ln x)=-\infty$.

D'où la courbe de f_1 admet en +∞ une branche parabolique de direction asymptotique, la droite d'équation y = x.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n}{e}\times\frac{\sqrt[n]{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n}{e}\times\frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}}=0$, alors

d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.



3) soit n entier naturel non nul et x > 0, on a :

$f_{n+1}(x)=f_n(x)\Leftrightarrow(n+1)^{n+\sqrt[n]{x}}-e\ln x=n\sqrt[n]{x}-e\ln x\Leftrightarrow$

Scanned by CamScanner

Ainsi, $f_{n+1}(x)=f_n(x) \Leftrightarrow x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}=\frac{n+1}{n} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{n(n+1)}}=\frac{n+1}{n} \Leftrightarrow x=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n(n+1)}$.

Donc les courbes (C_n) et (C_{n+1}), se coupent en un seul point, d'abscisse $x_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n(n+1)}$.

4) • D'après l'étude de f_n, f_n admet sur $]0,+\infty[$ un minimum qui est 0. D'où pour tout $x>0$, on a : $f_n(x)\geq 0$, c'est-à-dire $n\sqrt[n]{x}-e\ln x\geq 0$. Et donc $n\sqrt[n]{x}\geq e\ln x$.

Finalement, on a pour tout réel $x>0$, $\ln x\leq\frac{n\sqrt[n]{x}}{e}$.

• Puisque x tend vers $+\infty$, on peut supposer $x>1$. Alors on a : $0\leq\frac{\ln x}{x}\leq\frac{n\sqrt[n]{x}}{ex}$.

Solution 53

1) soit x un nombre réel, f(x) existe si et seulement si $ax+1>0$, $bx+1>0$ et $\ln(bx+1)\neq 0$.

C'est-à-dire $x>-\frac{1}{a}$, $x>-\frac{1}{b}$ et $bx+1\neq 1$. Ce qui signifie que $x>-\frac{1}{a}$, $x>-\frac{1}{b}$ et $x\neq 0$.

or on a : $0<a<b$ donc $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>0$ donc $-\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}<0$.

Finalement f(x) existe si et seulement si $x>-\frac{1}{b}$, avec $x\neq 0$.

Et l'ensemble de définition de f est : $\left]-\frac{1}{b},0\right[\cup]0,+\infty\left[\right.$.

2) f est continue et dérivable sur $D_f=\left]-\frac{1}{b},0\right[\cup]0,+\infty\left[\right.$, et pour tout x dans D_f, on a :

$$f'(x)=\frac{\frac{a}{ax+1}\ln(bx+1)-\frac{b}{bx+1}\ln(ax+1)}{[\ln(bx+1)]^2}=\frac{a(bx+1)\ln(bx+1)-b(ax+1)\ln(ax+1)}{(ax+1)(bx+1)[\ln(bx+1)]^2}.$$

3) • Soit x élément de D_f, $g'(x)=ab\ln(bx+1)+ab-ab\ln(ax+1)-ab=ab\ln\left(\frac{bx+1}{ax+1}\right)$.

• Soit x élément de D_f, $f'(x)=\frac{g(x)}{(ax+1)(bx+1)[\ln(bx+1)]^2}$.

Or pour tout réel x de D_f, on a : $(ax+1)(bx+1)[\ln(bx+1)]^2>0$. Alors le signe de f '(x) est celui de g(x).

Or $g'(x)>0$ si et seulement si $\ln\left(\frac{bx+1}{ax+1}\right)>0$. Ce qui équivaut à $\frac{bx+1}{ax+1}>1$. C'est-à-dire $bx+1>ax+1$. (Car pour tout x de D_f, on a : $ax+1>0$ et $bx+1>0$). Il s'ensuit donc que $(b-a)x>0$, c'est-à-dire $x>0$ (car $b>a$).

Donc si $x\in\left]-\frac{1}{b},0\right[$, alors on a $g'(x)<0$; et donc g est strictement décroissante sur $\left]-\frac{1}{b},0\right[$.

Si $x\in]0,+\infty[$, alors on a $g'(x)>0$; et donc g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

$g(0)=0$, alors le tableau de variation de g est :

x	$-\frac{1}{b}$		0		$+\infty$
g'(x)	‖	-	0	+	
g(x)	‖ ↘		0	↗	

Scanned by CamScanner

g est minorée par 0 et atteint son minimum en 0.
Alors pour tout x dans D_f, on a $g(x) \geq 0$ avec $g(x) = 0$ en $x = 0$.

f est donc strictement croissante sur chaque intervalle où f est définie (c'est-à-dire sur $\left]-\frac{1}{b}, 0\right[$ et sur $]0, +\infty[$).

4) f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Et Comme on a $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$, alors on peut écrire que $f\left(\frac{1}{b}\right) < f\left(\frac{1}{a}\right)$.

$$\text{Or } f\left(\frac{1}{b}\right) < f\left(\frac{1}{a}\right) \Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{a}{b}+1\right)}{\ln 2} < \frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{b}{a}+1\right)} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a}{b}+1\right)\ln\left(\frac{b}{a}+1\right) < (\ln 2)^2 \quad (\text{car } \ln\left(\frac{a}{b}+1\right) > 0 \text{ et } \ln\left(\frac{b}{a}+1\right) > 0).$$

Alors, pour tous réels a et b, avec $0 < a < b$, on a : $\ln\left(\frac{a}{b}+1\right)\ln\left(\frac{b}{a}+1\right) < (\ln 2)^2$.

Scanned by CamScanner

3 FONCTIONS EXPONENTIELLES – FONCTIONS PUISSANCES REELLES

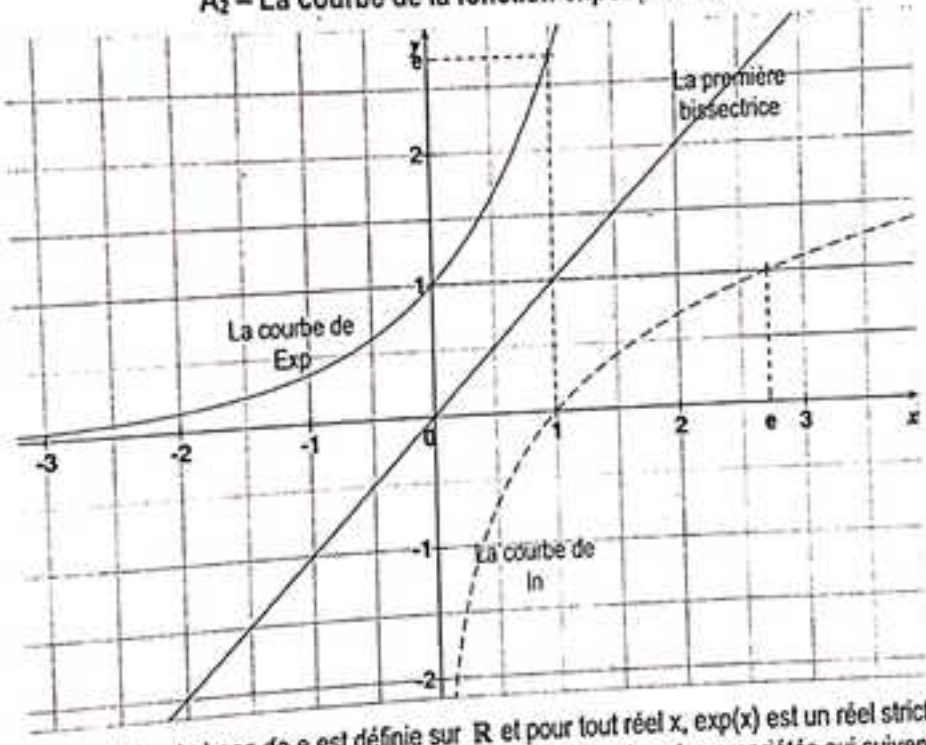
RAPPEL DU COURS

A. Fonction exponentielle de base e

A_1 – Théorème et définition

La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
Elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ vers $\ln(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$.
La fonction exponentielle de base de e, est la bijection réciproque de la fonction ln. On la note exp.

A_2 – La courbe de la fonction exponentielle



P_1) La fonction exponentielle de base de e est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, exp(x) est un réel strictement positif.
P_2) La fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction ln, donc les propriétés qui suivent :

- $\begin{cases} \exp(a) = b \\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln b = a \\ b > 0 \end{cases}$.
- Pour tout réel x, on a : $\ln(\exp(x)) = x$ et, pour tout réel strictement positif, $\exp(\ln(x)) = x$.
- Soit a et b deux nombres réels, $\exp(a) = \exp(b)$ si et seulement si $a = b$.
- exp est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
  Soit a et b deux nombres réels, $\exp(a) < \exp(b)$ si et seulement si, $a < b$.

A_4 – Autre notation

Par convention, pour tout réel x, on notera exp(x) par e^x.
Avec cette nouvelle notation, les propriétés ci-dessus s'écriront :
P_1) e^x existe pour tout réel x et pour tout réel x, on a : $e^x > 0$.

Scanned by CamScanner

P2) • $\begin{cases} e^a = b \\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln b = a \\ b > 0 \end{cases}$

- Pour tout réel x, on a : $\ln(e^x) = x$ et, pour tout réel strictement positif, $e^{\ln x} = x$.
- Soit a et b deux nombres réels, $e^a = e^b$ si et seulement si, $a = b$.
- Soit a et b deux nombres réels, $e^a < e^b$ si et seulement si, $a < b$.

A5 – Règles de calcul

Soit a et b deux nombres réels et m un nombre rationnel.

- $e^a \times e^b = e^{a+b}$.
- $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$
- $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.
- $(e^a)^m = e^{ma}$.

A6 – Calcul des limites

a) Limites usuelles :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

b) Autres limites :

- Soit a un nombre réel, $\lim\limits_{x \to a} e^x = e^a$.
- Soit u une fonction numérique, a et b deux nombres réels, $-\infty$ ou $+\infty$.
  Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$, alors $\lim\limits_{x \to a} e^{u(x)} = \lim\limits_{x \to b} e^x$.
- Soit m et n deux nombres rationnels strictement positifs.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{nx}}{x^m} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^m e^{nx} = 0$.

A7 – Dérivées et autres primitives

a) Dérivées :

- La fonction $\exp : x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $\exp : x \mapsto e^x$.
- Soit u une fonction numérique.

L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est celui de la fonction u.
L'ensemble de dérivabilité de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est celui de la fonction u.
La dérivée de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

b) Primitives :

- La fonction $\exp : x \mapsto e^x$ est une primitive de $\exp : x \mapsto e^x$.
- La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est une primitive de $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

B. Autres fonctions exponentielles

B1 – Théorème et définition

Soit a réel strictement positif et différent de 1.
La fonction $\log_a$ est continue et strictement monotone sur $]0, +\infty[$.

Scanned by CamScanner

Elle réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ vers $\log_a(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$.

La fonction exponentielle de base a est la réciproque de la fonction $\log_a$. On la note $\exp_a$.

Par convention, la fonction $\exp_1 : x \mapsto 1$.

B_2 – Autre notation et autre expression

Soit a un réel strictement positif.

Par convention, pour tout réel x, on notera $\exp_a(x)$ par a^x.

Et on montre que $a^x = e^{x\ln a}$.

Finalement, pour tout réel x, $\exp_a(x) = a^x = e^{x\ln a}$.

B_3 – Règles de calcul

Soit a un réel strictement positif, x et y deux nombres réels.

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$.
- $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.
- $(a^x)^y = a^{xy}$.

C. Fonctions puissances réelles

C_1 – Définition

Soit α un nombre réel.

On définit la fonction puissance réelle α, f_α de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par : $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

Il faut rappeler que $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

C_2 – Dérivées

La fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f_\alpha' : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

C_3 – Primitives

Une primitive de la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R} - \{0,-1\})$ sur $]0,+\infty[$ est la fonction $F_\alpha : x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$.

D. Croissances comparées

Soit α un réel strictement positif et a un réel strictement supérieur à 1.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^\alpha \ln x = 0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha a^x = 0$.

Scanned by CamScanner

XERCICES POUR COMPRENDRE LE COURS

A. Calculer avec les exponentielles

ercice 1

nplifier l'écriture des réels suivants :

$\exp(\ln 63)$ $\exp(-\ln 3)$ $-\exp\left(-\ln\frac{1}{2}\right)$ $\exp(3\ln 4)$ $\exp(\ln 3 - \ln 2)$ $\exp(-\ln(\ln 2))$.

olution 1

$\exp(\ln 63) = 63$

- $\exp(-\ln 3) = \exp\left(\ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$
- $-\exp\left(-\ln\frac{1}{2}\right) = -\exp(\ln 2) = -2$.

$\exp(3\ln 4) = \exp(\ln(4^3)) = 4^3 = 64$

$\exp(\ln 3 - \ln 2) = \exp\left(\ln\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

- $\exp(-\ln(\ln 2)) = \exp\left(\ln\left(\frac{1}{\ln 2}\right)\right) = \frac{1}{\ln 2}$.

xercice 2

mplifier l'écriture des réels suivants :

$(\exp(-3))$ $\ln\left(\frac{1}{\exp 17}\right)$ $\ln(\sqrt{\exp 4}) - \ln(\sqrt{\exp 2})$ $\exp\left[-\frac{1}{3}\ln(\exp(-3))\right]$.

olution 2

$\ln(\exp(-3)) = -3$

- $\ln\left(\frac{1^*}{\exp 17}\right) = -\ln(\exp 17) = -17$

$\ln(\sqrt{\exp 4}) - \ln(\sqrt{\exp 2}) = \ln\left[(\exp 4)^{\frac{1}{2}}\right] - \ln\left[(\exp 2)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}\ln(\exp(4)) - \frac{1}{2}\ln(\exp(2)) = \frac{1}{2}\times 4 - \frac{1}{2}\times 2 = 1.$

$\exp\left[-\frac{1}{3}\ln(\exp(-3))\right] = \exp\left[-\frac{1}{3}\times(-3)\right] = \exp(1) = e.$

ercice 3

nplifier les expressions suivantes :

) $\ln(\sqrt{e})$ b) $e^{3\ln 2}$ c) $\ln(e^{3x})$ d) $\ln(3e^{2x})$ e) $\frac{e^{x-1}}{e^2}\times \ln e^3 \times e^{\ln e^3} + 2\ln(\ln e)$

lution 3

$\ln(\sqrt{e}) = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}$

b) $e^{3\ln 2} = e^{\ln 2^3} = 2^3 = 8$

$\ln(e^{3x}) = 3x$

d) $\ln(3e^{2x}) = \ln 3 + \ln(e^{2x}) = \ln 3 + 2x$

$\frac{e^{x-1}}{e^2}\times \ln e^3 \times e^{\ln e^3} + 2\ln(\ln e) = \frac{e^{x-1}}{e^2}\times 3\times e^3 + 2\ln(1) = e^{x-3}\times 3\times e^3 = 3e^x.$

ercice 4

dier la parité des fonctions suivantes: a) $f: x \mapsto e^x - e^{-x}$ b) $f: x \mapsto \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

ution 4

est définie sur $\mathbb{R}$, et soit x dans $\mathbb{R}$, $f(-x) = e^{-x} - e^x = -(e^x - e^{-x}) = -f(x)$. D'où f est impaire.

Scanned by CamScanner

b) f est définie sur $\mathbb{R}$, et soit x dans $\mathbb{R}$, -x est aussi dans $\mathbb{R}$.

$$f(-x)=\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}=\frac{\frac{1}{e^{2x}}-1}{\frac{1}{e^{2x}}+1}=\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}}\times\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}=\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}+1}=-\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-f(x).$$ D'où f est impaire.

B. Résoudre les équations et inéquations faisant intervenir l'exponentielle

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : a) $e^{-x}-e^{x}=0$ b) $e^{-x}+e^{x}=0$.

Solution 5

a) $e^{-x}-e^{x}=0$ équivaut à $e^{-x}=e^{x}$. C'est-à-dire $-x=x$. Finalement $x=0$.
L'ensemble solution de cette équation est donc $S=\{0\}$.
b) Pour tout réel x, on a : $e^{-x}>0$ et $e^{x}>0$.
Ainsi, pour tout réel x, on a $e^{-x}+e^{x}>0$. L'équation $e^{-x}+e^{x}=0$, n'a donc pas de solution réelle.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^{x}=5$ b) $e^{x}=-3$ c) $3e^{x}=e^{-x}$ d) $e.e^{3x-1}=1$

e) $e^{x^2}=\frac{1}{9}$. f) $\sqrt{e}.e^{x}=[\exp(x^2)]^4$ g) $3e^{7-3x}+19=5e^{7-3x}$.

Solution 6

a) $e^{x}=5$ équivaut à $x=\ln 5$.
b) Pour tout réel x, on a $e^{x}>0$, d'où l'équation $e^{x}=-3$ n'a pas de solution.

c) $3e^{x}=e^{-x} \Leftrightarrow \ln(3e^{x})=\ln(e^{-x}) \Leftrightarrow \ln 3+x=-x \Leftrightarrow x=-\frac{\ln 3}{2}$.

d) $e.e^{3x-1}=1 \Leftrightarrow e^{3x}=1 \Leftrightarrow 3x=\ln 1 \Leftrightarrow x=0$.

e) $e^{x^2}=\frac{1}{9} \Leftrightarrow x^2=-\ln 9$. Cette équation n'a pas de solution car x^2 est positif ou nul et $-\ln 9$ est strictement négatif.

f) $\sqrt{e}.e^{x}=[\exp(x^2)]^4 \Leftrightarrow \ln(\sqrt{e})+\ln(e^{x})=4\ln(\exp(x^2)) \Leftrightarrow \frac{1}{2}+x=4x^2 \Leftrightarrow 8x^2-2x-1=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ ou $x=-\frac{1}{4}$.

D'où les solutions de cette équation sont $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{4}$.

g) $3e^{7-3x}+19=5e^{7-3x} \Leftrightarrow 2e^{7-3x}=19 \Leftrightarrow \ln 2+7-3x=\ln 19 \Leftrightarrow \ln 2-\ln 19+7=3x \Leftrightarrow x=\frac{\ln 2-\ln 19+7}{3}$

D'où la solution de cette équation est $\frac{\ln 2-\ln 19+7}{3}$.

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $e^{2x}+(1+e)e^{x}+e=0$ b) $3e^{x}-7e^{-x}-20=0$
c) $e^{3x}-3e^{2x}+3e^{x}-2=0$ d) $e^{2x-2}+e.e^{-3x+2}=e+1$.

Solution 7

a) Posons $X=e^{x}$, l'équation devient : $X^2+(1+e)X+e=0$ avec $X>0$. (1)
Cette dernière équation (1) a pour discriminant $\Delta=(1+e)^2-4e=(1-e)^2$.

Scanned by CamScanner

On a donc $X = \frac{-(1+e)-(1-e)}{2} = -1$ ou $X = \frac{-(1+e)+(1-e)}{2} = -e$.

Or les équations $e^x = -1$ et $e^x = -e$ n'ont pas de solution.
Alors l'équation $e^{2x} - (1+e)e^x + e = 0$ n'a pas de solution.

b) $3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0 \Leftrightarrow 3e^x - \frac{7}{e^x} - 20 = 0 \Leftrightarrow 3e^{2x} - 20e^x - 7 = 0$. (2)

Posons $X = e^x$, l'équation (2) devient $3X^2 - 20X - 7 = 0$ avec $X > 0$.
Cette dernière équation a pour discriminant $\Delta = 400 + 84 = 484$

On a donc $X = 7$ ou $X = -\frac{1}{3}$. Puisque $X > 0$, alors $X = 7$.

Or $e^x = 7$ si et seulement si $x = \ln 7$.
D'où l'équation $3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0$ a une unique solution $x = \ln 7$.

c) Posons $X = e^x$.
L'équation devient $X^3 - 3X^2 + 3X - 2 = 0$ avec $X > 0$, c'est-à-dire $(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) - 1 = 0$, avec $X > 0$.
C'est-à-dire $(X-1)^3 = 1$, soit $X - 1 = 1$, et donc $X = 2$.
Or $e^x = 2$ si et seulement si $x = \ln 2$, alors l'équation $e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 2 = 0$ a pour solution $x = \ln 2$.

d) $e^{3x-2} + e.e^{-3x+2} = e + 1 \Leftrightarrow e^{3x-2} + \frac{e}{e^{3x-2}} - (e+1) = 0 \Leftrightarrow (e^{3x-2})^2 - (e+1)e^{3x-2} + e = 0$.

Posons $X = e^{3x-2}$, l'équation devient $X^2 - (e+1)X + e = 0$, soit $X = e$ ou $X = 1$.

Or $e^{3x-2} = e$ équivaut à $3x - 2 = 1$, soit $x = 1$ et $e^{3x-2} = 1$ équivaut à $3x - 2 = 0$, soit $x = \frac{2}{3}$.

D'où les solutions de l'équation $e^{3x+2} + e.e^{-3x-2} = e + 1$ sont : 1 et $\frac{2}{3}$.

Point méthode :

Pour résoudre une équation faisant intervenir la fonction exponentielle :

- *on précise la condition pour laquelle les termes intervenant dans l'équation existent.*
- *on ramène l'équation sous l'une des formes $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ ou $e^{u(x)} = a$, (a appartenant à $]0, +\infty[$)*
- *ce qui nous amène alors à résoudre l'une des équations $u(x) = v(x)$ ou $u(x) = \ln a$.*
- *on déduit alors l'ensemble solution.*

Notons que l'équation $e^{u(x)} = a$ n'a pas de solution pour $a \leq 0$.

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : 1) $\frac{3e^x - 1}{9 + e^x} = 2$ 2) $\frac{3e^x + 1}{5e^x + 2} = \frac{e^x - 37}{2e^x - 64}$.

Solution 8

1) $\frac{3e^x - 1}{9 + e^x} = 2 \Leftrightarrow 2(9 + e^x) = 3e^x - 1 \Leftrightarrow e^x = 19 \Leftrightarrow x = \ln 19$.

D'où l'unique solution de l'équation $\frac{3e^x - 1}{9 + e^x} = 2$ est : $x = \ln 19$.

2) L'équation $\frac{3e^x + 1}{5e^x + 2} = \frac{e^x - 37}{2e^x - 64}$ sera résolue sous la condition $2e^x - 64 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 5\ln 2$.

Sous cette condition, $\frac{3e^x + 1}{5e^x + 2} = \frac{e^x - 37}{2e^x - 64} \Leftrightarrow (3e^x + 1)(2e^x - 64) = (5e^x + 2)(e^x - 37)$

$\Leftrightarrow 6e^{2x} - 190e^x - 64 = 5e^{2x} - 183e^x - 74$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 7e^x + 10 = 0$

Posons $X = e^x$, l'équation devient $X^2 - 7X + 10 = 0$, qui a pour solution $X = 2$ ou $X = 5$.
Or $e^x = 2$, signifie $x = \ln 2$ et $e^x = 5$, signifie $x = \ln 5$.

D'où les solutions de l'équation $\frac{3e^x + 1}{5e^x + 2} = \frac{e^x - 37}{2e^x - 64}$ sont : $\ln 2$ et $\ln 5$.

Exercice 9

On considère l'équation suivante : $e^{2x} + 4me^x - 2m + 2 = 0$ (1).
1) Déterminer suivant les valeurs de m, les solutions éventuelles de l'équation (1) en fonction de m.
2) Résoudre l'équation $e^{2x} - 8e^x + 6 = 0$ sans utiliser la question précédente.
3) Retrouver, en utilisant la question 1), les solutions de l'équation $e^{2x} - 8e^x + 6 = 0$.

Scanned by CamScanner

Solution 9

1) Posons $X = e^x$, l'équation (1) devient : $X^2 + 4mX - 2m + 2 = 0$. (2)

Notons que x est solution de l'équation (1) si et seulement si, X est une solution strictement positive de l'équation (2), et dans ce cas, $x = \ln X$.

Le discriminant de l'équation (2) est : $\Delta = 16m^2 - 4(2 - 2m) = 8(m + 1)(2m - 1)$.

Calculons la somme S et le produit P des racines éventuelles de l'équation (2). On a : $S = -4m$ et $P = 2 - 2m$.

Dressons un tableau récapitulant les signes de Δ, P et S :

m	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
Δ	+	0	-	-	0	+		+		+	
P	+		+	+		+		+	0	-	
S	+		+	0	-	-		-		-	

Du tableau ci-dessus, on déduit que :

- Si $m \in]-\infty, -1[$, alors on a $\Delta > 0$, $P > 0$ et $S > 0$. Alors l'équation (2) a deux racines positives distinctes :

$$X_1 = -2m - \sqrt{2(m+1)(2m-1)} \quad \text{et} \quad X_2 = -2m + \sqrt{2(m+1)(2m-1)}.$$

Et donc l'équation (1) admet aussi deux racines distinctes :

$$x_1 = \ln(-2m - \sqrt{2(m+1)(2m-1)}) \text{ et } x_2 = \ln(-2m + \sqrt{2(m+1)(2m-1)}).$$

- Si $m \in \left]-1, \frac{1}{2}\right[$, alors on a $\Delta < 0$. L'équation (2) n'a pas de solution, donc l'équation (1) n'en a pas non plus.

- Si $m \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$, alors on a $\Delta > 0$, $P > 0$ et $S < 0$.

Donc l'équation (2) admet deux racines négatives. Et par conséquent, l'équation (1) n'a pas de racine.

- Si $m \in]1, +\infty[$, alors on a $\Delta > 0$ et $P < 0$.

Alors l'équation (2) admet deux racines de signes contraires, X_1 et X_2 trouvées précédemment.

On remarque que, puisque $m > 1$, X_1 est une somme de deux nombres strictement négatifs.

Donc on a $X_1 < 0$. La solution positive de l'équation (1) est donc X_2.

L'équation (1) a donc une unique solution $x = \ln(-2m + \sqrt{2(m+1)(2m-1)})$.

- Si $m = -1$, alors on a : $\Delta = 0$, $P > 0$ et $S > 0$, donc l'équation (2) a une racine double positive $X = 2$.

Donc l'équation (1) admet une solution $x = \ln 2$

- Si $m = \frac{1}{2}$, alors on a : $\Delta = 0$, $P > 0$ et $S < 0$, donc l'équation (2) admet une racine double négative $X = -1$.

Donc l'équation (1) n'a pas de solution.

- Si $m = 1$, alors on a : $\Delta > 0$, $P = 0$ et $S < 0$, donc l'équation (2) admet deux racines dont une nulle et l'autre négative ($X = 0$ et $X = -4$). Donc l'équation (1) n'a pas de solution.

2) Posons $X = e^x$, l'équation devient $X^2 - 8X + 6 = 0$.

On a $X = 4 - \sqrt{10}$ ou $X = 4 + \sqrt{10}$. Ces deux racines sont positives donc :

$e^{2x} - 8e^x + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = 4 - \sqrt{10}$ ou $e^x = 4 + \sqrt{10} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(4 - \sqrt{10})$ ou $x = \ln(4 + \sqrt{10})$.

Les solutions de l'équation $e^{2x} - 8e^x + 6 = 0$ sont donc $x' = \ln(4 - \sqrt{10})$ et $x'' = \ln(4 + \sqrt{10})$.

3) Si $m = -2$, alors l'équation (1) devient $e^{2x} - 8e^x + 6 = 0$.

D'après la question 1), comme m appartient à $]-\infty, -1[$, on a deux racines distinctes :

$x_1 = \ln(-2m - \sqrt{2(m+1)(2m-1)}) = \ln(4 - \sqrt{10})$ et $x_2 = \ln(-2m + \sqrt{2(m+1)(2m-1)}) = \ln(4 + \sqrt{10})$.

Exercice 10

Résoudre les inéquations : a) $e^{3x-5} \geq 12$ b) $1 \leq e^{-x^2+x}$ c) $e^{1+\ln x} \geq 2$ d) $e^{x^2} e^x > e^6$.

Solution 10

a) $e^{3x-5} \geq 12 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 5 \geq \ln 12 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{5 + \ln 12}{3}$.

Point méthode :

Soit a un réel strictement positif :

- $e^x > a$ *si et seulement si* $x > \ln a$.
- $e^x < a$ *si et seulement si* $x < \ln a$

Scanned by CamScanner

D'où l'ensemble solution de l'inéquation est $\left]\frac{5+\ln 12}{3}, +\infty\right[$.

b) $1 \le e^{-x^2+x} \Leftrightarrow 0 \le -x^2+x \Leftrightarrow -x^2+x \ge 0 \Leftrightarrow x \in [0,1]$.

D'où l'ensemble solution de l'inéquation est $[0,1]$.

c) L'inéquation est résolue sous la condition : $x > 0$.

$e^{1+\ln x} \ge 2 \Leftrightarrow 1+\ln x \ge \ln 2 \Leftrightarrow \ln x \ge -1+\ln 2 \Leftrightarrow x \ge e^{-1+\ln 2} \Leftrightarrow x \ge 2e^{-1}$.

D'où l'ensemble solution de l'inéquation est $[2e^{-1}, +\infty[$.

d) $e^{x^2}e^{x} > e^{6} \Leftrightarrow e^{x^2+x} > e^{6} \Leftrightarrow x^2+x > 6 \Leftrightarrow x^2+x-6 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$.

Exercice 11

Résoudre les inéquations suivantes:

a) $(e^{2x}-3)(e^x+2)(1-2e^x) \ge 0$ b) $\frac{2e^x-1}{e^x-2} < \frac{e^x}{e^x+1}$ c) $3e^{2x} + e^x - 2 < 0$.

Solution 11

a) Posons $X = e^x$, l'inéquation devient $(X^2-3)(X+2)(1-2X) \ge 0$, avec $X > 0$.

Dressons le tableau de signe de $(X^2-3)(X+2)(1-2X)$ dans $]0, +\infty[$. On a alors le tableau de signe suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
X^2-3		-		-	0	+	
$X+2$		+		+		+	
$1-2X$		+	0	-		-	
$(X^2-3)(X+2)(1-2X)$		-	0	+	0	-	

Alors l'inéquation $(X^2-3)(X+2)(1-2X) \ge 0$ avec $X > 0$ est équivalente à $X \in \left[\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right]$.

Ainsi $(e^{2x}-3)(e^x+2)(1-2e^x) \ge 0$ équivaut à $e^x \in \left[\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right]$. C'est-à-dire $x \in \left[\ln\frac{1}{2}, \ln(\sqrt{3})\right]$.

D'où l'ensemble solution de l'inéquation donnée est $\left[\ln\frac{1}{2}, \ln(\sqrt{3})\right]$.

b) $\frac{2e^x-1}{e^x-2} < \frac{e^x}{e^x+1} \Leftrightarrow \frac{2e^x-1}{e^x-2} - \frac{e^x}{e^x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}+3e^x-1}{(e^x-2)(e^x+1)} < 0$ (1).

On pose $X = e^x$. L'inéquation (1) devient alors $\frac{X^2+3X-1}{(X-2)(X+1)} < 0$ avec $X > 0$ (2).

Notons que l'on a $X > 0$, donc nous allons résoudre l'inéquation (2) dans $]0, +\infty[$.

Dressons le tableau de signe de : $\frac{X^2+3X-1}{(X-2)(X+1)}$ dans $]0, +\infty[$.

X	0		$\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$		2	
X^2+3X-1		-	0	+		+
$X+1$		+		+		+
$X-2$		-		-	0	+
$\frac{X^2+3X-1}{(X-2)(X+1)}$		+	0	-	||	+

Ainsi $\frac{X^2+3X-1}{(X-2)(X+1)} < 0$ avec $X > 0$ équivaut à $X \in \left]\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, 2\right[$.

Scanned by CamScanner

Et donc $\frac{2e^x-1}{e^x-2} < \frac{e^x}{e^x+1}$ équivaut à $e^x \in \left]\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, 2\right[$. C'est-à-dire $x \in \left]\ln\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right), \ln 2\right[$.

Finalement, l'ensemble solution de l'inéquation est $S = \left]\ln\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right), \ln 2\right[$.

c) Posons $X = e^x$. L'inéquation devient $3X^2 + X - 2 < 0$, avec $X > 0$.

Or $(3X^2 + X - 2 < 0$ et $X > 0)$ équivaut à $X \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$. *(Le lecteur pourra dresser le tableau de signe de $3x^2 + x - 2$ dans $]0, +\infty[$).*

Alors, $3e^{2x} + e^x - 2 < 0$ équivaut à $e^x \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$. C'est-à-dire $x \in \left]-\infty, \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right[$.

Finalement, l'ensemble solution de l'inéquation est $S = \left]-\infty, \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right[$.

Exercice 12

Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} e^{y-x} = e \\ \frac{e^{2x}}{e^x} = \frac{1}{e^3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} e^{2x+1} - e^y = -e \\ e^{2x+1} + e^y = 5e \end{cases}$ c) $\begin{cases} e^x e^y = 5 \\ xy = \frac{1}{2} \end{cases}$

Solution 12

a) $\begin{cases} e^{y-x} = e \\ \frac{e^{2x}}{e^x} = \frac{1}{e^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 1 \\ e^x = e^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$.

D'où l'unique couple (x , y) solution de ce système est le couple (-3 , -2).

b) Posons $X = e^{2x+1}$ et $Y = e^y$. Le système devient alors $\begin{cases} X - Y = -e \\ X + Y = 5e \end{cases}$, avec $X > 0$ et $Y > 0$.

La résolution de ce système donne comme unique solution le couple (X , Y) = (2e , 3e).
Comme ces 2e et 3e sont strictement positives, alors on a :

$$\begin{cases} e^{2x+1} - e^y = -e \\ e^{2x+1} + e^y = 5e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x+1} = 2e \\ e^y = 3e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = \ln(2e) = \ln 2 + 1 \\ y = \ln(3e) = \ln 3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\ln 2}{2} \\ y = \ln 3 + 1 \end{cases}$$

D'où l'unique couple (x , y) solution de ce système est le couple $\left(\frac{\ln 2}{2}, 1 + \ln 3\right)$.

c) $\begin{cases} e^x e^y = 5 \\ xy = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x+y} = 5 \\ xy = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \ln 5 \\ xy = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Les solutions de ce système sont les solutions de l'équation de degré deux : $X^2 - X(\ln 5) + \frac{1}{2} = 0$.

Son discriminant est : $\Delta = \ln^2(5) - 2$. Ce discriminant est strictement positif ($\Delta \approx 0{,}59$).

On a donc : $X = \frac{\ln(5) - \sqrt{\ln^2(5) - 2}}{2}$ ou $X = \frac{\ln(5) + \sqrt{\ln^2(5) - 2}}{2}$.

D'où les couples solutions du système sont :

$$\left(\frac{\ln(5) - \sqrt{\ln^2(5) - 2}}{2}, \frac{\ln(5) + \sqrt{\ln^2(5) - 2}}{2}\right) \text{ et } \left(\frac{\ln(5) + \sqrt{\ln^2(5) - 2}}{2}, \frac{\ln(5) - \sqrt{\ln^2(5) - 2}}{2}\right).$$

Scanned by CamScanner

C. Etudier les limites des fonctions faisant intervenir la fonction exponentielle

Exercice 13

Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f.

a) $f(x) = e^{5-x}$

b) $f(x) = e^{x^3-2x^2+3x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{e^{7-2x}}{5x}$

d) $f(x) = \dfrac{5x-2}{e^x+1}$

e) $f(x) = \dfrac{e^{x^5}-1}{x+1}$

f) $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x-5}$

g) $f(x) = (1-x)e^x$

h) $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x$

i) $f(x) = xe^{-x}$

j) $f(x) = x^2e^{-x} - x$

k) $f(x) = \dfrac{3e^{2x}+1}{e^{2x}-5}$.

Solution 13

a) • $\lim\limits_{x\to-\infty}(5-x) = +\infty$, alors d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}(5-x) = -\infty$, alors d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Point méthode :
Soit a et b appartenant à $\mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ et u une fonction définie au voisinage de a :
Pour calculer la limite de $e^{u(x)}$ quand x tend vers a :
- *on calcule d'abord la limite de u(x) quand x tend vers a.*
- *si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$, alors $\lim\limits_{x\to a} e^{u(x)} = \lim\limits_{x\to b} e^x$.*

b) • $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-2x^2+3x+1) = -\infty$, alors d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-2x^2+3x+1) = +\infty$, alors d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

c) • $\lim\limits_{x\to+\infty}(7-2x) = -\infty$, alors d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{7-2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{5x} = 0$, alors on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

• Pour tout $x \neq \dfrac{7}{2}$, on a $f(x) = \dfrac{e^{7-2x}}{5x} = \dfrac{e^{7-2x}}{7-2x} \times \dfrac{7-2x}{5x}$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7-2x}{5x} = -\dfrac{2}{5}$, et d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{7-2x}}{7-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

d) • $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x-2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x-2}{e^x+1} = -\infty$.

• Pour tout réel x, on a $f(x) = \dfrac{5x-2}{e^x+1} = \dfrac{x\left(5-\frac{2}{x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{x}{e^x} \times \dfrac{5-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{e^x}}$.

Point méthode :
Pour lever une indétermination du type $\dfrac{\infty}{\infty}$, on peut mettre en facteur au numérateur et au dénominateur, le terme le plus fort, et simplifier si possible (Notons pour tout nombre rationnel strictement positif r, e^x est plus fort que x^r).

Scanned by CamScanner

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5-\frac{2}{x}\right)=5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{e^x}}=5$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{e^x}\right)=0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

e) • $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x^5}-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-1)=-1$, et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$. D'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

• Pour tout réel x différent de -1, on a : $f(x)=\dfrac{e^{x^5}-1}{x+1}=\dfrac{e^{x^5}}{x^5}\times\dfrac{1-\frac{1}{e^{x^5}}}{1+\frac{1}{x}}\times x^4$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^5}}{x^5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^{x^5}}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^4=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

f) • $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-5)=-5$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x}+1)=1$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{1}{5}$.

• Pour tout réel x différent de ln5, on a : $f(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{e^x-5}=\dfrac{e^{2x}}{e^x}\times\dfrac{1+\frac{1}{e^{2x}}}{1-\frac{5}{e^x}}=e^x\times\dfrac{1+\frac{1}{e^{2x}}}{1-\frac{5}{e^x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)=1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

g) • $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

• Pour tout réel x, on a $f(x)=e^x-xe^x$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

h) Pour tout réel non nul x, $f(x)=\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{e^{-x}}{x}-2\right)$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{e^{-x}}{x}-2\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{e^{-x}}{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{e^x}{x}=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{e^{-x}}{x}-2\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$. D'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

i) • $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$,

donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

• Pour tout réel x, on a $f(x)=-(-xe^{-x})$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}-xe^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

j) Pour tout réel x, $f(x)=x(xe^{-x}-1)$.

Point méthode :

• Dans le calcul des limites, on ne cherchera à transformer l'écriture de la fonction que si l'on est devant une forme indéterminée. Donc il faudra d'abord chercher à calculer la limite sans transformer l'écriture de la fonction en utilisant les limites usuelles et « les opérations sur les limites ». Ce calcul pourra se faire mentalement.

• Si l'on rencontre une forme indéterminée du type $\infty-\infty$, on peut, pour la lever, mettre en facteur l'un des termes à l'origine (un des termes qui tendent vers ∞) de la forme indéterminée.

Scanned by CamScanner

Or d'après i), $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

k) • $\lim\limits_{x\to-\infty} (3e^{2x}+1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{2x}-5) = -5$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3e^{2x}+1}{e^{2x}-5} = -\dfrac{1}{5}$.

• Pour tout réel x différent de $\dfrac{\ln 5}{2}$, $f(x) = \dfrac{3e^{2x}+1}{e^{2x}-5} = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}} \times \dfrac{3+\frac{1}{e^{2x}}}{1-\frac{5}{e^{2x}}} = \dfrac{3+\frac{1}{e^{2x}}}{1-\frac{5}{e^{2x}}}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{e^{2x}}\right) = 3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{5}{e^{2x}}\right) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

Exercice 14

Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition de f :

a) $f(x) = e^{\frac{1}{2x+5}}$ b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ c) $f(x) = \sqrt{x}e^{-x^2}$.

Solution 14

a) soit x un nombre réel, f(x) existe si et seulement si $2x + 5 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -\dfrac{5}{2}$.

D'où l'ensemble de définition de f est : $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x+5} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{2x+5}} = \lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$. • $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2x+5} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{2x+5}} = \lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{5}{2} \\ <}} \dfrac{1}{2x+5} = -\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{5}{2} \\ <}} e^{\frac{1}{2x+5}} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

$\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{5}{2} \\ >}} \dfrac{1}{2x+5} = +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{5}{2} \\ >}} e^{\frac{1}{2x+5}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ = = $+\infty$.

b) f(x) existe si et seulement si $x \geq 0$ et $x - 1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \geq 0$ et $x \neq 1$.
Donc l'ensemble de définition de f est $[0, 1[\cup]1, +\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{x}} = 0$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Point méthode :
Soit a appartenant à $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, et u une fonction définie au voisinage de a ;
Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} u(x)e^{u(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Or $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} \dfrac{\sqrt{x}}{x-1} = +\infty$, alors $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$.

• Pour tout réel positif x, différent de 1, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = \sqrt{x} \times \dfrac{1}{x-1} \times e^{\frac{1}{x-1}}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \left(\dfrac{1}{x-1} \times e^{\frac{1}{x-1}}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$. Or $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \sqrt{x} = 1$, alors $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} f(x) = 0$.

Scanned by CamScanner

- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = f(0) = 0$.

c) Soit x un nombre réel, f(x) existe si et seulement si $x \geq 0$. Donc l'ensemble de définition de f est $[0, +\infty[$.

Soit $x \geq 0$, $f(x) = -(-\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}) \times e^{-x^2+\sqrt{x}}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} -\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

Et $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 + \sqrt{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\sqrt{x}(x\sqrt{x} - 1) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Finalement, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Autre méthode :

Soit $x \geq 0$, $f(x) = x^2 e^{-x^2} \times \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} -xe^x = 0$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 15

Déterminer la limite en 0 de f :

a) $f(x) = \dfrac{e^{3x}-1}{3x}$ b) $f(x) = \dfrac{e^{5x}-1}{x}$ c) $f(x) = \dfrac{e^{x^3}-1}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$ e) $f(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$.

Solution 15

a) $\lim\limits_{x \to 0} 3x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

b) Soit x réel non nul, $f(x) = 5 \times \dfrac{e^{5x}-1}{5x}$.

$\lim\limits_{x \to 0} 5x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x}-1}{5x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 5$.

Point méthode :

Soit a appartenant à $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et u une fonction définie au voisinage de a :

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$,

alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{e^{u(x)}-1}{u(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

c) Soit x un réel non nul, $f(x) = x^2 \times \dfrac{e^{x^3}-1}{x^3}$.

$\lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^3}-1}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

d) Soit x un réel différent de $k\pi$, k étant un entier relatif quelconque : $f(x) = \dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x} \times \dfrac{\sin x}{x}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$. Or $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

e) Pour tout réel x, $1 - \cos x = 1 - \cos\left(2 \times \dfrac{x}{2}\right) = 1 - \left(1 - 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) = 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Pour tout réel x différent de $k2\pi$, k étant un entier relatif quelconque.

$$f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \times \frac{x^2}{1-\cos x} = \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \times \frac{x^2}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \times \frac{\frac{x^2}{4}}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \times 2 = \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \times \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 \times 2.$$

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

Scanned by CamScanner

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2}=0$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}=1$. Alors $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2=1$.

Finalement, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$.

D. Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions faisant intervenir la fonction exponentielle

Exercice 16

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=xe^{-\frac{1}{x}}$, si $x>0$ et $f(0)=0$. Montrer que f est continue et dérivable en 0.

Solution 16

Continuité en 0 :

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}-\frac{1}{x}=-\infty$ donc, d'après le théorème de la composée sur les limites, on a : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}e^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=0$. Comme $f(0)=0$, alors f est continue en 0.

Dérivabilité en 0 :

Soit $x>0$, on a : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}e^{-\frac{1}{x}}=0$. D'où f est dérivable en 0 à droite et $f_d'(0)=0$.

Mais comme f n'est pas définie à gauche de 0, alors on dira que f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

E. Calculer les dérivées des fonctions faisant intervenir la fonction exponentielle

Exercice 17

Préciser l'ensemble de dérivabilité de f et calculer sa fonction dérivée dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=x^2e^{-x}$

2) $f(x)=e^{2x}\sin x$

3) $f(x)=\frac{2e^x-3x}{x^2+e^x}$

4) $f(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}}$

5) $f(x)=xe^{\frac{2x^2+3}{x^2+1}}$

6) $f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

7) $f(x)=\ln(e^x-1)$

8) $f(x)=e^{\frac{1}{x}\ln x}$

Solution 17

1) Pour tout réel x, on pose $u(x)=x^2$ et $v(x)=-x$. On a $f(x)=u(x)e^{v(x)}$.
Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=2x$ et $v'(x)=-1$.
Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=u'(x)e^{v(x)}+u(x)\times v'(x)e^{v(x)}=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$. Donc $f'(x)=(2-x)xe^{-x}$.

2) Pour tout réel x, on pose $u(x)=\sin x$ et $v(x)=2x$. On a $f(x)=u(x)e^{v(x)}$.
Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=\cos x$ et $v'(x)=2$.
Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=u'(x)e^{v(x)}+u(x)\times v'(x)e^{v(x)}=e^{2x}\cos x+2e^{2x}\sin x$.
Donc $f'(x)=e^{2x}(\cos x+2\sin x)$.

3) Pour tout réel x, on pose $u(x)=2e^x-3x$ et $v(x)=x^2+e^x$. On a : $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$.

Scanned by CamScanner

Notons que pour tout réel x, on a $x^2 \geq 0$ et $e^x > 0$, donc $v(x) > 0$ et alors f est définie sur $\mathbb{R}$.
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, car somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. $u'(x) = 2e^x - 3$ et $v'(x) = 2x + e^x$.
Pour tout réel x, on a $v(x) \neq 0$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{u'(x)\times v(x) - v'(x)\times u(x)}{v^2(x)} = \frac{(2e^x-3)(x^2+e^x)-(2e^x-3x)(2x+e^x)}{(x^2+e^x)^2} = \frac{(2x^2-x-3)e^x+3x^2}{(x^2+e^x)^2}.$$

4) Posons $u(x) = \frac{x}{x^2-1}$, alors $f(x) = e^{u(x)}$.

La fonction u est une fonction rationnelle définie pour x différent de 1 et -1, alors f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Pour tout réel x différent de -1 et 1, on a $u'(x) = \frac{1\times(x^2-1)-x\times 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$.

Donc pour tout réel x différent de -1 et 1, on a : $f'(x) = u'(x)\times e^{u(x)} = \left(\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}\right)e^{\frac{x}{x^2-1}}$.

5) On pose $u(x) = \frac{2x^2+3}{x^2+1}$ et $v(x) = x$ donc $f(x) = v(x)\times e^{u(x)}$.

La fonction u est rationnelle et définie sur $\mathbb{R}$, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $u'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

Les fonctions exponentielle, u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$f'(x) = v'(x)\times e^{u(x)} + v(x)\times u'(x)\times e^{u(x)} = 1\times e^{\frac{2x^2+3}{x^2+1}} - x\times\frac{2x}{(x^2+1)^2}\times e^{\frac{2x^2+3}{x^2+1}} = \left(1-\frac{2x^2}{(x^2+1)^2}\right)e^{\frac{2x^2+3}{x^2+1}}.$$

Finalement, $f'(x) = \left(\frac{x^4+1}{(x^2+1)^2}\right)e^{\frac{2x^2+3}{x^2+1}}$.

6) Posons $v(x) = \sqrt{x}$ et $u(x) = e^{\sqrt{x}}$, alors $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $]0, +\infty[$, et la fonction v ne s'annule pas sur cet intervalle donc la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, on a : $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$.

Donc : $f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)} = \frac{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2}-\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{2x\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$. D'où $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{2x\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$.

7) f est définie si et seulement si $e^x - 1 > 0$, c'est-à-dire $x > 0$.
Soit $x > 0$, posons $u(x) = e^x - 1$ et $v(x) = \ln x$. On a $f(x) = \ln(u(x))$.
u est dérivable et strictement positive sur $]0, +\infty[$, donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a :

$u'(x) = e^x$ et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{e^x}{e^x-1}$.

8) La fonction f est définie si et seulement si $x > 0$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, donc la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

La fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$. Le produit de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, donc la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\ln x + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\left(1-\ln x\right)$.

Scanned by CamScanner

F. Calculer les primitives des fonctions faisant intervenir la fonction exponentielle

Exercice 18

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$, de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto e^{-x+3}$ b) $f : x \mapsto e^{2x}$ c) $f : x \mapsto (-2x+3)e^{-x^2+3x-1}$

d) $f : x \mapsto 3xe^{x^2-1}$ e) $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{3e^x+2}$

Solution 18

Point méthode :
Une primitive de la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{a}e^{ax+b}$.

a) Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -e^{-x+3}$.

b) Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x}$.

c) Posons $u(x) = -x^2 + 3x - 1$.
u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = -2x + 3$ et $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

D'où une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = e^{u(x)} = e^{-x^2+3x-1}$.

d) Posons $u(x) = x^2 - 1$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = 2x$, donc $f(x) = \dfrac{3}{2}(2xe^{x^2-1}) = \dfrac{3}{2}u'(x)e^{u(x)}$ pour tout réel x.

D'où une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{3}{2}e^{u(x)} = \dfrac{3}{2}e^{x^2-1}$.

e) Posons $u(x) = 3e^x + 2$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = 3e^x$.

$f(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3e^x}{3e^x+2} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ pour tout réel x. Puisque pour tout réel x, on a $3e^x + 2 > 0$, alors une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \dfrac{1}{3}\ln(u(x)) = \dfrac{1}{3}\ln(3e^x + 2)$.

Exercice 19

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$.

Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$ (On peut écrire $f(x) = 1 - g(x)$, où g est une fonction à déterminer).

Solution 19

Supposons $f(x) = 1 - g(x)$, alors $g(x) = 1 - f(x) = 1 - \dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{e^x}{e^x+1}$. D'où $f(x) = 1 - \dfrac{e^x}{e^x+1}$.

Posons $u(x) = e^x + 1$, u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $u(x) > 0$ et $u'(x) = e^x$.

$\dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}$ est la fonction $x \mapsto \ln(u(x)) = \ln(e^x + 1)$.

Donc une primitive de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x - \ln(e^x + 1)$.
Et les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions G définies sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = x - \ln(e^x + 1) + k$, où k est une constante réelle.

Exercice 20

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{(e^x+2)^2}$.

1)a) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x différent de -2 : $\dfrac{1}{(x+2)^2} = a + \dfrac{bx}{x+2} + \dfrac{cx}{(x+2)^2}$.

Scanned by CamScanner

b) En déduire une autre écriture de f(x).
2) Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de f.

Solution 20

1)a) Soit x un nombre réel différent de -2, on a :

$$a+\frac{bx}{x+2}+\frac{cx}{(x+2)^2}=\frac{a(x+2)^2+bx(x+2)+cx}{(x+2)^2}=\frac{(a+b)x^2+(4a+2b+c)x+4a}{(x+2)^2}.$$

Ainsi, $\frac{1}{(x+2)^2}=a+\frac{bx}{x+2}+\frac{cx}{(x+2)^2}$ équivaut à $\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{(a+b)x^2+(4a+2b+c)x+4a}{(x+2)^2}$ pour $x\neq -2$

C'est-à-dire pour tout $x\neq -2$, $(a+b)x^2+(4a+2b+c)x+4a=1$.

Ce qui signifie $\begin{cases} a+b=0 \\ 4a+2b+c=0 \\ 4a=1 \end{cases}$. Donc $a=\frac{1}{4}$, $b=-a=-\frac{1}{4}$ et $c=-4a-2b=-\frac{1}{2}$.

Finalement, pour tout réel x différent de -2, on a : $\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{x+2}\right)-\frac{1}{2}\frac{x}{(x+2)^2}$.

b) Pour tout réel x, on a e^x différent de -2, donc : $\frac{1}{(e^x+2)^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{e^x}{e^x+2}\right)-\frac{1}{2}\frac{e^x}{(e^x+2)^2}$.

2) Posons $u(x)=e^x+2$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $u'(x)=e^x$ et : $\frac{1}{(e^x+2)^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{u'(x)}{u(x)}\right)-\frac{1}{2}\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$.

Donc une primitive de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\ln(u(x))-\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{u(x)}\right)$.

D'où $F(x)=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\ln(e^x+2)+\frac{1}{2(e^x+2)}$.

Les primitives de f sont donc les fonctions G définies sur $\mathbb{R}$ par : $G(x)=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\ln(e^x+2)+\frac{1}{2(e^x+2)}+k$, où k est une constante réelle.

Exercice 21

F est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x^2-4)e^{2x}$

1) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{2x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.

2) Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui s'annule en 0

Solution 21

1) F est dérivable sur $\mathbb{R}$, car produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

Ainsi, F est une primitive de f si et seulement si, pour tout réel x, $F'(x)=f(x)$.

Or $F'(x)=(2ax+b)e^{2x}+2(ax^2+bx+c)e^{2x}=(2ax^2+(2a+2b)x+b+2c)e^{2x}$, alors :

$F'=f$ si et seulement si, pour tout réel x, $(2ax^2+(2a+2b)x+b+2c)e^{2x}=(x^2-4)e^{2x}$.

C'est-à-dire $2ax^2+(2a+2b)x+b+2c=x^2-4$, pour tout réel x.

Donc $2a=1$ et $2a+2b=0$ et $b+2c=-4$, soit $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$ et $c=-\frac{7}{4}$.

Finalement F est une primitive de f si et seulement si $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=-\frac{7}{4}$ et $F(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}\right)e^{2x}$.

2) La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}\right)e^{2x}$ est une primitive de f.

Scanned by CamScanner

Donc les primitives de f sont les fonctions G définies sur $\mathbb{R}$ par : $G(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}\right)e^{2x}+k$, où k est une constante réelle.Or G(0) = 0 signifie $-\frac{7}{4}+k=0$. C'est-à-dire $k=\frac{7}{4}$.

Finalement, la primitive de f qui s'annule pour x = 0 est la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}\right)e^{2x}+\frac{7}{4}.$$

G. Etudier les fonctions faisant intervenir la fonction exponentielle

Exercice 22

Etudier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\ln(1+e^{-x})$ et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

En déduire la courbe représentant la fonction définie par : $g(x)=\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$ (on pourra calculer f(x) + g(x)).

Solution 22

- f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a : $f'(x)=-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}<0$.

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=\lim\limits_{x\to1}\ln x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+e^{-x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		−	
f(x)	$+\infty$	↘	0

Branche infinie en - ∞ :

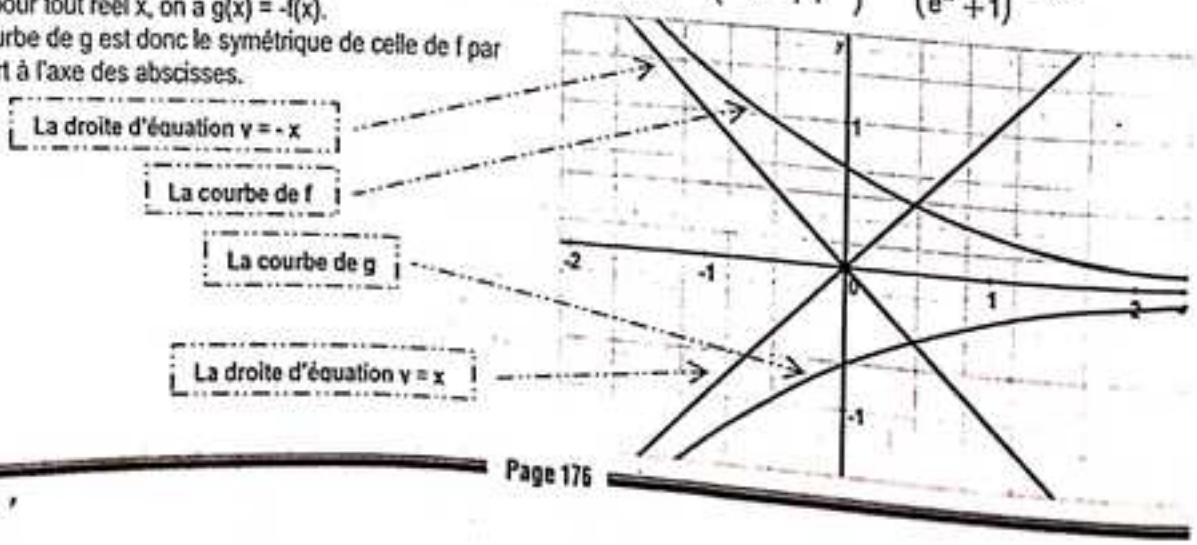
Soit x un nombre réel, $f(x)=\ln(e^{-x}(e^x+1))=\ln e^{-x}+\ln(e^x+1)=-x+\ln(e^x+1)$. Donc $f(x)+x=\ln(e^x+1)$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1)=1$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)=\lim\limits_{x\to1}\ln x=0$. D'où $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=0$.

Finalement, la droite d'équation y = -x est asymptote oblique à la courbe de f en $-\infty$.

- Soit x un nombre réel, on a : $f(x)+g(x)=\ln(1+e^{-x})+\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)=\ln\left(\frac{e^x(1+e^{-x})}{e^x+1}\right)=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x+1}\right)=0$.

D'où pour tout réel x, on a g(x) = -f(x).
La courbe de g est donc le symétrique de celle de f par rapport à l'axe des abscisses.



Scanned by CamScanner

Exercice 23

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - 2e^x - 3$.

1) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $f(x) = 0$.

2) Etudier les variations de f. Que peut-on dire de la droite d'équation $y = -3$?

Tracer la courbe (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Solution 23

1) Posons $X = e^x$, l'équation devient alors $X^2 - 2X - 3 = 0$, avec $X > 0$. C'est-à-dire $X = 3$. Et par conséquent, $x = \ln 3$.

2) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a $f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1)$.

On remarque que le signe de $f'(x)$ est celui de $e^x - 1$.

Or $e^x - 1 > 0$ si et seulement si $x > 0$ et $e^x - 1 = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Alors on a $f' > 0$ sur $]0 , +\infty[$ et $f' < 0$ sur $]-\infty , 0[$, avec $f'(0) = 0$.

f est donc strictement croissante sur $]0 , +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty , 0]$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (e^{2x} - 2e^x - 3) = \lim_{x \to +\infty} (e^x(e^x - 2) - 3) = +\infty .$$

D'où le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	-3	↘	-4	↗	$+\infty$

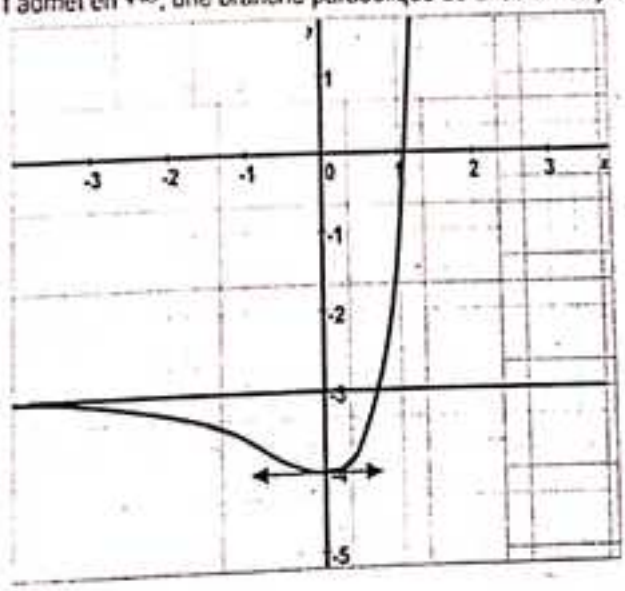
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3$, donc la droite d'équation $y = -3$ est asymptote horizontale à la courbe de f.

Etudions la branche infinie en $+\infty$:

Soit x un nombre réel non nul, on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x}(e^x - 2) - \frac{3}{x}$.

Or $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} (e^x - 2) = +\infty$, donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Finalement, la courbe de f admet en $+\infty$, une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.



Exercice 24

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 - e^x$.

Etudier les variations de f et tracer sa courbe (C) dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C).

2) A chaque nombre réel λ, on associe la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_\lambda(x) = \lambda(x + 1) - e^x$.

Scanned by CamScanner

On note (C_λ) sa courbe dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles f_λ admet un maximum.

b) Soit M_λ le point d'ordonnée maximale de (C_λ).

Démontrer que M_λ appartient à la courbe d'équation $y = xe^x$.

Solution 24

1) • f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Et pour tout réel x, on a $f'(x) = 1 - e^x$.

On a $1 - e^x < 0$ si et seulement si $e^x > 1$. C'est-à-dire $x > 0$. Or $1 - e^x = 0$ si et seulement si $x = 0$.

D'où Si $x > 0$, alors $f'(x) < 0$ et si $x < 0$, alors $f'(x) > 0$.

Finalement, f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+1-e^x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \text{ d'où } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{e^x}{x}\right) = -\infty.$$

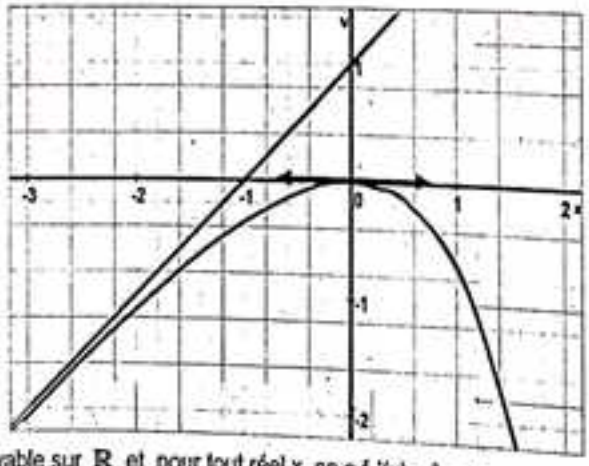
D'où le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} (f(x)-(x+1)) = \lim_{x\to-\infty} -e^x = 0$, d'où la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de f.
- **Etudions la branche infinie en $+\infty$:**

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}-\frac{e^x}{x}\right) = -\infty$, d'où la courbe de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique, l'axe des ordonnées.

La courbe (C) de f :



2) a) La fonction f_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f_\lambda'(x) = \lambda - e^x$.

- Si $\lambda \leq 0$, alors pour tout réel x, $f_\lambda'(x) < 0$. f_λ est alors strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. f_λ n'a pas d'extremum.
- Si $\lambda > 0$, $\lambda - e^x = 0$ si et seulement si $x = \ln\lambda$.

Et on a $f_\lambda'(x) < 0$ si et seulement si $x > \ln\lambda$ et $f_\lambda'(x) > 0$ si $x < \ln\lambda$.

D'où le tableau de variation de f_λ :

x	$-\infty$		$\ln\lambda$		$+\infty$
$f_\lambda'(x)$		+	0	-	
$f_\lambda(x)$	$-\infty$	↗	$\lambda\ln\lambda$	↘	$-\infty$

f_λ admet donc un maximum au point d'abscisse $\ln\lambda$.

Donc, f_λ admet un maximum si et seulement si $\lambda > 0$. Ce maximum est $f_\lambda(\ln\lambda) = \lambda\ln\lambda$ et est atteint pour $x = \ln\lambda$.

Scanned by CamScanner

b) M_λ a pour coordonnées $(\ln\lambda , \lambda\ln\lambda)$.

Or, $(\ln\lambda)e^{\lambda\ln\lambda} = (\ln\lambda)\lambda = \lambda\ln\lambda$, alors M_λ appartient à la courbe d'équation $y = xe^x$.

Exercice 25

Soit f la fonction définie pour tout x réel par : $f(x) = (1 - x)\,e^x$.

1)a) Etudier les variations de la fonction f et la représenter dans un repère orthonormé.

b) Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie par $F(x) = (ax + b)e^x$ soit une primitive de f.

2) Représenter graphiquement la fonction g, dans les cas suivants :

a) $g(x) = |1 - x|e^x$ b) $g(x) = f(|x|)$.

Solution 25

1)a) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car produit de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Et pour tout réel x, $f'(x) = -e^x + (1 - x)e^x = -xe^x$.

Pour tout réel x, on a $e^x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-x$.

Donc, f est strictement croissante sur $]-\infty , 0]$ et strictement décroissante sur $[0 , +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Pour tout réel x, $f(x) = e^x - xe^x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

On a le tableau de variation de f qui suit :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	1	↘	$-\infty$

Soit x réel non nul, $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)e^x$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - 1\right) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

D'où la courbe de f admet en $+\infty$, une branche parabolique de direction asymptotique celle de l'axe des ordonnées.

b) F est une primitive de f si est seulement si, pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$.

Or $F'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$ et $f(x) = (1 - x)e^x$, donc par identification, $a = -1$ et $a + b = 1$.

C'est-à-dire $a = -1$ et $b = 2$. Et $F(x) = (-x + 2)e^x$.

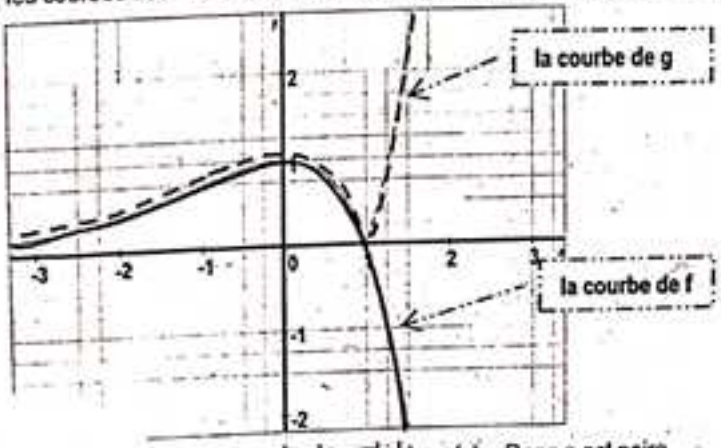
2) a) Pour tout réel x, $g(x) = |1 - x|\,e^x$.

Si x appartient à $]-\infty , 1]$, $g(x) = (1 - x)e^x = f(x)$. (car $1 - x > 0$)

Si x appartient à $[1 , +\infty[$, $g(x) = (x - 1)e^x = -f(x)$. (car $1 - x < 0$).

Donc, dans l'intervalle $]-\infty , 1]$, les courbes des restrictions de f et g sont confondues.

Dans l'intervalle $[1 , +\infty[$, les courbes des restrictions de f et g sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

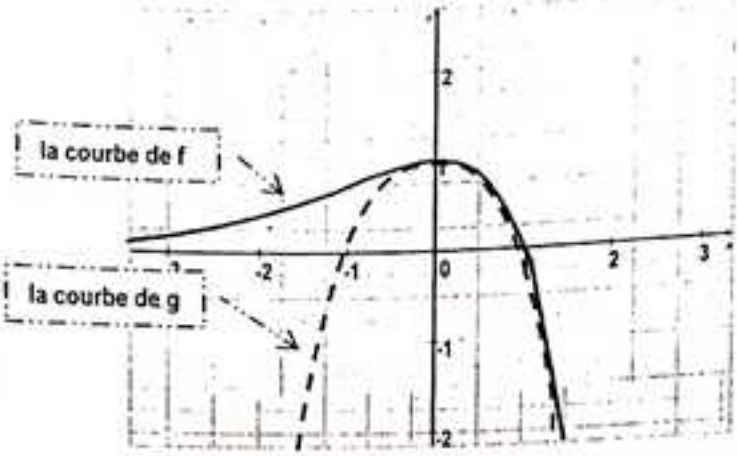


b) Pour tout réel x, $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$. Donc g est paire.

Or pour tout $x \geq 0$, $g(x) = f(x)$, donc les courbes des restrictions de f et g à l'intervalle $[0 , +\infty[$ sont confondues.

Et la courbe des de g est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Scanned by CamScanner



Exercice 26

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

a) Etudier les variations de f. Pour calculer la limite quand x tend vers $+\infty$, on pourra diviser les termes du quotient par e^x.

b) Démontrer que f est impaire.

c) Tracer la courbe (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 4cm).

d) Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

En remarquant que $2g(x) - f(x) = 1$, en déduire une primitive F de f.

e) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.
Résoudre l'équation d'inconnue y : $f(y) = x$. En déduire la fonction réciproque de f.

Solution 26

a) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$f'(x)=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}=\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}>0$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=-1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=1$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

D'où le tableau de variation de f est :

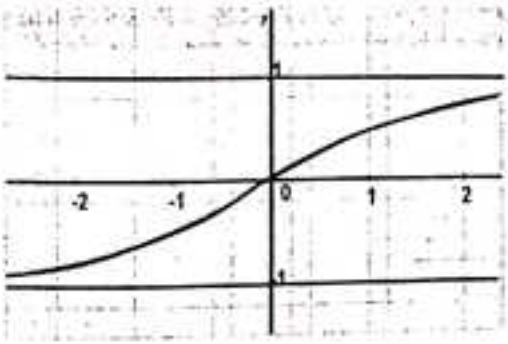
x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	-1	↗	1

b) Soit x est réel, donc $-x$ est un réel, on a : $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=\dfrac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}=-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$.

D'où f est impaire.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, donc les droites d'équations $y = -1$ et $y = 1$ sont asymptotes à la courbe de f en $-\infty$ et en $+\infty$ respectivement.

Scanned by CamScanner



d) • Une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est la fonction $x \mapsto \ln(e^x + 1)$.

• Soit x un nombre réel, $2g(x) - f(x) = 2 \times \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{2e^x - (e^x - 1)}{e^x+1} = \frac{e^x+1}{e^x+1} = 1$.

• Soit x un nombre réel, on a $2g(x) - f(x) = 1$, alors $f(x) = 2g(x) - 1$.

D'où une primitive de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = 2\ln(e^x + 1) - x$.

e) • f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$.

• Soit y dans $\mathbb{R}$ et x dans $]-1, 1[$. $f(y) = x$ équivaut à $\frac{e^y - 1}{e^y + 1} = x$. C'est-à-dire $e^y - 1 = x(e^y + 1)$.

Ce qui signifie $e^y(1 - x) = x + 1$. Ce qui équivaut à $e^y = \frac{1+x}{1-x}$. Finalement, $y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

• D'où la réciproque de f est l'application f^{-1} définie de $]-1, 1[$ vers $\mathbb{R}$ par : $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 27

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - \frac{1}{e^x - 1}$ et g la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$.

(C) et (Γ) sont respectivement les courbes de f et g dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

a) Etudier la fonction f.

b) Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif x, on a : $f(x) < g(x)$.

c) Soient respectivement M et N les points de même abscisse x des courbes (C) et (Γ), calculer la distance MN en fonction de x.

Calculer la limite de $f(x) - g(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

d) Tracer (C) et (Γ).

Solution 27

a) f(x) existe si et seulement si $e^x - 1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 0$.

D'où f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout réel x, on a : $f'(x) = e^x + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} > 0$.

D'où f est strictement croissante sur chacun des intervalles où elle est définie.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

• Pour $x < 0$, on a $e^x - 1 < 0$ et pour $x > 0$, on a $e^x - 1 > 0$.

Comme $\lim\limits_{x \to 0} (e^x - 1) = 0$, alors on a : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$.

D'où le tableau de variation de f :

Scanned by CamScanner

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	‖	+	
f(x)	1	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

b) Soit $x > 0$, on a $e^x - 1 > 0$. D'où $f(x) - g(x) = -\dfrac{1}{e^x - 1} < 0$.

Par conséquent, on a pour tout nombre réel strictement positif x, $f(x) < g(x)$.

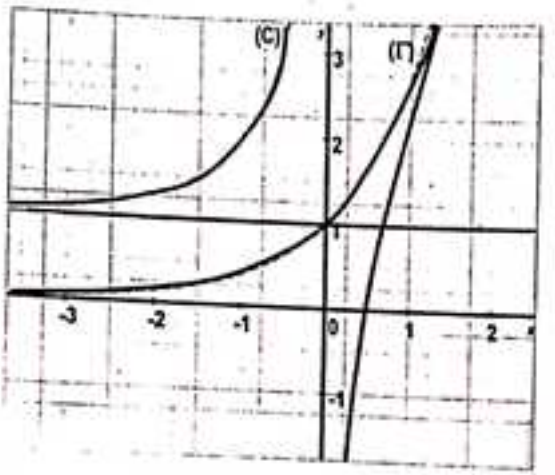
c) • Soit x un nombre réel non nul, on a : $MN = |f(x) - g(x)| = \dfrac{1}{|e^x - 1|}$.

Ainsi, si $x < 0$, alors $MN = -\dfrac{1}{e^x - 1}$ et si $x > 0$, alors $MN = \dfrac{1}{e^x - 1}$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{e^x - 1} = 0$.

On peut alors conclure que les courbes (C) et (Γ) sont asymptotes l'une de l'autre en $+\infty$.

d)



Exercice 28

Etudier les deux fonctions f et g suivantes, de la variable réelle : $f : x \mapsto \ln|e^x - 1|$ et $g : x \mapsto \ln(e^x + 1)$.

Tracer les courbes représentatives F et G de f et g dans un repère orthonormé.

Solution 28

Etude de f :

f existe si et seulement si $e^x - 1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 0$. D'où :

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout réel non nul x, on a : $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

Le signe de f '(x) sur son ensemble de définition est celui de $e^x - 1$. Or $e^x - 1 > 0$ si et seulement si $x > 0$.
Donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$.

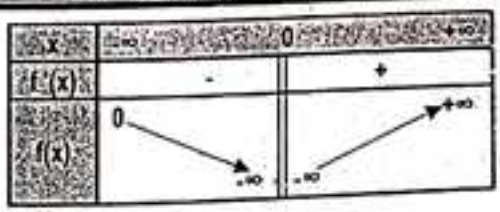
$\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - 1) = -1$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - 1) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0} (e^x - 1) = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$.

D'où le tableau de variations de f est le suivant :

Scanned by CamScanner



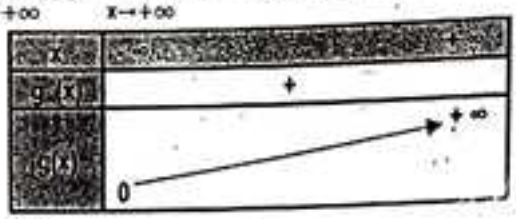
Etude de g :

Pour tout réel x, on a $e^x + 1 > 0$. D'où g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a :

$g'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1} > 0$. Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + 1) = 1$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x + 1) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$. D'où le tableau de variation de g est le suivant



Etude des branches infinies en +∞ :

- Soit $x > 0$, on a $f(x) = \ln(e^x - 1) = \ln(e^x(1 - e^{-x})) = \ln e^x + \ln(1 - e^{-x}) = x + \ln(1 - e^{-x})$. donc $f(x) - x = \ln(1 - e^{-x})$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 - e^{-x}) = \lim \ln x = 0$

D'où la droite d'équation y = x est asymptote oblique à la courbe de f en +∞.

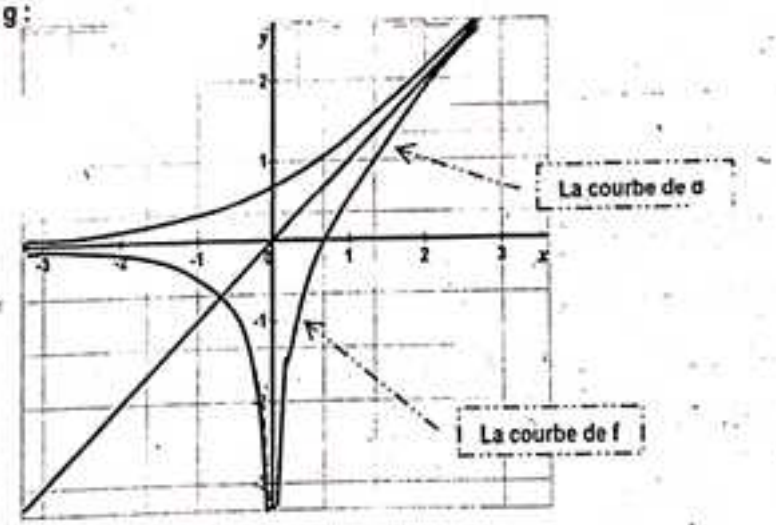
- Soit x un nombre réel, on a $g(x) = \ln(e^x + 1) = \ln(e^x(1 + e^{-x})) = \ln e^x + \ln(1 + e^{-x}) = x + \ln(1 + e^{-x})$.

Donc $g(x) - x = \ln(1 + e^{-x})$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + e^{-x}) = 1$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - x) = \lim \ln(1 + e^{-x}) = \lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0$.

D'où la droite d'équation y = x est asymptote oblique à la courbe de g en +∞.

Les courbes de f et g :



Exercice 29

1) Etudier la variation de la fonction f définie par : $f : x \mapsto e^x + x(\ln x - 1 - e)$.

On pourra préciser le signe de f ''(x) pour étudier le signe de f '(x).

2) Construire, dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, l'unité de longueur étant le centimètre, la courbe (C) représentant la fonction f.

3) Soit $g(x) = x^2 \ln x - x$. Calculer g'(x). En déduire une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

Scanned by CamScanner

Solution 29

1) • f(x) existe si et seulement si $x > 0$. L'ensemble de définition de f est donc $]0, +\infty[$.

• f est somme et produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$, donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = e^x + \ln x - 1 - e + x \times \frac{1}{x} = e^x + \ln x - e$.

f ' est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, on a : $f''(x) = e^x + \frac{1}{x} > 0$.

Donc f ' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $f'(1) = 0$.
Alors si $0 < x < 1$, on a $f'(x) < f'(1)$. C'est-à-dire $f'(x) < 0$.
Et si $x > 1$, on a $f'(x) > f'(1)$. C'est-à-dire $f'(x) > 0$.

• D'où f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

• Pour tout $x > 0$, on a $f(x) = e^x + x\ln x - (1 + e)x$. D'où $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\ln x - 1 - e) = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

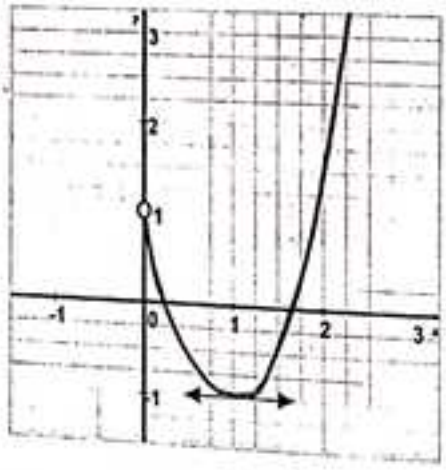
x	0	1	$+\infty$
f'(x)		- 0 +	
f(x)	1	↘ -1 ↗	$+\infty$

2) Etudions la branche infinie en $+\infty$:

Soit $x > 0$, on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x} + (\ln x - 1 - e)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x - 1 - e = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

La courbe de f admet en $+\infty$, une branche parabolique de direction asymptotique, l'axe des ordonnées



3) • g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, on a :

$g'(x) = 2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x} - 1 = 2x\ln x + x - 1$.

• D'où $x\ln x = \frac{1}{2}(g'(x) - x + 1)$.

Et donc $f(x) = e^x + x\ln x - (1+e)x = e^x + \frac{1}{2}(g'(x) - x + 1) - (1+e)x$.

Une primitive de f est la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par : $F(x) = e^x + \frac{1}{2}\left(g(x) - \frac{1}{2}x^2 + x\right) - \frac{1}{2}(1+e)x^2$.

Soit $F(x) = e^x + \frac{1}{2}\left(g(x) - \frac{1}{2}x^2 + x\right) - \frac{1}{2}(1+e)x^2 = e^x + \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}(3+2e)x^2$.

Exercice 30

Etudier la variation de la fonction f définie par : $f(x) = x - \frac{1}{2}\ln\left|2e^x - 1\right|$.

On pourra écrire $2e^x - 1 = e^x(2 - e^{-x})$.
Construire, dans un plan rapporté à un repère orthonormal, la courbe représentant la variation de la fonction f. (On tracera les asymptotes de cette courbe).

Solution 30

• f(x) existe si et seulement si $2e^x - 1 \neq 0$. C'est-à-dire $x \neq \ln\frac{1}{2}$.

Scanned by CamScanner

D'où f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}-\left\{\ln\frac{1}{2}\right\}$, et pour tout réel x différent de $\ln\frac{1}{2}$, on a :

$$f'(x)=1-\frac{e^x}{2e^x-1}=\frac{e^x-1}{2e^x-1}.$$

Résolvons l'inéquation f'(x) < 0 :
Posons $X = e^x$. On a : $X > 0$.

L'inéquation devient $\frac{X-1}{2X-1}<0$, c'est-à-dire X appartient $\left]\frac{1}{2},1\right[$ *(le lecteur fera un tableau de signe de* $\frac{X-1}{2X-1}$*)*.

Alors $\frac{e^x-1}{2e^x-1}<0$ si et seulement si, e^x appartient à $\left]\frac{1}{2},1\right[$. C'est-à-dire x appartient à $\left]\ln\frac{1}{2},0\right[$.

D'où f est strictement croissante sur $\left]-\infty,\ln\frac{1}{2}\right[$ et $]0,+\infty[$, et strictement décroissante sur $\left]\ln\frac{1}{2},0\right[$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2e^x+1)=1$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left|2e^x-1\right|=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(-2e^x+1)=\lim\limits_{x\to1}\ln x=0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

- Soit $x>\ln\frac{1}{2}$, $f(x)=x-\frac{1}{2}\ln(2e^x-1)=x-\frac{1}{2}\ln(e^x(2-e^{-x}))=x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln(2-e^{-x})=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln(2-e^{-x})$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2-e^{-x})=\ln2$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to\ln\frac{1}{2}}(2e^x-1)=0$, donc $\lim\limits_{x\to\ln\frac{1}{2}}\ln\left|2e^x-1\right|=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty$. Par conséquent $\lim\limits_{x\to\ln\frac{1}{2}}f(x)=+\infty$.

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
f'(x)		+	‖	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

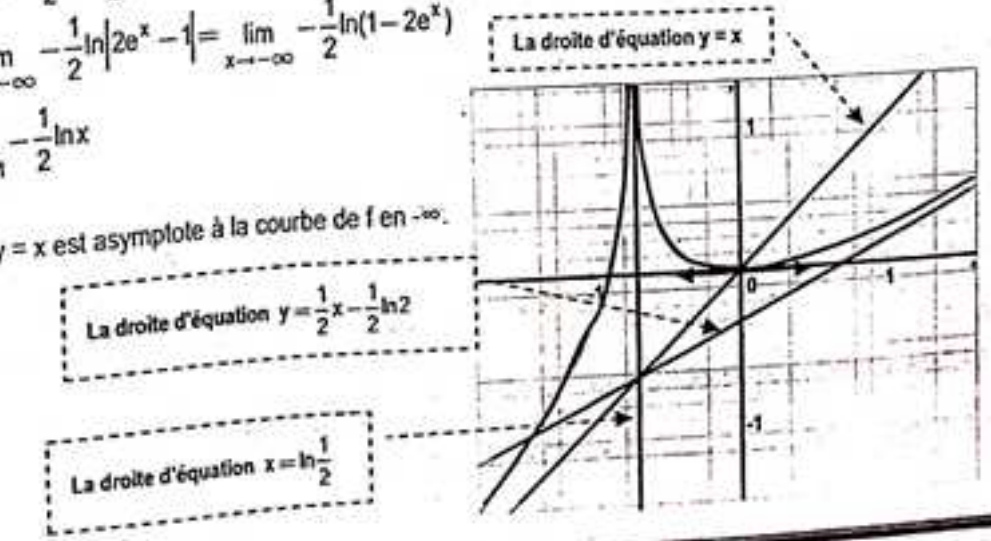
Etudions les branches infinies en $+\infty$ et en $-\infty$:

- Soit $x>\ln\frac{1}{2}$, $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln(2-e^{-x})$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\frac{1}{2}x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{2}\ln(2-e^{-x})=\lim\limits_{x\to2}-\frac{1}{2}\ln x=-\frac{1}{2}\ln2$

D'où la droite d'équation $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln2$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}\ln\left|2e^x-1\right|=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}\ln(1-2e^x)$
  $=\lim\limits_{x\to1}-\frac{1}{2}\ln x$
  $=0$

D'où la droite d'équation y = x est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.



Scanned by CamScanner

H. Etudier d'autres fonctions exponentielles et les fonctions puissances réelles

1 – Calculer

Exercice 31

Ecrire plus simplement les nombres suivants :

1) $a = 3^{0,7} \times 3^{-4,6} \times 3^{1,2}$ $\quad b = \dfrac{9^{-1,7}}{3^{4,8}}$

2) $a = \dfrac{x^{2,01}}{x^{6,1}}$ $\quad b = (x^{2,3})^{0,25}$. Où x est un réel strictement positif.

Solution 31

1) $a = 3^{0,7-4,6+1,2} = 3^{-2,7}$ $\quad b = \dfrac{(3^2)^{-1,7}}{3^{4,8}} = \dfrac{3^{-3,4}}{3^{4,8}} = 3^{-3,4-4,8} = 3^{-8,2}$.

2) $a = \dfrac{x^{2,01}}{x^{6,1}} = x^{2,01-6,1} = x^{-4,09}$ $\quad b = x^{2,3\times 0,25} = x^{0,575}$

2 – Résoudre les équations et inéquations

Exercice 32

Résoudre les équations suivantes :

a) $x^{\pi} = 2$ $\quad$ b) $(2x+3)^{1,5} = 1$ $\quad$ c) $3^x = 5^{3x+2}$

d) $25^x - 5^x - 2 = 0$ $\quad$ e) $2^{1+x} + 3\times 2^{-x} = 7$.

Solution 32

a) $x^{\pi} = 2$ équivaut à $x = 2^{\frac{1}{\pi}} = e^{\frac{1}{\pi}\ln 2}$.

b) $(2x+3)^{1,5} = 1$ équivaut à $2x + 3 = 1$. Soit $x = -1$.

c) $3^x = 5^{3x+2}$ équivaut à $e^{x\ln 3} = e^{(3x+2)\ln 5}$. Ce qui signifie que $x\ln 3 = (3x+2)\ln 5$.

C'est-à-dire $x(3\ln 5 - \ln 3) = -2\ln 5$. Finalement, $x = -\dfrac{2\ln 5}{3\ln 5 - \ln 3}$.

d) $25^x - 5^x - 2 = 0$ équivaut à $(5^x)^2 - 5^x - 2 = 0$.

On pose $X = 5^x$, l'équation devient $X^2 - X - 2 = 0$ avec $X > 0$. Ce qui équivaut à $X = 2$.

Ainsi, $25^x - 5^x - 2 = 0$ équivaut à $5^x = 2$. Finalement, $x = \log_5 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 5}$.

e) $2^{1+x} + 3\times 2^{-x} = 7 \Leftrightarrow 2\times 2^x + 3\times\dfrac{1}{2^x} - 7 = 0 \Leftrightarrow 2\times(2^x)^2 - 7\times 2^x + 3 = 0$.

On pose alors $X = 2^x$ et l'équation devient $2X^2 - 7X + 3 = 0$ avec $X > 0$. Ce qui équivaut à $X = 3$ ou $X = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $2^{1+x} + 3\times 2^{-x} = 7$ équivaut à $2^x = 3$ ou $2^x = \dfrac{1}{2}$. Finalement, $x = \log_2(3) = \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ ou $x = \dfrac{\ln\frac{1}{2}}{\ln 2} = -1$.

Les solutions de cette équation sont alors : - 1 et $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$.

Exercice 33

Résoudre dans $\mathbf{R}$ les inéquations :

a) $3^{-x} < 3^{2x}$ $\quad$ b) $2 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^x > 1$ $\quad$ c) $2^x \geq 4$ $\quad$ d) $x^x > 4$.

Scanned by CamScanner

Solution 33

a) $3^{-x} < 3^{2x}$ équivaut à $-x < 2x$. C'est-à-dire $x > 0$. D'où l'ensemble solution de cette inéquation est $]0, +\infty[$.

b) $2-\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1$ équivaut successivement à $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 1$, puis à $e^{-x\ln 3} < 1$, puis à $-x\ln 3 < 0$ et enfin on a $x > 0$.

D'où l'ensemble solution de cette inéquation est $]0, +\infty[$.

c) $2^x \geq 4 \Leftrightarrow e^{x\ln 2} \geq 4 \Leftrightarrow x\ln 2 \geq \ln 4 \Leftrightarrow x\ln 2 \geq 2\ln 2$. Finalement, on a $x \geq 2$.

D'où l'ensemble solution de cette inéquation est : $[2, +\infty[$.

d) $x^\pi > 4 \Leftrightarrow e^{\pi \ln x} > 4 \Leftrightarrow \pi \ln x > \ln 4 \Leftrightarrow \ln x > \frac{2\ln 2}{\pi} \Leftrightarrow x > e^{\frac{2\ln 2}{\pi}}$.

D'où l'ensemble solution de cette inéquation est $\left]e^{\frac{2\ln 2}{\pi}}, +\infty\right[$.

Exercice 34

Soit $P(x) = -x^3 + 7x - 6$.

1) Ecrire le polynôme P(x) sous la forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.
En déduire le signe de P(x) sur $\mathbb{R}$.

2) Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$: $4^x - 7 \geq -6\times 2^{-x}$.

Solution 34

1) Comme $P(1) = 0$, alors on a $P(x) = (x-1)(-x^2 - x + 6)$.
Comme $P(2) = 0$, alors on a $P(x) = (x-1)(x-2)(-x-3)$.

Tableau de signe de P(x) :

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
x − 1		−		−	0	+		+	
x − 2		−		−		−	0	+	
−x − 3		+	0	−		−		−	
(x−1)(x−2)(−x−3)		+	0	−	0	+	0	−	

D'où : $P(x) = 0$ si $x = -3$ ou $x = 1$ ou $x = 2$.
$P(x) < 0$ si x appartient à $]-3, 1[\cup]2, +\infty[$.
$P(x) > 0$ si x appartient à $]-\infty, -3[\cup]1, 2[$.

2) $4^x - 7 \geq -6\times 2^{-x}$ équivaut à $(2^x)^2 - 7 \geq -\frac{6}{2^x}$. Ce qui signifie $(2^x)^3 - 7\times 2^x + 6 \geq 0$. C'est-à-dire $P(2^x) \leq 0$.

Comme $2^x > 0$, alors $P(2^x) \leq 0$ équivaut à 2^x appartient à $]0, 1] \cup [2, +\infty[$.
C'est-à-dire x appartient à $]-\infty, \log_2(1)] \cup [\log_2(2), +\infty[$. Finalement x appartient à $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$.
D'où l'ensemble solution de l'inéquation $4^x - 7 \geq -6\times 2^{-x}$ est $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$.

3 – Etudier les limites

Exercice 35

a étant un réel strictement positif, déterminer la limite de f en $+\infty$:

a) $f(x) = \frac{e^x}{x^a}$ b) $f(x) = \frac{x^x}{a^x}$ c) $f(x) = a^x - x^x$.

Solution 35

a) $\frac{e^x}{x^a} = \frac{e^x}{e^{a\ln x}} = e^{x - a\ln x} = e^{x\left(1 - a\frac{\ln x}{x}\right)}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\left(1 - a\frac{\ln x}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Scanned by CamScanner

b) $\frac{x^x}{a^x}=\frac{e^{x\ln x}}{e^{a\ln x}}=e^{x\ln x-x\ln a}=e^{x(\ln x-\ln a)}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln x-\ln a)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x(\ln x-\ln a)}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c) $f(x)=a^x-x^x=x^x\left(\frac{a^x}{x^x}-1\right)$.

Or d'après la question b), $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^x}{a^x}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x}{x^x}-1\right)=-1$.

De plus, $x^x=e^{x\ln x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^x=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln x}=+\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^x\left(\frac{a^x}{x^x}-1\right)=-\infty$.

Exercice 36

Déterminer la limite en 0 de f : a) $f(x)=\frac{5^x-1}{x}$ b) $f(x)=\frac{1-7^x}{5x}$.

Solution 36

a) $f(x)=\frac{5^x-1}{x}=\frac{e^{x\ln 5}-1}{x}$.

Soit $g(x)=e^{x\ln 5}$, g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de plus $g'(x)=e^{x\ln 5}\times\ln 5$. Donc $g'(0)=\ln 5$.

Donc $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=\ln 5$.

b) $f(x)=\frac{1-7^x}{5x}=-\frac{1}{5}\times\frac{7^x-1}{x}=-\frac{1}{5}\times\frac{e^{x\ln 7}-1}{x}$.

Soit $g(x)=e^{x\ln 7}$, g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de plus $g'(x)=e^{x\ln 7}\times\ln 7$.
Donc $g'(0)=\ln 7$.

Donc $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=\ln 7$. Et $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\frac{1}{5}\ln 7$.

4 – Déterminer les dérivées et les primitives

Exercice 37

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x\left(\frac{1}{2}x-1\right)2^{-x}$.

1) Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis déterminer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2) Montrer que, pour tout réel x, on a : $f''(x)+[1+2\ln 2]f'(x)+[\ln^2(2)+\ln 2]f(x)=x.2^{-x}$.

Solution 37

1) On a $f(x)=x\left(\frac{1}{2}x-1\right)2^{-x}=\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)2^{-x}$ et, les fonctions $x\mapsto x\left(\frac{1}{2}x-1\right)$ et $x\mapsto 2^{-x}$ étant dérivables sur $\mathbb{R}$, leur produit, c'est-à-dire f, est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et pour tout réel x, $f'(x)=(x-1)2^{-x}-(\ln 2)\times x\left(\frac{1}{2}x-1\right)\times 2^{-x}=\left[-\frac{\ln 2}{2}x^2+(1+\ln 2)x-1\right]\times 2^{-x}$ et

Scanned by CamScanner

$$f''(x)=(-x\ln 2+1+\ln 2)\times 2^{-x}-(\ln 2)\times\left[-\frac{\ln 2}{2}x^2+(1+\ln 2)x-1\right]2^{-x}$$

$$=\left[\frac{\ln^2 2}{2}x^2-\ln 2(2+\ln 2)x+2\ln 2+1\right]2^{-x}$$

Point méthode :

Soit $a>0$, la fonction $x\mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est : $x\mapsto a^x\ln a$.

2) On a pour tout réel x,

$$f''(x)+(1+2\ln 2)f'(x)+(\ln^2 2+\ln 2)f(x)=\left[\frac{\ln^2 2}{2}x^2-\ln 2(2+\ln 2)x+2\ln 2+1\right]2^{-x}$$

$$+(1+2\ln 2)\left[-\frac{\ln 2}{2}x^2+(1+\ln 2)x-1\right]2^{-x}+(\ln^2 2+\ln 2)\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\times 2^{-x}$$

$$=\left[\frac{\ln^2 2}{2}+\left(-\frac{\ln 2}{2}-\ln^2 2\right)+\left(\frac{\ln^2 2}{2}+\frac{\ln 2}{2}\right)\right]\times x^2 2^{-x}+[(-2\ln 2+1)-(1+2\ln 2)]\times 2^{-x}=x\cdot 2^{-x}.$$

D'où pour tout réel x, on a $f''(x)+[1+2\ln 2]f'(x)+[\ln^2(2)+\ln 2]f(x)=x.2^{-x}$.

Exercice 38

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x.5^{3x}$.

1) Montrer qu'il existe deux réels a et b vérifiant, pour tout réel x, $f''(x)+af'(x)+bf(x)=0$.

2) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Solution 38

1) La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$f'(x)=[3x\ln 5+1]\times 5^{3x}$ et $f''(x)=3\times 5^{3x}+3\times 5^{3x}(3x\ln 5+1)\ln 5=3(3x\ln 5+2)\times 5^{3x}\ln 5$.

On obtient alors : $f''(x)+af'(x)+bf(x)=[(3a\ln 5+b+9\ln^2 5)x+a+6\ln 5]\times 5^{3x}$. Ainsi :

$f''(x)+af'(x)+bf(x)=0$ équivaut à $\begin{cases}3a\ln 5+b+9\ln^2 5=0\\ a+6\ln 5=0\end{cases}$. Donc $b=9\ln^2 5$ et $a=-6\ln 5$.

2) Pour tout réel x, on a d'après la question 1), $f''(x)-6\ln 5\times f'(x)+9\ln^2 5\times f(x)=0$.

Ainsi, $f(x)=\frac{1}{9\ln^2 5}[-f''(x)+6\ln 5\times f'(x)]$. f et f ' sont des primitives sur $\mathbb{R}$ de f ' et f '' respectivement.

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\frac{1}{9\ln^2 5}[-f'(x)+6\ln 5\times f(x)]=\frac{3x\ln 5-1}{9\ln^2 5}\times 5^{3x}$ est alors une primitive de f.

Exercice 39

Déterminer une primitive de la fonction f telle que : $f(x)=[1+\ln x].x^x$.

On précisera l'ensemble de définition de f et de la primitive trouvée.

Solution 39

f (x) existe si et seulement si $x>0$. Et pour tout $x>0$, $f(x)=(1+\ln x)e^{x\ln x}$.

f est continue sur $]0,+\infty[$, donc f y admet des primitives.

Soit $x>0$, posons $u(x)=x\ln x$, on a : $u'(x)=1+\ln x$, donc $f(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

Alors une primitive de f est la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x)=e^{u(x)}=e^{x\ln x}=x^x$.

Exercice 40

Pour tout réel x, on pose :

$f(x)=(2x^2-5x+1).3^{-x}$ et $F(x)=(ax^2+bx+c).3^{-x}$.

Déterminer les réels a, b et c de façon que la fonction F soit une primitive de la fonction f.

Solution 40

F est dérivable sur $\mathbb{R}$, car produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc :

La fonction F est une primitive de f si et seulement si pour tout réel x, $F'(x)=f(x)$.

$F'(x)=f(x)$ si et seulement si $[(2ax+b)-(ax^2+bx+c)\ln 3]\times 3^{-x}=f(x)$.

Scanned by CamScanner

Ce qui signifie aussi - $ax^2\ln 3 + (2a - b\ln 3)x + b - c\ln 3 = 2x^2 - 5x + 1$. On procède par identification

$F'(x) = f(x)$ pour tout x, équivaut à $\begin{cases} -a\ln 3 = 2 \\ 2a - b\ln 3 = -5 \\ b - c\ln 3 = 1 \end{cases}$, puis à $\begin{cases} a = -\dfrac{2}{\ln 3} \\ b = \dfrac{5\ln 3 - 4}{\ln^2 3} \\ c = \dfrac{-\ln^2 3 + 5\ln 3 - 4}{\ln^3 3} \end{cases}$

On a donc, pour tout réel x, $F(x) = \left[-\dfrac{2}{\ln 3}x^2 + \dfrac{5\ln 3 - 4}{\ln^2 3}x - \dfrac{\ln^2 3 - 5\ln 3 + 4}{\ln^3 3} \right] \times 3^{-x}$.

Point méthode :
On peut montrer plus généralement qu'une primitive d'une fonction du type $x \mapsto P(x) \cdot a^x$, où P est un polynôme de degré n, est une fonction du type $x \mapsto Q(x) \cdot a^x$, avec Q fonction polynôme de degré n.

5 – Etudier les fonctions

Exercice 41

Partie A

Pour tout réel x appartenant à $]0, +\infty[$, on pose : $u(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

1) Etudier les limites de la fonction u aux bornes de son ensemble de définition.
2) Etudier les variations de u.

Partie B

Pour tout réel x de $[0, +\infty[$, on pose : $\begin{cases} f(x) = x^{\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

1) Montrer que la fonction f est continue en 0.
2) Montrer que la fonction f est dérivable en 0.
Préciser la demi-tangente, au point d'abscisse 0, à la courbe (C) de f.
3) Etudier la limite de f en $+\infty$, en donner une interprétation graphique.
4) Etudier les variations de la fonction f, puis faire le tableau de variation de f.

Partie C

Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 1.
1) Donner une équation de la tangente (T).
2) Etudier la position relative de (C) et (T).
3) Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Tracer la droite (T) et la courbe (C).

Solution 41

Partie A

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} u(x) = -\infty$.

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = 0$

2) u est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $u'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

Le signe de u'(x) est celui de $1 - \ln x$.
$u'(x) = 0$ si et seulement si $\ln x = 1$. C'est-à-dire $x = e$.
$u'(x) > 0$ si et seulement si $\ln x < 1$. C'est-à-dire $0 < x < e$.
D'où u est strictement décroissante sur $]e, +\infty[$ et strictement croissante sur $]0, e[$.
D'où le tableau de variations de u qui suit :

Scanned by CamScanner

x	0		e		$+\infty$
u'(x)		+	0	-	
u(x)		↗	e^{-1}	↘	
	$-\infty$				0

Partie B

1) Pour tout réel x, on a $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{u(x)}$

Or $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} u(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} e^{u(x)} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Finalement $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = 0 = f(0)$, donc f est continue en 0.

2) • Soit x réel strictement positif, on a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{e^{\ln x}} = e^{\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln x}$.

Puisque $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left(\dfrac{1}{x}-1\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\ln x = -\infty$.

Par suite, $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} e^{\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

0 étant un réel, f est dérivable en 0 et f '(0) = 0.

• La demi-tangente au point d'abscisse 0 à (C) est donc une demi-droite horizontale.

3) Pour tout réel x > 0, $f(x) = e^{u(x)}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{u(x)} = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$. Finalement, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, et donc la droite d'équation y = 1 est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

4) f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout x > 0, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Comme $e^{u(x)} > 0$, alors f '(x) et u'(x) ont le même signe. Et donc les fonctions f et u ont les mêmes sens de variation.

D'où f est strictement décroissante sur $]e, +\infty[$ et strictement croissante sur $[0, e[$.

D'où le tableau de variations de f qui suit :

x	0		e		$+\infty$
f'(x)	0	+	0	-	
f(x)	0	↗	$\frac{1}{e^e}$	↘	1

Partie C

1) f(1) = 1 et f '(1) = 1. Donc une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est y – 1 = 1(x – 1), soit y = x.

2) La position de (C) et (T) est donnée par l'étude du signe de d(x) = f(x) – x. d(0) = d(1) = 0.

Soit x dans]0 , 1[, on a ln x < 0 et $\dfrac{1}{x} > 1$ donc $\dfrac{\ln x}{x} < \ln x \Leftrightarrow u(x) < \ln x \Leftrightarrow e^{u(x)} < e^{\ln x} \Leftrightarrow f(x) < x$.

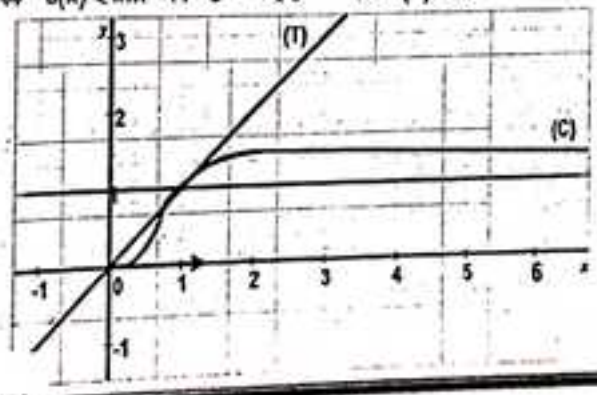
Soit x dans]1 , $+\infty$[, on a ln x > 0 et $\dfrac{1}{x} < 1$ donc $\dfrac{\ln x}{x} < \ln x \Leftrightarrow u(x) < \ln x \Leftrightarrow e^{u(x)} < e^{\ln x} \Leftrightarrow f(x) < x$.

Finalement, pour tout x > 0, différent de 1, on a d(x) < 0.

La courbe (C) est alors en dessous de sa tangente (T).

Les points de contacts sont les points d'abscisses 0 et 1.

3) Voir la courbe ci-contre.



Scanned by CamScanner

Exercice 42

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition E de la fonction f.
2) Montrer que la fonction f est impaire.
3) Etudier les variations de f.
4) Etudier les limites de la fonction f aux bornes des intervalles de définition de f.
   En déduire les asymptotes à la courbe (C).
5) Résoudre l'équation $f(x)=\dfrac{2}{3}$. En déduire la résolution de l'équation $f(x)=-\dfrac{2}{3}$.
6) Tracer la courbe (C) et la droite (D) d'équation $y=\dfrac{2}{3}$.

Solution 42

1) f(x) existe si et seulement si $5^{2x}-1\neq 0$, c'est-à-dire $2x\neq 0$, donc $x\neq 0$.

D'où l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.

2) $\mathbb{R}^*$ est centré en 0 (c'est-à-dire x appartient à $\mathbb{R}^*$ si et seulement si -x appartient à $\mathbb{R}^*$).

De plus, pour tout réel non nul x, on a : $f(-x)=\dfrac{5^{-x}}{5^{-2x}-1}=\dfrac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1}{5^{2x}}-1}=\dfrac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1-5^{2x}}{5^{2x}}}=-\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}=-f(x)$.

Donc f est une fonction impaire.

3) f étant impaire, l'origine du repère O est centre de symétrie de (C).

On va donc étudier notre fonction dans $]0,+\infty[$.

f est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$., et pour tout réel $x>0$, on a :

$$f'(x)=\frac{5^x\ln 5\times(5^{2x}-1)-2\times 5^{2x}\ln 5\times 5^x}{(5^{2x}-1)^2}=\frac{5^x\ln 5\times(5^{2x}+1)}{(5^{2x}-1)^2}.$$

On remarque que, pour tout réel x, on a : $f'(x)<0$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$.

4) • $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 2x=0$ (avec $2x>0$), donc $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 5^{2x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 5^x=1$.

Par suite $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(5^{2x}-1)=0$ (avec $5^{2x}-1>0$ pour tout $x>0$), donc $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}=+\infty$.

Donc la droite d'équation x = 0 est asymptote à la courbe de (C).

• Pour tout $x>0$, on a : $f(x)=\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}=\dfrac{5^x}{5^{2x}\left(1-\frac{1}{5^{2x}}\right)}=\dfrac{1}{5^x\left(1-\frac{1}{5^{2x}}\right)}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 5^{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 5^x=+\infty$.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{5^{2x}}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 5^x\left(1-\frac{1}{5^{2x}}\right)=+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{5^x\left(1-\frac{1}{5^{2x}}\right)}=0$.

Par conséquent, la droite d'équation y = 0 est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

La fonction étant impaire, $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

La droite d'équation x = 0 est asymptote à la courbe de f et la droite d'équation y = 0 est asymptote à (C) en $-\infty$.

Point méthode :

Soit a appartenant à $]0,+\infty[$.

- *Si $a>1$, alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$.
- *Si $a<1$, alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0$.

Scanned by CamScanner

5) • On pose $X = 5^x$. L'équation $f(x) = \frac{2}{3}$ devient $\frac{X}{X^2 - 1} = \frac{2}{3}$. C'est-à-dire $2X^2 - 3X - 2 = 0$.

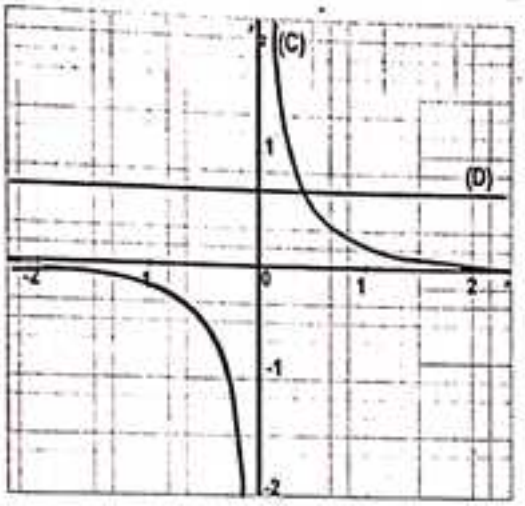
Les solutions de l'équation $2X^2 - 3X - 2 = 0$ sont $X' = -\frac{1}{2}$ et $X'' = 2$. Puisque $X = 5^x > 0$, alors on a $X = 2$.

Et $5^x = 2$ équivaut à $x = \log_5(2) = \frac{\ln 2}{\ln 5}$. D'où l'ensemble solution de l'équation $f(x) = \frac{2}{3}$ est $S = \left\{\frac{\ln 2}{\ln 5}\right\}$.

• Comme f est impaire, $f(x) = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow -f(x) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow f(-x) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow -x = \frac{\ln 2}{\ln 5} \Leftrightarrow x = -\frac{\ln 2}{\ln 5}$.

D'où la solution de l'équation $f(x) = -\frac{2}{3}$ est $S = \left\{-\frac{\ln 2}{\ln 5}\right\}$.

6)



Scanned by CamScanner

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER

Exercice 43

25 minutes

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x \cos x$.

a) Calculer la dérivée f ' de f et mettre f '(x) sous la forme $f'(x) = \lambda e^x \cos(x + \alpha)$ où λ et α sont deux nombres réels à déterminer.

b) Déterminer la dérivée huitième de f.

c) Déterminer la primitive de f qui prend la valeur $\frac{1}{2}$ en 0.

Exercice 44

35 minutes

On considère la fonction f de la variable réelle x, définie par : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

1) Etudier les variations de f, construire, relativement à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C) d'équation $y = \frac{\ln x}{x}$.

2) En remarquant que f peut s'écrire uu', déterminer une fonction primitive, F, de f.

3)a) Etudier l'ensemble de définition et la dérivée de la fonction g définie par $g(x) = \ln|\ln|\ln|x|||$.

b) Résoudre l'équation g(x) = 0.

Exercice 45

50 minutes

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{2(1-x)}$.

On note (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique : 2cm).

Partie A

1) Etudier la limite de f en $+\infty$ et en 1. Interpréter graphiquement ces limites.
2) Etudier la position relative de (C) et la droite (Δ) d'équation y = 0.
3) Etudier la limite de f en $-\infty$.
4) Etudier les variations de f. Préciser le minimum de f sur $]-\infty, 1[$.
5) Dresser le tableau de variation de f. Tracer (C).

Partie B

On considère l'équation f(x) = 1.

1) Déterminer le nombre de solutions de l'équation f(x) = 1 sur $\mathbb{R}$.
2) α est la plus petite des solutions de l'équation f(x) = 1, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.
3) On appelle β la plus grande des solutions de l'équation f(x) = 1, déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près par excès de β.
4) Montrer que $\frac{1-\beta}{1-\alpha} \times e^{\beta-\alpha} = 1$.

Exercice 46

70 minutes

Les buts du problème sont l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$, puis la recherche de primitives de cette fonction.

Partie A : *Etude de fonctions auxiliaires.*

1) On définit la fonction g sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par : $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$.

a) Déterminer la limite de g(x) lorsque x tend vers 1.

Scanned by CamScanner

b) Calculer $g'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]1 ; +\infty[$.
c) Résoudre, dans $]1 , +\infty[$, l'inéquation $1 - \ln(x-1) > 0$.
d) Etudier les variations de g sur l'intervalle $]1 , +\infty[$.
e) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution et une seule, notée α, dans l'intervalle $[e + 1 ; e^3 + 1]$, et étudier le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]1 , \alpha[$ et $]\alpha , +\infty[$.

2) Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1 , +\infty[$ par : $\varphi(x) = \dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)$ puis prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0$.

b) Calculer $\varphi'(x)$ puis montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

c) Montrer que φ est croissante sur l'intervalle $\left]1, \sqrt{\alpha}\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{\alpha} , +\infty\right[$.

Partie B : *Etude de la fonction f*

1) Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, on a $f(x) = \varphi(e^x)$.
2) En déduire :
a) la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
b) La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
c) Le sens de variation de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis montrer que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$.

3) Montrer que, pour tout x de $]0, +\infty[$ on a, $f(x) \le \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$.

4) Reproduire le tableau suivant et le compléter en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près :

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
f(x)						

5) Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unité 5 cm en abscisses et 10cm en ordonnées. On prendra 10 pour valeur approchée de α.

Partie C *Recherche de primitives de f*

1) Montrer que f vérifie l'égalité : $f'(x) + f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1} - \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

2) On pose $h(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1} - \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.
a) Trouver une primitive H de h sur l'intervalle $]0 , +\infty[$.
b) En déduire les primitives de f sur l'intervalle $]0 , +\infty[$.

60 minutes

Exercice 47

Le but de l'exercice est la résolution de l'équation : $(x + 1)^x + (x + 2)^x = (x + 3)^x$ (1).

1) Donner l'ensemble E de validité de l'équation (1).

2) Montrer que l'équation (1) est équivalente à l'équation : $\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^x + \left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^x = 1$ (2).

3) On pose, pour tout réel x de E, $f_1(x) = \left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^x$.
a) Montrer que, pour tout réel x de E, on a $f_1'(x) = g_1(x).f_1(x)$. g_1 est une fonction à déterminer.
b) Etudier les variations de g_1 ainsi que sa limite en $+\infty$.
c) En déduire le signe de $g_1(x)$ et les variations de f_1.

4) On pose, pour tout réel x de E, $f_2(x) = \left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^x$.
a) Montrer que pour tout réel x de E on a : $f_2'(x) = g_2(x).f_2(x)$. g_2 est une fonction à déterminer.

Scanned by CamScanner

b) Etudier les variations de g_2 ainsi que sa limite en $+\infty$.
c) En déduire le signe de $g_2(x)$ et les variations de f_1.
5) On pose, pour tout réel x de E, $h(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
a) Montrer que la fonction h est strictement décroissante sur E.
b) Déterminer les limites de la fonction h aux bornes de E.
c) Démontrer que l'équation (2) admet une solution unique.
d) Calculer h(2) et en déduire la résolution de l'équation (1).

Exercice 48 — BAC C – Caen – 1975 — 70 minutes

A)1) Soit g l'application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = x + 1 - \ln x$.
Etudier son sens de variation et en déduire que, pour tout x strictement positif, g(x) est strictement positif.

2) Soit h l'application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln x$.

Etudier les variations de la fonction h et tracer sa courbe (C) dans un repère (On remarquera que $h'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$)

B) Soit f l'application de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1) Cette fonction est-elle continue sur $[0, +\infty[$? Est-elle dérivable sur $[0, +\infty[$?

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

3) Démontrer que, pour tout réel x strictement positif et différent de 1, $\frac{f(x) - x}{\ln x} = \frac{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1}{\frac{\ln x}{x}}$.

Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - x}{\ln x}$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$; quelle est cette limite ?
La fonction $x \mapsto f(x) - x$ admet-elle une limite quand x tend vers $+\infty$.

4) Etudier le sens de variation de la fonction f et montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur lui-même.
Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$, f(1) et f(2) et tracer la courbe (Γ) de f. On déterminera la tangente en O.

Soit A le point de (Γ) d'abscisse 1. Ecrire une équation de la tangente (T) en A à (Γ).
Montrer que $f''(1) = 0$.
(On admettra que le point A est un point d'inflexion pour (Γ)).

Exercice 49 — BAC – Amérique du Sud – 1985 — 50 minutes

Soit la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = |x|^{\frac{1}{x}}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

On notera (C) la courbe de g dans un repère orthonormé (on prendra pour unité de longueur 2 cm).
a) Etudier les variations de la fonction g.
b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C) et de la droite d'équation $y = 1$.
c) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à (C) au point obtenu précédemment.
d) Tracer la courbe (C).
e) En utilisant l'étude de la fonction g, déterminer selon les valeurs de a, réel strictement positif, le nombre de solutions de l'équation $a^x - x = 0$.
Situer ces solutions, lorsqu'elles existent, par rapport à 0 et e.

Exercice 50 — BAC C et E – Polynésie – 1985 — 50 minutes

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm comme unité graphique.

L'objet du problème est l'étude de la fonction f définie sur $I =]0, +\infty[$ par : $f(x) = x\sqrt{\frac{2}{e^x - 1}}$.

Scanned by CamScanner

c) Dresser le tableau de variation de f.

Partie C – Prolongement par continuité de f en -1.

On considère la fonction g définie sur]-1 , +∞[par : g(x) = f(x) si x > -1, avec g(-1) = 0 .
On appelle (C') la courbe représentative de la fonction g dans le repère de la Partie B.

1)a) Montrer que l'on peut écrire $\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} = 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{x}{x+1}e^{\frac{x}{x+1}}\right)$.

b) Pour x dans]-1 , +∞[déterminer la limite lorsque x tend vers -1 de $\frac{x}{x+1}$ puis de $\frac{x}{x+1}e^{\frac{x}{x+1}}$.

c) En déduire que g est dérivable en -1 et préciser son nombre dérivé g'(-1).
2) Construire (D) et (C'). Préciser les tangentes à (C') aux points d'abscisses -1, α et 0.

Exercice 55

80 minutes

Partie A.

Soit A, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
1) Soit P et I les ensembles des applications respectivement paires et impaires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Déterminer P ∩ I .
2) Soit F un élément quelconque de A. On considère les deux fonctions f et g de A définies par :

Pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{2}(F(x)+F(-x))$ et $g(x) = \frac{1}{2}(F(x)-F(-x))$.

Démontrer que f appartient à P et g appartient à I.
En déduire que tout élément de A est de manière unique, la somme d'un élément de P et d'un élément de I.

Partie B.

Dans cette partie, on considère le cas particulier où F est la fonction exponentielle de base e et l'on désigne par cosh (c'est le cosinus hyperbolique) et sinh (c'est le sinus hyperbolique) les fonctions f et g associées à F.

1) Etudier les variations des fonctions : $\cosh : x \mapsto \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ et $\sinh : x \mapsto \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

2) Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\left(\cosh x - \frac{1}{2}e^x\right)$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(\sinh x - \frac{1}{2}e^x\right)$.

Tracer sur le même graphique les courbes C et S de cosh et sinh respectivement.
3) Déduire de B)1) l'existence d'une application $\sinh^{-1}$ réciproque de sinh. Déterminer $\sinh^{-1}x$.
4) Prouver que la restriction de cosh à [0 , +∞[admet une réciproque $\cosh^{-1}$ que l'on précisera.
5) Etudier les dérivées des fonctions $\cosh^{-1}$ et $\sinh^{-1}$.
6) Représenter graphiquement, $\cosh^{-1}$ et la restriction de $\sinh^{-1}$ sur [0 , +∞[.

7) Etudier et représenter graphiquement la fonction tanh (fonction tangente hyperbolique) définie par : $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$.

8) Prouver que la fonction tanh admet une réciproque $\tanh^{-1}$, que l'on déterminera.
9) Etudier la dérivée de la fonction $\tanh^{-1}$ et représenter la fonction $\tanh^{-1}$.

Partie C

1) Prouver que, pour tout réel x, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
2) Exprimer cosh(x + y) et sinh(x + y) en fonction de coshx, coshy, sinhx et sinhy.

Scanned by CamScanner

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER – SOLUTIONS

Solution 43

a) $f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x(\cos x - \sin x) = e^x\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = e^x\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$

$= e^x\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

D'où $f'(x) = e^x\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

b) $f''(x) = e^x\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - e^x\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = e^x\left[\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= 2e^x\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= 2e^x\left[\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{4}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= 2e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

Le lecteur pourra vérifier que $f^{(8)}(x) = e^x(\sqrt{2})^8\cos\left(x+8\frac{\pi}{4}\right) = 16e^x\cos(x+2\pi) = 16e^x\cos x$.

c) On remarque que $f^{(8)} = 16f$. D'où $f = \frac{1}{16}f^{(8)}$ donc une primitive de f est $\frac{1}{16}f^{(7)}$.

Or $f^{(7)}(x) = e^x(\sqrt{2})^7\cos\left(x+7\frac{\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2}e^x\cos\left(x+\frac{7\pi}{4}\right)$, alors une primitive de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$F(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^x\cos\left(x+\frac{7\pi}{4}\right)$.

Les primitives de f sont les fonctions G définies sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^x\cos\left(x+\frac{7\pi}{4}\right) + k$, où k est une constante réelle. Or $G(0) = \frac{1}{2}$ équivaut successivement à $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{7\pi}{4} + k = \frac{1}{2}$, puis $k = 0$.

La primitive de f qui prend la valeur $\frac{1}{2}$ en 0 est la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^x\cos\left(x+\frac{7\pi}{4}\right)$.

Solution 44

1) f est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel $x > 0$, on a $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

Le signe de f '(x) est celui de $1 - \ln x$. Or $1 - \ln x > 0$ équivaut à $x < e$. D'où le tableau de variations de f est :

x	0		e		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	-	
f(x)	‖	$-\infty$	↗	e^{-1} ↘	0

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{x} = -\infty$.

Scanned by CamScanner

1) *Etude d'une fonction auxiliaire :*

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(t) = 1 - t - e^{-2t}$.

a) Etudier les variations de g et calculer sa limite en $+\infty$ (on ne demande pas de construire la courbe de g).

b) Démontrer qu'il existe un unique réel $a > 0$ tel que $g(a) = 0$ et prouver que $\frac{\ln 2}{2} < a < 1$.

c) Etudier le signe de g(t).

d) Etablir que $0,79 \leq a \leq 0,8$.

2) *Variations de f :*

a) Justifier la dérivabilité de f sur $]0, +\infty[$ et montrer pour tout $x > 0$: $f'(x) = \left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2}{x}} g\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) En déduire les variations de f.

3) *Limite f en 0 :*

a) Montrer que pour tout $x > 0$: $\ln[f(x)] = \frac{1}{x}(1 + x\ln x) + \frac{1}{2}\ln\left(1 - e^{-\frac{2}{x}}\right)$.

b) En déduire la limite de f en 0.

Exercice 51

45 minutes

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$.

On se propose d'étudier la dérivabilité de f en 0.

1) Prouver que, pour tout $x > 0$, $f(x) = e^{-\frac{3}{2}x} \times \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{x}$.

2) On considère la fonction u définie sur $[0, +\infty[$ par : $u(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}$.

a) Calculer u'(x) et u''(x).

b) Soit x un nombre réel fixé strictement positif. Prouver que, pour tout t de [0, x], $u'(0) \leq u'(t) \leq u'(x)$.

En utilisant l'inégalité des accroissements finis à la fonction u sur [0, x], en déduire un encadrement de u(x).

3)a) Etablir que, pour tout $x > 0$, $e^{-\frac{3}{2}x} \leq f(x) \leq \frac{e^{-x} + e^{-2x}}{2}$, puis que

$$\frac{e^{-\frac{3}{2}x} - 1}{x} \leq \frac{f(x) - 1}{x} \leq \frac{e^{-x} - 1}{2x} + \frac{e^{-2x} - 1}{2x}.$$

b) Soit a un nombre réel. Prouver que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$.

c) Démontrer que f est dérivable en 0 et préciser f '(0).

Exercice 52

BAC – Amiens – 1982

30 minutes

1) Soit φ l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + 1$.

Déduire de l'étude des variations de φ dans $\mathbb{R}^*$, le signe de $\varphi(x)$ dans $\mathbb{R}^*$.

2) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b) Déterminer le tableau de variations complet de f dans $\mathbb{R}$ (on utilisera la question 1) pour le signe de f '(x)).

c) Soit (C) la courbe représentant f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Scanned by CamScanner

tudier la limite de $f(x) - \frac{x}{2}$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.

lontrer que (C) admet une asymptote et construire (C) dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (On représentera la courbe en hoisissant une unité de longueur égale à 5 cm).

Exercice 53 — 60 minutes

étant un réel donné, f_k est la fonction, définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_k(x) = xe^{-x} + kx$. On note (C_k) sa courbe.

1) Etude de f_k

a) Déterminer, selon les valeurs de k, $\lim_{x \to +\infty} f_k(x)$.

Montrer que la droite (D_k) d'équation $y = kx$ est asymptote en $+\infty$ à (C_k).

Préciser la position de (C_k) par rapport à (D_k).

b) Calculer $f_k'(x)$ et $f_k''(x)$ et préciser $\lim_{x \to +\infty} f_k'(x)$. Donner le sens de variation de f_k'.

2) Donner les tableaux de variations de f_0 et f_1.

3) Construire les courbes (C_0) et (C_1) en précisant leurs tangentes à l'origine.

3) Etude de $f_{-\frac{1}{2}}$

a) Calculer $f_{-\frac{1}{2}}'(x)$. Montrer que l'équation $(1-x)e^{-x} - \frac{1}{2} = 0$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$.

b) Vérifier l'encadrement $0,31 < \alpha < 0,32$.

2) Donner le tableau de variation de $f_{-\frac{1}{2}}$.

Tracer l'asymptote (D_k) et la courbe (C_k), avec la tangente à l'origine, pour $k = -\frac{1}{2}$.

Exercice 54 — BAC S – Antilles – Guyanes – Septembre 1998 — 70 minutes

Partie A – Etude d'une fonction auxiliaire

La fonction d est définie sur $]-1, +\infty[$ par $d(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$.

1) Calculer la fonction dérivée d'. En déduire les variations de d.

2) Déterminer les limites de d en -1 et en $+\infty$.

3) Montrer que, pour tout $x > -1$, on a $0 < d(x) < e$.

Partie B – Etude de la fonction f.

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction f définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}}$.

On appelle (C) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormal, l'unité graphique est 5 cm.

On désigne par f ' et f '' les dérivées première et seconde de f.

1) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - e + 1$ est asymptote à la courbe (C).
Préciser la position relative de (D) et (C).

2)a) Pour x dans $]-1, +\infty[$, calculer f '(x) et f ''(x).

Vérifier que $f''(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^4} e^{\frac{x}{x+1}}$. En déduire le sens de variation de f '.

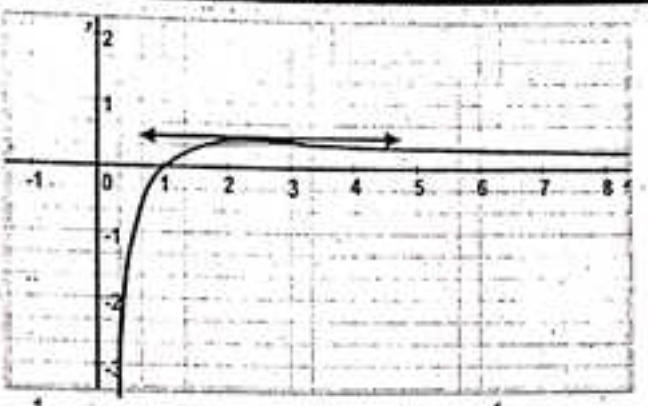
b) Dresser le tableau de variation de f '. (On admettra que $\lim_{x \to -1, x > -1} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 1$).

3) Démontrer que l'équation f '(x) = 0 admet sur $]-1, +\infty[$ deux solutions dont l'une est 0.
Dans la suite du problème on notera α la solution non nulle.
Donner une valeur approchée de α au centième près.

4)a) Etudier les variations de f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Scanned by CamScanner



2) Pour tout $x > 0$, on a : $f(x) = \frac{1}{x}\ln x$. Posons $u(x) = \ln x$, on a alors $u'(x) = \frac{1}{x}$, et $f(x) = u'(x)u(x)$.

Une primitive de f est donc la fonction F définie sur $]0, +\infty[$, $F(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x$.

3)a) • g(x) existe si et seulement si $\ln|\ln|x|| $ existe et $\ln|\ln|x|| \neq 0$.

$\ln|\ln|x||$ existe si et seulement si $\ln|x|$ existe et $\ln|x| \neq 0$.

Donc g(x) existe si et seulement si $\ln|x|$ existe, $\ln|\ln|x|| \neq 0$ et $\ln|x| \neq 0$.

- $\ln|x|$ existe si et seulement si $x \neq 0$.
- $\ln|x| \neq 0$ équivaut à $|x| \neq 1$. C'est-à-dire $x \neq 1$ et $x \neq -1$.
- $\ln|\ln|x|| \neq 0$ équivaut à $|\ln|x|| \neq 1$. C'est-à-dire $\ln|x| \neq 1$ et $\ln|x| \neq -1$. Ce qui signifie $|x| \neq e$ et $|x| \neq e^{-1}$.

Finalement, $x \neq e$, $x \neq -e$, $x \neq -e^{-1}$ et $x \neq e^{-1}$.

D'où l'ensemble de définition de g est : $\mathbf{R} - \{-e, -e^{-1}, -1, 0, 1, e^{-1}, e\}$.

Posons $u(x) = \ln|x|$ et $v(x) = \ln|\ln|x||$. On a : $g(x) = \ln|v(x)|$, $g'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)}$, $v'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$.

D'où $v'(x) = \frac{1}{x\ln|x|}$ et $g'(x) = \frac{1}{x(\ln|x|)(\ln|\ln|x||)}$.

b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln|\ln|\ln|x||| = 0$

$\Leftrightarrow |\ln|\ln|x||| = 1$

$\Leftrightarrow \ln|\ln|x|| = 1$ ou $\ln|\ln|x|| = -1$

$\Leftrightarrow |\ln|x|| = e$ ou $|\ln|x|| = e^{-1}$

$\Leftrightarrow \ln|x| = e$ ou $\ln|x| = -e$ ou $\ln|x| = e^{-1}$ ou $\ln|x| = -e^{-1}$

$\Leftrightarrow |x| = e^e$ ou $|x| = e^{-e}$ ou $|x| = e^{e^{-1}}$ ou $|x| = e^{-e^{-1}}$

$\Leftrightarrow x = e^e$ ou $x = -e^e$ ou $x = e^{-e}$ ou $x = -e^{-e}$ ou $x = e^{e^{-1}}$ ou $x = -e^{e^{-1}}$ ou $x = e^{-e^{-1}}$

ou $x = -e^{-e^{-1}}$.

D'où l'ensemble solution de l'équation est : $S = \{e^e, -e^e, e^{-e}, -e^{-e}, e^{e^{-1}}, -e^{e^{-1}}, e^{-e^{-1}}, -e^{-e^{-1}}\}$.

Solution 45

Partie A

1) • $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2(1-x)} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2(1-x)} \times e^{-x} = 0$.

Scanned by CamScanner

Donc la droite d'équation y = 0 est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

• Si x > 1, alors on a 2(1 – x) < 0 et si x < 1, alors on a 2(1 – x) > 0.

Or $\lim_{x\to 1} e^{-x} = e^{-1}$ et $\lim_{x\to 1} 2(1-x) = 0$, alors $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = +\infty$.

Donc la droite d'équation x = 1 est asymptote verticale à la courbe de f.

2) Etudier la position relative de (C) et (Δ) revient à étudier le signe de $f(x) - 0 = \frac{e^{-x}}{2(1-x)}$.

Si x < 1, alors on a $\frac{e^{-x}}{2(1-x)} > 0$ et si x > 1, alors on a $\frac{e^{-x}}{2(1-x)} < 0$.

Donc la courbe (C) est au-dessus de (Δ) dans $]-\infty, 1[$ et (C) est en dessous de (Δ) dans $]1, +\infty[$.

3) Soit x réel différent de 0 et 1, on a : $f(x) = \frac{e^{-x}}{-x} \times \frac{-x}{2(1-x)}$.

Or $\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{2(1-x)} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

4) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et pour tout x différent de 1, $f'(x) = \frac{-2e^{-x}(1-x) + 2e^{-x}}{4(1-x)^2} = \frac{xe^{-x}}{2(1-x)^2}$.

f'(x) est du signe de x.

Donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et f est strictement croissante sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

Dans l'intervalle $]-\infty, 1[$, f admet un minimum en x = 0 qui est $f(0) = \frac{1}{2}$.

5) **Tableau de variation et courbe de f :**

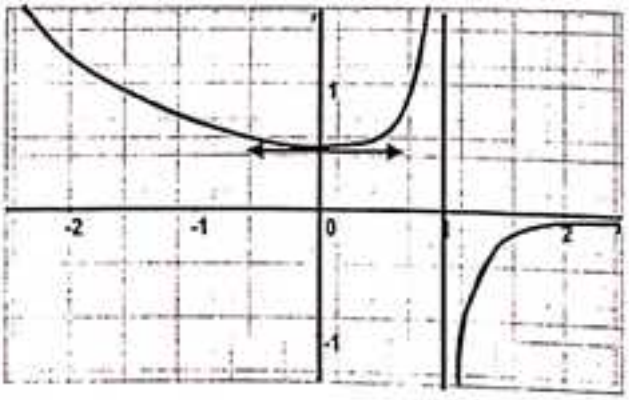
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	‖	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

Soit x réel différent de 0 et 1, on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{-x}}{(-x)^2} \times \frac{x}{2(1-x)}$.

Or $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2(1-x)} = -\frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{(-x)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^2} = +\infty$, donc $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

D'où la courbe (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.

La courbe de f :



Partie B

1) • Pour tout réel x > 1, on a f(x) < 0 (d'après partie A, question 2)), donc l'équation f(x) = 1 ne peut avoir de solution dans $]1, +\infty[$.

Par contre, la fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$, donc f réalise une bijection de $]-\infty, 0[$

Scanned by CamScanner

sur $f(]-\infty,0])=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$. Comme 1 appartient à $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$, alors l'équation f(x) = 1 admet une unique solution dans $]-\infty,0]$.

- Aussi, f est continue et strictement croissante sur [0 , 1[, donc f réalise une bijection de [0 , 1[sur $f([0,1[)=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$. Or 1 appartient à $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$, alors l'équation f(x) = 1 admet une seule solution sur [0 , 1[.

L'équation f(x) = 1 admet donc deux solutions dans $\mathbb{R}$.

NB : Notons que cette question peut être résolue par une simple lecture graphique.

2) α appartient à $]-\infty,0]$ et $f(\alpha)=1$.

A l'aide de la calculatrice on a, f(-1,678) ≈ 0,99978 et f(-1,679) ≈ 1,004.

Puisque f(-1,678) < 1 < f(-1,679), c'est-à-dire f(-1,678) < f(α) < f(-1,679) et que de plus, f est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$, alors on a $-1,679<\alpha<-1,678$.

3) On sait que β est la seule solution sur [0 , 1[de l'équation f(x) = 1.

A l'aide de la calculatrice on a, f(0,768) ≈ 0,99987 et f(0,769) ≈ 1,0032.

Puisque f(0,768) < 1 < f(0,769), c'est-à-dire f(0,768) < f(β) < f(0,769) et que de plus f est strictement croissante sur]0 , 1[, alors on a 0,768 < β < 0,769. Une valeur approchée de β par excès à 10^{-3} près est 0,769.

4) $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}=\frac{e^{-\alpha}}{2(1-\alpha)}\times\frac{2(1-\beta)}{e^{-\beta}}=e^{\beta-\alpha}\times\frac{1-\beta}{1-\alpha}$. Comme $f(\alpha)=f(\beta)=\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}=1$, alors $\frac{1-\beta}{1-\alpha}\times e^{\beta-\alpha}=1$.

Solution 46

Partie A

1)a) Pour le calcul de la limite en 1, on utilisera le théorème des limites des fonctions composées.

$\lim\limits_{x\to1}x-1=0$ donc $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\ln(x-1)=\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to1}2x=2$, alors $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}2x-(x-1)\ln(x-1)=2$.

b) g est dérivable sur]1 , +∞[. Et pour tout x > 1, on a $g'(x)=2-1\times\ln(x-1)-(x-1)\times\frac{1}{x-1}=1-\ln(x-1)$.

c) Pour tout x > 1, on a :

1 – ln(x – 1) > 0 équivaut successivement à ln(x – 1) < 1, puis à 0 < x – 1 < e et enfin à 1 < x < e + 1.

D'où l'inéquation 1 – ln(x – 1) > 0 a pour solution]1 , 1 + e[.

d) D'après la question 1)c), on a g'(x) > 0 si et seulement si x appartient à]1 , 1 + e[.

D'où g est strictement croissante sur]1 , 1 + e[et strictement décroissante sur]1 + e , +∞[.

e) g est continue et strictement décroissante sur [1 + e , 1 + e³], donc g induit une bijection de [1 + e , 1 + e³] sur g([1 + e , 1 + e³]) = [g(1 + e³), g(1 + e)] = [2 – e³ , 2 + e].

Comme 0 appartient à [2 – e³ , 2 + e], alors l'équation g(x) = 0 a une solution et une seule, notée α, dans l'intervalle [e + 1 ; e³ + 1].

Signe de g(x) :

La fonction g est strictement décroissante sur [1 + e , +∞[et g(α) = 0.

Donc si x > α, alors g(x) < 0 et si 1 + e ≤ x < α alors g(x) > 0.

La fonction g est strictement croissante sur]1 , 1 + e] et comme $\lim\limits_{x\to1}g(x)=2$, alors, si 1 < x ≤ 1 + e alors on a 2 < g(x) et donc g(x) > 0.

Finalement : si x appartient à]1 , α[alors g(x) > 0 et si x appartient à]α , +∞[, alors g(x) < 0.

2)a) • $\lim\limits_{x\to1}x^2-1=0$ et $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\ln(x^2-1)=-\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x}=1$, alors $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\varphi(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\frac{1}{x}\times\ln(x^2-1)=-\infty$.

- Pour tout x > 0, on a $\varphi(x)=\frac{\ln\left(x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x}=\frac{2\ln x}{x}+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x}$.

Scanned by CamScanner

Or on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=0$, alors

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\times\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$.

b) • La fonction φ est dérivable sur $]1,+\infty[$.

Et pour tout $x>1$, on a : $\varphi'(x)=\dfrac{\frac{2x}{x^2-1}\times x-\ln(x^2-1)}{x^2}=\dfrac{2x^2-(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)}$.

• Or $g(x^2)=2x^2-(x^2-1)\ln(x^2-1)$, alors $\varphi'(x)=\dfrac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$.

Comme pour tout $x>1$, on a $x^2(x^2-1)>0$, alors $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

c) Pour tout $x>1$, $g(x^2)>0$ est équivalent successivement à $1<x^2<\alpha$, puis $1<x<\sqrt{\alpha}$ (car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $]0,+\infty[$). Donc $\varphi'(x)>0$ équivaut à $1<x<\sqrt{\alpha}$.

Finalement, φ est strictement croissante sur $\left]1,\sqrt{\alpha}\right[$ et strictement décroissante sur $\left]\sqrt{\alpha},+\infty\right[$.

Partie B

1) Pour tout $x>0$, on a $\varphi(e^x)=\dfrac{\ln((e^x)^2-1)}{e^x}=\dfrac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}=f(x)$. D'où $f(x)=\varphi(e^x)$.

2)a) $\lim\limits_{x\to0}e^x=1$, donc $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\varphi(e^x)=\lim\limits_{x\to1}\varphi(x)=-\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(e^x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$.

c) • f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x>0$, $f'(x)=e^x\varphi'(e^x)$.

Pour tout $x>0$, on a $e^x>0$, donc $f'(x)$ est du signe de $\varphi'(e^x)$.

Pour tout $x>0$, on a $\varphi'(e^x)>0$ si et seulement si $1<e^x<\sqrt{\alpha}$. Ce qui équivaut à $0<x<\ln(\sqrt{\alpha})$.

De même : $\varphi'(e^x)<0$ équivaut à $e^x>\sqrt{\alpha}$, c'est-à-dire $x>\ln(\sqrt{\alpha})$.

• $f'(\ln(\sqrt{\alpha}))=e^{\ln(\sqrt{\alpha})}\times\varphi'(e^{\ln(\sqrt{\alpha})})=\sqrt{\alpha}\times\varphi'(\sqrt{\alpha})=0$.

Alors f est strictement croissante sur $\left]0,\ln(\sqrt{\alpha})\right[$ et strictement décroissante sur $\left]\ln(\sqrt{\alpha}),+\infty\right[$.

Elle admet alors un maximum en $x=\ln(\sqrt{\alpha})$.

3) Comme f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$, alors, pour tout $x>0$, on a $f(x)\le f(\ln(\sqrt{\alpha}))$.

Or $f(\ln(\sqrt{\alpha}))=\varphi(e^{\ln(\sqrt{\alpha})})=\varphi(\sqrt{\alpha})=\dfrac{\ln\left|(\sqrt{\alpha})^2-1\right|}{\sqrt{\alpha}}=\dfrac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$.

On sait d'après la partie A) question 1)e), que $g(\alpha)=0$ donc $2\alpha-(\alpha-1)\ln(\alpha-1)=0$ et $\ln(\alpha-1)=\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$.

Donc $f(\ln(\sqrt{\alpha}))=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\times\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}=\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

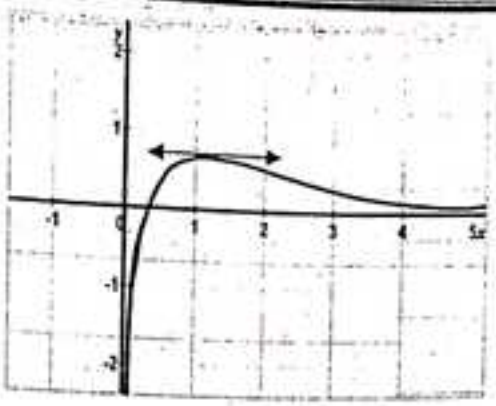
Et finalement, pour tout x de $]0,+\infty[$, on a $f(x)\le\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

4)

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
f(x)	-1,36	0,33	0,68	0,66	0,54	0,30

5)

Scanned by CamScanner



Partie C

1) Pour tout $x > 0$, on a $f(x) = \varphi(e^x)$ et

$$f'(x) = e^x\varphi'(e^x) = \frac{g(e^{2x})}{e^{2x}(e^{2x}-1)} \times e^x = \frac{2e^{2x} - (e^{2x}-1)\ln(e^{2x}-1)}{e^x(e^{2x}-1)}. \text{ Donc}$$

$$f'(x) + f(x) = \frac{2e^{2x} - (e^{2x}-1)\ln(e^{2x}-1)}{e^x(e^{2x}-1)} + \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x} = \frac{2e^{2x} - (e^{2x}-1)\ln(e^{2x}-1)}{e^x(e^{2x}-1)} + \frac{(e^{2x}-1)\ln(e^{2x}-1)}{e^x(e^{2x}-1)}$$

$$= \frac{2e^{2x}}{e^x(e^{2x}-1)}$$

$$= \frac{2e^x}{e^{2x}-1}$$

De plus, pour tout $x > 0$, $\frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x-1)(e^x+1)} = \frac{2e^x}{e^{2x}-1}$.

Finalement, f vérifie l'égalité : $f'(x) + f(x) = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}$.

2)a) Pour tout réel $x > 0$, on pose $u(x) = e^x - 1$ et $v(x) = e^x + 1$ et u et v sont dérivables sur $]0, +\infty[$.

On a : $h(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)}$.

Sur $]0, +\infty[$, les fonctions u et v sont strictement positives, donc on en déduit une primitive H de h définie sur $]0, +\infty[$ par : $H(x) = \ln(u(x)) - \ln(v(x)) = \ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$.

b) Pour tout x appartenant à $]0, +\infty[$, on a : $f'(x) + f(x) = h(x)$ signifie $f(x) = h(x) - f'(x)$.
Les primitives de f sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions F définies sur $]0, +\infty[$ par :

$F(x) = H(x) - f(x) + k = \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) - \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x} + k$, où k est une constante réelle.

Solution 47

1) L'équation (1) n'est définie que si et seulement si $x + 1 > 0$, $x + 2 > 0$ et $x + 3 > 0$. C'est-à-dire $x > -1$.
D'où l'ensemble de validité de l'équation (1) est $E =]-1, +\infty[$.

2) Soit x appartenant à E, on a :

(1) équivaut à $\frac{(x+1)^x}{(x+3)^x} + \frac{(x+2)^x}{(x+3)^x} = 1$, Puis à $\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^x + \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x = 1$.

3)a) Pour tout x appartenant à E, on a $f_1(x) = e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)}$

Scanned by CamScanner

Posons pour x dans E, $u_1(x)=\frac{x+1}{x+3}$.

u_1 est dérivable sur E et pour tout x élément de E, $u_1'(x)=\frac{(x+3)-(x+1)}{(x+3)^2}=\frac{2}{(x+3)^2}$.

On a $f_1(x)=e^{x\ln(u_1(x))}$, donc

$$f_1'(x)=(x\ln(u_1(x)))'\times e^{x\ln(u_1(x))}=\left(\ln(u_1(x))+\frac{xu_1'(x)}{u_1(x)}\right)e^{x\ln(u_1(x))}=\left(\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)+\frac{2x}{(x+1)(x+3)}\right)f_1(x).$$

Ainsi, pour tout réel x de E, $f_1'(x)=g_1(x)\times f_1(x)$, avec $g_1(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)+\frac{2x}{(x+1)(x+3)}$.

b) • Posons pour tout réel x de E, $v_1(x)=\frac{2x}{(x+1)(x+3)}$.

v_1 est dérivable sur E et pour tout x de E, on a : $v_1'(x)=\frac{6-2x^2}{(x+1)^2(x+3)^2}$.

Pour tout x de E, on a $g_1(x)=\ln(u_1(x))+v_1(x)$ et $g_1'(x)=\frac{u_1'(x)}{u_1(x)}+v_1'(x)$.

D'où $g_1'(x)=\frac{2}{(x+1)(x+3)}+\frac{6-2x^2}{(x+1)^2(x+3)^2}=\frac{8x+12}{(x+1)^2(x+3)^2}$.

Comme $x>1$, alors on a $8x+12>0$. La fonction g_1 est donc strictement croissante sur E.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{(x+1)(x+3)}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g_1(x)=0$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}g_1(x)=0$ et g_1 est strictement croissante sur E, donc, pour tout réel x de E, on a $g_1(x)<0$.

On sait que $f_1'(x)=g_1(x)\times f_1(x)$ et, pour tout x de E, $f_1(x)>0$. Donc $f_1'(x)$ est du signe de $g_1(x)$ et, par conséquent, pour tout x dans E, $f_1'(x)<0$. Donc f_1 est strictement décroissante sur E.

4)a) Pour tout x appartenant à E, on a $f_2(x)=e^{x\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)}$.

Posons pour x dans E, $u_2(x)=\frac{x+2}{x+3}$. u_2 est dérivable sur E et pour tout x élément de E,

$$u_2'(x)=\frac{(x+3)-(x+2)}{(x+3)^2}=\frac{1}{(x+3)^2}.$$

On a $f_2(x)=e^{x\ln(u_2(x))}$ et donc $f_2'(x)=(x\ln(u_2(x)))'\times e^{x\ln(u_2(x))}=\left(\ln(u_2(x))+\frac{xu_2'(x)}{u_2(x)}\right)e^{x\ln(u_2(x))}$.

Donc $f_2'(x)=\left(\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)+\frac{x}{(x+2)(x+3)}\right)\times f_2(x)$.

Ainsi, pour tout réel x de E, $f_2'(x)=g_2(x)\times f_2(x)$, avec $g_2(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)+\frac{x}{(x+2)(x+3)}$.

b) • Posons pour tout réel x de E, $v_2(x)=\frac{x}{(x+2)(x+3)}$.

Et en procédant comme à la question 3)b), on a pour tout x de E, $g_2'(x)=\frac{5x+12}{(x+2)^2(x+3)^2}$.

Comme $x>1$, alors on a $5x+12>0$. La fonction g_2 est donc strictement croissante sur E.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{(x+2)(x+3)}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g_2(x)=0$.

Scanned by CamScanner

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} g_2(x) = 0$ et g_2 est strictement croissante sur E, donc, pour tout réel x de E, on a $g_2(x) < 0$.

On sait que pour tout x dans E, $f_2'(x) = g_2(x)\times f_2(x)$ et $f_2(x) > 0$.
Donc $f_2'(x)$ est du signe de $g_2(x)$ et, par conséquent, pour tout x dans E, $f_2'(x) < 0$.
Donc f_2 est strictement décroissante sur E.
5)a) La somme de deux fonctions strictement décroissantes sur E est strictement décroissante sur E.
Donc h est strictement décroissante sur E.

b) • $f_1(x) = e^{x\ln(u_1(x))}$ et $u_1(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} u_1(x) = 0$, $u_1(x)$ est strictement positif si $x > -1$ et $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} x = -1$ donc,

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} \ln(u_1(x)) = \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} x\ln(u_1(x)) = +\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f_1(x) = \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} e^{x\ln(u_1(x))} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Or $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f_2(x) = \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} e^{x\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)} = e^{-\ln\frac{1}{2}} = 2$. Finalement, $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} h(x) = +\infty$.

• Soit $x > -1$ et différent de 0, on a : $f_1(x) = e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)}$.

Or $x\ln\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right) = x\ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - x\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} - 3\dfrac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}$.

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)} = \lim\limits_{x\to-2} e^x = e^{-2}$.

On montre de même que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = e^{-1}$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) + \lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = e^{-2} + e^{-1}$.

c) Remarquons que $e^{-2} + e^{-1} < 1$ ***(on pourra utiliser la calculatrice pour le vérifier).***
La fonction h est continue et strictement décroissante sur E.
Donc h réalise une bijection de E vers

$$h(E) = \left]\lim_{x\to+\infty} h(x),\ \lim_{x\xrightarrow{>}-1} h(x)\right[= \left]e^{-2}+e^{-1}, +\infty\right[.$$

Comme 1 appartient à $]e^{-2}+e^{-1}, +\infty[$, alors l'équation h(x) = 1 admet une unique solution dans E.

d) • $h(2) = f_1(2) + f_2(2) = \dfrac{9}{25} + \dfrac{16}{25} = 1$. 2 est alors solution de l'équation h(x) = 1.

• L'équation h(x) = 1 admettant une unique solution, cette solution est 2.
L'équation h(x) = 1 étant équivalente à l'équation (1), 2 est la seule solution de l'équation (1).

Solution 48

A)1) • g est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, on a $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.

Et puisque $x > 0$, alors le signe de $g'(x)$ est celui de $x - 1$.

Scanned by CamScanner

D'où g est strictement croissante sur]1 , +∞[et strictement décroissante sur]0 , 1[.
Donc g admet un minimum en 1qui est g(1) = 2.

- Puisque 2 > 0, alors pour tout x > 0, on a g(x) > 0.

2) Les fonctions $x \mapsto 1+\frac{1}{x}$ et $x \mapsto \ln x$ sont continues et dérivables sur]0 , +∞[.

D'où h est définie, continue et dérivable sur]0 , +∞[(produit de fonctions continues et dérivables sur]0, +∞[).

Et pour tout x > 0, on a $h'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1-\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$.

D'après A)1), pour tout x > 0, on a g(x) > 0. D'où pour tout x > 0, on a h'(x) > 0.
h est donc strictement croissante sur]0 , +∞[.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty$ donc, $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}h(x)=-\infty$. D'où le tableau de variation de h qui suit :

x	0	+∞
h'(x)	+	
h(x)	-∞ ↗	+∞

Etudions la branche infinie en +∞ :

Soit x > 0, on a $\frac{h(x)}{x}=\left(1+\frac{1}{x}\right)\times\frac{\ln x}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=0$.

Par conséquent, la courbe de h admet en +∞, une branche parabolique de direction asymptotique celle de l'axe des abscisses. ***(Voir la courbe (C) à la question B)4))***

B)1) Soit x > 0, on a $f(x)=e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x}=e^{h(x)}$.

h est continue et dérivable sur]0 , +∞[et la fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f = expoh est continue et dérivable sur]0 , +∞[.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}h(x)=-\infty$ donc, $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}e^{h(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$. Comme f(0) = 0, alors f est continue en 0.

Soit x > 0, $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{x^{1+\frac{1}{x}}}{x}=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln x}{x}}$.

Or $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln x}{x}=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}e^{\frac{\ln x}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

D'où f est dérivable en 0 et f '(0) = 0. Finalement, f est continue et dérivable sur [0 , +∞[.

2) Soit x > 0, $\frac{f(x)}{x}=\frac{x^{1+\frac{1}{x}}}{x}=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln x}{x}}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^x=1$.

3) • Soit x > 0 et x différent de 1, on a :

$\frac{f(x)-x}{\ln x}=\frac{x^{1+\frac{1}{x}}-x}{\ln x}=\frac{x\times x^{\frac{1}{x}}-x}{\ln x}=\frac{x\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}=\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}{\frac{\ln x}{x}}$. D'où $\frac{f(x)-x}{\ln x}=\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}{\frac{\ln x}{x}}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}{\frac{\ln x}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

Scanned by CamScanner

• Soit $x > 0$, posons $\varphi(x) = \dfrac{f(x)-x}{\ln x}$, on a $f(x) - x = \varphi(x) \times \ln x$.

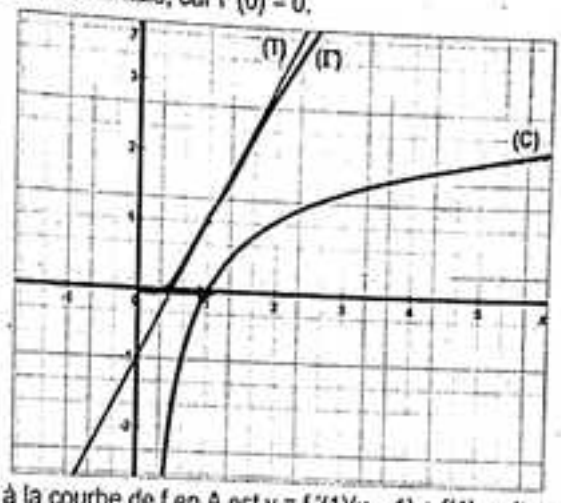
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty$. On en déduit alors que la courbe de f admet en $+\infty$, une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = x$.

4) • Pour $x > 0$, on a $f(x) = f(x) = e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x} = e^{h(x)}$ et $f'(x) = h'(x)e^{h(x)}$. Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $h'(x)$.

• f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[) = \left[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= [0, +\infty[$.

• $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = e^{3\ln\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{8}$, $f(1) = e^{2\ln 1} = 1$ et $f(2) = e^{\frac{3}{2}\ln 2} = 2\sqrt{2}$.

• La tangente en O est une droite horizontale, car $f'(0) = 0$.



• Une équation de la tangente à la courbe de f en A est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, soit $y = 2x - 1$.

• Soit $x > 0$, $f''(x) = h''(x)f(x) + (h'(x))^2 f(x) = (h''(x) + (h'(x))^2)f(x)$.

Or $h''(x) = \dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)x^2 - 2x(x+1-\ln x)}{x^4} = \dfrac{x^2 - x - 2x^2 - 2x + 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{-x-3+2\ln x}{x^3}$.

D'où $h''(1) = -4$, $(h'(1))^2 = 4$ et $f(1) = 1$. Par conséquent $f''(1) = (h''(1) + (h'(1))^2)f(1) = 0$.

Solution 49

a) • g est définie sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a $g(x) = e^{\frac{\ln|x|}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ donc g est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

• $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x) = 0 = g(0)$. Donc g est continue en 0.

• $\dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \dfrac{x^{\frac{1}{x}}}{x} = x^{\frac{1}{x}-1} = e^{\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln x}$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = 0$.

D'où g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

Finalement, g est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$.

Scanned by CamScanner

Et pour tout $x > 0$, on a $g'(x) = \left(\frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2}\right) e^{\frac{\ln x}{x}} = \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right) e^{\frac{\ln x}{x}}$.

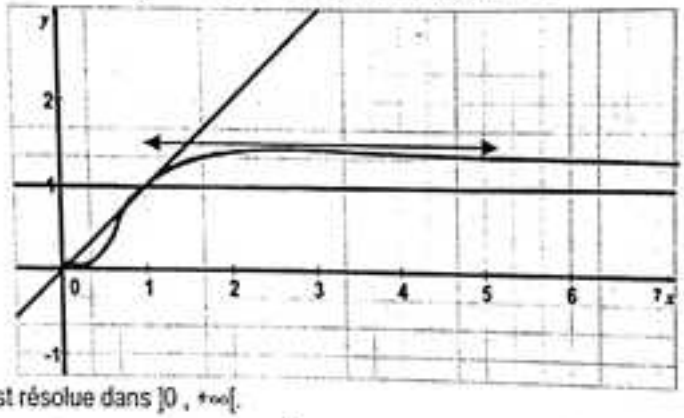
Le signe de $g'(x)$ est celui de $1 - \ln x$.
Or $1 - \ln x > 0$ si et seulement si $x < e$ et $1 - \ln x = 0$ si et seulement si $x = e$.
D'où g est strictement croissante sur $]0 , e]$ et strictement décroissante sur $[e , +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$. D'où le tableau de variations de g est le suivant :

x	0		e	
g'(x)	0	+	0	-
g(x)	0	↗	$\frac{1}{e^e}$	↘ 1

b) Soit $x > 0$, $g(x) = 1$ équivaut successivement à $e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$, puis à $\frac{\ln x}{x} = 0$ et enfin à $x = 1$.

D'où la courbe (C) rencontre la droite d'équation $y = 1$ au point de coordonnées $(1 , 1)$.
c) le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est $g'(1) = 1$.
d)



e) Cette équation est résolue dans $]0 , +\infty[$.

Soit $a > 0$, $a^x - x = 0$ équivaut à $x = a^x$, puis à $x^{\frac{1}{x}} = a$ et enfin à $g(x) = a$. D'après l'étude de g :

- Si $a > e^{\frac{1}{e}}$, l'équation $g(x) = a$ n'a pas de solution, c'est-à-dire l'équation $a^x - x = 0$, n'a pas de solution.
- Si $0 < a \leq 1$, l'équation $g(x) = a$, c'est-à-dire l'équation $a^x - x = 0$, a une unique solution comprise entre 0 et 1.
- Si $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$, l'équation $g(x) = a$, c'est-à-dire l'équation $a^x - x = 0$, a deux solutions, donc une comprise entre 0 et e et l'autre supérieure à e.
- Si $a = e^{\frac{1}{e}}$, l'équation $g(x) = a$, c'est-à-dire l'équation $a^x - x = 0$, a pour solution e.
- Si $a = 1$, l'équation $g(x) = a$, c'est-à-dire l'équation $a^x - x = 0$, a pour solution 1.

Solution 50

1)a) g est définie, continue et dérivable sur $[0 , +\infty[$ et pour tout réel t positif ou nul, $g'(t) = -1 + 2e^{-2t}$.

$g'(t) > 0$ équivaut successivement à $e^{-2t} > \frac{1}{2}$ avec $t \geq 0$, puis $-2t > -\ln 2$ et enfin $0 \leq t < \frac{\ln 2}{2}$.

Et $g'(t) = 0$ si et seulement si $t = \frac{\ln 2}{2}$.

Donc f est strictement croissante sur $\left[0 , \frac{\ln 2}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\ln 2}{2} , +\infty\right[$.

Scanned by CamScanner

$\lim_{t\to+\infty} e^{-2t} = 0$, donc $\lim_{t\to+\infty} g(t) = -\infty$.

D'où le tableau de variations de g qui suit :

t	0	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
g'(t)	0	+	0	-
g(t)	0	↗ $\frac{1-\ln 2}{2}$	↘ $-\infty$

$g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = 1 - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1-\ln 2}{2} \approx 0{,}153$.

b) • Dans $\left]0, \frac{\ln 2}{2}\right]$, on a g(t) > 0, donc l'équation g(t) = 0 n'a pas de solution dans cet intervalle.

Dans $\left]\frac{\ln 2}{2}, +\infty\right[$, g est continue et strictement décroissante. Donc g induit une bijection de $\left]\frac{\ln 2}{2}, +\infty\right[$ sur $g\left(\left]\frac{\ln 2}{2}, +\infty\right[\right) = \left]-\infty, \frac{\ln 2}{2}\right[$. Or 0 appartient à $\left]-\infty, \frac{\ln 2}{2}\right[$, alors l'équation g(t) = 0 admet dans cet intervalle une unique solution a.

Finalement, il existe un unique réel a > 0 tel que g(a) = 0.

• On a $g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = 1 - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1-\ln 2}{2} > 0$ et $g(1) = -e^{-2} < 0$, donc on a $\frac{\ln 2}{2} < a < 1$.

c) • Dans $\left]0, \frac{\ln 2}{2}\right]$, on a g(t) > 0.

• g est strictement décroissante sur $\left]\frac{\ln 2}{2}, +\infty\right[$ donc :

Si $\frac{\ln 2}{2} < t < a$, alors $0 = g(a) < g(t)$ et si $x > a$, alors $g(t) < g(a) = 0$.

En conclusion, si t appartient à]0 , a[, alors on a g(t) > 0.
si t appartient à]a , +∞[, alors g(t) < 0.
si t = 0 ou t = a, alors g(t) = 0.

d) A l'aide de la calculatrice, on montre que g(0,79)×g(0,8) < 0, donc on a 0,79 < a < 0,8.

2)a) • La fonction $x \mapsto \frac{2}{x}$ est dérivable sur]0 , +∞[, donc la fonction $x \mapsto e^{\frac{2}{x}}$, est dérivable sur]0 , +∞[.

Donc la fonction $x \mapsto e^{\frac{2}{x}} - 1$ est dérivable sur]0 , +∞[.

Et comme x > 0, alors $\frac{2}{x} > 0$, donc $e^{\frac{2}{x}} > 1$ et donc $e^{\frac{2}{x}} - 1 > 0$.

Finalement, la fonction $x \mapsto e^{\frac{2}{x}} - 1$ est dérivable et strictement positive sur]0 , +∞[, alors la fonction $x \mapsto \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$ est dérivable sur]0 , +∞[.

Finalement, f est dérivable sur]0 , +∞[(produit de fonctions dérivables sur]0 , +∞[).

• Soit x > 0, on a : $f'(x) = \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1} + \frac{-\frac{2}{x^2}e^{\frac{2}{x}}}{2\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} \times x = \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1 - \frac{1}{x}e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} = e^{x}\frac{\left(1 - \frac{1}{x} - e^{-\frac{2}{x}}\right)}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} = \left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{e^{x}} g\left(\frac{1}{x}\right)$.

Scanned by CamScanner

b) Pour tout $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g\left(\frac{1}{x}\right)$. Or d'après la question 1)a) on a :

$g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ si et seulement si $\frac{1}{x} > a$, c'est-à-dire $0 < x < \frac{1}{a}$.

$g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ si et seulement si $\frac{1}{x} < a$, soit $\frac{1}{a} < x$.

Donc f est strictement décroissante sur $\left]0, \frac{1}{a}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{a}, +\infty\right[$.

3)a) Soit $x > 0$, on a :

$$\ln[f(x)] = \ln x + \ln\left(\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}\right) = \ln x + \frac{1}{2}\ln\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) = \ln x + \frac{1}{2}\ln\left[e^{\frac{2}{x}}\left(1 - e^{-\frac{2}{x}}\right)\right] = \ln x + \frac{1}{2}\ln e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{2}\ln\left(1 - e^{-\frac{2}{x}}\right).$$

Finalement $\ln[f(x)] = \ln x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(1 - e^{-\frac{2}{x}}\right) = \frac{1}{x}(1 + x\ln x) + \frac{1}{2}\ln\left(1 - e^{-\frac{2}{x}}\right)$.

b) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} e^{-\frac{2}{x}} = 0$, $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x}(1 + x\ln x) = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln\left(1 - e^{-\frac{2}{x}}\right) = 0$. Donc $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln(f(x)) = +\infty$.

Or $f(x) = e^{\ln(f(x))}$, alors $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Solution 51

1) Soit $x > 0$, $e^{-\frac{3}{2}x} \times \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{x} = \frac{e^{-\frac{3}{2}x}e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{3}{2}x}e^{-\frac{x}{2}}}{x} = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} = f(x)$, donc $f(x) = e^{-\frac{3}{2}x} \times \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{x}$.

2)a) Soit $x \geq 0$, $u'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)$ et $u''(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)$.

b) • On remarque que pour tout $x > 0$, $u''(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(e^x - 1)$.

Puisque $x > 0$, alors on a $e^x > 1$ donc $u''(x) > 0$. Par conséquent, u' est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
Soit $x > 0$, puisque u' est croissante sur $[0, +\infty[$, alors u' est croissante sur $[0, x]$.
Ainsi, soit t dans $[0, x]$, on a $u'(0) \leq u'(t) \leq u'(x)$.

• Soit $x > 0$, u est dérivable sur $[0, x]$ et pour tout t appartenant à $[0, x]$, on a $u'(0) \leq u'(t) \leq u'(x)$.
Donc en utilisant l'inégalité des accroissements finis à la fonction u sur $[0, x]$, on a :

$(x - 0) \times u'(0) \leq u(x) - u(0) \leq (x - 0) \times u'(x)$. C'est-à-dire $x \leq u(x) \leq \frac{x}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)$.

3)a) • D'après la question précédente, on a pour tout $x > 0$, $x \leq u(x) \leq \frac{x}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)$.

En multipliant les membres de cette inégalité par $e^{-\frac{3}{2}x}$, on a :

$xe^{-\frac{3}{2}x} \leq e^{-\frac{3}{2}x}u(x) \leq e^{-\frac{3}{2}x}\frac{x}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)$. C'est-à-dire $xe^{-\frac{3}{2}x} \leq e^{-\frac{3}{2}x}u(x) \leq \frac{x}{2}(e^{-x} + e^{-2x})$ (1).

Scanned by CamScanner

Puisque $x > 0$, en divisant les membres de l'encadrement (1) par x, on a :

$e^{-\frac{3}{2}x} \leq e^{-\frac{3}{2}x}\frac{u(x)}{x} \leq \frac{1}{2}(e^{-x}+e^{-2x})$. C'est-à-dire $e^{-\frac{3}{2}x} \leq f(x) \leq \frac{e^{-x}+e^{-2x}}{2}$ (2).

- En ajoutant -1 à tous les membres de l'encadrement (2), on a :

$e^{-\frac{3}{2}x}-1 \leq f(x)-1 \leq \frac{e^{-x}+e^{-2x}}{2}-1$. C'est-à-dire $e^{-\frac{3}{2}x}-1 \leq f(x)-1 \leq \frac{e^{-x}-1+e^{-2x}-1}{2}$.

Ainsi, pour $x > 0$, en divisant tous les membres par x, on a : $\frac{e^{-\frac{3}{2}x}-1}{x} \leq \frac{f(x)-1}{x} \leq \frac{e^{-x}-1}{2x}+\frac{e^{-2x}-1}{2x}$.

b) Soit v la fonction définie par $v(x) = e^{ax}$. v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(x) = ae^{ax}$. $v'(0) = a$.

v est dérivable en 0 donc, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x} = v'(0) = a$.

c) D'après 3)b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{3}{2}x}-1}{x} = -\frac{3}{2}$. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\times\frac{e^{-x}-1}{x} = \frac{1}{2}\times(-1) = -\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\times\frac{e^{-2x}-1}{x} = \frac{1}{2}\times(-2) = -1$ puis $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{-x}-1}{2x}+\frac{e^{-2x}-1}{2x}\right) = -\frac{1}{2}-1 = -\frac{3}{2}$.

De plus, pour $x > 0$, on a $\frac{e^{-\frac{3}{2}x}-1}{x} \leq \frac{f(x)-1}{x} \leq \frac{e^{-x}-1}{2x}+\frac{e^{-2x}-1}{2x}$.

Alors d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = -\frac{3}{2}$. D'où f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{3}{2}$.

Solution 52

1) • φ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel non nul x, on a :

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\left(1+1+\frac{1}{x}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(\frac{2x+1}{x}\right).$$

Le signe de $\varphi'(x)$ est celui de $-\left(\frac{2x+1}{x}\right)$. On le résume dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$-\left(\frac{2x+1}{x}\right)$		-	0	+	‖	-	

φ est donc strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ et sur $]0, +\infty[$ et φ est strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right[$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = 2$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x) = 2$.
- $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ donc, $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\varphi(x) = +\infty$.
- Soit $x < 0$, $\varphi(x) = e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+1$.

Scanned by CamScanner

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} x e^{x} = 0$.

Comme de plus, $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ alors, $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \varphi(x) = 1$.

On dresse alors le tableau de variations de φ :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	0	+	‖	-	
$\varphi(x)$	2	↘	$-e^{-2}+1$	↗	1	↘	2

- Dans $]-\infty, 0[$, φ est minorée par $1 - e^{-2}$, donc pour tout $x < 0$, on a $\varphi(x) \geq 1 - e^{-2} > 0$.
  Dans $]0, +\infty[$, φ est minorée par 2, donc pour tout $x > 0$, on a $\varphi(x) \geq 2 > 0$.

Finalement, pour tout réel non nul x, on a $\varphi(x) > 0$.

2)a) • $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x = 0$ donc $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} x = 0$ donc $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = 0 = f(0)$, donc f est continue en 0.

- Soit x réel non nul, on a : $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$. D'où, f est dérivable en 0 à droite et $f_d(0) = 0$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$. D'où f est dérivable en 0 à gauche et $f_g'(0) = 1$.

Or $f_d'(0) \neq f_g'(0)$, donc f n'est pas dérivable en 0.

b) f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout x réel non nul, on a :

$$f'(x) = \frac{(1 + e^{\frac{1}{x}}) - x\left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\right)}{(1 + e^{\frac{1}{x}})^2} = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} + 1}{(1 + e^{\frac{1}{x}})^2} = \frac{\varphi(x)}{(1 + e^{\frac{1}{x}})^2}.$$

Le signe de f '(x) est celui de $\varphi(x)$. Or d'après la question 1), on a $\varphi(x) > 0$ pour $x \neq 0$. Donc $f' > 0$ sur $\mathbb{R}^*$.
f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)	+	1	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Scanned by CamScanner

c) • Soit x réel non nul,

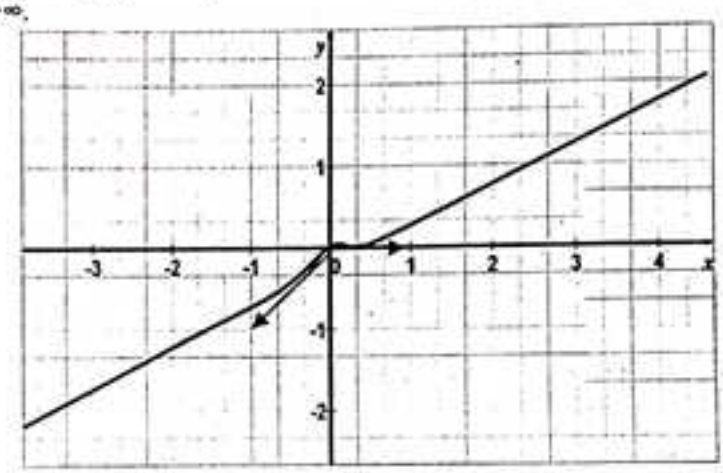
$$f(x)-\frac{x}{2}=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\left(2-\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)\right)=\frac{1}{2}\times\frac{-x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\frac{1}{2}\times\frac{-1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\times\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}.$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}=1.$

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{x}=1$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{1+e^{x}}=-\frac{1}{2}.$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{4}$.

• Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{4}$, alors la droite d'équation $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$ est asymptote oblique à la courbe de f en $-\infty$ et en $+\infty$.



Solution 53

A)1)a) • $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-(-xe^{-x})=\lim\limits_{x\to-\infty}-(xe^{x})=0.$

La limite de kx quand x tend vers $+\infty$ dépend du signe de k. Et :

Si $k<0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}kx=-\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f_k(x)=-\infty$.

Si $k>0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}kx=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f_k(x)=+\infty$.

Si $k=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f_0(x)=0$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}f_k(x)-kx=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$, donc la droite (D_k) d'équation $y=kx$ est asymptote en $+\infty$ à (C_k).

• Soit $x\geq0$, posons $d(x)=f_k(x)-kx=xe^{-x}$. On a $d(x)\geq0$. Alors, dans $[0,+\infty[$, (C_k) est au-dessus de (D_k).

b) f_k est deux fois dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x\geq0$, on a :

• $f_k'(x)=e^{-x}-xe^{-x}+k=(1-x)e^{-x}+k$ et $f_k''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(-2+x)e^{-x}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}f_k'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}-xe^{-x}+k=k$.

• Le signe de $f_k''(x)$ est celui de $-2+x$.

Donc f_k' est strictement croissante sur $[2,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]0,2]$.

2) • $f_0(x)=xe^{-x}$ et $f_0'(x)=(1-x)e^{-x}$.

Le signe de $f_0'(x)$ est celui de $1-x$. D'où le tableau de variations de f_0 qui suit :

Scanned by CamScanner

x	0		1		$+\infty$
$f_0'(x)$	1	$+$	0		
$f_0(x)$	0	↗	e^{-1}	↘	0

- $f_1(x) = xe^{-x} + x$ et $f_1'(x) = (1-x)e^{-x} + 1$.

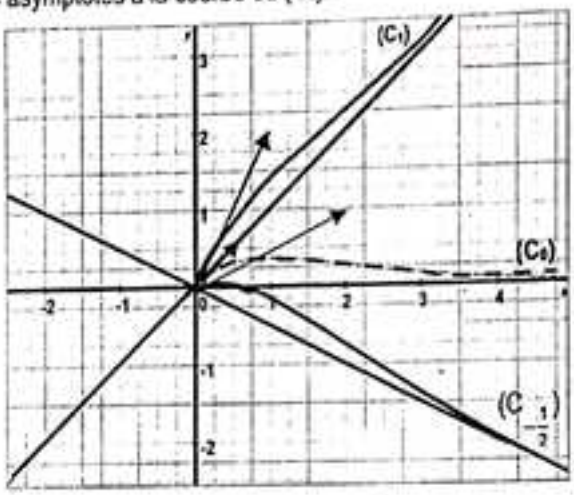
D'après la question A)1)b), le tableau de variations de f_1' est le suivant :

x	0		2		$+\infty$
$f_1''(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1'(x)$	2	↘	$1-e^{-2}$	↗	1

f_1' est minorée par $1 - e^{-2} = 0{,}8646$ sur $[0\,;+\infty[$, donc pour tout $x \geq 0$, on a $f_1'(x) > 0$.
Donc f_1 est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. D'où le tableau de variations de f_1 :

x	0		$+\infty$
$f_1'(x)$	2	$+$	
$f_1(x)$	0	↗	$+\infty$

3) Rappelons que les droites (D_k) sont des asymptotes à la courbe de (C_k).



B)1)a) • $f_{-\frac{1}{2}}'(x) = (1-x)e^{-x} - \frac{1}{2}$.

- D'après la question A)1)b), le tableau de variations de $f_{-\frac{1}{2}}'$ est le suivant :

x	0		2		$+\infty$
$f_{-\frac{1}{2}}''(x)$		$-$	0	$+$	
$f_{-\frac{1}{2}}'(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	$e^{-2}-\frac{1}{2}$	↗	$-\frac{1}{2}$

$f_{-\frac{1}{2}}'$ est continue et strictement décroissante sur $[0\,,2]$ et 0 appartient à $f_{-\frac{1}{2}}'([0\,,2]) = \left]-e^{-2}-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right]$.

D'où l'équation $f_{-\frac{1}{2}}'(x) = 0$, c'est-à-dire $(1-x)e^{-x} - \frac{1}{2} = 0$ a une unique solution α dans $[0\,,2]$.

Scanned by CamScanner

Or dans $[2, +\infty[$, $f_{-\frac{1}{2}}'$ est majorée par $-\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, pour tout x dans $[2, +\infty[$ on a $f_{-\frac{1}{2}}'(x) \leq -\frac{1}{2} < 0$.

Donc l'équation $f_{-\frac{1}{2}}'(x) = 0$, c'est-à-dire $(1-x)e^{-x} - \frac{1}{2} = 0$ n'a pas de solution dans $[2, +\infty[$.

Finalement, l'équation $(1-x)e^{-x} - \frac{1}{2} = 0$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$.

b) A l'aide de la calculatrice, on remarque que $f_{-\frac{1}{2}}'(0,31) \times f_{-\frac{1}{2}}'(0,32) < 0$, donc on a : $0,31 < \alpha < 0,32$.

2) • D'après B)1), on a $f_{-\frac{1}{2}}'(x) < 0$ si x appartient à $]\alpha, +\infty[$ et $f_{-\frac{1}{2}}'(x) > 0$ si x appartient à $[0, \alpha[$.

D'où le tableau de variations de $f_{-\frac{1}{2}}$:

x	0		α		$+\infty$
$f_{-\frac{1}{2}}'(x)$	$\frac{1}{2}$	+	0	-	
$f_{-\frac{1}{2}}$	0	↗	$f_{-\frac{1}{2}}(\alpha)$	↘	$-\infty$

• Voir la courbe de $f_{-\frac{1}{2}}$ dans le repère précédent et prendre $\alpha \approx 0,31$.

Solution 54

Partie A

1) La fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$, donc la fonction d est dérivable sur $]-1, +\infty[$.

Et pour tout $x > -1$, on a $d'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}}$.

On remarque que, pour tout $x > -1$, on a $d'(x) > 0$, donc d est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$.

2) • $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} x+1 = 0$ et si $x > -1$, on a $x + 1 > 0$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{1}{x+1} = +\infty$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} x = -1$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{x}{x+1} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} d(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

• On a aussi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = \lim\limits_{x \to 1} e^x = e$.

3) Puisque d est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$, alors l'image de l'intervalle $]-1, +\infty[$ par g est l'intervalle $\left]\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} d(x), \lim\limits_{x \to +\infty} d(x)\right[=]0, e[$. Il en résulte que, pour tout $x > -1$, on a $0 < d(x) < e$.

Partie B.

1) • $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - e + 1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[e - e^{\frac{x}{x+1}}\right] = 0$, car on a prouvé à la question A)2) que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e$.

D'où la droite (D) d'équation $y = x - e + 1$ est asymptote oblique à la courbe (C) en $+\infty$.

• Soit $x > -1$, on a $f(x) - (x - 1 + e) = e - d(x)$.

Or à la question A)3), on a montré que $d(x) < e$, donc pour tout $x > -1$, on a $f(x) - (x - 1 + e) = e - d(x) > 0$.

On en déduit alors que la courbe (C) de f est au-dessus de son asymptote oblique (D).

2)a) • f est une somme de fonctions dérivables sur $]-1, +\infty[$, donc f est dérivable sur $]-1, +\infty[$, et pour tout $x > -1$,

Scanned by CamScanner

on a : $f'(x) = 1 - d'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}}$

- f' est aussi dérivable sur $]-1, +\infty[$, comme somme et produit de fonctions dérivables sur $]-1, +\infty[$

Et pour tout $x > -1$, on a : $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} e^{\frac{x}{x+1}} - \frac{1}{(x+1)^4} e^{\frac{x}{x+1}} = \frac{2x+1}{(x+1)^4} e^{\frac{x}{x+1}}$.

Le signe de $f''(x)$ est celui de $2x + 1$. Ainsi :

f' est strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left]-1, -\frac{1}{2}\right[$.

b) D'où le tableau de variation de f' :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	-	0	+	
$f'(x)$	$+\infty$ ↘		$1 - 4e^{-1}$	↗	1

3) • f' est continue et strictement décroissante sur $\left]-1, -\frac{1}{2}\right]$.

f' induit donc une bijection de $\left]-1, -\frac{1}{2}\right]$ sur $[1 - 4e^{-1}, 1[$.

Et comme 0 appartient à $[1 - 4e^{-1}, 1[$, alors l'équation $f'(x) = 0$ a une unique solution α dans $\left]-1, -\frac{1}{2}\right]$.

- f' est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, donc f' induit une bijection de $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ sur $]1 - 4e^{-1}, 1[$.

Comme 0 appartient à $]1 - 4e^{-1}, 1[$, alors l'équation $f'(x) = 0$ a une unique solution β dans $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Donc l'équation $f'(x) = 0$ admet deux solutions dans $]-1, +\infty[$.

Or $f'(0) = 0$, alors l'une des solutions est 0. Comme 0 appartient à $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, alors $\beta = 0$.

- A l'aide de la calculatrice, on a : $f'(-0,71) \approx -0,027$ et $f'(-0,72) \approx 0,025$.

Comme $f'(-0,71) \times f'(-0,72) < 0$, alors on a $-0,72 < \alpha < -0,71$.

Une valeur approchée de α à 10^{-2} près est donc $-0,72$.

4)a) A la question B)3), on a montré que $f'(0) = f'(\alpha) = 0$. D'après le tableau de variation de f', on a :

dans $]-1, \alpha[$ et dans $]0, +\infty[$, f' strictement positive, et dans $]\alpha, 0[$, f' strictement négative.

Finalement, f est strictement croissante sur $]-1, \alpha[$ et sur $]0, +\infty[$, et strictement décroissante sur $]\alpha, 0[$.

b) On a pour tout $x > -1$, $f(x) = x + 1 - d(x)$.

Et comme $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} d(x) = 0$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = 0$. Aussi, $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = e$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c) D'où le tableau de variation de f :

x	-1		α		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		$f(\alpha)$	↘	0	↗	$+\infty$

Notons que $f'(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $1 - \frac{1}{(\alpha+1)^2} e^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} = 0$, alors $e^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} = (\alpha+1)^2$.

Scanned by CamScanner

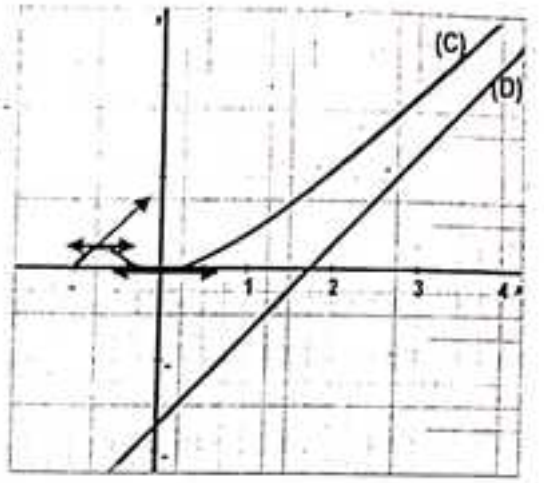
Alors $f(\alpha)=\alpha+1-e^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}=\alpha+1-(\alpha+1)^2=-\alpha(\alpha+1)$.

Partie C.

1)a) Soit $x > -1$, on a :

$$\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=\frac{f(x)}{x+1}=\frac{x+1-e^{\frac{x}{x+1}}}{x+1}=1-\frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{x+1}=1-\frac{xe^{\frac{x}{x+1}}}{x(x+1)}$$

$$\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=1-\frac{1}{x}\left(\frac{x}{x+1}e^{\frac{x}{x+1}}\right).$$



b) • On a montré à la partie A que $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{x}{x+1}=-\infty$.

• Ainsi, $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{x}{x+1}e^{\frac{x}{x+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$ (limite d'une composée).

c) On a alors $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\left(1-\frac{1}{x}\times\frac{x}{x+1}e^{\frac{x}{x+1}}\right)=1$. D'où g est dérivable en -1 et $g'(-1) = 1$.

2) $g'(0) = g'(\alpha) = f'(0) = f'(\alpha) = 0$.
Donc la courbe de g admet aux points d'abscisses 0 et α des tangentes horizontales.

Solution 55

Partie A.

1) Soit f une application appartenant à P et à I.
Pour tout réel x, on a : $f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$.
Donc pour tout réel x, on a $f(x) = -f(x)$. C'est-à-dire $f(x) = 0$. D'où f est l'application nulle de $\mathbb{R}$.
Comme l'application nulle est paire et impaire, alors $P\cap I=\{\theta\}$, où θ est l'application nulle.

2) • F étant définie sur $\mathbb{R}$, alors f et g sont définies sur $\mathbb{R}$. Soit x un nombre réel.

$f(-x)=\frac{1}{2}(F(-x)+F(x))=f(x)$, donc f est paire. D'où f appartient à P.

$g(-x)=\frac{1}{2}(F(-x)-F(x))=-\frac{1}{2}(F(x)-F(-x))=-g(x)$, donc g est impaire. D'où g appartient à I.

• Soit F élément de A.

Posons $f(x)=\frac{1}{2}(F(x)+F(-x))$ et $g(x)=\frac{1}{2}(F(x)-F(-x))$, pour tout réel x.

On a alors $F(x) = f(x) + g(x)$ pour tout réel x.
D'après la question précédente, f est paire et g est impaire.
D'où F est une somme d'un élément de P et d'un élément de I.
Montrons l'unicité de cette écriture :
Supposons qu'il existe une autre fonction paire h et une autre fonction impaire k telles que $F = h + k$.
On a alors pour tout réel x, $f(x) + g(x) = h(x) + k(x)$, donc $f(x) - h(x) = k(x) - g(x)$, pour tout réel x. D'où $f - h = k - g$.
Or $f - h$ appartient à P car la somme de deux fonctions paires est paire (le lecteur le vérifiera) et $k - g$ appartient à I car la somme de deux fonctions impaires est impaire (le lecteur le vérifiera). D'où $f - h$ et $k - g$ appartiennent à $P\cap I$.
Comme d'après la question 1) on a $P\cap I=\{\theta\}$, alors $f - h = \theta$ et $k - g = \theta$. D'où $f = h$ et $g = k$.
D'où l'unicité.
Finalement, tout élément de A est de manière unique, la somme d'un élément de P et d'un élément de I.

Scanned by CamScanner

Partie B.

1) • cosh est définie sur $\mathbb{R}$ et d'après la partie A), cosh est paire. On limitera alors notre étude à l'intervalle $[0, +\infty[$.

cosh est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x, on a $\cosh' x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Pour $x > 0$, on a $x > -x$, donc $e^x > e^{-x}$, donc $\cosh' x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) > 0$.

D'où, cosh est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Notons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \cosh(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty$.

Comme cosh est paire et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, alors cosh est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \cosh(x) = +\infty$.

• sinh est définie sur $\mathbb{R}$ et d'après la partie A), sinh est impaire. On limitera alors notre étude à l'intervalle $[0, +\infty[$.

sinh est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x, on a $\sinh' x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$.

D'où, sinh est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Notons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sinh(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$.

Comme sinh est impaire et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, alors sinh est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$.

Finalement, sinh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) • $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\cosh x - \frac{1}{2}e^x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{2} = 0$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sinh x - \frac{1}{2}e^x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-e^{-x}}{2} = 0$.

• Notons que, d'après ce qui précède, C et S sont asymptotes de la courbe d'équation $y = \frac{1}{2}e^x$ en $+\infty$.

(voir la figure à la fin de cette correction).

3) • La fonction sinh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc sinh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

D'où sinh admet une réciproque $\sinh^{-1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

• Soit x et y deux nombres réels.

$$\sinh^{-1} x = y \Leftrightarrow \sinh y = x \Leftrightarrow \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x \Leftrightarrow e^{2y} - 1 = 2xe^y \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Posons $t = e^y$, on a alors $t^2 - 2xt - 1 = 0$, avec $t > 0$.

Cette dernière équation a pour discriminant $\Delta = 4x^2 + 4 > 0$.

On a alors $t = x + \sqrt{1+x^2}$ ou $t = x - \sqrt{1+x^2}$.

Comme pour tout réel x, on a $1 + x^2 > x^2$, $\sqrt{1+x^2} > |x| \geq -x$ et $\sqrt{1+x^2} > |x| \geq x$.

On en déduit que $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ et $x - \sqrt{1+x^2} < 0$. D'où $t = x + \sqrt{1+x^2}$.

Par conséquent, $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

Finalement, $\sinh^{-1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

4) • La fonction cosh est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc la restriction de cosh à $[0, +\infty[$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers $\cosh([0, +\infty[) = [1, +\infty[$.

D'où la restriction de cosh à $[0, +\infty[$ admet une réciproque $\cosh^{-1}$ définie sur $[1, +\infty[$.

• Soit $x \geq 1$ et y un nombre réel positif.

$$\cosh^{-1} x = y \Leftrightarrow \cosh y = x \Leftrightarrow \frac{e^y + e^{-y}}{2} = x \Leftrightarrow e^{2y} + 1 = 2xe^y \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0.$$

Posons $t = e^y$, on a alors $t^2 - 2xt + 1 = 0$, avec $t > 1$.

Scanned by CamScanner

Cette dernière équation a pour discriminant $\Delta = 4x^2 - 4 > 0$.

On a alors $t = x + \sqrt{x^2-1}$ ou $t = x - \sqrt{x^2-1} = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

Pour tout réel $x \geq 1$, on a $t = x + \sqrt{x^2-1} \geq 1$ et donc aussi $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \leq 1$.

D'où $t = x + \sqrt{x^2-1}$. Par conséquent, $y = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

Finalement, $\cosh^{-1}$ est définie sur $[1, +\infty[$ par $\cosh^{-1} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

5) • cosh est dérivable sur $[0, +\infty[$ et cosh' ne s'annule qu'en 0, donc $\cosh^{-1}$ est dérivable sur $\cosh([0, +\infty[) =]1, +\infty[$.

Pour tout réel $x > 1$, $(\cosh^{-1})'x = \dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

• sinh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sinh' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc $\sinh^{-1}$ est dérivable sur $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $(\sinh^{-1})'x = \dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

6) Voir les graphes de $\cosh^{-1}$ et $\sinh^{-1}$ dans le repère ci-dessus.
Notons que les courbes de $\cosh^{-1}$ et $\sinh^{-1}$ sont symétriques respectives de celles de cosh et sinh par rapport à la première bissectrice.

7) • La fonction tanh est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, tanh est impaire.

Soit x un réel : $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ et $\tanh' x = \dfrac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x}) - (e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2} > 0$.

Donc tanh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1.$$

Comme tanh est impaire, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh x = -1$.

• Pour le graphe, voir le repère ci-dessus.
Remarquons que la courbe de tanh admet une une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = 1$ et une asymptote en $-\infty$ d'équation $y = -1$

8) • La fonction tanh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc la fonction tanh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\tanh(\mathbb{R}) =]-1, 1[$. D'où tanh admet une réciproque $\tanh^{-1}$ définie sur $]-1, 1[$.

• Soit x appartenant à $]-1, 1[$ et y un nombre réel.

$$\tanh^{-1} x = y \Leftrightarrow \tanh y = x \Leftrightarrow \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x \Leftrightarrow \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = x \Leftrightarrow e^{2y}(x-1) = -1-x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right).$$

Finalement, $\tanh^{-1}$ est définie sur $]-1, 1[$ par : $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$.

9) • tanh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et tanh' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc $\tanh^{-1}$ est dérivable sur $\tanh(\mathbb{R}) =]-1, 1[$.

Pour tout x dans $]-1, 1[$, $(\tanh^{-1})'x = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\dfrac{2}{(1-x)^2}}{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1}{1-x^2}$.

• Pour le graphe de $\tanh^{-1}$, voir le repère ci-dessus.
Notons que la courbe de $\tanh^{-1}$ est symétrique de celle de tanh par rapport à la première bissectrice.

Scanned by CamScanner

Partie C

1) • Soit x un nombre réel.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2) = 1.$$

D'où pour tout réel x, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

2) • Soit x et y deux nombres réels. $\cosh(x+y) = \frac{1}{2}(e^{(x+y)} + e^{-(x+y)})$ et

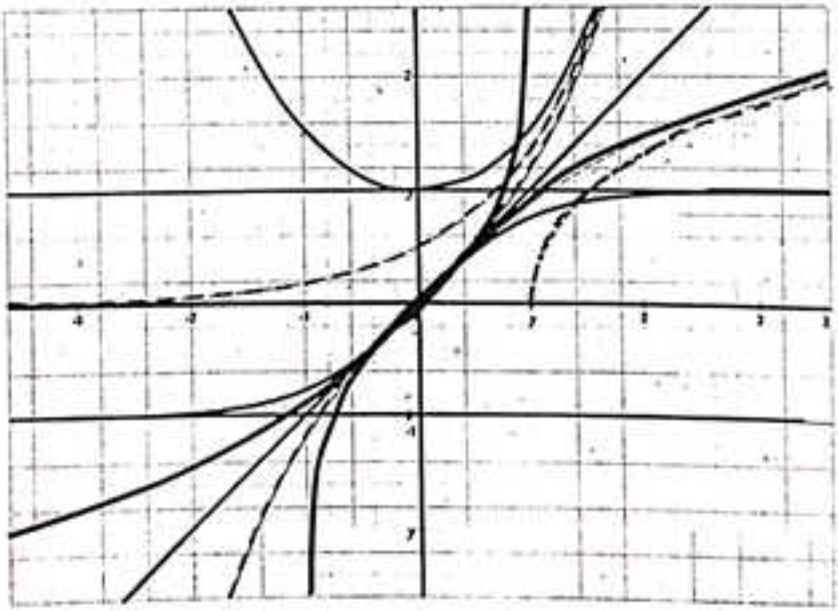
$$\begin{aligned}\cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y &= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-(x+y)} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-(x+y)}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{x+y} + e^{-(x+y)}) \\ &= \cosh(x+y)\end{aligned}$$

D'où, pour tous réels x et y, cosh(x + y) = coshxcoshy + sinhxsinhy.

• Soit x et y deux nombres réels. $\sinh(x+y) = \frac{1}{2}(e^{(x+y)} - e^{-(x+y)})$ et

$$\begin{aligned}\cosh x\sinh y - \sinh x\cosh y &= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y}) + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-(x+y)} + e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-(x+y)}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-(x+y)}) \\ &= \sinh(x+y)\end{aligned}$$

D'où, pour tous réels x et y, sinh(x + y) = coshxsinhy – sinhxcoshy.



Scanned by CamScanner

4 SUITES NUMERIQUES

RAPPEL DU COURS

A. Généralités

A_1 – Définitions et notations

- On appelle suite numérique, toute application u de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie E de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$.

La suite u est notée (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'image u(n) de n par u sera notée u_n : c'est le terme d'indice n.

- Soit n_0 un entier naturel non nul, toute application u de $\mathbb{N}-\{0,1,2,\ldots,n_0-1\}$ vers $\mathbb{R}$ est une suite : c'est la suite définie à partir du rang n_0. On la note $(u_n)_{n\geq n_0}$.

- On appelle sous-suite ou suite extraite d'une suite (u_n), toute suite (v_n) telle que, pour tout entier naturel n, $v_n = u_{f(n)}$, où f est une application injective croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

En particulier, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des sous-suites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: ce sont respectivement les sous-suites de rangs pairs et impairs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

A_2 – Monotonie (sens de variation) d'une suite

On dit qu'une suite (u_n) est :

- croissante lorsque pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq u_n$.
- décroissante lorsque pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.
- constante lorsque pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.
- stationnaire, lorsqu'elle est constante à partir d'un certain rang.
- alternée, lorsque pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \times u_n < 0$.
- périodique, lorsqu'il existe un entier naturel non nul N tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+N} = u_n$.

Remarque :

Notons que, pour étudier la monotonie d'une suite (u_n), on peut :

+ étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$: si cette différence est positive, alors la suite est croissante ; si cette différence est négative, alors la suite est décroissante ; si elle est nulle, la suite est constante.

+ aussi, si (u_n) est une suite à termes strictement positifs, dans certains cas comparer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :

- *si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.*
- *si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite (u_n) est croissante.*
- *si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors la suite (u_n) est constante.*

A_3 – Majoration, minoration d'une suite

Une suite (u_n) est dite :

- majorée par un réel M, lorsque pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$.
- minorée par un réel m, lorsque pour tout entier naturel n, $u_n \geq m$.
- bornée, lorsqu'elle majorée et minorée.
- Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques.

On note $(u_n) \leq (v_n)$ lorsque pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq v_n$.

Scanned by CamScanner

B. Suites arithmétiques - Suites géométriques

B_1 – Suites arithmétiques

a) Définition :

Une suite (u_n) est dite arithmétique lorsqu'on peut trouver un réel r (indépendant de n) tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est alors la raison de cette suite.

b) Monotonie d'une suite arithmétique :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- si $r \geq 0$, alors la suite (u_n) est croissante.
- si $r \leq 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.
- si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.

c) Relation entre deux termes quelconques d'une suite arithmétique :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, et m et n deux entiers naturels quelconques, on a : $u_n = u_m + (n - m)r$.

d) Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, et m et n deux entiers naturels quelconques, tels que $m \leq n$, on a :

$$u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_n = \left(\frac{n-m+1}{2}\right)(u_n + u_m).$$

B_2 – Suites géométriques

a) Définition :

Une suite (u_n) est dite géométrique lorsqu'on peut trouver un réel q tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = qu_n$.
Le réel q est alors la raison de cette suite.

b) Monotonie d'une suite géométrique :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

- si $q = 0$, alors la suite (u_n) est stationnaire.
- si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.
- si $q < 0$ et de premier terme non nul, alors la suite (u_n) est alternée.

c) Relation entre deux termes quelconques d'une suite géométrique :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, et n et m deux entiers naturels quelconques, on a : $u_n = q^{n-m}u_m$.

d) Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, et m et n deux entiers naturels quelconques, tels que $m \leq n$, on a :

$$u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_n = \left(\frac{q^{n-m+1}-1}{q-1}\right) \times u_m.$$

C. Limite et convergence d'une suite

C_1 – Définitions

- Toute suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$. Ainsi la notion de limite d'une suite est connue.

La suite n'étant définie ni au voisinage de $-\infty$, ni au voisinage d'un réel, les notions de limite d'une suite en un réel ou en $-\infty$ n'ont pas de sens.
Donc lorsqu'on parle de la limite d'une suite (u_n), il s'agit de la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Et lorsque cette limite existe, elle est unique et on la note : $\lim u_n$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

- Lorsque la limite de la suite (u_n) existe et est un réel l, alors on dit que la suite (u_n) converge vers l.

Scanned by CamScanner

• Lorsque la suite (u_n) ne converge pas (c'est-à-dire qu'elle n'a pas de limite ou alors sa limite est infinie), on dit qu'elle diverge.

C₂ – Quelques techniques pour étudier de la convergence et de la limite d'une suite

Les résultats sur les limites des suites (somme, produit, quotient de suites) sont les mêmes que pour les limites de fonctions somme, produit et quotient en $+\infty$.

a) Limite d'une suite définie par une formule explicite :

Soit (u_n) une suite définie sous la forme : $u_n = f(n)$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

b) Limites de a^n :

• Si $-1 < a < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$

• Si $a > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$

• Si $a \le -1$, alors $\lim_{n\to+\infty} a^n$ n'existe pas

• Si $a = 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} a^n = 1$.

c) Limites et comparaison des suites :

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites.

• Si $u_n \le v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \le \lim_{n\to+\infty} v_n$.

• Si $u_n \le v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Si $u_n \le v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

• Si $v_n \le u_n \le w_n$ à partir d'un certain rang et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l$ (où l est un nombre réel), alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

(cette propriété est connue sous le nom de : **théorème des gendarmes ou théorème du sandwich**).

• Si $|u_n - \varphi| \le v_n$ à partir d'un certain rang (φ est un nombre réel) et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \varphi$.

d) Sous suite et limite d'une suite :

• Si une suite (u_n) converge vers un réel b, alors toute sous suite de la suite (u_n) converge vers b.

La réciproque est fausse. C'est-à-dire, si une sous suite d'une suite (u_n) converge vers b, la suite (u_n) ne converge pas automatiquement.

• Par contre, si les sous suites de rangs pairs $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et impairs $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite b, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers b.

• Si deux sous suites d'une suite (u_n) ont des limites différentes, alors la suite (u_n) n'a pas de limite.

e) Monotonie et convergence d'une suite :

• Si une suite (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge.

Si une suite (u_n) est croissante et non majorée, alors elle diverge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

• Si une suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge.

Si une suite (u_n) est décroissante et non minorée, alors elle diverge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

f) Limite de l'image d'une suite par une fonction :

• Soit une suite (u_n) et f une fonction.

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = b$, alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{x\to b} f(x)$. Où b désigne un réel, $-\infty$ ou $+\infty$

• Soit f une fonction continue et (u_n) une suite définie par la donnée de son premier terme et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) converge vers un réel b, alors b est solution de l'équation $f(x) = x$.

Scanned by CamScanner

C₃ – Suites adjacentes

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes lorsque l'une d'elles est croissante, l'autre décroissante et $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Scanned by CamScanner

EXERCICES POUR COMPRENDRE LE COURS

A. Etudier le sens de variation d'une suite

1 – En utilisant le calcul de $u_{n+1} - u_n$

Exercice 1

Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n>0}$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$.

Solution 1

Soit n un entier naturel non nul, on a : $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} + \frac{2^{n+1}}{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} = \frac{2^{n+1}}{n+1} > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Point méthode :

Voici quelques règles de transformation sur le symbole Σ que nous exploiterons dans ce chapitre :
Soit n, m et p 3 entiers naturels, tels que $p \leq n$, on a :

a) $\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$ et $\sum_{k=p}^{n} u_k = u_n + \sum_{k=p}^{n-1} u_k$.

b) $\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p}^{m} u_k + \sum_{k=m+1}^{n} u_k$ *(avec $p \leq m < n$)*

c) $\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p+m}^{n+m} u_{k-m}$ et $\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p-m}^{n-m} u_{k+m}$.

d) $\sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1)a$; *a étant un nombre réel indépendant de k.*

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n^2 - 2u_n + 1$.
Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

Solution 2

Soit n entier naturel, $u_{n+1} - u_n = (3u_n^2 - 2u_n + 1) - u_n = 3u_n^2 - 3u_n + 1 = 3\left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$.

Or pour tout entier naturel n, on a $3\left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0$.

On en déduit donc que (u_n) est strictement croissante.

Exercice 3

Démontrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ définie pour tout entier naturel non nul n par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ est croissante

Solution 3

Soit n un entier naturel non nul,

Scanned by CamScanner

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

$$=\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

Ainsi, $u_{n+1}-u_n>0$, Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 4

Etudier le sens de variation de la suite $(n-\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution 4

Soit n un entier naturel, posons $u_n=n-\sqrt{n}$.

On a : $u_{n+1}-u_n=(n+1-\sqrt{n+1})-(n-\sqrt{n})=1+\sqrt{n}-\sqrt{n+1}=\frac{(1+\sqrt{n})^2-(n+1)}{1+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{2\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

Ainsi, $u_{n+1}-u_n\geq 0$, d'où la suite $(n-\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2 – *En utilisant le calcul du rapport* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

Exercice 5

Démontrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ telle que $u_n=\frac{e^{2n}}{n}$ est strictement croissante.

Solution 5

Soit n un entier naturel non nul, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e^{2n+2}}{n+1}\times\frac{n}{e^{2n}}=\frac{ne^2}{n+1}$.

Or on a pour $n\geq 1$: $n+1\leq 2n$, donc $\frac{1}{n+1}\geq\frac{1}{2n}$ et $\frac{e^2n}{n+1}\geq\frac{e^2n}{2n}=\frac{e^2}{2}>1$.

Ainsi, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$. D'où la suite (u_n), qui est à termes positifs, est strictement croissante.

Exercice 6

Déterminer le sens de variation de la suite $(n^n e^{-n})_{n>0}$.

Solution 6

Soit n un entier naturel non nul, posons $u_n=n^n e^{-n}$.

Remarquons que l'on a $u_n>0$.

Et $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}}{n^n e^{-n}}=\frac{(n+1)^n}{n^n}(n+1)e^{-1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{n+1}{e}$.

Or pour tout entier $n>0$, on a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n}>\frac{n+1}{e}$.

Scanned by CamScanner

Pour $n \geq 2$, on a $\frac{n+1}{e} \geq 1$, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Pour $n = 1$, on a $u_1 = e^{-1}$, $u_2 = \frac{4}{e^2}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{e} > 1$.

D'où pour tout entier naturel non nul, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Donc la suite $(n^n e^{-n})_{n>0}$ est strictement croissante.

3 – En utilisant un raisonnement par récurrence

Exercice 7

Montrer que la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 2$, est décroissante.

Solution 7

Notons P(n) la proposition : « $u_{n+1} \leq u_n$ ».
On a $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ donc $u_1 \leq u_0$ donc P(0) est vraie.
Supposons P(n) vraie pour un certain entier naturel n et montrons alors que P(n+1) est aussi vraie (c'est-à-dire $u_{n+2} \leq u_{n+1}$).
On a : $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n - 2$.
L'hypothèse de récurrence est $u_{n+1} \leq u_n$ soit $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc $u_{n+1} - u_n - 2 \leq 0$.
D'où $u_{n+2} - u_{n+1} \leq 0$. Ainsi, P(n + 1) est aussi vraie.
D'où d'après le raisonnement par récurrence, on peut en déduire que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \leq u_n$.
Et donc que la suite (u_n) est décroissante.

4 – En utilisant l'étude d'une fonction

Exercice 8

Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = n - \ln(n + 1)$.

Solution 8

Considérons la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x - \ln(x + 1)$. On a : $u_n = f(n)$.

f est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$, et pour tout réel positif x, on a : $f'(x) = \frac{x}{x+1}$.

Et pour tout réel $x > 0$, on a $f'(x) > 0$, avec $f'(0) = 0$. Donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
D'où, pour tout entier naturel n, on a : $f(n+1) > f(n)$, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$.
(u_n) est par conséquent strictement croissante.

Exercice 9

En étudiant la fonction $x \mapsto x^2 e^{-x}$, déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 e^{-n}$.

Solution 9

Considérons la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 e^{-x}$.
f est définie, continue et dérivable sur $[0, +\infty[$. Pour tout réel positif x, on a : $f'(x) = x(2 - x)e^{-x}$.
Pour $x \geq 2$, on a $f'(x) \leq 0$.
Pour $0 \leq x \leq 2$, on a $f'(x) \geq 0$.
f est croissante dans $[0, 2]$ et décroissante sur $[2, +\infty[$.
D'où pour $n \geq 2$, on a $f(n + 1) \leq f(n)$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_n$.
Or $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{e}$, $u_2 = \frac{4}{e^2}$. Donc $u_0 < u_1 < u_2$.
On conclut que (u_n) est décroissante à partir du rang 2 et croissante pour $n < 3$..

Scanned by CamScanner

Exercice 10

On considère la suite définie par u_0 appartient [0, 1] et la relation $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$ pour tout entier naturel n.

On admettra (on le montrera à l'exercice 15) que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \le u_n \le 1$.
Etudier la monotonie de la suite (u_n).

Solution 10

Etudions la monotonie de (u_n) par récurrence sur n.
Comparons d'abord u_0 et u_1 :

$$u_0 \le u_1 \Leftrightarrow u_0 \le \sqrt{\frac{1+u_0}{2}} \Leftrightarrow u_0^2 \le \frac{1+u_0}{2} \Leftrightarrow 2u_0^2 - u_0 - 1 \le 0 \Leftrightarrow u_0 \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right].$$

Et comme $u_0 \in [0, 1]$ par définition, alors on a $u_0 \le u_1$.

Supposons $u_n \le u_{n+1}$ pour un certain entier naturel n, alors, la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ (voir exercice 16)

étant croissante sur [0 , 1], on aura aussi $f(u_n) \le f(u_{n+1})$. C'est-à-dire $u_{n+1} \le u_{n+2}$.
On peut donc conclure d'après le raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n \le u_{n+1}$.
C'est-à-dire (u_n) est croissante.

Point méthode :

Soit (u_n) la suite définie par la donnée de son premier terme u_0, et la relation de récurrence $f(u_n) = u_{n+1}$.

- *Si f est croissante, alors (u_n) est monotone.*
  - *Si $u_0 \le u_1$, alors (u_n) est croissante. (Lors d'un devoir, il faudra le montrer par récurrence)*
  - *Si $u_1 \le u_0$, alors (u_n) est décroissante. (Lors d'un devoir, il faudra le montrer par récurrence)*
- *Si f est décroissante, alors (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.*
  En effet : - si $u_0 \le u_1$, alors $f(u_1) \le f(u_0)$, c'est-à-dire $u_2 \le u_1$
  - Par contre si $u_1 \le u_0$, alors $f(u_0) \le f(u_1)$, c'est-à-dire $u_1 \le u_2$.

Remarque :

On étudiera la monotonie de la suite (u_n) à l'exercice 27, par une autre méthode.

B. Majorer, minorer ou borner une suite

1 – En utilisant les opérations sur les encadrements

Exercice 11

Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -n^2 + 3n + 7$ est majorée.

Solution 11

Soit n entier naturel, $-n^2 + 3n + 7 = -(n^2 - 3n) + 7 = -\left(n - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{37}{4}$.

Or, on a : $\left(n - \frac{3}{2}\right)^2 \ge 0$ donc $-\left(n - \frac{3}{2}\right)^2 \le 0$ et $u_n \le \frac{37}{4}$. La suite (u_n) est donc majorée par $\frac{37}{4}$.

Exercice 12

Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{2 + \cos n}{3 - \sin\sqrt{n}}$ est bornée.

Solution 12

Soit n un entier naturel, on a : $-1 \le \cos n \le 1$, donc $1 \le 2 + \cos n \le 3$ (1)

De plus, on a $-1 \le \sin\sqrt{n} \le 1$ donc $-1 \le -\sin\sqrt{n} \le 1$ donc $2 \le 3 - \sin\sqrt{n} \le 4$ donc $\frac{1}{4} \le \frac{1}{3 - \sin\sqrt{n}} \le \frac{1}{2}$ (2).

Scanned by CamScanner

En multipliant membre à membre les inégalités (1) et (2) on obtient, $\frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{3}{2}$.

Par conséquent, la suite (u_n) est bornée.

Remarquons que la suite (u_n) est bien définie. En effet on a $2 \leq 3 - \sin\sqrt{n} \leq 4$, donc $3 - \sin\sqrt{n} \neq 0$.

2 – En utilisant un raisonnement par récurrence

Exercice 13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{1995}$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $1 < u_n < 1 + \frac{1}{1994}$.

Solution 13

Soit P_n la proposition : « $1 < u_n < 1 + \frac{1}{1994}$ ».

On a : $u_1 = 1 + \frac{1}{1995}$, donc $1 < u_1 < 1 + \frac{1}{1994}$. D'où P_1 est vraie.

Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel non nul n et montrons que P_{n+1} est aussi vraie (C'est-à-dire $1 < u_{n+1} < 1 + \frac{1}{1994}$) :

Par définition, on a : $u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{1995}$.

Or d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $1 < u_n < 1 + \frac{1}{1994}$ $\left(1 + \frac{1}{1994} = \frac{1995}{1994}\right)$ donc $\frac{1994}{1995} < \frac{1}{u_n} < 1$;

et par suite, $\frac{1994}{1995} + \frac{1}{1995} < \frac{1}{u_n} + \frac{1}{1995} < 1 + \frac{1}{1995}$. C'est-à-dire $1 < u_{n+1} < 1 + \frac{1}{1995}$.

Et comme $1 + \frac{1}{1995} < 1 + \frac{1}{1994}$, alors on a $1 < u_{n+1} < 1 + \frac{1}{1994}$. Et donc P_{n+1} est vraie.

On en déduit que pour tout n, entier naturel non nul, on a : $1 < u_n < 1 + \frac{1}{1994}$.

3 – En utilisant l'étude d'une fonction

Exercice 14

Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ est bornée.

Solution 14

Soit f la fonction définie pour $x \geq 1$ par : $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

La fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est dérivable et strictement positive sur $[1, +\infty[$ donc la fonction f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour tout $x \geq 1$, $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)} > 0$. Donc f est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ donc l'image de l'intervalle $[1, +\infty[$ est l'intervalle $\left[f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= [-\ln 2, 0[$.

Scanned by CamScanner

Donc si x appartient à $[1, +\infty[$, f(x) appartient à $[-\ln 2, 0[$.
Alors pour tout entier naturel non nul n, $u_n = f(n)$ appartient à $[-\ln 2, 0[$.
La suite (u_n) est donc majorée par 0 et minorée par $-\ln 2$, par conséquent, elle est bornée.

Exercice 15

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ et la suite définie par la donnée de $u_0 \in [0, 1]$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$ pour tout entier naturel n.

Montrer que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$.
Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

Solution 15

La fonction f est continue et dérivable sur $]-1, +\infty[$, et pour tout réel $x > -1$, $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1+x}{2}}} > 0$.

f est donc strictement croissante sur $]-1, +\infty[$ et $f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = \left[\sqrt{\frac{1}{2}}, 1\right]$ qui est contenu dans $[0, 1]$.

Montrons alors par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0, 1]$.
Soit P_n la proposition : « $u_n \in [0, 1]$ ».

- Par définition de (u_n), $u_0 \in [0, 1]$. D'où P_0 est vraie.
- Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel n, montrons que P_{n+1} est vraie, (c'est-à-dire $u_{n+1} \in [0, 1]$).

Puisque par hypothèse de récurrence, $u_n \in [0, 1]$, alors $f(u_n) \in f([0, 1])$.
Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et d'après ce qui précède $f([0, 1]) \subset [0, 1]$, alors u_{n+1} appartient à $[0, 1]$. Donc P_{n+1} est aussi vraie.
Et finalement, pour tout entier naturel n, $u_n \in [0, 1]$.

Remarque :
On reprendra cette question à l'exercice 26, par une autre méthode

C. Etudier la convergence d'une suite

1 – En utilisant les limites usuelles

Exercice 16

Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par :

a) $u_n = n - e^n$ b) $u_n = \frac{1-n}{n^2+n+2}$ c) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Solution 16

a) Soit n, un entier naturel non nul : $u_n = n - e^n = n\left(1 - \frac{e^n}{n}\right)$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$. La suite (u_n) est donc divergente.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1-n}{n^2+n+2} = \lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} = 0$. La suite (u_n) converge donc vers 0.

c) Soit n un entier naturel, on a : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$.

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Et par conséquent, La suite (u_n) converge vers 0.

Scanned by CamScanner

Exercice 17

Etudier la convergence des suites $(u_n)_{n>0}$ et $(v_n)_{n>0}$ définies pour tout entier naturel non nul n par, $u_n = 2n - \ln n$ et $v_n = \dfrac{e^{u_n}}{1+u_n}$.

Solution 17

- Soit n, entier naturel non nul, $u_n = 2n - \ln n = n\left(2 - \dfrac{\ln n}{n}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. D'où la suite (u_n) est divergente.

- Soit f telle que $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$. On remarque que, $v_n = f(u_n)$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}\left(\dfrac{1}{\frac{1}{x}+1}\right) = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

(v_n) est par conséquent divergente.

Exercice 18

Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$.

Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n>0}$ définie pour tout entier naturel non nul n par : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$.

Solution 18

- Pour tout réel $x > 0$, on a : $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{(x+1)-x}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

- Soit n un entier naturel non nul, on a :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$. Et par conséquent, La suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 19

On définit la suite (u_n) par : son terme initial $u_0 = 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1}$.

1) Calculer u_1, u_2, u_3.

2) Soit la fonction h définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$ par : $h(x) = \dfrac{x+8}{2x+1}$ et (H) sa courbe représentative.

a) Tracer (H) et la droite (d) d'équation $y = x$ dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1cm).

b) Construire à l'aide de (H) et de (d) les points de l'axe $(O ; \vec{i})$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2, u_3.

c) Que peut-on prévoir quant à la convergence de la suite (u_n) ?

3) (v_n) est la suite définie pour tout n par : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$.

a) Calculer v_0, v_1 et v_2.

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera.

c) Exprimer v_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (v_n) quand n tend vers $+\infty$.

Scanned by CamScanner

4) Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

Solution 19

1) $u_1 = \dfrac{u_0+8}{2u_0+1}$ soit $u_1 = 3$. $u_2 = \dfrac{u_1+8}{2u_1+1}$ soit $u_2 = \dfrac{11}{7}$. $u_3 = \dfrac{u_2+8}{2u_2+1}$ soit $u_3 = \dfrac{67}{29}$.

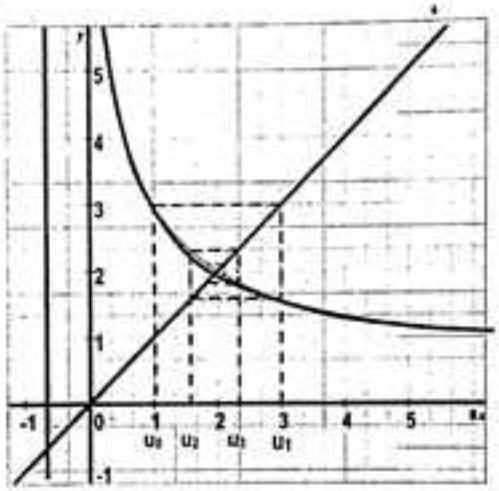
2) Soit h, fonction définie de $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ vers $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{x+8}{2x+1}$

a) h est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$ et pour $x > -\dfrac{1}{2}$, $h'(x) = \dfrac{-15}{(2x+1)^2} < 0$.

h est strictement décroissante sur $\left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.

(H) admet pour asymptotes les droites d'équations respectives : $x = -\dfrac{1}{2}$ et $y = \dfrac{1}{2}$.

b) **Représentation graphique :**



c) Graphiquement, nous pouvons conjecturer que la suite (u_n) converge vers 2.

3) Soit (v_n) définie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n-2}{u_n+2}$.

a) $v_0 = \dfrac{u_0-2}{u_0+2}$ soit $v_0 = -\dfrac{1}{3}$. $v_1 = \dfrac{u_1-2}{u_1+2}$ soit $v_1 = \dfrac{1}{5}$. $v_2 = \dfrac{u_2-2}{u_2+2}$ soit $v_2 = -\dfrac{3}{25}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+2} = \dfrac{\dfrac{u_n+8}{2u_n+1}-2}{\dfrac{u_n+8}{2u_n+1}+2} = \dfrac{u_n+8-4u_n-2}{u_n+8+4u_n+2} = \dfrac{-3u_n+6}{5u_n+10} = -\dfrac{3}{5} \times \dfrac{u_n-2}{u_n+2} = -\dfrac{3}{5}v_n$.

$v_{n+1} = -\dfrac{3}{5}v_n$, donc (v_n) est la suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{5}$ et de premier terme $v_0 = -\dfrac{1}{3}$.

c) • Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n$, donc $v_n = -\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n$.

• $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ (car $-1 < -\dfrac{3}{5} < 1$).

4) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n-2}{u_n+2}$. Donc $(u_n+2)v_n = u_n - 2$ donc $u_n(v_n-1) = -2v_n - 2$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n \neq 1$, car $|v_n| = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ donc $|v_n| < 1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{-2v_n-2}{v_n-1}$.

Scanned by CamScanner

Il s'ensuit pour tout $n \in \mathbb{N}$ que, $u_n = \dfrac{\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{5}\right)^n - 2}{-\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{5}\right)^n - 1}$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

2 – En utilisant les propriétés de comparaison

Exercice 20

Etudier la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = \cos n - n$ b) $u_n = \ln n + (-1)^n$ c) $u_n = \dfrac{n + \sin n}{n^2 + 1}$

d) $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \sin n$ e) $u_n = \left|\frac{1}{2}\sin(n^2+1)\right|^n$ f) $u_n = \dfrac{\sin\sqrt{n} - 3n}{2n + \cos\sqrt{n^2 - 1}}$.

Solution 20

a) Soit n entier naturel, on a : $-1 \le \cos n \le 1$, donc $-n - 1 \le -n + \cos n \le -n + 1$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-n) = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -n + \cos n = -\infty$.

b) Soit n entier naturel, on a : $-1 \le (-1)^n \le 1$, donc $\ln n - 1 \le \ln n + (-1)^n \le \ln n + 1$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n - 1 = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c) Soit n entier naturel, on a : $-1 \le \sin n \le 1$, donc $n - 1 \le n + \sin n \le 1 + n$.

Et puisque pour tout n, $n^2 + 1$ est strictement positif, alors on a aussi : $\dfrac{n-1}{n^2+1} \le u_n \le \dfrac{n+1}{n^2+1}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n^2+1} = 0$, alors d'après le théorème des gendarmes, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

d) Soit n un entier naturel, on a : $-1 \le \sin n \le 1$ donc $-\left(\frac{3}{4}\right)^n \le \left(\frac{3}{4}\right)^n \sin n \le \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Comme $\frac{3}{4} \in]-1, 1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} -\left(\frac{3}{4}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$.

Et d'après le théorème des gendarmes, on peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

e) Soit n entier naturel, on a : $-1 \le \sin(n^2 + 1) \le 1$, donc $-\dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{2}\sin(n^2+1) \le \dfrac{1}{2}$.

Donc $\left|\frac{1}{2}\sin(n^2+1)\right| \le \frac{1}{2}$ et $\left|\frac{1}{2}\sin(n^2+1)\right|^n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Puisque $|u_n| = \left|\frac{1}{2}\sin(n^2+1)\right|^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

f) Pour tout entier naturel non nul n, on a : $-1 \le \cos\sqrt{n^2-1} \le 1$, donc $0 < 2n - 1 \le 2n + \cos\sqrt{n^2-1} \le 2n + 1$.

Et par suite, on a : $0 < \dfrac{1}{2n+1} \le \dfrac{1}{2n + \cos\sqrt{n^2-1}} \le \dfrac{1}{2n-1}$ (1)

On a aussi : $-1 \le \sin\sqrt{n} \le 1$, donc $-1 - 3n \le \sin\sqrt{n} - 3n \le 1 - 3n$. Donc $0 \le 3n - 1 \le 3n - \sin\sqrt{n} \le 3n + 1$ (2)

Les encadrements (1) et (2) ci-dessus permettent en multipliant membre à membre d'écrire :

Scanned by CamScanner

$\frac{3n-1}{2n+1} \le -u_n \le \frac{3n+1}{2n-1}$. Donc $\frac{-3n-1}{2n-1} \le u_n \le \frac{-3n+1}{2n+1}$. Puisque, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-3n-1}{2n-1} = -\frac{3}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-3n+1}{2n+1} = -\frac{3}{2}$, alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\frac{3}{2}$.

Exercice 21

Montrer que pour tout naturel non nul n, on a : $\frac{n^2}{n^2+n} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \le \frac{n^2}{n^2+1}$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ définie pour tout n, entier naturel non nul par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$ est convergente.

Solution 21

- Soit n un entier naturel non nul, on a pour tout entier k appartenant à $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n^2+1 \le n^2+k \le n^2+n$.

Ce qui implique que $\frac{1}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+k} \le \frac{1}{n^2+1}$.

Et ensuite en multipliant par n, on a : $\frac{n}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2+k} \le \frac{n}{n^2+1}$.

D'où $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1}$.

Or on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} = \frac{n^2}{n^2+n}$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}$, alors on peut conclure que $\frac{n^2}{n^2+n} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \le \frac{n^2}{n^2+1}$.

- De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$, alors d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. D'où la suite $(u_n)_{n>0}$ converge vers 1.

3 – En exploitant la monotonie de la suite

Exercice 22

On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k^2}$.

1) Montrer que, pour tout entier $k \ge 1$, on a : $\frac{\ln k}{k^2} \le \frac{1}{k\sqrt{k}}$.

2) Etablir que, pour $k > 1$: $\frac{1}{2k\sqrt{k}} \le \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}$.

3) En déduire que $u_n \le 2 - \frac{2}{\sqrt{n}}$, pour $n \ge 1$.

4) Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée. Conclure.

Solution 22

1) Soit k entier naturel supérieur ou égal à 1, on a : $\frac{\ln k}{k^2} - \frac{1}{k\sqrt{k}} = \frac{\ln k - \sqrt{k}}{k^2}$.

Le signe de $\frac{\ln k}{k^2} - \frac{1}{k\sqrt{k}}$ est donc celui de $\ln k - \sqrt{k}$.

Pour trouver le signe de $\ln k - \sqrt{k}$, considérons la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$.

Scanned by CamScanner

f est définie, continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et pour tout réel $x>0$, on a $f'(x)=\dfrac{2-\sqrt{x}}{2x}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $2-\sqrt{x}$, car x est strictement positif.

Or $2-\sqrt{x}>0$ équivaut à $\sqrt{x}<2$, c'est-à-dire $0<x<4$. Le tableau de variation de f est alors le suivant :

x	0		4		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)		↗	$2\ln 2-2$	↘	

D'après l'étude de f, f est majorée par $2\ln 2-2$. D'où pour tout réel $x>0$, on a : $f(x)\le 2\ln 2-2<0$.

Ainsi, pour tout $x>0$, on a : $\ln x-\sqrt{x}\le 0$.

Donc, soit $k\ge 1$, on a $\ln k-\sqrt{k}\le 0$. Ce qui implique $\dfrac{\ln k}{k^2}-\dfrac{1}{k\sqrt{k}}\le 0$.

On peut donc conclure que, pour tout $k\ge 1$, on a : $\dfrac{\ln k}{k^2}\le\dfrac{1}{k\sqrt{k}}$.

2) Soit k, entier naturel, $k>0$, considérons la fonction g définie sur $[k-1\,,k]$ par $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

g est dérivable sur $[k-1\,,k]$ et pour tout x appartenant à $[k-1\,,k]$, $g'(x)=\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$.

Pour tout x dans $[k-1\,,k]$ on a, $2(k-1)\sqrt{k-1}\le 2x\sqrt{x}\le 2k\sqrt{k}$, donc $\dfrac{-1}{2(k-1)\sqrt{k-1}}\le g'(x)\le\dfrac{-1}{2k\sqrt{k}}$.

Et d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$g(k)-g(k-1)\le\dfrac{-1}{2k\sqrt{k}}(k-k+1)$. C'est-à-dire $\dfrac{1}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{\sqrt{k-1}}\le\dfrac{-1}{2k\sqrt{k}}$.

En définitive, pour tout $k>1$, on a : $\dfrac{1}{2k\sqrt{k}}\le\dfrac{1}{\sqrt{k-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

3) D'après les questions 1) et 2), soit un entier $n>1$, on a : $\dfrac{\ln k}{k^2}\le\dfrac{1}{k\sqrt{k}}$ et $\dfrac{1}{2k\sqrt{k}}\le\dfrac{1}{\sqrt{k-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

D'où $\dfrac{\ln k}{k^2}\le\dfrac{1}{k\sqrt{k}}\le\dfrac{2}{\sqrt{k-1}}-\dfrac{2}{\sqrt{k}}$. Ce qui nous conduit à dire que : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{k^2}\le\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{\sqrt{k-1}}-\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{\sqrt{k}}$.

Or $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{\sqrt{k-1}}-\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{\sqrt{k}}-\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{\sqrt{k}}=2+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{2}{\sqrt{k}}-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{2}{\sqrt{k}}-\frac{2}{\sqrt{n}}=2-\frac{2}{\sqrt{n}}$.

D'où, on a : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{k^2}\le 2-\frac{2}{\sqrt{n}}$ (1). De plus, $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k^2}=\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{k^2}$ (2).

Des égalités (1) et (2), on déduit que : $u_n\le 2-\dfrac{2}{\sqrt{n}}$ pour tout entier naturel non nul.

4) • Soit n entier naturel non nul, on a : $u_n\le 2-\dfrac{2}{\sqrt{n}}\le 2$. D'où (u_n) est majorée par 2.

• Soit n entier naturel non nul : $u_{n+1}-u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\ln k}{k^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k^2}+\frac{\ln(1+n)}{(n+1)^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k^2}=\frac{\ln(1+n)}{(n+1)^2}$.

Et puisque $1+n>1$, alors $\ln(1+n)>0$. Donc $\dfrac{\ln(1+n)}{(n+1)^2}>0$. C'est-à-dire $u_{n+1}-u_n>0$. D'où (u_n) est croissante.

• (u_n) étant croissante et majorée, est convergente.

Scanned by CamScanner

Exercice 23

Démontrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ telle que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est croissante.

Montrer que pour tout entier naturel k > 1, on a $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

Montrer que pour tout entier naturel non nul, on a $u_n < 2 - \frac{1}{n}$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n>0}$ converge.

Solution 23

- Soit n, entier naturel non nul, $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2}$.

Puisque $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$, alors $(u_n)_{n>0}$ est strictement croissante.

- Soit k, entier naturel strictement supérieur à 1, on a : $k > k-1 > 0$, donc $k^2 > k(k-1) > 0$;

donc $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$. Or, $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, alors $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

- Soit n, entier naturel non nul et k appartenant à {2, 3, . . . , n}, on a :

$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ donc $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$.

Or $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$, alors on a $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{n}$.

Comme $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$, alors on peut écrire $u_n < 2 - \frac{1}{n}$.

- Puisque pour tout entier naturel non nul on a $u_n < 2 - \frac{1}{n} < 2$, alors $(u_n)_{n>0}$ est majorée par 2.

$(u_n)_{n>0}$ est donc une suite croissante et majorée par 2. D'où $(u_n)_{n>0}$ converge

Exercice 24

On considère la suite $(u_n)_{n>0}$ définie pour tout entier naturel non nul n par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $u_{2n} - u_n \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$.

2) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n>0}$.

Solution 24

1) Soit n un entier naturel non nul,

$$u_{2n} - u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Soit k entier naturel appartenant à [n + 1 , 2n], on a : $\sqrt{n+1} \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{2n}$ et par suite, $\frac{1}{\sqrt{2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

D'où $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{2n}} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ (1).

Scanned by CamScanner

Or on a $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}$ et $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$, alors l'inégalité (1) s'écrit : $\sqrt{\frac{n}{2}} \le \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \le \frac{n}{\sqrt{n+1}}$.

On peut alors conclure que pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_{2n} - u_n \ge \sqrt{\frac{n}{2}}$.

2) On sait que pour tout n entier naturel non nul, on a $u_n \ge 0$ et $u_{2n} - u_n \ge \sqrt{\frac{n}{2}}$.

Donc $u_{2n} \ge u_{2n} - u_n \ge \sqrt{\frac{n}{2}}$. Or puisque $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty$, donc la suite $(u_n)_{n>0}$ n'est pas majorée, et comme elle est croissante, elle diverge et sa limite est donc $+\infty$.

4 – Suites définies par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 25

Etudier le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 4$.

Solution 25

La fonction $x \mapsto x^2 - 2x + 4$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc si (u_n) converge vers l, alors l est solution de l'équation $x^2 - 2x + 4 = x$. C'est-à-dire l est solution de $x^2 - 3x + 4 = 0$.
Or l'équation $x^2 - 3x + 4 = 0$ n'a pas de solution, on peut alors en déduire que la suite (u_n) ne converge pas, elle diverge.

Or $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 3u_n + 4 = \left(u_n - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$. D'où (u_n) est croissante et divergente. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 26

Soit (u_n), la suite numérique définie par $u_0 \in [0, 1]$ et la relation $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$ pour tout entier naturel n.

1) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \le u_n \le 1$.
2) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3) On pose $u_0 = \cos\varphi$, où φ appartient à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer par récurrence que $u_n = \cos\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)$.
4) Etudier la limite de (u_n).

Solution 26

1) Méthode 1: Voir exercice 15
Méthode 2 : Par récurrence.

- Par définition de (u_n), $u_0 \in [0, 1]$. D'où P_0 est vraie.
- Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel n, montrons que P_{n+1} est aussi vraie, (c'est-à-dire $u_{n+1} \in [0, 1]$).

On a $u_n \in [0, 1]$ donc $0 \le u_n \le 1$ donc $1 \le 1 + u_n \le 2$ donc $\frac{1}{2} \le \frac{1+u_n}{2} \le 1$ donc $\sqrt{\frac{1}{2}} \le \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \le 1$.

D'où $\sqrt{\frac{1}{2}} \le u_{n+1} \le 1$. Donc u_{n+1} appartient à $\left[\sqrt{\frac{1}{2}}, 1\right]$. Et comme $\left[\sqrt{\frac{1}{2}}, 1\right] \subset [0, 1]$, alors u_{n+1} appartient à $[0, 1]$.

Et donc P_{n+1} est aussi vraie.
Finalement, pour tout entier naturel n, $0 \le u_n \le 1$.

2) Etudions la monotonie de (u_n) par récurrence sur n.
Méthode 1: Voir exercice 10
Méthode 2 :
Comparons d'abord u_0 et u_1 :

On a $u_0 \le u_1$ équivalent à $u_0 \le \sqrt{\frac{1+u_0}{2}}$.

Scanned by CamScanner

C'est-à-dire $u_0^2 \leq \frac{1+u_0}{2}$. Ce qui signifie que $2u_0^2 - u_0 - 1 \leq 0$. Soit $u_0 \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

Et comme $u_0 \in [0, 1]$ par définition, alors on a $u_0 \leq u_1$.

Supposons $u_n \leq u_{n+1}$ pour un certain entier naturel n, étudions le signe de la différence $u_{n+2} - u_{n+1}$.

On a $u_{n+2} - u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_{n+1}}{2}} - \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} = \frac{u_{n+1} - u_n}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_{n+1}}{2}} + \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}\right)}$.

Et comme $2\left(\sqrt{\frac{1+u_{n+1}}{2}} + \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}\right) > 0$ et $u_{n+1} - u_n \geq 0$ (car d'après l'hypothèse de récurrence, on a $u_n \leq u_{n+1}$), alors on peut conclure que $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 0$.

Donc, d'après le principe du raisonnement par récurrence, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq u_{n+1}$.

Donc la suite (u_n) est croissante.

Puisque (u_n) est croissante et majorée par 1, alors (u_n) converge.

3) Notons K_n la proposition : " $u_n = \cos\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)$ ".

- On a $\cos\left(\frac{\varphi}{2^0}\right) = \cos\varphi = u_0$. D'où K_0 est vraie.
- Supposons K_n vraie pour un certain entier naturel n, montrons que K_{n+1} est aussi vraie, (c'est-à-dire $u_{n+1} = \cos\left(\frac{\varphi}{2^{n+1}}\right)$).

On a par définition, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$. Et d'après hypothèse de récurrence on a $u_n = \cos\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)$, alors $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)}{2}}$. Et comme $1+\cos\left(\frac{\varphi}{2^n}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2^{n+1}}\right)$, alors on a $u_{n+1} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2^{n+1}}\right)}$.

De plus, φ appartient à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\frac{\varphi}{2^{n+1}}$ appartient aussi à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Et donc on a $\cos\left(\frac{\varphi}{2^{n+1}}\right) > 0$.

D'où $u_{n+1} = \cos\left(\frac{\varphi}{2^{n+1}}\right)$ et par conséquent, K_{n+1} est aussi vraie.

On peut donc conclure que, pour tout entier naturel n, $u_n = \cos\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)$.

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et φ est une constante réelle, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\varphi}{2^n} = 0$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

Exercice 27

Montrer que, pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$, on a $e^x \geq x + 1$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = e^{u_n}$.

Montrer que $u_{n+1} - u_n \geq 1$, puis que $u_n \geq n$.

Déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution 27

- Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$.

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f'(x) = e^x - 1$.

Pour tout $x \geq 0$, on a $e^x \geq 1$, donc $f'(x) \geq 0$.

f est croissante sur $[0, +\infty[$ et $f(0) = 0$, donc pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$, on a $f(x) \geq 0$. C'est-à-dire $e^x \geq x + 1$.

Scanned by CamScanner

• (u_n) est une suite à termes positifs ou nuls, d'où d'après ce qui précède, pour tout entier naturel n, on a $e^{u_n} > u_n + 1$. C'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \geq 1$.

• Notons P_n la proposition : « $u_n \geq n$ ».

$u_0 = 0$, donc la proposition P_0 est vraie.

Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel n (c'est-à-dire $u_n \geq n$), montrons alors que P_{n+1} est aussi vraie (c'est-à-dire $u_{n+1} \geq n+1$).

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $u_n \geq n$, donc en ajoutant 1 aux deux membres de l'inégalité on a, $u_n + 1 \geq n + 1$. Or d'après ce qui précède, on a $u_{n+1} \geq u_n + 1$, alors on peut conclure que $u_{n+1} \geq n + 1$.

C'est-à-dire P_{n+1} est vraie.

D'où d'après le principe du raisonnement par récurrence, pour tout n, entier naturel, on a $u_n \geq n$.

• Pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq n$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ alors avec les propriétés de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

5 – Suites définies par la relation $u_n = f(n)$

Exercice 28

On considère la suite de terme général : $u_n = \dfrac{2^n}{\sqrt{n!}}$ $(n \geq 1)$.

1) Montrer que, pour $n \geq 15$, on a $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} u_n$.

2) En déduire que, pour $n \geq 15$, on a : $u_n \leq \dfrac{1}{2^n} \times 2^{15} \times u_{15}$.

3) Montrer alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Solution 28

1) Soit n un entier naturel non nul, u_n est strictement positif et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2}{\sqrt{n+1}}$.

Or si $n \geq 15$, alors on a $\sqrt{n+1} \geq 4$, donc $\dfrac{1}{4} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Et par suite on a $\dfrac{2}{\sqrt{n+1}} \leq \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$.

Et finalement, on a $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} u_n$ (car pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$).

2) Par récurrence sur n :

Soit P_n la proposition : « $u_n \leq \dfrac{1}{2^n} \times 2^{15} \times u_{15}$ ».

• Pour n = 15, on a $\dfrac{1}{2^{15}} \times 2^{15} \times u_{15} = u_{15} \geq u_{15}$. D'où P_{15} est vraie.

• Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel $n \geq 15$, on a alors $u_n \leq \dfrac{1}{2^n} \times 2^{15} \times u_{15}$.

En multipliant les deux membres de l'inégalité par $\dfrac{1}{2}$, on a : $\dfrac{1}{2} u_n \leq \dfrac{1}{2^{n+1}} \times 2^{15} \times u_{15}$ (1)

Or d'après la question 1), on a : $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} u_n$ (2).

Des inégalités (1) et (2), on déduit que $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2^{n+1}} \times 2^{15} \times u_{15}$. D'où P_{n+1} est vraie.

Scanned by CamScanner

Et finalement, on a pour tout $n \geq 15$, $u_n \leq \frac{1}{2^n} \times 2^{15} \times u_{15}$

3) (u_n) est une suite à termes positifs, d'où, pour tout entier naturel non nul, on a $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^n} \times 2^{15} \times u_{15}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \times 2^{15} \times u_{15} = 0$, alors d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exercice 29

Etant donné un réel α, on pose : $u_n = \frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{n^{\alpha-1}}$ $(n \geq 1)$.

1) Calculer la limite de (u_n) pour $\alpha = 1, 2, 3, 4$ et $\frac{1}{2}$.

2) Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x^\alpha$.

Montrer que $u_n = n\left(f\left(1+\frac{1}{n}\right) - f(1)\right)$. En déduire la limite de (u_n).

Solution 29

1) Si $\alpha = 1$, $u_n = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Si $\alpha = 2$, $u_n = \frac{2n+1}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$.

Si $\alpha = 3$, $u_n = \frac{3n^2+3n+1}{n^2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^2} = 3$.

Si $\alpha = 4$, $u_n = \frac{4n^3+6n^2+4n+1}{n^3}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{4n^3+6n^2+4n+1}{n^3} = 4$.

Si $\alpha = \frac{1}{2}$: $u_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n} = \sqrt{n^2+n} - n = \frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

2) • $u_n = \frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{n^\alpha} \times n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1^\alpha\right] \times n = n\left(f\left(1+\frac{1}{n}\right) - f(1)\right)$.

• Soit $N = \frac{1}{n}$. $\lim\limits_{n \to +\infty} N = 0$ et $u_n = \frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right) - f(1)}{\frac{1}{n}} = \frac{f(1+N) - f(1)}{N}$.

f est dérivable en 1 et $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{N \to 0} \frac{f(1+N) - f(1)}{N} = f'(1) = \alpha$.

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

Scanned by CamScanner

D. Etudier les suites arithmétiques et les suites géométriques

1 – Montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique et donner son expression explicite

Exercice 30

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = e^{u_n}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

Solution 30

Soit n un entier naturel, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^{u_{n+1}}}{e^{u_n}} = e^{u_{n+1} - u_n} = e^r$ (où r est la raison de la suite arithmétique (u_n) donc $u_{n+1} - u_n = r$). (v_n) est donc une suite géométrique de raison e^r.

Exercice 31

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -2u_n + n^2 + n + 1$.

On définit la suite (v_n) pour tout n, entier naturel par $v_n = u_n - \left(\frac{n^2}{3} + \frac{n}{9} + \frac{5}{27}\right)$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n.

Solution 31

Soit n un entier naturel,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \left(\frac{(n+1)^2}{3} + \frac{n+1}{9} + \frac{5}{27}\right) = -2u_n + n^2 + n + 1 - \left(\frac{n^2}{3} + \frac{7n}{9} + \frac{17}{27}\right) = -2\left(u_n - \frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{9}n - \frac{5}{27}\right)$$

$$= -2v_n$$

Donc $v_{n+1} = -2v_n$. D'où (v_n) est une suite géométrique de raison -2 et de premier terme $v_0 = \frac{22}{27}$.

On en déduit alors que $v_n = \frac{22}{27}(-2)^n$ et $u_n = \frac{22}{27}(-2)^n + \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{9}n + \frac{5}{27}$.

2 – Calculer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique

Exercice 32

Déterminer l'entier naturel n tel que :

a) $3 + 6 + 9 + \ldots + 3(n-1) + 3n = 2583$.

b) $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^n = 88573$.

Solution 32

a) Soit n un entier naturel non nul, posons $u_n = 3n$. Remarquons que $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 3n = 3$.
D'où la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_1 = 3$.

Ainsi, $3 + 6 + \ldots + 3(n-1) + 3n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n = \frac{(n-1+1)(u_n + u_1)}{2} = \frac{3n(n+1)}{2}$.

Par suite, on a : $3 + 6 + 9 + \ldots + 3(n-1) + 3n = 2583$ équivaut à $\frac{3n(n+1)}{2} = 2583$. C'est-à-dire $n^2 + n - 1722 = 0$.

Cette équation admet une solution entière positive et une seule qui est 41. D'où n = 41.

b) Soit n entier naturel, posons $u_n = 3^n$.

Remarquons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3$.

D'où la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 3^0 = 1$.

Scanned by CamScanner

Ainsi, $1+3+9+\ldots+3^n = u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n = \frac{1-3^{n+1}}{1-3}\times 1 = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.

Par suite, $1+3+9+27+\ldots+3^n = 88573$ équivaut à $\frac{3^{n+1}-1}{2} = 88573$.

C'est-à-dire $3^{n+1} = 177147$, soit $(n+1)\ln 3 = \ln 177147$. On en déduit que $n = \frac{\ln 177147}{\ln 3} - 1 = 10$. D'où $n = 10$.

Exercice 33

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2^n - 3n + 4$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Solution 33

Soit n un entier naturel non nul, posons $w_n = 2^n$ et $v_n = -3n + 4$. On a donc $u_n = w_n + v_n$.
Le lecteur vérifiera que (w_n) est une suite géométrique de raison 2, de premier terme $w_0 = 1$ et (v_n) est une suite arithmétique de raison -3, de premier terme $v_0 = 4$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} w_k = w_0 \times \left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right) = 2^{n+1}-1 \text{ et } \sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{(n+1)}{2}(v_n+v_0) = \frac{(n+1)(-3n+4+4)}{2} = \frac{(n+1)(-3n+8)}{2}.$$

Donc $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} w_k + \sum_{k=0}^{n} v_k = 2^{n+1} - 1 + \frac{(n+1)(-3n+8)}{2}$. D'où $S_n = 2^{n+1} - 1 + \frac{(n+1)(-3n+8)}{2}$.

Exercice 34

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 4}$ définie pour tout n, entier naturel supérieur ou égal à 5 par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{10} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{12} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{14} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}.$$

Solution 34

Soit n, entier naturel supérieur ou égal à 5, posons $v_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$, on a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}} = \frac{1}{9}$.

D'où $(v_n)_{n\geq 4}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{9}$ et de premier terme $v_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$.

D'où $u_n = v_5 + v_6 + \ldots + v_n = \left(\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n-5+1}}{1-\frac{1}{9}}\right)\times v_5 = \left(\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n-4}}{\frac{8}{9}}\right)\times \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$.

D'où $u_n = \frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{8}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n-4}\right)$. Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-4} = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{8}$.

Exercice 35

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -3u_n + 2$.

On définit la suite (v_n) par : $v_n = u_n - \frac{1}{2}$.

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
Exprimer v_n en fonction n. En déduire u_n en fonction de n.

Scanned by CamScanner

2) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Solution 35

1) • Soit n un entier naturel, $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2} = -3u_n + 2 - \frac{1}{2} = -3(u_n - \frac{1}{2}) = -3v_n$.

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison -3 et de premier terme $v_0 = u_0 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

• Par conséquent, pour tout entier naturel n, on a $v_n = (-3)^n v_0 = \frac{3}{2}(-3)^n$.

• Soit n entier naturel, $v_n = u_n - \frac{1}{2}$, donc $u_n = v_n + \frac{1}{2}$. Par conséquent, $u_n = \frac{3}{2}(-3)^n + \frac{1}{2}$.

2) Soit n entier naturel, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_k + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} = \left(\frac{1-(-3)^{n+1}}{1-(-3)}\right) \times v_0 + \frac{1}{2}(n+1) = \left(\frac{1-(-3)^{n+1}}{4}\right) \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(n+1).$$

Finalement, $S_n = \frac{(-3)^{n+2}}{8} + \frac{1}{2}n + \frac{7}{8}$.

Exercice 36

La population mondiale est de l'ordre de 5 milliards d'individus.

1) Si on admet un accroissement moyen de la population mondiale de 1,6% par an, quelle sera la population mondiale dans vingt ans ?

2) Dans combien d'années la population mondiale aura-t-elle doublée (en prenant le même taux annuel d'accroissement) ?

3) P_0 désigne la population d'un continent en 1939, P_n la population du même continent, n années plus tard ; i désigne le taux d'accroissement annuel moyen de la population au cours de cette période.

Montrer que $P_n = P_0(1 + i)^n$.

Application numérique : en Europe la population était de 380 millions en 1939 et de 500 millions en 1989. Dans le même temps la population est passée en Amérique du sud de 110 millions à 435 millions d'habitants. Calculer le taux d'accroissement annuel moyen sur cette période dans les deux cas.

Solution 36

1) Soit P_0 la population mondiale actuelle : $P_0 = 5$ (en milliards d'individus).

Soit P_n la population mondiale dans n ans (en milliards d'individus).

On a : $P_{n+1} = P_n + 0{,}016P_n = (1 + 0{,}016)P_n = 1{,}016P_n$.

D'où l'évolution annuelle de la population suit une progression géométrique de raison 1,016 et de premier terme P_0.

D'où $P_{20} = 5(1{,}016)^{20}$.

D'où, P_{20} = 6,868 219 453 milliards d'individus.

2) Nous cherchons le plus petit entier n à partir duquel on a : $P_n \geq 10$.

$P_n \geq 10$ équivaut successivement à $5(1{,}016)^n \geq 10$, puis à $(1{,}016)^n \geq 2$, ensuite à $n \ln 1{,}016 \geq \ln 2$ (car la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$) et enfin à $n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1{,}016}$ (car $\ln 1{,}016 > 0$ avec $\frac{\ln 2}{\ln 1{,}016} \approx 43{,}66$).

Finalement, la population mondiale aura doublé dans 44 ans.

3) Soit n entier naturel, $P_{n+1} = P_n + iP_n = (1 + i)P_n$.

D'où l'évolution de la population du continent concerné suit une progression géométrique de raison 1 + i.

Par conséquent, pour tout entier naturel n, $P_n = P_0(1 + i)^n$.

• Posons P_0 = 380 (en millions d'individus) et P_{50} = 500 (en millions d'individus).

$P_{50} = (1 + i)^{50} P_0$. Ainsi, $500 = (1 + i)^{50} 380$. Ce qui équivaut successivement à $(1+i)^{50} = \frac{25}{19}$, puis à $1+i = \sqrt[50]{\frac{25}{19}}$ et

Scanned by CamScanner

enfin à $i = \sqrt[20]{\frac{25}{19}} - 1$. Finalement, on a $i \approx 0,55\ \%$.

- Posons $Q_0 = 110$ (en millions d'individus) et $Q_{20} = 435$ (en millions d'individus)

$Q_{20} = (1+i')^{20} Q_0$. Ainsi, $435 = (1+i')^{20} \times 110$. Ce qui équivaut successivement à $(1+i')^{20} = \frac{87}{22}$, puis à $1+i' = \sqrt[20]{\frac{87}{22}}$

et enfin à $i' = \sqrt[20]{\frac{87}{22}} - 1$. Finalement, on a $i' \approx 2,79\ \%$.

Exercice 37

Soit (u_n) la suite définie par : $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n différent de 0 et 1, $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n^n}$.

1) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

2) On définit la suite (v_n) par : $v_1 = 1$ et pour tout entier naturel n différent de 0 et 1, $v_n = v_{n-1} + \frac{1}{2^n}$.

Démontrer que : pour tout entier naturel différent de 0 et 1, on a $0 \le u_n \le v_n$.
Calculer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel différent de 0 et 1. En déduire que la suite (u_n) est majorée.

3) Démontrer que la suite (u_n) est convergente et encadrer sa limite.

Solution 37

1) Soit n un entier naturel différent de 0 et 1, on a : $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n^n}$ et $\frac{1}{n^n} \ge 0$, alors $u_n - u_{n-1} \ge 0$, et par suite, la suite (u_n) est croissante.

2) • On procèdera par récurrence.

Pour n = 2, on a : $u_2 = u_1 + \frac{1}{2^2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ et $v_2 = v_1 + \frac{1}{2^2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. D'où on a : $0 \le u_0 \le v_0$.

Supposons $0 \le u_k \le v_k$, pour un entier naturel k différent de 0 et 1.

D'une part $u_{k+1} = u_k + \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$ et $u_k \ge 0$, donc on a $u_{k+1} \ge 0$.

D'autre part, on a : $k \ge 2$, donc $(k+1)^{k+1} \ge 2^{k+1}$, donc $\frac{1}{(k+1)^{k+1}} \le \frac{1}{2^{k+1}}$.

D'après l'hypothèse de récurrence on a $u_k \le v_k$, alors on a $u_k + \frac{1}{(k+1)^{k+1}} \le v_k + \frac{1}{2^{k+1}}$. C'est-à-dire $u_{k+1} \le v_{k+1}$.

Finalement, pour tout entier naturel n différent de 0 et 1, on a : $0 \le u_n \le v_n$.

- Soit n un entier naturel différent de 0 et 1, on a successivement :

$v_2 - v_1 = \frac{1}{2^2}$, $v_3 - v_2 = \frac{1}{2^3}$, $v_4 - v_3 = \frac{1}{2^4}$, ... , $v_{n-1} - v_{n-2} = \frac{1}{2^{n-1}}$ et $v_n - v_{n-1} = \frac{1}{2^n}$.

En additionnant membre à membre ces égalités, et après simplification, on a :

$$v_n - v_1 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}.$$

Posons $w_n = \frac{1}{2^n}$.

Alors (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_2 = \frac{1}{2^2}$.

Scanned by CamScanner

Alors $v_n - v_1 = w_2 + w_3 + w_4 + \ldots + w_{n-1} + w_n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} w_2 = \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

D'où $v_n = v_1 + \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

- Soit n un entier naturel différent de 0 et 1, on a :

$u_n \leq v_n$ et $v_n = \dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, alors on a : $u_n \leq \dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Or, on a : $-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leq 0$, alors $\dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leq \dfrac{3}{2}$. Alors $u_n \leq \dfrac{3}{2}$ pour $n > 1$.

Comme de plus $u_1 = 1 \leq \dfrac{3}{2}$, alors on a $u_n \leq \dfrac{3}{2}$ pour tout entier naturel non nul.

On peut alors conclure que la suite (u_n) est majorée par $\dfrac{3}{2}$.

3) • Comme (u_n) est croissante et majorée, alors la suite (u_n) est convergente.

- Comme pour tout entier naturel n différent de 0 et 1, on a :

$0 \leq u_n \leq \dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{3}{2}$, alors on a $0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq \dfrac{3}{2}$.

Scanned by CamScanner

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER

Exercice 38

40 minutes

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}$.

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2) Montrer par récurrence que, pour tout entier $k \geq 3$, $k! \geq 2 \times 3^{k-2}$.
3) Vérifier que la formule reste vraie pour tout entier naturel k. En déduire que la suite (u_n) est majorée.
4) Montrer que (u_n) converge et majorer sa limite.

Exercice 39

35 minutes

1) Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

2) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par : $u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

Exercice 40

40 minutes

Une suite (u_n) est définie par son premier terme $u_1 \neq -2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{6+u_n}{2+u_n}$.

On admet que la suite (u_n) est bien définie.
1) Montrer qu'il existe deux valeurs a et b de u_1 ($a < b$) pour lesquelles la suite (u_n) est constante.
2) Montrer que si $u_1 \neq a$ et $u_1 \neq b$, il en est de même de u_2 pour tout entier naturel n.

Calculer alors $\frac{u_{n+1}-a}{u_{n+1}-b}$ en fonction de $\frac{u_n-a}{u_n-b}$.

3) En déduire que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n-a}{u_n-b}$ est une suite géométrique.

Calculer $\lim_{n\to+\infty} |v_n|$ et en déduire la limite de (u_n).

Exercice 41

40 minutes

1) Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$: $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

2) En déduire le comportement à l'infini des suites de termes généraux :

$\sin\frac{1}{n}$; $n\sin\frac{1}{n}$; $\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}$ et $n^2 \sin\frac{1}{n} - n$.

Exercice 42

35 minutes

La suite $(u_n)_{n>0}$ est définie par $u_1 = 1$ et $(u_{n+1})^2 = 4u_n$, avec $u_n > 0$, pour tout n non nul. On pose $v_n = \ln u_n - \ln 4$.
1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
2) Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$. Pour quelles valeurs de n a-t-on $u_n > 3{,}96$?

Exercice 43

45 minutes

On définit les suites réelles (u_n) et (v_n) par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right) \end{cases}$ et $v_n = \frac{u_n - \sqrt{5}}{u_n + \sqrt{5}}$.

Scanned by CamScanner

1) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a $v_{n+1} = (v_n)^2$.

En déduire la relation $v_n = (v_0)^{2^n}$.

2) Montrer que $v_0 = \dfrac{-1}{(2+\sqrt{5})^2}$ et en déduire la majoration $|v_0| < \dfrac{1}{16}$.

Déterminer alors la limite de (v_n) puis celle de (u_n).

Exercice 44 — 45 minutes

Soit f la fonction définie sur [0,1] par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$.

1) Résoudre l'équation f(x) = x.

2) Montrer que $f(I) \subset I$, où I = [0 , 1], et que, pour tout x de I, on a : $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

3) On définit une suite (u_n) par : $u_0 \in [0 , 1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

a) Déduire de la question qui précède pour tout entier naturel non nul n :

que $|u_n - 1| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_{n-1} - 1|$, puis que $|u_n - 1| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - 1|$.

b) Conclure sur $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 45 — 50 minutes

Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

1) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2) Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, on a : $\dfrac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$.

En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{n}{n+1} \leq \ln(u_n) \leq 1$, puis que $u_n \leq e \leq \left(1+\dfrac{1}{n}\right)u_n$.

3) En utilisant cet encadrement pour n = 5000, retrouver une valeur approchée de e.

Exercice 46 — 50 minutes

Le but de cet exercice est de calculer la limite de $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$.

A) Etude d'une fonction :

Soit n un entier naturel fixé ($n \geq 1$). On considère la fonction f définie sur [0 , 1] par :

$$f(x) = e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

1) Montrer que f est dérivable sur [0, 1] et que $f'(x) = -e^{-x}\left(\dfrac{x^n}{n!}\right)$.

2) En déduire que, pour tout réel x de [0 , 1] , on a : $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{n!}$.

3) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f entre 0 et 1, montrer que $\left|\dfrac{1}{e}u_n - 1\right| \leq \dfrac{1}{n!}$.

B) Calcul de la limite :

Déduire de A) que $|u_n - e| \leq \dfrac{e}{n!}$ pour tout entier naturel n, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

Scanned by CamScanner

Exercice 47

30 minutes

On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = u_n\sqrt{2} + v_n\sqrt{3} \\ v_{n+1} = u_n\sqrt{3} + v_n\sqrt{2} \end{cases}$.

On pose : $w_n = u_n - v_n$ et $x_n = u_n + v_n$.
Etudier la nature des suites (w_n) et (x_n) puis en déduire u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 48

60 minutes

Le but de cet exercice est de montrer que e est irrationnel.

Soit $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$. On admet (voir exercice 46) que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

1) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = e$.

2) Prouver que (u_n) est strictement croissante et que (v_n) est strictement décroissante.
En déduire que $u_n < e < v_n$, pour tout entier naturel n.

3) On suppose que e est rationnel, $e = \frac{p}{q}$, avec p et q entiers naturels.

Montrer que $p - q \times q! \times u_q$ serait un entier appartenant à $]0, 1[$ (utiliser l'encadrement précédent).

Conclure que e est irrationnel.

Exercice 49

45 minutes

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{u_n}$.

1) Montrer que $u_n \geq \sqrt{2}$. En déduire le sens de variation de (u_n).

2) Montrer que $0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2})^{2^n}$.

3) En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.

Exercice 50

50 minutes

On définit la suite $(u_n)_{n>0}$ par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$.

1) Montrer que $(u_n)_{n>0}$ est majorée par 3. (On pourra procéder par récurrence)
2) Etudier le sens de variation de $(u_n)_{n>0}$. En déduire que $(u_n)_{n>0}$ converge. Calculer sa limite.
3) On considère la suite $(v_n)_{n>0}$ définie pour tout entier naturel non nul n par $v_n = n(3 - u_n)$.
Montrer que $(v_n)_{n>0}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
4) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. Retrouver la limite de u_n.

Exercice 51

50 minutes

On définit la suite $(u_n)_{n>0}$ pour tout entier naturel non nul n par : $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $0 < u_n \leq 1$.
Etudier le sens de variation de $(u_n)_{n>0}$. Calculer la limite de $(u_n)_{n>0}$ lorsque n tend vers l'infini.
2) On pose $x_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $x_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

Calculer la limite de (x_n) quand n tend vers l'infini.
3) On pose $v_n = \ln u_n$.
Justifier que la suite $(v_n)_{n>0}$ est bien définie.
Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a $v_n \leq 0$. Montrer que $(v_n)_{n>0}$ est une suite croissante.
Déterminer la limite de $(v_n)_{n>0}$ quand n tend vers $+\infty$.

Scanned by CamScanner

4) On pose pour tout entier naturel n non nul : $y_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

Exprimer y_n en fonction de x_n. Déterminer la limite de y_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 52

50 minutes

1) Démontrer que, pour tout réel $x > 1$, $\frac{x^2}{2x-1} > 1$.

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{2u_n - 1}$.

Le but de l'exercice est d'exprimer u_n en fonction de n.

On considère les suites (v_n) et (w_n) telles que, pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ et $w_n = \ln v_n$.

2) Vérifier que (v_n) et (w_n) sont bien définies.
3) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique.

Exprimer w_n et v_n en fonction de n et en déduire que $u_n = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 53

45 minutes

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = -3$ et, pour tout entier naturel, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 10}{6 + u_n}$.

Partie A

1) Calculer les quatre premiers termes de la suite.
2) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, u_n est un nombre positif et en déduire que u_n est défini.
3) Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 2.
4) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
5) En déduire la nature de la suite (u_n) et déterminer, si elle existe, sa limite.

Partie B

On se propose d'utiliser une autre méthode pour retrouver ce résultat.

On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 5}$ pour tout entier naturel n.

1) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2) Calculer la limite de (v_n), puis déduire la limite de (u_n).

Exercice 54

50 minutes

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ pour x appartenant à $]0, +\infty[$.

1) Calculer f '(x) et f ''(x).
2) Pour tout entier naturel non nul n, on note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f.

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n > 0$, $f^{(n)}(x) = \frac{u_n + v_n \ln x}{x^{n+1}}$ où $(u_n)_{n>0}$ et $(v_n)_{n>0}$ sont des suites telles que

$u_1 = 1$, $v_1 = -1$ et pour tout n entier naturel non nul, $u_{n+1} = v_n - (n+1)u_n$ et $v_{n+1} = -(n+1)v_n$.

3) Exprimer v_n en fonction de n puis montrer par récurrence que, pour tout n, entier naturel non nul, on a :

$u_n = (-1)^{n+1} n! \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$.

Scanned by CamScanner

Exercice 55

60 minutes

Le but de l'exercice est de démontrer que $(c_n)_{n>1}$ telle que : $c_n = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right) - \ln n$ est convergente.

1) Montrer que, pour tout réel $x \geq 1$, on a : $\frac{1}{x+1} \leq \ln(1+x) - \ln x \leq \frac{1}{x}$.

2) On pose, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$.

a) Prouver que, pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n>0}$ a pour limite $+\infty$.

3) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

a) En utilisant l'encadrement obtenu à la question 1), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

b) Vérifier que, pour tout $n \geq 2$, on a : $c_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$.

En déduire que la suite $(c_n)_{n>1}$ est croissante et que, pour tout $n \geq 2$, $f(1) \leq c_n \leq 1 - \frac{1}{n}$.

c) Déduire de la question précédente que la suite $(c_n)_{n>1}$ converge vers une limite que l'on note γ.

Exercice 56

25 minutes

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0, 1]$ telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$.

Etudier le comportement des suites (u_n) et (v_n) en $+\infty$.

Exercice 57

40 minutes

Soit a et b deux réels strictement positifs.

1) Etudier suivant les valeurs de a et b la convergence de la suite $(a^n + b^n)_{n\geq 0}$.

2) Démontrer que la suite $\left(\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}\right)_{n\geq 0}$ converge et donner la limite suivant les valeurs du réel $\frac{a}{b}$.

Exercice 58

35 minutes

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie pour tout entier naturel n, par : $a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la somme $S_n = a_0 + \frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n}$.

Exercice 59

50 minutes

1) u_1 et a sont deux réels donnés.

Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite définie par : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + a$ pour tout entier naturel non nul n.

Montrer qu'il existe un nombre réel b tel que si l'on pose, $v_n = u_n - b$, la suite $(v_n)_{n>0}$ soit une suite géométrique.

Calculer $s_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ et déduire $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ en fonction de u_1, a et n.

2) w_0 et w_1 sont deux réels donnés. Soit $(w_n)_{n>0}$ la suite définie par : $2w_{n+1} - 3w_n + w_{n-1} = 0$.

Montrer que $w_{n+1} - \frac{1}{2}w_n$ est indépendant de n et donner son expression en fonction de w_0 et w_1.

En déduire la somme $\sum_{k=1}^{n} w_k$ en fonction de w_0, w_1 et n.

Scanned by CamScanner

Exercice 60 — 28 minutes

Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

1) On suppose que l'on a : $q = -\frac{1}{2}$.

En déduire que l'on a, pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1})$.

2) On suppose que la suite u n'est pas stationnaire et satisfait à la condition suivante :

$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1})$ pour tout entier naturel non nul n. Démontrer que l'on a alors $q = -\frac{1}{2}$.

Exercice 61 — 25 minutes

Soit k un réel et u la suite définie par : $u_{n+1} - u_n = ku_n$ pour tout entier naturel n.

1) Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (1 + k)^{n+1}u_0$.

2) Trouver k_1 et k_2 valeurs de k pour lesquelles on a : $u_0 = 54$ et $u_2 = 24$.

3) Etudier la monotonie et la convergence de chacune des suites correspondant respectivement à k_1 et k_2.

Exercice 62 — 35 minutes

Soit (u_n) suite numérique réelle définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) Démontrer que cette suite est croissante et majorée par 3. Que peut-on conclure ?

3) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $3 - u_{n+1} \leq \frac{3 - u_n}{3}$. En déduire la limite l de la suite.

Exercice 63 — BAC S – expérimental (français) – 1997 — 100 minutes

Partie A : *Résolution approchée d'une équation.*

1) On considère la fonction h définie sur $]0 , +\infty[$ par $h(x) = 3\ln x - x$.

a) Déterminer les limites de h en 0 puis en $+\infty$.

b) Etudier les variations de h. Montrer que h admet un maximum dont on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près. Aucune courbe représentative n'est demandée.

2) Déduire de l'étude précédente que l'équation (E) : $3\ln x = x$ admet deux solutions, l'une, notée α, élément de l'intervalle $]0 , 3[$, l'autre, notée λ, élément de $]3 , +\infty[$.

3) Montrer que $1{,}85 \leq \alpha \leq 1{,}86$.

4) On désigne par I l'intervalle $[4 , 5]$.

a) Montrer que la fonction φ définie sur I par $\varphi(x) = 3\ln x$ transforme tout élément de I en un élément de I et que λ est élément de I.

b) Montrer que, pour tout x de I, on a : $|\varphi'(x)| \leq \frac{3}{4}$.

c) On définit la suite (u_n) d'éléments de I par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3\ln u_n$.

Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $|u_n - \lambda| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

En déduire que la suite (u_n) a pour limite λ.

d) Déterminer un entier naturel p tel que u_p soit une valeur approchée de λ à 10^{-3} près.

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de λ.

Partie B : *Etude d'une fonction.*

On considère la fonction f définie sur $]0 , +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. On désigne par C sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} , \vec{j})$. On prendra pour unité graphique 4 cm.

1) Etudier les variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

2) Déterminer une équation de la tangente T à C en son point A d'abscisse 1.

Scanned by CamScanner

3) Tracer C et T.

4) A tout entier naturel n non nul, on associe l'équation d'abscisse x, (E_n) : $f(x)=\frac{1}{n}$.

a) Montrer que, pour n = 1 et n = 2, cette équation n'admet pas de solution.

b) Montrer que, pour n supérieur ou égal à 3, l'équation (E_n) admet deux solutions que l'on désignera par α_n et λ_n avec $\alpha_n \leq \lambda_n$.

c) Montrer que les solutions de l'équation (E_n) sont les abscisses des points d'intersection de la courbe de la fonction exponentielle avec la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^n$.

Partie C : *Etude des suites (α_n) et (λ_n)*

1) On se propose dans cette question de montrer que, pour tout x positif ou nul, on a : $x-\frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x)$.

a) On définit sur $[0, +\infty[$ la fonction g par $g(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)$. Etudier le sens de variations de g.

b) En déduire le signe de g. Montrer que, pour tout réel x positif ou nul, on a : $x-\frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x)$.

c) Montrer qu'on a également, pour tout réel x positif ou nul, $x \geq \ln(1+x)$.

2) Etude de α_n pour $n \geq 4$.

a) En utilisant la question précédente, montrer que, pour tout réel positif x, on a : $\frac{\ln(1+x)}{1+x} \leq x$.

En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a : $f\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.

b) Montrer que, pour tout x élément de l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a : $\frac{\ln(1+x)}{1+x} \geq \frac{1}{2}x$.

En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a : $f\left(1+\frac{2}{n}\right) \geq \frac{1}{n}$.

c) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 4$, $1+\frac{1}{n} \leq \alpha_n \leq 1+\frac{2}{n}$. Quelle est la limite de la suite (α_n) ?

3) Etude de λ_n

a) Montrer que, pour $n \geq 4$, $f(n) \geq \frac{1}{n}$.

b) Comparer n et λ_n, puis déterminer la limite de la suite (λ_n).

Exercice 64

60 minutes

Soit a et b deux nombres réels tels que l'on ait, $0 < a < b$, λ et μ deux réels strictement positifs.
On définit deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ par : $u_1 = a$, $v_1 = b$ et pour tout entier naturel non nul,

$$u_{n+1}=\frac{u_n+\lambda v_n}{1+\lambda} \quad \text{et} \quad v_{n+1}=\frac{u_n+\mu v_n}{1+\mu}.$$

1) Comment choisir λ et μ pour que l'on ait $u_1 < u_2 < v_2 < v_1$.

2) On suppose que λ et μ sont ainsi choisis.

a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée et que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée.
En déduire que ces deux suites sont convergentes.

b) Démontrer que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ ont la même limite l.
Exprimer l en fonction de λ, μ, a et b.

Exercice 65

60 minutes

Soit a, b et ε trois réels.

On note f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=a\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+b\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+c$.

Scanned by CamScanner

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \left[a\cos\left(\frac{\pi}{2}x + n\frac{\pi}{2}\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{2}x + n\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

2) On pose $u_n = \frac{1}{4^n} f^{(2n)}(0)$.

Calculer u_1. Prouver que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

3) Calculer en fonction de a, si elle existe, la limite de la suite (S_n) telle que : $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Exercice 66 — 70 minutes

Soit a et b deux réels tels que l'on ait : $0 < a < b$. On définit deux suites u et v par : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \frac{2u_{n-1}v_{n-1}}{u_{n-1} + v_{n-1}}$ et $v_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}$.

1) Démontrer que l'on a : pour tout entier naturel n, $u_n < v_n$.

2) Démontrer que la suite u est croissante et que la suite v est décroissante.

3) Démontrer que l'on a pour tous entiers naturels p et q, $u_p < v_q$.
En déduire que les suites u et v sont convergentes.
On appelle l et l' leurs limites respectives.

4) Démonter que l'on a, pour tout entier naturel non nul n, $v_n - u_n \leq \frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1})$ (on utilisera le fait que u est croissante). Que peut-on dire de l et l' ?

5) Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel n, $u_n v_n = ab$.

En déduire l'égalité $l = \sqrt{ab}$.

Exercice 67 — 50 minutes

1) Soit n un entier naturel non nul.
Montrer que l'équation $x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x - 1 = 0$ possède une unique solution dans $[0, +\infty[$.
On note cette solution a_n.

2) Montrer que la suite $(a_n)_{n>0}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge.

3) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $a_n = \frac{1}{2} + \frac{(a_n)^{n+1}}{2}$.

4) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} (a_n)^{n+1}$, en déduire $\lim_{n \to +\infty} a_n$.

Scanned by CamScanner

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER – SOLUTIONS

Solution 38

1) Soit n un entier naturel, on a : $u_{n+1}-u_n=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{2^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}+\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}>0$.

D'où la suite (u_n) est croissante.

2) Notons P_k la proposition : « $k! \geq 2\times 3^{k-2}$ ».

- $3! = 6$ et $2\times 3^{3-2} = 6$. On a donc $3! \geq 2\times 3^{3-2}$. D'où P_3 est vraie.
- Supposons P_k vraie pour un certain entier naturel $k \geq 3$, c'est-à-dire $k! \geq 2\times 3^{k-2}$. Montrons que $(k+1)! \geq 2\times 3^{k-1}$.

On a d'après l'hypothèse de récurrence, $k! \geq 2\times 3^{k-2}$. En multipliant cette « inégalité » par $k+1$, on a :

$(k+1)k! \geq 2(k+1)\times 3^{k-2}$, soit $(k+1)! \geq 2(k+1)\times 3^{k-2}$ (1).

On a $k \geq 3$, donc $k+1 \geq 3$ (2).

Et en multipliant les membres de l'inégalité (2) par $2\times 3^{k-2}$, on a :

$2(k+1)3^{k-2} \geq 2\times 3^{k-2}\times 3$, soit $2(k+1)3^{k-2} \geq 2\times 3^{k-1}$ (3).

Des inégalités (1) et (3), on déduit que $(k+1)! \geq 2\times 3^{k-1}$. P_{n+1} est alors aussi vraie.

Et finalement, pour tout $n \geq 3$, on a $k! \geq 2\times 3^{k-2}$.

3) • **Pour k = 0**, on a : $k! = 1$ et $2\times 3^{0-2}=\frac{2}{9}$; or on a $1\geq\frac{2}{9}$, alors on peut dire que $k! \geq 2\times 3^{k-2}$, pour $k = 0$.

Pour k = 1, on a $k! = 1$ et $2\times 3^{1-2}=\frac{2}{3}$; or on a $1\geq\frac{2}{3}$, alors on peut écrire que $k! \geq 2\times 3^{k-2}$, pour $k = 1$.

Pour k = 2, on a $k! = 2$ et $2\times 3^{2-2} = 2$; or $2 \geq 2$, alors $k! \geq 2\times 3^{k-2}$, pour $k = 2$.

De plus, $k! \geq 2\times 3^{k-2}$ pour $k \geq 3$ (d'après la question 2)), alors $k! \geq 2\times 3^{k-2}$, pour tout entier naturel k.

- Soit k un entier naturel, on a, d'après la question précédente, $k! \geq 2\times 3^{k-2}$,

donc $\frac{1}{k!}\leq\frac{1}{2\times 3^{k-2}}$. Et par suite $\frac{2^k}{k!}\leq\frac{2^k}{2\times 3^{k-2}}$.

Cette inégalité est vraie pour tout entier naturel k, donc : $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}\leq\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^k}{2\times 3^{k-2}}\right)$. (4)

Or, soit n un entier naturel, si on pose $v_n=\frac{2^n}{2\times 3^{n-2}}$, on a : $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{2^{n+1}}{2\times 3^{n-1}}}{\frac{2^n}{2\times 3^{n-2}}}=\frac{2}{3}$.

(v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$, et de premier terme $v_0=\frac{9}{2}$.

Et donc : $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^k}{2\times 3^{k-2}}\right)=\frac{9}{2}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{27}{2}\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$ (5).

Comme $\frac{27}{2}\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)\leq\frac{27}{2}$, alors on peut écrire, d'après (4) et (5) que, $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}\leq\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^k}{2\times 3^{k-2}}\right)\leq\frac{27}{2}$.

C'est-à-dire $u_n\leq\frac{27}{2}$. On en déduit que la suite (u_n) est majorée par $\frac{27}{2}$.

- La suite (u_n) étant croissante et majorée, elle converge.

Et comme pour tout entier naturel n, on a $u_n\leq\frac{27}{2}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\leq\frac{27}{2}$.

Scanned by CamScanner

Solution 39

1) • Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x - \ln(1+x)$.

f est définie, continue et dérivable sur $[0, +\infty[$, et pour tout réel $x \geq 0$, on a $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$.

f est donc croissante sur $[0, +\infty[$. Or $f(0) = 0$, alors f admet 0 comme minimum sur $[0, +\infty[$. C'est-à-dire, pour tout réel $x \geq 0$, on a $f(x) \geq 0$, soit $x - \ln(1+x) \geq 0$. On en déduit alors que $x \geq \ln(1+x)$ (1).

• Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$.

g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel $x \geq 0$, on a $g'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} \leq 0$.

g est donc décroissante sur $[0, +\infty[$ et comme $g(0) = 0$, alors g admet 0 comme maximum sur $[0, +\infty[$.

Et donc pour tout réel $x \geq 0$, on a $g(x) \leq 0$, soit $x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x) \leq 0$.

On en déduit que pour tout réel $x \geq 0$, on a $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$ (2)

De (1) et (2), on déduit que pour tout réel $x \geq 0$, on a $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

2) Pour tout k appartenant à $\{0, 1, \ldots, n\}$ on a : $1 + \frac{k}{n^2} > 0$, et $\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Comme pour tout entier naturel k, on a $\frac{k}{n^2} \geq 0$, alors d'après la question 1), en prenant x égal à $\frac{k}{n^2}$,

on obtient : $\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$, et donc $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

C'est-à-dire $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 \leq \ln(u_n) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$.

Soit $\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 \leq \ln(u_n) \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}$ (1), (car $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$).

Or on a $0 \leq k \leq n$, alors on peut écrire $0 \leq k^2 \leq n^2$. Et donc finalement, on a : $0 \leq \sum_{k=1}^{n} k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} n^2$.

Comme $\sum_{k=1}^{n} n^2 = n^3$, alors on a $0 \leq \sum_{k=1}^{n} k^2 \leq n^3$. Donc $-\frac{n^3}{n^4} \leq -\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2$, donc $-\frac{1}{2n} \leq -\frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Finalement, on a $\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{2n} \leq \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2$ (2).

Des inégalités (1) et (2) on déduit que $\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{2n} \leq \ln(u_n) \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}$.

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$, alors d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = \frac{1}{2}$.

Soit $v_n = \ln u_n$, on a $u_n = e^{v_n}$.

$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$, donc d'après la limite de la composée, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to\frac{1}{2}} e^x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Scanned by CamScanner

Solution 40

1) (u_n) est constante si et seulement si, pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n = u_{n+1}$.

Ainsi pour n = 1, on a $u_2 = u_1$, c'est-à-dire $u_1 = \dfrac{6+u_1}{2+u_1}$. C'est-à-dire $u_1^2 + u_1 - 6 = 0$, car $u_1 \neq -2$.

On trouve alors $u_1 = 2$ ou $u_1 = -3$.
On vérifiera par récurrence que pour $u_1 = 2$ ou $u_1 = -3$, on a pour tout entier naturel, $u_n = u_{n+1}$. ***(Le lecteur le vérifiera)***
Donc (u_n) est constante si et seulement si, $u_1 = 2$ ou $u_1 = -3$. On prendra a = -3 et b = 2.
2) • Montrons par récurrence sur n que pour tout entier naturel n, u_n est différent de 2 et -3.
D'après l'énoncé, on a bien u_1 différent de -3 et 2.
Supposons pour un entier naturel non nul k donné que u_k est différent de 2 et -3, montrons qu'alors u_{k+1} est aussi différent de 2 et -3.
Pour cela supposons $u_{k+1} = 2$ ou $u_{k+1} = -3$.

On a alors $\dfrac{6+u_k}{2+u_k} = 2$ ou $\dfrac{6+u_k}{2+u_k} = -3$. C'est-à-dire $6 + u_k = 4 + 2u_k$ ou $6 + u_k = -6 - 3u_k$.

On aboutit alors à $u_k = 2$ ou $u_k = -3$. Ce qui est contraire à l'hypothèse$6 + u_k = 4 + 2u_k$ de récurrence.
D'où u_{k+1} est différent de 2 et -3.
Finalement, pour tout entier naturel non nul, on a $u_n \neq 2$ et $u_n \neq -3$.

- Soit n entier naturel non nul,

$$\frac{u_{n+1}+3}{u_{n+1}-2} = \frac{\dfrac{6+u_n}{2+u_n}+3}{\dfrac{6+u_n}{2+u_n}-2} = \frac{6+u_n+6+3u_n}{6+u_n-4-2u_n} = \frac{4(u_n+3)}{-(u_n-2)} = -4\left(\frac{u_n+3}{u_n-2}\right). \text{ D'où } \frac{u_{n+1}+3}{u_{n+1}-2} = -4\left(\frac{u_n+3}{u_n-2}\right).$$

3) • D'après la question 2), soit n entier naturel non nul, on a $v_{n+1} = -4v_n$.

Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison – 4 et de premier terme $v_1 = \dfrac{u_1+3}{u_1-2}$.

- D'où pour tout entier naturel non nul n, $v_n = (-4)^{n-1}v_1$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} 4^{n-1}|v_1| = +\infty$ car u_1 ne pouvant pas prendre les valeurs -3 et 2, on a $v_1 \neq 0$.
- Soit n, entier naturel non nul, $v_n = \dfrac{u_n+3}{u_n-2}$, donc $u_n = \dfrac{2v_n+3}{v_n-1} = \dfrac{2+\dfrac{3}{v_n}}{1-\dfrac{1}{v_n}}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{1}{v_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{|v_n|} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{v_n} = 0$. Et finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2+\dfrac{3}{v_n}}{1-\dfrac{1}{v_n}}\right) = 2$.

Solution 41

1) **Montrons que, pour $x \geq 0$ $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$:**

Etudions les variations des fonctions $f : x \mapsto x - \sin x$ et $g : x \mapsto x - \dfrac{x^3}{6} - \sin x$ définies sur $[0, +\infty[$.

f et g sont définies, continues et dérivables sur $[0, +\infty[$, et :

- pour tout $x \geq 0$, on a : $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$. D'où f est croissante sur $[0, +\infty[$.

Or f(0) = 0, d'où f est minorée par 0 sur $[0, +\infty[$. C'est-à-dire pour tout $x \geq 0$, on a $x - \sin x \geq 0$ et donc $x \geq \sin x$ (1).

- pour tout $x \geq 0$, on a $g'(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} - \cos x$.

g' est dérivable sur $[0, +\infty[$, $g''(x) = -x + \sin x = -f(x) \leq 0$; d'où g' est décroissante sur $[0, +\infty[$.
Or g'(0) = 0, alors g' est majorée par 0 dans $[0, +\infty[$. C'est-à-dire $g'(x) \leq 0$.

Scanned by CamScanner

g est donc strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et $g(0) = 0$.

D'où g est majorée par 0, c'est-à-dire, pour tout réel $x \geq 0$, on a : $g(x) \leq 0$. Donc $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$ (2).

Des inégalités (1) et (2), on peut déduire que $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

2) Comportement des suites :

Soit n un entier naturel non nul, en posant $x = \frac{1}{n}$ et en utilisant les inégalités de la question 1), on a :

- $\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} \leq \sin\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$. (3)

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, alors d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$.

D'où la suite de terme général $\sin\frac{1}{n}$ converge vers 0.

- Si on multiplie l'inégalité (3) par n, on a : $1 - \frac{1}{6n^2} \leq n\sin\frac{1}{n} \leq 1$. (4)

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{6n^2} = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} 1$, alors d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$.

D'où la suite de terme général $n\sin\frac{1}{n}$ converge vers 1.

- Si on ajoute $-\frac{1}{n}$ à tous les membres de l'inégalité (3), on a : $-\frac{1}{6n^3} \leq \sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \leq 0$. (5)

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{6n^3} = 0$, alors d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$.

D'où la suite de terme général $\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}$ converge vers 0.

- En multipliant les inégalités (5) par n^2, on a $-\frac{1}{6n} \leq n^2\sin\frac{1}{n} - n \leq 0$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{6n} = 0$, alors d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sin\frac{1}{n} - n = 0$.

D'où la suite de terme général $n^2\sin\frac{1}{n} - n$ converge vers 0.

Solution 42

1) • Soit n un entier naturel non nul, $(u_{n+1})^2 = 4u_n$ et $u_n > 0$, donc $2\ln u_{n+1} = \ln(4u_n) = \ln 4 + \ln u_n$.

Donc $\ln(u_{n+1}) = \frac{1}{2}(\ln 4 + \ln(u_n))$.

$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - \ln 4 = \frac{1}{2}(\ln 4 + \ln(u_n)) - \ln 4 = \frac{1}{2}(\ln(u_n) - \ln 4) = \frac{1}{2}v_n$.

D'où la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = -\ln 4$.

- D'où pour tout entier naturel non nul n, on a : $v_n = (-\ln 4) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Or $v_n = \ln(u_n) - \ln 4 = \ln\left(\frac{u_n}{4}\right)$, alors $\frac{u_n}{4} = e^{v_n}$. Et finalement, $u_n = 4\exp\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \ln\frac{1}{4}\right]$.

Scanned by CamScanner

2) • $\frac{1}{2}\in]0,1[$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4$.

• Soit n un entier naturel non nul,

$$u_n>3{,}96 \Leftrightarrow 4\exp\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\ln\frac{1}{4}\right|>3{,}96 \Leftrightarrow \exp\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\ln\frac{1}{4}\right|>0{,}99 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\ln\frac{1}{4}>\ln 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{\ln 0{,}99}{-\ln 4}$$

$$\Leftrightarrow (n-1)\ln\left(\frac{1}{2}\right)<\ln\left(\frac{\ln 0{,}99}{-\ln 4}\right)$$

$$\Leftrightarrow n-1>\frac{\ln\left(\frac{\ln 0{,}99}{-\ln 4}\right)}{-\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow n>\frac{\ln\left(\frac{\ln 0{,}99}{-\ln 4}\right)}{-\ln 2}+1$$

Or $\frac{\ln\left(\frac{\ln 0{,}99}{-\ln 4}\right)}{-\ln 2}+1\approx 8{,}107$, alors on a $n\geq 9$. Finalement, $u_n>3{,}96$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 9.

Solution 43

1) • Soit n un entier naturel, on a :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-\sqrt{5}}{u_{n+1}+\sqrt{5}}=\frac{\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{5}{u_n}\right)-\sqrt{5}}{\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{5}{u_n}\right)+\sqrt{5}}=\frac{(u_n)^2-2u_n\sqrt{5}+5}{(u_n)^2+2u_n\sqrt{5}+5}=\frac{(u_n-\sqrt{5})^2}{(u_n+\sqrt{5})^2}=\left(\frac{u_n-\sqrt{5}}{u_n+\sqrt{5}}\right)^2=(v_n)^2.$$

D'où $v_{n+1}=(v_n)^2$ pour tout entier $n\geq 0$.

• Soit P_n la proposition : « $v_n=(v_0)^{2^n}$ ».

On a $(v_0)^{2^0}=v_0$, d'où P_0 est vraie.

Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier naturel n.

On a alors $v_n=(v_0)^{2^n}$. Or $v_{n+1}=(v_n)^2$, donc $v_{n+1}=\left((v_0)^{2^n}\right)^2=(v_0)^{2\times 2^n}=(v_0)^{2^{n+1}}$. D'où P_{n+1} est aussi vraie.

On peut conclure, d'après le principe de récurrence que, pour tout entier naturel n, $v_n=(v_0)^{2^n}$.

2) • $v_0=\frac{u_0-\sqrt{5}}{u_0+\sqrt{5}}=\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}=\frac{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}=\frac{-1}{(2+\sqrt{5})^2}$. D'où $v_0=\frac{-1}{(2+\sqrt{5})^2}$.

• $|v_0|=\frac{1}{(2+\sqrt{5})^2}$. Or on a $\sqrt{5}>2$, donc $2+\sqrt{5}>4$, et par suite $(2+\sqrt{5})^2>16$.

D'où $\frac{1}{(2+\sqrt{5})^2}<\frac{1}{16}$. En conclusion, on a $|v_0|<\frac{1}{16}$.

• Puisque $|v_0|<\frac{1}{16}<1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$ (car $2>1$), alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(v_0)^{2^n}=\lim\limits_{N\to+\infty}(v_0)^N=0$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.

Scanned by CamScanner

• Soit n un entier naturel, on a : $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{5}}{u_n + \sqrt{5}}$, donc $u_n = \dfrac{-v_n\sqrt{5} - \sqrt{5}}{v_n - 1}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{5}$.

Solution 44

1) Soit x appartenant à [0 , 1], f(x) = x équivaut à $\sqrt{\dfrac{1+x}{2}} = x$. C'est-à-dire $\dfrac{1+x}{2} = x^2$.

Ce qui signifie que $2x^2 - x - 1 = 0$. Et finalement x = 1 ou $x = -\dfrac{1}{2}$.

Comme x est positif, alors x = 1. D'où l'ensemble solution de l'équation f(x) = x est S = {1}.

2) • f est continue et dérivable sur [0 , 1], et pour tout réel x dans cet intervalle, on a : $f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}} > 0$.

D'où f est strictement croissante sur [0 , 1] et donc : $f(I) = f([0,1]) = [f(0), f(1)] = \left[\sqrt{\dfrac{1}{2}}, 1\right]$.

Or $\left[\sqrt{\dfrac{1}{2}}, 1\right] \subset [0,1]$, alors on a $f(I) \subset I$.

• D'après la question 1) f est croissante sur [0 , 1], donc soit $x \in [0,1]$, on a $f(0) \le f(x) \le f(1)$, c'est-à-dire $\sqrt{\dfrac{1}{2}} \le \sqrt{\dfrac{1+x}{2}} \le 1$. Donc $2\sqrt{2} \le 4\sqrt{\dfrac{1+x}{2}} \le 4$. Et finalement, on a $\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{4\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}} \le \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Et comme $0 \le \dfrac{1}{4}$, alors pour tout x élément de I, on a $0 \le f'(x) \le \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

3)a) • A l'exercice 26, nous avons montré que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0,1]$.

Or f est dérivable sur [0 , 1] et pour tout x dans [0 , 1], on a $|f'(x)| \le \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, alors d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur [0 , 1], pour a et b dans [0 , 1], on a : $|f(a) - f(b)| \le \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|a - b|$.

Puisque u_n appartient à [0 , 1] pour tout entier naturel n, on peut remplacer a et b par u_{n-1} ($n \neq 0$) et 1 respectivement.

Et on aura alors $|f(u_{n-1}) - f(1)| \le \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_{n-1} - 1|$. C'est-à-dire $|u_n - 1| \le \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_{n-1} - 1|$.

Finalement, on a $|u_n - 1| \le \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_{n-1} - 1|$ pour tout entier naturel non nul n.

• Soit P_n la proposition : « $|u_n - 1| \le \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - 1|$ ».

Pour n = 0,

on a $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^0 |u_0 - 1| = |u_0 - 1|$. Or on a $|u_0 - 1| \le |u_0 - 1|$, alors P_0 est vraie.

Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel n, alors on a $|u_n - 1| \le \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - 1|$.

En multipliant les deux membres de l'inégalité par $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, on a $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - 1| \le \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1} |u_0 - 1|$ (1)

Scanned by CamScanner

Or d'après la question précédente, on a $|u_{n+1}-1|\leq\frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n-1|$ (2).

Des inégalités (1) et (2), on a $|u_{n+1}-1|\leq\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1}|u_0-1|$. D'où P_{n+1} est vraie.

Et finalement, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, on a : $|u_n-1|\leq\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n}|u_0-1|$.

b) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\in[0,1[$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n\times|u_0-1|=0$.

Et comme en plus, on a : $|u_n-1|\leq\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n}|u_0-1|$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

Solution 45

1) Soit n un entier naturel, on a : $\ln(u_n)=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$. Car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

Or $u_n=e^{\ln u_n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)=1$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to1}e^x=e$.

2) • Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)$.

f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel $x\geq0$, on a $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}=\frac{-x}{(x+1)^2}\leq0$.

D'où f est décroissante sur $[0,+\infty[$.

Or f(0) = 0, alors pour tout $x\geq0$, on a $f(x)\leq f(0)$, c'est-à-dire $f(x)\leq0$.

Ce qui signifie que pour tout $x\geq0$, on a : $\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)\leq0$. D'où $\frac{x}{x+1}\leq\ln(x+1)$.

Or on a montré à **l'exercice 39** que pour tout $x\geq0$, on a $\ln(1+x)\leq x$.

On peut donc conclure que pour tout $x\geq0$, $\frac{x}{x+1}\leq\ln(1+x)\leq x$.

• Pour tout entier naturel non nul n, $\frac{1}{n}$ appartient à $[0,+\infty[$, donc on peut poser $x=\frac{1}{n}$ dans l'encadrement précédent, et on aura : $\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\leq\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n}$, c'est-à-dire $\frac{1}{n+1}\leq\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n}$.

En multipliant les membres de l'encadrement précédent par n, on obtient : $\frac{n}{n+1}\leq n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq1$. C'est-à-dire

Scanned by CamScanner

$\frac{n}{n+1} \le \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1$. Finalement, pour tout entier naturel non nul n, on a $\frac{n}{n+1} \le \ln(u_n) \le 1$.

- On a $\ln(u_n) \le 1$, donc $u_n \le e$ (1).

De plus on a : $\left(\frac{n+1}{n}\right) \times \ln(u_n) = \frac{n+1}{n} \times \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$

D'où $\left(\frac{n+1}{n}\right) \times \ln(u_n) = \ln\left[u_n \times \left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$.

Or d'après la question précédente, on a $\frac{n}{n+1} \le \ln(u_n)$, alors $1 \le \left(\frac{n+1}{n}\right) \times \ln(u_n)$.

Et puisque de ce qui précède, on a : $\left(\frac{n+1}{n}\right) \times \ln(u_n) = \ln\left[u_n \times \left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$, alors on peut écrire $1 \le \ln\left[u_n \times \left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$.

Et par conséquent, on a : $e \le \left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$ (2).

Finalement, des inégalités (1) et (2) on déduit que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \le e \le \left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$.

3) Pour n = 5000, d'après l'encadrement précédent, on a : $u_{5000} \le e \le 1{,}0002u_{5000}$.

En utilisant la calculatrice, on a $u_{5000} \approx 2{,}71801005$ et une valeur approchée de e est 2,718281851005.

Solution 46

A)1) La fonction: $x \mapsto 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ est dérivable sur [0 , 1], car fonction polynôme et la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est aussi dérivable sur [0 , 1].
D'où la fonction f est dérivable sur [0 , 1], car produit de deux fonctions dérivables sur [0 , 1].
Soit x réel de [0 , 1], on a :

$$f'(x) = -e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)+e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

2) Soit x appartenant à [0 , 1], $-x$ appartient à [-1 , 0] donc $e^{-1} < e^{-x} \le 1$ (1).
De plus, on a $0 \le x^n \le 1$, (2).
D'où en multipliant membre à membre (1) et (2), on a $0 \le e^{-x}x^n \le 1$, et en « divisant cet encadrement » par n!, on a

$$0 \le \frac{x^n}{n!}e^{-x} \le \frac{1}{n!}.$$

Or $|f'(x)| = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$ pour tout x dans [0 , 1], alors, pour tout réel x dans [0 , 1], on a : $|f'(x)| \le \frac{1}{n!}$.

3) f est dérivable sur [0 , 1] et pour tout réel x dans [0 , 1] , on a : $|f'(x)| \le \frac{1}{n!}$.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction f entre 0 et 1, on a : $|f(1)-f(0)| \le \frac{1}{n!}|1-0|$.

Or $f(1) = e^{-1}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{e}u_n$ et f(0) = 1, alors l'inégalité précédente s'écrit : $\left|\frac{1}{e}u_n - 1\right| \le \frac{1}{n!}$.

B) • D'après la question A)3), on a pour tout entier naturel n, $\left|\frac{1}{e}u_n - 1\right| \le \frac{1}{n!}$, C'est-à-dire $\left|\frac{u_n - e}{e}\right| \le \frac{1}{n!}$.

Scanned by CamScanner

On en déduit que $|u_n - e| \leq \frac{e}{n!}$.

- Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e}{n!} = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$.

Solution 47

Soit n, entier naturel,

- $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = u_n\sqrt{2} + v_n\sqrt{3} - u_n\sqrt{3} - v_n\sqrt{2} = (\sqrt{2} - \sqrt{3})(u_n - v_n) = (\sqrt{2} - \sqrt{3})w_n$.

D'où la suite (w_n) est géométrique de raison $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ et de premier terme $w_0 = u_0 - v_0 = 1$.

- $x_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = u_n\sqrt{2} + v_n\sqrt{3} + u_n\sqrt{3} + v_n\sqrt{2} = (\sqrt{2} + \sqrt{3})(u_n + v_n) = (\sqrt{2} + \sqrt{3})x_n$

D'où la suite (x_n) est géométrique de raison $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ et de premier terme $x_0 = u_0 + v_0 = 1$.

- On a donc pour tout entier naturel n,

$w_n = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^n w_0 = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^n$ et $x_n = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^n x_0 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^n$.

Comme $\begin{cases} w_n = u_n - v_n \\ x_n = u_n + v_n \end{cases}$, alors $u_n = \frac{w_n + x_n}{2}$ et $v_n = \frac{x_n - w_n}{2}$.

On obtient alors : $u_n = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^n + (\sqrt{2} + \sqrt{3})^n}{2}$ et $v_n = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^n - (\sqrt{2} - \sqrt{3})^n}{2}$.

Solution 48

1) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$ (d'après l'exercice 46) et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n(n!)} = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(u_n + \frac{1}{n(n!)}\right) = e$.

2) • Soit n, entier naturel,

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

D'où la suite (u_n) est strictement croissante.

- Soit n, entier naturel,

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n(n!)} = u_{n+1} - u_n + \frac{n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{-n^2 - n - 1}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$= \frac{n(n+1)}{n(n+1)(n+1)!} + \frac{-n^2 - n - 1}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$= \frac{n^2 + n}{n(n+1)(n+1)!} + \frac{-n^2 - n - 1}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$$

Puisque $\frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$, alors $v_{n+1} - v_n < 0$, et par conséquent, la suite (v_n) est strictement décroissante.

- (u_n) est strictement croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$, d'où pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq e$.

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n = e$, alors $e = u_n < u_{n+1}$. Ce qui est absurde car (u_n) étant strictement croissante et convergente vers e, e majore la suite (u_n).
D'où il n'existe pas d'entier naturel n tel que $u_n = e$.
Par conséquent, pour tout entier naturel n, on a $u_n < e$.
De même, (v_n) est strictement décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = e$, d'où pour tout entier naturel n, on a $e \leq v_n$.

S'il existe un entier naturel n tel que $v_n = e$, alors $v_{n+1} < v_n = e$. Ce qui est absurde car (v_n) étant strictement décroissante et convergente vers e, e minore la suite (v_n). D'où il n'existe pas d'entier naturel tel que $u_n = e$.

Scanned by CamScanner

D'où pour tout entier naturel n, on a $e < v_n$. Finalement, on a pour tout entier naturel n, $u_n < e < v_n$.

3) Supposons $e = \frac{p}{q}$, p et q entiers naturels. On a $u_q < \frac{p}{q} < v_q$, donc $u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{q(q!)}$.

Par suite, en multipliant cet encadrement par $q \times q!$, on a $q \times q! \times u_q < p \times q! < q \times q! u_q + 1$.
D'où $0 < p \times q! - q \times q! \times u_q < 1$.

Or pour tout entier naturel k dans $\{0, 1, 2, \ldots, q\}$, $\frac{q!}{k!}$ est un entier naturel.

D'où $\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} = q! \times \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} = q! \times u_q$ est un entier naturel, car somme d'entiers naturels.

Et donc $p \times q! - q \times q! . u_q$ est un entier dans $]0, 1[$.
Ce qui est absurde, puisqu'il n'y a pas d'entier dans l'intervalle $]0, 1[$.

D'où e ne peut se mettre sous la forme $\frac{p}{q}$, c'est-à-dire e est irrationnel.

Solution 49

1) • On montre par récurrence que $u_n > 0$, pour tout entier naturel n.
En effet, $u_0 = 2$, donc $u_0 > 0$.

Supposons $u_n > 0$ pour un certain entier naturel n, alors on a : $\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{u_n} > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 0$.

Donc d'après le principe du raisonnement par récurrence, on a : $u_n > 0$, pour tout entier naturel n.

- Soit n entier naturel, on a : $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{u_n} - \sqrt{2} = \frac{(u_n)^2 - 2u_n\sqrt{2} + 2}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$.

Puisque $u_n > 0$, alors on a $\frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geq 0$, donc $u_{n+1} - \sqrt{2} \geq 0$ et comme de plus, on a $u_0 = 2 \geq \sqrt{2}$, alors pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq \sqrt{2}$.

- Soit n un entier naturel,

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{u_n} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n} = \frac{(u_n + \sqrt{2})(\sqrt{2} - u_n)}{2u_n} \leq 0$ (car $u_n \geq \sqrt{2}$ et $u_n > 0$ pour tout entier naturel n).

La suite (u_n) est donc décroissante.

2) Soit n un entier naturel, d'après la question 1), on a $u_n - \sqrt{2} \geq 0$.

Il suffit donc de montrer que $u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2})^{2^n}$.

On procèdera par récurrence. Alors considérons la propriété P_n : « $u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2})^{2^n}$ ».

Pour n = 0, $\frac{1}{2^0}(u_0 - \sqrt{2})^{2^0} = u_0 - \sqrt{2}$. D'où $\frac{1}{2^0}(u_0 - \sqrt{2})^{2^0} \leq u_0 - \sqrt{2}$, et par conséquent, P_0 est vraie.

Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel n (c'est-à-dire $u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2})^{2^n}$).

On a, d'après les calculs précédents $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$. Or on a $u_n > 1$, donc $\frac{1}{2u_n} < \frac{1}{2}$.

En multipliant les deux membres de cette dernière inégalité par $(u_n - \sqrt{2})^2$, on obtient :

$\frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \leq \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2}$. C'est-à-dire $u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2}$. (1)

Scanned by CamScanner

Or d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $0 \le u_n - \sqrt{2} \le \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2})^{2^n}$.

En élevant les membres de cet encadrement au carré, on obtient : $(u_n - \sqrt{2})^2 \le \left|\frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2})^{2^n}\right|^2$;

c'est-à-dire $(u_n - \sqrt{2})^2 \le \frac{1}{2^{2n}}(u_0 - \sqrt{2})^{2^{n+1}}$. Et donc en multipliant les membres de cette dernière inégalité par $\frac{1}{2}$, on a : $\frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})^2 \le \frac{1}{2^{2n+1}}(u_0 - \sqrt{2})^{2^{n+1}}$ (2).

Et comme $2^{2n+1} \ge 2^{n+1}$, alors on a $\frac{1}{2^{2n+1}} \le \frac{1}{2^{n+1}}$ et par suite $\frac{1}{2^{2n+1}}(u_0 - \sqrt{2})^{2^{n+1}} \le \frac{1}{2^{n+1}}(u_0 - \sqrt{2})^{2^{n+1}}$ (3).

On obtient alors des inégalités (1), (2) et (3) que :

$u_{n+1} - \sqrt{2} \le \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2} \le \frac{1}{2^{2n+1}}(u_0 - \sqrt{2})^{2^{n+1}} \le \frac{1}{2^{n+1}}(u_0 - \sqrt{2})^{2^{n+1}}$. Donc, $u_{n+1} - \sqrt{2} \le \frac{1}{2^{n+1}}(u_0 - \sqrt{2})^{2^{n+1}}$.

D'où P_{n+1} est vraie.

Et finalement, pour tout entier naturel n, on a : $0 \le u_n - \sqrt{2} \le \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2})^{2^n}$.

3) $\frac{1}{2}$ appartient à $[0, 1[$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

De plus, on a $0 < u_0 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} < 1$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_0 - \sqrt{2})^{2^n} = \lim\limits_{N \to +\infty} (u_0 - \sqrt{2})^N = 0$.

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2})^{2^n} = 0$. Comme d'après la question précédente, on a $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \le \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2})^{2^n}$ pour tout entier naturel n, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2}$. Et donc (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Solution 50

1) Notons P_n la proposition : « $u_n \le 3$ ».
On a $u_1 = 1$. Or $1 \le 3$, alors P_1 est vraie.
Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel non nul n.

On a alors $u_n \le 3$, qui implique en multipliant par $\frac{n}{2(n+1)}$ que : $\frac{n}{2(n+1)}u_n \le \frac{3n}{2(n+1)}$.

Donc en ajoutant $\frac{3(n+2)}{2(n+1)}$ aux membres de cette inégalité, on a $\frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \le \frac{3n}{2(n+1)} + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} = 3$.

C'est-à-dire $u_{n+1} \le 3$. D'où P_{n+1} est vraie.
Et d'après le principe de récurrence, on conclut que : pour tout entier $n > 0$, on a $u_n \le 3$.

2) • Soit n entier naturel non nul, on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{(n+2)(3-u_n)}{2(n+1)}$.

Puisque d'après la question 1) on a $3 - u_n \ge 0$ et que l'on a aussi $\frac{(n+2)}{2(n+1)} > 0$, alors on peut écrire : $u_{n+1} - u_n \ge 0$. D'où la suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante.

• La suite $(u_n)_{n>0}$ étant croissante et majorée par 3, elle converge.

Attention :

Dire qu'une suite est croissante et majorée par m, ou décroissante et minorée par m, permet de conclure que cette suite converge. Mais cela ne veut pas dire que cette suite converge vers m. Ce théorème permet seulement de conclure que la limite existe, mais ne donne pas la valeur de cette limite.

• Puisque $(u_n)_{n>0}$ converge, alors il existe un réel l, tel que, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

Scanned by CamScanner

Or $u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3(n+2)}{2(n+1)} = \frac{3}{2}$, alors l vérifie l'équation :

$l = \frac{1}{2}l + \frac{3}{2}$. On a donc en résolvant cette équation, l = 3. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

3) Soit n un entier naturel non nul, on a,

$$v_{n+1} = (n+1)(3-u_{n+1}) = (n+1)\left|3-\left(\frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}\right)\right| = \frac{1}{2}(6n+6-nu_n-3n-6) = \frac{1}{2}n(3-u_n).$$

D'où $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$. D'où la suite $(v_n)_{n>0}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = 3 - u_1 = 2$.

4) On déduit de la question 3) que : soit n entier naturel non nul, $v_n = v_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

Et puisque $v_n = n(3-u_n)$, alors $u_n = 3 - \frac{v_n}{n} = 3 - \frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 0$ (car $\frac{1}{2}$ appartient à]0 , 1[), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Solution 51

1) • Puisque n est un entier naturel non nul, alors on a $\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} > 0$.

Or on a aussi pour tout entier naturel non nul n, $n^2 + 2n \le n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. D'où $\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \le 1$.

On peut donc conclure que pour tout entier naturel non nul n, on a : $0 < u_n \le 1$.

• Soit f la fonction définie sur [0 , +∞[par $f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

f est dérivable sur [0 , +∞[car fonction rationnelle et pour tout réel x > 0, on a : $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^3} > 0$.

D'où f est strictement croissante sur [0 , +∞[.
Or pour tout entier naturel non nul n, f(n) = u_n, et on a f(n + 1) > f(n). Donc $u_{n+1} > u_n$.
La suite $(u_n)_{n>0}$ est donc strictement croissante.

• $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} = 1$.

2) • Notons P_n la proposition : « $x_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$ ».

$x_1 = u_1 = \frac{3}{4}$ et $\frac{1+2}{2(1+1)} = \frac{3}{4}$. D'où P_1 est vraie.

Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel non nul n, c'est-à-dire $x_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

Alors $x_{n+1} = u_1 \times u_2 \times \ldots u_n \times u_{n+1} = x_n \times u_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} \times \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = \frac{n+3}{2(n+2)}$. C'est-à-dire P_{n+1} est vraie.

Et par conséquent, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel non nul n, on a $x_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

• $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$.

Scanned by CamScanner

3) • D'après la question 1), on a $u_n > 0$ pour tout entier naturel non nul n, d'où $\ln u_n$ existe pour tout entier naturel non nul n. D'où $\ln u_n$ est bien définie.

• D'après la question 1), on a $u_n \leq 1$, d'où $\ln u_n \leq 0$. Donc $v_n \leq 0$ pour tout entier naturel non nul n.

• D'après la question 1), la suite $(u_n)_{n>0}$ est strictement croissante.

D'où $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier naturel non nul n, et par suite, $\ln u_{n+1} > \ln u_n$ (car la fonction ln est strictement croissante sur $]0 , +\infty[$), c'est-à-dire $v_{n+1} > v_n$. La suite $(v_n)_{n>0}$ est donc croissante.

• D'après la question 1), on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = \lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$.

4) • Soit n entier naturel non nul,

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} (\ln u_k) = \ln u_1 + \ln u_2 + \ldots + \ln u_n = \ln(u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n) = \ln x_n .$$ D'où $y_n = \ln x_n$.

• Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$.

Solution 52

1) Soit $x > 1$, on a $\frac{x^2}{2x-1} - 1 = \frac{x^2-2x+1}{2x-1} = \frac{(x-1)^2}{2x-1} > 0$. D'où $\frac{x^2}{2x-1} > 1$.

2) Montrons d'abord par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n > 1$.

Notons P_n la proposition : « $u_n > 1$ ».

On a $u_0 = 2$, d'où $u_0 > 1$. D'où P_0 est vraie.

Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel n, c'est-à-dire $u_n > 1$.

Alors d'après la question précédente, on a $u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{2u_n - 1} > 1$. D'où P_{n+1} est aussi vraie.

On en déduit alors que pour tout entier naturel n, on a $u_n > 1$.

Or comme $u_n > 1$, alors $u_n \neq 0$. D'où v_n existe pour tout entier naturel n.

La suite (v_n) est donc bel et bien définie.

Comme $u_n > 1$, alors $u_n - 1 > 0$ et $u_n > 0$, donc $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} > 0$. Par conséquent, la suite (w_n) est bel et bien définie.

3) • Soit n entier naturel,

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{(u_n)^2 - 2u_n + 1}{(u_n)^2}\right) = \ln\left[\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right)^2\right] = 2\ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) = 2\ln(v_n) = 2w_n .$$

D'où (w_n) est une suite géométrique de raison 2 et premier terme $w_0 = \ln v_0 = \ln\left(\frac{u_0 - 1}{u_0}\right) = -\ln 2$.

• On a alors $w_n = (-\ln 2) \times 2^n = 2^n \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$. Finalement, $w_n = \ln\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]$.

• Soit n un entier naturel non nul, $w_n = \ln v_n$, donc $v_n = e^{w_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$.

• On a $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$, d'où $u_n = \frac{1}{1 - v_n}$. C'est-à-dire $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$.

• $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} = \lim\limits_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^N = 0$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Scanned by CamScanner

Solution 53

Partie A

1) $u_0 = -3$, $u_1 = \frac{1}{3}$, $u_2 = \frac{33}{19}$ et $u_3 = \frac{289}{147}$.

2) • Notons P_n la proposition : « $u_n \geq 0$ ».

$u_1 = \frac{1}{3} > 0$, d'où P_1 est vraie.

Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel non nul n, on a alors $3u_n + 10 > 0$ et $6 + u_n > 0$.

D'où $u_{n+1} = \frac{3u_n + 10}{6 + u_n} > 0$. Et donc P_{n+1} est aussi vraie.

On en déduit alors que u_n est un nombre positif pour tout entier naturel non nul n.

• On sait que u_0 et u_1 existent, et pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n \geq 0$, d'où $6 + u_n > 0$.

Finalement $6 + u_n$ est différent de 0. Donc u_n existe pour tout entier $n \geq 2$. D'où la suite (u_n) est bien définie.

3) Nous avons $u_0 \leq 2$, car $u_1 = -3$;

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n > 0$, on a aussi $u_n \leq 2$.

On a $u_1 = \frac{3u_0 + 10}{6 + u_0} = \frac{1}{3}$, donc on a $u_1 \leq 2$.

Supposons pour un entier naturel non nul k donné que $u_k \leq 2$, on a alors $u_n - 2 \leq 0$.

Or $u_{k+1} - 2 = \frac{3u_k + 10}{6 + u_k} - 2 = \frac{u_k - 2}{6 + u_k}$, et $u_k + 6 > 0$, d'où $\frac{u_k - 2}{6 + u_k} \leq 0$. C'est-à-dire $u_{k+1} - 2 \leq 0$.

D'où d'après le principe du raisonnement par récurrence, on a pour tout entier naturel non nul n, $u_n \leq 2$.

Finalement, on a pour tout entier naturel n, $u_n \leq 2$. Et donc la suite (u_n) est majorée par 2.

4) Soit n un entier naturel, on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 10}{6 + u_n} - u_n = -\frac{(u_n - 2)(u_n + 5)}{6 + u_n}$.

D'après la question 3), on a : $u_n - 2 \leq 0$ et comme on a $u_n \geq 0$ alors $u_n + 5 > 0$ et $6 + u_n > 0$.

D'où $\frac{(u_n - 2)(u_n + 5)}{6 + u_n} \geq 0$; c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Et la suite (u_n) est croissante.

5) La suite (u_n) est croissante et majorée par 2, donc elle converge.

Puisque pour tout entier $n > 0$, on a $0 \leq u_n \leq 2$, alors la limite l de cette suite est comprise entre 0 et 2.

Or l est solution de l'équation $x = \frac{3x + 10}{x + 6}$ (car la fonction $x \mapsto \frac{3x + 10}{x + 6}$ est continue sur $[0, 2]$) alors l est solution de l'équation $x^2 + 3x - 10 = 0$. C'est-à-dire $l = 2$ ou $l = -5$. Comme l est compris entre 0 et 2, alors $l = 2$.

Partie B

1) Soit n un entier naturel, on a : $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 5} = \frac{\frac{3u_n + 10}{6 + u_n} - 2}{\frac{3u_n + 10}{6 + u_n} + 5} = \frac{1}{8} \times \frac{u_n - 2}{u_n + 5} = \frac{1}{8} v_n$.

D'où la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{8}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{5}{2}$.

2) D'après la question B)1), soit n un entier naturel, on a : $v_n = -\frac{5}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^n$ et $u_n = \frac{5v_n + 2}{1 - v_n} = \frac{-\frac{25}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^n + 2}{1 + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^n}$.

Puisque $\frac{1}{8}$ appartient à $[0, 1[$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Scanned by CamScanner

Solution 54

1) f est dérivable sur]0 , +∞[et pour tout x élément de]0 , +∞[, on a : $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

f ' est dérivable sur]0 , +∞[et pour tout x élément de]0 , +∞[, on a : $f''(x)=\frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$.

2) On pose $u_1 = 1$, $v_1 = -1$ et pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1}=v_n-(n+1)u_n$ et $v_{n+1}=-(n+1)v_n$.

Notons P_n la proposition : « $f^{(n)}(x)=\frac{u_n+v_n\ln x}{x^{n+1}}$ ».

D'après la question 1), on a : $f^{(1)}(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{u_1+v_1\ln x}{x^{1+1}}$. D'où P_1 est vraie.

Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel non nul n. On a alors, pour tout $x > 0$, $f^{(n)}(x)=\frac{u_n+v_n\ln x}{x^{n+1}}$.

Donc $f^{(n)}$ est dérivable sur]0 , +∞[et on a :

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{\frac{v_n}{x}\times x^{n+1}-(n+1)x^n(u_n+v_n\ln x)}{x^{2n+2}}=\frac{x^n(v_n-(n+1)u_n-(n+1)v_n\ln x)}{x^{2n+2}}=\frac{v_n-(n+1)u_n-(n+1)v_n\ln x}{x^{n+2}}$$

$$=\frac{u_{n+1}+v_{n+1}\ln x}{x^{n+2}}$$

avec $u_{n+1}=v_n-(n+1)u_n$ et $v_{n+1}=-(n+1)v_n$. D'où P_{n+1} est vraie.

Et finalement, pour tout entier naturel n, non nul, on a : $f^{(n)}(x)=\frac{u_n+v_n\ln x}{x^{n+1}}$.

3) • Soit n, entier naturel non nul :

$v_{n+1}=-(n+1)v_n$, $v_n=-nv_{n-1}$, $v_{n-1}=-(n-1)v_{n-2}$, ..., $v_3=-3v_2$ et $v_2=-2v_1$.

En multipliant ces égalités membre à membre, on obtient :

$v_{n+1}\times v_n\times v_{n-1}\times\ldots\times v_2=(-1)^n\times 2\times 3\times\ldots\times n\times(n+1)\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_{n-1}\times v_n$.

Et après simplification, on a : $v_{n+1}=(-1)^n(n+1)!v_1$ or $v_1=-1$. D'où $v_{n+1}=(-1)^{n+1}(n+1)!$. Et donc $v_n=(-1)^n.n!$.

• Notons P_n' la proposition : « $u_n=(-1)^{n+1}n!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$ ».

Pour n = 1, on a : $(-1)^2\times 1!\times 1 = 1 = u_1$, d'où P_1 est vraie.

Supposons P_n' vraie pour un certain entier naturel non nul n. On a alors

$u_{n+1}=v_n-(n+1)u_n=(-1)^n n!-(-1)^{n+1}(n+1)!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

$$=(-1)^{n+2}(n+1)!\times\frac{1}{n+1}+(-1)^{n+2}(n+1)!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=(-1)^{n+2}(n+1)!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

Et finalement, pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_n=(-1)^{n+1}n!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$.

Solution 55

1) a) Méthode 1 : utilisation des variations de deux fonctions :

On pose pour tout réel $x \geq 1$, $u(x)=\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{x+1}$ et $v(x)=\frac{1}{x}-\ln(x+1)+\ln(x)$.

Etude de la fonction u sur [1 , +∞[:

u est définie, continue et dérivable sur [1 , +∞[et pour tout $x \geq 1$, $u'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)^2}$.

Scanned by CamScanner

Donc pour tout $x \geq 1$, on a $u'(x) < 0$ et par conséquent, u est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

Or on a $u(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$. Ainsi, pour tout $x \geq 1$, on a $u(x) \geq 0$.

C'est-à-dire qu'on a $\ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{x+1} \geq 0$. Et finalement pour tout $x \geq 1$ on a $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x)$ (1)

Etude de la fonction v sur $[1, +\infty[$:

v est définie, continue et dérivable sur $[1, +\infty[$.

Et pour tout $x \geq 1$, on a $v'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2(x+1)}$.

Donc pour tout $x \geq 1$, on a $v'(x) < 0$, et v est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

De plus, $v(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 0$, et par conséquent pour tout $x \geq 1$, on a $v(x) \geq 0$.

On en déduit que, pour tout réel $x \geq 1$, $\ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$ (2)

Des inégalités (1) et (2), on déduit que pour tout $x \geq 1$, on a : $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.

b) Méthode 2 : Utilisation de l'inégalité des accroissements finis :

Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(t) = \ln t$.

h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $t > 0$, on a $h'(t) = \frac{1}{t}$.

Soit $x > 0$, et pour tout t dans $[x, x+1]$, on a : $0 < x \leq t \leq x+1$, donc $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$, soit $\frac{1}{x+1} \leq h'(t) \leq \frac{1}{x}$.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à h sur $[x, x+1]$, avec $x > 0$, on a :

$\frac{1}{x+1}(x+1-x) \leq h(x+1) - h(x) \leq \frac{1}{x}(x+1-x)$, soit $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.

Finalement, on a pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.

2)a) Soit n entier naturel non nul, posons P_n la proposition : « $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$ ».

Pour n = 1,

$u_2 - 1 = 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = 1$. Comme $\frac{1}{2} \leq \ln 2 \leq 1$, alors P_1 est vraie.

Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel non nul n (c'est-à-dire $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$), et montrons que P_{n+1} est aussi vraie (c'est-à-dire $u_{n+2} - 1 \leq \ln(n+2) \leq u_{n+1}$).

Dans l'encadrement de la question 1), on a pour $x = n+1$, $\frac{1}{n+2} \leq \ln(n+2) - \ln(n+1) \leq \frac{1}{n+1}$ (3)

Et d'après l'hypothèse de récurrence, on a $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$ (4).

En additionnant membre à membre les encadrements (3) et (4), on obtient :

$u_{n+1} + \frac{1}{n+2} - 1 \leq \ln(n+2) \leq \frac{1}{n+1} + u_n$, c'est-à-dire $u_{n+2} - 1 \leq \ln(n+2) \leq u_{n+1}$ (car $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{n+2}$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$). Donc P_{n+1} est vraie.

On conclut alors que, pour tout entier naturel non nul n, on a $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$.

b) Pour tout $n \geq 1$, on a $\ln(n+1) \leq u_n$. Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3) a) D'après l'encadrement de la question 1), on a pour $x = n$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$,

c'est-à-dire $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{1+n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$. En multipliant par -1, on a $-\frac{1}{n} \leq -\ln\left(\frac{1+n}{n}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$.

Scanned by CamScanner

En additionnant $\frac{1}{n}$, on a : $0 \le \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{1+n}{n}\right) \le \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Finalement, pour tout entier naturel non nul n, on a : $0 \le f(n) \le \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

b) • Soit n entier naturel supérieur ou égal à 2, notons Q_n la proposition : « $c_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$ ».
Pour n = 2, $c_2 = 1 - \ln 2$ et $f(1) = 1 - \ln 2$, donc $c_2 = f(1)$. D'où Q_2 est vraie.
Supposons Q_n vraie pour un certain entier naturel n > 1 (c'est-à-dire $c_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$), montrons que Q_{n+1} est aussi vraie (c'est-à-dire $c_{n+1} = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) + f(n)$).
D'après l'hypothèse de récurrence on a $c_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$, donc

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) + f(n) = c_n + f(n) = u_{n-1} - \ln n + \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{1+n}{n}\right) = u_n - \ln(n+1) = c_{n+1}.$$

D'où Q_{n+1} est aussi vraie.
On conclut alors que pour tout entier $n \ge 2$, $c_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$.

- Soit un entier naturel n > 1, on a : $c_{n+1} - c_n = f(n)$. Comme $f(n) \ge 0$, alors la suite (c_n) est croissante.
- D'après la question 3)a), on a :

$$f(1) \le 1 - \frac{1}{2},\quad f(2) \le \frac{1}{2} - \frac{1}{3},\ \ldots,\ f(n-2) \le \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \text{ et } f(n-1) \le \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

En additionnant membre à membre ces inégalités et après simplification, on obtient : $c_n \le 1 - \frac{1}{n}$.

De plus, on a pour tout $n \ge 2$, $f(n) \ge 0$, donc $f(1) \le f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$, c'est-à-dire $f(1) \le c_n$ ***(le lecteur pourra reprendre la démonstration de cette inégalité en utilisant le raisonnement par récurrence).***

On peut alors conclure que pour tout $n \ge 2$, on a : $f(1) \le c_n \le 1 - \frac{1}{n}$.

c) Pour tout entier $n \ge 2$, on a $f(1) \le c_n \le 1 - \frac{1}{n} \le 1$.

La suite $(c_n)_{n>1}$ est donc majorée par 1, et comme de plus elle est croissante, alors elle converge.

Solution 56

Soit n un entier naturel, on a : $v_n \ge 0$ et $0 \le u_n \le 1$ (1), d'où en multipliant (1) par v_n, on a : $u_n v_n \le v_n \le 1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} 1$, alors d'après le théorème des gendarmes on a, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

On montre de même que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. D'où, les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

Solution 57

1) Soit n entier naturel, on a : $a^n \le a^n + b^n$ et $b^n \le a^n + b^n$, car a et b sont strictement positifs. Alors :

Si a > 1 ou b > 1, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = +\infty$.

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} (a^n + b^n) = +\infty$ (car pour tout n, on a $a^n > 0$ et $b^n > 0$).

Si 0 < a < 1 et 0 < b < 1, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = \lim\limits_{n\to+\infty} b^n = 0$. Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} (a^n + b^n) = 0$.

Si a = 1 et 0 < b < 1, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (a^n + b^n) = 1$.

Si a = 1 et b = 1, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = \lim\limits_{n\to+\infty} b^n = 1$. Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (a^n + b^n) = 2$.

Si 0 < a < 1 et b = 1, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (a^n + b^n) = 1$.

2) • Si $0 < \frac{a}{b} < 1$ (c'est-à-dire a < b), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$.

Scanned by CamScanner

Or $\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}=\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^n-1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^n-1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}\right|=-1$.

- Si $\dfrac{a}{b}>1$, (c'est-à-dire b < a), alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{b}{a}\right)^n=0$.

  Or $\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}=\dfrac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}\right|=1$.

- Si $\dfrac{a}{b}=1$ (c'est-à-dire a = b), alors $\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}\right)=0$.

Finalement :
- Si a < b, alors la suite $\left(\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}\right)_{n\geq 0}$ converge vers -1.
- Si a > b, alors la suite $\left(\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}\right)_{n\geq 0}$ converge vers 1.
- Si a = b, alors la suite $\left(\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}\right)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Solution 58

Soit n un entier naturel non nul,

$$a_0+\frac{a_1}{2^1}+\frac{a_2}{2^2}+\ldots+\frac{a_n}{2^n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^k\right]=\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^k-\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^k\right].$$

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^k=\frac{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^k=\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{4}}$.

D'où $S_n=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\left[\dfrac{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}}-\dfrac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{4}}\right]$.

Or $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ sont dans l'intervalle]-1 , 1[. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1}=0$.

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\left|\dfrac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}}-\dfrac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{4}}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\left|\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}-\dfrac{4}{3+\sqrt{5}}\right|=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\left|\dfrac{2\sqrt{5}}{4}\right|=2$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=2$.

Scanned by CamScanner

Solution 59

1) • On a $v_1 = u_1 - b$, $v_2 = u_2 - b = \frac{1}{2}u_1 + a - b$ $v_3 = u_3 - b = \frac{1}{2}u_2 + a - b = \frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{2}a - b$.

Si (v_n) est géométrique, alors on a : $\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_2}$, c'est-à-dire $\frac{u_1 + 2a - 2b}{2u_1 - 2b} = \frac{u_1 + 6a - 4b}{2u_1 + 4a - 4b}$.

Ce qui équivaut à $(u_1 + 2a - 2b)(2u_1 + 4a - 4b) = (2u_1 - 2b)(u_1 + 6a - 4b)$.
On obtient alors $-2b(u_1 - 2a) + 4a(u_1 - 2a) = 0$. Soit $(-2b + 4a)(u_1 - 2a) = 0$. D'où $b = 2a$ ou $u_1 = 2a$.
Vérifions que pour $b = 2a$, (v_n) est une suite géométrique :

Soit n un entier naturel non nul, on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2a = \frac{1}{2}u_n + a - 2a = \frac{1}{2}(u_n - 2a) = \frac{1}{2}v_n$.

D'où pour $b = 2a$, la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - 2a$.

• On a alors, pour n entier naturel non nul, $s_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right) \times v_1$. D'où $S_n = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)(u_1 - 2a)$.

• Et $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}(v_k + 2a) = \sum_{k=1}^{n} v_k + \sum_{k=1}^{n} 2a = s_n + 2an$. D'où $S_n = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)(u_1 - 2a) + 2an$.

2) • Soit n un entier naturel non nul, on a : $2w_{n+1} - 3w_n + w_{n-1} = 0$, c'est-à-dire $w_{n+1} = \frac{3}{2}w_n - \frac{1}{2}w_{n-1}$.

Donc $w_{n+1} - \frac{1}{2}w_n = w_n - \frac{1}{2}w_{n-1}$.

Posons $T_n = w_{n+1} - \frac{1}{2}w_n$, on a $T_n = T_{n-1}$ pour tout entier naturel non nul n.

D'où la suite (T_n) est une suite constante. Par conséquent, $w_{n+1} - \frac{1}{2}w_n$ est indépendant de n.

• Comme (T_n) est constante, alors pour tout n, $T_n = T_0 = w_1 - \frac{1}{2}w_0$. D'où $w_{n+1} - \frac{1}{2}w_n = w_1 - \frac{1}{2}w_0$.

• On a pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + d$, où $d = w_1 - \frac{1}{2}w_0$. D'après la question 1), on a :

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)(w_1 - 2d) + 2dn = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)(w_1 - 2w_1 + w_0) + 2n\left(w_1 - \frac{1}{2}w_0\right)$$

$$= 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)(-w_1 + w_0) + n(2w_1 - w_0)$$

D'où $\sum_{k=1}^{n} w_k = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)(-w_1 + w_0) + n(2w_1 - w_0)$.

Solution 60

1) u est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$.

D'où pour n entier naturel non nul, on a : $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n$ et $u_n = -\frac{1}{2}u_{n-1}$.

Et donc $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}u_{n-1}$; par suite, $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}u_{n-1}$. Finalement, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1})$.

Scanned by CamScanner

2) Soit n, entier naturel non nul, on a : $u_{n+1}=q^{n+1}u_0$, $u_n=q^nu_0$ et $u_{n-1}=q^{n-1}u_0$.

Ainsi $u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+u_{n-1})$ équivaut à $2q^{n+1}u_0=q^nu_0+q^{n-1}u_0$. C'est-à-dire $q^{n-1}u_0(2q^2-q-1)=0$.

C'est-à-dire $q^{n+1}u_0(q-1)(2q+1)=0$. Donc $u_0=0$ ou $q=0$ ou $q=1$ ou $q=-\frac{1}{2}$.

Or : si $u_0=0$, alors la suite (u_n) est nulle, donc stationnaire (plus précisément constante)
Si $q=0$, alors la suite (u_n) est stationnaire.

Si $q=1$, alors la suite (u_n) est stationnaire (car constante). Finalement $q=-\frac{1}{2}$.

Solution 61

1) Soit n entier naturel, on a : $u_{n+1}-u_n=ku_n$, c'est-à-dire $u_{n+1}=(1+k)u_n$.
D'où la suite (u_n) est géométrique de raison $1+k$ et de premier terme u_0. D'où $u_{n+1}=(1+k)^{n+1}u_0$.

2) On a $u_2=(1+k)^2u_0$. Or $u_0=54$ et $u_2=24$, alors $24=54(1+k)^2$. Ce qui équivaut à $(1+k)^2=\frac{4}{9}$. C'est-à-dire

$1+k=\frac{2}{3}$ ou $1+k=-\frac{2}{3}$. On en déduit que $k=-\frac{1}{3}$ ou $k=-\frac{5}{3}$.

D'où Si $k=k_1=-\frac{1}{3}$ ou $k=k_2=-\frac{5}{3}$, alors $u_0=54$ et $u_2=24$.

3) • **Pour** $k=-\frac{1}{3}$, (u_n) est géométrique de raison $q_1=1+k_1=\frac{2}{3}$, et de premier terme $u_0=54$.

Ainsi, soit n entier naturel, $u_n=54\left(\frac{2}{3}\right)^n>0$.

Et $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2}{3}<1$, d'où (u_n) est strictement décroissante et minorée par 0. Donc (u_n) est convergente.

De plus $\frac{2}{3}\in[0,1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

• **Pour** $k=-\frac{5}{3}$, (u_n) est une suite géométrique de raison $q_2=1+k_2=-\frac{2}{3}$ et de premier terme $u_0=54$.

D'où pour tout entier naturel n, $u_n=54\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ et $u_{n+1}=54\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

Comme $u_{n+1}\times u_n=54^2\left(-\frac{2}{3}\right)^{2n+1}=-54^2\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}<0$, alors la suite (u_n) est alternée. D'où (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

Point méthode
- *Une suite alternée n'est ni croissante, ni décroissante, ni constante.*
- *Comme exemple, une suite géométrique de raison négative est alternée.*
- *Une suite constante est stationnaire, mais la réciproque est fausse.*

De plus $-\frac{2}{3}\in]-1,1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$. Donc (u_n) converge vers 0.

Solution 62

1) $u_1=\sqrt{6}$, $u_2=\sqrt{6+\sqrt{6}}$ et $u_3=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$.

2) Le lecteur vérifiera par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n>0$.

• Montons par récurrence que la suite (u_n) est strictement croissante :
Notons P_n la proposition : « $u_{n+1}-u_n>0$ ».
On a $u_1=\sqrt{6}$, $u_0=0$. Donc $u_1>u_0$. D'où P_0 est vraie.
Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel n.
On a alors $u_{n+1}>u_n$, donc $u_{n+1}+6>u_n+6$, donc $\sqrt{6+u_{n+1}}>\sqrt{6+u_n}$. C'est-à-dire $u_{n+2}>u_{n+1}$. D'où P_{n+1} est vraie.

Scanned by CamScanner

Finalement, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n > 0$, c'est-à-dire, la suite (u_n) est strictement croissante.

- Montrons par récurrence que (u_n) est majorée par 3.

Notons Q_n la proposition : « $u_n \leq 3$ ».

On a $u_0 = 0$ et $0 \leq 3$, d'où Q_0 est vraie.

Supposons Q_n vraie pour un certain entier naturel n, c'est-à-dire $u_n \leq 3$.

On a alors $u_n + 6 \leq 9$ donc $\sqrt{6+u_n} \leq 3$. C'est-à-dire $u_{n+1} \leq 3$. D'où P_{n+1} est aussi vraie.

On peut donc conclure que pour tout entier naturel n, $u_n \leq 3$, c'est-à-dire (u_n) est majorée par 3.

- Comme (u_n) est croissante et majorée par 3, alors on peut conclure que (u_n) converge.

3) • Soit n un entier naturel, on a : $3 - u_{n+1} = 3 - \sqrt{6+u_n} = \dfrac{(3-\sqrt{6+u_n})(3+\sqrt{6+u_n})}{\sqrt{6+u_n}+3} = \dfrac{3-u_n}{\sqrt{6+u_n}+3}$.

Or on a $\sqrt{6+u_n} \geq 0$, donc $\sqrt{6+u_n}+3 \geq 3$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{6+u_n}+3} \leq \dfrac{1}{3}$ (1).

Et puisque la suite (u_n) est majorée par 3, alors, on a $3 - u_n \geq 0$.

Et en multipliant les membres de l'inégalité (1) par $3 - u_n$, on a $\dfrac{3-u_n}{\sqrt{6+u_n}+3} \leq \dfrac{3-u_n}{3}$. D'où $3 - u_{n+1} \leq \dfrac{3-u_n}{3}$.

- D'après ce qui précède, on a :

$0 \leq 3-u_{n+1} \leq \dfrac{1}{3}(3-u_n)$, $0 \leq 3-u_n \leq \dfrac{1}{3}(3-u_{n-1}), \ldots, 0 \leq 3-u_2 \leq \dfrac{1}{3}(3-u_1)$ et $0 \leq 3-u_1 \leq \dfrac{1}{3}(3-u_0)$.

En multipliant les inégalités précédentes membre à membre, on a :

$$0 \leq (3-u_{n+1})(3-u_n)\ldots(3-u_2)(3-u_1) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}(3-u_n)(3-u_{n-1})\ldots(3-u_1)(3-u_0).$$

Après simplification, on a : $0 \leq 3-u_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}(3-u_0)$.

C'est-à-dire $0 \leq 3-u_n \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}(3-u_0)$. D'où $0 \leq 3-u_n \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Autre méthode : le lecteur pourra montrer cet encadrement par récurrence.

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ et $|3-u_n| \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$. Donc $l = 3$.

Solution 63

Partie A :

1)a) Limites de h en 0 puis en $+\infty$:

- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} h(x) = -\infty$ puisque $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$.
- Soit $x > 0$, $h(x) = x\left(\dfrac{3\ln(x)}{x} - 1\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.

b) La fonction h est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et pour $x > 0$, $h'(x) = 3\times\dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{3-x}{x}$.

Le signe de $h'(x)$ est celui de $3 - x$ qui s'annule et change de signe pour $x = 3$. On a le tableau suivant :

x	0		3	
h'(x)	‖	+	0	-
h(x)	‖ -∞	↗	3ln3 − 3	↘ -∞

Scanned by CamScanner

Pour tout $x > 0$, on $h(x) \leq 3\ln 3 - 3$ et $h(3) = 3\ln 3 - 3$.
Donc $3\ln 3 - 3$ est le maximum de h. Une valeur approchée à 10^{-3} près de $3\ln 3 - 3$ est 0,296.

2) Equation $3\ln(x) = x$

On sait que $3\ln x = x$ équivaut à $3\ln x - x = 0$. C'est-à-dire $h(x) = 0$.
Or la fonction h est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; 3[$, donc h induit une bijection de $]0, 3[$ sur $h(]0, 3[) =]-\infty, 3\ln 3 - 3[$ et 0 appartient à $]-\infty, 3\ln 3 - 3[$. Alors l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0 ; 3[$.
La fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $]3 ; +\infty[$, donc h induit une bijection de $]3, +\infty[$ sur $h(]3, +\infty[) =]-\infty, 3\ln 3 - 3[$ et 0 appartient à $]-\infty, 3\ln 3 - 3[$. Alors l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $]3, +\infty[$.
Finalement, l'équation $h(x) = 0$ admet deux solutions, l'une notée α, élément de l'intervalle $]0, 3[$ et l'autre notée λ, élément de $]3, +\infty[$.
D'où, l'équation $3\ln x = x$ admet deux solutions, l'une notée α, élément de l'intervalle $]0, 3[$ et l'autre notée λ, élément de $]3, +\infty[$.

3) En utilisant la calculatrice, on a $h(1,85) < 0$ et $h(1,86) > 0$, par conséquent $1,85 \leq \alpha \leq 1,86$.

4)a) • La fonction φ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (car φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a $\varphi'(x) = \frac{3}{x} > 0$), donc aussi sur $[4, 5]$.

Ainsi, si $4 \leq x \leq 5$, alors $\varphi(4) \leq \varphi(x) \leq \varphi(5)$ donc $4,15 \leq \varphi(x) \leq 4,83$, d'où $4 \leq \varphi(x) \leq 5$.
La fonction φ transforme donc tout élément de I en un élément de I.

• On a $h(4) = 3\ln 4 - 4 > 0$ et $h(5) = 3\ln 5 - 5 < 0$, alors $4 < \lambda < 5$ et λ est élément de I.

b) Pour tout élément x de I, on a : $|\varphi'(x)| \leq \frac{3}{4}$.

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0, +\infty[$, donc la fonction φ l'est aussi et on a $\varphi'(x) = \frac{3}{x}$ pour tout x strictement positif.

Si $4 \leq x \leq 5$, alors $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{4}$ et $\frac{3}{5} \leq \frac{3}{x} \leq \frac{3}{4}$, soit finalement $\frac{3}{5} \leq \varphi'(x) \leq \frac{3}{4}$.

Donc pour tout élément x de I, on a : $|\varphi'(x)| \leq \frac{3}{4}$.

c) Montrons que pour entier naturel n, on a $|u_n - \lambda| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ et puis que la suite (u_n) a pour limite λ.

• Montrons rapidement que les termes u_n de la suite sont bien dans I.
Soit P(n) la propriété de récurrence : « u_n est dans I ».
La propriété est vraie au rang 0, car $u_0 = 4$ est élément de I.
Si la propriété est vraie au rang p entier naturel, alors u_p est dans I ; d'après le 4)a), $\varphi(u_p) = u_{p+1}$ est dans I, donc la propriété est vraie au rang $p + 1$.
Finalement, pour tout entier n, u_n est dans I.

• On peut alors appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction φ sur I.
Sachant que, pour tout élément x de I, on a : $|\varphi'(x)| \leq \frac{3}{4}$ et pour tout n, u_n est dans I et $\varphi(\lambda) = \lambda$ est élément de I, alors $|\varphi(u_n) - \varphi(\lambda)| \leq \frac{3}{4}|u_n - \lambda|$, soit $|u_{n+1} - \lambda| \leq \frac{3}{4}|u_n - \lambda|$.

• Utilisons une démonstration par récurrence.
Désignons par P(n) la propriété de récurrence : $|u_n - \lambda| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
La propriété est vraie au rang 0, car $|u_0 - \lambda| = |4 - \lambda| \leq 1$.
Si la propriété est vraie à un rang p entier naturel, il vient : $|u_p - \lambda| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^p$ et d'après ce qui précède, on a alors :

Scanned by CamScanner

$|u_{p+1} - \lambda| \leq \frac{3}{4}|u_p - \lambda| \leq \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^p = \left(\frac{3}{4}\right)^{p+1}$ donc la propriété est vraie au rang $p+1$.

Finalement, pour tout entier naturel n, on a $|u_n - \lambda| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

- On sait que $|u_n - \lambda| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ et que $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ (car $0 < \frac{3}{4} < 1$). Par conséquent, $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lambda$

d) valeur approchée de λ à 10^{-3} près

Cherchons un entier naturel p tel que $\left(\frac{3}{4}\right)^p \leq 10^{-3}$.

Pour cela, en utilisant la croissance de la fonction logarithme népérien, l'inégalité précédente est équivalente à

$p\ln\left(\frac{3}{4}\right) \leq -3\ln 10$ ou encore $p \geq \frac{-3\ln(10)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 24{,}01$ (attention on a $\ln\left(\frac{3}{4}\right) < 0$)

D'où, on a $\left(\frac{3}{4}\right)^{25} \leq 10^{-3}$, et par suite, on a $|u_{25} - \lambda| \leq 10^{-3}$. Donc u_{25} est une valeur approchée de λ à 10^{-3} près.

On peut alors prendre p = 25 (Notons que pour p supérieur ou égal à 25, u_p est une valeur approchée de λ à 10^{-3} près.
En utilisant la calculatrice, on a $u_{25} \approx 4{,}536$. Une valeur approchée de λ à 10^{-3} près est 4,536.

Partie B :

1) Variation de f

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

La fonction dérivée s'annule et change de signe pour x = e.
Comme $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, alors on a $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

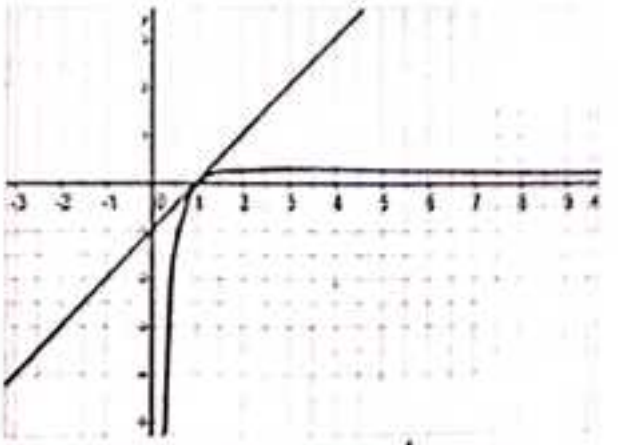
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. On obtient le tableau :

x	0	e	$+\infty$
f'(x)	|| +	0	-
f(x)	$-\infty$ ||	e^{-1}	0

2) Equation de la tangente T à C en son point A d'abscisse 1

Il suffit d'appliquer la formule. Comme f(1) = 0 et f '(1) = 1, on obtient : y – 0 = 1(x – 1), soit y = x – 1.

3)



4)a) La fonction f admet sur $]0 ; +\infty[$ un maximum en e, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, on a : $f(x) \leq f(e) \leq \frac{1}{e} \leq 0{,}37$.

Pour n = 1, l'équation est f(x) = 1, elle n'admet donc pas de solution

Scanned by CamScanner

Pour n = 2, l'équation est $f(x)=\frac{1}{2}$, elle n'admet donc pas de solution.

b) Si n est supérieur ou égal à 3, on a $\frac{1}{n}\le\frac{1}{3}\le\frac{1}{e}=f(e)$.

- La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle]0 ; e[, donc f réalise une bijection de]0 , e] sur $f(]0,e])=\left]-\infty,\frac{1}{e}\right]$, et $\frac{1}{n}$ appartient à $\left]-\infty,\frac{1}{e}\right]$, alors l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet une unique solution sur]0 , e].
- La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle [e ; +∞[, donc f réalise une bijection de [e , +∞[sur $f([e,+\infty[)=\left]0,\frac{1}{e}\right]$, et $\frac{1}{n}\in\left]0,\frac{1}{e}\right]$, alors l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet une unique solution sur [e , +∞[.

Finalement, l'équation (E_n) admet deux solutions α_n et λ_n avec $\alpha_n \le \lambda_n$.

c) On a $f(x)=\frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x}=\frac{1}{n} \Leftrightarrow n\ln(x)=x \Leftrightarrow \ln(x^n)=x \Leftrightarrow x^n=e^x$.

Les solutions de l'équation (E_n) sont par conséquent les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction exponentielle avec la courbe représentative de la fonction puissance $x\mapsto x^n$.

Partie C :

1) Encadrement de ln(1 + x) :

a) La fonction g est dérivable sur [0 , +∞[comme somme de fonctions dérivables et pour tout x > 0,

$g'(x)=x-1+\frac{1}{1+x}=\frac{x^2-1+1}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}$.

La dérivée est positive sur [0 , +∞[, donc la fonction g est croissante sur [0 , +∞[.

b) La fonction étant croissante sur [0 , +∞[, on peut écrire : g(x) ≥ g(0) = 0, soit $x-\frac{1}{2}x^2\le\ln(1+x)$.

c) On raisonne de la même façon. Soit h la fonction définie sur [0 , +∞[, par h(x) = x – ln(1 + x).
La fonction h est dérivable sur cet intervalle comme somme de fonctions dérivables et pour tout x > 0,

$h'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$.

La dérivée est positive sur [0 , +∞[, donc la fonction h est croissante sur [0 ; +∞[et pour tout x de [0 , +∞[, on peut écrire : h(x) ≥ h(0) = 0 ou encore x ≥ ln(1 + x).

2) Etude de α_n pour n ≥ 4

a) • Pour tout réel x de [0 ; +∞[, on a :

ln(1 + x) ≤ x (d'après la question précédente) et 1 + x > 0 donc $\frac{\ln(1+x)}{1+x}\le\frac{x}{1+x}$. (1)

De plus, pour tout x ≥ 0, on a 1 + x ≥ 1 donc $\frac{1}{1+x}\le 1$, donc $\frac{x}{1+x}\le x$ (2).

Des inégalités (1) et (2), on a conclut que pour tout x ≥ 0, on a $\frac{\ln(1+x)}{1+x}\le x$.

- Si on remplace x par $\frac{1}{n}$ (pour n > 0) dans l'inégalité précédente, on a $\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{1}{n}}\le\frac{1}{n}$; or $f\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{1}{n}}$,

alors il vient que $f\left(1+\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}$ pour tout n ≥ 1 et donc pour tout n ≥ 4.

b) • Pour établir l'inégalité demandée, calculons la différence $\frac{\ln(1+x)}{1+x}-\frac{1}{2}x$.

Scanned by CamScanner

On a $\frac{\ln(1+x)}{1+x}-\frac{1}{2}x=\frac{2\ln(1+x)-x-x^2}{2(1+x)}$.

D'après la question C)1)b), on a pour tout réel $x>0$, $x-\frac{1}{2}x^2\le\ln(1+x)$, soit $2\ln(1+x)\ge 2x-x^2$.

Et par suite $2\ln(1+x)-x-x^2\ge x-2x^2$. On a pour tout $x\ge 0$, $1+x>0$, donc $\frac{2\ln(1+x)-x-x^2}{2(1+x)}\ge\frac{x(1-2x)}{2(1+x)}$.

Le signe de cette expression est celui de $x(1-2x)$, c'est-à-dire celui d'un polynôme du second degré dont les racines sont 0 et $\frac{1}{2}$.

Pour tout x de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, il vient que $x(1-2x)\ge 0$ soit $\frac{\ln(1+x)}{1+x}\ge\frac{1}{2}x$.

- Si on remplace x par $\frac{2}{n}$ (pour $n>0$), on obtient :

$\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{1+\frac{2}{n}}\ge\frac{1}{2}\times\frac{2}{n}=\frac{1}{n}$; or on a, $f\left(1+\frac{2}{n}\right)=\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{1+\frac{2}{n}}$, alors on peut écrire $f\left(1+\frac{2}{n}\right)\ge\frac{1}{n}$ pour tout n non nul, donc pour $n\ge 4$.

c) Des résultats précédents, on écrit $f\left(1+\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}\le f\left(1+\frac{2}{n}\right)$.

Or α_n est l'unique solution de l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ dans $]0;e]$, alors on a $f\left(1+\frac{1}{n}\right)\le f(\alpha_n)\le f\left(1+\frac{2}{n}\right)$.

Comme f est croissante sur $]0,e]$, alors on a $1+\frac{1}{n}\le\alpha_n\le 1+\frac{2}{n}$.

La suite (α_n) est encadrée par deux suites de limite égale à 1, par conséquent d'après le théorème des gendarmes, la suite (α_n) admet 1 comme limite.

3) Etude de λ_n

a) Si $n\ge 4$, alors $\ln n\ge\ln 4\ge\ln e$ (la fonction ln est croissante), donc $f(n)=\frac{\ln(n)}{n}\ge\frac{\ln(e)}{n}=\frac{1}{n}$.

b) • λ_n est l'unique solution de l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ dans $[e;+\infty[$, donc d'après la question précédente on a $f(n)\ge f(\lambda_n)$. Comme f est décroissante sur $[e,+\infty[$, alors $\lambda_n\ge n$.

- Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n=+\infty$.

Solution 64

1) • $u_1<u_2\Leftrightarrow a<\frac{u_1+\lambda v_1}{1+\lambda}\Leftrightarrow a<\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}\Leftrightarrow a<b$. (Ce qui est vrai d'après l'énoncé)

• $v_2<v_1\Leftrightarrow\frac{u_1+\mu v_1}{1+\mu}<b\Leftrightarrow\frac{a+\mu b}{1+\mu}<b\Leftrightarrow a<b$. (Ce qui est vrai d'après l'énoncé).

• $u_2<v_2\Leftrightarrow\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}<\frac{a+\mu b}{1+\mu}\Leftrightarrow a+\mu a+\lambda b+\lambda b\mu<a+\mu b+\lambda a+\lambda\mu b$

$\Leftrightarrow\lambda(b-a)<\mu(b-a)$

$\Leftrightarrow\lambda<\mu$ (car d'après l'énoncé, on a $b>a$, c'est-à-dire $b-a>0$).

Finalement on a $u_1<u_2<v_2<v_1$ si et seulement si $\lambda<\mu$.

2)a) • Soit n un entier naturel, comparons u_n et v_n.

On a $u_1=a<b=v_1$

Scanned by CamScanner

Soit n entier naturel non nul, supposons $u_n \le v_n$.

On a $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + \lambda v_n}{1+\lambda} - \frac{u_n + \mu v_n}{1+\mu} = \frac{(\mu - \lambda)u_n - (\mu - \lambda)v_n}{(1+\lambda)(1+\mu)} = \frac{(\mu - \lambda)(u_n - v_n)}{(1+\lambda)(1+\mu)}$

Or d'après l'hypothèse, on a $\mu > \lambda > 0$, et $u_n \le v_n$, alors on a $\frac{(\mu - \lambda)(u_n - v_n)}{(1+\lambda)(1+\mu)} \le 0$. C'est-à-dire $u_{n+1} - v_{n+1} \le 0$.

D'après le principe du raisonnement par récurrence, on a : $u_n \le v_n$ pour tout entier naturel non nul n.

- Soit n entier naturel non nul, on a :

$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + \lambda v_n}{1+\lambda} - u_n = \frac{\lambda(v_n - u_n)}{1+\lambda} \ge 0$ (car $v_n \ge u_n$ et $\lambda > 0$). D'où la suite (u_n) est croissante.

- Soit n entier naturel non nul, on a :

$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + \mu v_n}{1+\mu} - v_n = \frac{u_n - v_n}{1+\mu} \le 0$ (car $v_n \ge u_n$ et $\mu > 0$). D'où la suite (v_n) est décroissante.

- Notons que la suite (u_n) est croissante. Donc pour tout n, on a $u_1 \le u_n$.

De plus, pour tout entier naturel n, on a $u_n \le v_n$, alors pour tout entier naturel n, on a $u_1 \le v_n$. Alors (v_n) est minorée par $u_1 = a$.

De même, la suite (v_n) est décroissante. Donc pour tout n, on a $v_n \le v_1$.

De plus, pour tout entier naturel n, on a $u_n \le v_n$, alors pour tout entier naturel n, on a $v_n \le u_1$. Alors (u_n) est majorée par $v_1 = b$.

- Comme la suite (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge.
  Comme la suite (v_n) est décroissante et minorée, alors elle converge.

b) • On a montré à la question 2)a) que, pour tout entier $n > 0$, on a : $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(\mu - \lambda)}{(1 + \lambda)(1+\mu)}(u_n - v_n)$.

D'où la suite $(u_n - v_n)$ est géométrique de raison $\frac{\mu - \lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}$, et de premier terme $u_1 - v_1 = a - b$.

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_n - v_n = \left(\frac{\mu - \lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}\right)^{n-1}(a - b)$.

Comparons les nombres $\mu - \lambda$ et $(1 + \lambda)(1 + \mu)$.

On a $(1 + \lambda)(1 + \mu) - \mu + \lambda = 1 + \lambda + \mu + \lambda\mu - \mu + \lambda = 1 + 2\lambda + \lambda\mu > 0$ (car $\lambda > 0$ et $\mu > 0$)

D'où $(1 + \lambda)(1 + \mu) > \mu - \lambda > 0$ (car $\mu > \lambda$). Et par suite, on a : $0 < \frac{\mu - \lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)} < 1$.

Donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\mu - \lambda}{(1 + \lambda)(1+\mu)}\right)^{n-1} = 0$, et par conséquent, $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = l$.

- Posons $k = \frac{\mu - \lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}$. On a alors $u_n - v_n = k^{n-1}(a - b)$.

Donc $u_n = v_n + k^{n-1}(a - b)$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + \mu v_n}{1+\mu} = \frac{k^{n-1}(a - b) + v_n + \mu v_n}{1+\mu}$.

D'où $(1+\mu)v_{n+1} = k^{n-1}(a - b) + v_n + \mu v_n$, c'est-à-dire $(1+\mu)v_{n+1} = k^{n-1}(a - b) + (1+\mu)v_n$.

Alors on a $(1+\mu)(v_{n+1} - v_n) = k^{n-1}(a - b)$ et $v_{n+1} - v_n = \left(\frac{a - b}{1+\mu}\right)k^{n-1}$ (1).

D'après l'égalité (1), on a pour tout n entier naturel non nul, les égalités :

$v_n - v_{n-1} = \left(\frac{a - b}{1+\mu}\right)k^{n-2}$, $v_{n-1} - v_{n-2} = \left(\frac{a - b}{1+\mu}\right)k^{n-3}$, ..., $v_3 - v_2 = \left(\frac{a - b}{1+\mu}\right)k^1$ et $v_2 - v_1 = \left(\frac{a - b}{1+\mu}\right)k^0$.

En additionnant membre à membre ces égalités, on obtient :

$v_n - v_1 = (1 + k + k^2 + ... + k^{n-2})\left(\frac{a - b}{1+\mu}\right) = \left(\frac{1 - k^{n-1}}{1 - k}\right)\left(\frac{a - b}{1+\mu}\right)$. Finalement, $v_n = \left(\frac{1 - k^{n-1}}{1 - k}\right)\left(\frac{a - b}{1+\mu}\right) + b$.

Scanned by CamScanner

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{\mu-\lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}\right|^{n-1}=0$ (on a l'a montré plus haut), alors $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)\left(\frac{a-b}{1+\mu}\right)+b$.

D'où $l=\left(\frac{1}{1-\frac{\mu-\lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}}\right)\left(\frac{a-b}{1+\mu}\right)+b=\left(\frac{(1+\lambda)(a-b)}{1+2\lambda+\lambda\mu}\right)+b$.

Solution 65

1) Notons P_n la proposition : « $f^{(n)}(x)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\left|a\cos\left(\frac{\pi}{2}x+n\frac{\pi}{2}\right)+b\sin\left(\frac{\pi}{2}x+n\frac{\pi}{2}\right)\right|$ ».

- $f^{(1)}(x)=-\frac{\pi}{2}a\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+b\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\frac{\pi}{2}\left|a\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)+b\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)\right|$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^1\left|a\cos\left(\frac{\pi}{2}x+1.\frac{\pi}{2}\right)+b\sin\left(\frac{\pi}{2}x+1.\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

D'où P_1 est vraie.

- Supposons la propriété P_n vraie pour un certain entier naturel n, montrons qu'alors, P_{n+1} est aussi vraie

(c'est-à-dire $f^{(n+1)}(x)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}\left|a\cos\left(\frac{\pi}{2}x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)+b\sin\left(\frac{\pi}{2}x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|$).

D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $f^{(n)}(x)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\left|a\cos\left(\frac{\pi}{2}x+n\frac{\pi}{2}\right)+b\sin\left(\frac{\pi}{2}x+n\frac{\pi}{2}\right)\right|$. D'où,

$$f^{(n+1)}(x)=[f^{(n)}(x)]'=\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\left|-a\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x+n\frac{\pi}{2}\right)+b\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x+n\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}\left|a\cos\left(\frac{\pi}{2}x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)+b\sin\left(\frac{\pi}{2}x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

D'où P_{n+1} est aussi vraie.

Par conséquent, pour tout entier naturel n, on a : $f^{(n)}(x)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\left|a\cos\left(\frac{\pi}{2}x+n\frac{\pi}{2}\right)+b\sin\left(\frac{\pi}{2}x+n\frac{\pi}{2}\right)\right|$.

2) Soit n un entier naturel, on a : $u_n=\frac{1}{4^n}f^{(2n)}(0)=\frac{1}{4^n}\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}[a\cos(\pi n)+b\sin(\pi n)]=(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}a$.

- $u_1=-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2a=-\frac{\pi^2a}{16}$.

- Soit n un entier naturel non nul, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2}a}{(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}a}=-\frac{\pi^2}{16}$.

D'où la suite (u_n) est géométrique de raison $-\frac{\pi^2}{16}$ et de premier terme $u_1=-\frac{\pi^2a}{16}$.

3) Puisque la suite (u_n) est géométrique de raison $-\frac{\pi^2}{16}$ et de premier terme $u_1=-\frac{\pi^2a}{16}$, alors :

Scanned by CamScanner

$S_n = \dfrac{1-\left(-\dfrac{\pi^2}{16}\right)^n}{1+\dfrac{\pi^2}{16}} \times \left(-\dfrac{\pi^2 a}{16}\right)$. Or $-\dfrac{\pi^2}{16}$ appartient à $]-1\,;\,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{\pi^2}{16}\right)^n = 0$

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1+\dfrac{\pi^2}{16}} \times \left(-\dfrac{\pi^2}{16}\right) a = \dfrac{-\pi^2 a}{16+\pi^2}$

Solution 66

1) *Le lecteur vérifiera* par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

Soit n un entier naturel non nul, on a : $u_n - v_n = \dfrac{2u_{n-1}v_{n-1}}{u_{n-1}+v_{n-1}} - \dfrac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} = -\dfrac{(u_{n-1}-v_{n-1})^2}{2(u_{n-1}+v_{n-1})}$.

Comme (u_n) et (v_n) sont des suites à termes positifs, alors on a : $u_{n-1} > 0$, $v_{n-1} > 0$ et $(u_{n-1}-v_{n-1})^2 \geq 0$.
On en déduit que $u_n - v_n \leq 0$. Donc $u_n \leq v_n$ pour tout entier naturel non nul n.
Or on a aussi $0 < u_0 = a < v_0 = b$.
Finalement, on a $u_n \leq v_n$ pour tout entier naturel n.

2) • Soit n un entier naturel, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n} - u_n = \dfrac{u_n(v_n-u_n)}{u_n+v_n}$.

Comme $u_n > 0$, $v_n > 0$ et $v_n \geq u_n$, alors $\dfrac{u_n(v_n-u_n)}{u_n+v_n} \geq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \geq 0$. D'où la suite (u_n) est croissante.

• Soit n entier naturel, on a : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n+v_n}{2} - v_n = \dfrac{u_n-v_n}{2}$.

Comme $v_n \geq u_n$, alors $\dfrac{u_n-v_n}{2} \leq 0$, c'est-à-dire $v_{n+1} - v_n \leq 0$. On en déduit que la suite (v_n) est décroissante.

3) • Soit p et q deux entiers naturels non nuls. Trois cas peuvent se présenter ($p < q$, $p = q$ ou $p > q$).
Si $p < q$, alors $u_p \leq u_q \leq v_q$ (car (u_n) croissante et $u_q \leq v_q$). D'où $u_p \leq v_q$.
Si $p = q$, d'après la question 1), on a : $u_p \leq v_q$.
Si $p > q$, alors $u_p \leq v_p$ et $v_p \leq v_q$ (car (v_n) est décroissante). D'où $u_p \leq v_q$.
D'où pour tous entiers naturels non nuls p et q, on a $u_p \leq v_q$.

• Puisque pour tous entiers naturels p et q, on a $u_p \leq v_q$, alors on obtient pour tout entier naturel n, $u_0 \leq v_n$ et $u_n \leq v_0$. D'où la suite (u_n) est majorée par $v_0 = b$ et la suite (v_n) est minorée par $u_0 = a$.
Comme la suite (u_n) est croissante et majorée, elle converge.
Comme la suite (v_n) est décroissante et minorée, elle converge.

4) • Soit n un entier naturel non nul, la suite (u_n) étant croissante, on a : $u_n \geq u_{n-1}$, alors $-u_n \leq -u_{n-1}$, et en ajoutant v_n aux deux membres de cette inégalité, on a : $v_n - u_n \leq v_n - u_{n-1}$. C'est-à-dire $v_n - u_n \leq \dfrac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} - u_{n-1}$.

Et finalement on a $v_n - u_n \leq \dfrac{1}{2}(v_{n-1}-u_{n-1})$.

• Soit n un entier naturel, on a : $0 \leq v_n - u_n \leq \dfrac{1}{2}(v_{n-1}-u_{n-1})$, $0 \leq v_{n-1} - u_{n-1} \leq \dfrac{1}{2}(v_{n-2}-u_{n-2})$, ...

$0 \leq v_2 - u_2 \leq \dfrac{1}{2}(v_1-u_1)$ et $v_1 - u_1 \leq \dfrac{1}{2}(v_0-u_0)$.

En multipliant ces inégalités membre à membre, et après simplification, on obtient :

$0 \leq v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (v_0-u_0)$. C'est-à-dire $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (b-a)$.

Scanned by CamScanner

Puisque $\frac{1}{2} \in [0, 1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a) = 0$. D'où d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

C'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. D'où $l = l'$.

5) • Soit n un entier naturel non nul, on a : $u_n v_n = \frac{2u_{n-1}v_{n-1}}{u_{n-1}+v_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} = u_{n-1}v_{n-1}$.

D'où la suite $(u_n v_n)$ est constante. Et par conséquent, pour tout entier naturel n, on a : $u_n v_n = u_0 v_0 = ab$.

• Puisque pour tout entier naturel n, on a : $u_n v_n = ab$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = ab$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = (\lim\limits_{n\to+\infty} u_n) \times (\lim\limits_{n\to+\infty} v_n) = l \times l' = l^2$, alors on a $l^2 = ab$. C'est-à-dire $l = \sqrt{ab}$ ou $l = -\sqrt{ab}$.

Puisque (u_n) et (v_n) sont des suites à termes positifs, alors on a $l = l' \geq 0$. D'où $l = \sqrt{ab}$.

Solution 67

1) Soit f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x - 1$.

f_n est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel $x \geq 0$, on a $f_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 2x + 1 > 0$, d'où f_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

D'où f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[) = [-1, +\infty[$. Comme 0 appartient à $[-1, +\infty[$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans $[0, +\infty[$.

2) • Soit n entier naturel non nul, a_{n+1} est solution de l'équation $f_{n+1}(x) = 0$.

C'est-à-dire $(a_{n+1})^{n+1} + (a_{n+1})^n + \ldots + a_{n+1} - 1 = 0$. Donc $(a_{n+1})^n + \ldots + a_{n+1} - 1 = -(a_{n+1})^{n+1}$.

C'est-à-dire $f_n(a_{n+1}) = -(a_{n+1})^{n+1}$. Donc comme $(a_{n+1})^{n+1}$ est positif, on a $f_n(a_{n+1}) \leq 0$.

Or $f_n(a_n) = 0$, alors on a : $f_n(a_{n+1}) \leq f_n(a_n)$.

Et puisque f_n est croissante sur $[0, +\infty[$, alors $a_{n+1} \leq a_n$. Finalement (a_n) est décroissante.

• Puisque pour tout entier naturel n, a_n appartient à $[0, +\infty[$, alors la suite (a_n) est minorée par 0, et comme en plus elle est décroissante, alors elle converge.

3) Soit n entier naturel supérieur ou égal à 2, on a :

$(a_n)^n + (a_n)^{n-1} + \ldots + a_n - 1 = 0$, donc $1 - a_n = (a_n)^n + (a_n)^{n-1} + \ldots + (a_n)^2$ (1).

Or $(a_n)^n + (a_n)^{n-1} + \ldots + a_n - 1 = 0$ implique, en multipliant les deux membres de l'égalité par a_n que,

$(a_n)^{n+1} + ((a_n)^n + \ldots + (a_n)^2) - a_n = 0$ (2).

Et en utilisant l'égalité (1), l'égalité (2) devient $(a_n)^{n+1} + 1 - 2a_n = 0$. Donc $a_n = \frac{1}{2} + \frac{(a_n)^{n+1}}{2}$.

4) • On sait que la suite (a_n) est décroissante.

D'où pour tout entier naturel $n > 1$, on a : $0 \leq a_n \leq a_2$, et donc $0 \leq (a_n)^{n+1} \leq (a_2)^{n+1}$.

Or a_2 est la solution positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$, donc $a_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

D'où on a $|a_2| < 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_2)^{n+1} = 0$. Et par suite, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^{n+1} = 0$.

• Puisque pour tout entier $n > 1$, on a $a_n = \frac{1}{2} + \frac{(a_n)^{n+1}}{2}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^{n+1} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Scanned by CamScanner

5 INTEGRATION

RAPPEL DU COURS

A. Généralités

A_1 – Vocabulaire et notations

- Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

On appelle intégrale de a à b de f, que l'on note $\int_a^b f(x)dx$, la différence F(b) – F(a), où F est une primitive de f sur I, arbitrairement choisie.

Remarque : ***Notons que la différence F(b) – F(a) est la même quelque soit la primitive de f choisie.***

- $\int_a^b f(x)dx$ se lit « somme (ou intégrale) de a à b de f(x)dx ».

Dans cette écriture, les réels a et b sont appelés les bornes d'intégration.
Dans cette écriture, on peut remplacer « x » par n'importe quelle autre lettre ou symbole que a et b.

Ainsi, on a : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(\sigma)d\sigma \ldots$

- Dans les calculs, il est commode d'écrire $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

A_2 – Propriétés immédiates

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a, b et c trois éléments de I et β un nombre réel.
Linéarité de l'intégrale :

- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dz$.
- $\int_a^b \beta f(x)dx = \beta \int_a^b f(x)dx$

Relation de Chasles :

- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Par conséquent :

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$;

Inégalités et intégrales :
On suppose maintenant que : a ≤ b.

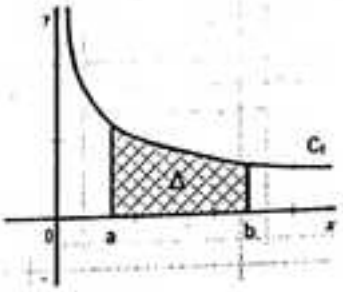
- Si pour tout x dans [a , b], on a f(x) ≥ 0, alors on peut écrire $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Si pour tout x dans [a , b], on a f(x) ≤ 0, alors on peut écrire $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.
- Si pour tout x dans [a , b], on a f(x) ≤ g(x), alors on peut écrire $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

A_3 – Le point de vue graphique

- Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I, a et b deux éléments de I, avec a ≤ b.

Scanned by CamScanner

$\int_a^b f(x)dx$ est l'aire en unité d'aire, de la partie Δ du plan délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = a et x = b.



A_4 – Intégrale et primitive

Soit f une fonction **continue sur un intervalle I** et a un élément de I.

La fonction F définie sur I par : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et pour tout réel x, on a F'(x) = f(x).

Remarque :

On note que : $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$.

Donc F est la primitive de f qui s'annule pour x = a.

A_5 – Inégalité de la moyenne : la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

• **Théorème :**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux éléments de I, avec a ≤ b.

Si on peut trouver deux réels m et M tels que, pour tout réel x de I, on a m ≤ f(x) ≤ M, alors on peut écrire :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

• On a une autre **version de ce théorème** qui dit :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux éléments de I.

Si on peut trouver un réel positif M tel que pour tout réel x de I, on a : $|f(x)| \leq M$, alors on peut écrire :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M|b-a|.$$

• **Définition :**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux éléments de I, avec a ≤ b.

La valeur moyenne de f sur [a , b] est le réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

B. Techniques de calcul des intégrales

B_1 – Calcul de la valeur exacte d'une intégrale

Méthode élémentaire de calcul des intégrales :

Pour calculer l'intégrale de a à b de f, on peut trouver une primitive F de f, alors : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Méthode d'intégration par parties :

Soit f et g deux fonctions dérivables à dérivées continues sur un intervalle I ; a et b deux éléments de I.

Scanned by CamScanner

On a : $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$. Cette égalité est **la formule d'intégration par parties**

Méthode du changement de variable affine :

Pour calculer $\int_a^b f(\alpha x + \beta)dx$, on peut poser $u = \alpha x + \beta$, on a alors $\int_a^b f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(u)du$

Méthode exploitant la parité ou la périodicité de la fonction à intégrer :

Soit f fonction continue sur un intervalle I ; a un élément de I

- Si f est paire sur I, alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
- Si f est impaire sur I, alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
- Si f est périodique de période T, alors $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

B_2 – Calcul d'une valeur approchée d'une intégrale

Le calcul exact d'une intégrale par l'intermédiaire d'une primitive n'est pas toujours possible, car la plupart des problèmes rencontrés ont des fonctions dont le calcul d'une primitive n'est pas aisé.
En réalité, il est possible de déterminer des valeurs approchées voire des encadrements de l'intégrale à calculer.
Pour réaliser de tels encadrements, on peut utiliser :

- Des encadrements de la fonction à intégrer par des fonctions plus simples et utiliser les propriétés sur « les inégalités et intégrales » vues au paragraphe A) en A_2 ou l'inégalité de la moyenne.
- Des encadrements du domaine dont on cherche l'aire par des réunions de rectangles ou de trapèzes...

Par exemple, à l'aide de la méthode des rectangles, pour avoir une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$, où f est une fonction continue sur l'intervalle [a , b], avec a ≤ b, on subdivise l'intervalle [a , b] en n intervalles de même amplitude $h = \frac{b-a}{n}$, par les points $x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \ldots, x_k = a + kh, \ldots, x_n = a + nh = b$.

Les sommes $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ et $s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ sont des valeurs approchées de $\int_a^b f(x)dx$.

Remarque :

- $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \int_a^b f(x)dx$.
- *Si f est monotone sur [a , b], alors S_n et s_n encadrent $\int_a^b f(x)dx$.*

C. Calcul des aires et des volumes

C_1 – Calcul des aires

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux éléments de I, avec a ≤ b.

- **La courbe de f est au-dessus de l'axe des abscisses sur I :**

L'aire en unité d'aire, de la partie Δ du plan délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = a et x = b est $\int_a^b f(x)dx$.

- **La courbe de f est en dessous de l'axe des abscisses sur I :**

L'aire en unité d'aire, de la partie Δ du plan délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations

Scanned by CamScanner

respectives x = a et x = b est : $-\int_a^b f(x)dx$.

- **La courbe de f est au-dessus de celle de g sur I :**

L'aire en unité d'aire, de la partie Δ du plan délimitée par les courbes de f et de g, et des droites d'équations respectives x = a et x = b est : $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

C_2 – Calcul des volumes des solides de révolution

Soit f une fonction continue sur [a , b] et Δ le domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b.

Le volume en unité de volume du solide de révolution engendré par la rotation de Δ autour de l'axe des abscisses est donnée par l'intégrale $\int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$.

Scanned by CamScanner

EXERCICES POUR COMPRENDRE LE COURS

A. Calculer une intégrale en utilisant les primitives

1 – La primitive peut être évidente

Exercice 1

Calculer les intégrales :

$I=\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}dt$ $\quad M=\int_0^1 (1-x)\sqrt{x}dx$ $\quad Q=\int_0^1 \frac{7x^2}{(x^3+2)^2}dx$

$J=\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{e^{\cos t}}dt$ $\quad N=\int_1^2 (x^e-e^x)dx$ $\quad R=\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$

$K=\int_1^2 2^x dx$ $\quad O=\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx$ $\quad S=\int_1^2 e^x(e^x+1)^3dx$

$L=\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ $\quad P=\int_1^2 \frac{x^4-3x^2+2x+1}{x^2}dx$ $\quad T=\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}$

Solution 1

- Posons $u(t)=1+e^t$. On a : $u'(t)=e^t$.

$$I=\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}dt=\int_0^1 \frac{u'(t)}{u(t)}dt=\left[\ln u(t)\right]_0^1=\left[\ln(1+e^t)\right]_0^1=\ln(1+e)-\ln 2=\ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

- $J=\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{e^{\cos t}}dt=\int_0^{\pi} e^{-\cos t}\sin t\,dt.$ Posons $u(t)=-\cos t$, on a $u'(t)=\sin t$.

Alors $J=\int_0^{\pi} u'(t)e^{u(t)}dt=\left[e^{u(t)}\right]_0^{\pi}=\left[e^{-\cos t}\right]_0^{\pi}=e-e^{-1}.$

- $K=\int_1^2 2^x dx=\int_1^2 e^{x\ln 2}dx.$

Posons $u(x)=x\ln 2, u'(x)=\ln 2.$

Alors $K=\frac{1}{\ln 2}\int_1^2 u'(x)e^{u(x)}dx=\frac{1}{\ln 2}\left[e^{x\ln 2}\right]_1^2=\frac{1}{\ln 2}(e^{2\ln 2}-e^{\ln 2})=\frac{2}{\ln 2}$

- $L=\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx=\int_1^e \frac{1}{x}(\ln x)^{\frac{1}{2}}dx.$

Posons $u(x)=\ln x, u'(x)=\frac{1}{x}.$

Alors $L=\int_1^e u'(x)[u(x)]^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{2}{3}[u(x)]^{\frac{3}{2}}\right]_1^e=\left[\frac{2}{3}\ln x\sqrt{\ln x}\right]_1^e=\frac{2}{3}$

- $M=\int_0^1 (1-x)\sqrt{x}dx=\int_0^1 (x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}})dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}+1}-\frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}+1}\right]_0^1=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right]_0^1=\frac{4}{15}.$

- $N=\int_1^2 (x^e-e^x)dx=\left[\frac{1}{e+1}x^{e+1}-e^x\right]_1^2=\frac{2^{e+1}}{e+1}-e^2-\frac{1}{e+1}+e=\frac{2^{e+1}-1}{e+1}-e^2+e$

Scanned by CamScanner

• Posons $u(x)=\frac{1}{x^2}, u'(x)=-\frac{2}{x^3}$ et alors :

$$O=-\frac{1}{2}\int_1^2 u'(x)e^{u(x)}dx=-\frac{1}{2}\left[e^{u(x)}\right]_1^2=-\frac{1}{2}\left[e^{\frac{1}{x^2}}\right]_1^2=-\frac{1}{2}(\sqrt[4]{e}-e)$$

• $P=\int_1^2\frac{x^4-3x^2+2x+1}{x^2}dx=\int_1^2\left(x^2-3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-3x+2\ln x-\frac{1}{x}\right]_1^2=2\ln 2-\frac{1}{6}$.

• Posons $u(x)=x^3+2, u'(x)=3x^2$. Alors on a :

$$Q=\frac{7}{3}\int_0^1\frac{3x^2}{(x^3+2)^2}dx=\frac{7}{3}\int_0^1\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}dx=\frac{7}{3}\left[-\frac{1}{u(x)}\right]_0^1=\frac{7}{3}\left[-\frac{1}{x^3+2}\right]_0^1=\frac{7}{18}$$

• Posons $u(x)=x^2+2x+3, u'(x)=2x+2$. On a alors :

$$R=\int_0^1\frac{x+1}{x^2+2x+3}dx=\frac{1}{2}\left[\ln|u(x)|\right]_0^1=\frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2+2x+3\right|\right]_0^1=\frac{1}{2}(\ln 6-\ln 3)=\frac{1}{2}\ln 2.$$

• Posons $u(x)=e^x+1, u'(x)=e^x$. Alors :

$$S=\int_1^2 e^x(e^x+1)^3dx=\int_1^2 u'(x)[u(x)]^3dx=\left[\frac{1}{4}[u(x)]^4\right]_1^2=\left[\frac{1}{4}(e^x+1)^4\right]_1^2=\frac{1}{4}\left[(e^2+1)^4-(e+1)^4\right]$$

• Remarquons que $\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}=-2\times\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}}=-2\frac{u'(x)}{u(x)}$, si on pose $u(x)=1-\sqrt{x}$. Alors :

$$T=-2\int_4^9\frac{u'(x)}{u(x)}dx=-2\left[\ln|u(x)|\right]_4^9=-2\left[\ln\left|1-\sqrt{x}\right|\right]_4^9=-2\ln 2.$$

2 – Cas des fonctions rationnelles

Exercice 2

1) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x différent de -3, on a : $\frac{x+4}{x+3}=a+\frac{b}{x+3}$

Calculer alors $I=\int_{-2}^4\frac{x+4}{x+3}dx$.

2) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x différent de -3, on a : $\frac{2x^2+3x-1}{x+3}=ax+b+\frac{c}{x+3}$

Calculer alors $J=\int_{-1}^1\frac{2x^2+3x-1}{x+3}dx$.

3) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x différent de 1, on a : $\frac{x+1}{(x-1)^5}=\frac{a}{(x-1)^4}+\frac{b}{(x-1)^5}$.

Calculer alors $K=\int_2^3\frac{x+1}{(x-1)^5}dt$.

4) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel différent de -1 et 1, $\frac{2x^2+3}{x^2-1}=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$.

Calculer alors $L=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{2x^2+3}{x^2-1}dx$.

Scanned by CamScanner

Solution 2

1) • Soit x réel différent de -3, on a : $\frac{x+4}{x+3}=\frac{(x+3)+1}{x+3}=1+\frac{1}{x+3}$.

• Donc $I=\int_{-2}^{4}\left(1+\frac{1}{x+3}\right)dx=\left[x+\ln|x+3|\right]_{-2}^{4}=6+\ln 7$

2) • Soit x réel différent de -3, on a : $\frac{2x^2+3x-1}{x+3}=\frac{2x(x+3)-3(x+3)+8}{x+3}=2x-3+\frac{8}{x+3}$.

• Donc $J=\int_{-1}^{1}\left(2x-3+\frac{8}{x+3}\right)dx=\left[x^2-3x+8\ln|x+3|\right]_{-1}^{1}=-6+8\ln 2$

3) • Soit x réel différent de 1, on a : $\frac{x+1}{(x-1)^5}=\frac{(x-1)+2}{(x-1)^5}=\frac{1}{(x-1)^4}+\frac{2}{(x-1)^5}$.

• Donc $K=\left[\frac{-1}{3(x-1)^3}+\frac{-2}{4(x-1)^4}\right]_2^3=\frac{73}{96}$

4) • Pour tout réel x différent de -1 et 1, on a : $a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}=\frac{ax^2+(b+c)x+(-a+b-c)}{x^2-1}$.

Alors par identification, pour tout x différent de -1 et 1,

$\frac{2x^2+3}{x^2-1}=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2x^2+3}{x^2-1}=\frac{ax^2+(b+c)x+(-a+b-c)}{x^2-1} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b+c=0 \\ -a+b-c=3 \end{cases}$.

En résolvant ce système, on aura : $a=2$, $b=\frac{5}{2}$ et $c=-\frac{5}{2}$. D'où $f(x)=2+\frac{5}{2}\times\frac{1}{x-1}-\frac{5}{2}\times\frac{1}{x+1}$.

• Ainsi $L=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{2x^2+3}{x^2-1}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[2+\frac{5}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)-\frac{5}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right)\right]dx=\left[2x+\frac{5}{2}\ln|x-1|-\frac{5}{2}\ln|x+1|\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=2-5\ln 3$.

3 – Cas des fonctions trigonométriques

Exercice 3

Calculer les intégrales :

$I=\int_0^{\pi}(\sin x)(\cos x)^3dx$ $\quad J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos x)^3dx$ $\quad K=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin x)^2(\cos x)^5dx$ $\quad L=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos x)^4dx$.

Solution 3

• $I=\int_0^{\pi}\sin x.\cos^3 x\,dx=\left[-\frac{1}{4}\cos^4 x\right]_0^{\pi}=0$.

• Pour tout réel x, on a : $\cos^3 x=\cos x.\cos^2 x=\cos x.(1-\sin^2 x)=\cos x-\cos x.\sin^2 x$.

D'où $J=\left[\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{11}{24}$.

• Pour tout réel x, on a : $\cos^5 x=\cos x.\cos^4 x=\cos x(\cos^2 x)^2=(\cos x)(1-\sin^2 x)^2=\cos x-2(\cos x)(\sin^2 x)+(\cos x)(\sin^4 x)$.
Donc $(\sin^2 x)(\cos^5 x)=(\cos x)(\sin^2 x)-2(\cos x)(\sin^4 x)+(\cos x)(\sin^6 x)$.

D'où $K=\left[\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{407}{13440}$.

Scanned by CamScanner

• linéarisons $\cos^4 x$:

Pour tout réel x, on a : $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$.

D'où $\cos^4 x = \frac{1}{16}(e^{ix} + e^{-ix})^4 = \frac{1}{16}(e^{i4x} + e^{-4ix} + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6) = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$.

D'où $L = \left[\frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{8} + \frac{7\sqrt{3}}{64}$.

B. Calculer une intégrale en utilisant la formule d'intégration par parties

Exercice 4

En utilisant l'intégration par parties, calculer les intégrales :

$I = \int_1^e (x\ln x)dx$ $\quad J = \int_0^1 x\sqrt{x+1}dx$ $\quad K = \int_0^{\pi} x\sin 2x dx$ $\quad L = \int_0^1 (2x+1)e^x dx$

$M = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$ $\quad N = \int_1^e \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$ $\quad P = \int_1^e \ln x dx$.

Solution 4

• On pose : $u(x) = \ln x$; $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = x$; $v(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Alors en utilisant la formule d'intégration par parties, on a :

$$I = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2+1}{4}.$$

• On pose $u(x) = x$; $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}}$; $v(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$.

Alors en utilisant la formule d'intégration par parties, on a :

$$J = \left[\frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 (x+1)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{2^3} - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{15}(\sqrt{2^5} - 1) = \frac{4\sqrt{2}+4}{15}.$$

• On pose $u(x) = x$; $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \sin(2x)$; $v(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$.

Alors en utilisant la formule d'intégration par parties, on a :

$$K = \left[-\frac{1}{2}x\cos(2x)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(2x)dx = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}.$$

• On pose $u(x) = 2x+1$; $u'(x) = 2$ et $v'(x) = e^x$; $v(x) = e^x$.

Alors en utilisant la formule d'intégration par parties, on a : $L = \left[(2x+1)e^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 e^x dx = 3e - 1 - 2\left[e^x\right]_0^1 = e+1$.

• On pose $u(x) = \ln x$; $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$; $v(x) = -\frac{1}{x}$.

Alors en utilisant la formule d'intégration par parties, on a :

$$M = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e - \int_1^e \left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = -\frac{1}{e} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^e = -\frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e} - 1\right) = 1 - \frac{2}{e}.$$

Scanned by CamScanner

• On pose $u(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$; $u'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x(1+x)}$ et $v'(x)=1$; $v(x)=x$.

Alors en utilisant la formule d'intégration par parties, on a :

$$N=\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_1^e-\int_1^e\left(-\frac{1}{1+x}\right)dx=e\ln\left(1+\frac{1}{e}\right)-\ln 2+\left[\ln|x+1|\right]_1^e=e\ln(e+1)-e-\ln 2+\ln(e+1)-\ln 2$$

$$=(e+1)\ln(e+1)-e-2\ln 2.$$

• On pose $u(x)=\ln x$; $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v'(x)=1$; $v(x)=x$.

Alors en utilisant la formule d'intégration par parties, on a :

$$P=\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e dx=e\ln e-\ln 1-\left[x\right]_1^e=e-e+1=1.$$

Exercice 5

En utilisant deux intégrations par parties, calculer les intégrales :

$$O=\int_0^1(x^2+x+1)e^x dx \qquad Q=\int_a^b e^{-x}\cos x\,dx \qquad R=\int_0^1(xe^{x^2}+x^2e^x)dx\ .$$

Solution 5

• On pose $u(x)=x^2+x+1$; $u'(x)=2x+1$; $v'(x)=e^x$; $v(x)=e^x$.

Alors en utilisant la formule d'intégration par parties, on a :

$$O=\left[(x^2+x+1)e^x\right]_0^1-\int_0^1(2x+1)e^x dx=(3e-1)-L.\ (L\text{ de l'exercice 4})$$

Or l'intégrale $\int_0^1(2x+1)e^x dx$ a été calculée à l'exercice 4, à l'aide d'une intégration par parties.

Et on a eu $\int_0^1(2x+1)e^x dx=e+1$. Donc $O=(3e-1)-(e+1)=2e-2$.

• Posons $u(x)=e^{-x}$; $u'(x)=-e^{-x}$ et $v'(x)=\cos x$; $v(x)=\sin x$.

En appliquant la formule d'intégration par parties, on a :

$$Q=\left[e^{-x}\sin x\right]_a^b+\int_a^b e^{-x}\sin x\,dx=e^{-b}\sin b-e^{-a}\sin a+\int_a^b e^{-x}\sin x\,dx. \qquad (1)$$

Pour le calcul de $\int_a^b e^{-x}\sin x\,dx$, on intégrera par parties. Pour cela :

Posons $u_1(x)=e^{-x}$; $u_1'(x)=-e^{-x}$ et $v_1'(x)=\sin x$; $v_1(x)=-\cos x$.

On a alors $\int_a^b e^{-x}\sin x\,dx=\left[-e^{-x}\cos x\right]_a^b-\int_a^b e^{-x}\cos x\,dx=-e^{-b}\cos b+e^{-a}\cos a-Q$. (2)

Et en utilisant les égalités (1) et (2), on a : $Q=e^{-b}\sin b-e^{-a}\sin a-e^{-b}\cos b+e^{-a}\cos a-Q$.

D'où $Q=\frac{1}{2}(e^{-b}(\sin b-\cos b)-e^{-a}(\sin a-\cos a))$.

• On a : $\int_0^1(xe^{x^2}+x^2e^x)dx=\int_0^1 xe^{x^2}dx+\int_0^1 x^2e^x dx$.

Or on a d'abord : $\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$.

Scanned by CamScanner

Intégrons alors $\int_0^1 x^2e^x dx$ en utilisant la formule d'intégration par parties.

On pose $u(x)=x^2$; $u'(x)=2x$ et $v'(x)=e^x$; $v(x)=e^x$.

Alors en utilisant la formule d'intégration par parties, on a : $\int_0^1 x^2e^x dx=\left[x^2e^x\right]_0^1-2\int_0^1 xe^x dx=e-2\int_0^1 xe^x dx$.

Mais il faut aussi calculer l'intégrale $\int_0^1 xe^x dx$ par parties.

Posons $u_1(x)=x$, $u_1'(x)=1$ et $v_1'(x)=e^x$; $v_1=e^x$.

D'où $\int_0^1 xe^x dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-\left[e^x\right]_0^1=1$.

D'où $\int_0^1 x^2e^x dx=e-2$. Et finalement, $R=\frac{1}{2}(e-1)+(e-2)=\frac{3}{2}e-\frac{5}{2}$.

Exercice 6

Soit n entier naturel non nul, $I_n(x)=\int_0^x t^n \sin t dt$.

a) Trouver une relation de récurrence entre $I_n(x)$ et $I_{n-2}(x)$.
b) Calculer $I_0(x)$ et $I_1(x)$. En déduire $I_2(x)$ et $I_3(x)$.

Solution 6

a) Posons $u(t)=t^n$; $u'(t)=nt^{n-1}$; $v'(t)=\sin t$; $v(t)=-\cos t$.
En appliquant la formule d'intégration par parties, on a :

$$I_n(x)=\left[-t^n\cos t\right]_0^x+n\int_0^x t^{n-1}\cos t dt=-x^n\cos x+n\int_0^x t^{n-1}\cos t dt$$

On calcule aussi $\int_0^x t^{n-1}\cos t dt$, en intégrant par parties.

Posons $u_1(t)=t^{n-1}$; $u_1'(t)=(n-1)t^{n-2}$; $v_1'(t)=\cos t$; $v_1(t)=\sin t$.

On a alors $\int_0^x t^{n-1}\cos t dt=\left[t^{n-1}\sin t\right]_0^x-(n-1)\int_0^x t^{n-2}\sin t dt=x^{n-1}\sin x-(n-1)I_{n-2}(x)$.

D'où $I_n(x)=-x^n\cos x+n\left[x^{n-1}\sin x-(n-1)I_{n-2}(x)\right]$.

Finalement, $I_n(x)=x^{n-1}(n\sin x-x\cos x)-n(n-1)I_{n-2}(x)$.

b) • $I_0(x)=\int_0^x \sin t dt=\left[-\cos t\right]_0^x=-\cos x+1$.

• Pour le calcul de $I_1(x)$, on va utiliser la formule d'intégration par parties. Ainsi :

On pose $u(t)=t$; $u'(t)=1$; $v'(t)=\sin t$; $v(t)=-\cos t$.

Alors en utilisant la formule d'intégration par parties, on a :

$$I_1(x)=\left[-t\cos t\right]_0^x+\int_0^x \cos t dt=-x\cos x+\left[\sin t\right]_0^x=-x\cos x+\sin x.$$

D'où $I_1(x)=-x\cos x+\sin x$.

Déduction des valeurs de $I_2(x)$ et $I_3(x)$:

Dans le résultat de la question a),

• Si on pose $n=2$, on a : $I_2(x)=x(2\sin x-x\cos x)-2I_0(x)$. C'est-à-dire $I_2(x)=2x\sin x-(x^2-2)\cos x-2$.
• Si on pose $n=3$, on a : $I_3(x)=x^3(3\sin x-x\cos x)-6I_1(x)$

C'est-à-dire $I_3(x)=3x^2\sin x-x^3\cos x+6x\cos x-6\sin x=3(x^2-2)\sin x-x(x^2-6)\cos x$.

Scanned by CamScanner

C. Calculer des intégrales en utilisant

1 – La relation de Chasles

Exercice 7

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} 2-x & \text{si } x \in [0,1] \\ x^2+2x-2 & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

2) Calculer $\int_0^2 f(x)dx$.

Solution 7

1) f est continue sur $[0,1[$ et sur $]1,+\infty[$, car ses restrictions à ces intervalles, qui sont des fonctions polynômes, y sont définies, donc continues.

Etudions la continuité de f en 1.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(2-x) = 1$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(x^2+2x-2) = 1$.

Donc $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = f(1)$. Donc f est continue en 1.

Et finalement, f est continue sur $[0,+\infty[$.

2) f étant continue sur $[0,2]$, $\int_0^2 f(x)dx$ existe et en appliquant la relation de Chasles pour les intégrales, on a :

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 (2-x)dx + \int_1^2 (x^2+2x-2)dx = \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x\right]_1^2$$

$$= \frac{29}{6}$$

Exercice 8

Calculer : $\int_0^2 (1-|x-1|)^n dx$.

Solution 8

Posons $f(x) = (1-|x-1|)^n$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ et :

- si $x \geq 1$, alors $f(x) = (1-(x-1))^n = (2-x)^n$.
- si $x \leq 1$, alors $f(x) = (1+(x-1))^n = x^n$.

En appliquant la relation de Chasles pour les intégrales, on a :

$$\int_0^2 (1-|x-1|)^n dx = \int_0^1 x^n dx + \int_1^2 (2-x)^n dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{n+1}(2-x)^{n+1}\right]_1^2 = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = \frac{2}{n+1}.$$

2 – La parité de la fonction à intégrer

Exercice 9

Calculer : $\int_{-1}^1 x^3(\sin x)^2 dx$.

Solution 9

La fonction $f : x \mapsto x^3(\sin x)^2$ est impaire. D'où $\int_{-1}^1 x^3(\sin x)^2 dx = 0$.

Scanned by CamScanner

Exercice 10

Montrer que la fonction H définie pour tout réel x par : $H(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ est impaire.

Solution 10

La fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est paire. D'où pour tout réel x, on a : $\int_{-x}^{x} e^{-t^2}dt = 2\int_0^x e^{-t^2}dt = 2H(x)$.

Or $\int_{-x}^{x} e^{-t^2}dt = \int_{-x}^{0} e^{-t^2}dt + \int_0^x e^{-t^2}dt = -\int_0^{-x} e^{-t^2}dt + \int_0^x e^{-t^2}dt = -H(-x)+H(x)$.

Donc – H(-x) + H(x) = 2H(x). On déduit alors que H(-x) = - H(x). Donc H est impaire.

D. Calculer une intégrale en utilisant un changement de variable affine

Exercice 11

En utilisant un changement de variable affine, calculer : $I=\int_2^5 \frac{tdt}{\sqrt{t-1}}$ et $J=\int_0^1 x\sqrt{x+1}dx$.

Solution 11

- Posons x = t – 1. On a alors :

$$I=\int_2^5 \frac{tdt}{\sqrt{t-1}}=\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx=\int_1^4\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int_1^4\left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x}\right]_1^4=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}\right]_1^4$$

D'où $I=\frac{20}{3}$.

- Posons t = x + 1. On a alors :

$$J=\int_1^2 (t-1)\sqrt{t}dt=\int_1^2 (t\sqrt{t}-\sqrt{t})dt=\int_1^2 (t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}})dt=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=\left[\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}-\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{8\sqrt{2}}{5}-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right).$$

D'où $J=\frac{4(\sqrt{2}+1)}{15}$.

Remarquons que l'on pouvait calculer ces intégrales sans faire de changement de variable. Par exemple, on a :

$$I=\int_2^5 \frac{tdt}{\sqrt{t-1}}=\int_2^5 \frac{(t-1)+1}{\sqrt{t-1}}dt=\int_2^5\left((t-1)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{t-1}}\right)dt=\left[\frac{2}{3}(t-1)\sqrt{t-1}+2\sqrt{t-1}\right]_2^5=\frac{20}{3}$$

$$J=\int_0^1 [(x+1)-1]\sqrt{x+1}dx=\int_0^1\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]dx=\left[\frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1}-\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\right]_0^1=\frac{4\sqrt{2}}{15}+\frac{4}{15}.$$

Exercice 12

Montrer que, pour tous entiers relatifs m et n, on a : $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\int_0^1 (1-x)^m x^n dx$

Application : calculer $\int_0^1 x^2(1-x)^{20}dx$.

Scanned by CamScanner

Solution 12

- Posons $t = 1 - x$, on a alors :

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = -\int_1^0 (1-t)^m t^n dt \qquad \text{car } dx = -dt$$

$$= \int_0^1 (1-t)^m t^n dt \qquad \text{car } -\int_a^b f(t)dt = \int_b^a f(t)dt$$

$$= \int_0^1 (1-x)^m x^n dx. \quad t \text{ étant une variable muette, on peut remplacer } t \text{ par } x, \text{ l'intégrale ne change pas.}$$

D'où pour tous entiers relatifs m et n, on a : $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 (1-x)^m x^n dx$

- D'après ce qui précède, $\int_0^1 x^2(1-x)^{20} dx = \int_0^1 (1-x)^2 x^{20} dx$.

Or $\int_0^1 (1-x)^2 x^{20} dx = \int_0^1 (x^{20} - 2x^{21} + x^{22})dx = \left[\frac{1}{21}x^{21} - \frac{1}{11}x^{22} + \frac{1}{23}x^{23}\right]_0^1 = \frac{1}{21} - \frac{1}{11} + \frac{1}{23} = \frac{1}{5313}$.

Exercice 13

Etudier la parité de la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$.

Solution 13

Puisque la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit x un nombre réel quelconque, -x est un réel et $F(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$.

Posons, u = -t, on a du = -dt,

alors $F(-x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+(-u)^4}} du = -\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+u^4}} du = -F(x)$. D'où F est impaire.

E. Etudier une fonction définie à l'aide d'une intégrale

Exercice 14

A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive sur $]0, +\infty[$ de :

a) $x \mapsto \ln x$ b) $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$.

Solution 14

a) Une primitive de $f : x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$ est la fonction $F : x \mapsto \int_1^x \ln t\, dt$.

Or pour calculer $\int_1^x \ln t\, dt$, on va utiliser la formule d'intégration par parties. Pour cela :

- On pose $u(t) = \ln t$; $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = 1$; $v(t) = t$.

Alors en utilisant la formule d'intégration par parties, on a :

$$F(x) = [t\ln t]_1^x - \int_1^x dt = x\ln x - \ln 1 - [t]_1^x = x\ln x - x + 1.$$

Scanned by CamScanner

D'où une primitive de $f : x \mapsto \ln x$, sur $]0, +\infty[$ est la fonction $F : x \mapsto x\ln x - x + 1$.

b) Une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$ est la fonction $F : x \mapsto \int_1^x \dfrac{\ln t}{t^2} dt$.

- En utilisant la formule d'intégration par parties, on a :

$$F(x) = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = -\frac{\ln x}{x} + \ln 1 + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1.$$

D'où une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$ est la fonction $F : x \mapsto -\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x} + 1$.

Point méthode :

Les primitives que nous avons calculées sont celles qui s'annulent pour $x = 1$. Nous pouvions tout aussi calculer les primitives qui s'annulent pour une autre valeur $a > 0$, quelconque.

On aurait alors eu comme primitive de $f : x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x \ln t\, dt$ et comme primitive de $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$, sur $]0, +\infty[$ est la fonction $F : x \mapsto \int_a^x \dfrac{\ln t}{t^2} dt$.

Attention : *Il est important de toujours préciser dans le calcul des intégrales, les bornes d'intégration. Une négligence des bornes pourrait conduire à des erreurs grossières.*

Par exemple : $\int \frac{1}{x} dx = x\frac{1}{x} + \int x\frac{1}{x^2} dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx$. *D'où $0 = 1$ (erreur grossière).*

Exercice 15

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x \dfrac{1}{1+t^2} dt$ et g définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, par $g(x) = f(\tan x)$, deux applications.

1) Etudier la dérivabilité de f et calculer f '(x).

2) Déterminer g'(x), puis g(x).

3) En déduire la valeur de $\int_0^1 \dfrac{1}{1+t^2} dt$.

Solution 15

1) La fonction $: t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Et pour x réel, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

2) • De plus, la fonction tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc la fonction g = fotan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et pour tout réel x dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $g'(x) = (\tan' x) f'(\tan x) = (1 + \tan^2 x)\dfrac{1}{1+\tan^2 x} = 1$.

D'où pour tout réel x dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, g'(x) = 1.

- g est une primitive de la fonction $x \mapsto 1$, d'où pour tout réel x dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a g(x) = x + k, où k est une constante réelle. Or g(0) = f(tan0) = f(0) = 0. D'où k = 0.

Et finalement, pour tout réel x dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, g(x) = x.

3) On a $\int_0^1 \dfrac{1}{1+t^2} dt = \int_0^{\tan\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{1+t^2} dt = f\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$. D'où $\int_0^1 \dfrac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}$.

Scanned by CamScanner

Exercice 16

Dériver les fonctions f, g et h définies par :

1) $f(x)=\int_x^{2x}\sin(t^2)dt$ 2) $g(x)=\int_x^1 \ln(1+t^2)dt$ 3) $h(x)=\int_{x^2}^{x}\ln(2+\cos t)dt$.

Solution 16

1) La fonction $t\mapsto \sin(t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle y admet des primitives.
Soit F une de ces primitives, F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel t, on a $F'(t)=\sin(t^2)$.
On a $f(x)=F(2x)-F(x)$.
Puisque la fonction $x\mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $x\mapsto F(2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'après la dérivée de la composée, $(F(2x))'=2F'(2x)=2\sin(4x^2)$.
D'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$), et pour tout réel x, $f'(x)=2\sin(4x^2)-\sin(x^2)$.

2) pour tout réel x, $g(x)=-\int_1^x \ln(1+t^2)dt$.

La fonction $t\mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$, d'où la fonction $x\mapsto \int_1^x \ln(1+t^2)dt$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,
et pour tout réel x, la dérivée de g est la fonction $x\mapsto \ln(1+x^2)$.
D'où la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a $g'(x)=-\ln(1+x^2)$.
3) La fonction $t\mapsto \ln(2+\cos t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle y admet des primitives.
Soit H une de ces primitives, H est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel t, on a $H'(t)=\ln(2+\cos t)$.
On a $h(x)=H(x)-H(x^2)$.
Puisque la fonction $x\mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et la fonction H est dérivable dans $\mathbb{R}$, alors la fonction $x\mapsto H(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a : $(H(x^2))'=2xH'(x^2)=2x\ln(2+\cos x^2)$.
D'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a : $h'(x)=H'(x)-(H(x^2))'=\ln(2+\cos x)-2x\ln(2+\cos x^2)$.

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}dt$.

1) Démontrer que, pour tout réel x, on a $\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}dt\geq x^2$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Etudier la parité de f et en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(x)$.

4) Déterminer le sens de variation de f.

Solution 17

1) • Soit $t\geq 0$, on a $t^4+1\geq 1$, donc $\sqrt{1+t^4}\geq 1$.

Alors soit x un nombre réel, puisque $x^2\geq 0$, on a $\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}dt\geq\int_0^{x^2}dt$. C'est-à-dire $\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}dt\geq x^2$.

• Puisque de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) • Pour tout réel x, $f(-x)=\int_0^{(-x)^2}\sqrt{1+t^4}dt=\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}dt=f(x)$. D'où f est paire.

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Scanned by CamScanner

3) Considérons u la fonction $x \mapsto \int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt$ définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction $t \to \sqrt{1+t^4}$ est continue sur $\mathbb{R}$, d'où u est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et pour tout réel x, $u'(x) = \sqrt{1+x^4}$.

Or la fonction $v : x \to x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors $f = uov$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et pour tout réel x, $f'(x) = v'(x)u'(v(x)) = 2xu'(x^2) = 2x\sqrt{1+x^8}$.

4) Pour tout réel x, $f'(x) = 2x\sqrt{1+x^8}$. D'où le signe de f '(x) est celui de 2x.
D'où f est strictement croissante dans $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

Exercice 18

On considère la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt$.

1) Justifier l'existence de F(x) sur $]0, +\infty[$.
2) Etudier le signe de F(x).
3)a) Etudier la dérivabilité de F et déterminer F'.
b) En déduire le sens de variation de F.

Solution 18

1) La fonction qui, à t associe $\frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Or soit $x > 0$, $x^2 > 0$, donc $\int_x^{x^2} \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt$ existe. Finalement, pour tout $x > 0$, F(x) existe.

2) Notons que pour tout $t > 0$, on a $\frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} > 0$.

Si $0 < x \leq 1$, alors on a $x^2 \leq x$, donc $\int_{x^2}^{x} \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt \geq 0$. Par suite, on a $-\int_x^{x^2} \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt \geq 0$.

C'est-à-dire $-F(x) \geq 0$. Donc $F(x) \leq 0$.

Si $x \geq 1$, alors on a $x \leq x^2$, donc $\int_x^{x^2} \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt \geq 0$. C'est-à-dire $F(x) \geq 0$.

3)a) • La fonction qui, à t associe $\frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Elle admet donc des primitives. Soit G une de ses primitives, on a : $F(x) = G(x^2) - G(x)$.
La fonction qui, à x associe x^2 est dérivable sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $]0, +\infty[$.
Or la fonction G est dérivable sur $]0, +\infty[$, alors la fonction qui, à x associe $G(x^2)$ est dérivable sur cet intervalle.
Par conséquent, F est dérivable sur $]0, +\infty[$, car somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

• Et pour tout $x > 0$, on a $F'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = 2x\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}} - e^{-\frac{1}{x}}}{x}$.

b) Le signe de F'(x) est celui de $2e^{-\frac{1}{x^2}} - e^{-\frac{1}{x}}$. Or

$$2e^{-\frac{1}{x^2}} - e^{-\frac{1}{x}} > 0 \Leftrightarrow 2e^{-\frac{1}{x^2}} > e^{-\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \ln\left(2e^{-\frac{1}{x^2}}\right) > \ln\left(e^{-\frac{1}{x}}\right) \Leftrightarrow \ln 2 - \frac{1}{x^2} > -\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 \ln 2 + x - 1 > 0.$$

Scanned by CamScanner

La résolution de cette équation conduit à dire que : $F'(x) > 0$ si et seulement si $x \in \left]\frac{-1+\sqrt{1+4\ln 2}}{2\ln 2}, +\infty\right[$.

Donc F est strictement croissante sur $\left]\frac{-1+\sqrt{1+4\ln 2}}{2\ln 2}, +\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left]0, \frac{-1+\sqrt{1+4\ln 2}}{2\ln 2}\right[$.

Exercice 19

Soit f une fonction continue sur [0 , 1] telle que $f(0) = 0$ et, pour tout x élément de [0 , 1], $0 < f'(x) \leq 1$.

1) Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = \int_0^x (f(t))^3 dt - \left[\int_0^x f(t)dt\right]^2$.

Calculer $\varphi'(x)$, puis montrer que, sur [0, 1], $\varphi'(x)$ a le même signe que $(f(x))^2 - 2\int_0^x f(t)dt$.

2) Déterminer le signe de $(f(x))^2 - 2\int_0^x f(t)dt$. En déduire que $\int_0^1 (f(t))^3 dt \leq \left[\int_0^1 f(t)dt\right]^2$.

Solution 19

1) • f est continue sur [0 , 1], donc f l'est aussi et par conséquent les fonctions $F: x \mapsto \int_0^x f(t)dt$

$G: x \mapsto \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$ et $H: x \mapsto \int_0^x (f(t))^3 dt$ sont dérivables sur [0 , 1].

Et pour tout x dans [0 , 1], on a : $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = 2F'(x)F(x) = 2f(x)\int_0^x f(t)dt$ et $H'(x) = [f(x)]^3$.

D'où φ est dérivable sur [0 , 1] et pour tout réel x dans [0 , 1], on a : $\varphi'(x) = [f(x)]^3 - 2f(x)\int_0^x f(t)dt$.

C'est-à-dire $\varphi'(x) = f(x)\left[[f(x)]^2 - 2\int_0^x f(t)dt\right]$.

• f est strictement croissante sur [0 , 1] (car pour tout x dans [0 , 1], on a $f'(x) > 0$).
D'où pour tout x dans] 0 , 1], on a $f(x) > f(0)$ soit $f(x) > 0$.

D'où pour tout x dans] 0 , 1], puisque $\varphi'(x) = f(x)\left[[f(x)]^2 - 2\int_0^x f(t)dt\right]$, alors $\varphi'(x)$ a le même signe que

$(f(x))^2 - 2\int_0^x f(t)dt$. Or $\varphi'(0) = 0$ et $(f(0))^2 - 2\int_0^0 f(t)dt = 0$.

D'où finalement, sur [0, 1], $\varphi'(x)$ a le même signe que $(f(x))^2 - 2\int_0^x f(t)dt$.

2) • Posons $\psi(x) = (f(x))^2 - 2\int_0^x f(t)dt$.

ψ est dérivable sur [0 , 1] et pour tout x dans [0 , 1], $\psi'(x) = 2f'(x)f(x) - 2f(x) = 2f(x)(f'(x) - 1)$.
Or pour tout x dans [0 , 1], on a $f(x) \geq 0$ et $f'(x) \leq 1$, alors $\psi'(x) \leq 0$ pour tout x dans [0 , 1].
Et par conséquent, ψ est décroissante sur [0 , 1]. On en déduit que, pour tout x de [0 , 1], on a $\psi(x) \leq \psi(0)$.
C'est-à-dire $\psi(x) \leq 0$ pour tout x de [0 , 1], (car $\psi(0) = 0$).

• On a pour tout x dans [0 , 1], $f(x) \geq 0$ et $\psi(x) \leq 0$.
Et comme $\varphi'(x) = f(x)\psi(x)$, alors $\varphi'(x) \leq 0$, et par conséquent, φ est décroissante sur [0 , 1].
Et par suite, pour tout x dans [0 , 1], on a $\varphi(x) \leq \varphi(0)$, c'est-à-dire $\varphi(x) \leq 0$ (car $\varphi(0) = 0$).

Scanned by CamScanner

On a donc pour tout x dans [0 , 1], $\int_0^x (f(t))^3\,dt - \left|\int_0^x f(t)dt\right|^2 \le 0$, soit $\int_0^x (f(t))^3\,dt \le \left|\int_0^x f(t)dt\right|^2$.

En particulier pour x = 1, on a $\int_0^1 (f(t))^3\,dt \le \left|\int_0^1 f(t)dt\right|^2$.

F. Calculer une aire, un volume, une longueur

Exercice 20

Soit α un réel strictement supérieur à 1.

Calculer l'aire A(α) du domaine délimité par la courbe de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$, les droites d'équations x = 1, x = α, et l'axe des abscisses. Calculer la limite de A(α) quand α tend vers $+\infty$.

Solution 20

- Pour tout x appartenant à [1 , $+\infty$[, on a $\frac{1}{x^2} > 0$, d'où la courbe de f est au-dessus de l'axe des abscisses.

Donc $A(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\alpha = 1 - \frac{1}{\alpha}$ u.a..

- Comme $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \frac{1}{\alpha} = 0$, alors $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) = 1$.

Exercice 21

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x+1}{x} + \ln x - \ln(x+1)$.

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2) Soit $\lambda \ge 1$ et $\Delta_\lambda = \{M(x , y)$ du plan ; $1 \le x \le \lambda$ et $1 \le y \le f(x)\}$.
Calculer l'aire A_λ de Δ_λ, utilisant une intégration par parties. Etudier la limite de A_λ quand λ tend vers $+\infty$.

Solution 21

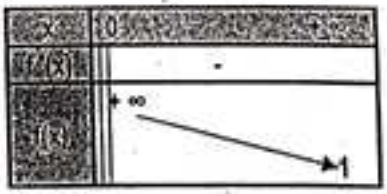
1) • f est définie, continue et dérivable sur]0 , $+\infty$[.

Et pour tout x > 0, on a $f'(x) = -\frac{1}{x^2(x+1)} < 0$. D'où f est strictement décroissante sur]0 , $+\infty$[.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x) = \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{x+1+x\ln x}{x} - \ln(x+1)\right] = +\infty$ (car $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \frac{x+1+x\ln x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \ln(x+1) = 0$).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x+1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right] = 1$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to1} \ln x = 0$).

D'où le tableau de variation de f qui suit :



- Comme $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x) = +\infty$, alors la droite d'équation x = 0 est asymptote verticale à la courbe de f.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, d'où la droite d'équation y = 1 est asymptote horizontale à la courbe de f.

Scanned by CamScanner

2) • Puisque la courbe de f est au-dessus de son asymptote horizontale, l'aire du domaine Δ_λ est :

$$A_\lambda = \int_1^\lambda (f(x)-1)dx = \int_1^\lambda \left(\frac{1}{x}+\ln x-\ln(x+1)\right)dx = \int_1^\lambda \frac{1}{x}dx + \int_1^\lambda \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx .$$

Pour le calcul de $\int_1^\lambda \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$ **, on procédera par une intégration par parties.**

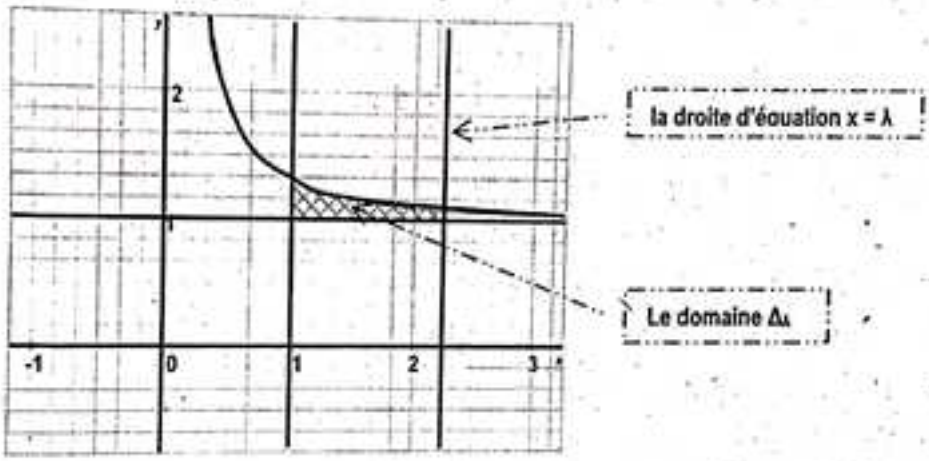
En intégrant par parties, on a :

$$\int_1^\lambda \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx = \left[x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^\lambda - \int_1^\lambda \frac{1}{x+1}dx = \lambda\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \left[\ln(x+1)\right]_1^\lambda$$

$$= \lambda\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right) + \ln 2 - \ln(\lambda+1) + \ln 2$$

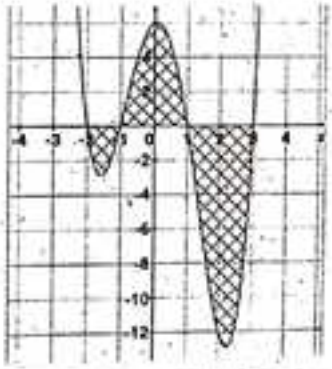
Or $\int_1^\lambda \frac{dx}{x} = \left[\ln x\right]_1^\lambda = \ln\lambda$, alors l'aire du domaine Δ_λ est : $A_\lambda = (\lambda+1)\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right) + 2\ln 2$ u.a..

• $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{\lambda+1}\right)}{\frac{1}{\lambda+1}} + 2\ln 2 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{x} + 2\ln 2 = -1+2\ln 2$ (car $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{1}{\lambda+1}=0$).



Exercice 22

La fonction représentée est :
$f : x \mapsto x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$.
On suppose que les unités graphiques sont :
6 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.
Calculer l'aire du domaine coloré, en cm².



Solution 22

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x$.

Or dans les intervalles [-2 , -1] et [1 , 3], $f(x) \le 0$, et dans [-1 , 2], $f(x) \ge 0$, alors l'aire du domaine coloré est :

$$A = -\int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_1^3 f(x)dx = -\left[F(x)\right]_{-2}^{-1} + \left[F(x)\right]_{-1}^{1} - \left[F(x)\right]_1^3 = F(-2) - 2F(-1) + 2F(1) - F(3).$$

Scanned by CamScanner

Donc, $A = F(-2) - 2F(-1) + 2F(1) - F(3) = \frac{1553}{30}$ u.a.

Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que les unités graphiques sont : 6 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées. D'où 1 u.a. = 6×2 cm². Donc $A = \frac{1553}{60} \times 12\ cm^2 = \frac{1553}{5}\ cm^2$.

Exercice 23

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé (unité : 2 cm).

Etudier la position relative des courbes des fonctions $f : x \mapsto 2x^2 - 13x + 23$ et $g : x \mapsto x + 3$.

Calculer en cm² l'aire du domaine délimité par les droites d'équations x = 2, x = 5 et les courbes d'équations y = f(x) et y = g(x).

Solution 23

- Soit x un nombre réel : f(x) – g(x) = 2(x – 2)(x – 5). Ainsi :

Dans $]-\infty, 2[\cup]5, +\infty[$, on a f(x) – g(x) > 0, et alors la courbe de f est au-dessus de celle de g dans $]-\infty, 2[$ et dans $]5, +\infty[$.

Dans $]2, 5[$, on a f(x) – g(x) < 0, donc dans cet intervalle, la courbe de f est en dessous de celle de g.

Les points de rencontre des courbes de f et g sont A(2 , 5) et B(5 , 8).

- Dans [2 , 5], la courbe de f est en dessous de celle de g, d'où, l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes de f et g, les droites d'équations x = 2 et x = 5 est :

$$A = \int_2^5 (g(x) - f(x))dx = \int_2^5 (-2x^2 + 14x - 20)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 7x^2 - 20x \right]_2^5 = 9\text{u.a.}$$

Or le plan est muni d'un repère orthonormé et l'unité graphique est 2 cm.

D'où 1 u.a. = 2×2 cm². Donc A = 9×4 cm², soit A = 36 cm².

Exercice 24

Soit f, fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + e^{-x}$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé (O , I , J).

1) Etudier les variations de f. Tracer sa courbe.

2) Trouver une équation de la tangente (T) à (C) au point A d'abscisse 1.
(T) coupe l'axe des abscisses en un point C. Préciser l'abscisse de C.

3) Calculer l'aire de la partie D du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = 3.

En déduire l'aire de la partie D' du plan délimitée par la courbe (C) et les droites (AC) et (BC), où B est le point de la courbe d'abscisse 3.

Solution 24

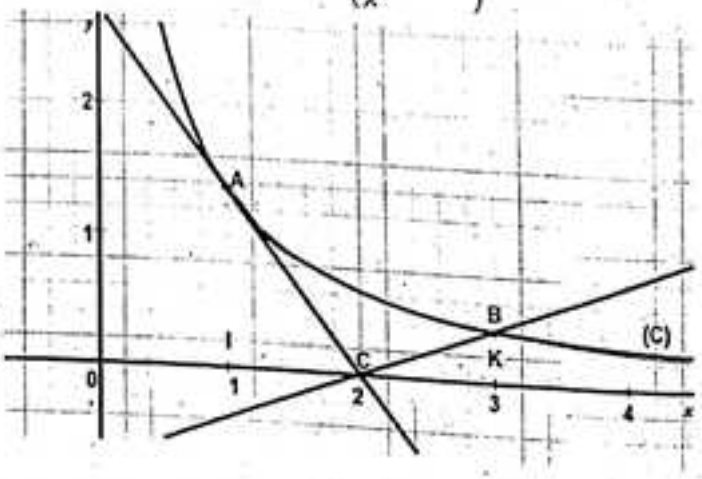
1) f est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel x > 0, on a : $f'(x) = -\left(\frac{1}{x^2} + e^{-x}\right) < 0$.

Donc f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left[\frac{1}{x} + e^{-x}\right] = +\infty$$

et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{x} + e^{-x}\right] = 0$.

Notons que la courbe de f admet deux asymptotes d'équations respectives x = 0 et y = 0.



2) • f est dérivable en 1 donc la courbe (C) admet au point d'abscisse 1, une tangente (T) d'équation :

$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, soit $y = -\left(1 + \frac{1}{e}\right)x + 2 + \frac{2}{e}$.

Scanned by CamScanner

• En remplaçant y par 0 dans l'équation de (T), on a x = 2. Donc l'abscisse de C est 2.

3) • Dans l'intervalle [1 , 3], la courbe (C) est au-dessus de l'axe des abscisses.

D'où l'aire de D est $\text{aire(D)} = \int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} + e^{-x}\right)dx = \left[\ln x - e^{-x}\right]_1^3 = \ln 3 - \frac{1}{e^3} + \frac{1}{e}$ u.a.

• L'aire de la partie D' est : aire(D') = aire(D) – aire(ICA) – aire(BCK), où aire(ICA) et aire(BCK) sont respectivement les aires des triangles ICA, BCK et K est le projeté orthogonal de B sur l'axe des abscisses.

Or $\text{aire(ICA)} = \frac{AI \times IC}{2} = \frac{f(1) \times 1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e}\right)$ u.a. et $\text{aire(BCK)} = \frac{BK \times KC}{2} = \frac{f(3) \times 1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{e^3}\right)$ u.a.

Finalement, $\text{aire(D')} = \ln 3 - \frac{1}{e^3} + \frac{1}{e} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{e^3}\right) = \ln 3 - \frac{3}{2e^3} + \frac{1}{2e} - \frac{2}{3}$ u.a.

Exercice 25

1) Etant donné r > 0, calculer $I = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$.

(Indication : reconnaître en la courbe sur $[-r , r]$ de $x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$ une partie d'une courbe très connue).

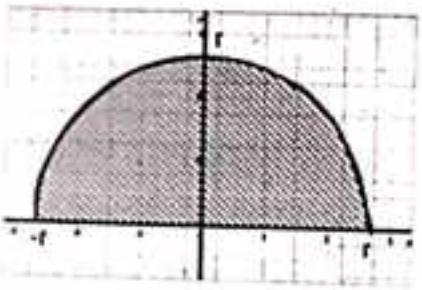
2) Déduire du calcul de I, celui de : $J = \int_{\frac{-\sqrt{3}+1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \sqrt{1 + 2t - 2t^2}\,dt$.

(Indication : écrire $1 + 2t - 2t^2$ sous forme canonique et faire un changement de variable affine).

Solution 25

1) Soit x et y deux réels, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ équivaut à $x^2 + y^2 = r^2$, avec $y > 0$.

La courbe (C) d'équation $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ est le demi-cercle de centre O et de rayon r, située au-dessus de l'axe des abscisses.



Or l'aire du demi disque délimité par (C) est d'une part égale à $\frac{\pi r^2}{2}$

et d'autre part égale à $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$

D'où $I = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi r^2}{2}$.

2) On a $1 + 2t - 2t^2 = \frac{3}{2} - \left[\sqrt{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right]^2$. On pose $x = \sqrt{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)$, $dx = \sqrt{2}dt$.

On a alors $J = \int_{\frac{-\sqrt{3}+1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \sqrt{\frac{3}{2} - \left[\sqrt{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right]^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{3}{2} - x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} \times \frac{3}{2}\right)$ (d'après la question 1)).

D'où $J = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8}$.

Exercice 26

On pose $f(x) = \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{3}$. A et B sont deux points de la courbe d'abscisses respectives 2 et 3.

Calculer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

Solution 26

f est dérivable et sa dérivée est continue sur [2 , 3].

Scanned by CamScanner

t pour tout x dans [2 , 3], on a $f'(x) = -\frac{1}{4x^2} + x^2$

.a longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est donnée par l'intégrale $\int_2^3 \sqrt{1+\left(\frac{1}{4x^2} - x^2\right)^2}\,dx$.

Or $\sqrt{1+\left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)^2} = \sqrt{1+x^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^4}} = \sqrt{x^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^4}} = \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)^2} = x^2 + \frac{1}{4x^2}$.

alors : $\int_2^3 \sqrt{1+\left(\frac{1}{4x^2} - x^2\right)^2}\,dx = \int_2^3 \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4x}\right]_2^3 = \frac{51}{8}$.

Ainsi la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est égale $\frac{51}{8}$.

Point méthode :

Soit f une fonction dérivable et à dérivée continue sur [a , b].
On note (C) la courbe de f dans un repère orthonormé. Soit A(a ,f(a)) et B(b ,f(b)) deux points de (C).
La longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est donnée par l'intégrale $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Exercice 27

Déterminer le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine délimité par la courbe de la fonction $x \mapsto x\sqrt{1+x^2}$ et les droites d'équations x = 0, x = 1 et y = 0.

Solution 27

Le volume V à calculer est donné par l'intégrale : $\int_0^1 \pi(x\sqrt{x^2+1})^2\,dx$.

Or $\int_0^1 \pi(x\sqrt{x^2+1})^2\,dx = \pi\int_0^1 (x^4+x^2)dx = \pi\left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{8\pi}{15}$. D'où $V = \frac{8\pi}{15}$ u.v.

G. Déterminer la valeur moyenne d'une fonction

Exercice 28

Soit α > 0 et f fonction définie sur I = [1, 1+ α] par : $f(t) = \frac{1}{t}$.

1) Calculer le minimum, le maximum et la valeur moyenne de f sur I.

2) A l'aide de l'inégalité de la moyenne, en déduire l'encadrement : $\frac{\alpha}{1+\alpha} \le \ln(1+\alpha) \le \alpha$, pour α > 0.

Solution 28

1) Puisque $1 \le t \le 1+\alpha$, alors on a : $\frac{1}{1+\alpha} \le \frac{1}{t} \le 1$. Comme f(1) = 1 et $f(1+\alpha) = \frac{1}{1+\alpha}$, alors :

- le minimum de f sur I est : $\frac{1}{1+\alpha}$ et le maximum de f sur I est : 1.
- la valeur moyenne de f sur I est : $\frac{1}{(1+\alpha)-1}\int_1^{1+\alpha}\frac{dt}{t} = \frac{1}{\alpha}\int_1^{1+\alpha}\frac{dt}{t} = \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}$.

2) Soit α > 0, pour tout réel t dans [1 , 1+ α], on a : $\frac{1}{1+\alpha} \le \frac{1}{t} \le 1$.

Scanned by CamScanner

D'où d'après l'inégalité de la moyenne, on a $\frac{1}{1+a}[(1+a)-1] \leq \int_1^{1+a} \frac{dt}{t} \leq 1 \times [(1+a)-1]$

C'est-à-dire $\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$, pour $a > 0$

H. majorer, minorer, encadrer une intégrale - donner une valeur approchée d'une intégrale

Exercice 29

Ranger les intégrales suivantes dans l'ordre croissant :

$I = \int_0^1 xe^{\cos x}dx$ $\quad J = \int_0^1 \sqrt{x}e^{\cos x}dx$ $\quad K = \int_0^1 x^3e^{\cos x}dx$ $\quad L = \int_0^1 x^2e^{\cos x}dx$.

Solution 29

Soit x élément de [0 , 1], on a : $0 \leq x^3 \leq x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$ *(Le lecteur le prouvera).*

Puisque $e^{\cos x}$ est un réel strictement positif, en multipliant les membres des inégalités par $e^{\cos x}$, on a :

$0 \leq x^3e^{\cos x} \leq x^2e^{\cos x} \leq xe^{\cos x} \leq \sqrt{x}e^{\cos x}$.

En intégrant dans [0 ,.1], on a : $0 \leq \int_0^1 x^3e^{\cos x}dx \leq \int_0^1 x^2e^{\cos x}dx \leq \int_0^1 xe^{\cos x}dx \leq \int_0^1 \sqrt{x}e^{\cos x}dx$.

Dans l'ordre croissant, on a alors : K, L, I et J.

Exercice 30

Pour x > 1, comparer les nombres $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\frac{1}{x}$. En déduire un encadrement de ln2.

Solution 30

Soit x réel strictement supérieur à 1, on a $x^2 > x > \sqrt{x} > 1$.

D'où $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$. Ainsi, $\int_1^2 \frac{dx}{x^2} \leq \int_1^2 \frac{dx}{x} \leq \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Il en résulte, après calcul des intégrales que : $\frac{1}{2} \leq \ln 2 \leq 2\sqrt{2} - 2 \leq 0{,}83$ (en utilisant la calculatrice).

Et finalement donc, on a : $0{,}5 \leq \ln 2 \leq 0{,}83$.

Exercice 31

Montrer que pour tout $x \geq 10$, on a : $\frac{1}{\sqrt{1+x^6}} \leq 0{,}001$ et $e^{-x} \leq 5 \times 10^{-5}$.

En déduire un encadrement à 10^{-6} près de $\int_{10}^{30} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+x^6}}dx$.

Solution 31

- Soit $x \geq 10$, on a $x^6 \geq 10^6$. Donc $x^6 + 1 \geq 1 + 10^6$.

Or on a $10^6 \leq 1 + 10^6 \leq 1 + x^6$, alors on a $10^3 \leq \sqrt{1+x^6}$.

Et donc finalement, on a $\frac{1}{\sqrt{1+x^6}} \leq \frac{1}{10^3}$, c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt{1+x^6}} \leq 0{,}001$ (1).

- De même, soit $x \geq 10$, on a $-x \leq -10$ donc $e^{-x} \leq e^{-10} \leq 5 \times 10^{-5}$ (2).

Scanned by CamScanner

• D'après ce qui précède, on a : $0 \le \frac{1}{\sqrt{1+x^6}} \le 0{,}001$ (1) et $0 \le e^{-x} \le 5\times10^{-5}$ (2).

En multipliant membre à membre les encadrements (1) et (2), on a : $0 \le \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+x^6}} \le 5\times10^{-8}$.

Et en appliquant l'inégalité de la moyenne à la fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+x^6}}$ sur [10 , 30], on a :

$0\times(30-10) \le \int_{10}^{30} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+x^6}}dx \le 5\times10^{-8}(30-10)$. C'est-à-dire $0 \le \int_{10}^{30} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+x^6}}dx \le 10^{-6}$.

Exercice 32

Encadrer $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(3+\cos t)^2}$

Solution 32

On a $\frac{1}{2} < \frac{\pi}{6}$. Donc soit t appartenant à $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, on a $\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos t < 1$.

Donc $3+\sqrt{3} < 3+2\cos t < 5$, donc $(3+\sqrt{3})^2 < (3+2\cos t)^2 < 25$.

Il en résulte que $\frac{1}{25} < \frac{1}{(3+2\cos t)^2} < \frac{1}{(3+\sqrt{3})^2}$.

En appliquant l'inégalité de la moyenne à la fonction $t \mapsto \frac{1}{(3+2\cos t)^2}$ sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, on a :

$\frac{1}{25}\left(\frac{1}{2}-0\right) < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(3+2\cos t)^2} < \frac{1}{(3+\sqrt{3})^2}\left(\frac{1}{2}-0\right)$. Donc $\frac{1}{50} \le I \le \frac{1}{2(3+\sqrt{3})^2}$.

On obtient donc $0{,}02 \le I \le 0{,}02233$.

Exercice 33

1)a) Etudier les variations de f telle que $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Montrer que pour tout x de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a : $1 \le f(x) \le \frac{2}{\sqrt{e}}$.

b) En déduire un encadrement de $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt$.

2) On pose $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt$.

a) Montrer que, pour tout x de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\frac{1}{1-x} = 1+x+\frac{x^2}{1-x}$ et donc que : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx$.

b) En déduire un encadrement de I.

Solution 33

1)a) • f est définie, continue et dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, et pour tout x dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f'(x) = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$, donc $f'(x) \ge 0$, avec $f'(x) = 0$, si et seulement si $x = 0$. Alors f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Scanned by CamScanner

• Puisque f est strictement croissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, alors soit x dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a : $f(0)\le f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$

Or $f(0)=1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{e}}$ On obtient alors pour tout x de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, que : $1\le f(x)\le\frac{2}{\sqrt{e}}$

b) Soit x dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a $1\le f(x)\le\frac{2}{\sqrt{e}}$. Donc en appliquant l'inégalité de la moyenne à f sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a :

$1\times\left(\frac{1}{2}-0\right)\le\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx\le\frac{2}{\sqrt{e}}\times\left(\frac{1}{2}-0\right)$. Alors on conclut que : $\frac{1}{2}\le\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx\le\frac{1}{\sqrt{e}}$.

2)a) • Soit x un nombre réel.

On a : $1+x+\frac{x^2}{1-x}=\frac{1-x^2+x^2}{1-x}=\frac{1}{1-x}$. Donc pour tout x dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\frac{1}{1-x}=1+x+\frac{x^2}{1-x}$.

• Puisque pour tout x de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\frac{1}{1-x}=1+x+\frac{x^2}{1-x}$, alors $\frac{e^{-x}}{1-x}=\left(1+x+\frac{x^2}{1-x}\right)e^{-x}$.

Ainsi en intégrant dans [0 , 1], on a :

$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1+x+\frac{x^2}{1-x}\right)e^{-x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(1+x)e^{-x}+\frac{x^2e^{-x}}{1-x}\right]dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(1+x)e^{-x}dx+\int_0^{\frac{1}{2}}x^2f(x)dx$.

D'où $I=\int_0^{\frac{1}{2}}(1+x)e^{-x}dx+\int_0^{\frac{1}{2}}x^2f(x)dx$.

b) Soit x dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a d'après la question 1)a) : $1\le f(x)\le\frac{2}{\sqrt{e}}$. Alors on a : $x^2\le x^2f(x)\le\frac{2x^2}{\sqrt{e}}$.

Donc en intégrant, on a : $\int_0^{\frac{1}{2}}x^2dx\le\int_0^{\frac{1}{2}}x^2f(x)dx\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2x^2}{\sqrt{e}}dx$.

C'est-à-dire $\frac{1}{24}\le\int_0^{\frac{1}{2}}x^2f(x)dx\le\frac{1}{12\sqrt{e}}$ (1) *(le lecteur fera le calcul de* $\int_0^{\frac{1}{2}}x^2dx$ *et de* $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2x^2}{\sqrt{e}}dx$*).*

Or en intégrant par parties, on a aussi : $\int_0^{\frac{1}{2}}(1+x)e^{-x}dx=\left[-(1+x)e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}}+\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-x}dx=-\frac{5}{2\sqrt{e}}+2$ (2).

$I=\int_0^{\frac{1}{2}}(1+x)e^{-x}dx+\int_0^{\frac{1}{2}}x^2f(x)dx$, alors d'après (1) et (2) on a $-\frac{5}{2\sqrt{e}}+\frac{49}{24}\le I\le-\frac{29}{12\sqrt{e}}+2$.

Exercice 34

Montrer que, pour tout réel $t\ge0$, on a : $1-t\le\frac{1}{1+t}\le1-t+t^2$.

En déduire que, pour tout $x\ge0$, on a : $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

Solution 34

• Soit t réel positif, on a $\frac{1}{1+t}-(1-t)=\frac{t^2}{1+t}\ge0$, donc $\frac{1}{1+t}\ge1-t$.

Et $\frac{1}{1+t}-(1-t+t^2)=-\frac{t^3}{1+t}\le0$, donc $\frac{1}{1+t}\le1-t+t^2$.

Il en résulte que pour tout réel $t\ge0$, on a : $1-t\le\frac{1}{1+t}\le1-t+t^2$.

Scanned by CamScanner

• Soit $x \geq 0$, en « intégrant dans $[0\ ,\ x]$ l'encadrement précédent », on a : $\int_0^x (1-t)dt \leq \int_0^x \frac{dt}{1+t} \leq \int_0^x (1-t+t^2)dt$.

C'est-à-dire $\left|t-\frac{t^2}{2}\right|_0^x \leq \left[\ln(1+t)\right]_0^x \leq \left|t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\right|_0^x$.

Finalement donc, pour tout $x \geq 0$, on a : $x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

I. Etudier une suite définie à l'aide d'une intégrale

Exercice 35

Soit (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$. Montrer que (I_n) est croissante.

Solution 35

Soit n, un entier naturel.

$$I_{n+1}-I_n = \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x}dx - \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx = \int_0^1 \left(\frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x} - \frac{e^{nx}}{1+e^x}\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{e^{nx}(e^x-1)}{1+e^x}\right)dx.$$

Or soit x élément de $[0\ ,\ 1]$, on a : $e^{nx} > 0$, $1 + e^x > 0$ et $e^x - 1 \geq 0$. Donc $\frac{e^{nx}(e^x-1)}{1+e^x} \geq 0$.

Et par suite $\int_0^1 \frac{e^{nx}(e^x-1)}{1+e^x}dx \geq 0$. C'est-à-dire $I_{n+1}-I_n \geq 0$. D'où la suite (I_n) est croissante.

Exercice 36

Soit (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_0^n e^{-(x+1)}\sqrt{x}\,dx$. Montrer que (I_n) est croissante.

Solution 36

Méthode 1 :

Soit n entier naturel, on a :

$$I_{n+1}-I_n = \int_0^{n+1} e^{-(x+1)}\sqrt{x}\,dx - \int_0^n e^{-(x+1)}\sqrt{x}\,dx = \int_0^n e^{-(x+1)}\sqrt{x}\,dx + \int_n^{n+1} e^{-(x+1)}\sqrt{x}\,dx - \int_0^n e^{-(x+1)}\sqrt{x}\,dx$$

$$= \int_n^{n+1} e^{-(x+1)}\sqrt{x}\,dx$$

Or pour tout x dans $[n\ ,\ n+1]$, on a $e^{-(x+1)}\sqrt{x} \geq 0$, d'où $\int_n^{n+1} e^{-(x+1)}\sqrt{x}\,dx \geq 0$. Donc $I_{n+1} - I_n \geq 0$.

D'où (I_n) est une suite croissante.

Méthode 2 :

On considère la fonction f définie sur $[0\ ,\ +\infty[$, par $f(x) = \int_0^x e^{-(t+1)}\sqrt{t}\,dt$.

La fonction $t \mapsto e^{-(t+1)}\sqrt{t}$ est continue sur $[0\ ,\ +\infty[$, donc la fonction f est dérivable sur $[0\ ,\ +\infty[$, et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = e^{-(x+1)}\sqrt{x} > 0$. D'où f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Par conséquent, soit n entier naturel, on a $f(n + 1) > f(n)$. C'est-à-dire $I_{n+1} > I_n$.

D'où la suite (I_n) est strictement croissante.

Scanned by CamScanner

Exercice 37

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$

1) Montrer que (U_n) est croissante et majorée. Que peut-on en déduire ?

2) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $1 - \frac{1}{n+1} \leq U_n \leq 1$. En déduire la limite de la suite (U_n)

Solution 37

1) Soit n un entier naturel, soit x élément dans [0 , 1], on a : $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$, donc $1 \leq 1 + x^{n+1} \leq 1 + x^n$.

Et par suite, $\frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{1+x^{n+1}} \leq 1$.

En intégrant dans [0 , 1], on obtient : $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^{n+1}} \leq \int_0^1 dx$. D'où $u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Donc la suite (U_n) est croissante et majorée par 1, par conséquent, convergente.

2) • Soit x appartenant à [0 , 1], et n entier naturel, on a :

$\frac{1}{1+x^n} = \frac{x^n+1-x^n}{1+x^n} = 1 - \frac{x^n}{1+x^n}$. Or on a $x^n + 1 \geq 1$, alors $\frac{1}{1+x^n} \leq 1$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, pour tout réel x dans [0 , 1], on a : $-x^n \leq -\frac{x^n}{1+x^n}$. Donc $1 - x^n \leq 1 - \frac{x^n}{1+x^n}$.

En intégrant dans [0 , 1], on a : $\int_0^1 (1-x^n)dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$. C'est-à-dire $1 - \frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

Or on a montré à la question 1) que : $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} \leq 1$. Et donc, pour tout entier naturel n, $1 - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 1$.

• Comme $\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, alors d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Exercice 38

Etudier les variations de la suite (I_n) définie par : $I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx$.

Solution 38

Soit n entier naturel, on a : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)dx - \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx = \int_0^1 (x-1)x^n \ln(x+1)dx$.

Or soit x élément de [0 , 1], on a : $x^n > 0$, $x - 1 \leq 0$ et $\ln(x + 1) \geq 0$. Donc $x^n(x - 1)\ln(x + 1) \leq 0$.

Et par suite $\int_0^1 x^n(x-1)\ln(x+1)dx \leq 0$. C'est-à-dire $I_{n+1} - I_n \leq 0$. D'où la suite (I_n) est décroissante.

Exercice 39

Soit un entier naturel non nul, on considère la suite (U_n) telle que : $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la convergence de la suite (U_n).

2) Pour quelles valeurs de n a-t-on $|U_n| < 10^{-3}$.

Solution 39

1) • Soit x appartenant à [0 , 1], on a : $0 \leq x^2 \leq 1$, donc $1 \leq 1 + x^2 \leq 2$, puis $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ (1).

Scanned by CamScanner

Puisqu'on a aussi $0 \le x^n$, alors en multipliant l'encadrement (1) par x^n, on a : $\frac{x^n}{2} \le \frac{x^n}{1+x^2} \le x^n$.

Et en intégrant dans [0 , 1], on obtient : $\int_0^1 \frac{x^n}{2}dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx \le \int_0^1 x^n dx$.

Ce qui conduit au résultat $\frac{1}{2(n+1)} \le U_n \le \frac{1}{n+1}$.

- De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, alors d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

D'où la suite (U_n) converge vers 0.

2) Soit n un entier naturel, puisque l'on a $\frac{1}{2(n+1)} \le U_n \le \frac{1}{n+1}$, alors $|U_n| \le \frac{1}{n+1}$.

Donc si $\frac{1}{n+1} < 10^{-3}$, alors $|U_n| < 10^{-3}$. C'est-à-dire, si $n > \frac{1-10^{-3}}{10^{-3}} = 999$, alors $|U_n| < 10^{-3}$.

Finalement, pour avoir $|U_n| < 10^{-3}$, il suffit de prendre n dans $\mathbb{N} - \{0, 1, 2, \ldots, 998, 999\}$.

Exercice 40

Soit f fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$.

1) Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à $]-1 , +\infty[$.
Déterminer le sens de variation de f sur $]-1 , +\infty[$, à l'aide du signe de f'.

2) Soit (U_n), la suite définie pour tout entier naturel n par, $U_n = \int_0^n \frac{dt}{1+t^3}$.

a) Démontrer que la suite (U_n) est croissante.

b) Démontrer les inégalités suivantes : $U_1 \le 1$ et pour tout entier $n \ge 1$, $\int_1^n \frac{dt}{1+t^3} \le \int_1^n \frac{dt}{t^3}$.

En déduire que la suite (U_n) est majorée et par suite, convergente.

Solution 40

1) • La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^3}$ est continue sur $]-1, +\infty[$.

Donc la fonction f est dérivable sur $]-1 , +\infty[$ et pour tout $x > -1$, on a $f'(x) = \frac{1}{1+x^3}$.

- Pour tout $x > -1$, on a $f'(x) > 0$, d'où f est strictement croissante sur $]-1 , +\infty[$.

2)a) On remarque que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = f(n)$.
f étant strictement croissante sur $[0 , +\infty[$, on a pour tout entier naturel n, $f(n + 1) > f(n)$.
C'est-à-dire $U_{n+1} > U_n$. Et donc la suite (U_n) est strictement croissante.

b) • Soit t dans [0 , 1], on a : $0 \le t^3 \le 1$, donc $1 \le 1 + t^3 \le 2$. On obtient alors $\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+t^3} \le 1$.

D'après l'inégalité de la moyenne appliquée à $x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$ sur [0 , 1], on a : $\frac{1}{2}(1-0) \le \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} \le 1(1-0)$.

Ce qui nous permet alors de conclure que $U_1 \le 1$.

- Soit $t > 1$, on a $1 + t^3 \ge t^3$. Donc $\frac{1}{1+t^3} \le \frac{1}{t^3}$. Ainsi pour tout $n \ge 1$, on a $\int_1^n \frac{dt}{1+t^3} \le \int_1^n \frac{dt}{t^3}$.

- Soit n un entier naturel non nul, on a : $U_n = \int_0^n \frac{dt}{1+t^3} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} + \int_1^n \frac{dt}{1+t^3} = U_1 + \int_1^n \frac{dt}{1+t^3}$ (1).

Scanned by CamScanner

Or on a $U_1 \leq 1$ et pour tout entier $n \geq 1$, $\int_1^n \frac{dt}{1+t^3} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^3}$. D'où $U_1 + \int_1^n \frac{dt}{1+t^3} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^3}$ (2).

Comme $1 + \int_1^n \frac{dt}{t^3} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq \frac{3}{2}$, alors de (1) et (2), on peut conclure que $U_n \leq \frac{3}{2}$.

- (U_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{2}$, donc convergente.

Exercice 41

On pose, pour tout entier naturel n, $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

1) Montrer que, pour tout x dans [0 , 1], on a : $1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x} - (-1)^n \frac{x^n}{1+x}$.

2) En déduire que $U_n = \ln 2 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

3) Déterminer la limite de (U_n).

Solution 41

1) Soit n entier naturel non nul, et x dans [0 , 1], on a :

$$1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1} = 1 + (-x) + (-x)^2 + \ldots + (-x)^{n-1} = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

D'où pour tout x dans [0 , 1], on a : $1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x} - (-1)^n \frac{x^n}{1+x}$.

2) Soit k entier naturel non nul, on a : $\int_0^1 (-x)^{k-1} dx = \left[-\frac{(-x)^k}{k} \right]_0^1 = -\frac{(-1)^k}{k}$.

D'après la question 1), on a pour n entier naturel non nul : $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} - (-1)^n \frac{x^n}{1+x}$.

En intégrant dans [0 , 1], on a : $\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} \right) dx - \int_0^1 \left((-1)^n \frac{x^n}{1+x} \right) dx$.

C'est-à-dire $\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 ((-1)^k x^k) dx = \left[\ln(x+1) \right]_0^1 - (-1)^n \int_0^1 \left(\frac{x^n}{1+x} \right) dx$.

C'est-à-dire $\sum_{k=0}^{n-1} \left((-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 \right) = \ln 2 - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

Donc $\sum_{k=0}^{n-1} \left((-1)^k \times \frac{1}{k+1} \right) = \ln 2 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

Il en résulte alors que : $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) = \ln 2 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$. Soit $U_n = \ln 2 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

3) Soit x appartenant à [0 , 1], on a $1 \leq 1 + x \leq 2$, puis $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$ (1).

Puisqu'on a aussi $0 \leq x^n$, alors en multipliant l'encadrement (1) par x^n, on a : $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$.

Scanned by CamScanner

Et en intégrant dans [0 , 1], on obtient : $\int_0^1 \frac{x^n}{2}dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \le \int_0^1 x^n dx$.

Ce qui conduit après avoir intégré au résultat $\frac{1}{2(n+1)} \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \le \frac{1}{n+1}$ (2).

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0$ (d'après le théorème des gendarmes).

Or $\left|(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx\right| = \left|\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx\right| = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$, alors, $\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0$.

Comme $U_n = \ln 2 + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ln 2$.

Exercice 42

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, et pour tout réel x > 0, on a : $e^x \ge \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Solution 42

On considère la proposition P_n : « $e^x \ge \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ ».

Pour n = 0 :

On a $e^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^0}{0!} = 1$. D'où P_0 est vraie.

Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel n, c'est-à-dire pour tout t > 0, on a $e^x \ge \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Ainsi, soit x > 0, intégrons sur [0 , x], on a : $\int_0^x e^t dt \ge \int_0^x \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}dt$. C'est-à-dire $e^x - 1 \ge \sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^x \frac{t^k}{k!}dt\right)$.

Or $\sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^x \frac{t^k}{k!}dt\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!(k+1)}\left[t^{k+1}\right]_0^x\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right) = \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{x^k}{k!}\right)$,

alors on a : $e^x \ge 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$. C'est-à-dire $e^x \ge \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$. D'où P_{n+1} est vraie.

Donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, et pour tout réel x > 0, on a : $e^x \ge \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 43

Déterminer les limites suivantes : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \tan x dx$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

Solution 43

- Soit x dans $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, la fonction tangente étant croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a $\tan 0 \le \tan x \le \tan\frac{\pi}{4}$.

C'est-à-dire $0 \le \tan x \le 1$. Puisque x^n est aussi positif, alors on a : $0 \le x^n \tan x \le x^n$.

Scanned by CamScanner

En intégrant dans $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \tan x\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n\,dx$. Donc $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \tan x\,dx \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} = 0$ (car $\frac{\pi}{4}$ appartient à $[0, 1[$)

On déduit du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \tan x\,dx = 0$

• Soit t appartenant à $[0, 1]$, on a $1 \leq e^t \leq e$ et $(1-t)^n \geq 0$. D'où $(1-t)^n \leq (1-t)^n e^t \leq (1-t)^n e$

En intégrant dans $[0, 1]$, on a : $\int_0^1 (1-t)^n dt \leq \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \int_0^1 (1-t)^n e\,dt$.

C'est-à-dire $\frac{1}{n+1} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \frac{e}{n+1}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, d'où d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt = 0$.

J. Encadrer une intégrale par la méthode des rectangles

Exercice 44

Calculer une valeur approchée de $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ en utilisant la méthode des rectangles et une subdivision de l'intervalle $[0, 1]$ en cinq intervalles de même amplitude. Comparer les résultats à $\frac{\pi}{4}$.

Solution 44

• La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est strictement décroissante sur $[0, 1]$ *(le lecteur le vérifiera en calculant la dérivée de f)*. Soit k appartenant à $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, on a : $0 \leq \frac{k}{5} \leq \frac{k+1}{5} \leq 1$.

Donc, soit t dans $\left[\frac{k}{5}, \frac{k+1}{5}\right]$, puisque f est décroissante sur $[0, 1]$, alors on a : $f\left(\frac{k+1}{5}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{5}\right)$.

En appliquant l'inégalité de la moyenne à f sur $\left[\frac{k}{5}, \frac{k+1}{5}\right]$, on a :

$$\left(\frac{k+1}{5} - \frac{k}{5}\right) f\left(\frac{k+1}{5}\right) \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(t)dt \leq \left(\frac{k+1}{5} - \frac{k}{5}\right) f\left(\frac{k}{5}\right).$$

C'est-à-dire $\frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right) \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(t)dt \leq \frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right)$. D'où $\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right) \leq \sum_{k=0}^{4} \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right)$.

Or $\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right) = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) - \frac{1}{5} f(0) = U_5 - \frac{f(0)}{5} = U_5 - \frac{1}{5}$ et

$\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) - \frac{1}{5} f\left(\frac{5}{5}\right) = U_5 - \frac{f(1)}{5} = U_5 - \frac{1}{10}$.

On peut donc conclure que, $U_5 - \frac{1}{5} \leq \int_0^1 f(t)dt \leq U_5 - \frac{1}{10}$, où $U_5 = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right)$.

Scanned by CamScanner

Or $U_5 - \frac{1}{5} \geq 0{,}733731$ et $U_5 - \frac{1}{10} \leq 0{,}833731$. *(En utilisant la calculatrice)*

D'où $0{,}733731 \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \leq 0{,}833731$. Une valeur approchée de $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ est 0,783731.

- Or $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}7853$. D'où $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \approx \frac{\pi}{4}$.

Exercice 45

Soit f la fonction définie sur [0 , 1] par : $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1) Montrer que f est décroissante sur [0 , 1].

2) En déduire que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ on a : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

3) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Montrer que $U_n - \frac{f(0)}{n} \leq \int_0^1 f(t)dt \leq U_n - \frac{f(1)}{n}$.

4) Donner un encadrement de $\int_0^1 f(t)dt$ pour n = 10. Déterminer un encadrement de $\int_0^1 f(t)dt$ à 10^{-2} près.

Solution 45

1) La fonction f est dérivable sur [0 , 1] et pour tout x dans [0 , 1], on a :

$f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} \leq 0$, avec $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$. D'où f est strictement décroissante sur [0 , 1].

2) Soit n entier naturel non nul, et k appartenant à {0, 1, . . ., n – 1}, on a : $0 \leq \frac{k}{n} \leq \frac{k+1}{n} \leq 1$.

Soit t dans $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, puisque f est décroissante sur [0 , 1], on a : $f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$.

En appliquant l'inégalité de la moyenne à f sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a :

$\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k}{n}\right)$. C'est-à-dire $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

3) Soit n entier naturel non nul, d'après la relation de Chasles pour les intégrales, on a :

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t)dt + \ldots + \int_{\frac{n-1}{n}}^1 f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt.$$

Or pour tout k appartenant à {0, 1, . . ., n – 1}, on a $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ (d'après question 2)), alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} f(0) = U_n - \frac{f(0)}{n}$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) = U_n - \frac{f(1)}{n}$.

alors on peut conclure que pour tout n entier naturel, $U_n - \frac{f(0)}{n} \leq \int_0^1 f(t)dt \leq U_n - \frac{f(1)}{n}$.

Scanned by CamScanner

4) • En utilisant la calculatrice, pour n = 10, on a :

$U_{10} - \frac{f(1)}{10} \approx 0{,}874$ et $U_{10} - \frac{f(0)}{10} \approx 0{,}8354$. D'où on a : $0{,}8 \leq \int_0^1 f(t)dt \leq 0{,}9$.

• Dans l'encadrement $U_n - \frac{f(0)}{n} \leq \int_0^1 f(t)dt \leq U_n - \frac{f(1)}{n}$, l'amplitude d'encadrement est

$U_n - \frac{f(1)}{n} - U_n + \frac{f(0)}{n} = \frac{f(0) - f(1)}{n}$.

Donc pour avoir un encadrement de $\int_0^1 f(t)dt$ à 10^{-2} près, il suffit de prendre $\frac{f(0) - f(1)}{n} \leq 10^{-2}$.

Donc $n \geq 100(f(0) - f(1))$. On obtient $n \geq 40$.

Or en utilisant la calculatrice, $U_{40} - \frac{f(1)}{40} \leq 0{,}8606$ et $U_{40} - \frac{f(0)}{40} \geq 0{,}8605$.

Donc un encadrement de $\int_0^1 f(t)dt$ à 10^{-2} est : $0{,}8605 \leq \int_0^1 f(t)dt \leq 0{,}8606$. Donc $0{,}86 \leq \int_0^1 f(t)dt \leq 0{,}87$.

Exercice 46

En utilisant la méthode des rectangles, calculer la limite de la suite (U_n) de terme général :

a) $U_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\right)$ b) $U_n = \frac{\pi}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$.

Solution 46

a) Posons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. f est strictement décroissante sur [0 , 1].

Soit n entier naturel non nul et k appartenant à {0, 1, . . ., n – 1}, on a : $0 \leq \frac{k}{n} \leq \frac{k+1}{n} \leq 1$.

Soit t dans $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, puisque f est décroissante sur [0 , 1], on a : $f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$.

D'après l'inégalité de la moyenne appliquée à f sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a :

$\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)f\left(\frac{k}{n}\right)$. C'est-à-dire $\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$.

D'où $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$. Donc $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^1 f(t)dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Donc $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right) + f(1) - f(0)\right) \leq \int_0^1 f(t)dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Or $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\right) = U_n$. Alors on a $U_n - \frac{f(0) - f(1)}{n} \leq \int_0^1 f(t)dt \leq U_n$.

Donc $\left|U_n - \int_0^1 f(t)dt\right| \leq \frac{f(0) - f(1)}{n}$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(0) - f(1)}{n} = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = \int_0^1 f(t)dt$.

Scanned by CamScanner

Comme $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = \left[2\sqrt{1+t}\right]_0^1 = 2\sqrt{2}-2$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2\sqrt{2}-2$.

b) Posons $f(x) = \cos^2 x$.

En utilisant la méthode des rectangles à f sur l'intervalle $[0\ ,\ \pi]$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \int_0^{\pi} f(t)dt$.

Comme $\int_0^{\pi} f(t)dt = \int_0^{\pi} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)dt = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2t + t\right)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$.

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{\pi}{2}$.

Scanned by CamScanner

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER

Exercice 47

25 minutes

1) Linéariser $\sin^5 x$.

2) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^x (\sin^5 t)(\cos t)dt\right)dx = \frac{15\pi - 44}{1152}$

Exercice 48

25 minutes

Soit n entier naturel, on définit sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction f_n par : $f_n : x \mapsto \begin{cases} f_n(x) = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}, \text{ pour } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ f_n(0) = 2n+1 \end{cases}$

1) Montrer que f_n est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$. Montrer que $I_n = I_{n-1}$, pour $n \geq 1$, en déduire la valeur de I_n.

Exercice 49

25 minutes

Soit $x > 0$, on pose : $F(x) = \int_1^x \cos(\ln t)dt$ et $G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)dt$.

1) A l'aide d'intégrations par parties, montrer que pour tout $x > 0$, on a :
$F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x)$ et $G(x) = x\sin(\ln x) - F(x)$.
2) Expliciter les fonctions F et G.

Exercice 50

15 minutes

Déterminer, en intégrant par parties, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^3}\cos\frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 51

45 minutes

Soit n entier naturel, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$.

1) Calculer u_0 et u_1.
2) Calculer $u_n + u_{n+2}$.

En déduire que pour tout n entier naturel, on a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$, puis calculer la limite de u_n en $+\infty$.

3) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $u_{2n} = (-1)^n\left[\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right]$.

4) En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right] = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 52

40 minutes

On définit la suite (I_n) par : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx$ et pour tout entier naturel non nul n, $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$.

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5}I_n$.

Scanned by CamScanner

1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $I_n = \frac{2^{2n+2}(n+1)(n!)^2}{(2n+3)!}$.

70 minutes

Exercice 53

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

1) Etudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.

2) Soit a un réel strictement positif.

A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $\int_1^a \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$ puis $\int_1^a f(x)dx$.

3) Soit k entier naturel non nul.

Vérifier que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Démontrer que : $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \frac{1}{k} - f(k)$, puis que $0 \le f(k) \le \frac{1}{k(k+1)}$.

4) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Simplifier S_n, montrer que la suite $(S_n)_{n>0}$ est convergente et déterminer sa limite.

5) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $0 \le \sum_{k=n}^{2n} f(k) \le S_n$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} f(k)$.

6) On considère la suite $U_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Exprimer $\sum_{k=n}^{2n} f(k)$ en fonction de U_n.

En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 54 — BAC C et E – Cameroun – 2002 — 70 minutes

Soit f fonction numérique réelle définie sur $]0, +\infty[$, par : $f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln x$.

$(U_n)_{n>0}$ désigne la suite de terme général, $U_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \ln n$.

A) Etude et courbe de f :

1)a) Déterminer les limites de f en 0 à droite et en $+\infty$.

b) Calculer la dérivée de f. En déduire le tableau de variation de f.

2)a) Démontrer que f est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $]-\infty, 0[$.

b) Tracer dans le même repère orthonormé, les courbes de f et f^{-1}. (On prendra 2 cm pour unité sur les axes)

c) α désigne un réel strictement positif et inférieur à 1.

On note D l'ensemble des points M(x , y) du plan tels que $\alpha \le x \le 1$ et $f(x) \le y \le 0$.

En utilisant une intégration par parties, déterminer en fonction de α, l'aire de D en cm^2.

d) calculer la limite de cette aire lorsque α tend vers 0.

B) Etude de la convergence de la suite $(U_n)_{n>0}$:

1)a) Calculer les valeurs exactes de U_1 et U_2.

b) Etudier le sens de variation de la suite (U_n). (On pourra utiliser le signe de f)

2) Démontrer que :

a) $U_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}\right) + \frac{1}{n}$.

b) Pour k appartenant à $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, pour tout t dans $[k, k+1]$, $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \le \frac{1}{k}$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, $U_n \ge 0$. En déduire que la suite $(U_n)_{n>0}$ converge.

Scanned by CamScanner

Exercice 55

30 minutes

a) Prouver que $\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\cos 2t\ dt = \frac{1}{4}$ (On utilisera successivement deux intégrations par parties)

b) Utiliser la question précédente pour évaluer les réels :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\cos^2 t\,dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\sin^2 t\,dt$ (On pourra calculer I + J et I – J).

Exercice 56

80 minutes

Soit f la fonction définie sur]0 , +∞[par : $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$.

(C) est la courbe de f dans le plan P, muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique : 2 cm).

A)1) Soit g la fonction numérique définie sur]0 , +∞[par : $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

a) Déterminer la dérivée g' de g et dresser le tableau de variation de g. (On ne demande pas de déterminer les limites de g en 0 et +∞).

b) En utilisant $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, déterminer le signe de g sur]0 , +∞[.

2)a) Déterminer les limites de f en +∞ et en 0.

b) Déterminer f ' et démontrer que pour tout x > 0, f '(x) et g(x) ont le même signe.
Déterminer le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

c) Démontrer que la droite (Δ) d'équation y = x est asymptote à la courbe de (C) et étudier leurs positions relatives. Indiquer une équation de l'autre droite asymptote à la courbe de (C).

d) Démontrer que la tangente (T) à la courbe (C) en son point d'abscisse e est parallèle à la droite (Δ).

e) Dans le plan P, tracer les droites (Δ) et (T) ainsi que la courbe (C).

f) Calculer $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$.

Calculer en cm² l'aire A de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équations x = 1 et x = e.

B)1) Calculer à l'aide d'une intégration par parties, $\int_1^e \ln x\,dx$.

2) Soit H la fonction numérique définie sur]0 , +∞[par : $H(x) = -\frac{1}{x}\ln^2 x - \frac{2}{x}\ln x - \frac{2}{x}$.

Démontrer que, sur]0 , +∞[, H est une primitive de la fonction h définie par : $h(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2}$.

3) On considère l'espace orienté rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, où $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est le repère précédent du plan P et $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$.

On considère le solide S engendré par la rotation autour de l'axe $(O ; \vec{i})$ de la surface délimitée dans le plan P, par les droites d'équations x = 1, x = e, l'axe $(O ; \vec{i})$ et (C).

Calculer le volume V de S.

Exercice 57

70 minutes

On considère les fonctions f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $f_2(x) = 1 + \frac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}$, et on désigne par

(C_1) et (C_2) les courbes respectives de f_1 et f_2 dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

A)1) Etudier les variations de f_1. Construire (C_1).

2)a) Etudier les variations de f_2.

b) Démontrer que (C_2) admet la droite d'équation y = x + 1 comme asymptote.

Scanned by CamScanner

c) Tracer (C_2) dans le même repère que (C_1). Préciser la position relative des courbes (C_1) et (C_2).

B) On pose : $I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$; $K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

1) Soit f la fonction numérique définie dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

Déduire de l'expression de f '(x) le nombre réel K.

2) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I en fonction de J.

3) Vérifier que I = J + K. En déduire les valeurs de I et de J.

4) Calculer $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

Déduire de ce qui précède l'aire de la région plane limitée par (C_1), (C_2) et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

Exercice 58

60 minutes

1) Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Pour tout réel x, on pose $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$.

2) Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer F'(x).
En déduire le sens de variation de F.

3) Montrer que F est impaire.

4) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\int_0^x \frac{1}{1+t}dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

Pour tout réel x, on pose G(x) = F(2x) – F(x).

5) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$. Etudier le sens de variation de G.

6) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{x}$. En déduire que, pour tout réel x, $G(x) \leq \ln 2$.

Exercice 59

70 minutes

On considère la fonction f définie sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[\cup]1, +\infty[$ par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$.

1) Montrer que f est bien définie.

2) Montrer que f est dérivable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[\cup]1, +\infty[$. Calculer f '(x).

3) Montrer que, pour tout x élément de $\left]0, \frac{1}{2}\right[\cup]1, +\infty[$, on a : $\frac{x}{\ln 2x} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln x}$.

En déduire $\lim_{x \to 0} f(x)$ puis $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

4) Soit φ la fonction définie sur]0 , 1[par $\varphi(x) = 2 - 2x + \ln x$.

Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

Montrer que pour tout x appartenant à $[\alpha, 1[$, on a : $\ln x \geq 2x - 2$.

Montrer que pour tout x de $\left[\alpha, \frac{1}{2}\right[$, on a : $f(x) \leq \frac{1}{2}\int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}$. En déduire $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$.

5) Montrer que pour tout réel $t \geq 1$, on a $0 \leq \ln t \leq t - 1$. En déduire $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$.

6) Donner le sens de variation de f.

Scanned by CamScanner

Exercice 60

70 minutes

Partie 1 : Etude de la fonction g définie sur]0 , +∞[par g(x) = 1 + x – xlnx.

1) Déterminer les limites de g aux bornes de l'intervalle de définition.
2) Etudier les variations de g.
3) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution β dans]0, +∞[.
Déterminer le signe de g sur son ensemble de définition. Montrer que 3,5 < β < 3,6.

Partie 2 : Etude de la fonction f définie sur]0 , +∞[par $f(x) = 2 + \frac{\ln x}{1+x}$.

On note (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1) Etudier les limites de f aux bornes de son intervalle de définition. (C) possède-t-elle des asymptotes ? Si oui lesquelles ?

2) Déterminer la dérivée f ' de f. Etudier les variations de f. Montrer que $f(\beta) = 2 + \frac{1}{\beta}$.

3) Déterminer les coordonnées du point A, intersection de (C) et de la droite (D) d'équation y = 2.
Donner une équation de la tangente (T) à (C) en A. Tracer (T), (D) et (C).

Partie 3 : Etude d'une intégrale.

Pour tout t ≥ 1, on pose $I(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{1+x} dx$.

1) Calculer l'intégrale $J(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx$ où t ≥ 1.

2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $K(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$ où t ≥ 1.

Montrer que, pour tout t ≥ 1, on a : $0 \le K(t) \le 1$.

3) Montrer que, pour tout x ≥ 1, on a : $0 \le \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \le \frac{1}{x^2}$. En déduire que $0 \le J(t) - I(t) \le K(t)$.

4) Calculer $\lim_{t \to +\infty} \frac{I(t)}{(\ln t)^2}$.

Exercice 61 — BAC D – Etranger – 1990

70 minutes

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, où l'unité graphique est 2 cm.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$ si $x \neq 0$ et f(0) = 0. On appelle (C) la courbe de f.

1) Montrer que f est dérivable en 0. Etudier les variations de f et sa limite en +∞.
2) Montrer que pour tout réel x > -1, ln(1 + x) ≤ x.
En déduire la position de (C) et de sa tangente en O. Tracer la courbe (C).
3) On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ (On ne cherchera pas à calculer cette intégrale). Soit r un réel strictement positif fixé. Interpréter géométriquement le réel F(r).
Montrer que F(r) et F(-r) sont les aires de domaines isométriques du plan. En déduire la parité de F.
Déterminer les variations de F sur $\mathbb{R}$.

4)a) En utilisant la position de (C) par rapport à sa tangente en O, montrer que $0 \le F(1) \le \frac{1}{2}$.

b) Montrer que pour tout réel t supérieur ou égal à 1, on a : $\frac{\ln(t^2)}{t} \le \frac{\ln(t^2+1)}{t} \le \frac{\ln(2t^2)}{t}$.

Scanned by CamScanner

c) Soit x un réel, $x \geq 1$. Calculer $\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$.

En déduire les limites de F(x) et de $\frac{F(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5) Donner l'allure de la courbe de F en prenant 0,4 pour valeur approchée de F(1).

Exercice 62

40 minutes

On considère les intégrales : $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$ et $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx$ où n est un entier naturel non nul.

a) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x dx$. En déduire $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n.

b) Calculer I_1. En déduire I_3 et I_5.

c) Soit la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ par : $f(x) = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

Prouver que f est une primitive sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ de la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{\cos x}$. En déduire I_5, puis I_2 et I_4.

Exercice 63 — BAC D – Lille – 1991

90 minutes

Le but du problème est de montrer que le nombre e n'est pas rationnel.

A) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x}$.

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Unité graphique : 4 cm.

1) Etudier les variations de f ; on précisera les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Construire la courbe (C) dans le plan P.

3) Utiliser une intégration par parties pour calculer : $I_1 = \int_0^1 f(x) dx$.

Quelle est l'interprétation géométrique de I_1 ?

B) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

1)a) Montrer que $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n$ pour tout x appartenant à [0, 1].

b) Exprimer en fonction de l'entier n, $J_n = \int_0^1 x^n dx$.

c) Déduire des questions a) et b) que l'on a $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

2) Utiliser une intégration par parties pour montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

3) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $k_n = n!e - I_n$.

a) Exprimer k_{n+1} à l'aide de k_n.

b) Calculer k_1 (on pourra utiliser A)3)).

En déduire, en procédant par récurrence sur n, que k_n est un nombre entier naturel non nul.

c) Utiliser 3)b) et 1)c) pour montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, le nombre $n!e = k_n + I_n$ n'est pas un entier.

4) a) Soit p et q deux nombres entiers strictement positifs.

Montrer que, pour $n \geq q$, le nombre $\frac{n!p}{q}$ est un nombre entier.

b) En déduire, à l'aide de 3)c) et 4)a) que e n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 64

25 minutes

a) Soit la fonction f définie sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ par : $f(x) = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$. Calculer f '(x).

Scanned by CamScanner

b) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur exacte du réel : $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos^2 t.\sin t}$.

Exercice 65 — Extrait d'un BAC D français — 40 minutes

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, où l'unité graphique est 1 cm.

La courbe (C) représente la fonction f définie par $f(x) = \sin^2 x$, x étant élément de l'intervalle $[0, \pi]$.

Le domaine Δ est l'ensemble des points M(x, y) du plan, tels que : $0 \le x \le \pi$ et $0 \le y \le f(x)$.

1) Calculer l'aire, en cm², du domaine Δ.

2) Linéariser $\sin^4 x$ et en déduire $\int_0^{\pi} \sin^4 x dx$.

3)a) Le nombre x étant élément de l'intervalle $[0 , \pi]$, on considère les points A et B d'abscisse x, A appartenant à l'axe des abscisses et B à la courbe (C).

Le segment [AB] pivotant autour de l'axe $(O ; \vec{i})$ engendre un disque dans l'espace.

Exprimer l'aire en cm² de ce disque en fonction de x.

b) En déduire le volume en cm³ du solide obtenu par rotation de la courbe (C) autour de l'axe des abscisses.

Exercice 66 — 60 minutes

Soit $n > 0$, un entier, on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} dx$ et $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} dx$ (qu'on ne cherchera pas à calculer).

a) Calculer $I_0 + 2I_1$, en déduire I_1 en fonction de I_0.

b) Vérifier que $I_0 + I_1 + I_2 = 1$, en déduire I_2 en fonction de I_0.

c) Montrer que la suite $(I_n)_{n \ge 0}$ est décroissante et convergente.

d) Montrer que pour tout entier $n \ge 0$, on a : $\frac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{n+1}$. Quelle est la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$?

e) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour n de $\mathbb{N}$, on a :

$$I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} x^{n+1} dx$$

f) En observant que $\frac{1}{9} \le \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} \le 3$ sur $[0, 1]$, en déduire que : $1 + \frac{1}{3(n+2)} \le 3(n+1)I_n \le 1 + \frac{9}{n+2}$.

g) Calculer $\lim_{n \to +\infty} 3nI_n$.

Exercice 67 — BAC C – Groupe III (France) – 1994 — 90 minutes

Partie A

Soit la fonction f définie sur $I =]-1 , +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$.

On note (C) la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O (unité graphique 4 cm).

1) Etudier les variations de f et déterminer ses limites aux bornes de I.

En déduire que (C) admet une droite asymptote Δ que l'on précisera.

2)a) Ecrire une équation de la tangente à (C) en un point M de (C) d'abscisse a. On note T_a cette tangente.

b) Montrer qu'il existe deux valeurs de a pour lesquelles la droite T_a passe par l'origine O.

3) Tracer la courbe (C). On mettra en évidence la droite (Δ) et les deux tangentes trouvées ci-dessus.

4) On pose, pour x dans I, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. La fonction F est-elle monotone ? Est-elle positive ?

Partie B

On pose $J = \int_0^1 \frac{e^t}{1+t} dt$. L'objet de cette partie est d'encadrer l'intégrale J.

Scanned by CamScanner

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de J

1) En utilisant l'étude de la fonction f réalisée dans la PARTIE A, montrer que : $I \leq J \leq \frac{e}{2}$

2) On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = (-1)^n \int_0^1 t^n e^t \, dt$.

a) Calculer u_0.

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $u_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1)u_n$.

c) Calculer alors successivement $u_1, u_2, \ldots, u_5$. On donnera les réponses sous la forme ae – b, avec a et b entiers naturels.

3)a) Montrer que : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \int_0^1 e^t \frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t} dt$.

b) En déduire que : $J = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + R_n$ où $R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f(t) dt$.

c) Prouver que : $\frac{1}{n+1} \leq |R_n| \leq \frac{e}{2(n+2)}$.

4)a) Trouver le plus petit entier naturel n tel que : $\frac{e}{2(n+2)} - \frac{1}{n+2} < 0{,}05$.

b) Calculer $S_5 = u_0 + u_1 + \ldots + u_5$ sous la forme ae – b, avec a et b entiers naturels.

c) Prouver que $S_5 - \frac{e}{16} \leq J \leq S_5 - \frac{1}{8}$.

d) Déduire de ce qui précède un encadrement de J, d'amplitude inférieure à 0,05, par deux nombres décimaux.

Exercice 68 — 60 minutes

Soit f la fonction définie sur [0 , 2[par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

1) Soit F_0 la fonction définie sur [0 , 2[par : $F_0(x) = \int_0^x f(t) dt$. Calculer $F_0(x)$.

Démontrer que F_0 possède un prolongement par continuité au point 2.

2) Pour tout entier naturel n, on considère la fonction F_n définie sur [0 , 2[par : $F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{4-t^2}} dt$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$F_{n+1}(x) = -x^{2n+2}\sqrt{4-x^2} + 2(n+1)\int_0^x t^{2n+1}\sqrt{4-t^2}\, dt.$$

En déduire que $(2n+3)F_{n+1}(x) = 8(n+1)F_n(x) - x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}$.

b) En raisonnant par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, F_n a une limite finie u_n lorsque x tend vers 2.

Vérifier que $u_n = 2\frac{16^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.

Exercice 69 (Fonction non continue n'admettant pas de primitive) — 20 minutes

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 70 (Fonction non continue admettant une primitive) — 20 minutes

Montrer que $F : x \to \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0. \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction non continue.

Scanned by CamScanner

Exercice 71

15 minutes

Supposons que la vitesse v d'un point mobile soit une fonction continue du temps t. Montrer que la valeur moyenne de la fonction v sur $[t_0, t_1]$ est la vitesse moyenne du point sur l'intervalle $[t_0, t_1]$.

Exercice 72 Concours d'entrée à l'ENSP de Yaoundé – Cameroun – 2007

30 minutes

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nt}\sin t\,dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nt}\cos t\,dt$.

1) Calculer I_0 et J_0.

2) Soit n entier naturel non nul :

a) En intégrant par parties, montrer que I_n et J_n vérifient le système : $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$.

b) En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n.

3) Calculer les limites des suites I_n et J_n.

Exercice 73 BAC C – Tunisie – 2001

120 minutes

Partie I

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1)a) Etudier les variations de la fonction f.

En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $0 < f(x) \leq 1$.

b) Tracer la courbe (C).

2) On considère la fonction g définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = \ln(\tan x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer g'(x) pour x dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que g admet une fonction réciproque h définie sur $\mathbb{R}$. Calculer h(0).

c) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour réel x, $2h'(x) = f(x)$.

En déduire pour réel x, $\int_0^x f(t)\,dt = 2h(x) - \frac{\pi}{2}$.

Partie II

Soit n un entier naturel non nul et F_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F_n(x) = \int_0^x f^n(t)\,dt$.

1)a) Calculer $F_1(x)$ en fonction de h(x) et montrer que $\lim_{x \to +\infty} F_1(x) = \frac{\pi}{2}$.

b) Soit K la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $K(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$.

Montrer que K'(t) = F(t).

Calculer $F_2(x)$ et montrer que $\lim_{x \to +\infty} F_2(x) = 1$.

2)a) Montrer que l'image de l'intervalle $[0, +\infty[$ par F_n est l'intervalle $\left]0, \lim_{x \to +\infty} F_n(x)\right[$.

b) Vérifier pour tout réel t positif ou nul, on a $f(t) < 2e^{-t}$.

En déduire, en utilisant I)1)a) que pour x de $[0, +\infty[$, on a $F_n(x) \leq 2$ et que $\lim_{x \to +\infty} F_n(x)$ est finie.

c) Vérifier que pour tout réel t positif ou nul, on a $f(t) \geq e^{-t}$.

Scanned by CamScanner

Montrer alors que, pour tout réel x positif, on a $\frac{1-e^{-x}}{n} \leq F_n(x)$

Et déduire que $\lim_{+\infty} F_n(x)$ est non nulle

3) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \lim_{+\infty} F_n(x)$

a) Donner la valeur de u_1 et u_2.

b) En remarque que $4 - (e^t + e^{-t})^2 = -(e^t - e^{-t})^2$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0, +\infty[$, on a

$f^{n-1}(t)f'(t)K(t) = f^{n+2}(t) - f^n(t)$

c) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $[0, +\infty[$, on a

$\int_0^x f^{n-1}(t)f'(t)K(t)dt = \frac{1}{n}K(x)f^n(x) - \frac{1}{n}\int_0^x f^{n+2}(t)dt$.

d) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $[0, +\infty[$, on a : $(n+1)F_{n+2}(x) - nF_n(x) = K(x)f^n(x)$.

Montrer alors que $u_{n+2} = \frac{n}{n+1}u_n$.

4)a) Soit n un entier naturel. Déterminer en fonction de n, les deux termes u_{2n+1} et u_{2n+2}.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} \leq 1$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}$.

d) Montrer alors que $\lim_{n\to+\infty} \left| \left(\frac{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}{3\times5\times7\times\ldots\times(2n-1)} \right)^2 \times \frac{2}{2n+1} \right| = \pi$.

Exercice 74 — BAC C – Cameroun – 2011 — 110 minutes

On considère la famille de fonctions f_λ définies par $f_\lambda(x) = 1 + \ln(1 + \lambda x)$, où λ est un réel non nul ; ln désigne le logarithme népérien, (C_λ) la courbe de f_λ et (D) la droite d'équation $y = x$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : *Recherche des points d'intersection de (C_λ) et (D)*

1) Déterminer l'ensemble de définition de f_λ.
On pose $\varphi_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x$.

2) On suppose $\lambda < 0$. Etudier les variations de φ_λ et dresser son tableau de variations.
En déduire le nombre de points d'intersection de (C_λ) et (D).

3)a) On suppose $\lambda > 0$. Etudier les variations de φ_λ et dresser son tableau de variations.

Etablir que la plus grande valeur prise par φ_λ quand x décrit l'ensemble de définition est $m(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + \ln\lambda$.

b) Etudier les variations de m sur $]0, +\infty[$; en déduire le signe de $m(\lambda)$.

c) Déterminer le nombre de points communs à (C_λ) et (D) lorsque λ est strictement positif.

Partie B : *Etude du cas particulier $\lambda = 1$.*

1)a) Soit (Γ) la courbe de la fonction logarithme népérien ; trouver une translation qui transforme (Γ) en (C_1).

b) Représenter graphiquement la courbe (C_1) et la droite (D). (On prendra pour unité 3 cm sur les axes)

2) On appelle P et Q les points d'intersection de (C_1) et (D) ; P est le point d'abscisse négative p et Q est le point d'abscisse positive q.
Démontrer que $2 < q < 3$.

3) Calculer en fonction de p et q l'aire en cm^2 du domaine compris entre (C_1) et (D) et les droites d'équations $x = p$ et $x = q$.

On pourra utiliser une intégration par parties.

Scanned by CamScanner

Partie C : *Valeur approchée de q.*

On se propose de calculer une valeur approchée de q ; on définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f_1(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} \end{cases}$

a) Représenter à l'aide de la courbe (C_1) les termes u_1 et u_2 sur $(O ; \vec{i})$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par q.

c) Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que $q - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(q - u_n)$ pour tout entier naturel n.

d) En déduire que pour tout entier naturel n, $q - u_n \leq \frac{1}{3^n}(q - u_0)$ et que la suite (u_n) converge vers q.

e) Déterminer une valeur approchée u_k de q à 10^{-2} près en utilisant la suite (u_n).

Exercice 75 — ENSP – Cameroun – 2005 — 90 minutes

1) Montrer que la restriction de la tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ admet une bijection réciproque définie sur $\mathbb{R}$: c'est la fonction arctangente. On la note arctan.

2) Justifier que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer arctan'x.

3) Déterminer un prolongement par continuité en 0 de la fonction φ définie par $\varphi(x) = \frac{\arctan x}{x}$.

4) Calculer arctan"0, arctan"'(0), où arctan" et arctan"' désignent respectivement les dérivées seconde et troisième de arctan.

5) Soit $x \geq 0$, montrer que : $0 \leq x - \arctan x \leq \frac{x^3}{3}$.

On pose, pour $x > 0$, $1 - f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{t - \arctan t}{t} dt$.

6) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{9}$.

7) Déterminer un prolongement par continuité en 0 à droite de la fonction f.
Quelle est la pente de la tangente à la courbe de f en ce point ?

8) Montrer que si $x \geq 1$, alors on a $\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt \leq \frac{\pi}{2} \ln x$.

9) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

10) On pose $g(x) = x^2 f'(x)$ pour tout $x > 0$. Montrer que $g(x) = -\int_0^x \frac{\arctan t}{t} dt + \arctan x$.

11) On pose $h(x) = xg'(x)$. Calculer $h'(x)$.

12) Etudier les sens de variation de h et de g sur $]0, +\infty[$. En déduire le sens variation de f sur $]0, +\infty[$.
Dresser le tableau de variations de f. Donner l'allure de la courbe de f.

Scanned by CamScanner

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER – SOLUTIONS

Solution 47

1) Soit x un nombre réel, $\sin^6 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^6 = -\frac{1}{32}\cos 6x + \frac{3}{16}\cos 4x - \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{5}{16}$.

2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^x (\sin^5 t)(\cos t)dt\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{6}\sin^6 t\right]_0^x dx = \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^6 x\,dx$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{32}\cos 6x + \frac{3}{16}\cos 4x - \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{5}{16}\right)dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[-\frac{1}{192}\sin 6x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{15}{64}\sin 2x + \frac{5}{16}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{192} - \frac{15}{64} + \frac{5\pi}{64}\right)$$

$$= \frac{15\pi - 44}{1152}$$

Solution 48

1) f_n est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, car sa restriction à cet intervalle est un quotient de fonctions continues sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et sinx ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

De plus $\lim\limits_{n \to 0} f_n(x) = \lim\limits_{n \to 0}(2n+1)\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)x} \times \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 2n+1$.

$\lim\limits_{n \to 0} f_n(x) = f_n(0)$, d'où f_n est continue en 0, et par conséquent sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) • Soit n entier naturel non nul et x dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} = \frac{\sin[(2n-1)x+2x]}{\sin x} = \frac{\sin((2n-1)x)\cos 2x + \cos((2n-1)x)\sin 2x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin((2n-1)x)(1-2\sin^2 x) + 2\cos((2n-1)x)\sin x\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} - 2\sin((2n-1)x)\sin x + 2\cos((2n-1)x)\cos x$$

$$= \frac{\sin((2n-1)x)}{\sin x} + 2\cos(2nx)$$

En intégrant dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2nx)dx = I_{n-1} - 2\left[\frac{1}{2n}\sin(2nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = I_{n-1}.$$

D'où, pour tout entier naturel non nul n, on a $I_n = I_{n-1}$.

• D'où (I_n) est une suite constante. Et par conséquent, $I_n = I_1$ pour tout entier naturel n.

Scanned by CamScanner

Or $\sin 3x = \sin 2x\cos x + \sin x\cos 2x = 2\sin x\cos^2 x + \sin x\cos 2x = \sin x(1 + \cos 2x) + \sin x\cos 2x = \sin x(1 + 2\cos 2x)$.

Alors, $I_n - I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2x) dx = \left[x + \sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$.

Solution 49

1) • Posons $u(t) = \cos(\ln t)$; $u'(t) = -\frac{1}{t}\sin(\ln t)$ et $v'(t) = 1$; $v(t) = t$.

En utilisant la formule d'intégration par parties, on a : $F(x) = \left[t\cos(\ln t)\right]_1^x + \int_1^x \sin(\ln t) dt = x\cos(\ln x) - 1 + G(x)$.

D'où $F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x)$

• Posons $u(t) = \sin(\ln t)$; $u'(t) = \frac{1}{t}\cos(\ln t)$ et $v'(t) = 1$; $v(t) = t$.

En utilisant la formule d'intégration par parties, on a $G(x) = x\sin(\ln x) - F(x)$.

2) On déduit de la question 1) que : $\begin{cases} F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x) \\ G(x) = x\sin(\ln x) - F(x) \end{cases}$

D'où $F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + x\sin(\ln x) - F(x)$.

D'où : $F(x) = \frac{1}{2}x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) - \frac{1}{2}$ et $G(x) = \frac{1}{2}x(3\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + \frac{1}{2}$.

Solution 50

Posons $u(t) = \frac{1}{t}$, $u'(t) = -\frac{1}{t^2}$, $v'(t) = \frac{1}{t^2}\cos\frac{1}{t}$ et $v(t) = -\sin\frac{1}{t}$.

En intégrant par parties entre $\frac{1}{\pi}$ et un réel $x > 0$, on a :

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^x \frac{1}{t^3}\cos\frac{1}{t} dt = \left[-\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{\pi}}^x - \int_{\frac{1}{\pi}}^x \frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t} dt = -\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} - \left[\cos\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{\pi}}^x = -\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x} + 1.$$

D'où une primitive sur $]0, +\infty[$ de $x \mapsto \frac{1}{x^3}\cos\frac{1}{x}$ est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x} + 1$.

Solution 51

1) • $u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \left[x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$.

• $u_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left[-\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\ln 2}{2}$.

2)• Soit n un entier naturel, on a :

$$u_n + u_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((\tan x)^n + (\tan x)^{n+2}) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n (1 + (\tan x)^2) dx = \left[\frac{1}{n+1}(\tan x)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}.$$

D'où $u_n + u_{n+2} = \frac{1}{n+1}$;

• Pour tout réel x dans $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a $0 \le \tan x \le 1$. Donc $0 \le \tan^n x \le 1$, pour tout entier naturel n.

En intégrant dans $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $0 \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$, d'où $0 \le u_n$.

Scanned by CamScanner

D'où pour tout entier naturel n, on a $0 \le u_n \le u_n + u_{2n} \le \frac{1}{n+1}$.

- Puisque $0 \le u_n \le \frac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, alors d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3) Considérons la proposition P_n : « $u_{2n} = (-1)^n \left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right|$ »

Pour n = 1 :

$(-1)^1 \left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right| = -\frac{\pi}{4} + 1$. Or $u_0 + u_2 = 1$, alors $u_2 = 1 - u_0 = 1 - \frac{\pi}{4}$. D'où P_1 est vraie.

Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel $n \neq 0$, c'est-à-dire $u_{2n} = (-1)^n \left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right|$.

Montrons alors que P_{n+1} vraie, c'est-à-dire $u_{2n+2} = (-1)^{n+1} \left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right|$.

D'après la question 2), $u_{2n} + u_{2n+2} = \frac{1}{2n+1}$.

$u_{2n+2} = -u_{2n} + \frac{1}{2n+1} = (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right) + \frac{1}{2n+1}$ d'après l'hypothèse de récurrence.

D'où,

$u_{2n+2} = (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right) + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} - \frac{(-1)^n}{2n+1} \right) = (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right)$.

D'où P_{n+1} est vraie.

D'où pour tout entier naturel non nul n, $u_{2n} = (-1)^n \left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right|$.

4) (u_{2n}) est une sous-suite de la suite (u_n). Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$.

$|u_{2n}| = \left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right|$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_{2n}| = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right| = \frac{\pi}{4}$.

Solution 52

1) $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx = \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}} dx = \left| -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} \right|_0^1 = \frac{2}{3}$.

A l'aide d'une intégration par parties, on a :

$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx = \int_0^1 x(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left| -\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}} \right|_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3}\left| -\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} \right|_0^1 = \frac{4}{15}$

2) Soit n entier naturel, $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\,dx = \int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{\frac{1}{2}} dx$.

Scanned by CamScanner

Posons $u(x) = x^{n+1}$, $u'(x) = (n+1)x^n$, $v'(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}$ et $v(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$.

En intégrant par parties, on a :

$$I_{n+1} = \left| -\frac{2}{3}x^{n+1}(1-x)\sqrt{1-x} \right|_0^1 + \frac{2(n+1)}{3}\int_0^1 x^n(1-x)\sqrt{1-x}\,dx = \frac{2(n+1)}{3}\left| \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx - \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\,dx \right|$$

$$= \frac{2(n+1)}{3}(I_n - I_{n+1})$$

D'où $3I_{n+1} = 2(n+1)I_n - 2(n+1)I_{n+1}$. C'est-à-dire $I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5}I_n$.

3) Soit P_n la proposition : « $I_n = \frac{2^{2n+2}(n+1)(n!)^2}{(2n+3)!}$ ».

Pour n = 0

$\frac{2^{2\times0+2}(0+1)(0!)^2}{(2\times0+3)!} = \frac{2}{3} = I_0$. D'où P_0 est vrai.

Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel n, on a alors $I_n = \frac{2^{2n+2}(n+1)(n!)^2}{(2n+3)!}$.

Montrons alors que P_{n+1} est aussi vraie, c'est-à-dire $I_{n+1} = \frac{2^{2n+4}(n+2)((n+1)!)^2}{(2n+5)!}$.

On a $I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5}I_n = \frac{2(n+1)}{2n+5} \times \frac{2^{2n+2}(n+1)(n!)^2}{(2n+3)!} = \frac{2^{2n+3}(n+1)^2(n!)^2}{(2n+5)(2n+3)!}$.

D'où $I_{n+1} = \frac{2^{2n+3}(2n+4)(n+1)!)^2}{(2n+3)!(2n+4)(2n+5)} = \frac{2^{2n+4}(n+2)((n+1)!)^2}{(2n+5)!}$. D'où P_{n+1} est aussi vraie.

Finalement, pour tout entier naturel n, $I_n = \frac{2^{2n+2}(n+1)(n!)^2}{(2n+3)!}$.

Solution 53

1) f est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = \frac{-1}{x^2(x+1)} < 0$. D'où f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

2) • Soit $a > 0$, posons $u(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$, $u'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$, $v'(x) = 1$ et $v(x) = x$.

En intégrant par parties, on a :

$$\int_1^a \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx = \left[x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^a - \int_1^a \frac{dx}{x+1} = a\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln 2 - \left[\ln(x+1)\right]_1^a = a\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) - \ln(a+1) + \ln 4$$

$$= a\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln\left(\frac{4}{a+1}\right)$$

D'où $\int_1^a \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx = a\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln\left(\frac{4}{a+1}\right)$.

• $\int_1^a f(x)\,dx = \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_1^a \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx = \left[\ln x\right]_1^a + a\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln\left(\frac{4}{a+1}\right) = \ln a + a\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln\left(\frac{4}{a+1}\right)$.

Scanned by CamScanner

D'où $\int_1^a f(x)\,dx = a\ln\left(\frac{a}{a+1}\right)+\ln\left(\frac{4a}{a+1}\right)$.

3) • Soit k entier naturel non nul, on a : $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)}$.

• Soit k entier naturel non nul,

$\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}=\left[\ln x\right]_k^{k+1}=\ln(k+1)-\ln k=-\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$. Or $\frac{1}{k}-f(k)=\frac{1}{k}-\frac{1}{k}-\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)=-\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$.

D'où pour tout k entier naturel non nul, on a : $\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}=\frac{1}{k}-f(k)$.

• Soit k entier naturel non nul et x appartenant à [k , k + 1], on a : $\frac{1}{k+1}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{k}$.

En appliquant l'inégalité de la moyenne à la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ dans [k , k + 1], on aura :

$\frac{1}{k+1}((k+1)-k)\le\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}\le\frac{1}{k}((k+1)-k)$. C'est-à-dire $\frac{1}{k+1}\le\frac{1}{k}-f(k)\le\frac{1}{k}$.

D'où $\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\le-f(k)\le 0$. Et finalement, on a : $0\le f(k)\le\frac{1}{k(k+1)}$.

4) • Soit n entier naturel non nul, d'après la question 3), on a :

$S_n=\sum_{k=n}^{2n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}+\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n+1}$.

Donc $S_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n+1}$.

• $\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n+1}\right)=0$. D'où (S_n) converge vers 0.

5) • A la question 3), on a montré que $0\le f(k)\le\frac{1}{k(k+1)}$ pour k entier naturel non nul.

D'où, soit n entier naturel non nul, on a : $0\le\sum_{k=n}^{2n}f(k)\le\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k(k+1)}$. C'est-à-dire $0\le\sum_{k=n}^{2n}f(k)\le S_n$.

• D'après la question 4), on a : $\lim_{n\to+\infty}S_n=0$.

D'où, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n}f(k)=0$.

6) • Soit n entier naturel non nul; et k appartenant à {0, 1, 2, . . ., n}, $f(k)=\frac{1}{k}+\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$.

Et, $\sum_{k=n}^{2n}f(k)=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}+\sum_{k=n}^{2n}\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)=U_n+\ln\left(\frac{n}{n+1}\times\frac{n+1}{n+2}\times\ldots\times\frac{2n}{2n+1}\right)=U_n+\ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)$.

D'où $\sum_{k=n}^{2n}f(k)=U_n+\ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)$.

• D'après la question 5), $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n}f(k)=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)=-\ln 2$.

D'où $\lim_{n\to+\infty}u_n-\ln 2=0$. Donc $\lim_{n\to+\infty}u_n=\ln 2$. La suite (U_n) est alors convergente vers ln2.

Scanned by CamScanner

Solution 54

A)1)a) f est définie sur $]0,+\infty[$

- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left(\frac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln x\right) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right) = 0$.

b)• f est une somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$, d'où f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x+1)^2}.$$

• Pour tout réel $x > 0$, on a $f'(x) > 0$. D'où f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

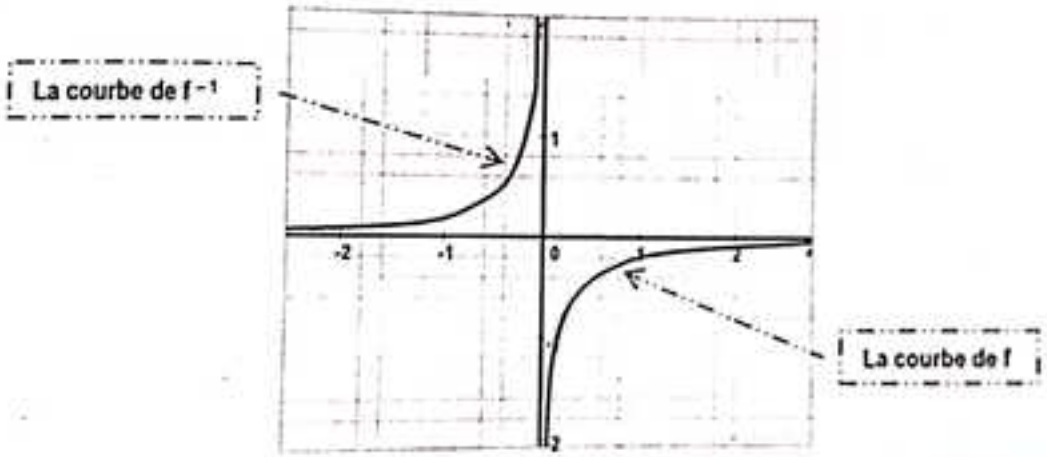
D'où le tableau de variation de f :

x	0		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$	↗	0

2)a) f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

D'où f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[) = \left]\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[=]-\infty, 0[$.

b) les courbes de f et f^{-1} :



c) Soit α dans $]0,1[$, la courbe de f étant en dessous de l'axe des abscisses, l'aire du domaine D est :

$$\text{Aire}(D) = -\int_\alpha^1 f(x)dx = -\int_\alpha^1 \frac{dx}{x+1} + \int_\alpha^1 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)dx.$$

Or $\int_\alpha^1 \frac{dx}{x+1} = [\ln(x+1)]_\alpha^1 = \ln 2 - \ln(1+\alpha)$. Et en intégrant par parties, on a :

$$\int_\alpha^1 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)dx = \left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]_\alpha^1 + \int_\alpha^1 \frac{dx}{x+1} = \ln 2 - \alpha\ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) + [\ln(x+1)]_\alpha^1 = 2\ln 2 - \ln(\alpha+1) - \alpha\ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right).$$

D'où $\text{Aire}(D) = \ln 2 - \alpha\ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)$ u.a.

Et comme 1 u.a. = 4 cm², alors $\text{Aire}(D) = 4\left|\ln 2 - \alpha\ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\right|$ cm².

d) $\lim\limits_{\alpha \xrightarrow{>} 0} \text{Aire}(D) = \lim\limits_{\alpha \xrightarrow{>} 0} 4(\ln 2 - \alpha\ln(\alpha+1) + \alpha\ln\alpha) = 4\ln 2$.

Scanned by CamScanner

B)1)a) $u_1 = 1 - \ln 1 = 1$ et $u_2 = 1 + \frac{1}{2} - \ln 2 = \frac{3}{2} - \ln 2$.

b) Soit n entier naturel non nul,

$$u_{n+1} - u_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) + \ln n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) + \ln n.$$

D'où $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = f(n)$. Or d'après le tableau de variation de f, on a $f < 0$.

D'où $U_{n+1} - U_n < 0$, et donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

2) a) Soit n entier naturel non nul,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}\right) + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} + \frac{1}{n}.$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln k) + \frac{1}{n} \quad \text{car } \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \ln(k+1) - \ln k$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \ln k + \sum_{k=1}^{n-1} \ln k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n-1} \ln k - \ln n + \ln 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \ln k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$$

$$= U_n$$

D'où $U_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}\right) + \frac{1}{n}$.

b) Soit k élément de {1, 2, . . ., n − 1}, pour tout t dans [k , k + 1], on a : $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} - \frac{1}{k} = \ln(k+1) - \ln k - \frac{1}{k}$.

Considérons la fonction φ définie par $\varphi(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x}$.

φ est définie sur]0 , +∞[.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \varphi(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\ln(x+1) - \frac{x \ln x + 1}{x}\right) = -\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) = 0$.

φ est une somme de fonctions dérivables sur]0 , +∞[, d'où φ est dérivable sur]0, +∞[, et pour tout x > 0,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)}.$$

- Pour tout réel x > 0, on a φ'(x) > 0. D'où φ est strictement croissante sur]0 , +∞[. D'où le tableau de variation de φ :

x	0	+∞
φ'(x)	+	
φ(x)	−∞ ↗	0

Scanned by CamScanner

Ainsi, pour tout $x > 0$, on a $\varphi(x) < 0$.

Comme $\varphi(k) \leq 0$, alors on a $\ln(k+1) - \ln k - \frac{1}{k} \leq 0$. C'est-à-dire $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} - \frac{1}{k} \leq 0$.

D'où pour tout k appartenant à $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, pour tout t dans $[k, k+1]$, on a : $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.

c) Soit k dans $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$, donc $\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \geq 0$. Par suite, $\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \right) + \frac{1}{n} \geq 0$.

D'où pour tout entier naturel non nul n, on a $U_n \geq 0$.
Donc (U_n) est minorée par 0. Puisque (U_n) est décroissante et minorée, alors (U_n) est convergente.

Solution 55

a) En intégrant par parties $\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos 2t dt$, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos 2t \ dt = \left| \frac{1}{2} e^{-2t} \sin 2t \right|_0^{\frac{\pi}{8}} + \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \sin 2t dt = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \sin 2t dt .$$

D'où $\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos 2t \ dt = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \sin 2t dt$. (1)

En intégrant par parties $\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \sin 2t dt$, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \sin 2t dt = \left| -\frac{1}{2} e^{-2t} \cos 2t \right|_0^{\frac{\pi}{8}} - \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos 2t dt = -\frac{\sqrt{2}}{4} e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos 2t dt . \quad (2)$$

En remplaçant $\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \sin 2t dt$ par sa valeur dans l'égalité (1), on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos 2t dt = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-\frac{\pi}{4}} - \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos 2t dt .$$

C'est-à-dire $\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos 2t dt = \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos 2t dt$. Et par conséquent, $\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos 2t dt = \frac{1}{4}$.

b) • $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos^2 t dt + \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} dt$.

D'où $I + J = \left| -\frac{1}{2} e^{-2t} \right|_0^{\frac{\pi}{8}} = -\frac{1}{2} (e^{-\frac{\pi}{4}} - 1)$.

• $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos^2 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} (\cos^2 t - \sin^2 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos 2t dt = \frac{1}{4}$ (d'après a))

• Puisque $I + J = -\frac{1}{2} (e^{-\frac{\pi}{4}} - 1)$ et $I - J = \frac{1}{4}$, alors $I = -\frac{1}{8} (2e^{-\frac{\pi}{4}} - 3)$ et $J = -\frac{1}{8} (2e^{-\frac{\pi}{4}} - 1)$.

Solution 56

1)a) g est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a $g'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x}$.

Pour tout $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $2x^2 - 1$.

Scanned by CamScanner

On a alors le tableau de variation qui suit :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
g'(x)	‖ -	0	+
g(x)	‖ ↘	$\frac{3+\ln 2}{2}$	↗

b) $g\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\frac{3+\ln 2}{2}>0$. Or g est minorée par $\frac{3+\ln 2}{2}$, alors pour tout $x>0$, on a $g(x)>0$.

2)a) • $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) • f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x>0$, $f'(x)=1+\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2+1-\ln x}{x^2}$.

• On remarque que, pour tout $x>0$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

Puisque $x^2>0$, pour tout $x>0$, alors $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

• D'où $f'>0$, et par conséquent, f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

D'où le tableau de variation de f qui suit :

x	0	$+\infty$
f'(x)	‖ +	
f(x)	‖ -∞ ↗	$+\infty$

c) • $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

D'où la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote oblique à la courbe (C) de f en $+\infty$.

• Soit $x>0$, $f(x)-x=\frac{\ln x}{x}$.

Dans $]0,1[$, on a $\frac{\ln x}{x}<0$, donc la courbe (C) est en dessous de son asymptote oblique (Δ) dans $]0,1[$.

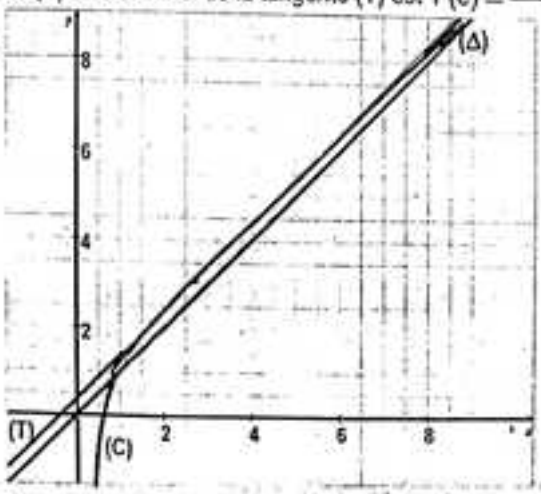
Dans $]1,+\infty[$, on a $\frac{\ln x}{x}>0$, donc la courbe de (C) y est au-dessus de son asymptote oblique (Δ).

• $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=-\infty$, d'où la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à (C).

d) Le coefficient directeur de la droite (Δ) est 1 et celui de la tangente (T) est $f'(e)=\frac{e^2+1-\ln e}{e^2}=1$.

Les droites (Δ) et (T) ont le même coefficient directeur, donc elles sont parallèles.

e) *Tracés de (C), (T) et (Δ) :*



Scanned by CamScanner

f) • $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx = \left|\frac{1}{2}\ln^2 x\right|_1^e = \frac{1}{2}$. D'où $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}$.

• La courbe (C) est au-dessus de la droite (Δ), donc l'aire $A = \int_1^e (f(x) - x)dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}$ u.a.

Or 1 u.a. = 4 cm², d'où $A = \frac{1}{2} \times 4\ cm^2 = 2\ cm^2$.

B)1) En intégrant par parties, on a: $\int_1^e \ln x dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e dx = e - [x]_1^e = e - (e-1) = 1$.

2) H est une somme de fonctions dérivables sur]0 , +∞[, d'où H est dérivable sur]0 , +∞[, et pour tout x > 0,

$H'(x) = -\frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2} - 2\frac{1-\ln x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{\ln^2 x}{x^2}$. D'où pour tout x > 0, H'(x) = h(x).

Finalement, H est une primitive de h sur]0 , +∞[.

3) $V = \int_1^e \pi[f(x)]^2 dx = \int_1^e \pi\left(x + \frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = \pi\left|\int_1^e x^2 dx + 2\int_1^e \ln x dx + \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}dx\right| = \pi\left|\frac{e^3-1}{3} + 2 + [H(x)]_1^e\right|$

Finalement, $V = \pi\left(\frac{e^3}{3} - \frac{5}{e} + \frac{11}{3}\right)$ u.v.. Or 1 u.v. = 8 cm³, alors $V = 8\pi\left(\frac{e^3}{3} - \frac{5}{e} + \frac{11}{3}\right) cm^3$.

Solution 57

A)1) f_1 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x,

$f_1'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{x+1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. Le signe de $f_1'(x)$ est donc celui de x + 1.

D' où f est strictement décroissante dans]-∞, -1] et strictement croissante dans [-1 , +∞[. De plus :

$\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) = 2$.

D'où le tableau de variation de f_1 :

x	−∞	−1	+∞
$f_1'(x)$		− 0 +	
$f_1(x)$	0	↘ $1-\sqrt{2}$ ↗	2

$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 2$, d'où (C_1) admet deux asymptotes horizontales d'équations y = 0 et y = 2.

2)a) f_2 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x,

$f_2'(x) = \frac{2x\sqrt{1+x^2} - \frac{x(x^2-1)}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{x(x^2+3)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. Le signe de $f_2'(x)$ est donc celui de x.

D' où f est strictement décroissante dans]- ∞, 0] et strictement croissante dans [0 , +∞[.

De plus : $\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) = +\infty$

Scanned by CamScanner

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)=+\infty$. D'où le tableau de variation de f_2 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

b) Soit $x > 0$,

$$f_2(x)-(x+1)=\frac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}-x=\frac{(x^2-1)-x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{((x^2-1)-x\sqrt{1+x^2})((x^2-1)+x\sqrt{1+x^2})}{((x^2-1)+x\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\frac{(x^2-1)^2-x^2(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}(x^2-1+x\sqrt{1+x^2})}.$$

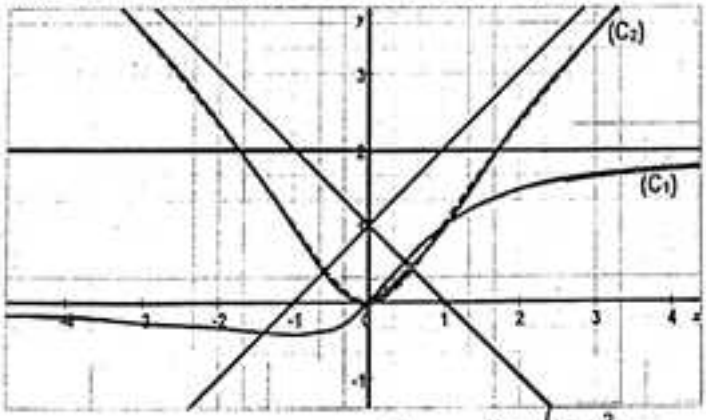
Ainsi, $f_2(x)-(x+1)=\dfrac{(x^2-1)^2-x^2(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}(x^2-1+x\sqrt{1+x^2})}=\dfrac{1-3x^2}{x^3\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\left(1-\frac{1}{x^2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)}=\dfrac{-3+\frac{1}{x^2}}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\left(1-\frac{1}{x^2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)}$

Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_2(x)-(x+1))=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-3+\frac{1}{x^2}}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\left(1-\frac{1}{x^2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)}\right)=0$.

D'où (C_2) admet la droite d'équation $y = x + 1$ comme asymptote oblique en $+\infty$.
Remarquons que la fonction f_2 est paire, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

c) Soit x un nombre réel, $f_2(x)-f_1(x)=\dfrac{x^2-x}{\sqrt{1+x^2}}$.

D'où le signe de $f_2(x) - f_1(x)$ est celui de $x^2 - x$. Ainsi :
Dans $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$, on a $f_2(x) - f_1(x) \geq 0$, et donc (C_1) est en dessous de (C_2) dans $]-\infty, 0[$ et dans $]1, +\infty[$.
Dans $[0, 1]$, on a $f_2(x) - f_1(x) \leq 0$, et donc (C_1) est au-dessus de (C_2) dans $[0, 1]$.



B)1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

D'où f est une primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Scanned by CamScanner

D'où $K=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]_0^1=\ln(1+\sqrt{2})$.

Il en résulte que $K=\ln(1+\sqrt{2})$.

2) Posons $u(x)=x$, $u'(x)=1$, $v'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et $v(x)=\sqrt{1+x^2}$.

En intégrant par parties, on a : $J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=\left[x\sqrt{1+x^2}\right]_0^1-\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx=\sqrt{2}-I$. D'où $J=\sqrt{2}-I$.

3) • $J+K=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^1\left(\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx$.
D'où $J+K=I$.

• On a montré que : $K=\ln(1+\sqrt{2})$, $J=\sqrt{2}-I$ et $I=K+J$.

D'où $I=\sqrt{2}-I+\ln(1+\sqrt{2})$, c'est-à-dire $I=\frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{2}$, puis $J=\frac{\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})}{2}$.

4) • $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1=\sqrt{2}-1$.

• Dans l'intervalle [0 , 1], la courbe (C_1) est au-dessus de (C_2).
D'où l'aire de la région concernée (noircie dans le repère) est :

$$A=\int_0^1(f_1(x)-f_2(x))dx=\int_0^1\frac{x-x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx-\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sqrt{2}-1-\frac{\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})}{2}.$$

D'où cette aire est $A=\frac{\sqrt{2}-2+\ln(1+\sqrt{2})}{2}$ u.a..

Solution 58

1) La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x,

$$f'(x)=\frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=-\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

$f'(0)=0$, pour $x>0$, on a $f'(x)<0$ et pour $x<0$, on a $f'(x)>0$.
D'où f est strictement croissante dans $]-\infty,0]$ et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)=0$. On résume ces résultats dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	0	↗	1	↘	0

2) • f est continue sur $\mathbb{R}$, donc F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Et pour tout réel x, $F'(x)=f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

• f est strictement positive, donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) Pour tout réel x, d'une part, $(F(-x))'=-F'(-x)=-f(-x)=-f(x)$ (car f est paire). D'autre part, $(-F(x))'=-F'(x)=-f(x)$.
On remarque que, les fonctions $x\mapsto F(-x)$ et $x\mapsto -F(x)$ ont la même dérivée $-f$.
Elles sont donc des primitives de $-f$. Par conséquent, il existe un réel a tel que, pour tout réel x, $F(-x)=-F(x)+a$.
Or pour $x=0$, $F(-x)=-F(x)=0$. D'où $a=0$, et donc, pour tout réel x, $F(-x)=-F(x)$. Finalement, F est impaire.

Scanned by CamScanner

NB : On peut répondre à cette question en utilisant d'autres méthodes ; comme par exemple le changement de variable affine, la propriété sur l'intégrale d'une fonction par etc.

4) • Soit $x \geq 0$, soit t dans $[0, x]$, on a $1 + 2t + t^2 \geq 1 + t^2 > 0$, soit $(1 + t)^2 \geq 1 + t^2 > 0$.

D'où $1+t \geq \sqrt{1+t^2} > 0$. Donc $\frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. En intégrant dans $[0, x]$, on a $\int_0^x \frac{1}{1+t}dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$.

• Pour tout réel $x \geq 0$, on a : $\int_0^x \frac{1}{1+t}dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$. Ce qui signifie que $[\ln(t+1)]_0^x \leq F(x)$:

Donc $F(x) \geq \ln(1 + x)$. Comme de plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

5) • La fonction $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc d'après le théorème de la dérivée de la composée, la fonction $x \mapsto F(2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc G est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$).

• Pour tout réel x, on a $G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x)$. C'est-à-dire

$$G'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+x^2}} = \frac{(2\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+4x^2})(2\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+4x^2})}{\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+x^2}(2\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+4x^2})}$$

Après calculs, on obtient : $G'(x) = \frac{3}{\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+x^2}(2\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+4x^2})}$.

On remarque que, pour tout réel x, $G'(x) > 0$, d'où G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

6) • Soit $x > 0$, on a $0 < x^2 < 1 + x^2$, donc $0 < x < \sqrt{1+x^2}$. Et finalement, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{x}$.

• Pour tout $x > 0$, on a $x < 2x$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{x}$, donc en intégrant dans $[x, 2x]$, on a :

$\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt$, soit $F(2x) - F(x) \leq \ln 2x - \ln x$. D'où $G(x) \leq \ln 2$.

Solution 59

1) • Soit x élément de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, 2x appartient à $]0, 1[$. D'où $[x, 2x]$ est inclus dans $]0, 1[$.

Ainsi, puisque la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $]0, 1[$, alors elle l'est aussi sur $[x, 2x]$.

• De même, soit x élément de $]1, +\infty[$, 2x appartient à $]2, +\infty[$. D'où $[x, 2x]$ est inclus dans $]1, +\infty[$.

Et puisque la fonction u : $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $]1, +\infty[$, alors elle l'est aussi sur $[x, 2x]$.

D'où pour tout réel x dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[\cup]1, +\infty[$, u est continue sur $[x, 2x]$, et donc $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$ existe pour tout x dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[\cup]1, +\infty[$. Finalement, f est bel et bien définie.

2) • La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ étant continue sur $]0, 1[$, elle y admet des primitives.

Soit F une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ sur $]0, 1[$, $f(x) = F(2x) - F(x)$.

Or la fonction $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, à valeurs dans $]0, 1[$ et F étant une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ sur $]0, 1[$ est dérivable sur cet intervalle, alors, la fonction $x \mapsto F(2x)$ est dérivable sur $]0, 1[$.

Scanned by CamScanner

Finalement, f est une somme de deux fonctions dérivables sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$, donc f est dérivable sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$.

- Et pour tout x dans $\left]0,\frac{1}{2}\right[$, $f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = \frac{2}{\ln 2x} - \frac{1}{\ln x}$

De même, on montre que f est dérivable sur $]1,+\infty[$, et pour $x > 1$, $f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = \frac{2}{\ln 2x} - \frac{1}{\ln x}$.

D'où f est dérivable sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[\cup]1,+\infty[$, et $f'(x) = \frac{2}{\ln 2x} - \frac{1}{\ln x}$.

3) • La fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et pour tout x dans $\left]0,\frac{1}{2}\right[\cup]1,+\infty[$, on a :

$[x,2x] \subset]0,1[$ ou $[x,2x] \subset]1,+\infty[$.

Si $[x,2x] \subset]0,1[$, alors soit t dans $[x,2x]$, on a $\ln x \le \ln t \le \ln 2x < 0$. Donc $\frac{1}{\ln 2x} \le \frac{1}{\ln t} \le \frac{1}{\ln x}$.

Et en appliquant l'inégalité de la moyenne à la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ dans $[x,2x]$, on a :

$\frac{1}{\ln 2x}(2x-x) \le \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t} \le \frac{1}{\ln x}(2x-x)$. C'est-à-dire $\frac{x}{\ln 2x} \le f(x) \le \frac{x}{\ln x}$.

Si $[x,2x] \subset]1,+\infty[$, alors soit t dans $[x,2x]$, on a $0 < \ln x \le \ln t \le \ln 2x$. Donc $\frac{1}{\ln 2x} \le \frac{1}{\ln t} \le \frac{1}{\ln x}$.

Et en appliquant l'inégalité de la moyenne à la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ dans $[x,2x]$, on a

$\frac{1}{\ln 2x}(2x-x) \le \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t} \le \frac{1}{\ln x}(2x-x)$. C'est-à-dire $\frac{x}{\ln 2x} \le f(x) \le \frac{x}{\ln x}$.

On peut donc conclure que pour tout x élément de $\left]0,\frac{1}{2}\right[\cup]1,+\infty[$, on a : $\frac{x}{\ln 2x} \le f(x) \le \frac{x}{\ln x}$.

- De plus, $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x}{\ln 2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x}{\ln x} = 0$, alors d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.
- Puisque pour tout x dans $]1,+\infty[$, on a :

$\frac{x}{\ln 2x} \le f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln 2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\ln 2x} = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4) • φ est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout réel x dans $]0,1[$, $\varphi'(x) = \frac{-2x+1}{x}$.

On a alors le tableau de variation de φ qui suit :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\varphi'(x)$	+	0	-
$\varphi(x)$	$-\infty$	$1-\ln 2$	0

φ est continue et strictement croissante sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$, donc φ réalise une bijection de $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ sur

$\varphi\left(\left]0,\frac{1}{2}\right[\right) =]-\infty, 1-\ln 2[$.

Comme 0 appartient à $]-\infty, 1-\ln 2[$, alors l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\left]0,\frac{1}{2}\right[$.

- On remarque de plus que, pour tout $x \ge \alpha$, on a $\varphi(x) \ge 0$, d'où pour tout réel x dans $[\alpha, 1[$, on a :

Scanned by CamScanner

$2 - 2x + \ln x \geq 0$. C'est-à-dire pour x appartenant à $[\alpha , 1[$, on a : $\ln x \geq 2x - 2$.

- Si x appartient à $\left[\alpha , \frac{1}{2}\right[$, alors $[x , 2x] \subset [\alpha , 1[$.

Or pour tout x dans $[\alpha , 1[$, on a $2x - 2 \leq \ln x < 0$, alors pour tout réel t dans $[x , 2x]$, on a $2t - 2 \leq \ln t < 0$.

Donc $\frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{2t-2}$. « En intégrant l'inégalité » dans [x , 2x], on a $\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{2t-2}$.

C'est-à-dire $f(x) \leq \frac{1}{2}\int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}$ pour x dans $\left[\alpha , \frac{1}{2}\right[$.

- On a $\frac{1}{2}\int_x^{2x} \frac{dt}{t-1} = \frac{1}{2}\left[\ln|t-1|\right]_x^{2x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x-1}{x-1}\right|$.

Puisque d'après la question précédente on a $f(x) \leq \frac{1}{2}\int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}$ pour tout réel x dans $\left[\alpha , \frac{1}{2}\right[$, alors pour tout réel x dans $\left[\alpha , \frac{1}{2}\right[$, on a $f(x) \leq \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x-1}{x-1}\right|$.

Or $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x-1}{x-1}\right| = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = -\infty$.

5) • Puisque $t \geq 1$, alors on a $\ln t \geq 0$.
Considérons la fonction $g : t \mapsto \ln t - t + 1$, avec $t \geq 1$.

g est dérivable sur $[1 , +\infty[$ et pour tout $t \geq 1$, $g'(t) = \frac{1-t}{t} \leq 0$. D'où g est décroissante sur $[1 , +\infty[$.

Et pour tout $t \geq 1$, on a $g(t) \leq g(1)$. C'est-à-dire $g(t) \leq 0$. Ainsi pour tout $t \geq 1$, on a $\ln t \leq t - 1$.
Finalement, pour tout $t \geq 1$, on a $0 \leq \ln t \leq t - 1$.

- Puisque pour tout $t > 1$, on a $0 < \ln t \leq t - 1$, alors pour tout $t > 1$, on a $\frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln t}$.

Or on a $x > 1$, donc $2x > 2$. D'où $[x , 2x] \subset]1 , +\infty[$.

« En intégrant l'inégalité » $\frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln t}$ dans [x , 2x], on a $\int_x^{2x} \frac{dt}{t-1} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$. C'est-à-dire $\ln\left|\frac{2x-1}{x-1}\right| \leq f(x)$.

Puisque $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \ln\left|\frac{2x-1}{x-1}\right| = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = +\infty$.

6) f est dérivable sur $\left]0 , \frac{1}{2}\right[\cup]1 , +\infty[$, et $f'(x) = \frac{2}{\ln 2x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{\ln\frac{x}{2}}{\ln 2x \ln x}$.

Or on a $\ln\frac{x}{2} > 0$ si et seulement si $x > 2$.

$\ln x > 0$ si et seulement si $x > 1$

$\ln 2x > 0$ si et seulement si $x > \frac{1}{2}$.

D'où le tableau de signe de f '(x) ci-dessous :

x	0		1		2		$+\infty$
$\ln\frac{x}{2}$		-	‖	-	0	+	
$\ln x$		-	‖	+		+	
$\ln 2x$		-	‖	+		+	
f'(x)		-	‖	-	0	+	

Scanned by CamScanner

Du tableau de signe de f ', on déduit que :

f est décroissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et sur]1 , 2] et f est croissante sur [2 , +∞[.

Solution 60

Partie 1 :

1) g est définie sur]0 , +∞[.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (1+x) = 1$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln x = 0$, d'où $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = 1$.

Pour tout x > 0, on a g(x) = x(1 – lnx) + 1, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

2) g est définie, et dérivable sur]0 , +∞[, (produit, puis somme de fonctions continues et dérivables) sur]0 , +∞[.
Et pour tout x > 0, on a g'(x) = -lnx. ***(le lecteur fera les calculs)***
Si x appartient à]0 , 1[, alors on a g'(x) > 0. Si x appartient à]1 , +∞[, alors on a g'(x) < 0 et g'(1) = 0.
Donc g est strictement croissante sur]0 , 1] et strictement décroissante sur [1 , +∞[.

3) • g est continue et strictement croissante sur]0 , 1], donc $g(]0,1]) = \left]\lim\limits_{x \to 0} g(x), g(1)\right] =]1, 2]$.

Ainsi, pour tout x dans]0 , 1], on a g(x) > 0. Par conséquent, l'équation g(x) = 0 n'a pas de solution dans] 0, 1].
Par contre g est continue et strictement décroissante sur [1 , +∞[, donc g induit une bijection de [1 , +∞[sur

$\left]\lim\limits_{x \to +\infty} g(x), g(1)\right] =]-\infty, 2]$. Or 0 est dans]-∞ , 2], alors il existe un seul réel β de [1 , +∞[tel que g(β) = 0.

D'où l'équation g(x) = 0 admet une unique solution β dans]0 , +∞[.

- On sait que pour tout x dans]0 , 1], on a g(x) > 0.

Si 1 ≤ x < β, alors g(β) < g(x) (car g est strictement décroissante sur [1 , +∞[), soit g(x) > 0.
Si β < x, alors g(x) < g(β), soit g(x) < 0.
Finalement, si x appartient à]0 , β[, alors g(x) > 0, si x appartient à]β , +∞[, alors g(x) < 0 et g(β) = 0.

- En utilisant la calculatrice, on a que g(3,5) ≈ 0,11 et g(3,6) ≈ -0,011, donc g(3,5)g(3,6) < 0. D'où 3,5 < β < 3,6.

Partie 2

1) f est définie sur]0 , +∞[.

- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x+1} = 1$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$.
- Pour tout x > 0, $\frac{\ln x}{x+1} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation x = 0 est asymptote verticale à (C).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, donc la droite d'équation y = 2 est asymptote horizontale à la courbe (C) en +∞.

2) • f est dérivable sur]0 , +∞[, car quotient puis somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et dont le dénominateur ne s'annule pas et pour tout réel x > 0, on a $f'(x) = \frac{1+x-x\ln x}{x(x+1)^2} = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$.

- Puisque x > 0, alors x(x + 1)² > 0 et donc le signe de f '(x) est celui de g(x).

D'après la question 3) Partie 1, on déduit que : f ' > 0 dans]0 , β[, f ' < 0 dans]β , + ∞[et f '(β) = 0.
Ainsi f est strictement croissante dans]0 , β] et f est strictement décroissante dans [β , +∞[.

- On sait que g(β) = 0, donc 1 + β – βlnβ = 0. Soit 1 + β = βlnβ.

D'où $f(\beta) = 2 + \frac{\ln\beta}{1+\beta} = 2 + \frac{\ln\beta}{\beta\ln\beta} = 2 + \frac{1}{\beta}$. Donc $f(\beta) = 2 + \frac{1}{\beta}$.

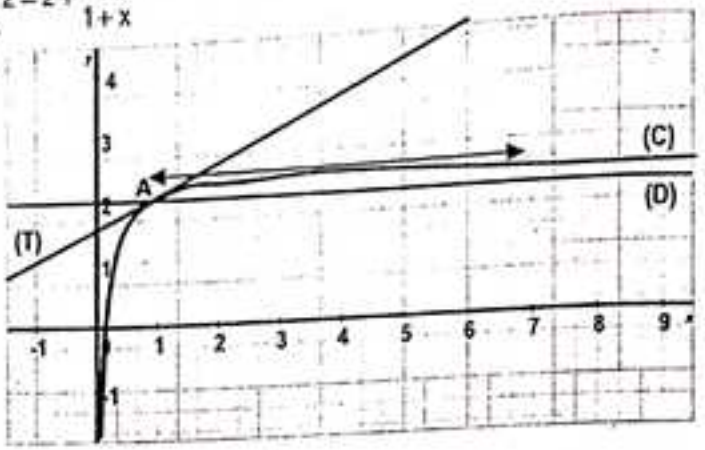
3) Soit M(x , y) un point du plan.

Scanned by CamScanner

M appartient à (C)∩(D) signifie : $\begin{cases} y=2 \\ y=2+\dfrac{\ln x}{1+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ 2=2+\dfrac{\ln x}{1+x} \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ et } y=2$.

D'où les coordonnées du point A, intersection de (C) et de la droite (D) d'équation y = 2 sont (1 , 2).
Une équation de la tangente à (C) en A est

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$, soit $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$.



Partie 3 :

1) $J(t)=\int_1^t \dfrac{\ln x}{x}dx=\left[\dfrac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^t=\dfrac{1}{2}\ln^2 t$.

2) • Posons pour x > 0, u(x) = lnx, $u'(x)=\dfrac{1}{x}$, $v'(x)=\dfrac{1}{x^2}$ et $v(x)=-\dfrac{1}{x}$.

En intégrant par parties, on a : $K(t)=\int_1^t \dfrac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\dfrac{\ln x}{x}\right]_1^t+\int_1^t \dfrac{1}{x^2}dx=-\dfrac{\ln t}{t}+\left[-\dfrac{1}{x}\right]_1^t=-\dfrac{\ln t}{t}-\dfrac{1}{t}+1$.

• Soit t ≥ 1, on a lnt + 1 ≥ 0, puis $\dfrac{\ln t}{t}+\dfrac{1}{t}\geq 0$, donc $-\dfrac{\ln t}{t}-\dfrac{1}{t}\leq 0$. Et enfin $-\dfrac{\ln t}{t}-\dfrac{1}{t}+1\leq 1$, donc K(t) ≤ 1.

De plus, soit t ≥ 1, soit x appartenant à [1 , t], on a $\dfrac{\ln x}{x^2}\geq 0$, et donc $\int_1^t \dfrac{\ln x}{x^2}dx\geq 0$. C'est-à-dire K(t) ≥ 0.

En conclusion, pour tout t ≥ 1, on a : $0\leq K(t)\leq 1$.

3) • Soit x ≥ 1, on a $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x(x+1)}$. Comme x > 0, alors $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x(x+1)}>0$.

De plus, on a x(x + 1) ≥ x² ≥ 1, donc $\dfrac{1}{x(x+1)}\leq\dfrac{1}{x^2}$. Donc pour tout x ≥ 1, on a : $0\leq\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\leq\dfrac{1}{x^2}$.

• Ainsi, soit t ≥ 1, pour tout x dans [1 , t], on a : $0\leq\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{\ln x}{x+1}\leq\dfrac{\ln x}{x^2}$ (car ayant x ≥ 1, on a lnx ≥ 0).

En intégrant dans [1 , t], on a : $0\leq\int_1^t\left(\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{\ln x}{x+1}\right)dx\leq\int_1^t\dfrac{\ln x}{x^2}dx$.

C'est-à-dire $0\leq\int_1^t\dfrac{\ln x}{x}dx-\int_1^t\dfrac{\ln x}{x+1}dx\leq\int_1^t\dfrac{\ln x}{x^2}dx$. D'où $0\leq J(t)-I(t)\leq K(t)$.

4) Soit t > 1, on a : $0\leq J(t)-I(t)\leq K(t)$, c'est-à-dire

$J(t)-K(t)\leq I(t)\leq J(t)$ et donc $\dfrac{J(t)}{\ln^2 t}-\dfrac{K(t)}{\ln^2 t}\leq\dfrac{I(t)}{\ln^2 t}\leq\dfrac{J(t)}{\ln^2 t}$. Soit $\dfrac{1}{2}-\dfrac{K(t)}{\ln^2 t}\leq\dfrac{I(t)}{\ln^2 t}\leq\dfrac{1}{2}$.

Or nous avons montré que pour tout t > 1, on a : $0\leq K(t)\leq 1$ et $\ln^2 t>0$, donc $0\leq\dfrac{K(t)}{\ln^2 t}\leq\dfrac{1}{\ln^2 t}$.

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{\ln^2 t}=0$, alors d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{K(t)}{\ln^2 t}=0$.

Donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{2}-\dfrac{K(t)}{\ln^2 t}=\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}-\dfrac{K(t)}{\ln^2 t}\leq\dfrac{I(t)}{\ln^2 t}\leq\dfrac{1}{2}$. Et d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{I(t)}{(\ln t)^2}=\dfrac{1}{2}$.

Scanned by CamScanner

Solution 61

1) F est définie sur $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(X+1)}{X}=1$. D'où f est dérivable en 0 et $f'(0)=1$.

- f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car sa restriction à cet ensemble est un rapport de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

Comme de plus f est dérivable en 0, alors f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et pour tout réel x, on a : $f'(x)=\dfrac{x\dfrac{2x}{x^2+1}-\ln(x^2+1)}{x^2}=\dfrac{\dfrac{2x^2}{x^2+1}-\ln(x^2+1)}{x^2}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}-\ln(x^2+1)$. Pour avoir le signe de g(x), étudions les variations de g :

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Et pour tout réel x, $g'(x)=\dfrac{4x(x^2+1)-4x^3}{(x^2+1)^2}-\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{2x(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$.

Le tableau de variation de g est le suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	0	+	0	-	
g(x)		↗	$1-\ln 2$	↘	0	↗	$1-\ln 2$	↘	
	$-\infty$								$-\infty$

D'après le tableau de variation de g, l'équation g(x) = 0 admet trois solutions a , 0 et b, avec a > 1 et b < - 1.
Remarquons g est paire, d'où b = - a.
Si x appartient à $]-\infty , -a[\cup]a , +\infty[$, alors g(x) < 0.
Si x appartient à $]-a , 0[\cup]0, a[$, alors g(x) > 0. D'où le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		-a		0		a		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	+	0	-	
f(x)		↘	f(-a)	↗	0	↗	f(a)	↘	
	0								0

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left[x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2\ln x}{x}+\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x}\right)=0$.

Remarquons que f est impaire, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

2) • Soit x > -1, posons h(x) = ln(x + 1) – x.

h est définie, continue et dérivable sur $]-1 , +\infty[$, et pour tout x > -1, $h'(x)=\dfrac{-x}{1+x}$.

Puisque x > -1, alors x + 1 > 0 et donc le signe de h'(x) est celui de – x.
Le tableau de variations de h est donc :

x	-1		0		$+\infty$
h'(x)	||	+	0	-	
h(x)	||	↗	0	↘	

On déduit du tableau de variations de h que h admet un maximum sur $]-1 , +\infty[$, qui est 0.
D'où pour tout x > -1, on a h(x) ≤ 0, c'est-à-dire ln(x + 1) ≤ x.

- L'équation réduite de la tangente à (C) en O est : y = f '(0)(x – 0) + f(0), soit y = x.

Scanned by CamScanner

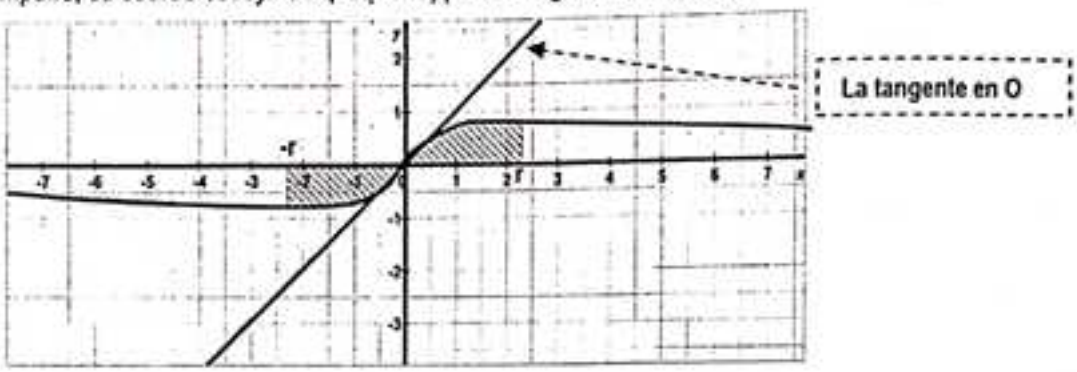
• Soit x un nombre réel, $f(x) - x = \dfrac{\ln(x^2+1) - x^2}{x}$.

Or pour tout réel x, on a $x^2 \geq 0$, donc d'après ce qui précède, on a : $\ln(1 + x^2) - x^2 \leq 0$.
Avec $\ln(1 + x^2) - x^2 = 0$ si et seulement si $x^2 = 0$. C'est-à-dire $x = 0$.
D'où le signe de $f(x) - x$ est celui de $-x$. Donc :
Dans $]-\infty, 0[$, on a $f(x) - x > 0$, donc la courbe (C) est au-dessus de sa tangente en O dans $]-\infty, 0[$.
Dans $]0, +\infty[$, on a $f(x) - x < 0$, donc la courbe (C) est en dessous de sa tangente en O dans $]0, +\infty[$.

• **La courbe (C) :**

On vérifie à la calculatrice que $g(1,98) \times g(1,99) < 0$, d'où $1,98 < a < 1,99$.
Pour le tracé de la courbe de f, on pourra prendre $a = 1,98$.

La fonction f étant impaire, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine O du repère.



3) Soit $r > 0$.

• La courbe (C) étant au-dessus de l'axe des abscisses dans $[0, +\infty[$, $F(r) = \int_0^r f(t)\,dt$ est l'aire en unité d'aire, du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 0$ et $x = r$.

• La courbe (C) est symétrique par rapport à O, d'où les domaines
$\Delta_1 = \{M(x, y)$ du plan ; $0 \leq x \leq r$ et $0 \leq y \leq f(x)\}$ et $\Delta_2 = \{M(x, y)$ du plan ; $-r \leq x \leq 0$ et $f(x) \leq y \leq 0\}$ sont symétriques par rapport à O, ce sont donc deux domaines isométriques du plan.

Or $\text{aire}(\Delta_1) = \int_0^r f(t)\,dt = F(r)$ et dans $]-\infty, 0]$, la courbe (C) est en dessous de l'axe des abscisses donc

$$\text{aire}(\Delta_2) = \int_{-r}^{0} f(t)\,dt = \int_0^{-r} f(t)\,dt = F(-r).$$

Finalement, $F(r)$ et $F(-r)$ sont les aires respectives des domaines isométriques du plan Δ_1 et Δ_2.

• Soit x un nombre réel :
Soit $x > 0$, posons $r = x$.
Les domaines Δ_1 et Δ_2 étant isométriques, $\text{aire}(\Delta_1) = \text{aire}(\Delta_2)$.
C'est-à-dire pour tout réel $r > 0$, $F(r) = F(-r)$, soit $F(-x) = F(x)$.
Soit $x < 0$, posons $r = -x$, et on a $F(-x) = F(r) = F(-r) = F(x)$.
Soit $x = 0$, $F(-x) = F(0) = F(x)$.
D'où, pour tout réel x, $F(-x) = F(x)$. Donc F est paire.

• f est continue sur $\mathbb{R}$, d'où F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : $F'(x) = f(x)$.
Dans $]-\infty, 0[$, (C) est en dessous de l'axe des abscisses, donc $f < 0$, et F est strictement décroissante.
Dans $]0, +\infty[$, (C) est au-dessus de l'axe des abscisses, donc $f > 0$, et F est strictement croissante.

4)a) Dans l'intervalle $[0, 1]$, la courbe (C) est en dessous de sa tangente en O.
D'où, pour tout réel x dans $[0, 1]$, on a $0 \leq f(x) \leq x$.

En intégrant dans $[0, 1]$, on a : $0 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 x\,dx$, soit $0 \leq F(1) \leq \dfrac{1}{2}$.

b) soit $t \geq 1$, on a $0 \leq 1 \leq t^2$, donc $t^2 \leq 1 + t^2 \leq 2t^2$.
Donc par suite, on a $\ln t^2 \leq \ln(1 + t^2) \leq \ln 2t^2$. (car la fonction ln est croissante sur $[1, +\infty[$).

Et finalement, on a $\dfrac{\ln(t^2)}{t} \leq \dfrac{\ln(t^2+1)}{t} \leq \dfrac{\ln(2t^2)}{t}$, car $1 \leq t$.

Scanned by CamScanner

c) • $\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt = \left[\frac{1}{2}\ln^2 t\right]_1^x = \frac{1}{2}\ln^2 x$.

• D'après la question 4)b), pour tout réel t supérieur ou égal à 1, on a : $\frac{\ln(t^2)}{t} \le \frac{\ln(t^2+1)}{t} \le \frac{\ln(2t^2)}{t}$.

Ce qui s'écrit encore $2\frac{\ln(t)}{t} \le \frac{\ln(t^2+1)}{t} \le \frac{\ln 2}{t} + 2\frac{\ln(t)}{t}$.

En intégrant dans [1 , x], on a : $2\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt \le \int_1^x \frac{\ln(t^2+1)}{t}dt \le \int_1^x \frac{\ln 2}{t}dt + 2\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt$, soit

$\ln^2 x \le F(x) \le \ln 2 \ln x + \ln^2 x$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2 = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

• Comme $x \ge 0$ et $\ln^2 x \le F(x) \le \ln 2 \ln x + \ln^2 x$, alors on a : $\frac{(\ln x)^2}{x} \le \frac{F(x)}{x} \le \ln 2\frac{\ln x}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln(\sqrt{x})^2)^2}{(\sqrt{x})^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(2\ln(\sqrt{x}))^2}{(\sqrt{x})^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} 4\times\frac{\ln x}{x} = 0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln 2\frac{\ln x}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x}\right) = 0$. Donc d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$.

D'où la courbe de F admet en $+\infty$, une branche parabolique de direction asymptotique celle de l'axe (Ox).

5) voici donc le tableau de variation de F :

x	0	$+\infty$
F'(x)	- 0	+
F(x)	$+\infty$ ↘ 0	↗ $+\infty$

Solution 62

a) • $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x\,dx = \left[\frac{1}{n+1}\sin^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$.

• $I_{n+2} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^{n+2}}{\cos x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n(\sin^2 x - 1)}{\cos x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x\,dx$.

D'où d'après ce qui précède, $I_{n+2} - I_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$.

b) • $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}dx = \left[-\ln(\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\ln\frac{1}{2} + \ln 1 = \ln 2$.

• D'après la question a), on a $I_3 - I_1 = -\frac{3}{8}$, donc $I_3 = I_1 - \frac{3}{8} = \ln 2 - \frac{3}{8}$.

• De même $I_5 - I_3 = -\frac{9}{64}$, c'est-à-dire $I_5 = I_3 - \frac{9}{64} = \ln 2 - \frac{3}{8} - \frac{9}{64} = \ln 2 - \frac{33}{64}$.

c) • La fonction $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ est dérivable et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, et à valeurs dans $\left[1, 2+\sqrt{3}\right]$.

La fonction ln est dérivable sur $\left[1, 2+\sqrt{3}\right]$, d'où f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et pour tout x dans $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$,

Scanned by CamScanner

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\times\frac{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\cos x}.$$

D'où f est une primitive sur $\left]0,\frac{\pi}{3}\right[$ de la fonction g définie par $g(x)=\frac{1}{\cos x}$.

- D'où $I_0=\left[\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\ln(2+\sqrt{3})$.

- D'après la question a), on a $I_2-I_0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $I_2=I_0-\frac{\sqrt{3}}{2}=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

De même $I_4-I_2=-\frac{\sqrt{3}}{8}$, c'est-à-dire $I_4=I_2-\frac{\sqrt{3}}{8}=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{5\sqrt{3}}{8}$.

Solution 63

A)1) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}e=0$.

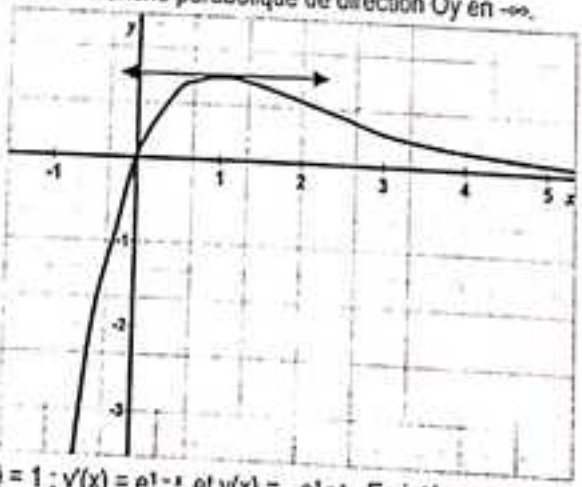
Pour tout réel x, on a $f'(x)=(1-x)e^{1-x}$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $1-x$.
D'où on a $f'>0$ dans $]-\infty,1[$ et $f'<0$ dans $]1,+\infty[$. $f'(x)=0$ si et seulement si $x=1$.
D'où f est strictement croissante dans $]-\infty,1]$ et strictement décroissante dans $[1,+\infty[$.
D'où le tableau de variations de f qui suit :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	$-\infty$	↗	1	↘	0

2) La courbe de f :

Notons que $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

D'où la courbe de f admet une branche parabolique de direction Oy en $-\infty$.



3) Posons $u(x)=x$; $u'(x)=1$; $v'(x)=e^{1-x}$ et $v(x)=-e^{1-x}$. En intégrant par parties, on a :

$I_1=\left[-xe^{1-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{1-x}dx=-1+\left[-e^{1-x}\right]_0^1=-1-1+e=e-2$. D'où $I_1=e-2$.

Scanned by CamScanner

Puisque (C) est au-dessus de l'axe des abscisses dans [0 , 1], alors I_1 est l'aire en u.a. du domaine du plan délimité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

B)1)a) Soit x un nombre réel dans [0 , 1], on a $0 \le x \le 1$ donc $-1 \le -x \le 0$. Donc $0 \le 1-x \le 1$, puis $1 \le e^{1-x} \le e$.

Et comme on a aussi $0 \le x^n$, alors on peut conclure que $x^n \le x^n e^{1-x} \le ex^n$ pour tout x appartenant à [0 , 1].

b) $J_n = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

c) Puisque pour tout x appartenant à [0, 1], on a $x^n \le x^n e^{1-x} \le ex^n$, alors en intégrant dans [0 , 1], on a :

$\int_0^1 x^n dx \le \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \le e\int_0^1 x^n dx$. C'est-à-dire $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{e}{n+1}$.

2) Soit n entier naturel non nul, on a : $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}dx$.

Posons $u(x) = x^{n+1}$, $u'(x) = (n+1)x^n$; $v'(x) = e^{1-x}$ et $v(x) = -e^{1-x}$.

En intégrant par parties, on a : $I_{n+1} = \left[-x^{n+1}e^{1-x}\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{1-x}dx = -1 + (n+1)I_n$.

D'où pour tout entier $n \ge 1$ on a : $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

3)a) Soit n un entier naturel non nul, on a :

$k_{n+1} = (n+1)!e - I_{n+1} = (n+1)!e - (n+1)I_n + 1 = (n+1)(n!e - I_n) + 1 = (n+1)k_n + 1$. D'où $k_{n+1} = (n+1)k_n + 1$.

b) • $k_1 = e - I_1$, or d'après la question A)3), $I_1 = -2 + e$, d'où $k_1 = 2$.

• D'après la question précédente, k_1 est un entier naturel non nul.

Supposons que k_n est un entier naturel non nul pour un certain entier naturel non nul n, alors $(n+1)k_n$ est un entier naturel non nul (car produit de deux entiers naturels non nuls). Et par suite $k_{n+1} = (n+1)k_n + 1$ est aussi un entier naturel non nul (somme de deux entiers naturels non nuls).

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que pour tout entier naturel non nul n, k_n est un entier.

c) Soit n entier naturel strictement supérieur à 1, on a : $0 < \frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{e}{n+1}$ (d'après la question B)1)c)).

Donc on a $0 < I_n < 1$. Ce qui implique que $k_n < I_n + k_n < k_n + 1$.

Or k_n est un entier (d'après la question B)3)b)), et $n!e = I_n + k_n$ appartient à $]k_n , k_n+1[$.

Alors k_n et k_n+1 étant des entiers consécutifs, on peut conclure que n!e n'est pas un entier.

4)a) Soit n, p et q entiers naturels, avec $n \ge q$, on a : $n! = 1\times2\times\ldots\times(q-1)\times q\times(q+1)\times\ldots\times n$.

Donc $\frac{n!p}{q} = 1\times2\times\ldots\times(q-1)\times(q+1)\times\ldots\times n\times p$ qui est un entier (car produit d'entiers). D'où $\frac{n!p}{q}$ est un entier.

b) Supposons que e appartiennent à $\mathbb{Q}$, alors il existe deux entiers p et q tels que $e = \frac{p}{q}$.

Soit n entier supérieur ou égal à q, on a : $n!e = \frac{n!p}{q}$.

Or n!e n'est pas un entier (d'après la question 3)c)) et $\frac{n!p}{q}$ est un entier (d'après la question 4)a)) ; Ce qui est contradictoire. D'où e n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

Solution 64

a) La fonction $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est dérivable et strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, et à valeurs dans $\left[2-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, et la fonction, ln est dérivable sur $\left[2-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, d'où f est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ et pour tout x dans $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, on a :

Scanned by CamScanner

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\times\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{\sin x}.$$ D'où $f'(x)=\frac{1}{\sin x}$.

b) Posons $u(x)=\frac{1}{\sin x}$, $u'(x)=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$, $v'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ et $v(x)=\tan x$. En intégrant par parties, on a :

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{(\cos^2 t)\sin t}=\left[\frac{\tan x}{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x\tan x}{\sin^2 t}dt=\left[\frac{1}{\cos x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{\sin t}=2-\frac{2}{\sqrt{3}}+\left[\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}.$$

D'où $I=2-\frac{2\sqrt{3}}{3}+\ln\frac{\sqrt{3}}{3}-\ln(2-\sqrt{3})$.

Solution 65

1) La fonction f est continue et positive sur $[0,\pi]$. D'où l'aire de Δ est donnée par l'intégrale

$$\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}\text{u.a.}$$ Or 1u.a. = 1 cm², d'où $\text{aire}(\Delta)=\frac{\pi}{2}\text{cm}^2$.

2) • Soit x un nombre réel, on a :

$$\sin^4 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4=\frac{e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix}}{16}=\frac{1}{16}(e^{4ix}+e^{-4ix})-\frac{1}{4}(e^{2ix}+e^{-2ix})+\frac{3}{8}.$$

D'où $\sin^4 x=\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}$.

• $$\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}\right)dx=\left[\frac{1}{32}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{8}x\right]_0^{\pi}=\frac{3\pi}{8}.$$

3)a) Ce disque a pour rayon AB = f(x) = sin²x, et son aire est $S(x)=\pi AB^2=\pi\sin^4 x$ u.a. Donc $S(x)=\pi\sin^4 x\ \text{cm}^2$.

b) Le volume V du solide obtenu est donné par l'intégrale :

$$\int_0^{\pi}S(x)dx=\pi\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx=\frac{3\pi^2}{8}\text{u.v.}$$ Or 1 u.v. = 1 cm³, donc $V=\frac{3\pi^2}{8}\text{cm}^3$.

Solution 66

a) • $$I_0+2I_1=\int_0^1\frac{1}{1+x+x^2}dx+\int_0^1\frac{2x}{1+x+x^2}dx=\int_0^1\frac{1+2x}{1+x+x^2}dx=\left[\ln(1+x+x^2)\right]_0^1=\ln 3.$$

• D'où $I_1=\frac{\ln 3-I_0}{2}$.

b) $$I_0+I_1+I_2=\int_0^1\frac{1}{1+x+x^2}dx+\int_0^1\frac{x}{1+x+x^2}dx+\int_0^1\frac{x^2}{1+x+x^2}dx=\int_0^1\frac{1+x+x^2}{1+x+x^2}dx=\int_0^1 dx=1.$$

$I_0+I_1+I_2=1$, donc $I_2=1-I_0-I_1=1-I_0-\frac{\ln 3-I_0}{2}=\frac{2-\ln 3-I_0}{2}$.

c) Soit n un entier naturel, $$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}-x^n}{1+x+x^2}dx=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{1+x+x^2}dx.$$

Or pour x dans [0 , 1], on a $x^n\geq 0$, $x-1\leq 0$ et $1+x+x^2>0$, donc on a $\frac{x^n(x-1)}{1+x+x^2}\leq 0$.

Par conséquent, on a $\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{1+x+x^2}dx\leq 0$ donc $I_{n+1}-I_n\leq 0$. La suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est alors décroissante.

Scanned by CamScanner

Comme pour tout x dans [0 , 1] et pour tout entier naturel n, on a $\frac{x^n}{1+x+x^2} \geq 0$, alors $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} dx \geq 0$.

D'où la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est minorée par 0.

La suite $(I_n)_{n \geq 0}$ étant décroissante et minorée, elle converge.

d) • Soit x dans [0 , 1] et n entier naturel, on a : $1 \leq 1 + x + x^2 \leq 3$.

Donc $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+x+x^2} \leq 1$, et finalement $\frac{x^n}{3} \leq \frac{x^n}{1+x+x^2} \leq x^n$ (car $x^3 \geq 0$).

En intégrant dans [0 , 1], on a $\int_0^1 \frac{x^n}{3} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx$. C'est-à-dire $\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

• Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3(n+1)} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, alors d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

e) Soit n un entier naturel.

Posons $u(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$; $u'(x) = -\frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}$; $v'(x) = x^n$ et $v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$.

En intégrant par parties, on a $I_n = \left[\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{1+x+x^2} x^{n+1} \right]_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{1+2x}{1+x+x^2} x^{n+1} dx$.

D'où $I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} x^{n+1} dx$.

f) • Soit x dans [0 , 1] on a : $1 \leq 1 + x + x^2 \leq 3$, donc $1 \leq (1 + x + x^2)^2 \leq 9$. D'où $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{(1+x+x^2)^2} \leq 1$ (1).

De plus, pour tout x dans [0 , 1] on a $1 \leq 1 + 2x \leq 3$ (2)

Donc en multipliant membre à membre les encadrements (1) et (2), on a $\frac{1}{9} \leq \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} \leq 3$.

• Soit n un entier naturel, on a : $3(n+1)I_n = 1 + 3 \int_0^1 \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} x^{n+1} dx$.

D'après ce qui précède, on a pour tout x dans [0 , 1] :

$\frac{1}{9} \leq \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} \leq 3$ donc $\frac{1}{9} x^{n+1} \leq \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} x^{n+1} \leq 3x^{n+1}$.

En intégrant dans [0 , 1], on a $\int_0^1 \frac{1}{9} x^{n+1} dx \leq \int_0^1 \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} x^{n+1} dx \leq \int_0^1 3x^{n+1} dx$.

C'est-à-dire $\frac{1}{9(n+2)} \leq \int_0^1 \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} x^{n+1} dx \leq \frac{3}{n+2}$.

Donc $\frac{1}{9(n+2)(n+1)} \leq \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} x^{n+1} dx \leq \frac{3}{(n+2)(n+1)}$ (en multipliant par $\frac{1}{n+1}$).

Donc $\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{9(n+2)(n+1)} \leq \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} x^{n+1} dx \leq \frac{1}{3(n+1)} + \frac{3}{(n+2)(n+1)}$.

C'est-à-dire $\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{9(n+2)(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n+1)} + \frac{3}{(n+2)(n+1)}$.

Et enfin $1 + \frac{1}{3(n+2)} \leq 3(n+1)I_n \leq 1 + \frac{9}{n+2}$ (en multipliant par 3(n + 1)).

Scanned by CamScanner

On peut conclure que : $1+\frac{1}{3(n+2)} \le 3(n+1)I_n \le 1+\frac{9}{n+2}$.

g) Soit n entier naturel, on a $1+\frac{1}{3(n+2)} \le 3(n+1)I_n \le 1+\frac{9}{n+2}$, donc $1+\frac{1}{3(n+2)}-3I_n \le 3nI_n \le 1+\frac{9}{n+2}-3I_n$.

De plus, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{3(n+2)}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{9}{(n+2)}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$,

alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3(n+1)}-3I_n\right)=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{9}{n+1}-3I_n\right)=1$.

D'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}3nI_n=1$.

Solution 67

Partie A

1) • La fonction f est dérivable sur I comme quotient de fonctions dérivables sur I, dont le dénominateur ne s'annule pas sur I.

Et pour tout x > -1, on a $f'(x)=\frac{e^x(1+x)-e^x\times1}{(1+x)^2}=\frac{xe^x}{(1+x)^2}$. Le signe de f '(x) est donc celui de x.

Alors f est strictement décroissante sur]-1 , 0[et strictement croissante sur]0 , +∞[.

• Soit x > -1, on a $f(x)=\frac{e^x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{e^x}{x}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)=1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

• On a : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}(x+1)=0$, $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}e^x=e^{-1}$ et pour x > -1, on a x + 1 > 0, alors $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)=+\infty$.

On peut rassembler les résultats dans un tableau :

x	-1		0		+∞
f'(x)	‖	-	0	+	
f(x)	‖ +∞	↘	1	↗	+∞

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)=+\infty$, donc la droite (Δ) d'équation x = -1 est asymptote verticale à la courbe de (C).

2)a) Pour la tangente au point d'abscisse a, Il suffit d'appliquer la formule pour obtenir :

$y=\frac{ae^a}{(1+a)^2}(x-a)+\frac{e^a}{1+a}$, soit finalement $y=\frac{ae^a}{(1+a)^2}x+\frac{e^a(1+a-a^2)}{(1+a)^2}$.

b) La tangente passe par l'origine O si et seulement si : $1 + a - a^2 = 0$. En résolvant cette équation et en vérifiant que les valeurs sont bien éléments de l'intervalle I, on a : $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

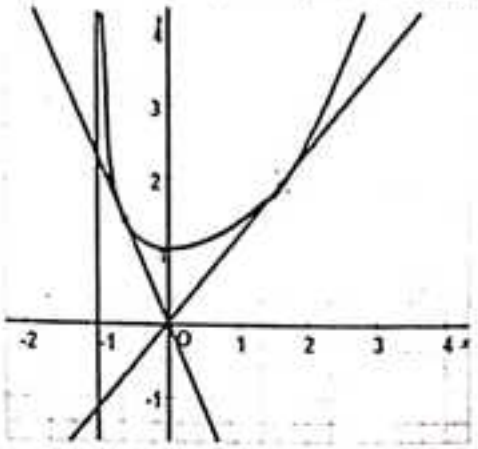
3) Tracé de la courbe

Soit x > -1, on a :

$\frac{f(x)}{x}=\frac{e^x}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{e^x}{x^2}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)=1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$.

Scanned by CamScanner

Finalement, la courbe (C) de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.



4) La fonction f est dérivable sur I, elle y admet donc des primitives.
F est la primitive de f sur]-1 ; +∞[qui s'annule en 0.
Et pour tout x > -1, on a F'(x) = f(x). Or la fonction f est strictement positive sur l'intervalle I, par conséquent la fonction F est strictement croissante sur I et comme F(0) = 0, on en déduit que :

- F est positive sur l'intervalle [0 ; +∞[.
- F est négative sur l'intervalle]-1 ; 0].

La fonction F n'est donc pas positive sur l'intervalle I.

Partie B

1) La fonction f est croissante sur [0 ; +∞[, donc aussi sur [0 ; 1], il vient alors : $f(0) \leq f(t) \leq f(1)$ pour tout t de [0 , 1], soit $1 \leq f(t) \leq \frac{e}{2}$ et, en appliquant l'inégalité de la moyenne à f sur [0 ; 1], on a :

$$1(1-0) \leq \int_0^1 \frac{e^t}{1+t}dt \leq \frac{e}{2}(1-0) \text{ donc } 1 \leq J \leq \frac{e}{2}.$$

2)a) $u_0 = \int_0^1 e^t dt = \left[e^t\right]_0^1 = e-1$.

b) comme $u_{n+1} = (-1)^{n+1}\int_0^1 t^{n+1}e^t\,dt$, on peut déjà, à l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^1 t^{n+1}e^t\,dt$:

posons : u'(t) = e^t pour u(t) = e^t et v(t) = t^{n+1} soit v'(t) = (n + 1)t^n
Les fonctions u et v sont dérivables à dérivées dérivables sur [0 ; 1], donc :

$$\int_0^1 t^{n+1}e^t\,dt = \left[t^{n+1}e^t\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 t^n e^t\,dt = e-(n+1)\int_0^1 t^n e^t\,dt$$ et, en revenant à u_{n+1}, après avoir remarqué que $(-1)^{n+1} = (-1)^n \times(-1)$, il vient :

$$u_{n+1} = (-1)^{n+1}\left(e-(n+1)\int_0^1 t^n e^t dt\right) = (-1)^{n+1}e + (-1)^n(n+1)\int_0^1 t^n e^t dt$$, soit $u_{n+1} = (-1)^{n+1}e + (n+1)u_n$.

c) En utilisant les résultats précédents, on obtient :

- $u_1 = -e + u_0 = -1$
- $u_2 = e + 2u_1 = e-2$
- $u_3 = -e + 3u_2 = 2e-6$
- $u_4 = e + 4u_3 = 9e-24$
- $u_5 = -e + 5u_4 = 44e-120$
- $u_6 = e + 6u_5 = 265e-720$.

3)a) Soit n un entier naturel, $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \int_0^1 e^t dt + (-1)\int_0^1 te^t dt + \ldots + (-1)^n\int_0^1 t^n e^t dt$, en utilisant la linéarité de l'intégrale (la somme des intégrales est l'intégrale de la somme), il vient :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \int_0^1 (e^t + (-1)te^t + \ldots + (-1)^n t^n e^t)dt = \int_0^1 e^t(1+(-1)t+\ldots+(-1)^n t^n)dt.$$

Or 1 + (-1)t + . . . + (-1)$^n t^n$ est la somme des (n + 1) premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison (-1)t = -t, ce qui conduit à : $1+(-1)t+\ldots+(-1)^n t^n = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}$.

Scanned by CamScanner

Et finalement, $u_0+u_1+\ldots+u_n=\int_0^1 e^t\frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}dt$.

b) $u_0+u_1+\ldots+u_n+R_n=\int_0^1 e^t\frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}dt+(-1)^{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f(t)dt$.

soit $u_0+u_1+\ldots+u_n+R_n=\int_0^1\left(e^t\frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}+(-1)^{n+1}t^{n+1}\frac{e^t}{1+t}\right)dt$ et en simplifiant, il reste :

$u_0+u_1+\ldots+u_n+R_n=\int_0^1\frac{e^t}{1+t}dt=J$.

c) $|R_n|=\left|\int_0^1 t^{n+1}f(t)dt\right|=\int_0^1 t^{n+1}f(t)dt$, car $t^{n+1}f(t)$ est positif sur [0 ; 1].

D'après la question 1) de la Partie B), pour tout t de [0 ; 1], on a $1\le f(t)\le\frac{e}{2}$, soit en multipliant par t^{n+1},

$t^{n+1}\le t^{n+1}f(t)\le\frac{e}{2}t^{n+1}$ et en prenant les intégrales :

$\int_0^1 t^{n+1}dt\le|R_n|\le\frac{e}{2}\int_0^1 t^{n+1}dt$, et finalement $\frac{1}{n+2}\le|R_n|\le\frac{e}{2(n+2)}$.

4)a) Soit n entier naturel, on a : $\frac{e}{2(n+2)}-\frac{1}{n+2}=\frac{e-2}{2(n+2)}$.

Donc $\frac{e}{2(n+2)}-\frac{1}{n+2}<0{,}05$ équivaut à : $\frac{e-2}{2(n+2)}<0{,}05$, puis à $n+2>\frac{e-2}{2\times0{,}05}$, enfin à $n>\frac{e-2}{2\times0{,}05}-2$.

Le plus petit entier naturel n tel que $\frac{e}{2(n+2)}-\frac{1}{n+2}<0{,}05$ est donc 6.

b) En additionnant membre à membre les résultats de la question 2)c) Partie B), on obtient : $S_6=322e-874$.

c) En prenant n = 6 dans la question 3)b), $J=u_0+u_1+\ldots+u_6+R_6$,

soit $J=S_6+R_6$ avec $R_6=(-1)^7\int_0^1 t^7f(t)dt$. Donc on a $R_6=-\int_0^1 t^7f(t)dt\le0$, alors $|R_6|=-R_6$.

D'après la question 3)c) Partie B), on a : $\frac{1}{8}\le|R_6|\le\frac{e}{16}$, c'est-à-dire $\frac{1}{8}\le-R_6\le\frac{e}{16}$ et donc $-\frac{e}{16}\le R_6\le-\frac{1}{8}$.

On en déduit que $S_6-\frac{e}{16}\le S_6+R_6\le S_6-\frac{1}{8}$ Soit $S_6-\frac{e}{16}\le J\le S_6-\frac{1}{8}$.

d) Puisque $S_6-\frac{e}{16}\le J\le S_6-\frac{1}{8}$ et $S_6=322e-874$, alors on a : $322e-874-\frac{e}{16}\le J\le322e-874-\frac{1}{8}$.

Donc En utilisant une calculatrice, on a $1{,}116\le J\le1{,}166$.
L'encadrement est bien d'amplitude 0,05 car 1,162 – 1,116 = 0,05.

Solution 68

1) • $F_0(x)=\int_0^x\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}dt=-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{-2t}{\sqrt{4-t^2}}dt=\left[-\sqrt{4-t^2}\right]_0^x=-\sqrt{4-x^2}+2$.

• Notons que la fonction F_0 n'est pas définie en 2. Par contre $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}F_0(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}2-\sqrt{4-x^2}=2$.

Puisque cette limite est réelle, alors F_0 admet un prolongement par continuité en 2.

2)a) • Posons $u(t)=t^{2n+2}$; $u'(t)=(2n+2)t^{2n+1}$; $v'(t)=\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}$ et $v(t)=-\sqrt{4-t^2}$. Ainsi

Scanned by CamScanner

$$F_{n+1}(x)=\int_0^x \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}t^{2n+2}dt=\left[-t^{2n+2}\sqrt{4-t^2}\right]_0^x+(2n+2)\int_0^x t^{2n+1}\sqrt{4-t^2}dt$$

$$=-x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}+2(n+1)\int_0^x t^{2n+1}\sqrt{4-t^2}dt$$

Donc $F_{n+1}(x)=-x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}+2(n+1)\int_0^x t^{2n+1}\sqrt{4-t^2}\,dt$.

- $F_{n+1}(x)=-x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}+2(n+1)\int_0^x t^{2n+1}\sqrt{4-t^2}\,dt$

$$=-x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}+2(n+1)\int_0^x t^{2n+1}\frac{4-t^2}{\sqrt{4-t^2}}dt$$

$$=-x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}+2(n+1)\int_0^x\left(\frac{4t^{2n+1}}{\sqrt{4-t^2}}-\frac{t^{2n+3}}{\sqrt{4-t^2}}\right)dt$$

Donc, $F_{n+1}(x)=-x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}+8(n+1)\int_0^x\frac{t^{2n+1}}{\sqrt{4-t^2}}dt-2(n+1)\int_0^x\frac{t^{2n+3}}{\sqrt{4-t^2}}dt$

Et part suite, $F_{n+1}(x)=-x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}+8(n+1)F_n(x)-2(n+1)F_{n+1}(x)$.

On aboutit alors à : $(2n+3)F_{n+1}(x)=8(n+1)F_n(x)-x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}$.

b) Soit P_n la proposition : « F_n a une limite finie u_n lorsque x tend vers 2, où $u_n=2\frac{16^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ ».

Pour n = 0, d'après la question 1) $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}F_0(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}2-\sqrt{4-x^2}=2$. Or $u_0=2\frac{16^0(0!)^2}{(2\times0+1)!}=2$.

Alors F_0 a une limite finie u_0 lorsque x tend vers 2. D'où P_0 est vraie.

Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel n, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}F_n(x)=u_n=2\frac{16^n(n!)^2}{(2n+1)!}$, et montrons que P_{n+1} est aussi vraie, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}F_{n+1}(x)=u_{n+1}=2\frac{16^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}$.

D'après la question 2)a), on a $(2n+3)F_{n+1}(x)=8(n+1)F_n(x)-x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}$.

Donc $F_{n+1}(x)=\frac{8(n+1)}{2n+3}F_n(x)-\frac{x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}}{2n+3}$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}F_n(x)=u_n=2\frac{16^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ (d'après l'hypothèse de récurrence) et $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\frac{x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}}{2n+3}=0$,

d'où $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}F_{n+1}(x)=\frac{8(n+1)}{2n+3}\times2\frac{16^n(n!)^2}{(2n+1)!}$. C'est-à-dire

$$\lim_{x\xrightarrow{<}2}F_{n+1}(x)=\frac{16^{n+1}(n+1)(n!)^2}{(2n+1)!(2n+3)}=\frac{16^{n+1}(2n+2)(n+1)(n!)^2}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)}=2\frac{16^{n+1}(n+1)^2(n!)^2}{(2n+3)!}=2\frac{16^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}$$

D'où $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}F_{n+1}(x)=u_{n+1}=2\frac{16^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}$. P_{n+1} est donc aussi vraie.

Et finalement, pour tout entier naturel n, F_n a une limite finie u_n lorsque x tend vers 2 et $u_n=2\frac{16^n(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Scanned by CamScanner

Solution 69

Supposons que f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$

On aurait alors F dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = f(x)$, pour tout x. D'où $F'(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $F'(x) = -1$ si $x < 0$.

On en déduit alors que $F(x) = x + a$ si $x \geq 0$ et $F(x) = -x + b$ si $x < 0$.

F est dérivable, donc continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier en 0.

D'où $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} F(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} F(x) = F(0)$. Ainsi $a = b = F(0)$

Dans ce cas, $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{F(x)-F(0)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{F(x)-F(0)}{x} = -1$.

F n'est pas dérivable en 0. Ce qui est contradictoire, car F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

D'où F n'existe pas.

Solution 70

Soit x réel non nul, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)-F(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{X\to\infty} \dfrac{\sin X}{X} = 0.$

D'où F est dérivable en 0.

Or F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

F est alors une primitive de sa dérivée $F' : x \to \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0. \\ 0 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \cos x$ n'existe pas et $\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{X\to\infty} 2\times\dfrac{\sin X}{X} = 0$, alors F' n'a pas de limite en 0.

D'où F' n'est pas continue en 0. Finalement, F admet une dérivée F' sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas continue en 0.

Solution 71

La valeur moyenne de la fonction v sur $[t_0, t_1]$, est : $\dfrac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$. $v = \dfrac{dx}{dt}$, où x est la fonction position du mobile M, ainsi, $\dfrac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt = \dfrac{1}{t_1-t_0}\left[x(t)\right]_{t_0}^{t_1} = \dfrac{x(t_1)-x(t_0)}{t_1-t_0}$.

Cette dernière expression est bel et bien celle de la vitesse moyenne du point M sur l'intervalle $[t_0, t_1]$.

Solution 72

1) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\dfrac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$ et $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\dfrac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$.

2)a) • Pour le calcul de I_n, posons $u(t) = e^{-nt}$; $u'(t) = -ne^{-nt}$; $v'(t) = \sin t$ et $v(t) = -\cos t$.

En intégrant par parties, on a : $I_n = \left[-e^{-nt}\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} ne^{-nt}\cos t dt = -e^{-n\frac{\pi}{2}}\cos\dfrac{\pi}{2} + e^0\cos 0 - nJ_n = 1 - nJ_n$.

Donc $I_n + nJ_n = 1$.

• Pour le calcul de J_n, posons $u(t) = e^{-nt}$; $u'(t) = -ne^{-nt}$; $v'(t) = \cos t$ et $v(t) = \sin t$.

En intégrant par parties, on a : $J_n = \left[e^{-nt}\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -ne^{-nt}\sin t dt = e^{-n\frac{\pi}{2}}\sin\dfrac{\pi}{2} - e^0\sin 0 + nI_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} + nI_n$.

Donc $-nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}}$.

b) I_n et J_n vérifient le système $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$.

Scanned by CamScanner

En résolvant ce système, on a : $J_n = \dfrac{n+e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n^2+1}$ et $I_n = \dfrac{1-ne^{-n\frac{\pi}{2}}}{n^2+1}$

3) • $\lim\limits_{n\to+\infty} -ne^{-n\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{\pi} \times \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{\pi}{2}ne^{-n\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{\pi} \times \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

• On a : $\dfrac{n+e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n^2+1} = \dfrac{n}{n^2} \times \dfrac{1+\frac{e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1+\frac{e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

Solution 73

Partie I

1)a) • La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, car quotient de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on a : $f'(x) = \dfrac{-2(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$.

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $e^{-x} - e^x$.

Or $e^{-x} - e^x = 0$ si et seulement si, $e^{-x} = e^x$. C'est-à-dire $-x = x$, soit $x = 0$.

Et $e^{-x} - e^x < 0$ si et seulement si, $e^{-x} < e^x$. C'est-à-dire $-x < x$, soit $x > 0$.

Donc $f'(x) < 0$ si et seulement si, $x > 0$ et $f'(x) > 0$ si et seulement si, $x < 0$.

Donc f est croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} = 0$.

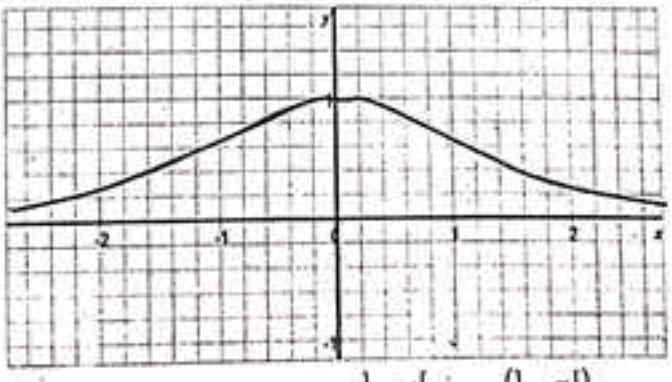
D'où le tableau de variations qui suit :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

• On constate que f est minorée par 0 et n'atteint pas ce minorant et f admet un maximum global qui est 1 sur $\mathbb{R}$.

D'où, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $0 < f(x) \leq 1$.

b) Notons que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$ et en $+\infty$.



2)a) • Notons que la fonction tangente est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\left(\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\right) =]0, +\infty[$. Comme de plus la fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$, alors d'après le théorème sur la dérivabilité de la fonction composée, la fonction g est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Scanned by CamScanner

• Pour tout réel x dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $g'(x)=\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}$.

b) • On remarque que, pour tout x dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a tanx > 0 et par conséquent g'(x) > 0.

Donc g est continue et strictement croissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, donc g réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ vers

$g\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=\ln\left(\tan\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)\right)=\ln(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$.

Par conséquent, g admet une réciproque h définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

• Soit b élément de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

h(0) = b signifie que g(b) = 0. C'est-à-dire ln(tanb) = 0. Ce qui équivaut à tanb = 1.

Comme b appartient à $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, alors $b=\frac{\pi}{4}$. Finalement, $h(0)=\frac{\pi}{4}$.

c) • g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et g' ne s'annule pas, alors sa réciproque h est dérivable sur $g\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=\mathbb{R}$.

• Notons que, pour tout réel x, on a : $h'(x)=\frac{1}{g'(h(x))}=\frac{1}{\frac{1+\tan^2(h(x))}{\tan(h(x))}}=\frac{\tan(h(x))}{1+\tan^2(h(x))}$.

Or Pour tout réel x, g(h(x)) = x. C'est-à-dire, ln(tan(h(x))) = x. D'où tan(h(x)) = e^x.

Il s'ensuit que : $h'(x)=\frac{\tan(h(x))}{1+\tan^2(h(x))}=\frac{e^x}{1+e^{2x}}=\frac{e^{-x}e^x}{e^{-x}(1+e^{2x})}=\frac{1}{e^{-x}+e^x}=\frac{f(x)}{2}$.

D'où, pour réel x, 2h'(x) = f(x).

• Soit un réel x, $\int_0^x f(t)dt=\int_0^x 2h'(t)dt=[2h(t)]_0^x=2h(x)-2h(0)=2h(x)-2\times\frac{\pi}{4}=2h(x)-\frac{\pi}{2}$.

D'où pour tout réel x, on a : $\int_0^x f(t)dt=2h(x)-\frac{\pi}{2}$.

Partie II

1)a) • $F_1(x)=\int_0^x f(t)dt=2h(x)-\frac{\pi}{2}$ (d'après la partie I question 2)c)).

• On sait que, $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{2}} g(x)=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\frac{\pi}{2}$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} F_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2h(x)-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

b) • Notons que K est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, on a :

$K'(t)=\frac{(e^t+e^{-t})(e^t+e^{-t})-(e^t-e^{-t})(e^t-e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2}=\frac{4}{(e^t+e^{-t})^2}=\left(\frac{2}{e^t+e^{-t}}\right)^2=f^2(t)$.

D'où, pour tout réel t, on a K'(t) = f^2(t).

• $F_2(x)=\int_0^x f^2(t)dt=\int_0^x K'(t)dt=K(x)-K(0)=K(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. D'où, $F_2(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} F_2(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1$. D'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_2(x)=1$.

2)a) Notons que la fonction f^n est continue sur [0 , +∞[, donc la fonction F_n est dérivable sur [0 , +∞[.

Scanned by CamScanner

Et pout tout réel positif x, on a : $F_n'(x) = f^n(x) > 0$. Donc F_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Remarquons que $F_n(0) = 0$, donc $F_n([0, +\infty[) = \left|F_n(0), \lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)\right| = \left|0, \lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)\right|$.

D'où, $F_n([0, +\infty[) = \left|0, \lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)\right|$.

b) • Soit t un réel positif ou nul, on a : $f(t) - 2e^{-t} = \dfrac{2}{e^t + e^{-t}} - 2e^{-t} = \dfrac{-2e^{-2t}}{e^t + e^{-t}} < 0$.

D'où pour tout réel positif ou nul t, on a : $f(t) < 2e^{-t}$.

• D'après la question I)1)a), on a pour tout réel t, $0 < f(t) \le 1$, donc pour tout entier naturel n et pour tout réel t, on a : $0 < (f(t))^n \le f(t)$. Puisque d'après la question précédente, on a pour tout réel positif ou nul t, $f(t) < 2e^{-t}$, alors on peut dire que pour tout entier naturel n et pour tout réel positif ou nul t, on a $(f(t))^n \le 2e^{-t}$.

En intégrant, on obtient : $\int_0^x f^n(t)dt \le \int_0^x 2e^{-t}\,dt$.

Or $\int_0^x 2e^{-t}\,dt = \left[-2e^{-t}\right]_0^x = 2(1-e^{-x})$ et $\int_0^x f^n(t)dt = F_n(x)$, alors on peut écrire que $F_n(x) \le 2(1-e^{-x})$.

De plus, pour tout réel positif ou nul t, on a $e^{-t} > 0$, donc on a $F_n(x) \le 2(1-e^{-x}) \le 2$.

Finalement, pour tout x de $[0, +\infty[$, on a $F_n(x) \le 2$.

• Puisque pour tout entier naturel n et pour tout réel positif ou nul x, on a $0 \le F_n(x) \le 2$, alors on a lorsqu'elle (la limite) existe, $0 \le \lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x) \le 2$. D'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$ est finie.

c) • Soit t un réel positif ou nul, on a : $f(t) - e^{-t} = \dfrac{2}{e^t + e^{-t}} - e^{-t} = \dfrac{1-e^{-2t}}{e^t + e^{-t}}$.

Comme on a $t \ge 0$, alors on a $-2t \le 0$. C'est-à-dire $e^{-2t} \le 1$. Et par suite $1 - e^{-2t} \ge 0$.

On peut alors dire que $f(t) - e^{-t} \ge 0$. Et finalement, pour tout réel t positif ou nul, on a $f(t) \ge e^{-t}$.

• Comme pour tout réel t positif ou nul, $f(t) \ge e^{-t}$, et donc $(f(t))^n \ge e^{-nt}$, alors pour tout réel positif ou nul x, on a en intégrant :

$\int_0^x f^n(t)dt \ge \int_0^x e^{-nt}\,dt$. C'est-à-dire $\int_0^x f^n(t)dt \ge \left|-\dfrac{1}{n}e^{-nt}\right|_0^x$.

Finalement on peut écrire que $\dfrac{1-e^{-nx}}{n} \le F_n(x)$.

• Comme pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel positif ou nul x on a :

$\dfrac{1-e^{-nx}}{n} \le F_n(x)$, alors on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-e^{-nx}}{n} \le \lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-e^{-nx}}{n} = \dfrac{1}{n} > 0$, alors on peut dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$ est non nulle.

3)a) D'après les questions II)1)a) et II)1)b), on a : $u_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} F_1(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et $u_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} F_2(x) = 1$.

b) Soit n entier naturel non nul et t réel positif ou nul, on a :

$$f^{n-1}(t)f'(t)K(t) = \frac{2^{n-1}}{(e^t+e^{-t})^{n-1}} \times \frac{-2(e^t-e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2} \times \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}} = \frac{-2^n(e^t-e^{-t})^2}{(e^t+e^{-t})^{n+2}} = \frac{2^n(4-(e^t+e^{-t})^2)}{(e^t+e^{-t})^{n+2}}$$

$$= \frac{2^n \times 2^2}{(e^t+e^{-t})^{n+2}} - \frac{2^n(e^t+e^{-t})^2}{(e^t+e^{-t})^{n+2}}.$$

$$= \frac{2^{n+2}}{(e^t+e^{-t})^{n+2}} - \frac{2^n}{(e^t+e^{-t})^n}$$

$$= f^{n+2}(t) - f^n(t)$$

Scanned by CamScanner

D'où, pour tout t de $[0, +\infty[$, on a $f^{n-1}(t)f'(t)K(t) = f^{n+2}(t) - f^n(t)$.

c) Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$ et x dans $[0, +\infty[$.

Posons $v'(t) = f^{n-1}(t)f'(t)$ pour $v(t) = \frac{1}{n}f^n(t)$ et $w(t) = K(t)$ pour $w'(t) = f'(t)$, on a, à l'aide d'une intégration par parties, $\int_0^x f^{n-1}(t)f'(t)K(t)dt = \left[\frac{1}{n}f^n(t)K(t)\right]_0^x - \frac{1}{n}\int_0^x f^{n+2}(t)dt = \frac{1}{n}f^n(x)K(x) - \frac{1}{n}\int_0^x f^{n+2}(t)dt$. Car $K(0) = 0$.

D'où, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $[0, +\infty[$, on a : $\int_0^x f^{n-1}(t)f'(t)K(t)dt = \frac{1}{n}K(x)f^n(x) - \frac{1}{n}\int_0^x f^{n+2}(t)dt$

d) • D'après la question II)3)b), on a pour tout t de $[0, +\infty[$, on a $f^{n-1}(t)f'(t)K(t) = f^{n+2}(t) - f^n(t)$.

Alors pour tout réel positif ou nul x, $\int_0^x f^{n-1}(t)f'(t)K(t)dt = \int_0^x f^{n+2}(t)dt - \int_0^x f^n(t)dt = F_{n+2}(x) - F_n(x)$. (1)

D'après la question II)3)c), $\int_0^x f^{n-1}(t)f'(t)K(t)dt = \frac{1}{n}K(x)f^n(x) - \frac{1}{n}\int_0^x f^{n+2}(t)dt = \frac{1}{n}K(x)f^n(x) - \frac{1}{n}F_{n+2}(x)$ (2)

Des résultats (1) et (2), on peut écrire que : $\frac{1}{n}K(x)f^n(x) - \frac{1}{n}F_{n+2}(x) = F_{n+2}(x) - F_n(x)$.

C'est-à-dire, $K(x)f^n(x) - F_{n+2}(x) = nF_{n+2}(x) - nF_n(x)$.

Et finalement, $(n+1)F_{n+2}(x) - nF_n(x) = K(x)f^n(x)$.

• D'après ce qui précède, pour tout entier naturel non nul n et tout réel positif ou nul x, on a :

$(n+1)F_{n+2}(2) - nF_n(x) = K(x)f^n(x)$. C'est-à-dire $F_{n+2}(x) = \frac{n}{n+1}F_n(x) + \frac{1}{n+1}K(x)f^n(x)$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} K(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n+1}K(x)f^n(x) = 0$.

Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}F_n(x) + \frac{1}{n+1}K(x)f^n(x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n}{n+1}F_n(x)$. C'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} F_{n+2}(x) = \frac{n}{n-1}\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$.

On peut alors conclure que $u_{n+2} = \frac{n}{n+1}u_n$.

4)a) Soit n un entier naturel.

• D'après la question 3)d), on a : $u_{2n+1} = \frac{2n-1}{2n}u_{2n-1}$, $u_{2n-1} = \frac{2n-3}{2n-2}u_{2n-3}$, ..., $u_5 = \frac{3}{4}u_3$ et $u_3 = \frac{1}{2}u_1$.

En multipliant membre à membre, on a :

$u_{2n+1}\times u_{2n-1}\times\ldots\times u_5\times u_3 = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots\times 3\times 1}{2n(2n-2)\ldots\times 4\times 2}u_{2n-1}\times u_{2n-3}\times\ldots\times u_3\times u_1$.

Puisque les u_n sont non nuls, alors après simplification, on a :

$u_{2n+1} = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots\times 3\times 1}{2n(2n-2)\ldots\times 4\times 2}\times u_1 = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots\times 3\times 1}{2n(2n-2)\ldots\times 4\times 2}\times\frac{\pi}{2}$.

• D'après la question 3)d), on a : $u_{2n+2} = \frac{2n}{2n+1}u_{2n}$, $u_{2n} = \frac{2n-2}{2n-1}u_{2n-2}$, ..., $u_6 = \frac{4}{5}u_4$ et $u_4 = \frac{2}{3}u_2$.

En multipliant membre à membre, on a : $u_{2n+2}\times u_{2n}\times\ldots\times u_6\times u_4 = \frac{2n(2n-2)\ldots\times 4\times 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots\times 5\times 3}u_{2n}\times u_{2n-2}\times\ldots\times u_4\times u_2$.

Puisque les u_n sont non nuls, alors après simplification, on a :

$u_{2n+2} = \frac{2n(2n-2)\ldots\times 4\times 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots\times 5\times 3}\times u_2 = \frac{2n(2n-2)\ldots\times 4\times 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots\times 5\times 3}$.

b) Soit n un entier naturel, $f^{n+1}(t) - f^n(t) = f^n(t)(f(t) - 1)$.

Or d'après la question I)1)a), on a $0 < f(t) \le 1$, donc $f^n(t)(f(t) - 1) \le 0$. C'est-à-dire $f^{n+1}(t) \le f^n(t)$.

Scanned by CamScanner

On en déduit que, $\int_0^x t^{n+1}(t)dt \geq \int_0^x t^n(t)dt$. C'est-à-dire $F_{n+1}(x) \leq F_n(x)$. Donc $\lim_{x\to+\infty} F_{n+1}(x) \leq \lim_{x\to+\infty} F_n(x)$.

C'est-à-dire, $u_{n+1} \leq u_n$.

On peut donc conclure que, la suite (u_n) est décroissante.

c) • La suite (u_n) est décroissante et strictement positive, donc on a $\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} \leq 1$. (3)

De plus, d'après la question II)3)d), on a $u_{2n+2} = \frac{2n}{2n+1}u_{2n}$.

Or (u_n) étant décroissante, alors on a $u_{2n+1} \leq u_{2n}$, donc $\frac{2n}{2n+1}u_{2n+1} \leq \frac{2n}{2n+1}u_{2n}$.

C'est-à-dire $\frac{2n}{2n+1}u_{2n+1} \leq u_{2n+2}$. Donc $\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}$. (4)

Des inégalités (3) et (4), on déduit que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} \leq 1$.

• Puisque pour tout entier naturel non nul n, on a $\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} \leq 1$, et $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{2n+1} = 1$, alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} = 1$.

d) Soit n un entier naturel non nul.

On a $\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} = \left(\frac{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}{3\times5\times7\times\ldots\times(2n-1)}\right)^2 \times \frac{2}{2n+1} \times \frac{1}{\pi}$. Donc $\left(\frac{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}{3\times5\times7\times\ldots\times(2n-1)}\right)^2 \times \frac{2}{2n+1} = \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} \times \pi$.

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} = 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}{3\times5\times7\times\ldots\times(2n-1)}\right)^2 \times \frac{2}{2n+1}\right] = \pi$.

Solution 74

Partie A :

1) $f_\lambda(x)$ existe si et seulement si, $1 + \lambda x > 0$. C'est-à-dire $\lambda x > -1$.

Si $\lambda < 0$, alors on a $x < -\frac{1}{\lambda}$. Et par suite, l'ensemble de définition de f_λ est : $Df_\lambda = \left]-\infty, -\frac{1}{\lambda}\right[$.

Si $\lambda > 0$, alors on a $x > -\frac{1}{\lambda}$. Et par suite, l'ensemble de définition de f_λ est : $Df_\lambda = \left]-\frac{1}{\lambda}, +\infty\right[$.

2) • φ_λ est définie, continue et dérivable sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\lambda}\right[$.

Pour tout $x < -\frac{1}{\lambda}$, on a : $\varphi_\lambda'(x) = \frac{\lambda}{1+\lambda x} - 1 = \frac{-\lambda x + \lambda - 1}{1+\lambda x}$.

Notons que, pour tout $x < -\frac{1}{\lambda}$, on a $1 + \lambda x > 0$, donc le signe de $\varphi_\lambda'(x)$ est celui de $-\lambda x + \lambda - 1$.

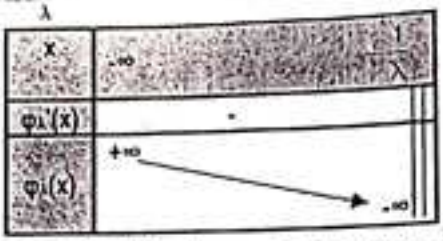
Or $-\lambda x + \lambda - 1 = 0$ si et seulement si, $x = 1 - \frac{1}{\lambda}$.

Comme $-\frac{1}{\lambda} < 1 - \frac{1}{\lambda}$, alors pour tout $x < -\frac{1}{\lambda}$, on a $-\lambda x + \lambda - 1 < 0$. C'est-à-dire $\varphi_\lambda'(x) < 0$.

D'où φ_λ est strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\lambda}\right[$.

Scanned by CamScanner

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi_\lambda(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-\frac{1}{\lambda}}\varphi_\lambda(x)=-\infty$. D'où le tableau de variations qui suit :



• Le nombre de points d'intersection de (C_λ) et (D) est le nombre de solutions de l'équation $\varphi_\lambda(x)=0$.

Or φ_λ est continue et strictement décroissante sur $\left]-\infty,-\frac{1}{\lambda}\right[$, et $\varphi_\lambda\left(\left]-\infty,-\frac{1}{\lambda}\right[\right)=\mathbb{R}$.

Comme 0 appartient à $\mathbb{R}$, alors l'équation $\varphi_\lambda(x)=0$ admet une unique solution sur $\left]-\infty,-\frac{1}{\lambda}\right[$.

Par conséquent, (C_λ) et (D) se rencontrent en un seul point.

3)a) • φ_λ est définie, continue et dérivable sur $\left]-\frac{1}{\lambda},+\infty\right[$.

Pour tout $x>-\frac{1}{\lambda}$, on a : $\varphi_\lambda'(x)=\frac{-\lambda x+\lambda-1}{1+\lambda x}$.

Notons que, pour tout $x>-\frac{1}{\lambda}$, on a $1+\lambda x>0$, donc le signe de $\varphi_\lambda'(x)$ est celui de $-\lambda x+\lambda-1$.

Or $-\lambda x+\lambda-1=0$ si et seulement si, $x=1-\frac{1}{\lambda}$.

Comme $-\frac{1}{\lambda}<1-\frac{1}{\lambda}$, alors, pour tout $-\frac{1}{\lambda}<x<1-\frac{1}{\lambda}$, on a $-\lambda x+\lambda-1>0$. C'est-à-dire $\varphi_\lambda'(x)>0$.

pour tout $1-\frac{1}{\lambda}<x$, on a $-\lambda x+\lambda-1<0$. C'est-à-dire $\varphi_\lambda'(x)<0$.

D'où φ_λ est strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{\lambda},1-\frac{1}{\lambda}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[1-\frac{1}{\lambda},+\infty\right[$. De plus,

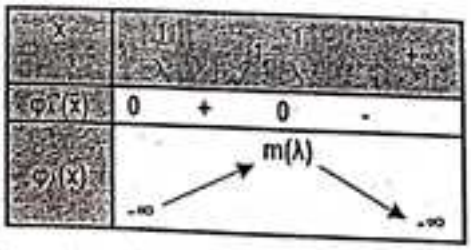
$$\lim_{x\to+\infty}\varphi_\lambda(x)=\lim_{x\to+\infty}1+\ln(1+\lambda x)-x=\lim_{x\to+\infty}1+\ln\left(x\left(\frac{1}{x}+\lambda\right)\right)-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}1+\ln x+\ln\left(\lambda+\frac{1}{x}\right)-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}1+x\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)+\ln\left(\lambda+\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\infty$$

et $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-\frac{1}{\lambda}}\varphi_\lambda(x)=-\infty$. D'où le tableau de variations qui suit :



• $m(\lambda)=\varphi_\lambda\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)=1+\ln\left(1+\lambda\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\right)-1+\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}+\ln\lambda$.

Scanned by CamScanner

b) • m est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $\lambda > 0$, $m'(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda^2}$.

Le signe de $m'(\lambda)$ est alors celui de $\lambda - 1$.
Donc si $0 < \lambda < 1$, alors $m'(\lambda) < 0$. D'où m est strictement décroissante sur $]0, 1[$.
si $1 < \lambda$, alors $m'(\lambda) > 0$. D'où m est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
• Notons que $m(1) = 1$. Donc m est minorée par 1, donc pour tout réel $\lambda > 0$, on a $m(\lambda) > 0$.

c) - φ_λ est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{\lambda}, 1-\frac{1}{\lambda}\right[$, et $\varphi_\lambda\left(\left]-\frac{1}{\lambda}, 1-\frac{1}{\lambda}\right[\right) = \left]-\infty, \frac{1}{\lambda} + \ln\lambda\right[$.

Comme 0 appartient à $\left]-\infty, \frac{1}{\lambda} + \ln\lambda\right[$, alors l'équation $\varphi_\lambda(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left]-\frac{1}{\lambda}, 1-\frac{1}{\lambda}\right[$.

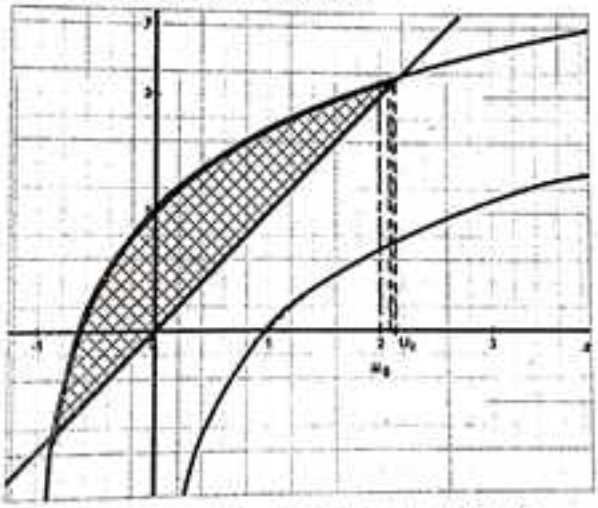
- φ_λ est continue et strictement décroissante sur $\left]1-\frac{1}{\lambda}, +\infty\right[$, et $\varphi_\lambda\left(\left]1-\frac{1}{\lambda}, +\infty\right[\right) = \left]-\infty, \frac{1}{\lambda} + \ln\lambda\right[$.

Comme 0 appartient à $\left]-\infty, \frac{1}{\lambda} + \ln\lambda\right[$, alors l'équation $\varphi_\lambda(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left]1-\frac{1}{\lambda}, +\infty\right[$.

Puisque $m(\lambda) \neq 0$, alors l'équation $\varphi_\lambda(x) = 0$ admet exactement, deux solutions sur $]0, +\infty[$.
Par conséquent, (C_λ) et (D) se coupent en deux points distincts lorsque λ est strictement positif.

Partie B :

1)a) Puisque $f_1(x) = 1 + \ln(1 + x)$, alors (C_1) est l'image de (Γ) par la translation de vecteur de coordonnées (-1 , 1).
b) Représentons graphiquement la courbe (C_1) et la droite (D) :



2) On a $\varphi_1(2) = 1 + \ln 3 - 2 = \ln 3 - 1 > 0$ et $\varphi_1(3) = 1 + \ln 4 - 3 = \ln 4 - 2 < 0$.
Puisque $\varphi_1(2)\varphi_1(3) < 0$, alors on a : $2 < q < 3$.
3) Comme la courbe (C_1) est au dessus de (D), alors l'aire à calculer est égale à :

$$9\times\int_p^q f(x) - x\,dt = 9\times\int_p^q 1 - x + \ln(1+x)dt = 9\left(\int_p^q (1-x)dt + \int_p^q \ln(1+x)dt\right)$$

$$= 9\left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_p^q + 9\times\int_p^q \ln(1+x)dt$$

$$= 9\left(q - p - \frac{1}{2}(q^2 - p^2)\right) + \int_p^q \ln(1+x)dt$$

Utilisons une intégration par parties pour calculer : $\int_p^q \ln(1+x)dx$.

Pour cela, posons $u'(x) = 1$ pour $u(x) = 1 + x$ et $v(x) = \ln(1 + x)$ pour $v'(x) = \frac{1}{1+x}$. On a alors :

Scanned by CamScanner

$\int_p^q \ln(1+x)dx = \left[(1+x)\ln(1+x)\right]_p^q - \int_p^q 1dx = (1+q)\ln(1+q) - (1+p)\ln(1+p) - \left[x\right]_p^q$

$= (1+q)\ln(1+q) - (1+p)\ln(1+p) - q + p$

Comme p et q sont les abscisses des points de rencontre de (C_1) et (D), alors $\ln(1+p) = p-1$ et $\ln(1+q) = q-1$.

Alors $\int_p^q \ln(1+x)dx = (1+q)(q-1) - (1+p)(p-1) - q + p = q^2 - p^2 - q + p$.

Ainsi, l'aire à calculer est égale à : $9\left(q - p - \frac{1}{2}(q^2 - p^2) + q^2 - p^2 - q + p\right) = \frac{9}{2}(q^2 - p^2)$. Soit $\frac{9}{2}(q^2 - p^2)\ cm^2$.

Partie C :

a) Pour la représentation de u_1 et u_2 sur $(O ; \vec{i})$, voir la courbe ci-dessus.

b) On le montrera par récurrence.

Pour cela, considérons la propriété P_n : « $u_{n+1} \geq u_n$ et $u_n \leq q$ ».

On a : • $u_0 = 2$ qui est inférieur à q (d'après la question 2) Partie B).

• $u_1 = f_1(u_0) = f_1(2) = 1 + \ln 3$. Or on a $2 \leq 1 + \ln 3$, donc on a $u_1 \geq u_0$. D'où P_0 est vraie.

Supposons P_k vraie (c'est-à-dire $u_{k+1} \geq u_k$ et $u_k \leq q$) pour un entier naturel k donné.

Alors puisque f_1 est une fonction croissante, on a aussi : $f_1(u_{k+1}) \geq f_1(u_k)$ et $f_1(u_k) \leq f_1(q)$.

C'est-à-dire $u_{k+2} \geq u_{k+1}$ et $u_{k+1} \leq q$.

Rappelons q est solution de l'équation $\varphi_1(x) = 0$, c'est-à-dire $\varphi_1(q) = 0$.

Donc $f_1(q) - q = 0$. Donc $f_1(q) = q$. D'où P_{k+1} est aussi vraie.

Finalement, on a pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq u_n$ et $u_n \leq q$.

C'est-à-dire que la suite (u_n) est croissante et majorée par q.

c) Comme la suite (u_n) est croissante et majorée par q, alors elle est bornée par $u_0 = 2$ et $q \leq 3$.

Or pour tout réel $x > -1$, on a : $f_1'(x) = \frac{1}{1+x}$.

Ainsi, si $2 \leq x \leq 3$, alors on a $3 \leq 1 + x \leq 4$. Donc $\frac{1}{4} \leq f_1'(x) \leq \frac{1}{3}$.

Puisque pour tout entier naturel n, q et u_n appartiennent à [2 , 3] et $u_n \leq q$, alors en utilisant l'inégalité des accroissements finis, on a : $\frac{1}{4}(q - u_n) \leq f_1(q) - f_1(u_n) \leq \frac{1}{3}(q - u_n)$. C'est-à-dire $\frac{1}{4}(q - u_n) \leq q - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(q - u_n)$.

D'où, pour tout entier naturel n, on a : $q - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(q - u_n)$.

d) • Considérons la propriété P_n : « $q - u_n \leq \frac{1}{3^n}(q - u_0)$ ».

On a : $\frac{1}{3^0}(q - u_0) = q - u_0$. Donc on a $q - u_0 \leq \frac{1}{3^0}(q - u_0)$. D'où P_0 est vraie.

Supposons P_k vraie (c'est-à-dire $q - u_k \leq \frac{1}{3^k}(q - u_0)$) pour un entier naturel k donné.

Alors on a $\frac{1}{3}(q - u_k) \leq \frac{1}{3^{k+1}}(q - u_0)$ (1).

Or d'après la question précédente, on a : $q - u_{k+1} \leq \frac{1}{3}(q - u_k)$ (2).

Alors de (1) et (2), on peut déduire que $q - u_{k+1} \leq \frac{1}{3^{k+1}}(q - u_0)$. D'où P_{k+1} est aussi vraie.

Finalement, pour tout entier naturel n, on a : $q - u_n \leq \frac{1}{3^n}(q - u_0)$.

• Puisque pour tout entier naturel n, on a :

Scanned by CamScanner

$0 \le q - u_n \le \frac{1}{3^n}(q-u_0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n}(q-u_0) = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (q-u_n) = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = q$.

D'où la suite (u_n) converge vers q.

e) Rappelons qu'on a : $2 < q < 3$. Donc $0 < q-2 < 1$, c'est-à-dire $0 < q - u_0 < 1$.

Donc on a : $\frac{1}{3^n}(q-u_0) < \frac{1}{3^n}$. Donc $0 \le q-u_n \le \frac{1}{3^n}$. D'où on a : $|q-u_n| \le \frac{1}{3^n}$.

u_k est une valeur approchée de q à 10^{-2} près lorsque $|q-u_k| \le 10^{-2}$.

Or, si on a $\frac{1}{3^k} \le 10^{-2}$, alors on a aussi $|q-u_k| \le 10^{-2}$.

Comme $\frac{1}{3^k} \le 10^{-2} \Leftrightarrow 3^k \ge 100 \Leftrightarrow k\ln 3 \ge \ln 100 \Leftrightarrow k \ge \frac{\ln 100}{\ln 3} \Leftrightarrow k \ge 4{,}19$; alors on peut prendre k = 5.

Finalement, une valeur approchée q à 10^{-2} près est u_5.

Solution 75

1) La fonction tangente est continue et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout réel x, on a : $\tan'x = 1+\tan^2 x > 0$.

La fonction tan est donc continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Par conséquent, elle réalise une bijection de

$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{\pi}{2}} \tan x, \lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{2}} \tan x\right[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$.

Finalement, la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ admet une réciproque définie sur $\mathbb{R}$.

2) • La fonction tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle, alors sa réciproque arctan est dérivable sur $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$.

• Pour tout réel x, $\arctan'x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$. D'où $\arctan'x = \frac{1}{1+x^2}$.

3) Rappelons que la fonction φ est définie sur $\mathbb{R}^*$, donc elle n'est pas définie en 0.

arctan étant dérivable en 0, on a $\lim\limits_{x\to0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to0} \frac{\arctan x}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\arctan x - \arctan 0}{x-0} = \arctan'0 = 1$.

Puisque la fonction φ n'est pas définie en 0 et $\lim\limits_{x\to0} \varphi(x) = 1 \in \mathbb{R}$, alors la fonction φ admet un prolongement par continuité en 0 qui est la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \psi(x) = \frac{\arctan x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \psi(0) = 1 \end{cases}$.

4) • $\arctan''x = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, donc $\arctan''0 = 0$.

• $\arctan'''x = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3}$, donc $\arctan'''0 = -2$.

5) Soit $x > 0$, étudions les fonctions δ et β définies sur $]0,+\infty[$ par :

$\delta(x) = x - \arctan x$ et $\beta(x) = x - \frac{x^3}{3} - \arctan x$.

Scanned by CamScanner

• δ est dérivable sur $]0,+\infty[$ car somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$\delta'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0$; donc δ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et de plus, $\delta(0) = 0$, alors δ est minorée par 0. Par conséquent, pour tout $x > 0$, on a $\delta(x) > 0$. D'où, $x - \arctan x \geq 0$. (1)

• β est dérivable sur $]0,+\infty[$ car somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$\beta'(x) = 1 - x^2 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{-x^4}{1+x^2} < 0$; donc β est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et de plus, $\beta(0) = 0$, alors β est majorée par 0. Par conséquent, pour tout $x > 0$, on a $\beta(x) < 0$.

D'où, $x - \frac{x^3}{3} - \arctan x \leq 0$. C'est-à-dire, $x - \arctan x \leq \frac{x^3}{3}$. (2)

Des inégalités (1) et (2), on déduit que : $0 \leq x - \arctan x \leq \frac{x^3}{3}$ pour tout $x > 0$.

6) D'après la question 5), on a pour tout $t > 0$, $0 \leq t - \arctan t \leq \frac{t^3}{3}$, donc $0 \leq \frac{t - \arctan t}{t} \leq \frac{t^2}{3}$.

Ainsi, soit $x > 0$, on a : $0 \leq \int_0^x \frac{t - \arctan t}{t} dt \leq \int_0^x \frac{t^2}{3} dt$. C'est-à-dire $0 \leq \int_0^x \frac{t - \arctan t}{t} dt \leq \frac{x^3}{9}$.

En multipliant tous les membres de cet encadrement par $\frac{1}{x}$, on a $0 \leq \frac{1}{x}\int_0^x \frac{t - \arctan t}{t} dt \leq \frac{x^2}{9}$.

C'est-à-dire par conséquent que pour tout $x > 0$, on a : $0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{9}$.

7) • D'après la question 6), pour tout $x > 0$, on a $0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{9}$. C'est-à-dire $1 - \frac{x^2}{9} \leq f(x) \leq 1$.

De plus, $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \left(1 - \frac{x^2}{9}\right) = 1 = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 1$, alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = 1$.

Comme f n'est pas définie en 0 et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = 1$, alors f admet un prolongement par continuité en 0 à droite qui est la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} F(x) = f(x) & \text{si } x > 0 \\ F(0) = 1 \end{cases}$

• Soit $x > 0$, on a $\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 1}{x}$.

Or d'après la question 6), pour $x > 0$, $-\frac{x^2}{9} \leq f(x) - 1 \leq 0$, donc $-\frac{x}{9} \leq \frac{f(x) - 1}{x} \leq 0$. C'est-à-dire

$-\frac{x}{9} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq 0$.

Comme $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} -\frac{x}{9} = 0 = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 0$, alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 0$.

On en déduit que F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

Finalement, la pente de la tangente à la courbe de f en ce point est 0.

8) Soit $x \geq 1$ et $1 \leq t \leq x$, on a $\frac{\pi}{4} \leq \arctan t < \frac{\pi}{2}$, donc $\frac{\pi}{4} \times \frac{1}{t} \leq \frac{\arctan t}{t} \leq \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{t}$, donc

$\frac{\pi}{4}\int_1^x \frac{1}{t} dt \leq \int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt \leq \frac{\pi}{2}\int_1^x \frac{1}{t} dt$. C'est-à-dire $\frac{\pi}{4}\ln x \leq \int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt \leq \frac{\pi}{2}\ln x$.

Finalement, si $x \geq 1$, alors on a $\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt \leq \frac{\pi}{2}\ln x$.

Scanned by CamScanner

9) Remarquons que,

$1-f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{t-\arctan t}{t}dt \Leftrightarrow 1-f(x)=\frac{1}{x}\left(\int_0^x 1dt-\int_0^x\frac{\arctan t}{t}dt\right) \Leftrightarrow 1-f(x)=1-\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\arctan t}{t}dt.$

D'où $f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\arctan t}{t}dt$.

Soit $x\geq 1$, on a $\int_0^x\frac{\arctan t}{t}dt=\int_0^1\frac{\arctan t}{t}dt+\int_1^x\frac{\arctan t}{t}dt$.

Or d'après la question 8, on a $0\leq\int_1^x\frac{\arctan t}{t}dt\leq\frac{\pi}{2}\ln x$, alors on peut écrire $0\leq\frac{1}{x}\int_1^x\frac{\arctan t}{t}dt\leq\frac{\pi}{2}\frac{\ln x}{x}$.

D'où $\frac{1}{x}\int_0^1\frac{\arctan t}{t}dt=\frac{1}{x}\int_0^1\frac{\arctan t}{t}dt+\frac{1}{x}\int_1^x\frac{\arctan t}{t}dt\leq\frac{\pi}{2}\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\int_0^1\frac{\arctan t}{t}dt$.

Comme $\int_0^1\frac{\arctan t}{t}dt$ est une constante, alors $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^1\frac{\arctan t}{t}dt=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^1\frac{\arctan t}{t}dt+\frac{\pi}{2}\frac{\ln x}{x}\right)=0$;

ainsi d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\arctan t}{t}dt=0$. C'est-à-dire $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

10) g est définie sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x>0$, on a :

$g(x)=x^2f'(x)=x^2\left(-\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{\arctan t}{t}dt+\frac{1}{x}\times\frac{\arctan x}{x}\right)=-\int_0^x\frac{\arctan t}{t}dt+\arctan x$.

D'où pour tout $x>0$, on a $g(x)=-\int_0^x\frac{\arctan t}{t}dt+\arctan x$.

11) Soit $x>0$, on a $h(x)=xg'(x)=x\left(-\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{1+x^2}\right)=-\arctan x+\frac{x}{1+x^2}$.

Donc $h'(x)=-\frac{1}{1+x^2}+\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{-1-x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{-2x^2}{(1+x^2)^2}$. Finalement, $h'(x)=\frac{-2x^2}{(1+x^2)^2}$.

12) • Pour tout $x>0$, on a $h'(x)<0$, donc h est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

• $\lim_{x\xrightarrow{>}0}h(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(-\arctan x+\frac{x}{1+x^2}\right)=0$.

$\lim_{x\xrightarrow{>}0}h(x)=0$ et h étant strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, alors h est majorée par 0 et n'atteint pas ce majorant 0. Donc pour tout $x>0$, on a $h(x)<0$.

D'après la question 11), pour tout $x>0$, on a $h(x)=xg'(x)$, donc $g'(x)=\frac{h(x)}{x}<0$.

Donc g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

• Notons qu'on a $g(x)=x^2f'(x)$ et $\lim_{x\xrightarrow{>}0}f'(x)=F'(0)=0$, donc $\lim_{x\xrightarrow{>}0}g(x)=0$.

Puisque $\lim_{x\xrightarrow{>}0}g(x)=0$ et g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, alors g est majorée par 0 et n'atteint pas ce majorant 0. Donc pour tout $x>0$, on a $g'(x)<0$.

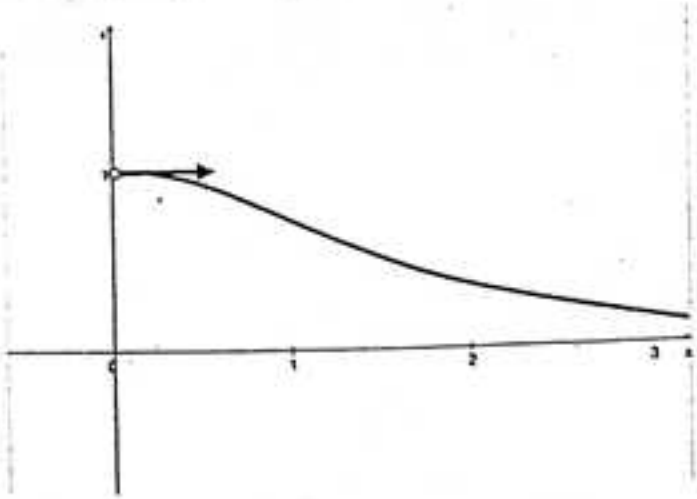
De plus $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}<0$, alors f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

• Tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
f'(x)	0	−
f(x)	1	↘ 0

Scanned by CamScanner

L'allure de la courbe de f :



Scanned by CamScanner

RAPPEL DU COURS

A. L'équation $y' + ay = 0$ (où a est un réel)

A_1 – Vocabulaire

- Les équations du type $y' + ay = 0$ (a réel) sont appelées des équations différentielles linéaires du premier ordre, à coefficients constants, sans second membre.
- Les solutions des équations différentielles sont des fonctions.

Une fonction f est solution sur un intervalle I de l'équation $y' + ay = 0$ lorsque f est dérivable sur I et pour tout réel x de I, on a : $f'(x) + af(x) = 0$.

- Résoudre une équation différentielle c'est trouver toutes les fonctions solutions de cette équation.

A_2 – Résolution de l'équation $y' + ay = 0$

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (où a est un réel donné) sont les fonctions $x \mapsto ke^{-ax}$ (où k est un réel quelconque).

Remarque : *x_0 et y_0 étant des réels donnés.*
Il existe une unique solution de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ qui vérifie la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

B. L'équation $y'' + ay' + by = 0$ (où a et b sont des constantes réelles)

B_1 – Vocabulaire

- Les équations du type $y'' + ay + by = 0$ (a et b réels) sont appelées des équations différentielles linéaires du second ordre, à coefficients constants, sans second membre.
- L'équation $r^2 + ar + b = 0$ est l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.

B_2 – Résolution différentielle $y'' + ay' + by = 0$

Résoudre l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ dans un intervalle I, revient à résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes son équation caractéristique associée $r^2 + ar + b = 0$.
Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Equation caractéristique : $r^2 + ar + b = 0$	Fonctions solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$
Deux racines réelles distinctes r_1 et r_2	$x \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ (A et B sont des constantes réelles)
Une racine double réelle α	$x \mapsto (Ax + B)e^{\alpha x}$ (A et B sont des constantes réelles)
Deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ (α et β sont des nombres réels)	$x \mapsto (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$ (A et B sont des constantes réelles)

Remarque : *Il existe une unique solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ qui vérifie la condition initiale $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$; avec x_0, y_0 et z_0 réels donnés.*

Scanned by CamScanner

C. Equations différentielles avec second membre

C_1 – Vocabulaire

Les équations différentielles avec second membre sont les équations différentielles du type $y' + ay = \varphi$ (premier ordre) et $y'' + ay' + by = \varphi$ (second ordre), où φ est une fonction et a et b sont des constantes réelles.
Les équations $y' + ay = 0$ et $y'' + ay' + by = 0$ sont leurs équations différentielles sans second membre (ou équation homogènes) associées respectives.

C_2 – Résolution de l'équation différentielle avec second membre

(E) désigne l'équation différentielle $y' + ay = \varphi$ (premier ordre) ou $y'' + ay' + by = \varphi$ et (E') désigne son équation différentielle sans second membre associée.
Pour résoudre l'équation (E) :

- On détermine une solution g de (E). C'est le point délicat, mais toutes les indications sont toujours fournies.
- On montre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E').
- On résoud alors l'équation différentielle homogène (E').

Soit h la forme générale des solutions de (E'), les solutions de (E) sont les fonctions $f = g + h$.

Le vocabulaire utilisé est le suivant :
f est la solution générale de (E).
g est une solution particulière de (E).
h est la solution générale de (E').
Une solution d'une équation différentielle est encore appelée une intégrale.

Scanned by CamScanner

A. Résoudre une équation différentielle linéaire

1 – Du premier ordre sans second membre

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles : a) $y' - 3y = 0$ b) $3y' + 4y = 0$.

Solution 1

a) Les solutions de cette équation sont les fonctions $f : x \mapsto Ae^{3x}$, A étant une constante réelle quelconque.

b) les solutions de cette équation sont les fonctions $f : x \mapsto Ae^{-\frac{4}{3}x}$, A étant une constante réelle quelconque.

2 – Du second ordre sans second membre

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles :
a) $y'' = y$ b) $y'' - 2y' + y = 0$ c) $y'' + y' + y = 0$.

Solution 2

a) Une équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' = y$ est $r^2 = 1$.
La résolution de cette équation caractéristique aboutit à deux solutions réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$.
D'où les fonctions solutions de l'équation différentielle $y'' = y$ sont les fonctions $f : x \mapsto Ae^x + Be^{-x}$, A et B étant des constantes réelles.

b) Une équation caractéristique associée à $y'' - 2y' + y = 0$ est $r^2 - 2r + 1 = 0$.
On obtient une racine double $r = 1$. D'où les fonctions solutions de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$ sont les fonctions $f : x \mapsto (Ax + B)e^x$, A et B étant des constantes réelles.

c) Une équation caractéristique associée à $y'' + y' + y = 0$ est $r^2 + r + 1 = 0$.

Cette équation caractéristique a deux solutions distinctes non réelles : $r_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D'où les fonctions solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ sont les fonctions f :

$$f : x \mapsto \left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]e^{-\frac{1}{2}x}$$, A et B étant des nombres réels.

D. Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle linéaire sans second membre

Exercice 3

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 0$.
b) Déterminer la solution de (E) dont la courbe passe par le point A(0 , 1).

Solution 3

a) Les solutions de (E) sont les fonctions $f_k : x \mapsto ke^{-2x}$, où k est un réel.

b) La courbe de f_k passe par le point A(0 , 1) si et seulement si $f_k(0) = 1$, c'est-à-dire $k = 1$.
La solution de (E) dont la courbe passe par A est donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}$.

Scanned by CamScanner

Exercice 4 Extrait d'un BAC étranger

a) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle : $y'' - y' - 2y = 0$.

b) Déterminer la solution g, sur $\mathbb{R}$, qui vérifie : $g(0) = 3$ et $g'(0) = 0$.

Solution 4

a) Une équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = 0$ est $r^2 - r - 2 = 0$, qui admet deux racines réelles : $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$.

D'où les solutions de l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = 0$ sont les fonctions $g : x \mapsto Ae^{-x} + Be^{2x}$, A et B étant des réels quelconques.

b) $g(x)$ est de la forme : $g(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}$, A et B étant des réels.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x) = -Ae^{-x} + 2Be^{2x}$.

Or $g(0) = 3$, c'est-à-dire $A + B = 3$. Et $g'(0) = 0$, c'est-à-dire $-A + 2B = 0$.

On a alors à résoudre le système : $\begin{cases} A + B = 3 \\ -A + 2B = 0 \end{cases}$, qui admet pour solutions $A = 2$ et $B = 1$.

La fonction g cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^{-x} + e^{2x}$.

Exercice 5 Extrait d'un BAC étranger

On considère l'équation différentielle $g''(x) - 2g'(x) + g(x) = 0$. Où g est une fonction définie et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ que l'on cherche à déterminer.

1) Résoudre cette équation différentielle.

2) Déterminer la solution de cette équation qui vérifie les deux conditions suivantes :

- La courbe représentative de cette solution passe par le point A(0 , 4).
- La tangente à cette courbe au point A a pour coefficient directeur 2.

(On suppose le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} , \vec{v})$).

Solution 5

1) Une équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$ est $r^2 - 2r + 1 = 0$, qui a une racine double $r = 1$. D'où les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (Ax + B)e^x$, où A et B sont des nombres réels.

2) Pour tout réel x, $g(x) = (Ax + B)e^x$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x) = (Ax + A + B)e^x$.

$g(0) = 4$ signifie $B = 4$. (1)

$g'(0) = 2$ signifie $A + B = 2$ (2).

De (1) et (2), on déduit que $A = -2$ et $B = 4$.

La fonction cherchée est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-2x + 4)e^x$.

Exercice 6

a) Résoudre l'équation différentielle (1) : $9y'' + y = 0$.

b) Déterminer la fonction f, solution particulière de (1) vérifiant : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 3$.

c) Déterminer la fonction g, solution particulière de (1) vérifiant : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = 0$ et $\int_0^{\pi} g(x)dx = 3$.

Solution 6

a) L'équation caractéristique de (1) est : $9r^2 + 1 = 0$. Elle a pour racines : $r' = \frac{1}{3}i$ et $r'' = -\frac{1}{3}i$.

Les solutions de l'équation (1) sont donc les fonctions $f : x \mapsto A\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + B\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$, où A et B sont des constantes réelles.

b) f est une solution de (1), donc f(x) est sous la forme $f(x) = A\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + B\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$.

Scanned by CamScanner

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $f'(x) = -\frac{1}{3}A\sin\left(\frac{1}{3}x\right) + \frac{1}{3}B\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$.

f(0) = 0 équivaut à A = 0. Et f '(0) = 3 équivaut à B = 9.

Donc la solution particulière cherchée est la fonction $f : x \mapsto 9\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$.

c) Soit x un nombre réel, $g(x) = A\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + B\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$.

Une primitive de g est la fonction $G : x \mapsto 3A\sin\left(\frac{1}{3}x\right) - 3B\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$.

Donc : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G(0) = \frac{3}{2}A - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 3\right)B$ et $\int_0^{\pi} g(x)dx = G(\pi) - G(0) = \frac{3\sqrt{3}}{2}A + \frac{3}{2}B$.

Ainsi, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = 0$ et $\int_0^{\pi} g(x)dx = 3$ signifie $\frac{3}{2}A - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 3\right)B = 0$ et $\frac{3\sqrt{3}}{2}A + \frac{3}{2}B = 3$

On en déduit alors que A = -1 et $B = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$. Finalement, $g(x) = -\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + (2+\sqrt{3})\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$.

Exercice 7

Soient les fonctions f et g, définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \cos t - \sin t$ et $g(t) = \sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$.

a) Montrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (1) : y" + y = 0 et satisfait aux conditions f(0) = 1 et f '(0) = -1.

b) Montrer que la fonction g est également solution de l'équation différentielle (1) et satisfait aux mêmes conditions que f.

Solution 7

a) Soit t un nombre réel, f '(t) = -sint – cost et f "(t) = - cost + sint, donc f "(t) + f(t) = - cost + sint + cost – sint = 0.
On en déduit que f est solution de (1).
De plus, f(0) = cos0 – sin0 = 1, et f '(0) = - sin0 – cos0 = -1.
D'où la fonction f est solution de l'équation différentielle (1) : y" + y = 0 et satisfait aux conditionsf(0) = 1 et f '(0) = -1.

b) Soit t un nombre réel, $g'(t) = -\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ et $g''(t) = -\sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Donc $g''(t) + g(t) = -\sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 0$. g est donc solution de (1).

$g(0) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ et $g'(0) = -\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

D'où la fonction g est solution de l'équation (1) : y" + y = 0 et satisfait aux conditions g(0) = 1 et g'(0) = -1.
Remarque : *f et g étant des solutions de (1) vérifiant la condition ci-dessus citée, on peut conclure que f = g.*

C. Résoudre des équations différentielles linéaires avec second membre

Exercice 8 BAC

Soit l'équation (E_1) : f "(x) – 3f '(x) + 2f(x) = $8x^2 - 24x$, où f est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
1) Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction g, telle que $g(x) = ax^2 + bx + c$, soit solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$
2) Démontrer que f est solution de (E_1) si et seulement si h = f – g est solution de (E_2) : h" –3h'+2h =0.
3) Résoudre (E_2).
En déduire les solutions de l'équation (E_1).
4) Déterminer la solution particulière φ de (E_1) telle que φ(0) = 0 et φ'(0) = 0.

Scanned by CamScanner

Solution 8

1) g est solution de (E_1) $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) = 8x^2 - 24x$
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 8x^2 - 24x$
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $2ax^2 + (-6a + 2b)x + 2a - 3b + 2c = 8x^2 - 24x$
$\Leftrightarrow$ $2a = 8$, $-6a + 2b = -24$ et $2a - 3b + 2c = 0$
$\Leftrightarrow$ $a = 4$, $b = 0$, $c = -4$.

Donc $g(x) = 4x^2 - 4$.

2) f est solution de (E_1) $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 8x^2 - 24x$
$\Leftrightarrow$ pour tout réel, $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = g''(x) - 3g'(x) + 2g(x)$
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $(f'' - g'')(x) - 3(f' - g')(x) + 2(f - g)(x) = 0$
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $(f - g)''(x) - 3(f - g)'(x) + 2(f - g)(x) = 0$
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $h''(x) - 3h'(x) + 2h(x) = 0$
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $(h'' - 3h' + 2h)(x) = 0$
$\Leftrightarrow$ $h'' - 3h' + 2h = 0$.
$\Leftrightarrow$ h est solution de (E_2).

En conclusion, f est solution de (E_1) si et seulement si $h = f - g$ est solution de (E_2) : $h'' - 3h' + 2h = 0$.

3) • Une solution caractéristique de (E_2) est $r^2 - 3r + 2 = 0$, qui admet pour solutions $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$.

D'où la solution générale de (E_2) est la fonction $h : x \mapsto Ae^x + Be^{2x}$, où A et B sont des réels.

• Et la solution générale de (E_1) est $f : x \mapsto Ae^x + Be^{2x} + 4x^2 - 4$, A et B étant des réels.

4) $\varphi(x)$ est de la forme : $\varphi(x) = Ae^x + Be^{2x} + 4x^2 - 4$.
φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\varphi'(x) = Ae^x + 2Be^{2x} + 8x$.
$\varphi(0) = 0$ signifie $A + B - 4 = 0$ et $\varphi'(0) = 0$ signifie $A + 2B = 0$

On obtient le système : $\begin{cases} A + B = 4 \\ A + 2B = 0 \end{cases}$, qui permet de conclure que $A = 8$, $B = -4$ et $\varphi(x) = 8e^x - 4e^{2x} + 4x^2 - 4$.

Exercice 9

On considère l'équation différentielle : $y' + 4y = 3e^{-5x}$ (E).
1) Déterminer le réel λ tel que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \lambda e^{-5x}$ soit une solution de (E).
2) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 4y = 0$.
3) Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation (E').
4) En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Solution 9

1) g est solution de (E) $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $g'(x) + 4g(x) = 3e^{-5x}$
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $-5\lambda e^{-5x} + 4\lambda e^{-5x} = 3e^{-5x}$
$\Leftrightarrow$ $\lambda = -3$

D'où la fonction $g : x \mapsto -3e^{-5x}$ est une solution de (E).

2) f est solution de (E) $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $f'(x) + 4f(x) = 3e^{-5x}$.
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $f'(x) + 4f(x) = g'(x) + 4g(x)$
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $(f - g)'(x) + 4(f - g)(x) = 0$.
$\Leftrightarrow$ $(f - g)' + 4(f - g) = 0$
$\Leftrightarrow$ $f - g$ est solution de (E').

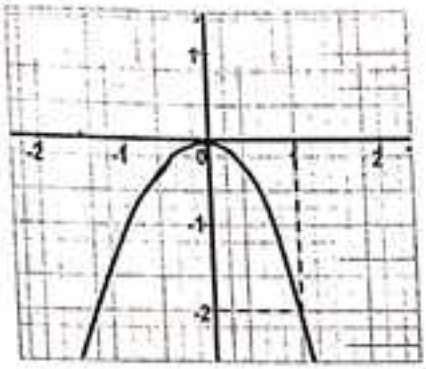
D'où f est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle (E').
3) Les solutions de (E') sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = Ce^{-4x}$, où C est une constante réelle.
4) D'après les questions 2) et 3),
f est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $f - g$ est solution de (E')
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $f(x) - g(x) = Ce^{-4x}$, où C est une constante réelle.
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $f(x) = Ce^{-4x} + g(x)$, où C est une constante réelle.
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $f(x) = Ce^{-4x} - 3e^{-5x}$, où C est une constante réelle.

Scanned by CamScanner

D'où les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies pour tout réel x par : $x \mapsto Ce^{-4x} - 3e^{-5x}$, où C est une constante réelle.

Exercice 10

1) Résoudre l'équation différentielle $y' - 3y = 0$ (E)
2) Déterminer un polynôme du second degré P solution de l'équation $y' - 3y = 3x^2 - 2x$. (E')
3) Démontrer que les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{3x} - x^2$, où k est un réel donné quelconque, sont solutions de l'équation différentielle (E).
4) La courbe (C) ci-dessous représente une des fonctions f_k.
Déterminer une équation de la courbe (C).



Solution 10

1) Les solutions dans $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions : $x \mapsto Ce^{3x}$, où C est une constante réelle.
2) Soit P un polynôme de degré deux, il existe trois réels a, b et c tels que pour tout réel x, $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

P est solution de (E') $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $P'(x) - 3P(x) = 3x^2 - 2x$
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $2ax + b - 3ax^2 - 3bx - 3c = 3x^2 - 2x$
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $-3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c = 3x^2 - 2x$
$\Leftrightarrow$ $-3a = 3$, $2a - 3b = -2$ et $b - 3c = 0$
$\Leftrightarrow$ $a = -1$, $b = 0$ et $c = 0$.

D'où le polynôme P tel que pour tout réel x, $P(x) = -x^2$ est une solution de (E').
3) f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : $f_k'(x) = 3ke^{3x} - 2x$ et
$f_k'(x) - 3f_k(x) = 3ke^{3x} - 2x - 3ke^{3x} + 3x^2 = 3x^2 - 2x$. Donc les fonctions f_k sont solutions de (E).
4) La courbe (C) passe par le point de coordonnées (1 , - 2). C'est-à-dire $f_k(1) = -2$. Donc $ke^3 - 1 = -2$.
On en déduit que $k = -e^{-3}$ et la fonction cherchée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto -e^{-3x-3} - x^2$.
Une équation de (C) est : $y = -e^{3x-3} - x^2$.

Exercice 11 Extrait d'un BAC étranger

On se propose de résoudre l'équation (E) : $y' - 2y = \dfrac{-2}{1+e^{2x}}$.

1) Soit g fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f la fonction définie par $f(x) = e^{2x}g(x)$.
Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.
2) En déduire des solutions de (E).

Solution 11

1) f est solution de (E) $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $f'(x) - 2f(x) = \dfrac{-2}{1+e^{2x}}$

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $2e^{2x}g(x) + e^{2x}g'(x) - 2e^{2x}g(x) = \dfrac{-2}{1+e^{2x}}$

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $e^{2x}g'(x) = \dfrac{-2}{1+e^{-2x}}$

Scanned by CamScanner

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

D'où f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

2) On a pour tout réel x, $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$, d'où $g(x) = \ln(1 + e^{-2x}) + k$, k étant un nombre réel.

D'où la solution générale de (E) est la fonction f définie par $f(x) = [\ln(1 + e^{-2x}) + k]e^{2x}$, k étant un nombre réel quelconque.

D. Résoudre d'autres types d'équations différentielles

Exercice 12

Résoudre sur un ensemble à préciser, les équations différentielles :

a) $y' = x + \sin x$ b) $xy' = 1$ c) $y'\sqrt{x} = 1$

d) $y'' = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ e) $y'' = e^{2x} + e^{-2x}$ f) $y'' = 1 + \tan^2 x$.

Solution 12

a) La fonction $x \mapsto x + \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle y admet des primitives.
y est une primitive de la fonction $x \mapsto x + \sin x$ sur $\mathbb{R}$.

D'où les solutions de l'équation $y' = x + \sin x$, sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \cos x + k$, où k est une constante réelle.

b) $xy' = 1$ équivaut à $y' = \frac{1}{x}$. Or la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, donc elle y admet des primitives. y est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

D'où les solutions de l'équation $xy' = 1$, sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}^*$ par : $x \mapsto \ln|x| + k$, où k est une constante réelle.

c) $y'\sqrt{x} = 1$ équivaut à $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Or la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, elle y admet donc des primitives.

y est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$. D'où les solutions de l'équation différentielle $y'\sqrt{x} = 1$, sont les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par : $x \mapsto 2\sqrt{x} + k$, où k est une constante réelle.

d) y' est une primitive de y''. Donc y' est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - x + k$, où k est une constante réelle. y est une primitive de y', donc les solutions de l'équation différentielle : $y'' = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 1$, sont les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{12}x^4 + \frac{7}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + kx + h$, k et h étant des constantes réelles.

e) y' est une primitive de y''. Donc y' est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + k$, où k est une constante réelle, qui est continue sur $\mathbb{R}$.
y est une primitive de y', donc les solutions de l'équation différentielle $y'' = e^{2x} + e^{-2x}$, sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + kx + h$, où k et h sont des constantes réelles.

Scanned by CamScanner

f) y' est une primitive de y'', donc y' est une fonction définie sous la forme : $x \mapsto \tan x + k$, k étant une constante réelle.
y est une primitive de y', donc les solutions de l'équation : $y'' = 1 + \tan^2 x$, sont les fonctions définies sur

$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + t\pi, t \text{ étant un entier relatif}\right\}$ par : $x \mapsto -\ln|\cos x| + kx + h$, où k et h sont des constantes réelles.

Exercice 13

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y''' + 2y'' = 0$. (Poser $z = y''$ et résoudre l'équation différentielle dont z est solution).

Solution 13

On pose $z = y''$.

On obtient alors l'équation différentielle : $z' + 2z = 0$, qui a pour solutions les fonctions z : $x \mapsto Ae^{-2x}$.

$y'' = z$, donc y' est une primitive de z.

Donc y' est une fonction du type : $x \mapsto -\frac{1}{2}Ae^{-2x} + B$, où A et B sont des constantes réelles.

y est une primitive de y'. Donc les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions y :

$$y : x \mapsto \frac{1}{4}Ae^{-2x} + Bx + C \text{ , A , B et C étant des constantes réelles.}$$

Exercice 14

Soit l'équation différentielle : $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$. (E)

1) Vérifier que la fonction h : $x \mapsto e^{2x}$ est solution de (E).

2) Soit f une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et g la fonction $x \mapsto f(x)e^{-2x}$.
Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g''' est la fonction nulle.

3) En déduire les solutions de (E).

Solution 14

1) h est trois fois dérivable et pour tout réel x, on a : $h(x) = e^{2x}$, $h'(x) = 2e^{2x}$, $h''(x) = 4e^{2x}$, $h'''(x) = 8e^{2x}$.
Donc $h'''(x) - 6h''(x) + 12h'(x) - 8h(x) = 8e^{2x} - 24e^{2x} + 24e^{2x} - 8e^{2x} = 0$.

D'où la fonction h : $x \mapsto e^{2x}$ est solution de (E).

2) Soit x un nombre réel, $g(x) = f(x)e^{-2x}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$, car produit de fonctions y dérivables.

$g'(x) = f'(x)e^{-2x} - 2f(x)e^{-2x} = (f'(x) - 2f(x))e^{-2x}$,

$g''(x) = (f''(x) - 2f'(x))e^{-2x} - 2(f'(x) - 2f(x))e^{-2x} = (f''(x) - 4f'(x) + 4f(x))e^{-2x}$

$g^{(3)}(x) = (f'''(x) - 4f''(x) + 4f'(x))e^{-2x} - 2(f''(x) - 4f'(x) + 4f(x))e^{-2x} = (f'''(x) - 6f''(x) + 12f'(x) - 8f(x))e^{-2x}$.

f est solution de (E) $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $f'''(x) - 6f''(x) + 12f'(x) - 8f(x) = 0$

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $(f'''(x) - 6f''(x) + 12f'(x) - 8f(x))e^{-2x} = 0$

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $g'''(x) = 0$

$\Leftrightarrow$ g''' est l'application nulle.

En conclusion, f est solution de (E) si et seulement si g''' est la fonction nulle.

3) g''' est l'application nulle $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $g'''(x) = 0$.

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $g''(x) = A$, où A est une constante réelle

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $g'(x) = Ax + B$, où A et B sont des constantes réelles

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $g(x) = \frac{1}{2}Ax^2 + Bx + C$, où A , B et C sont des constantes réelles. f est solution de (E) si et seulement si, pour tout réel x, $f(x) = e^{2x}g(x)$.

D'où les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(\frac{1}{2}Ax^2 + Bx + C\right)e^{2x}$, où A , B et C sont des constantes réelles.

Exercice 15

Cet exercice a trait à la résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficient non constants.
On appelle E l'ensemble des fonctions numériques f admettant des dérivées f ', f '' et $f^{(3)}$ continues sur $\mathbb{R}$ et

Scanned by CamScanner

vérifiant l'équation différentielle $(x-1)y'' - xy' + y = 0$.
1) Montrer que, si f appartient à E, alors, pour tout réel x différent de 1, on a $f^{(3)}(x) = f''(x)$.
En déduire que, si f est un élément de E, alors $f^{(3)} = f''$, puis que f '' est solution d'une équation différentielle de la forme : $y' - my = 0$ (m étant un réel).
2) A l'aide de deux intégrations, montrer que les éléments de E sont de la forme : $f(x) = ax + be^x$, a et b étant des nombres réels.

Solution 15

1) • Posons pour tout réel x, $h(x) = (x-1)f''(x) - xf'(x) + f(x)$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = f''(x) + (x-1)f^{(3)}(x) - f'(x) - xf''(x) + f'(x) = (x-1)(f^{(3)}(x) - f''(x))$.
Et si f appartient à E, alors pour tout réel x, on a $h(x) = 0$. Donc pour tout réel x, on a $h'(x) = 0$. C'est-à-dire pour tout réel x, $(x-1)(f^{(3)}(x) - f''(x)) = 0$. Donc pour tout réel x différent de 1, $f^{(3)}(x) = f''(x)$.
D'où si f appartient à E, alors, pour tout réel x différent de 1, on a $f^{(3)}(x) = f''(x)$.
• Si f appartient à E, alors pour tout réel $x \neq 1$, on a $f^{(3)}(x) = f''(x)$. Puisque $f^{(3)}$ et f '' sont continues sur $\mathbb{R}$, alors par passage à la limite, on a $f^{(3)}(1) = f''(1)$. Donc $f^{(3)} = f''$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$.
Posons $g = f''$, on obtient alors $g' = g$, c'est-à-dire $g' - g = 0$. D'où f '' est solution de l'équation $y' - y = 0$.
Remarque :
Notons que, dans l'égalité $g' - g = 0$, 0 désigne l'application nulle et non le chiffre zéro.
2) f '' est solution de l'équation $y' - y = 0$. D'où pour tout réel x, $f''(x) = be^x$, où b est un nombre réel.
f ' est une primitive de f '', d'où pour tout réel x différent de 1, on a $f'(x) = be^x + a$, a et b étant des constantes réelles.
f est une primitive de f '. Les éléments de E sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ sous la forme : $f(x) = be^x + ax + c$, où a, b et c sont des constantes réelles.
Or si f appartient à (E), alors pour tout réel x, $(x-1)f''(x) - xf'(x) + f(x) = 0$.
C'est-à-dire $(x-1)be^x - x(be^x + a) + be^x + ax + c = 0$. On en déduit que $c = 0$.
Par conséquent, les éléments de E sont les fonctions définies par $f(x) = ax + be^x$, a et b étant des constantes réelles.

Exercice 16

On se propose de résoudre sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle : $x^2f''(x) + xf'(x) = 0$. (1)
1)a) Montrer que les fonctions $f_1 : x \mapsto \ln x$ et $f_2 : x \mapsto 1$ sont des solutions de l'équation différentielle (1).
b) On pose $g(x) = xf'(x)$ (pour x élément de I), avec f solution de (1).
A quelle équation différentielle la fonction g satisfait-elle ? En déduire l'intégrale générale de (1).
Définition : ***l'intégrale d'une équation différentielle est toute solution de cette équation.***
2) On considère l'équation différentielle définie sur I par : $x^2f''(x) + xf(x) = \dfrac{4 + \ln x}{x}$ (2).
La résoudre en cherchant une solution particulière de la forme $x \mapsto \dfrac{a\ln x + b}{x}$.

Solution 16

1)a) • f_1 est définie et deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour tout réel $x > 0$, on a : $f_1'(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_1''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
Et $x^2f_1''(x) + xf_1'(x) = -1 + 1 = 0$. D'où f_1 est solution de (1).
• f_2 est définie et deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour tout réel $x > 0$, on a $f_2'(x) = f_2''(x) = 0$.
Et $x^2f_2''(x) + xf_2'(x) = 0 + 0 = 0$. D'où f_2 est solution de (1).
b) Soit x dans I, $g(x) = xf'(x)$.
• g est dérivable sur $]0, +\infty[$, car produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = xf''(x) + f'(x)$.
f est solution de (1) $\Leftrightarrow$ pour tout $x > 0$, $x^2f''(x) + xf'(x) = 0$
$\Leftrightarrow$ pour tout $x > 0$, $xg'(x) = 0$
$\Leftrightarrow$ pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = 0$.
Donc g est solution de l'équation différentielle $y' = 0$.
• Comme g est solution de $y' = 0$, alors g' est la fonction nulle sur $]0, +\infty[$.
Et donc g est une fonction constante sur $]0, +\infty[$. C'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que pour tout $x > 0$, $g(x) = k$.
Puisque $g(x) = xf'(x)$, alors $f'(x) = \dfrac{k}{x}$. Et par suite, $f(x) = k\ln x + k'$, k et k' étant des constantes réelles.

Scanned by CamScanner

2) Notons g la fonction $x \mapsto \frac{a\ln x + b}{x}$, x appartenant à I, g est définie et deux fois dérivable sur I.

Pour tout $x > 0$, on a : $g'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{a}{x} - \frac{1}{x^2}(a\ln x + b) = \frac{1}{x^2}(a - b - a\ln x)$.

$$g''(x) = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{a}{x}\right) - \frac{2}{x^3}(a - b - a\ln x) = -\frac{1}{x^3}(-2a\ln x - 2b + 3a).$$

g solution de l'équation (2) $\Leftrightarrow$ pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x}(2a\ln x + 2b - 3a) + \frac{1}{x}(a - b - a\ln x) = \frac{4 + \ln x}{x}$.

$\Leftrightarrow$ pour tout $x > 0$, $a\ln x + b - 2a = \ln x + 4$.

D'où, $a = 1$ et $b - 2a = 4$, donc $a = 1$ et $b = 6$.

D'où la fonction g définie sur I par $g(x) = \frac{6 + \ln x}{x}$ est une solution de l'équation différentielle (2).

f est solution de (2) $\Leftrightarrow$ pour tout $x > 0$, $x^2 f''(x) + xf'(x) = \frac{4 + \ln x}{x}$

$\Leftrightarrow$ pour tout $x > 0$, $x^2 f''(x) + xf'(x) = x^2 g''(x) + xg(x)$

$\Leftrightarrow$ pour tout $x > 0$, $x^2(f'' - g'')(x) + x(f' - g')(x) = 0$

$\Leftrightarrow$ pour tout $x > 0$, $x^2(f - g)''(x) + x(f - g)'(x) = 0$.

$\Leftrightarrow$ pour tout $x > 0$, $f - g$ est solution de (1).

$\Leftrightarrow$ pour tout $x > 0$, $f(x) - g(x) = k\ln x + k'$, k et k' réels.

$\Leftrightarrow$ pour tout $x > 0$, $f(x) = g(x) + k\ln x + k'$, k et k' réels.

D'où les solutions de (2) sont les fonctions définies sur I par : $x \mapsto \frac{6 + \ln x}{x} + k\ln x + k'$, k et k' étant des constantes réelles.

E. Résoudre des problèmes conduisant à la résolution d'une équation différentielle

Exercice 17 ▶▶

Une ville fantôme, avait une population de 512 habitants en 1834,et de 256 habitants en 1840. On admet que la vitesse de diminution de cette population est, à chaque instant, proportionnelle à cette population. En quelle année cette ville est-elle devenue une « ville fantôme » ?

Solution 17

Notons p(t) l'effectif de la population t années après 1834.

Il existe alors une constante réelle a telle que, pour tout réel positif t, $p'(t) = ap(t)$.

p' désigne la vitesse de diminution de la population.

p est donc solution de l'équation différentielle de premier ordre suivante : $p' = ap$.

On en déduit que $p(t) = ke^{at}$, où k est une constante réelle.

$p(0) = 512$ signifie $k = 512$. Et $p(6) = 256$ signifie que $256 = 512e^{6a}$. Donc $e^{6a} = \frac{1}{2}$, et $a = -\frac{\ln 2}{6}$.

En conclusion, $p(t) = 512e^{-\frac{\ln 2}{6}t}$.

La ville deviendra fantôme lorsque l'effectif de sa population deviendra strictement inférieur à 1. Or

$$p(t) < 1 \Leftrightarrow 512e^{-\frac{\ln 2}{6}t} < 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{\ln 2}{6}t} < \frac{1}{512} \Leftrightarrow -\frac{\ln 2}{6}t < -\ln 512 \Leftrightarrow -\frac{\ln 2}{6}t < -9\ln 2 \Leftrightarrow t > 54.$$

D'où la ville est devenue fantôme 55 ans après 1834, soit en 1889.

Exercice 18 ▶

Déterminer une équation de la courbe (C) passant par le point A(1 , 1) et telle qu'en chacun des points M de (C), la tangente ait une pente double du carré de l'ordonnée de M.

Scanned by CamScanner

Solution 18

Soit M(x , y) un point de la courbe (C). La pente de la tangente en M est $\frac{dy}{dx} = y'$.

Or d'après l'énoncé, $y' = 2y^2$. Or,

$y' = 2y^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2y^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = 2dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = 2x + k$, k étant une constante réelle.

$\Leftrightarrow y = \frac{-1}{2x+k}$, où k est une constante réelle.

D'où $y = \frac{-1}{2x+k}$. Or (C) passe par A(1 , 1), c'est-à-dire $\frac{-1}{2+k} = 1$. Donc k = -3.

Une équation de la courbe (C) est donc $y = \frac{-1}{2x-3}$.

Exercice 19

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O.
Trouver toutes les courbes (C) telles qu'en tout point M de (C), la tangente à (C) soit perpendiculaire à la droite (OM).

Solution 19

Soit M(x , y) un point autre que O, appartenant à la courbe (C).

La pente de la tangente à (C) en M est $\frac{dy}{dx}$ et la pente de la droite (OM) est : $\frac{y}{x}$.

Or la tangente à (C) en M est perpendiculaire à la droite (OM) si et seulement si $\frac{y}{x}.\frac{dy}{dx} = -1$, c'est-à-dire ydy = -xdx.

Or $yy' = -x \Leftrightarrow y.dy = -x.dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + k$, k étant une constante réelle $\Leftrightarrow y^2 = -x^2 + 2k$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2k$, avec $k \geq 0$.

Les courbes (C) sont les cercles de centre O.

Exercice 20

Déterminer une équation de la courbe (C) passant par A(1 , 3) et telle qu'en tout point M de (C) la pente de la tangente soit le double de celle de la droite (OM).

Solution 20

Soit M(x , y) un point autre que O, appartenant à la (C).

D'après l'énoncé, on a : $\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x}$.

Or $\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + k$, k est une constante réelle.

$\Leftrightarrow |y| = x^2 e^k$, où k est une constante réelle.

Or pour x = 1, y = 3. D'où $e^k = 3$. C'est-à-dire $|y| = 3x^2$. Une équation de la courbe (C) est $|y| = 3x^2$.

Exercice 21

Une courbe (C) a pour équation y = f(x), où f est une fonction deux fois dérivable. Sachant que, pour tout réel x, $f''(x) = 1 - x^2$ et qu'au point A(1 , 1), la tangente à (C) a pour équation y = 2 – x, déterminer la courbe.

Solution 21

Soit x un nombre réel.

$f''(x) = 1 - x^2$, d'où $f'(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + k$ et par suite $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + kx + k'$, k et k' sont des constantes réelles.

Scanned by CamScanner

Le point A(1 ; 1) appartient à la courbe (C) signifie que f(1) = 1, c'est à dire $k + k' + \frac{5}{12} = 1$ (1)

La pente de la tangente en A à (C) est -1, c'est-à-dire f'(1) = -1 Et f'(1) = -1 signifie que $\frac{2}{3} + k = -1$ (2)

(1) et (2) nous conduisent à écrire que $k = -\frac{5}{3}$ et $k' = \frac{9}{4}$

D'où une équation de (C) est $y = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{9}{4}$.

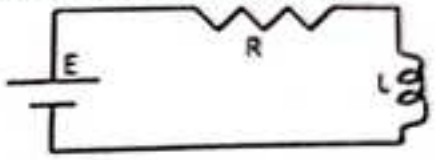
Exercice 22

On établit le courant dans un circuit contenant une bobine d'induction et une résistance.

1) En appliquant la loi d'Ohm aux bornes du générateur, montrer que l'intensité du courant i(t) est telle que
Li'(t) + Ri(t) = E

2) En supposant que i(0) = 0.

Montrer que $i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\alpha}}\right)$, où $\alpha = \frac{L}{R}$ est la constante du circuit.



Solution 22

1) En appliquant la loi des mailles, on a : E – Ri + e = 0. C'est-à-dire E = Ri – e.

Or la force électromotrice induite d'une bobine purement induite est donnée par : $e = -L\frac{di}{dt}$.

D'où $E = Ri + L\frac{di}{dt}$, c'est-à-dire Li'(t) + Ri(t) = E.

2) Li'(t) + Ri(t) = E (1) est une équation différentielle du premier ordre, à coefficients constants, avec second membre, d'inconnue la fonction de temps i.

- Résolvons d'abord l'équation sans second membre associée à (1) : Li'(t) + Ri(t) = 0. (2)

La solution générale de (2) est : $t \longmapsto ke^{-\frac{R}{L}t}$, où k est une constante réelle.

- Cherchons une fonction constante i_0 solution de (1) : on a $i_0'(t) = 0$ et $Li_0'(t) + Ri_0(t) = E$, donc $i_0(t) = \frac{E}{R}$.

- i est solution de (1) $\Leftrightarrow$ pour tout réel $t \geq 0$, Li'(t) + Ri(t) = E.
  $\Leftrightarrow$ pour tout réel $t \geq 0$, Li'(t) + Ri(t) = $Li_0'(t) + i_0(t)$
  $\Leftrightarrow$ pour tout réel $t \geq 0$, $L(i - i_0)'(t) + R(i - i_0)(t) = 0$.
  $\Leftrightarrow$ $L(i - i_0)' + R(i - i_0) = 0$
  $\Leftrightarrow$ $i - i_0$ est solution de (2).
  $\Leftrightarrow$ pour tout réel $t \geq 0$, $i(t) - i_0(t) = ke^{-\frac{R}{L}t}$,
  $\Leftrightarrow$ pour tout réel $t \geq 0$, $i(t) = ke^{-\frac{R}{L}t} + i_0(t)$
  $\Leftrightarrow$ pour tout réel $t \geq 0$, $i(t) = ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$.

Or i(0) = 0, donc $k = -\frac{E}{R}$ et $i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$. C'est-à-dire $i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\alpha}}\right)$, où $\alpha = \frac{L}{R}$.

Exercice 23

Un solide en mouvement oscillatoire harmonique le long d'un axe (*pendule élastique horizontal*) est tel que : son abscisse x(t) sur l'axe vérifie x(0) = 3 et x'(0) = 0. Exprimer x(t) en fonction de t.

Information : ***Dire que le solide est en mouvement oscillatoire harmonique signifie : « il existe un réel non nul ω tel que : $x'' + \omega^2 x = 0$ ».***

Scanned by CamScanner

Solution 23

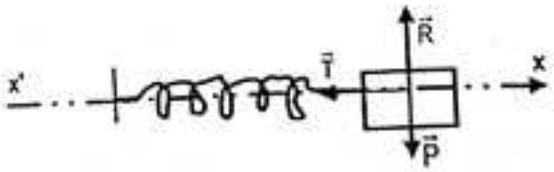
Appliquons le théorème du centre d'inertie au solide (S).

Référentiel : (x'x) supposé galiléen.

Inventaire des forces : $\vec{P}$: poids du solide

$\vec{R}$: réaction du support

$\vec{T}$: tension du ressort



Théorème du centre d'inertie : $\vec{P}+\vec{T}+\vec{R}=m\vec{x}''$.

Projection sur l'axe (x'x) : $0 - kx = mx''$.

$mx'' + kx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x''+\frac{k}{m}x=0$.

Posons $\omega^2 = \frac{k}{m}$. On obtient l'équation différentielle $x'' + \omega^2 x = 0$, dont l'équation caractéristique est $r^2 + \omega^2 = 0$.

On a alors $r = i\omega$ ou $r = -i\omega$. D'où $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, A et B étant des constantes réelles.

Or $x'(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$.

$x(0) = 3$ signifie $A = 3$. Et $x'(0) = 0$ signifie $B = 0$.

Ainsi $x(t) = 3\cos\omega t$, c'est-à-dire $x(t) = 3\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$.

Scanned by CamScanner

En déduire, en cm², l'aire du domaine limité par (C), les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = m$ $(m > 0)$.
Cette aire admet-elle une limite quand m tend vers $+\infty$?

B)1) Soit $G(x) = -e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}\right)$. Montrer que G(x) est une primitive de $[f(x)]^2$.

2) Calculer, en cm³, le volume engendré par la rotation autour de l'axe x'x du domaine précédemment défini.
Ce volume a-t-il une limite quand m tend vers $+\infty$?

C)1) Intégrer l'équation différentielle : $3y'' - 2y' - y = 0$ (1).

2) Montrer que la fonction f, définie dans la partie A, est une solution particulière de $3y'' - 2y' - y = 4xe^{-x}$ (2).
En déduire l'intégrale générale de cette dernière équation.

Exercice 32 — 60 minutes

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, l'unité graphique étant de 2 cm.

A) On considère l'équation différentielle $2y'' - 3y' + y = 0$.

1) Résoudre cette équation.

2) Déterminer la solution de cette équation qui vérifie les deux conditions suivantes :

- La courbe représentative de cette solution passe par l'origine du repère.
- Cette courbe admet à l'origine une tangente de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$.

B) On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{x}$ et (C) la courbe de f dans le $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1) Etudier les variations de f. Préciser les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Déterminer le signe de f(x) en fonction de x.

3) Tracer la courbe (C).

4) Soit k un réel strictement négatif. On note A(k) l'aire en cm² de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = k$ et $x = 0$.
Calculer A(k) en fonction de k. Déterminer la limite de A(k) quand k tend vers $-\infty$.

C) Dans cette partie on se propose d'étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \ln\left|e^{\frac{x}{2}} - e^{x}\right|$.

On note (Γ) la courbe représentant g dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1) Préciser les limites de g en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0.

2) Calculer g'(x) et déterminer le signe de g'(x) en utilisant le signe de f '(x). Dresser le tableau de variation de g

3) Démontrer que pour tout réel x strictement positif : $g(x) - x = \ln\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)$.

Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (Γ).
Etudier la position de la courbe (Γ) par rapport à (D) pour tout x réel strictement positif.

4) Démontrer que pour tout x réel strictement négatif : $g(x) - \frac{x}{2} = \ln\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)$.

Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe Γ.

Etudier la position de (Γ) par rapport à (Δ) pour tout réel x strictement négatif.

5) Construire (Γ), (D) et (Δ) dans $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (utiliser un graphique différent de celui de la partie B)).

Exercice 33 — Concours d'entrée à l'ENSP de Yaoundé – Cameroun – 2003 — 80 minutes

Partie A

On appelle (E) l'équation différentielle $y'' - y = 0$, où y est une fonction d'une variable numérique définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Déterminer les nombres réels r tels que la fonction h, définie par $h(x) = e^{rx}$, soit solution de (E).

2) vérifier que les fonctions φ définies par $\varphi(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x}$, où α et β sont deux réels, sont solutions de (E).

Scanned by CamScanner

On admet qu'on obtient ainsi toutes les solutions de (E).

3) Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe passe par le point de coordonnées $\left(\ln 2 , \frac{3}{4}\right)$ et admet en ce point une tangente dont le coefficient directeur est $\frac{5}{4}$.

Partie B

On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$. On désigne par (C) la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u} , \vec{v})$.

1) Soit μ un nombre réel, montrer que, pour tout réel x, f(x) = μ est équivalent à $e^{2x} - 2\mu e^x - 1 = 0$.
En déduire que l'équation f(x) = μ a une unique solution dans $\mathbb{R}$ et déterminer sa valeur en fonction de μ.
2) Déterminer les limites de f en -∞ et en +∞.
3) Calculer f '(x) pour tout nombre réel x et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
5) En étudiant le sens de variation de la fonction d définie sur $\mathbb{R}$ par d(x) = f(x) – x, préciser la position de (C) par rapport à (T).
6) Tracer (C) et (T) (unité graphique 2 cm).
7) Soit D la partie représentant sur le graphique l'ensemble des points M(x , y) tels que $0 \le x \le 1$ et $x \le y \le f(x)$. Calculer, en cm², l'aire de D.

Partie C

On cherche à caractériser les fonctions Φ, dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que, pour tout réel x, $\Phi(x) - \int_0^x (x-t)\Phi(t)dt = x$; notons (H) cette relation.

1) On suppose qu'il existe une telle fonction Φ.

a) justifier que, pour tout réel x , on a : $\Phi(x) = x + x\int_0^x \Phi(t)dt - \int_0^x t\Phi(t)dt$. Calculer Φ(0).

b) Démontrer que, pour tout réel x, $\Phi'(x) = 1 + \int_0^x \Phi(t)dt$. Calculer Φ'(0).

c) Vérifier que Φ est solution de l'équation différentielle (E) de la **Partie A**).
Déterminer laquelle, parmi toutes les solutions explicitées dans la question A) 2).

2) A l'aide d'une intégration par parties, Calculer $\int_0^x t(e^t - e^{-t})dt$.

3) Démontrer que la fonction trouvée à la question C) 1) c) vérifie la relation (H).

Exercice 34 — 80 minutes

A) On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions numériques g, dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que, pour tout réel x, $g'(x) - g(x) = x - \frac{e-2}{e-1}$ (1).

1) Déterminer l'unique fonction affine g_0 vérifiant (1).
2) On note h = g – g_0.
Démontrer que g vérifie (1) si et seulement si, h est solution de l'équation différentielle : y' – y = 0 (2).
3) Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (2) et en déduire l'ensemble des fonctions g vérifiant (1).
Déterminer la fonction vérifiant (1) qui s'annule en zéro.

B)1) On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x)=\frac{1}{e-1}e^x - x - \frac{1}{e-1}$.

(C) désigne la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} , \vec{j})$.

a) Calculer f(0), f(1), f(2).
b) Etudier le sens de variation de f et les limites de f aux bornes de l'intervalle de définition.
Montrer que la courbe (C) admet une droite asymptote que l'on précisera.

Scanned by CamScanner

c) utiliser les variations de f pour déterminer le signe de f(x) selon les valeurs de x.
d) Tracer la courbe (C) (prendre 2 cm comme unité graphique).

2) On considère la fonction numérique Φ de la variable réelle x définie par : $\Phi(x) = e^x - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}$.

(Γ) désigne la courbe de Φ.
a) Etudier le sens de variation de Φ et les limites de Φ aux bornes de l'intervalle de définition.
Montrer que la courbe (Γ) admet une droite asymptote que l'on précisera.
b) Etudier les positions relatives de (C) et (Γ).
c) Tracer la courbe (Γ) sur le même graphique que la courbe (C).

3) Etablir que pour tout nombre réel x : $\Phi(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$.

Donner une interprétation géométrique de $|\Phi(0)|$.

4) n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.
a) Démontrer que $f(n) \leq \Phi(n) \leq f(n+1)$.
En déduire l'existence d'un unique réel u_n élément de l'intervalle [n , n + 1] tel que : $\Phi(n) = f(u_n)$.
b) A l'aide des courbes (C) et (Γ), représenter sur l'axe des abscisses les points d'abscisses respectives u_1 et u_2.
c) On considère la suite de terme général $v_n = u_n - n$, où n est un entier naturel non nul.
Montrer que la suite (v_n) est bornée.

Etablir que v_n vérifie l'égalité : $\frac{e^{v_n}}{e-1} = 1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{v_n}{e^n}$.

En déduire que la suite (v_n) admet une limite que l'on déterminera.

Exercice 35 — 80 minutes

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe : $f(x) = (1 + x)e^{-2x}$.
On se propose dans ce problème d'utiliser une équation différentielle satisfaite par f pour donner une méthode de calcul des dérivées successives de f.

A)1) Etudier f. En donner, dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} , \vec{j})$, la représentation graphique (C) soignée, en précisant les points d'intersection avec les axes, ainsi que les tangentes en ces points (unité : 2 cm).

2) Soit a un réel strictement plus grand que -1.
On note D le domaine délimité par la droite d'équation x = a, l'axe des abscisses et la courbe (C).
Calculer en cm^2 l'aire de D en fonction de a.
Montrer que cette aire a une limite quand a tend vers $+\infty$ et la calculer.

B) 1) Quels doivent être les coefficients a et b pour que la fonction f vérifie l'équation différentielle du second ordre :
$y'' + ay' + by = 0$? (1)
Démontrer qu'alors, toutes les dérivées de f vérifient (1).
Calculer l'ensemble des primitives de f, et chercher si une de ces primitives vérifie l'équation (1).

2) On pose $f^{(0)} = f$ et pour n entier naturel non nul, on note $f^{(n)}$ la dérivée $n^{ième}$ de f.
La fonction f est une solution de l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = 0$.
Démontrer par récurrence l'existence de deux suites (c_n) et (d_n) qui vérifient pour tout entier naturel non nul n :
$f^{(n)} = c_n f' + d_n f$, $c_n = -4c_{n-1} + d_{n-1}$ et $d_n = -4c_{n-1}$.
3) On définit deux suites (γ_n) et (δ_n) par les formules : $c_n = (-2)^n\gamma_n$ et $d_n = (-2)^n\delta_n$.
Montrer que la suite de terme général $\delta_n - 2\gamma_n$ admet une valeur constante que l'on déterminera.
En déduire que la suite (δ_n) est une suite arithmétique que l'on explicitera. Calculer $f^{(n)}(x)$ en fonction de n et de x.

Exercice 36 — 80 minutes

A) On se propose de déterminer l'ensemble F des fonctions f numériques d'une variable réelle définie sur]-1 , +∞[,
$(1+x)f'(x) + f(x) = 1 + \ln(1+x)$.
1) Soit f un élément de F et g définie pour tout réel x de]-1 , +∞[par : $g(x) = (1+x)f(x)$.
Démontrer que g est dérivable sur]-1 , +∞[et que g est une primitive de la fonction h définie pour tout réel x de]-1 , +∞[par : $h(x) = 1 + \ln(1 + x)$.
Réciproquement, soit g_1 une primitive de la fonction h. Démontrer que la fonction f_1 définie pour tout réel x de]-1 , +∞[par : $f_1(x) = \frac{g_1(x)}{1+x}$ est un élément de F.

Scanned by CamScanner

2) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer l'ensemble les primitives de la fonction h

3) En déduire l'ensemble F.

B) On considère les fonctions f_k de $]-1, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par, $f_k(x) = \ln(1+x) + \dfrac{k}{1+x}$, $k \in \mathbb{R}$.

1) Discuter suivant les valeurs de k, le sens de variation des fonctions f_k.

2) Tracer, avec soin, dans un même repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ les courbes des fonctions f_1, f_0 et f_{-1}.

3) Soit $M_1(t)$, $M_2(t)$, $M_3(t)$ les points d'abscisses t sur les représentations graphiques respectives des fonctions f_{k_1}, f_{k_2} et f_{k_3}. Démontrer que le rapport $\dfrac{\overline{M_1(t)M_2(t)}}{\overline{M_1(t)M_3(t)}}$ est indépendant de t.

C)1) Soit $P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n > 0$ et pour tout réel x dans $]-1, +\infty[$, $f_0'(x) = P_n(x) + \dfrac{x^{2n}}{1+x}$.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n, pour tout réel x appartenant à $[0, 1]$, $\dfrac{x^{2n}}{1+x} \leq x^{2n}$.

En déduire pour tout entier naturel non nul la double inégalité : $0 \leq \int_0^1 \dfrac{x^{2n}}{1+x} dx \leq \dfrac{1}{2n+1}$.

3) On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel non nul n par, $w_n = \sum_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $f_0(1) = w_n + \int_0^1 \dfrac{x^{2n}}{1+x} dx$.

En déduire que la suite (w_n) admet, lorsque n tend vers $+\infty$, une limite que l'on précisera.

Trouver un entier naturel n_0 tel que $\ln 2 - w_{n_0} < 0{,}1$.

Exercice 37 — 40 minutes

On se propose d'étudier l'ensemble E des fonctions φ de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivables vérifiant : pour tout réel $x > 0$, $x^2\varphi''(x) - x\varphi'(x) + \varphi(x) = 0$ (1)

1) Montrer que E n'est pas vide.

2) On cherche une fonction φ de E sous la forme $\varphi(x) = xu(x)$, où u est une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.
Vérifier que (1) équivaut à $xu'(x) = A$ (où A est une constante arbitraire) pour tout x de $]0, +\infty[$.
En déduire la forme générale des fonctions u, puis celle des fonctions de E.

3) On considère la fonction $h : x \longmapsto x\ln x$ définie sur $]0, +\infty[$.

a) Montrer qu'elle appartient à E.

b) On désigne par g, le prolongement de h défini de la façon suivante :
$g(x) = h(x)$ pour x appartenant à $]0, +\infty[$, et $g(0) = 0$.
La fonction g est-elle continue au point $x = 0$?

c) Etudier les variations et représenter le graphe (C) de g.

Scanned by CamScanner

$\Leftrightarrow$ $-21a = 1$, $6a - 14b = 0$ et $2b - 7c = 1$

$\Leftrightarrow$ $a = -\frac{1}{21}$, $b = -\frac{1}{49}$ et $c = -\frac{51}{343}$.

Le polynôme P de degré 3 tel que pour tout réel x, $P(x) = -\frac{1}{21}x^3 - \frac{1}{49}x^2 - \frac{51}{343}x$ est solution de (E') et $P(0) = 0$.

4) f est solution de (E') $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $f''(x) - 7f'(x) = x^2 + 1$.

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $f''(x) - 7f'(x) = P''(x) - 7P'(x)$

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $(f - P)''(x) - 7(f - P)'(x) = 0$.

$\Leftrightarrow$ $(f - P)'' - 7(f - P)' = 0$

$\Leftrightarrow$ $f - P$ est solution de (E).

D'où f est solution de (E') si et seulement si la fonction $f - P$ est solution de l'équation différentielle (E).

5) D'après les questions 2) et 4),

f est solution de (E') $\Leftrightarrow$ $f - P$ est solution de (E)

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $f(x) - P(x) = Ae^{7x} + B$, où A et B sont des constantes réelles.

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $f(x) = Ae^{7x} + P(x) + B$, où A et B sont des constantes réelles.

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $f(x) = Ae^{7x} - \frac{1}{21}x^3 - \frac{1}{49}x^2 - \frac{51}{343}x + B$, où A et B sont des constantes réelles.

D'où les solutions de l'équation (E') sont les fonctions définies pour tout réel x par :

$x \mapsto Ae^{7x} - \frac{1}{21}x^3 - \frac{1}{49}x^2 - \frac{51}{343}x + B$, où A et B sont des constantes réelles.

6) f est solution de (E'), d'où, pour tout réel x, $f(x) = Ae^{7x} - \frac{1}{21}x^3 - \frac{1}{49}x^2 - \frac{51}{343}x + B$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 7Ae^{7x} - \frac{1}{7}x^2 - \frac{2}{49}x - \frac{51}{343}$.

Or $f(0) = 2$ et $f'(0) = \frac{2350}{343}$ ce qui équivaut à $A + B = 2$ et $7A - \frac{51}{343} = \frac{2350}{343}$. On en déduit que $A = 1$ et $B = 1$.

D'où la solution particulière de (E') telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = \frac{2350}{343}$ est la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = e^{7x} - \frac{1}{21}x^3 - \frac{1}{49}x^2 - \frac{51}{343}x + 1$.

Solution 28

1)a) L'équation caractéristique associée à (E) est : $r^2 - 3r + 2 = 0$, qui a pour solutions $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$.

D'où les solutions de (E) sont les fonctions h : $x \mapsto Ae^x + Be^{2x}$, où A et B sont des constantes réelles.

b) La fonction $\varphi : x \mapsto e^{3x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa fonction dérivée est $\varphi' : x \mapsto 3e^{3x}$.

$\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 3$.

La fonction h définie à la question 1)a) est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa fonction dérivée est définie pour tout réel x par : $h'(x) = Ae^x + 2Be^{2x}$.

Les courbes (C) et (C') ont la même tangente au point d'abscisse 0, si et seulement si :

$h(0) = \varphi(0)$ et $h'(0) = \varphi'(0)$, c'est-à-dire $\begin{cases} A + B = 1 \\ A + 2B = 3 \end{cases}$, donc $B = 2$ et $A = -1$.

La solution de (E) dont la courbe (C) a la même tangente au point d'abscisse 0 que la (C') est h : $x \mapsto -e^x + 2e^{2x}$.

2) Etude des variations de h : $x \mapsto -e^x + 2e^{2x}$:

h est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $h'(x) = -e^x + 4e^{2x} = e^x(-1 + 4e^x)$.

Le signe de $h'(x)$ est celui de $-1 + 4e^x$. Or $h'(x) > 0 \Leftrightarrow -1 + 4e^x > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow x > -\ln 4$.

D'où le tableau de variations de h :

Scanned by CamScanner

x	$-\infty$		$-\ln 4$		$+\infty$
h'(x)		-	0	+	
h(x)	0	↘	$-\frac{1}{8}$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x(-1+4e^x)=+\infty$ et $h(-\ln 4)=\frac{1}{4}\left(-1+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$.

Etude de la fonction φ :

φ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $\varphi'(x) = 3e^{3x} > 0$.

Donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

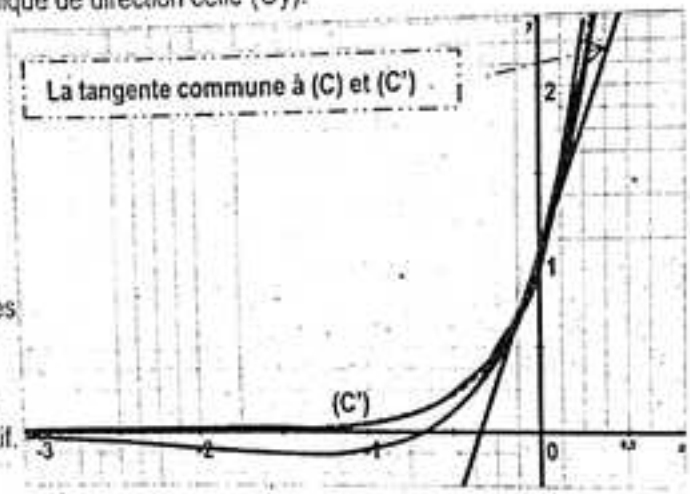
Etude des branches infinies en +∞ de (C) et (C').

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}(-1+2e^x)=+\infty$; car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (-1+2e^x)=+\infty$.

Donc la courbe de (C) admet en +∞ une branche parabolique de direction celle (Oy).

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 3\times\frac{e^{3x}}{3x}=+\infty$.

D'où (C') admet en +∞ une branche parabolique de direction (Oy).



Position relative des courbes (C) et (C') :

Soit x un nombre réel,

$\varphi(x) - h(x) = e^{3x} + e^x - 2e^{2x} = e^x(e^x - 1)^2 \geq 0$.

D'où, la courbe (C') est au-dessus de la courbe (C), et les deux courbes se rencontrent au point d'abscisse 0.

3)a) Pour tout réel x, $h_\lambda(x)$ est sous la forme $Ae^x + Be^{2x}$, avec $A = -\lambda^2$ et $B = 2\lambda$, où λ est un réel strictement positif.
D'où h_λ est solution de (E).

b) $M(x,y)\in(C_\lambda)\cap(C') \Leftrightarrow \begin{cases} y=e^{3x} \\ y=-\lambda^2e^x+2\lambda e^{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=e^{3x} \\ e^{3x}=-\lambda^2e^x+2\lambda e^{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=e^{3x} \\ e^x(e^x-\lambda)^2=0 \end{cases}$

D'où, $M(x,y)\in(C_\lambda)\cap(C') \Leftrightarrow \begin{cases} y=e^{3x} \\ e^x=\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln\lambda \\ y=\lambda^3 \end{cases}$

D'où (C_λ) et (C') se rencontrent au point $A_\lambda(\ln\lambda, \lambda^3)$.

Pour montrer que ces courbes sont tangentes en $A_\lambda(\ln\lambda, \lambda^3)$, il suffit de montrer que $h_\lambda'(\ln\lambda) = \varphi'(\ln\lambda)$.

En effet, Pour tout réel x, $h_\lambda'(x) = -\lambda^2e^x + 4\lambda e^{2x}$. Donc $h_\lambda'(\ln\lambda) = 3\lambda^3$ et $\varphi'(\ln\lambda) = 3\lambda^3$.

D'où (C_λ) et (C') sont tangentes en A_λ.

c) Soit x un réel strictement positif, on a : $\varphi(x) - h_\lambda(x) = e^{3x} + \lambda^2e^x - 2\lambda e^{2x} = e^x(e^x - \lambda)^2 \geq 0$.

D'où (C') est au-dessus de toutes les courbes (C_λ), pour λ réel strictement positif.

B)1) P est un polynôme de degré 2, d'où, il existe trois réels a, b et c tels que $P(x) = ax^2 + bx + c$, pour tout x réel, $a \neq 0$.

Pour tout x réel, on a : $P'(x) = 2ax + b$ et $p''(x) = 2a$.

P est solution de (E') ⇔ pour tout réel x, $P''(x) - 3P'(x) + 2P(x) = -x^2 + x + 2$.

⇔ pour tout réel x, $2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = -x^2 + x + 2$

⇔ pour tout réel x, $2ax^2 + (2b - 6a)x + 2a - 3b + 2c = -x^2 + x + 2$;

⇔ $2a = -1$, $2b - 6a = 1$, $2a - 3b + 2c = 2$.

⇔ $a=-\frac{1}{2}$, $b = -1$ et $c = 0$ ***(le lecteur pourra vérifier la résolution du système).***

Et alors le polynôme P tel que pour tout réel x, $P(x)=-\frac{1}{2}x^2-x$, est solution de (E').

2) f est solution de (E') ⇔ pour tout réel x, $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = -x^2 + x + 2$.

Scanned by CamScanner

Alors, f est solution de (E') $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = P''(x) - 3P'(x) + 2P(x)$

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $(f-P)''(x) - 3(f-P)'(x) + 2(f-P)(x) = 0$.

$\Leftrightarrow$ $(f-P)'' - 3(f-P)' + 2(f-P) = 0$

$\Leftrightarrow$ $g = f - P$ est solution de (E).

D'où f est solution de (E') si et seulement si f – P est solution de (E), c'est-à-dire, pour tout réel x, $f(x) - P(x) = Ae^x + Be^{2x}$, où A et B sont des constantes réelles.

Alors, les solutions de (E') sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ae^x + Be^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - x$.

3) $f(0) = 2$ si et seulement si $A + B = 2$ (1).

Pour tout réel x, $f'(x) = Ae^x + 2Be^{2x} - x - 1$, donc $f'(0) = 1$ si et seulement si $A + 2B - 1 = 1$ (2).

Des équations (1) et (2), on déduit que A = 2 et B = 0.

Et la fonction cherchée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^x - \frac{1}{2}x^2 - x$.

Solution 29

A)1) Notons (E) : $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Une équation caractéristique de (E) est : $r^2 - 3r + 2 = 0$, qui a pour racines $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$.

Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = Ae^x + Be^{2x}$, où A et B sont des nombres réels.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $f'(x) = Ae^x + 2Be^{2x}$.

$f(0) = -1$, ce qui signifie que $A + B = -1$. (1)

$f'(0) = 0$, ce qui signifie que $A + 2B = 0$. (2)

De (1) et (2) on déduit que B = 1 et A = -2 et $f(x) = -2e^x + e^{2x}$, pour tout réel x.

B)1) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $f'(x) = -2e^x + 2e^{2x} = 2e^x(e^x - 1)$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $e^x - 1$.

$e^x - 1 > 0$ si et seulement si, $x > 0$. Et $e^x - 1 = 0$. C'est-à-dire $x = 0$.

D'où : dans $]-\infty, 0[$, $f'(x) < 0$, et donc f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$.

dans $]0, +\infty[$, $f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

D'où le tableau des variations de f est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	0	↘	-1	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -2e^x + e^{2x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x(e^x - 2) = +\infty$ et $f(0) = -1$.

2) $f(\ln 2) = 2(2-2) = 0$ et $f'(\ln 2) = 4$. D'où une équation de la tangente au point d'abscisse ln2 est : $y = 4x - 4\ln 2$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}(e^x - 2) = +\infty$.

D'où la courbe de f admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$

4)a) La droite d'équation y = 3 rencontre la courbe de f en un seul point d'abscisse ln3.

Donc l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution qui est ln3.

Or $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ si et seulement si $f(x) = 3$.

D'où l'équation $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ admet une unique solution ln3.

b) Algébriquement, considérons l'équation $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$.

Posons $X = e^x$, on a alors $X^2 - 2X - 3 = 0$ avec $X > 0$.

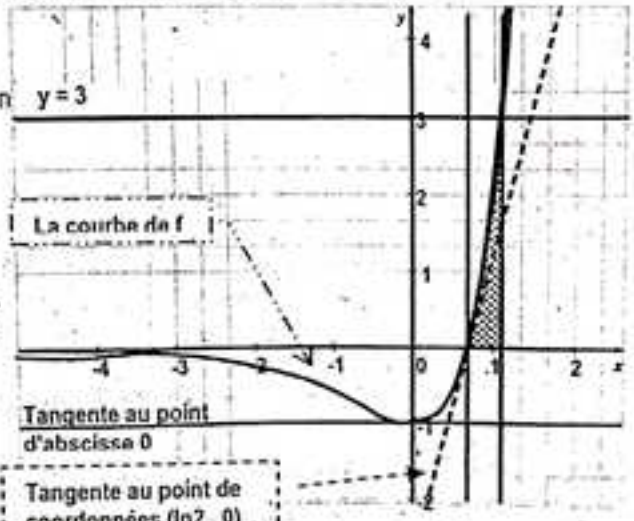
C'est-à-dire X = 3.

$X = 3 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$.

D'où l'ensemble solution de l'équation $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ est $S = \{\ln 3\}$.

5) $e^{2x} - 2e^x - m = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x = m \Leftrightarrow f(x) = m$.

Si m appartient à $]-\infty, -1[$, alors la droite d'équation y = m ne rencontre pas la courbe de f.



Scanned by CamScanner

Par conséquent, l'équation $e^{2x} - 2e^x - m = 0$ n'a pas de solution.

Si m appartient à]-1 , 0[, alors la droite d'équation y = m rencontre la courbe de f en deux points.

Par conséquent, l'équation $e^{2x} - 2e^x - m = 0$ admet deux solutions distinctes.

Si m appartient à [0 , +∞ [, alors la droite d'équation y = m rencontre la courbe de f en un seul point.

Par conséquent, l'équation $e^{2x} - 2e^x - m = 0$ admet une unique solution.

Si m = -1, alors la droite d'équation y = -1 rencontre la courbe de f en un unique point (la droite d'équation y = -1 est tangente à la courbe en ce point), d'où l'équation $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$ admet une racine double.

6) $A = 4\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx\ cm^2 = 4\times\left[\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x\right]_{\ln 2}^{\ln 3} cm^2 = 4\left(\frac{9}{2} - 6 - 2 + 4\right) cm^2 = 2\ cm^2$.

Solution 30

1) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $f'(x) = 3e^{3x-3} + 1 > 0$.

D'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

2) • f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'où f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}$.

$0 \in \mathbb{R}$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation f(x) = 0 a une seule solution α dans $\mathbb{R}$.

On peut donc conclure que la courbe de f coupe l'axe des abscisses en un point et un seul, d'abscisse α.

• $f(0) = e^{-3}$ et $f(-1) = e^{-6} - 1$. Puisque $f(0)\times f(-1) < 0$, alors α appartient à]-1 , 0[.

3)a) • $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

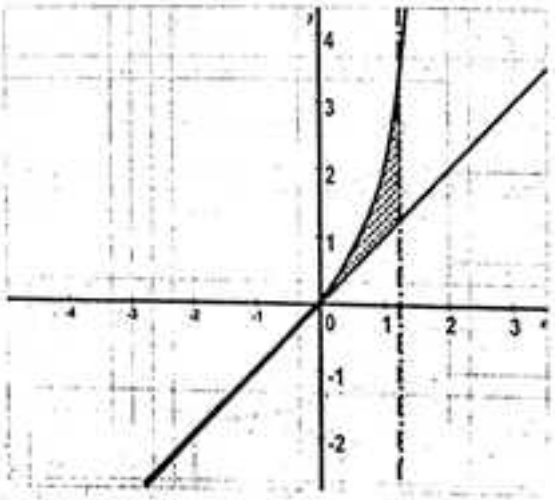
Donc la droite d'équation y = x est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de -∞.

• Soit x un nombre réel, $f(x) - x = e^{3x-3}$ qui est strictement positive. D'où la courbe (C) est au-dessus de son asymptote oblique.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3e^{-3}\times\frac{e^{3x}}{3x} + 1\right) = +\infty$.

D'où la courbe de f admet en +∞, une branche parabolique de direction asymptotique celle de (Oy).

c)



4)a) La courbe (C) est au-dessus de la droite d'équation y = x, donc

$A_\lambda = 4\int_0^\lambda (f(x) - x)dx\ cm^2 = 4\int_0^\lambda e^{3x-3}dx\ cm^2 = 4\times\left[\frac{1}{3}e^{3x-3}\right]_0^\lambda cm^2 = \frac{4}{3}(e^{3\lambda-3} - e^{-3})\ cm^2$.

Scanned by CamScanner

b) $\lim_{x\to+\infty} A_x = +\infty$, (car puisque $\lim_{x\to+\infty} 3x - 3 = +\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} e^{3x-3} = \lim_{x\to+\infty} e^{X} = +\infty$.)

5)a) g est solution de (E') $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $g''(x) - g'(x) - 6g(x) = -6x - 1$

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $-a - 6(ax + b) = -6x - 1$

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $-6ax - a - 6b = -6x - 1$

$\Leftrightarrow$ $-6a = -6$ et $-a - 6b = -1$.

$\Leftrightarrow$ $a = 1$ et $b = 0$ *(le lecteur pourra vérifier la résolution du système)*.

D'où $a = 1$, $b = 0$ et $g(x) = x$.

b) h est solution de (E) $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $h''(x) - h'(x) - 6h(x) = -6x - 1$.

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $h''(x) - h'(x) - 6h(x) = g''(x) - g'(x) - 6g(x)$

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $(h - g)''(x) - (h - g)'(x) - 6(h - g)(x) = 0$.

$\Leftrightarrow$ $(h - g)'' - (h - g)' - 6(f - g) = 0$

$\Leftrightarrow$ $h - g$ est solution de (E').

En conclusion, h est solution de (E) si et seulement si, $h - g$ est solution de (E').

c) Une équation caractéristique de (E') est : $r^2 - r - 6 = 0$, qui a pour racines $r_1 = -2$ et $r_2 = 3$.

D'où les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = Ae^{-2x} + Be^{3x}$, où A et B sont des constantes réelles.

d) D'après la question précédente, h est solution de (E) si et seulement si $h - g$ est solution de (E'), c'est-à-dire : pour tout réel x, $h(x) - g(x) = Ae^{-2x} + Be^{3x}$, où A et B sont des constantes réelles.

Alors, les solutions de (E) sont les fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = Ae^{-2x} + Be^{3x} + x$.

e) Pour tout réel x, $h(x) = Ae^{-2x} + Be^{3x} + x$ et $h'(x) = -2Ae^{-2x} + 3Be^{3x} + 1$.

$h(1) = 2$, signifie $Ae^{-2} + Be^{3} + 1 = 2$ (1).

$h'(1) = 4$, signifie $-2Ae^{-2} + 3Be^{3} + 1 = 4$ (2).

Des égalités (1) et (2), on obtient $A = 0$ et $B = e^{-3}$.

D'où la solution f de (E) vérifiant les conditions $f(1) = 2$ et $f'(1) = 4$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{3x-3} + x$.

Solution 31

A)1) • f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : $f'(x) = e^{-x} - (x + 2)e^{-x} = (-x - 1)e^{-x}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $-x - 1$ car pour tout réel x, on a $e^{-x} > 0$.

D'où f est strictement croissante sur $]-\infty, -1[$ et strictement décroissante sur $]-1, +\infty[$.

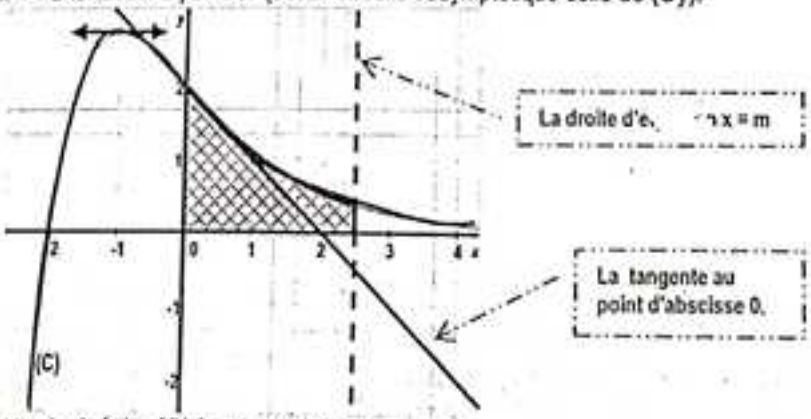
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (xe^{-x} + 2e^{-x}) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+2)e^{-x} = -\infty$.

On résume les variations de f dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	e	↘	0

• $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)e^{-x} = +\infty$.

D'où la courbe de f admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de (Oy).



2) f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f''(x) = -e^{-x} + (x + 1)e^{-x} = xe^{-x}$.

Scanned by CamScanner

$f''(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
Comme $f'(0) = -1$ et $f(0) = 2$, alors une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = -x + 2$.

3) • Soit x un nombre réel, $F'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x} = (-ax + a - b)e^{-x}$.

F est une primitive de f $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$.
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $(-ax + a - b)e^{-x} = (x + 2)e^{-x}$
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $-ax + a - b = x + 2$.
$\Leftrightarrow$ $-a = 1$ et $a - b = 2$
$\Leftrightarrow$ $a = -1$ et $b = -3$

D'où F est une primitive de f si et seulement si $a = -1$ et $b = -3$. Dans ce cas, $F(x) = (-x - 3)e^{-x}$.

• $\int_0^m f(x)dx = [F(x)]_0^m = F(m) - F(0) = (-m - 3)e^{-m} + 3$.

D'où l'aire en cm² cherchée est $A_m = 4[(-m - 3)e^{-m} + 3]$cm².

• $\lim\limits_{m \to +\infty} A_m = \lim\limits_{m \to +\infty} 4(-me^{-m}) - 12e^{-m} + 12 = 12$.

B)1) G est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x,

$$G'(x) = 2e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}\right) - e^{-2x}\left(x + \frac{5}{2}\right) = e^{-2x}(x^2 + 4x + 4) = [e^{-x}(x + 2)]^2 = [f(x)]^2.$$

D'où G est une primitive de f^2.

2) • $\int_0^m \pi[f(x)]^2 dx = \pi[G(x)]_0^m = \pi(G(m) - G(0)) = -\pi e^{-2m}\left(\frac{1}{2}m^2 + \frac{5}{2}m + \frac{13}{4}\right) + \frac{13}{4}\pi$.

D'où le volume en cm³ cherché est $V_m = [-2e^{-2m}(2m^2 + 10m + 13) + 26]\pi$ cm³.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} V_m = 26\pi$ cm³.

C)1) Les solutions de (1) sont les fonctions : $x \mapsto Ae^x + Be^{-\frac{1}{3}x}$, où A et B sont des constantes réelles.

2) • Soit x un nombre réel, $f(x) = (x + 2)e^{-x}$, $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$ et $f''(x) = xe^{-x}$.
Donc $3f''(x) - 2f'(x) - f(x) = 3xe^{-x} + 2(x + 1)e^{-x} - (x + 2)e^{-x} = 4xe^{-x}$. D'où f est une solution de l'équation (2).

• g est solution de (2) $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $3g''(x) - 2g'(x) - g(x) = 4xe^{-x}$.
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $3g''(x) - 2g'(x) - g(x) = 3f''(x) - 2f'(x) - f(x)$
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $3(g - f)''(x) - 2(g - f)'(x) - (g - f)(x) = 0$.
$\Leftrightarrow$ g - f est solution de (1).
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $g(x) - f(x) = Ae^x + Be^{-\frac{1}{3}x}$
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $g(x) = Ae^x + Be^{-\frac{1}{3}x} + f(x)$
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $g(x) = Ae^x + Be^{-\frac{1}{3}x} + (x + 2)e^{-x}$.

D'où les solutions de l'équation différentielle (2) sont les fonctions : $x \mapsto Ae^x + Be^{-\frac{1}{3}x} + (x + 2)e^{-x}$, où A et B sont des constantes réelles.

Solution 32

A)1) Une équation caractéristique associée à l'équation différentielle $2y'' - 3y' + y = 0$ est $2r^2 - 3r + 1 = 0$, qui a pour racines $r_1 = 1$ et $r_2 = \frac{1}{2}$. D'où les solutions de l'équation différentielle $2y'' - 3y' + y = 0$, sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = Ae^{\frac{1}{2}x} + Be^x$, où A et B sont des constantes réelles.

2) Pour tout réel x, $f'(x) = \frac{1}{2}Ae^{\frac{1}{2}x} + Be^x$.

La courbe de f passe par l'origine, signifie $f(0) = 0$, c'est-à-dire $A + B = 0$. (1)

Scanned by CamScanner

La tangente à l'origine a pour pente $\frac{1}{2}$ signifie $f'(0) = \frac{1}{2}$, c'est à dire $\frac{1}{2}A + B = \frac{1}{2}$ (2)

On obtient des égalités (1) et (2) : $A = 1$ et $B = -1$

D'où la solution de l'équation différentielle cherchée est la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{1}{2}x} - e^x$.

B)1) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} - e^x = e^{\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{2} - e^{\frac{1}{2}x}\right)$. D'où le signe est f '(x) est celui de $\frac{1}{2} - e^{\frac{1}{2}x}$.

Or $\frac{1}{2} - e^{\frac{1}{2}x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} < -\ln 2 \Leftrightarrow x < -2\ln 2$. Et $\frac{1}{2} - e^{\frac{1}{2}x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\ln 2 \Leftrightarrow x = -2\ln 2$.

D'où : dans $]-\infty, -2\ln 2[$, on a : $f'(x) > 0$, et donc f est strictement croissante.
dans $]-2\ln 2, +\infty[$, on a : $f'(x) < 0$, et f est strictement décroissante.

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x - e^{\frac{x}{2}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right) = -\infty$ (car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{x}{2}} = +\infty$).

D'où le tableau de variations de f suivant :

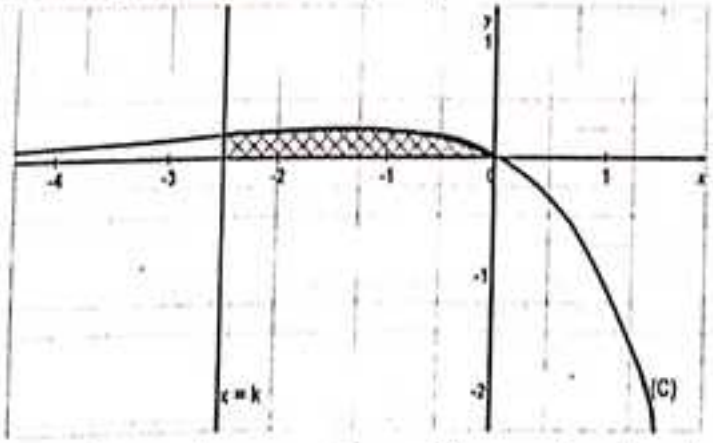
x	$-\infty$		$-2\ln 2$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$

$f(-2\ln 2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

2) Remarquons que $f(0) = 0$.
D'où : si x appartient à $]-\infty, 0]$, alors $f(x) > 0$.
si x appartient à $]0, +\infty[$, alors $f(x) < 0$.

3) Etudions la branche infinie en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -2 \times \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right) = -\infty$.

D'où la courbe de f admet en $+\infty$, une branche parabolique de direction (Oy).
Et en $-\infty$, la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.



4) • $A(k) = 4\int_k^0 f(x)dx\ cm^2 = 4\int_k^0 \left(e^{\frac{x}{2}} - e^x\right)dx\ cm^2 = 4 \times \left[2e^{\frac{x}{2}} - e^x\right]_k^0\ cm^2 = 4\left(1 - 2e^{\frac{k}{2}} + e^k\right)cm^2$.

D'où $A(k) = 4\left(1 - 2e^{\frac{k}{2}} + e^k\right)cm^2$.

Scanned by CamScanner

- $\lim\limits_{k\to-\infty} A(k) = 4\ cm^2$.

C) Soit x un réel non nul, $g(x) = \ln\left|e^{\frac{x}{2}} - e^{x}\right| = \begin{cases} \ln\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ \ln\left(e^{x} - e^{\frac{x}{2}}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) • $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$. (Car d'après la question B)1), $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} - e^{\frac{x}{2}} = 0$).

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(e^{x} - e^{\frac{x}{2}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. (Car d'après la question B)1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} - e^{\frac{x}{2}} = +\infty$).

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x} - e^{\frac{x}{2}}\right) = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \ln\left|e^{x} - e^{\frac{x}{2}}\right| = \lim\limits_{x\xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$.

2) g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout réel $x \neq 0$, on a : $g'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} - e^{x}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{x}} = \dfrac{e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2} - e^{\frac{x}{2}}\right)}{e^{\frac{x}{2}} - e^{x}}$.

D'après les questions B)1) et 2), on a les signes de $\frac{1}{2} - e^{\frac{1}{2}x}$ et $-e^{x} + e^{\frac{x}{2}}$ qui sont les signes de f '(x) et f(x).

D'où le tableau de signe suivant, résumant le signe de g'(x) :

x	$-\infty$		$-2\ln 2$		0		$+\infty$
$\frac{1}{2} - e^{\frac{x}{2}}$		+	0	-		-	
$-e^{x} + e^{\frac{x}{2}}$		+		+	0	-	
g'(x)		+	0	-	‖	+	

D'où : dans $]-\infty, -2\ln 2[\cup]0, +\infty[$, on a $g'(x) > 0$.
dans $]-2\ln 2, 0[$, on a $g'(x) < 0$.
$g'(-2\ln 2) = 0$. D'où le tableau des variations de g :

x	$-\infty$		$-2\ln 2$		0		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	‖	+	
g(x)	$-\infty$	↗	$-\ln 4$	↘	$-\infty$	↗	$+\infty$

3) • Dans $]0, +\infty[$, on a $g(x) = \ln\left(e^{x} - e^{\frac{x}{2}}\right) = \ln\left[e^{x}\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)\right] = \ln e^{x} + \ln\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right) = x + \ln\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)$.

Alors $g(x) - x = \ln\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)$ pour $x > 0$.

- Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right) = 0$ = (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right) = 1$).

Scanned by CamScanner

On en déduit que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe (Γ) en $+\infty$.

- Remarquons que, pour tout $x > 0$, on a : $1 - e^{-\frac{x}{2}} < 1$, donc $\ln\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right) < 0$.

Par conséquent, pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) - x < 0$.
En conclusion, la courbe (Γ) est en dessous de son asymptote oblique (D) sur $]0, +\infty[$.

4) • Dans $]-\infty, 0[$, on a $g(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{x}\right) = \ln\left[e^{\frac{x}{2}}\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)\right] = \ln e^{\frac{x}{2}} + \ln\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right) = \frac{x}{2} + \ln\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)$.

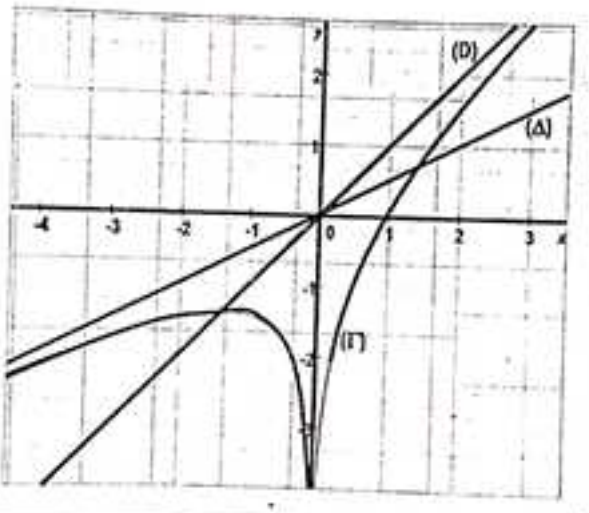
D'où : **pour tout $x < 0$**, $g(x) - \frac{x}{2} = \ln\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right) = 1$, d'où $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(g(x) - \frac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right) = 0$.

La courbe (Γ) admet en $-\infty$, une asymptote oblique (Δ), d'équation $y = \frac{x}{2}$.

Pour $x < 0$, on a $\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right) < 1$, d'où $g(x) - \frac{x}{2} = \ln\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right) < 0$. D'où (Γ) est en dessous de (Δ) dans $]-\infty, 0[$.

La courbe (Γ) :



Solution 33

Partie A

1) h est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $h'' - h = 0$ $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $h''(x) - h(x) = 0$.
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $r^2e^{rx} - e^{rx} = 0$.
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $(r^2 - 1)e^{rx} = 0$.
$\Leftrightarrow$ $r^2 - 1 = 0$.
$\Leftrightarrow$ $r = 1$ ou $r = -1$.

D'où h est solution de (E) si et seulement si $r = 1$ ou $r = -1$.
2) Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x}$.
φ est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$\varphi'(x) = \alpha e^{x} - \beta e^{-x}$ et $\varphi''(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x}$. D'où pour tout réel x, on a $\varphi''(x) = \varphi(x)$.
C'est-à-dire $\varphi'' = \varphi$ ou encore $\varphi'' - \varphi = 0$. D'où les fonctions φ sont solutions de (E).
3) Soit x un nombre réel, $\varphi(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x}$ et $\varphi'(x) = \alpha e^{x} - \beta e^{-x}$.

$\varphi(\ln 2) = \frac{3}{4}$ signifie $2\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{3}{4}$. Et $\varphi'(\ln 2) = \frac{5}{4}$ signifie $2\alpha - \frac{1}{2}\beta = \frac{5}{4}$.

Scanned by CamScanner

On obtient donc le système : $\begin{cases} 2\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{3}{4} \\ 2\alpha - \frac{1}{2}\beta = \frac{5}{4} \end{cases}$. Qui conduit à : $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{1}{2}$.

La solution particulière de (E) cherchée est $h : x \mapsto h(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$.

Partie B

1) • Soit x un nombre réel,

$f(x) = \mu \Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \mu \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^x} = 2\mu \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 2\mu e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 2\mu e^x - 1 = 0$.

D'où pour tout réel x, f(x) = μ est équivalent à $e^{2x} - 2\mu e^x - 1 = 0$.

• On a pour tout réel x, $f(x) = \mu \Leftrightarrow e^{2x} - 2\mu e^x - 1 = 0$ (1).

Posons $X = e^x$, on obtient alors : $X^2 - 2\mu X - 1 = 0$ avec $X > 0$.

L'équation (1) admet une unique solution si et seulement si, l'équation $X^2 - 2\mu X - 1 = 0$ admet une unique solution positive.

Or l'équation $X^2 - 2\mu X - 1 = 0$ est de la forme $aX^2 + bX + c = 0$, avec a et c de signes contraires.

Alors l'équation $X^2 - 2\mu X - 1 = 0$ admet deux racines distinctes dont le produit est négatif.

Ces racines sont donc de signes contraires.

D'où l'équation $X^2 - 2\mu X - 1 = 0$ admet une unique racine positive et par conséquent, l'équation (1) admet une unique solution.

• Le discriminant de l'équation $X^2 - 2\mu X - 1 = 0$ est : $\Delta = 4(\mu^2 + 1)$.

D'où les racines de l'équation $X^2 - 2\mu X - 1 = 0$, sont $X' = \mu + \sqrt{\mu^2+1}$ et $X'' = \mu - \sqrt{\mu^2+1}$.

Or pour tout réel μ, on a $\mu^2 + 1 > \mu^2$, d'où $\sqrt{\mu^2+1} > |\mu| \geq \max(\mu, -\mu)$.

D'où $\mu + \sqrt{\mu^2+1} > 0$ et $\mu - \sqrt{\mu^2+1} < 0$.

On en déduit que $X = \mu + \sqrt{\mu^2+1}$, c'est-à-dire $e^x = \mu + \sqrt{\mu^2+1}$. Finalement $x = \ln(\mu + \sqrt{\mu^2+1})$.

2) • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\infty$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = +\infty$.

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4) f(0) = 0 et f '(0) = 1. D'où une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 est y = x.

5) Soit $d(x) = f(x) - x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x$.

d est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $d'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1 = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{2e^x} = \frac{(e^x - 1)^2}{2e^x} \geq 0$.

d '(x) = 0 si et seulement si x = 0, d'où d est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or d(0) = 0.

Alors dans $]-\infty, 0[$, on a d(x) < 0 et donc (C) est en dessous de (T).

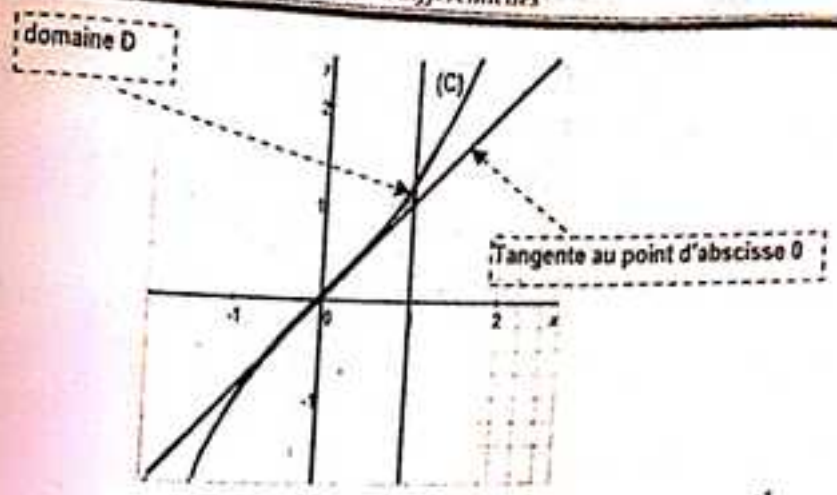
dans $]0, +\infty[$, on a d(x) > 0, donc (C) est au-dessus de (Γ).

6) • $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{x} + \frac{e^{-x}}{-x}\right) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^{-x}}{x}\right) = +\infty$.

D'où la courbe (C) admet en $+\infty$ et $-\infty$ des branches paraboliques de direction (Oy).

Scanned by CamScanner



7) $\text{Aire}(D) = 4\times\int_0^1 (f(x)-x)dx\ cm^2 = 4\times\int_0^1\left(\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}-x\right)dx\ cm^2 = 4\times\left[\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 cm^2.$

D'où $\text{Aire}(D) = 4\left(\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e^{-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)cm^2 = 2(e+e^{-1}-3)\,cm^2.$

Partie C

1)a) • Soit x un nombre réel, on a d'après l'énoncé : $\Phi(x)-\int_0^x (x-t)\Phi(t)dt = x$.

D'où $\Phi(x) = x+\int_0^x (x\Phi(t)-t\Phi(t))dt = x+\int_0^x x\Phi(t)dt-\int_0^x t\Phi(t)dt = x+x\int_0^x \Phi(t)dt-\int_0^x t\Phi(t)dt$.

D'où $\Phi(x) = x+x\int_0^x \Phi(t)dt-\int_0^x t\Phi(t)dt$.

• $\Phi(0) = 0+0\times\int_0^0 \Phi(t)dt-\int_0^0 t\Phi(t)dt = 0$. D'où $\Phi(0) = 0$.

b) • Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, par définition, et pour tout réel x,

$\Phi'(x) = 1+\int_0^x \Phi(t)dt+x\Phi(x)-x\Phi(x)$. D'où $\Phi'(x) = 1+\int_0^x \Phi(t)dt$.

• Et $\Phi'(0) = 1+\int_0^0 \Phi(t)dt = 1$. D'où $\Phi'(0) = 1$.

c) • Φ' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $\Phi''(x) = \Phi(x)$. C'est-à-dire $\Phi'' = \Phi$, ou encore $\Phi''-\Phi = 0$.

D'où Φ est solution de l'équation différentielle (E).

• Φ est solution de (E), donc il existe deux réels A et B tels que $\Phi(x) = Ae^x + Be^{-x}$.

Or $\Phi(0) = 0$ et $\Phi'(0) = 1$, alors $A + B = 0$ et $A - B = 1$. Donc $A = \frac{1}{2}$ et $B = -\frac{1}{2}$.

Donc Φ est la fonction telle que pour tout réel x, $\Phi(x) = \frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}$ qui est f trouvée à la partie A).

2) On pose $u(t) = t$, $u'(t) = 1$, $v'(t) = e^t - e^{-t}$, $v(t) = e^t + e^{-t}$. Et en intégrant par parties, on a :

$\int_0^x t(e^t-e^{-t})dt = \left[t(e^t+e^{-t})\right]_0^x-\int_0^x (e^t+e^{-t})dt = x(e^x+e^{-x})-\left[e^t-e^{-t}\right]_0^x = x(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})$.

D'où $\Phi(x) = (x-1)e^x + (x+1)e^{-x}$.

3) A la question C)1)c), on a trouvé $\Phi(x) = \frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}$, donc :

$$\Phi(x)-\int_0^x (x-t)\Phi(t)dt = \frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{x}{2}\int_0^x (e^t-e^{-t})dt+\frac{1}{2}\int_0^x t(e^t-e^{-t})dt$$
$$= \frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{x}{2}\left[e^t+e^{-t}\right]_0^x+\frac{1}{2}x(e^x+e^{-x})-\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) = x$$

Scanned by CamScanner

Solution 34

A)1) g_0 est une fonction affine, donc il existe deux réels a et b tels que $g_0(x) = ax + b$.

g_0 vérifie (1) $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $g_0'(x) - g_0(x) = x - \dfrac{e-2}{e-1}$

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $a - (ax + b) = x - \dfrac{e-2}{e-1}$

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $-ax + (a - b) = x - \dfrac{e-2}{e-1}$

$\Leftrightarrow$ $-a = 1$ et $a - b = -\dfrac{e-2}{e-1}$. D'où $a = -1$ et $b = \dfrac{-1}{e-1}$.

D'où la fonction affine g_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $g_0(x) = -x - \dfrac{1}{e-1}$ est solution de (1).

2) g est solution de (1) $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $g'(x) - g(x) = x - \dfrac{e-2}{e-1}$.

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $g'(x) - g(x) = g_0'(x) - g_0(x)$

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $(g - g_0)'(x) - (g - g_0)'(x) = 0$.

$\Leftrightarrow$ $(g - g_0)' - (g - g_0) = 0$

$\Leftrightarrow$ $h' - h = 0$

$\Leftrightarrow$ h est solution de l'équation différentielle $y' - y = 0$.

D'où g vérifie (1) si et seulement si, h est solution de l'équation différentielle : $y' - y = 0$.

3) • Les solutions de l'équation différentielle (2) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto ke^x$, k étant une constante réelle.

- g est solution de (1) $\Leftrightarrow$ $g - g_0$ est solution de (2)
  $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $g(x) - g_0(x) = ke^x$, k étant une constante réelle.
  $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $g(x) = g_0(x) + ke^x$, k appartenant à $\mathbb{R}$.

D'où les solutions de l'équation différentielle (1) sont les fonctions : $x \mapsto ke^x - x - \dfrac{1}{e-1}$, k étant dans $\mathbb{R}$.

- g étant une solution de (1), pour tout réel x, $g(x) = ke^x - x - \dfrac{1}{e-1}$, k étant dans $\mathbb{R}$.

$g(0) = 0$ signifie $k - \dfrac{1}{e-1} = 0$, donc $k = \dfrac{1}{e-1}$.

D'où, la solution de (1) qui s'annule en 0 est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{e-1}e^x - x - \dfrac{1}{e-1}$.

B)1)a) $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ et $f(2) = e - 1$.

b) • f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{e-1}e^x - 1$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{e-1}e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e - 1 \Leftrightarrow x > \ln(e-1)$.

Et $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = \ln(e-1)$. D'où :

dans $]-\infty, \ln(e-1)[$, on a $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante dans cet intervalle.

dans $]\ln(e-1), +\infty[$, on a $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante dans cet intervalle.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{1}{e-1} \times \dfrac{e^x}{x} - 1 - \dfrac{1}{e-1} \times \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\dfrac{1}{e-1} \times \dfrac{e^x}{x} - 1 - \dfrac{1}{e-1} \times \dfrac{1}{x}\right) = -1$.

Et $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\dfrac{1}{e-1}e^x - \dfrac{1}{e-1}\right) = -\dfrac{1}{e-1}$.

Scanned by CamScanner

D'où la droite d'équation $y=-x-\frac{1}{e-1}$ est asymptote oblique à la courbe (C) de f en $-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e-1}\times\frac{e^x}{x}-1-\frac{1}{e-1}\times\frac{1}{x}\right)=+\infty$.

La courbe (C) de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

c) D'après la question 3)b), le tableau de variation de f est :

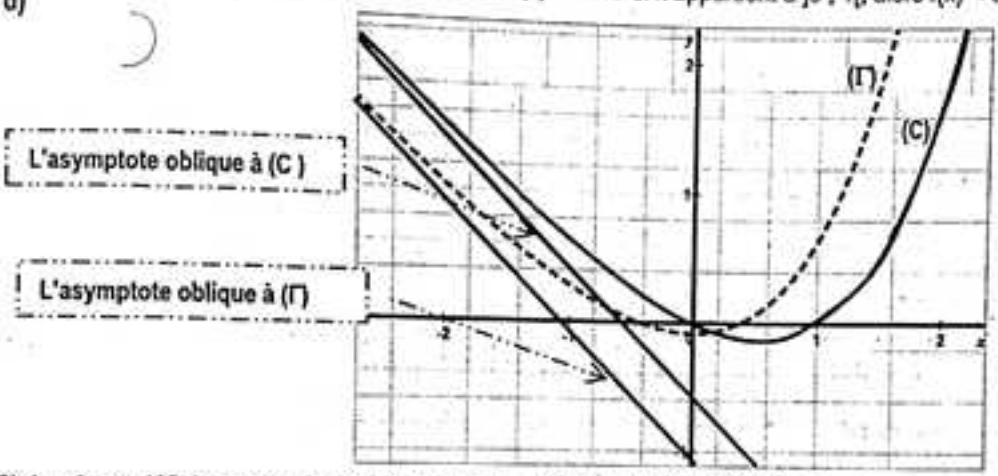
x	$-\infty$		$\ln(e-1)$		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$f(\ln(e-1))$	↗	$+\infty$

$f(\ln(e-1))=\frac{1}{e-1}(e-1)-\ln(e-1)-\frac{1}{e-1}=1-\ln(e-1)-\frac{1}{e-1}=\frac{e-2}{e-1}-\ln(e-1)$.

Or f(0) = f(1) = 0.

D'où : si x appartient à $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, alors $f(x)>0$ et si x appartient à $]0, 1[$, alors $f(x)<0$.

d)



2)a)• Φ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $\Phi'(x)=e^x-1$.

$e^x-1>0$ équivaut à $x>0$. Avec $e^x-1=0$ si et seulement si $x=0$. D'où :

dans $]-\infty, 0[$, on a $\Phi'(x)<0$, donc Φ est strictement décroissante

dans $]0, +\infty[$, on a $\Phi'(x)>0$, donc Φ est strictement croissante.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-x-\frac{1}{2}-\frac{1}{e-1}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{e^x}{x}-1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{e-1}\times\frac{1}{x}\right)=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\Phi(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}-1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{e-1}\times\frac{1}{x}\right)=+\infty$.

D'où la courbe de Φ admet en $+\infty$, une branche parabolique de direction (Oy).

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\Phi(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x}-1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{e-1}\times\frac{1}{x}\right)=-1$.

Et $\lim\limits_{x\to-\infty}(\Phi(x)+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-\frac{1}{2}-\frac{1}{e-1}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{e-1}$.

D'où la droite d'équation $y=-x-\frac{1}{2}-\frac{1}{e-1}$ est asymptote oblique à (Γ) en $-\infty$.

b) Soit x un nombre réel, $\Phi(x)-f(x)=\left(\frac{e-2}{e-1}\right)e^x-\frac{1}{2}$.

$\Phi(x)-f(x)>0 \Leftrightarrow \left(\frac{e-2}{e-1}\right)e^x-\frac{1}{2}>0 \Leftrightarrow e^x>\frac{e-1}{2(e-2)} \Leftrightarrow x>\ln\left(\frac{e-1}{2(e-2)}\right)$.

Scanned by CamScanner

Or $\Phi(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{e-2}{e-1}\right)e^x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{e-1}{2(e-2)} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{e-1}{2(e-2)}\right)$.

D'où : Si x appartient à $\left]-\infty, \ln\left(\frac{e-1}{2(e-2)}\right)\right[$, on a $\Phi(x) - f(x) < 0$, donc (Γ) est en dessous de (C).

Si x appartient à $\left]\ln\left(\frac{e-1}{2(e-2)}\right), +\infty\right[$, on a $\Phi(x) - f(x) > 0$, donc (Γ) est au dessus de (C).

c) *Voir la courbe ci-dessus*

3) • Soit un nombre réel x,

$$\int_x^{x+1} f(t)dt = \int_x^{x+1}\left(\frac{1}{e-1}e^t - t - \frac{1}{e-1}\right)dt = \left[\frac{1}{e-1}e^t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{e-1}t\right]_x^{x+1}$$

$$= \frac{e}{e-1}e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}x - \frac{1}{e-1} - \frac{1}{e-1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{e-1}x$$

$$= e^x - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}$$

$$= \Phi(x)$$

D'où $\Phi(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$.

• $|\Phi(0)|$ est l'aire en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

4)a) • La fonction f est strictement croissante dans [1 , +∞[, donc dans [n , n + 1], pour n entier naturel non nul.
Soit n entier naturel non nul, et x dans [n , n + 1], on a $f(n) \le f(x) \le f(n+1)$, donc d'après l'inégalité de la moyenne appliquée à f sur [n , n + 1], on a $f(n)[(n+1)-n] \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le f(n+1)[(n+1)-n]$.

C'est-à-dire $f(n) \le \Phi(n) \le f(n+1)$.

• Soit n entier naturel non nul, f est continue et strictement croissante [n , n + 1].
Et f([n , n + 1]) = [f(n) , f(n + 1)].
Comme d'après ce qui précède, Φ(n) est dans [f(n) , f(n + 1)], alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe exactement un réel u_n dans [n , n + 1], tel que $f(u_n) = \Phi(n)$.

b) $f(u_1) = \Phi(1)$. Donc pour représenter u_1, on place le point de (Γ) d'abscisse 1. Son ordonnée est $f(u_1)$.
Ensuite, on trace la parallèle à l'axe des abscisses passant par ce point, elle rencontre la courbe (C) en un point A_1, son abscisse est u_1.
$f(u_2) = \Phi(2)$. Donc pour représenter u_2, on place le point de (Γ) d'abscisse 2. Son ordonnée est $f(u_2)$.
Ensuite, on trace la parallèle à l'axe des abscisses passant par ce point, elle rencontre la courbe (C) en un point A_2, son abscisse est u_2. ***(Le lecteur représentera u_1 et u_2 à par de programme donné)***

c) • Par définition de la suite (u_n), on a : pour tout entier naturel n, $n \le u_n \le n + 1$.
Donc $0 \le u_n - n \le 1$. C'est-à-dire $0 \le v_n \le 1$. On peut alors conclure que la suite (v_n) est bornée par 0 et 1.

• On a $\Phi(n) = f(u_n)$ pour tout entier naturel non nul n. C'est-à-dire : $e^n - n - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1} = \frac{1}{e-1}e^{u_n} - u_n - \frac{1}{e-1}$.

Or $e^n - n - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1} = \frac{1}{e-1}e^{u_n} - u_n - \frac{1}{e-1}$ signifie $e^n - n - \frac{1}{2} = \frac{1}{e-1}e^{v_n+n} - v_n - n$.

Ce qui équivaut à $e^n - \frac{1}{2} + v_n = \frac{e^{v_n}}{e-1}e^n$. Finalement, $\frac{e^{v_n}}{e-1} = 1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{v_n}{e^n}$.

• De l'égalité précédente, on a $e^{v_n} = (e-1)\left(1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{v_n}{e^n}\right)$.

D'où $v_n = \ln(e-1) + \ln\left(1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{v_n}{e^n}\right)$.

Scanned by CamScanner

Or on a $0 \le v_n \le 1$, alors $0 \le \frac{v_n}{e^n} \le \frac{1}{e^n}$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n} = 0$, alors d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{e^n} = 0$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{v_n}{e^n}\right) = 1$, puis que $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{v_n}{e^n}\right) = 0$.

Or $\frac{e^{v_n}}{e-1} = 1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{v_n}{e^n}$, alors $\ln\left(\frac{e^{v_n}}{e-1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{v_n}{e^n}\right)$ Donc $v_n - \ln(e-1) = \ln\left(1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{v_n}{e^n}\right)$

Donc $v_n = \ln(e-1) + \ln\left(1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{v_n}{e^n}\right)$. Finalement $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ln(e-1)$.

Solution 35

A)1) • f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $f'(x) = e^{-2x} - 2(1+x)e^{-2x} = (-1-2x)e^{-2x}$.
Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $-1-2x$.

Dans $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$, on a $f' > 0$ et donc f est strictement croissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$.

Dans $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, on a $f' < 0$, et donc f est strictement décroissante sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1+x)e^{-2x} = -\infty$, (car $\lim_{x\to-\infty} e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} (1+x) = -\infty$).

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{2x}} + \frac{1}{2} \times \frac{2x}{e^{2x}} = 0$, (car $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$).

On résume alors les variations de f dans le tableau suivant :

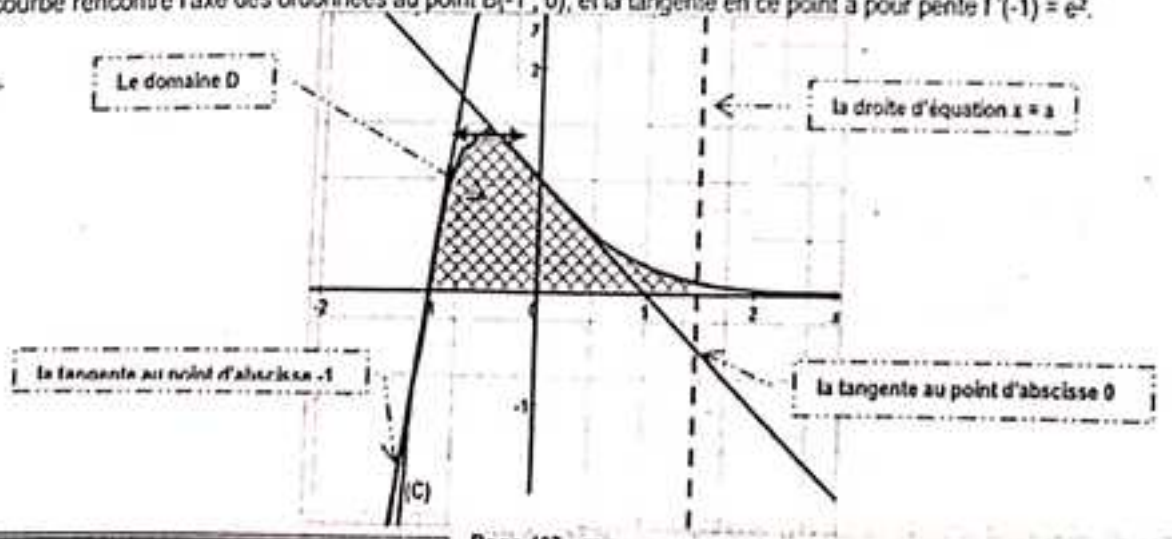
x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{e}{2}$	↘	0

• $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-2x} = +\infty$. La courbe de f a en $-\infty$, une branche parabolique de direction (Oy).

• $f(0) = 1$, d'où la courbe (C) rencontre l'axe des ordonnées au point A(0 , 1), et la tangente en ce point a pour pente $f'(0) = -1$.

• $f(x) = 0$ si et seulement si $x = -1$.

D'où la courbe rencontre l'axe des ordonnées au point B(-1 , 0), et la tangente en ce point a pour pente $f'(-1) = e^2$.



Scanned by CamScanner

• L'aire en cm² de D est : $\text{Aire}(D) = 4\times\int_{-1}^{a} f(x)dx\ cm^2 = 4\times\int_{-1}^{a}(1+x)e^{-2x}dx\ cm^2$.

sons $u(x) = 1 + x$ et $u'(x) = 1$. $v'(x) = e^{-2x}$ et $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$. En intégrant par parties, on a :

$$\int_{-1}^{a}(1+x)e^{-2x}dx = \left[-\frac{1}{2}(1+x)e^{-2x}\right]_{-1}^{a} + \frac{1}{2}\times\int_{-1}^{a}e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}(1+a)e^{-2a} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-1}^{a}$$

$$= -\frac{1}{2}(1+a)e^{-2a} + \frac{1}{4}(e^2 - e^{-2a})$$

$$= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}(-3-2a)e^{-2a}$$

D'où l'aire en cm² de D est : $\text{Aire}(D) = e^2 + (-3-2a)e^{-2a}$.

• $\lim\limits_{a\to+\infty} -2ae^{-2a} = \lim\limits_{a\to-\infty} ae^a = 0$ et $\lim\limits_{a\to+\infty} e^{-2a} = \lim\limits_{a\to-\infty} e^a = 0$ donc

$\lim\limits_{a\to+\infty} \text{Aire}(D) = \lim\limits_{a\to+\infty} e^2 - 3e^{-2a} - 2ae^{-2a} = e^2$. D'où $\lim\limits_{a\to+\infty} \text{Aire}(D) = e^2\ cm^2$.

B)1) • f est solution de (1) $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$.

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $4xe^{-2x} + a(-1-2x)e^{-2x} + b(1+x)e^{-2x} = 0$

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $(4x - a - 2ax + b + bx)e^{-2x} = 0$.

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $(4 - 2a + b)x - a + b = 0$

$\Leftrightarrow$ $4 - 2a + b = 0$ et $-a + b = 0$.

$\Leftrightarrow$ $a = 4$ et $b = 4$.

D'où f est solution de (1) si et seulement si, $a = 4$ et $b = 4$.

• $f'' + 4f' + 4f = 0$, donc $(f'' + 4f' + 4f)' = 0$. C'est-à-dire $f^{(3)} + 4f'' + 4f' = 0$.

Ce qui nous conduit à l'égalité $(f')'' + 4(f')' + 4f' = 0$. On en déduit que f' est solution de (1).

Supposons $f^{(n)}$ solution de (1) pour un entier naturel non nul n, montrons que $f^{(n+1)}$ est aussi solution de (1).

En effet, $f^{(n)}$ est solution de (1) signifie $(f^{(n)})'' + 4(f^{(n)})' + 4f^{(n)} = 0$. Ce qui s'écrit aussi, $f^{(n+2)} + 4f^{(n+1)} + 4f^{(n)} = 0$.

Il s'ensuit que $(f^{(n+2)} + 4f^{(n+1)} + 4f^{(n)})' = 0$, et donc $f^{(n+3)} + 4f^{(n+2)} + 4f^{(n+1)} = 0$.

C'est-à-dire $(f^{(n+1)})'' + 4(f^{(n+1)})' + 4f^{(n+1)} = 0$. D'où $f^{(n+1)}$ est solution de (1).

On conclut, d'après le principe de récurrence que pour tout entier naturel n, $f^{(n)}$ est solution de (1).

NB : *Dans toutes les égalités ci-dessus, 0 désigne la fonction nulle et $f^{(n)}$ la dérivée $n^{ième}$ de f.*

• La fonction f vérifie (1), donc $f'' + 4f' + 4f = 0$, c'est-à-dire $f = -\frac{1}{4}f'' - f' = \left(-\frac{1}{4}f' - f\right)'$. Donc une primitive de

f est la fonction : $-\frac{1}{4}f' - f : x \mapsto -\frac{1}{4}f'(x) - f(x) = -\frac{1}{4}(-1-2x)e^{-2x} - (1+x)e^{-2x} = \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}x\right)e^{-2x}$.

Les primitives de f sont les fonctions $f_k : x \mapsto -\frac{1}{4}(3+2x)e^{-2x} + k$, où k est une constante réelle.

• Soit F une primitive de f, il existe un réel k tel que, pour tout réel x, $F(x) = -\frac{1}{4}(3+2x)e^{-2x} + k$.

Ainsi, $F'(x) = f(x) = (1+x)e^{-2x}$ et $F''(x) = f'(x) = (-1-2x)e^{-2x}$.

F est solution de (1) $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $F''(x) + 4F'(x) + 4F(x) = 0$.

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $f'(x) + 4f(x) + 4F(x) = 0$

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $(-1-2x)e^{-2x} + (4+4x)e^{-2x} - (3+2x)e^{-2x} + 4k = 0$.

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $k = 0$.

D'où la primitive de f qui est solution de l'équation (1) est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = -\frac{1}{4}(3+2x)e^{-2x}$.

2) Notons P_n, la propriété : $f^{(n)} = c_n f' + d_n f$, $c_n = -4c_{n-1} + d_{n-1}$ et $d_n = -4c_{n-1}$.

On a $f^{(0)} = 0.f' + 1.f$. On prend $c_0 = 0$ et $d_0 = 1$.

On a $f^{(1)} = 1.f' + 0.f$. On a $c_1 = 1 = -4c_0 + d_0$ et $d_1 = 0 = -4c_0$. D'où P_1 est vraie.

Supposons la propriété P_n vraie pour jusqu'à un certain entier naturel n.

Montrons alors que P_{n+1} est aussi vraie (c'est-à-dire $f^{(n+1)} = c_{n+1}f' + d_{n+1}f$, $c_{n+1} = -4c_n + d_n$ et $d_{n+1} = -4c_n$).

Scanned by CamScanner

En effet, d'après la question 1), on a : $f^{(n+1)} + 4f^{(n)} + 4f^{(n-1)} = 0$, donc :
$f^{(n+1)} = -4f^{(n)} - 4f^{(n-1)} = -4(c_n f' + d_n f) - 4(c_{n-1} f' + d_{n-1} f)$ (d'après l'hypothèse de récurrence)
$= (-4c_n - 4c_{n-1}) f' + (-4d_n - 4d_{n-1}) f$.
Or d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $c_n = -4c_{n-1} + d_{n-1}$ et $d_n = -4c_{n-1}$.
Donc $c_n + 4c_{n-1} = d_{n-1}$ et $d_n = -4c_{n-1}$, c'est-à-dire $c_n - d_n = d_{n-1}$ et $d_n = -4c_{n-1}$.
On peut donc écrire $f^{(n+1)} = (-4c_n + d_n) f' + (-4d_n - 4c_n + 4d_n) f = (-4c_n + d_n) f' - 4c_n f$.
D'où $f^{(n+1)} = c_{n+1} f' + d_{n+1} f$, $c_{n+1} = -4c_n + d_n$ et $d_{n+1} = -4c_n$. D'où P_{n+1} est vraie.
Et en conclusion, pour tout entier naturel n, on a $f^{(n)} = c_n f' + d_n f$, $c_n = -4c_{n-1} + d_{n-1}$ et $d_n = -4c_{n-1}$.

3) • Soit n un entier naturel, on a : $\delta_n - 2\gamma_n = \dfrac{d_n}{(-2)^n} - \dfrac{2c_n}{(-2)^n} = \dfrac{d_n - 2c_n}{(-2)^n}$.

$$\delta_{n+1} - 2\gamma_{n+1} = \frac{d_{n+1}}{(-2)^{n+1}} - \frac{2c_{n+1}}{(-2)^{n+1}} = \frac{d_{n+1} - 2c_{n+1}}{(-2)^{n+1}} = \frac{-4c_n + 8c_n - 2d_n}{(-2)^{n+1}} = \frac{d_n - 2c_n}{(-2)^n}.$$

D'où pour tout entier naturel, on a : $\delta_{n+1} - 2\gamma_{n+1} = \delta_n - 2\gamma_n$.
Donc la suite $(\delta_n - 2\gamma_n)$ est constante et pour tout entier naturel n, $\delta_n - 2\gamma_n = \delta_0 - 2\gamma_0 = d_0 - 2c_0 = 1$.
• Soit n un entier naturel, on a :

$$\delta_{n+1} - \delta_n = \frac{d_{n+1}}{(-2)^{n+1}} - \frac{d_n}{(-2)^n} = \frac{-4c_n}{(-2)^{n+1}} - \frac{d_n}{(-2)^n} \quad (\text{car } d_{n+1} = -4c_n)$$
$$= \frac{2c_n}{(-2)^n} - \frac{d_n}{(-2)^n}$$
$$= \frac{2 \times (-2)^n \times \gamma_n}{(-2)^n} - \frac{(-2)^n \times \delta_n}{(-2)^n}$$
$$= 2\gamma_n - \delta_n$$
$$= -1 \quad (\text{d'après la question précédente})$$

D'où la suite (δ_n) est arithmétique de raison -1 et de premier terme $\delta_0 = d_0 = 1$.
Et donc, pour tout entier naturel n, $\delta_n = 1 - n$.
• Soit n entier naturel, on a : $f^{(n)} = c_n f' + d_n f$.

Or $\delta_n = 1 - n$ et $\delta_n - 2\gamma_n = 1$, alors $\delta_n = 1 - n$ et $\gamma_n = -\dfrac{n}{2}$. Par suite, on a $c_n = n(-2)^{n-1}$ et $d_n = (1-n)(-2)^n$.

Et pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = n(-2)^{n-1} f'(x) + (1-n)(-2)^n f(x) = n(-2)^{n-1}(-1-2x)e^{-2x} + (1-n)(-2)^n(1+x)e^{-2x}$.
D'où pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = (n-2-2x)(-2)^{n-1}e^{-2x}$.

Solution 36

A)1) • g est un produit de deux fonctions dérivables sur $]-1, +\infty[$, ($x \mapsto 1+x$ et f).
D'où g est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et pour tout réel x, $g'(x) = f(x) + (1+x)f'(x)$.
Or f appartient à F, d'où pour tout réel x, $f(x) + (1+x)f'(x) = 1 + \ln(1+x)$.
Donc pour tout réel x, $g'(x) = 1 + \ln(1+x)$.
g est par conséquent une primitive de la fonction h définie de $]-1, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par $h(x) = 1 + \ln(1+x)$.
• g_1 est une primitive de h, donc g_1 est dérivable sur $]-1, +\infty[$.
f_1 est donc un quotient de fonctions dérivables sur $]-1, +\infty[$. D'où f_1 est dérivable sur $]-1, +\infty[$.

Pour tout $x > -1$, $f_1'(x) = \dfrac{g_1'(x)(x+1) - g_1(x)}{(1+x)^2}$, d'où $(1+x)f_1'(x) = g_1'(x) - \dfrac{g_1(x)}{1+x}$.

Ainsi, $(1+x)f_1'(x) = 1 + \ln(1+x) - f_1(x)$ (car g_1 est une primitive de h).
On en déduit que pour tout réel $x > -1$, $(1+x)f_1'(x) + f_1(x) = 1 + \ln(1+x)$, c'est-à-dire que $f_1 \in F$.

2) Une primitive de h est la fonction $x \mapsto \int_0^x h(t)dt$.

Or $\int_0^x h(t)dt = \int_0^x (1 + \ln(1+t))dt = \int_0^x dt + \int_0^x \ln(1+t)dt = x + \int_0^x \ln(1+t)dt$ (1).

Pour le calcul de $\int_0^x \ln(1+t)dt$, intégrons par parties :

Scanned by CamScanner

posons $u'(t) = 1$, $u(t) = t + 1$, $v(t) = \ln(1 + t)$ et $v'(t) = \frac{1}{1+t}$. On a :

$$\int_0^x \ln(1+t)dt = \left[(t+1)\ln(1+t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{t+1}{1+t}dt = (x+1)\ln(x+1) - \int_0^x dt = (x+1)\ln(x+1) - x \quad (2)$$

De (1) et (2), on déduit que $\int_0^x h(t)dt = (x+1)\ln(x+1)$.

Donc les primitives de h sur $]-1, +\infty[$ sont les fonctions $F_k : x \mapsto F_k(x) = (1+x)\ln(1+x) + k$, où k est une constante réelle.

3) D'après la question 1), f appartient à F si et seulement si pour tout $x > -1$, $f(x) = \frac{g(x)}{1+x}$, où g est une primitive de h sur $]-1, +\infty[$.

Donc les éléments de F sont les fonctions $f_k : x \mapsto f_k(x) = \ln(1+x) + \frac{k}{1+x}$, où k est une constante réelle.

B)1) f_k est définie, continue et dérivable sur $]-1, +\infty[$, et pour $x > -1$, $f_k'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{k}{(1+x)^2} = \frac{x+1-k}{(1+x)^2}$.

Le signe de $f_k'(x)$ est celui de $x + 1 - k$. Or $x + 1 - k$ s'annule pour $x = k - 1$.
Il faut étudier suivant le réel k, la position de $k - 1$ par rapport à -1.
Si $k > 0$, alors $-1 + k > -1$.
On a donc : pour x dans $]-1, -1 + k[$, $x + 1 - k < 0$.
pour x dans $]-1 + k, +\infty[$, $x + 1 - k > 0$.
Ainsi, f est strictement croissante dans $]-1 + k, +\infty[$ et strictement décroissante dans $]-1, -1 + k[$.
Si $k \leq 0$, alors $-1 + k \leq -1$.
Donc pour tout réel $x > -1$, on a $x + 1 - k > 0$. Et donc f est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$.

Et si on lançait un coup d'œil sur les limites on aurait :

- Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{k}{1+x} = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = +\infty$.
- $f_k(x) = \frac{(1+x)\ln(1+x) + k}{1+x}$.

Or $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \left[(1+x)\ln(1+x) + k\right] = k$, alors : Si $k < 0$, on a : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f_k(x) = -\infty$.

Si $k > 0$, on a : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f_k(x) = +\infty$.

Si $k = 0$, on a $f_0(x) = \ln(1 + x)$ et donc $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f_0(x) = -\infty$.

D'où les tableaux de variations possibles de f_k suivants :

Si $k \leq 0$

x	-1		$+\infty$
$f_k'(x)$	‖	+	
$f_k(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Si $k > 0$

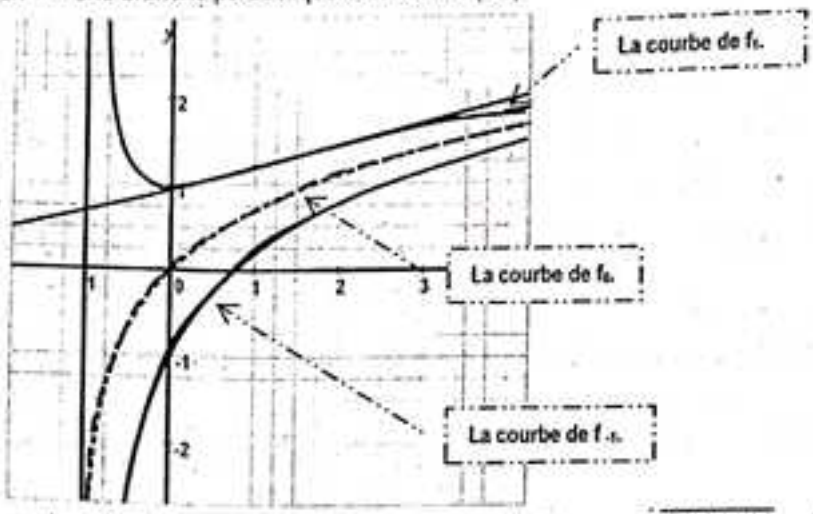
x	-1		$-1+k$		$+\infty$
$f_k'(x)$	‖	-	0	+	
$f_k(x)$	‖ $+\infty$	↘	$1 + \ln k$	↗	$+\infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{k}{x^2 + x} = 0$, donc

Scanned by CamScanner

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_k(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{x}\times\frac{\ln(1+x)}{1+x}+\frac{k}{x^2+x}\right)=0.$$

D'où la courbe de f_k admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox).



3) $\overrightarrow{M_1(t)M_2(t)}=f_{k_2}(t)-f_{k_1}(t)=\frac{k_2-k_1}{1+t}$ et $\overrightarrow{M_1(t)M_3(t)}=f_{k_3}(t)-f_{k_1}(t)=\frac{k_3-k_1}{1+t}$. D'où $\frac{\overrightarrow{M_1(t)M_2(t)}}{M_1(t)M_3(t)}=\frac{k_2-k_1}{k_3-k_1}$.

On constate que le rapport $\frac{\overrightarrow{M_1(t)M_2(t)}}{M_1(t)M_3(t)}$ est indépendant de t.

C)1) On a pour tout réel $x>-1$, $f_0'(x)=\frac{1}{1+x}$.

Notons Q_n la propriété : « $f_0'(x)=P_n(x)+\frac{x^{2n}}{1+x}$ ».

Pour n = 1 : $P_1(x)+\frac{x^2}{1+x}=\sum_{k=0}^{1}(-1)^k x^k+\frac{x^2}{1+x}=1-x+\frac{x^2}{1+x}=\frac{1}{1+x}=f_0'(x)$. D'où Q_1 est vraie.

Supposons Q_n vraie pour un certain entier naturel non nul n, montrons que Q_{n+1} est aussi vraie, (c'est-à-dire $f_0'(x)=P_{n+1}(x)+\frac{x^{2n+2}}{1+x}$).

$$P_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k x^k=\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k x^k+x^{2n}-x^{2n+1}.$$

D'où $P_{n+1}(x)+\frac{x^{2n+2}}{1+x}=P_n(x)+x^{2n}-x^{2n+1}+\frac{x^{2n+2}}{1+x}=P_n(x)+\frac{x^{2n}}{1+x}=\frac{1}{x+1}$ (d'après l'hypothèse de récurrence).

D'où Q_{n+1} est aussi vraie.

On peut alors conclure que pour tout réel x, $f_0'(x)=P_n(x)+\frac{x^{2n}}{1+x}$.

2) • Soit n un entier naturel et x appartenant à [0 , 1].

On a $\frac{x^{2n}}{1+x}-x^{2n}=-\frac{x^{2n+1}}{1+x}$. Puisque x est positif, alors $-\frac{x^{2n+1}}{1+x}$ est négatif.

D'où pour tout n entier naturel et pour tout x appartenant à [0 , 1], on a : $\frac{x^{2n}}{1+x}\le x^{2n}$.

• Soit n entier naturel non nul et x un réel dans [0 , 1], on a : $0\le\frac{x^{2n}}{1+x}\le x^{2n}$.

D'où en intégrant dans [0 , 1], on a : $0\le\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx\le\int_0^1 x^{2n}dx$.

Scanned by CamScanner

Comme $\int_0^1 x^{2n}dx = \frac{1}{2n+1}$, alors on peut donc conclure que $0 \le \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}dx \le \frac{1}{2n+1}$.

3) • On a $f_0'(x) = P_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x}$, pour tout réel $x > -1$.

D'où $\int_0^1 f_0'(x)dx = \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k(x)^k\right]dx + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}dx$. Or $\int_0^1 f_0'(x)dx = [f_0(x)]_0^1 = f_0(1) - f_0(0) = f_0(1)$ et

$$\int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k(x)^k\right]dx = \sum_{k=0}^{2n-1}\left|(-1)^k\int_0^1 x^k dx\right| = \sum_{k=0}^{2n-1}\left|(-1)^k\left[\frac{1}{k+1}x^{k+1}\right]_0^1\right| = \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$= w_n$$

D'où $f_0(1) = w_n + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}dx$.

• On a d'après ce qui précède, $w_n = f_0(1) - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}dx$.

Or à la question C)2) nous avons montré que, pour tout entier naturel n et pour tout x appartenant à [0 , 1], on a :

$0 \le \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}dx \le \frac{1}{2n+1}$. Or,

$0 \le \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}dx \le \frac{1}{2n+1}$ donc $-\frac{1}{2n+1} \le -\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}dx \le 0$. Donc $f_0(1) - \frac{1}{2n+1} \le f_0(1) - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}dx \le f_0(1)$.

On peut alors écrire : $\ln 2 - \frac{1}{2n+1} \le w_n \le \ln 2$. (Car $f_0(1) = \ln 2$)

Or $\lim_{n\to+\infty}\left(\ln 2 - \frac{1}{2n+1}\right) = \ln 2$, alors d'après le théorème des gendarmes, on déduit que $\lim_{n\to+\infty} W_n = \ln 2$.

• On a d'après ce qui précède, pour tout entier naturel n, $\ln 2 - \frac{1}{2n+1} \le w_n \le \ln 2$.

Or $\ln 2 - \frac{1}{2n+1} \le w_n \le \ln 2$ implique que $-\ln 2 \le -w_n \le \frac{1}{2n+1} - \ln 2$. Donc $0 \le \ln 2 - W_n \le \frac{1}{2n+1}$.

Ainsi si $\frac{1}{2n+1} \le 0{,}1$, alors on a $\ln 2 - W_n \le 0{,}1$. C'est-à-dire si $n > \frac{9}{2}$, alors on a $\ln 2 - W_n \le 0{,}1$.

Il suffit de prendre n_0 dans $\mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3, 4\}$, par exemple $n_0 = 5$.

Solution 37

1) Soit θ l'application nulle.
On a pour tout réel x strictement positif, $\theta(x) = 0$, $\theta'(x) = 0$, $\theta''(x) = 0$ et $x^2\theta''(x) - x\theta'(x) + \theta(x) = 0$.
D'où θ appartient à E. E est donc non vide.

2) • Soit x réel strictement positif.
$\varphi(x) = xu(x)$, $\varphi'(x) = u(x) + xu'(x)$ et $\varphi''(x) = u'(x) + xu''(x) + u'(x) = 2u'(x) + xu''(x)$.
Donc $x^2\varphi''(x) - x\varphi'(x) + \varphi(x) = 0$ ⇔ pour tout $x > 0$, $2x^2u'(x) + x^3u''(x) - xu(x) - x^2u'(x) + xu(x) = 0$
⇔ pour tout $x > 0$, $x^2(u'(x) + xu''(x)) = 0$
⇔ pour tout $x > 0$, $u'(x) + xu''(x) = 0$, car $x > 0$.
⇔ pour tout $x > 0$, $(xu'(x))' = 0$
⇔ pour tout $x > 0$, $xu'(x) = A$, où A est une constante réelle.

D'où φ vérifie (1) si et seulement si pour tout $x > 0$, $xu'(x) = A$, où A est une constante réelle.

• Soit x réel strictement positif.

Scanned by CamScanner

$xu'(x) = A \Leftrightarrow u'(x) = \frac{A}{x} \Leftrightarrow u(x) = A\ln x + B$, où B est aussi une constante réelle.

D'où pour tout $x > 0$, on a $u(x) = A\ln x + B$, où A et B sont des constantes réelles.

• Or pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = xu(x)$, alors pour tout $x > 0$, on a $\varphi(x) = Ax\ln x + Bx$, où A et B sont des constantes réelles. ***Le lecteur vérifiera que φ ainsi définie satisfait bel et bien (1).***

3)a) La forme générale des solutions de (1) est $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = Ax\ln x + Bx$, où A et B sont des constantes réelles.

Si on pose A = 1 et B = 0, on a : $\varphi(x) = x\ln x = h(x)$ pour tout réel x strictement positif. D'où h appartient à E.

b) $g(x) = x\ln x$ si $x > 0$, avec $g(0) = 0$.

• g est définie sur $[0, +\infty[$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln x = 0 = g(0)$. D'où g est continue en 0.

• Pour tout $x < 0$, $\frac{g(x) - g(0)}{x} = \ln x$. D'où $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$.

Par conséquent, g n'est pas dérivable en 0.

Notons aussi que la courbe de g admet au point d'abscisse 0, une demi-tangente verticale.

c) • g est définie et continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 + \ln x$.

On a $1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow x > e^{-1}$.

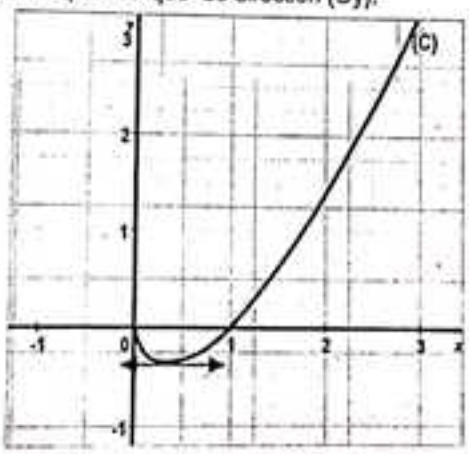
D'où le tableau de variations de g est le suivant :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
g'(x)	$-\infty$	-	0	+	
g(x)	0	↘	$-e^{-1}$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $g(e^{-1}) = -e^{-1}$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

D'où la courbe (C) de g admet en $+\infty$, une branche parabolique de direction (Oy).



Note : ***Le point O est un point d'arrêt.***

Scanned by CamScanner

7 CALCUL DES PROBABILITES

RAPPEL DU COURS

A. Vocabulaire

On appelle :

- **Epreuve :** toute expérience aléatoire (au cours de laquelle les résultats ne sont connus à l'avance).

Exemple : le tirage de boule, de jeu de cartes, le lancer de dé . . .

- **Evénement :** tout ensemble de résultats qu'on peut avoir au cours d'une épreuve.

Exemple : dans le lancer d'un dé numéroté de 1 à 6, les résultats sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

A : « avoir un chiffre pair » est un événement. Donc A = {2, 4, 6}.

- **Evénement élémentaire :** tout événement qui ne comporte qu'un seul résultat.

Exemple : l'événement « avoir un multiple de 6 » dans le lancer d'un dé est élémentaire.

- **Evénement impossible** : tout événement qui ne peut se réaliser.

Exemple : l'événement « avoir le chiffre 7 » dans le lancer d'un dé est impossible. On le note d'habitude Ø.

- **Evénement certain :** tout événement qui se réalise toujours.
- **Univers des possibles :** ensemble de tous les résultats possibles au cours d'une épreuve. On le note parfois Ω.

Exemple : Dans le lancer d'un dé numéroté de 1 à 6, l'univers des possibles est Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

- **Univers des événements :** ensemble de tous les événements possibles au cours d'une épreuve. On le note parfois P(Ω).

Le couple (Ω, P(Ω)) est un **espace probabilisable.**

Soit A et B deux événements.

- A∩B est l'événement qui se réalise lorsque les événements A et B se réalisent simultanément.

  Lorsque A∩B = Ø, on dit que les événements A et B sont **incompatibles.**
- A∪B est l'événement qui se réalise lorsque A ou B se réalise.
- $\overline{A}$ est l'événement contraire de A. Il se réalise lorsque A ne se réalise pas.
- A – B est l'événement qui se réalise lorsque A se réalise et B ne se réalise pas.

Remarque :

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

B: Techniques de calcul des probabilités

B_1 – Définition

On appelle probabilité sur un univers Ω, toute application p qui à tout événement A de P(Ω), associe un réel p(A) dans [0 , 1] et qui vérifie les propriétés suivantes :

- p(Ω) = 1
- soit A et B deux événements incompatibles (c'est-à-dire A∩B = Ø), $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

p(A) se lit : probabilité pour que l'événement A se réalise.

Le triplet (Ω, P(Ω), p) est alors un **espace probabilisé.**

B_2 – Propriétés pour le calcul des probabilités

Propriétés 1 :

Soit A et B deux événements.

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

p(Ø) = 0

P(A – B) = p(A) – p(A∩B).

Scanned by CamScanner

Propriétés 2 :
Si lors d'une épreuve l'univers des possibles est $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, alors $p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_2\}) + \ldots + p(\{\omega_n\}) = 1$.
Soit A un événement. Si $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$, alors $p(A) = p(\{x_1\}) + p(\{x_2\}) + \ldots + p(\{x_p\})$.

Propriété 3 : *équiprobabilité*
Il y a équiprobabilité au cours d'une épreuve lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Dan ce cas, la probabilité d'un événement A est donnée par le rapport : $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$.

Propriétés 4 : *épreuve de Bernoulli – épreuve binomiale.*
- Une épreuve est dite de Bernoulli lorsqu'elle n'a que deux résultats possibles.

L'un des résultats sera appelé le succès et l'autre l'échec.
On notera p la probabilité du succès et q celle de l'échec. Et on a : $q = 1 - p$.
- Lorsqu'on répète n fois une épreuve de Bernoulli et dans les mêmes conditions, on dit qu'on a réalisé une épreuve binomiale de paramètres (n , p).

Dans ces n répétitions, la probabilité d'avoir k succès est égale à : $C_n^k p^k q^{n-k}$.

Propriétés 5 : *probabilité conditionnelle.*
- Soit B un événement d probabilité non nulle.

La probabilité d'un événement A sachant que l'événement B s'est réalisé, notée $p_B(A)$ ou p(B/A), est

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

- soit A et B deux événements de probabilités non nulles, $p_A(B)p(A) = p_B(A)p(B)$.
- n événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition de Ω lorsque :

- Aucun de ces événements n'est impossible.
- Ces événements sont deux à deux incompatibles
- La réunion de tous ces événements est l'univers Ω.

- Soit n événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ formant une partition de Ω.

La probabilité d'un événement A est : $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} p_{B_i}(A)p(B_i)$

Propriété 6 : *événements indépendants.*
Soit A et B deux événements.
A et B sont indépendants lorsque $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.
NB : Intuitivement, deux événements A et B sont indépendants lorsque, la réalisation de l'un d'entre eux ou sa non réalisation n'influence pas la réalisation ou la non réalisation de l'autre.

C. variable aléatoire réelle

C_1 – Définitions

- On appelle variable aléatoire réelle sur un univers Ω, toute application X définie de Ω vers $\mathbb{R}$.

X associe à chaque résultat de l'épreuve une valeur réelle.
L'ensemble des valeurs prises par X est noté X(Ω) et appelé l'univers image.
Exemple :
On tire deux boules d'une urne en contenant 5 noires et 3 blanches.
Chaque boule blanche tirée rapporte 50 FCFA et chaque boule noire tirée fait perdre 40 FCFA.
On définit alors la variable aléatoire réelle X qui à chaque tirage associe son gain algébrique.
Les gains possibles, qui sont les valeurs prises par X sont : -80 (pour deux boules noires tirées), 10 (pour deux boules de couleurs différentes) et 100 (pour deux boules blanches).
Donc X(Ω) = {-80, 10, 100}.

Scanned by CamScanner

« X = 100 » est l'événement « gagner 100 FCFA » qui correspond à l'événement « tirer deux boules blanches ».
« X ≤ 10 » correspond à l'événement (X = 80) ∪ (X = 10). Sa probabilité est p(X ≤ 10) = p(X = 80) + p(X = 10).

• On appelle **loi de probabilité de la variable aléatoire X** l'application f de X(Ω) vers [0 ; 1], qui à chaque élément x de X(Ω), associe la probabilité f(x) = p(X = x) (c'est-à-dire la probabilité pour que X prenne la valeur x).
Si l'univers image est X(Ω) = {x₁, x₂, ..., xₙ}, alors définir la loi de probabilité de X revient à déterminer p(X = xᵢ) pour i allant de 1 à n.

Remarquons que, dans ce cas, $\sum_{i=1}^{n} p(X=x_i) = 1$

• On appelle **fonction de répartition de la variable aléatoire X**, l'application F de **R** vers [0 ; 1], qui à tout réel x, associe F(x) = p(X ≤ x).
Si l'univers image est X(Ω) = {x₁, x₂, ..., xₙ}, avec x₁ < x₂ ... < xₙ, alors :
- Si x < x₁, alors F(x) = 0
- Si $x_k \leq x < x_{k+1}$, avec k variant de 1 à n – 1, alors $F(x) = \sum_{i=1}^{k} p(X=x_i)$.
- Si $x_n \leq x$, alors F(x) = 1.

Remarquons que, la fonction F est une fonction en escalier croissante, continue en tout élément x_i de X(Ω) à droite mais pas à gauche.

C₂ – Espérance mathématique, variance et écart type d'une variable aléatoire réelle

Soit X une variable aléatoire dont l'univers image est : X(Ω) = {x₁, x₂, ..., xₙ}.

• L'espérance mathématique de X est le réel : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(X=x_i)$.

• La variance de X est : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(X=x_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p(X=x_i)\right)^2$.

• L'écart type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque :
Si au cours d'une épreuve binomiale de paramètres (n , p), on définit une variable aléatoire X qui donne le nombre de succès, alors :
Son espérance mathématique est : E(X) = np.
Sa variance est : V(X) = np(1 – p).

Scanned by CamScanner

EXERCICES POUR COMPRENDRE LE COURS

A. calculer les probabilités

1 – En utilisant la formule : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Exercice 1

Un sondage au sein d'un échantillon d'une population a révélé les résultats suivants :
65% des personnes interrogées aiment le célibat.
35% des personnes interrogées aiment le mariage.
25% des personnes interrogées n'aiment ni le mariage ni le célibat. On choisit une personne de cette population. Quelle est la probabilité :
a) Qu'elle aime le mariage ou le célibat ?
b) Qu'elle aime le mariage et le célibat ?
c) Qu'elle n'aime pas le mariage ?
d) Qu'elle n'aime que le mariage ?

Solution 1

Considérons les événements : A : « cette personne aime le célibat » et B : « cette personne aime le mariage ».

Alors $\overline{A} \cap \overline{B}$ désigne l'événement : « cette personne n'aime ni le mariage, ni le célibat ».

$p(A) = 0,65$; $p(B) = 0,35$ et $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,25$.

a) Notons C : « cette personne aime le mariage ou le célibat », on a : $C = A \cup B$.

Or, $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$, alors $p(C) = p(A \cup B) = 1 - p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,75$. D'où **$p(C) = 0,75$.**

b) Notons D : « cette personne aime le mariage et le célibat », on a : $D = A \cap B$.

Or $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, alors $p(D) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$.

On obtient $p(D) = 0,65 + 0,35 - 0,75$. D'où **$p(D) = 0,25$.**

c) Notons E : « cette personne n'aime pas le mariage », on a : $E = \overline{B}$

D'où $p(E) = 1 - p(B)$. C'est-à-dire $p(E) = 1 - 0,35$. D'où **$p(E) = 0,65$.**

d) Notons F : « cette personne n'aime que le mariage », on a $F = B - A = B \cap \overline{A}$

Or $p(B - A) = p(B) - p(A \cap B)$, alors $p(F) = 0,35 - 0,25$. D'où **$p(F) = 0,1$.**

Exercice 2

Dans un lycée, 62% des élèves sont garçons ou passent leur baccalauréat à la fin de l'année, 77% sont des filles ou ne passent pas leur baccalauréat à la fin de l'année et 25% sont des garçons qui ne passent pas leur baccalauréat à la fin de l'année. Déterminer le pourcentage de filles et le pourcentage d'élèves passant leur baccalauréat.

Solution 2

Notons A : « l'élève est une fille ».

B : « l'élève passe son baccalauréat ».

D'après l'énoncé, on a : $p(\overline{A} \cup B) = 0,62$; $p(A \cup \overline{B}) = 0,77$ et $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,25$.

Or $p(\overline{A} \cup B) = p(\overline{A}) + p(B) - p(\overline{A} \cap B)$, $p(A \cup \overline{B}) = p(A) + p(\overline{B}) - p(A \cap \overline{B})$ et $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B)$.

Et comme $p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B)$, $p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B)$ et $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Alors on obtient :
$$\begin{cases} p(\overline{A} \cup B) = 1 - p(A) + p(B) - p(B) + p(A \cap B) \\ p(A \cup \overline{B}) = p(A) + 1 - p(B) - p(A) + p(A \cap B). \\ p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - (p(A) + p(B) - p(A \cap B)) \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Ce qui permet d'écrire : $\begin{cases} -p(A)+p(A\cap B)=-1+p(\bar{A}\cup B) \\ -p(B)+p(A\cap B)=-1+p(A\cup\bar{B}) \\ p(A)+p(B)-p(A\cap B)=1-p(\bar{A}\cap\bar{B}) \end{cases}$

Posons p(A) = x, p(B) = y et p(A∩B) = z ; on obtient le système suivant : $\begin{cases} x-z=1-p(\bar{A}\cup B)=0,38 \\ y-z=1-p(A\cup\bar{B})=0,23 \\ x+y-z=1-p(\bar{A}\cap\bar{B})=0,75 \end{cases}$

La résolution de ce système nous donne : x = 0,52, y = 0,37 et z = 0,14. D'où p(A) = 0,52 et p(B) = 0,37.

2 – Sachant qu'il n'y a pas équiprobabilité

Exercice 3

On lance un dé truqué. La probabilité d'apparition d'une face est proportionnelle au numéro marqué sur la face. Quelle est la probabilité d'obtenir un six ?

Solution 3

L'univers des possibles est Ω = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6}.

Notons p_i la probabilité d'obtenir la face portant le numéro i. On a :

$$\begin{cases} p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1 \\ \frac{p_1}{1}=\frac{p_2}{2}=\frac{p_3}{3}=\frac{p_4}{4}=\frac{p_5}{5}=\frac{p_6}{6}=\frac{p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6}{1+2+3+4+5+6}=\frac{1}{21} \end{cases} \quad \text{D'où } p_6=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}.$$

Exercice 4

On lance un dé pipé numéroté de 1 à 6.

Tous les chiffres pairs ont la même chance d'apparaître ainsi que tous les chiffres impairs.

On a deux fois plus de chance d'obtenir un chiffre pair qu'un chiffre impair.

1) Quelle est l'épreuve ?
2) Définir en extension l'univers des possibles Ω .
3) Définir la probabilité.
4) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « avoir un chiffre pair » B : « avoir un multiple de 3 » C : « avoir un chiffre ≤ 4 »

Solution 4

1) L'épreuve est : le lancé d'un dé.
2) L'univers est : Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
3) Soit p_i la probabilité d'obtenir le chiffre i, i appartient à {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Définir la probabilité, revient à déterminer p_i pour tout i appartenant à {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Or on a : $\begin{cases} p_1=p_3=p_5=a \\ p_2=p_4=p_6=2a \\ p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1 \end{cases}$. On obtient alors : a + 2a + a + 2a + a + 2a = 1, c'est-à-dire, $a=\frac{1}{9}$.

Et donc : $p_1=p_3=p_5=\frac{1}{9}$ et $p_2=p_4=p_6=\frac{2}{9}$.

4) On a : $A=\{2,4,6\}$, $B=\{3,6\}$ et $C=\{1,2,3,4\}$.

D'où $p(A)=p_2+p_4+p_6=\frac{2}{3}$; $p(B)=p_3+p_6=\frac{1}{3}$; $p(C)=p_1+p_2+p_3+p_4=\frac{2}{3}$.

Exercice 5

On considère une expérience aléatoire qui conduit à un univers Ω = {a_1 , a_2 , . . . , a_n} tel que, pour tout i élément de {1 , 2 , . . . , n}, p({a_i}) = λ×i où λ est une constante réelle. Déterminer λ.

Scanned by CamScanner

Solution 5

On a : $\sum_{i=1}^{n} p(\{a_i\}) = 1$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n} (\lambda \times i) = 1$. Donc $\lambda \sum_{i=1}^{n} i = 1$.

Puisque $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, on obtient alors $\lambda = \frac{2}{n(n+1)}$.

Exercice 6

On considère une expérience aléatoire qui conduit à un univers $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ tel que : $p(\{a_1, a_2, a_3\}) = 0,8$; $p(\{a_1, a_2\}) = 0,5$ et $p(\{a_2, a_3\}) = 0,7$.
Déterminer les probabilités des événements élémentaires.

Solution 6

Notons p_1, p_2, p_3 et p_4 les probabilités des événements élémentaires $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$ et $\{a_4\}$ respectivement.

On a : $\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 0,8 \\ p_1 + p_2 = 0,5 \quad \text{et} \quad p_2 + p_3 = 0,7 \end{cases}$.

La résolution de ce système permet de conclure que : $p_1 = 0,1$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,3$; $p_4 = 0,2$.

3 – Sachant qu'il y a équiprobabilité

Exercice 7

Une urne contient cinq boules blanches et deux boules noires. On tire simultanément trois boules de cette urne.
On suppose l'équiprobabilité.

1) a) Quelle est l'épreuve ?
   b) Définir l'univers Ω.
2) Définir la probabilité p.
3) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « avoir trois boules de même couleur ». B : « avoir des boules des deux couleurs ».

Solution 7

1)a) L'épreuve est : le tirage de trois boules d'une urne en contenant sept.
   b) Ω est l'ensemble des tirages possibles de trois boules des sept.
2) Il y a équiprobabilité (on dit aussi que la probabilité est uniforme) :
   C'est-à-dire, soit A un événement, $p(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega}$.
3) • Notons A : « avoir 3 boules de même couleur ».

$\text{card}\Omega = C_7^3 = 35$ et $\text{card}A = C_5^3 = 10$. D'où $p(A) = \frac{2}{7}$.

• Notons B : « avoir des boules des deux couleurs ». (On tire deux boules blanches et une noire, ou alors deux noires et une blanche).

On a : $\text{card}B = C_5^2 C_2^1 + C_5^1 C_2^2 = 25$. D'où $p(B) = \frac{5}{7}$.

Remarque : *On peut aussi remarquer que* $B = \overline{A}$. *D'où* $p(B) = 1 - p(A) = \frac{5}{7}$.

Exercice 8

Une urne contient 20 boules sur lesquelles sont inscrits les nombres de 1 à 20. On tire une boule au hasard.
On note A : « le numéro marqué sur la boule est un multiple de trois » et
B : « le numéro marqué sur la boule est strictement supérieur à cinq ».

1) Calculer $p(A)$ et $p(B)$.
2) Calculer $p(\overline{A})$, $p(\overline{B})$, $p(\overline{A \cap B})$, $p(\overline{A} \cup \overline{B})$, $p(\overline{A \cup B})$ et $p(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Scanned by CamScanner

Solution 8

L'univers des possibles est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 20\}$. Au cours de cette épreuve, il y a équiprobabilité.

1) $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ et $B = \{6, 7, \ldots, 20\}$ D'où $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{3}{10}$ et $p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{3}{4}$.

2) • $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = \frac{7}{10}$.

• $p(\overline{B}) = 1 - p(B) = \frac{1}{4}$

• $A \cap B = \{6, 9, 12, 15, 18\}$, d'où $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$. On en déduit que $p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

• $\overline{A} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20\}$, $\overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et

$\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20\}$; d'où $p(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{3}{4}$.

• $p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - [p(A) + p(B) - p(A \cap B)] = 1 - \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{5}$.

• $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 2, 4, 5\}$. D'où $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{5}$.

Exercice 9

On lance un dé cubique non truqué deux fois de suite.
Calculer la probabilité de ne pas obtenir un double six.

Solution 9

Notons A : « on n'obtient pas de double six ».

L'événement contraire de A est $\overline{A}$: « on obtient un double six ».

Soit Ω, l'ensemble des résultats possibles. $\text{card}\Omega = 6 \times 6 = 36$.

Or $\text{card}\overline{A} = 1$ (il n'y a qu'un chiffre 6). D'où $p(\overline{A}) = \frac{1}{36}$. Par conséquent, $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = \frac{35}{36}$.

Exercice 10

On considère un jeu de trente-deux cartes. On tire au hasard et simultanément huit cartes du jeu.
1) Quelle est la probabilité pour que, parmi ces huit cartes, figure un as et un seul ? Aucun as ? Au moins un as ?
2) Quelle est la probabilité pour que, parmi ces huit cartes, figurent cinq cœurs ? Au moins cinq cœurs ?
3) Quelle est la probabilité pour que, parmi ces huit cartes, figurent un cœur et un seul et un as et un seul ?

Solution 10

Au cours de cette épreuve, il y a équiprobabilité. C'est-à-dire, pour tout événement A, on a : $p(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega}$.

Ω étant l'univers des possibles. $\text{card}\Omega = C_{32}^{8} = 10518300$.

1) Notons A : « avoir un as et un seul », $\text{card}A = C_4^1 C_{28}^7 = 4736160$. Donc $p(A) = \frac{2024}{4495}$.

Notons B : « n'avoir aucun as », $\text{card}B = C_{28}^{8} = 3108105$. Donc $p(B) = \frac{5313}{17980}$.

Notons C : « avoir au moins un as », on aura $B = \overline{C}$; ainsi $p(C) = 1 - p(B) = \frac{12667}{17980}$.

2) Notons D : « avoir cinq cœurs », $\text{card}D = C_8^5 C_{24}^3 = 113344$. Donc $p(D) = \frac{28336}{2629575}$.

Notons E : « avoir au moins cinq cœurs »,

$\text{card}E = C_8^5 C_{24}^3 + C_8^6 C_{24}^2 + C_8^7 C_{24}^1 + C_8^8 = 121265$, donc $p(E) = \frac{24253}{2103660}$.

3) Notons F : « avoir un cœur et un seul, et un as et un seul as »,

Scanned by CamScanner

$\text{card}F = C_3^1 C_7^1 C_{21}^6 + C_1^1 C_{21}^1 = 1139565$. Donc $p(F) = \frac{75971}{701220}$.

Exercice 11

Un sac contient dix objets : n objets sont noirs et les autres sont blancs. On extrait simultanément deux objets du sac ; on suppose le tirage équiprobable.

1) Déterminer les probabilités respectives d'obtenir :
   a) deux objets de couleurs différentes.
   b) deux objets noirs.
   c) deux objets blancs.

2) Déterminer n pour que cette dernière probabilité soit égale à $\frac{7}{15}$.

Solution 11

Il y a équiprobabilité au cours de cette épreuve.

1) Soit Ω l'univers de possibles : $\text{card}\Omega = C_{10}^2 = 45$.

a) Notons A : « avoir deux objets de couleurs différentes ».

$\text{card}A = C_n^1 C_{10-n}^1 = n(10-n)$; donc $p(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} = \frac{n(10-n)}{45}$.

b) Notons B : « avoir deux noirs ».

$\text{card}B = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$; donc $p(B) = \frac{\text{Card}B}{\text{Card}\Omega} = \frac{n(n-1)}{90}$.

c) Notons C : « avoir deux objets blancs ».

$\text{card}C = C_{10-n}^2 = \frac{(10-n)(9-n)}{2}$; donc $p(C) = \frac{\text{Card}C}{\text{Card}\Omega} = \frac{(10-n)(9-n)}{90}$.

2) $p(C) = \frac{7}{15} \Leftrightarrow \frac{(10-n)(9-n)}{90} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow n^2 - 19n + 48 = 0$.

De la résolution de cette équation on obtient n = 3 ou n = 16.

Puisqu'on a $n \leq 10$; alors n = 3.

Exercice 12

On dispose de trois dés non pipés A, B et C.

Le dé A porte sur une face le chiffre 3, sur trois faces le chiffre 4, sur deux faces le chiffre 5.

Le dé B porte sur deux faces le chiffre 4 et sur quatre faces le chiffres 5.

Le dé C porte sur cinq faces le chiffre 4 et sur une face le chiffre 2.

On lance simultanément les trois dés. Déterminer les probabilités respectives d'obtenir :

a) Trois chiffres égaux.

b) L'ensemble {3, 4, 2}.

c) L'ensemble {4, 2, 5}.

Solution 12

On suppose l'équiprobabilité. Soit Ω l'univers des possibles, $\text{card}\Omega = C_6^1 C_6^1 C_6^1 = 216$.

a) Soit A : « avoir trois chiffres égaux ». Ce qui revient à obtenir le chiffre 4 sur les 3 dés.

$\text{card}A = C_3^1 C_2^1 C_5^1 = 30$; donc $p(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} = \frac{5}{36}$.

b) Soit B : « avoir l'ensemble {3, 4, 2} ».

Ce qui revient à avoir le chiffre 3 sur le dé A, 4 sur le dé B et 2 sur le dé C.

$\text{card}B = C_1^1 C_2^1 C_1^1 = 2$; d'où $p(B) = \frac{\text{Card}B}{\text{Card}\Omega} = \frac{1}{108}$;

c) Soit C : « avoir l'ensemble {4, 2, 5} ».

Ce qui revient à (avoir le chiffre 4 sur le dé A, 5 sur B et 2 sur C) ou (avoir 5 sur le dé A, 4 sur B et 2 sur C).

Scanned by CamScanner

$\text{card}C = C_3^1C_4^1C_1^1 + C_2^1C_2^1C_1^1 = 16$; donc $p(C) = \frac{\text{Card}C}{\text{Card}\Omega} = \frac{2}{27}$.

4 – Sachant que les événements sont indépendants

Exercice 13

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. On note : A : « la carte est rouge » et B : « La carte est un as ».
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Solution 13

Dans un jeu de 32 cartes : il y a 16 cartes rouges et 16 cartes noires, donc $p(A) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

Il y a 4 as, donc $p(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Enfin il y a deux as rouges. Donc $p(A \cap B) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$.

On a bien $p(A \cap B) = p(A)p(B)$. Donc les évènements A et B sont indépendants.

Exercice 14

Dans un lycée, il y a 132 élèves qui sont en terminale scientifique dont 82 filles. Parmi celles-ci, 38 suivent les mathématiques comme spécialité. On sait aussi qu'il y a 24 garçons qui ne suivent pas les mathématiques comme spécialité. Les événements « être une fille » et « suivre les mathématiques comme spécialité » sont-ils indépendants ?

Solution 14

On peut présenter les résultats sous la forme d'un tableau :

	Spécialité maths	Non spécialité maths	TOTAL
filles	38	44	82
garçons	26	24	50
TOTAL	64	68	132

Soit A : « être une fille » et B : « suivre les mathématiques comme enseignement de spécialité »
L'événement $A \cap B$ est : « être une fille et suivre les mathématiques comme enseignement de spécialité ».

$p(A) = \frac{82}{132} = \frac{41}{66}$; $p(B) = \frac{64}{132} = \frac{16}{33}$ et $p(A \cap B) = \frac{38}{132} = \frac{19}{66}$.

On remarque que $p(A \cap B) \neq p(A)p(B)$; donc les évènements A et B ne sont pas indépendants.

Exercice 15

La probabilité pour qu'une personne donnée contracte la grippe en un an est 0,4. La probabilité pour que cette personne soit atteinte d'une maladie M, autre que la grippe, pendant la même période est 0,2.
On suppose que contracter la grippe et la maladie M sont deux événements indépendants. Quelle est la probabilité pour que cette personne contracte au moins l'une de ces maladies en un an ?

Solution 15

Soit G : « la personne contracte la grippe » et M : « la personne est atteinte d'une autre maladie M ».
On a $p(G) = 0,4$ et $p(M) = 0,2$.
Contracter l'une au moins des deux maladies c'est réaliser l'évènement $G \cup M$.
Or $p(G \cup M) = p(G) + p(M) - p(G \cap M)$ et G et M sont indépendants, c'est-à-dire $p(G \cap M) = p(G)p(M)$.
D'où $p(G \cup M) = p(G) + p(M) - p(G)p(M)$. Il en résulte que : $p(G \cup M) = 0,52$

Exercice 16

A et B sont deux événements indépendants,

a) Montrer que $p(A) = p(A \cap \overline{B}) + p(A)p(B)$.

b) En déduire que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Scanned by CamScanner

c) Montrer que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

Solution 16

a) On a $A=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap B)$ et $(A\cap\overline{B})\cap(A\cap B)=\emptyset$.

D'où $p(A)=p(A\cap\overline{B})+p(A\cap B)=p(A\cap\overline{B})+p(A)p(B)$ car A et B sont indépendants.

D'où $p(A)=p(A\cap\overline{B})+p(A)p(B)$.

b) D'après la question a), $p(A)=p(A\cap\overline{B})+p(A)p(B)$.

Donc $p(A\cap\overline{B})=p(A)-p(A)p(B)=p(A)(1-p(B))=p(A)p(\overline{B})$.

D'où A et $\overline{B}$ sont indépendants.

c) D'après la question b), si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.

En posant $\overline{B}=C$; A et C sont indépendants. Il en résulte que $\overline{A}$ et C le sont aussi.

Comme $C=\overline{B}$, cela signifie que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice 17

Trois enfants Axel, Eve et Iris vont passer le baccalauréat dans des séries différentes. Compte tenu de leur niveau et de leur capacité de travail, leurs parents leur donnent les probabilités respectives de réussite suivantes : 0,2 ; 0,6 et 0,9.

1) Calculer la probabilité que les trois enfants soient reçus.
2) Calculer la probabilité que les trois enfants échouent.
3) Calculer la probabilité que Axel seul soit reçu.
4) Calculer la probabilité que Eve soit seule à échouer.
5) Calculer la probabilité que deux exactement soient reçus.
6) Calculer la probabilité qu'au moins un enfant soit reçu.

Solution 17

Notons A : « Axel réussit le baccalauréat », E : « Eve réussit le baccalauréat » et I : « Iris réussit le baccalauréat ».

On a donc d'après l'énoncé : $p(A) = 0,2$, $p(E) = 0,6$ et $p(I) = 0,9$.

Les enfants passent leur baccalauréat dans des séries différentes, donc on peut supposer que les événements A, E et I sont deux à deux indépendants.

1) L'événement les trois enfants réussissent est $A\cap E\cap I$: $p(A\cap E\cap I) = p(A)p(E)p(I) = 0,108$.

2) L'événement « les trois enfants échouent » est $\overline{A}\cap\overline{E}\cap\overline{I}$.

Notons que les évènements $\overline{A}$, $\overline{E}$ et $\overline{I}$ sont deux à deux indépendants. Donc :

$$p(\overline{A}\cap\overline{E}\cap\overline{I})=p(\overline{A})p(\overline{E})p(\overline{I})=(1-p(A))(1-p(E))(1-p(I))=0,032.$$

3) L'événement « Axel réussit et Eve et Iris échouent » est $A\cap\overline{E}\cap\overline{I}$:

$$p(A\cap\overline{E}\cap\overline{I})=p(A)p(\overline{E})p(\overline{I})=0,008.$$

4) L'événement « Axel et Iris réussissent et Eve échoue » est $A\cap\overline{E}\cap I$:

$$p(A\cap\overline{E}\cap I)=p(A)p(\overline{E})p(I)=0,072.$$

5) L'événement " deux enfants exactement sont reçus" est : $(A\cap E\cap\overline{I})\cup(A\cap\overline{E}\cap I)\cup(\overline{A}\cap E\cap I)$.

Notons que les évènements $A\cap E\cap\overline{I}$, $A\cap\overline{E}\cap I$ et $\overline{A}\cap E\cap I$ sont deux à deux disjoints.

$$\begin{aligned}p((A\cap E\cap\overline{I})\cup(A\cap\overline{E}\cap I)\cup(\overline{A}\cap E\cap I)) &= p(A\cap E\cap\overline{I})+p(A\cap\overline{E}\cap I)+p(\overline{A}\cap E\cap I)\\ &= 0,2\times0,6\times0,1+0,2\times0,4\times0,9+0,8\times0,6\times0,9\\ &= 0,516\end{aligned}$$

6) L'événement " au moins un enfant soit reçu " est $A\cup E\cup I$:

$$p(A\cup E\cup I)=1-p(\overline{A}\cap\overline{E}\cap\overline{I})=1-0,032=0,968.$$

Scanned by CamScanner

5 – En utilisant le schéma de Bernoulli

Exercice 18

Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouges. On tire 3 boules de cette urne.
1) Quelle est la probabilité d'avoir 3 boules de même couleur ? 3 boules des deux couleurs ?
2) On répète ce tirage 5 fois de suite, en remettant chaque fois dans l'urne les boules tirées avant le prochain tirage. Quelle est la probabilité de tirer 3 fois 3 boules de même couleur ?

Solution 18

1) Il y a équiprobabilité. Soit Ω l'univers des possibles. $\text{card}\Omega = C_9^3 = 84$.

- Notons A : « avoir trois boules de même couleur ».

On a $\text{card}A = C_5^3 + C_4^3 = 14$; donc $p(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} = \frac{1}{6}$.

- Notons B : "avoir 3 boules des 2 couleurs". On a $B = \overline{A}$; donc $p(B) = 1 - p(A) = \frac{5}{6}$.

2) Au cours de chaque tirage, on a que deux issues : tirer 3 boules de même couleur ou alors tirer 3 boules de deux des deux couleurs. On réalise donc une épreuve de Bernoulli de succès l'événement A : « avoir 3 boules de même couleur », d'échec B.

Notons p = p(A) et q = 1 – p ; on a $p = \frac{1}{6}$ et $q = \frac{5}{6}$.

Répéter 5 fois le tirage en remettant chaque fois la boule tirée, revient à réaliser un schéma de Bernoulli. Le succès étant l'événement A.
Avoir 3 fois 3 boules de même couleur revient à réaliser 3 succès au cours des 5 tirages.
Soit C : « tirer 3 fois 3 boules de même couleur ».

$$p(C) = C_5^3 p^3 q^2 = 10 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{3888} = 0{,}032 .$$

Exercice 19

Un dé est lancé 10 fois de suite.
Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois un six ?

Solution 19

Soit A : « avoir au moins une fois un six ». On a $\overline{A}$: « n'avoir aucune fois un six ».

Pour un lancé, la probabilité d'avoir un six est $\frac{1}{6}$, et lorsqu'on lance un dé on n'a que deux issues, avoir un six ou pas.

On réalise donc une épreuve de Bernoulli.
Il s'agit donc dans cette épreuve, d'une répétition de 10 épreuves de Bernoulli de succès « avoir un six », dans les mêmes conditions : c'est-à-dire qu'on réalise une épreuve binomiale. $\overline{A}$ est l'événement avoir zéro succès.

Donc $p(\overline{A}) = C_{10}^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$. D'où $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$.

Exercice 20 BAC – Etranger – 1993

Dans une fête foraine, Jean participe à une épreuve de tir. Il a 4 chances sur 10 de toucher la cible. On suppose que les tirs sont des épreuves indépendantes l'une de l'autre.
1) Il tire 3 fois de suite.
Quelle est la probabilité qu'il a de toucher la cible au moins une fois à l'issue de ces trois tirs ?
2)a) On suppose qu'il tire n fois.
Calculer en fonction de n la probabilité qu'il touche la cible au moins une fois.
b) Combien de fois lui faut-il tirer s'il veut toucher la cible au moins une fois avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95 ?

Scanned by CamScanner

1) Le tireur atteint la cible avec la probabilité $\frac{2}{5}$.

Au cours de cette expérience aléatoire, il s'agit d'une épreuve binomiale. Le succès est « atteindre la cible ».

Soit A : « atteindre la cible au moins une fois sur 3 ». $\overline{A}$ est l'événement « atteindre la cible zéro fois ».

$p(\overline{A}) = C_3^0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$. Donc $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = \frac{98}{125}$.

2)a) Soit A_n : « atteindre la cible au moins une fois sur n tirs ».

$\overline{A_n}$ est l'événement : « ne pas atteindre la cible pendant les n tirs ».

$p(\overline{A_n}) = C_n^0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$. D'où $p(A_n) = 1 - p(\overline{A_n}) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

b) $p(A_n) \geq 0,95 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n \geq 0,95 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^n \leq 0,05 \Leftrightarrow n\ln\frac{3}{5} \leq \ln 0,05 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,6}$ (car $\ln 0,6 < 0$)

Finalement, on a : $n \geq 5,8$.

Il doit donc lancer au moins 6 fois, s'il veut toucher la cible au moins une fois avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

6 – En utilisant les formules des probabilités conditionnelles (hors programme en terminales C et E)

Exercice 21

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune n boules rouges et 2n boules vertes.

1) On tire une boule de chaque urne. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 vertes ?

2) On tire une boule de U_1, on la met dans U_2 puis on tire une boule de U_2. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 vertes ?

Solution 21

Notons A : « tirer une boule verte de l'urne U_1 » et B : « tirer une boule verte de l'urne U_2 ».

1) $p(A) = p(B) = \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$.

Dans cette épreuve, les évènements A et B sont indépendants. D'où $p(A \cap B) = p(A)p(B) = \frac{4}{9}$.

2) Les évènements A et B ne sont plus indépendants, d'où $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$.

On tire une boule verte de l'urneU_1 on la met dans l'urne U_2, puis on tire une boule verte de l'urneU_2.

L'urne U_2 contient maintenant 2n + 1 boules vertes et 3n +1 boules en tout.

Donc $p_A(B) = \frac{2n+1}{3n+1}$. Comme $p(A) = \frac{2}{3}$, alors $p(A \cap B) = \frac{2(2n+1)}{3(3n+1)}$.

Exercice 22

Les évènements A et B d'un univers Ω sont de probabilités non nulles.

Calculer : $p_A(A)$, $p_A(\overline{A})$, $p_{A\cap B}(A \cup B)$, $p_\Omega(A)$ et $p_A(\Omega)$.

Solution 22

- $p_A(A) = \frac{p(A \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A)}{p(A)} = 1$ car $A \cap A = A$. Finalement $p_A(A) = 1$.
- $p_A(\overline{A}) = \frac{p(\overline{A} \cap A)}{p(A)}$; or $\overline{A} \cap A = \varnothing$, d'où $p(\overline{A} \cap A) = 0$.

Finalement, $p_A(\overline{A}) = 0$.

Scanned by CamScanner

$p_{A\cup B}(A\cup B)=\dfrac{p[(A\cup B)\cap(A\cap B)]}{p(A\cap B)}$; or $(A\cup B)\cap(A\cap B)=A\cap B$, alors $p_{A\cup B}(A\cup B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A\cap B)}=1$.

- $p_\Omega(A)=\dfrac{p(A\cap\Omega)}{p(\Omega)}=\dfrac{p(A)}{p(\Omega)}=p(A)$. Finalement, $p_\Omega(A)=p(A)$

- $p_A(\Omega)=\dfrac{p(A\cap\Omega)}{p(A)}=\dfrac{p(A)}{p(A)}=1$. Finalement, $p_A(\Omega)=1$.

Exercice 23

Une urne contient trois boules blanches et cinq boules noires. On tire une boule au hasard.
Si elle est noire, on la remet dans l'urne, sinon on la met de côté. On tire alors une seconde boule. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?

Solution 23

Soit B_1 : « on tire une boule blanche au 1er tirage » et B_2 : « on tire une boule blanche au 2nd tirage ».
Tirer deux boules blanches revient à tirer une boule blanche au premier tirage et une boule blanche au second.

$p(B_1\cap B_2)=p_{B_1}(B_2)\times p(B_1)$; or $p(B_1)=\dfrac{3}{8}$, et lorsqu'on tire une boule blanche au premier tirage, il reste dans l'urne deux boules blanches et cinq noires. D'où $p_{B_1}(B_2)=\dfrac{2}{7}$.

Par conséquent $p(B_1\cap B_2)=\dfrac{2}{7}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{28}$.

Exercice 24

Dans un lycée les 300 élèves des terminales scientifiques se repartissent suivant le choix de la spécialité selon le tableau suivant :

	maths	physique	biologie
Garçons	55	95	20
filles	32	55	43

On choisit un élève de terminale scientifique au hasard.
Construire un arbre de probabilité.

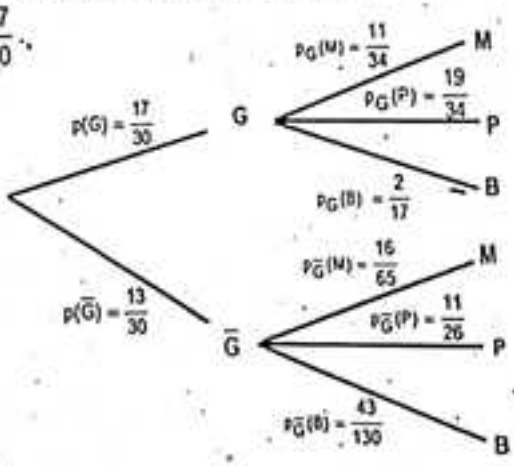
Solution 24

On note les évènements suivants :
G : « être un garçon »
P : « étudier la spécialité physique »
M : « étudier la spécialité mathématiques »
B : « étudier la spécialité biologie ».

Il y a 170 garçons sur 300 élèves, donc $p(G)=\dfrac{170}{300}=\dfrac{17}{30}$.

Il y a 55 garçons qui suivent la spécialité mathématique sur un total de 170 donc : $p_G(M)=\dfrac{55}{170}=\dfrac{11}{34}$.

On procède de la même manière avec les autres branches. On a alors l'arbre des probabilités suivant :



Exercice 25

1) Reproduire l'arbre (fig. 1) ci-dessous et le compléter :
2) En utilisant les résultats de la première question, compléter l'arbre (fig. 2) suivant :

Scanned by CamScanner

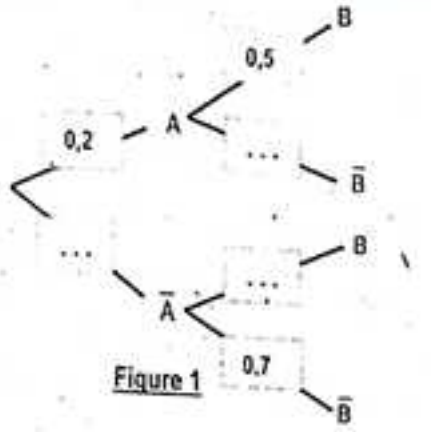


Figure 1

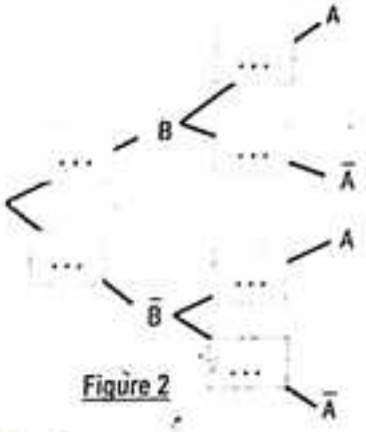
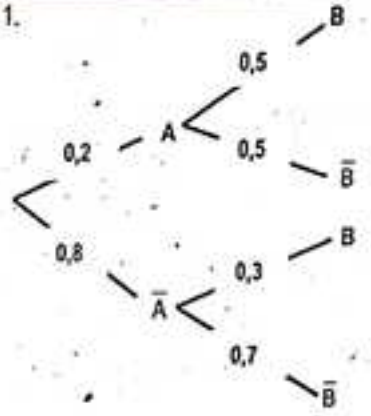


Figure 2

Solution 25

1) La somme des probabilités sur les branches d'un nœud est égale à 1.
On peut ainsi compléter l'arbre.



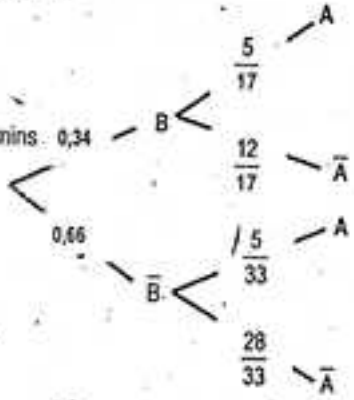
2) • La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches.
Elle représente la probabilité de l'intersection des évènements sur ce chemin.
Ainsi par exemple :

$p(A \cap B) = 0,2 \times 0,5 = 0,10$.

$p(\overline{A} \cap B) = 0,8 \times 0,3 = 0,24$.

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins y conduisant. Ainsi par exemple :

$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = 0,1 + 0,24 = 0,34$



• Pour déterminer $p_B(A)$, on peut écrire :

$p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0,1}{0,34} = \dfrac{5}{17}$ et $p_{\overline{B}}(A) = \dfrac{p(A \cap \overline{B})}{p(\overline{B})} = \dfrac{0,1}{0,66} = \dfrac{5}{33}$.

On peut alors compléter l'arbre des probabilités :

Exercice 26

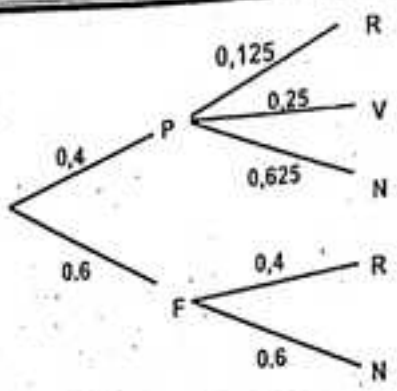
On lance une pièce de monnaie truquée. La probabilité d'obtenir face est 0,6. Si on obtient face, on tire une boule d'une urne qui en contient deux rouges et trois noires, sinon on tire une boule d'une urne en contenant une rouge, cinq noires et deux vertes.
Construire un arbre de probabilité.
Quelle est la probabilité de tirer une boule verte ?
Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge ?

Solution 26

Notons V : « avoir une boule verte »
R : « avoir une boule rouge »
N : « avoir une boule noire »

Scanned by CamScanner

P : « avoir pile ».
F : « avoir face ».
On a l'arbre des probabilités ci-contre.
Puisque P et F forment une partition de l'univers Ω, alors :



$$p(V) = p(P) \times p_P(V) = 0,4 \times \frac{1}{4} = 0,1.$$

$$p(R) = p(P) \times p_P(R) + p(F) \times p_F(R) = 0,4 \times \frac{1}{8} + 0,6 \times \frac{2}{5} = 0,29.$$

Exercice 27

Dans un club sportif, on a 80 inscrits en natation, 95 en athlétisme et 125 en gym.
Chaque inscrit pratique un et un seul sport. Parmi les inscrits en natation 45% sont des filles. De même 20% des inscrits en athlétisme et 68% en gym sont des filles.
On choisit un inscrit au hasard.
Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

Solution 27

Soit F : « l'inscrit est une fille », N : « l'inscrit pratique la natation », A : « l'inscrit pratique l'athlétisme » et G : « l'inscrit pratique la gymnastique »

$$p(N) = \frac{4}{15}, \quad p(A) = \frac{19}{60}, \quad p(G) = \frac{5}{12}, \quad p_N(F) = \frac{9}{20}, \quad p_A(F) = \frac{1}{5} \text{ et } p_G(F) = \frac{17}{25}.$$

Comme A, N et G forment une partition de l'univers, alors : $p(F) = p_N(F) \times p(N) + p_A(F) \times p(A) + p_G(F) \times p(G) = \frac{7}{15}$.

Exercice 28

1) On tire successivement avec remise deux cartes dans un jeu qui en compte 32.
Quelle est la probabilité que la première carte soit un as sachant que la deuxième est un as ?
2) On fait ce tirage, mais sans remise.
Quelle est la probabilité que la première carte soit un as sachant que la deuxième est un as ?

Solution 28

Notons A_1 : « on tire un as au premier tirage » et A_2 : « on tire un as au second tirage »

1) $p_{A_2}(A_1) = \frac{p(A_1 \cap A_2)}{p(A_2)}$.

Comme il y a remise, on peut considérer que les évènements A_1 et A_2 sont indépendants, donc :

$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \times p(A_2)$. D'où $p_{A_2}(A_1) = p(A_1) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

2) $p_{A_2}(A_1) = \frac{p(A_1 \cap A_2)}{p(A_2)}$. Or $p(A_1 \cap A_2) = \frac{4 \times 3}{32 \times 31} = \frac{3}{248}$, et

$p(A_2) = p(A_1 \cap A_2) + p(\overline{A_1} \cap A_2) = \frac{3}{248} + \frac{28 \times 4}{32 \times 31} = \frac{31}{248}$. D'où $p_{A_2}(A_1) = \frac{3}{31}$.

Exercice 29

On lance deux dés. Le vainqueur est le premier qui obtient un double six. A priori, la probabilité que votre adversaire soit un tricheur est t. Il commence et obtient un double six.
Déterminer en fonction de t la probabilité que ce soit un tricheur.

Solution 29

Soit T l'événement : « l'adversaire est un tricheur »
S l'événement : « l'adversaire obtient un double six »

Scanned by CamScanner

On a : $p(T) = t$, $p_{\overline{T}}(S) = \frac{1}{36}$ et $p_T(S) = 1$.

Alors $p(S) = p_T(S)p(T) + p_{\overline{T}}(S)p(\overline{T}) = t + \frac{1}{36} \times (1-t) = \frac{35}{36}t + \frac{1}{36}$.

Or $p_T(S)p(T) = p_S(T)p(S)$, alors on a : $p_S(T) = \frac{p_T(S)p(T)}{p(S)} = \frac{36t}{35t+1}$.

Exercice 30

Un professeur oublie fréquemment les clés de sa salle de classe. Si le jour n il oublie ses clés alors la probabilité qu'il les oublie le lendemain est 0,1. Si le jour n il n'oublie pas ses clés, alors la probabilité qu'il les oublie le lendemain est 0,4. La probabilité qu'il les oublie le premier jour est 0,2.
Pour tout entier naturel non nul n, on note E_n : « le professeur oublie les clés le jour n ». On note $p_n = p(E_n)$.

1) Montrer que $p_{n+1} = 0,4 - 0,3p_n$.

2) Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite définie par $u_n = p_n - \frac{4}{13}$.

Montrer que $(u_n)_{n>0}$ est une suite géométrique. Exprimer p_n en fonction de n.

Solution 30

1) Les évènements E_n et $\overline{E_n}$ forment une partition de Ω.

$p(E_{n+1}) = p_{E_n}(E_{n+1})p(E_n) + p_{\overline{E_n}}(E_{n+1})p(\overline{E_n}) = 0,1 \times p_n + 0,4 \times (1-p_n)$. D'où $p(E_{n+1}) = 0,4 - 0,3p_n = p_{n+1}$.

2) Soit n entier naturel non nul. $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{4}{13} = 0,4 - 0,3p_n - \frac{4}{13} = \frac{6}{65} - 0,3p_n = -0,3\left(p_n - \frac{4}{13}\right) = -0,3u_n$.

D'où (u_n) est une suite géométrique de raison $-0,3$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{4}{13} = 0,2 - \frac{4}{13} = -\frac{7}{65}$.

Par suite, $u_n = \left(-\frac{7}{65}\right)(-0,3)^{n-1}$ et $p_n = \frac{4}{13} + \left(-\frac{7}{65}\right)(-0,3)^{n-1}$.

B - variable aléatoire réelle

1 – Déterminer la loi de probabilité et la fonction de répartition d'une v.a.r. – Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type d'une v.a.r.

Exercice 31

Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

1) On tire simultanément 3 boules de l'urne et on note X la variable aléatoire qui associe le nombre de boules blanches tirées. Déterminer la loi de X.

2) On tire successivement avec remise 3 boules de l'urne et on note X la variable aléatoire qui associe le nombre de boules blanches tirées. Déterminer la loi de X.

3) On tire successivement sans remise 3 boules de l'urne et on note X la variable aléatoire qui associe le nombre de boules blanches tirées. Déterminer la loi de X.

Solution 31

1) Il y a équiprobabilité. Soit Ω l'univers des possibles. $\text{card}\Omega = C_6^3 = 20$.

L'ensemble des valeurs prises par X est : $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

$p(X=0) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{1}{5}$; $p(X=1) = \frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3} = \frac{3}{5}$; $p(X=2) = \frac{C_2^2 C_4^1}{C_6^3} = \frac{1}{5}$.

On peut résumer ces résultats dans un tableau comme suit :

Scanned by CamScanner

x	0	1	2
p(X = x)	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

2) Il y a équiprobabilité.
Soit Ω l'univers des possibles. Card Ω = 6^3 = 216.
L'ensemble des valeurs prises par X est : X(Ω) = {0, 1, 2, 3}.

$p(X=0)=\frac{4^3}{6^3}=\frac{8}{27}$; $p(X=1)=\frac{4^2\times 2\times 3}{6^3}=\frac{12}{27}$;

$p(X=2)=\frac{2^2\times 4\times 3}{6^3}=\frac{6}{27}$; $p(X=3)=\frac{2^3}{6^3}=\frac{1}{27}$.

Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

x	0	1	2	3
p(X = x)	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

3) Il y a équiprobabilité. Soit Ω l'univers des possibles, $\text{card}\Omega = A_6^3 = 120$.

L'ensemble des valeurs prises par X est : X(Ω) = {0, 1, 2}.

$p(X=0)=\frac{A_4^3}{A_6^3}=\frac{1}{5}$; $p(X=1)=\frac{C_3^2A_4^2C_2^1}{A_6^3}=\frac{3}{5}$; $p(X=2)=\frac{C_3^2\times 2!\times C_4^1}{A_6^3}=\frac{1}{5}$.

On peut résumer ces résultats dans un tableau comme suit :

x	0	1	2
p(X = x)	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

Exercice 32

On considère le jeu suivant :
Tout joueur doit miser 50 francs. Il tire ensuite une boule numérotée respectivement 1, 2, . . ., 20.
Si le numéro de la boule tirée est un multiple de 3, alors il reçoit 20 francs. Si le numéro est un multiple de 5 autre que 15, le joueur reçoit 30 francs. Si le numéro est 13 alors il reçoit 150 francs.
On note X la variable aléatoire réelle : « somme reçue par le joueur ».
1) Déterminer la loi de X.
2) Calculer l'espérance de X ainsi que sa variance.
3) Calculer le bénéfice réalisé par l'organisateur du jeu après que 100 personnes aient joué une partie.

Solution 32

1) Soit Ω l'univers des possibles. Il y a équiprobabilité.
Il y a 10 numéros non gagnants, 6 numéros gagnants 20 francs, 3 numéros gagnants 30 francs et un numéro gagnant 150 francs. Et donc l'ensemble des valeurs prises par X est : X(Ω) = {0, 20, 30, 150}.

D'où $p(X=0)=\frac{C_{10}^1}{C_{20}^1}=\frac{10}{20}$; $p(X=20)=\frac{6}{20}$; $p(X=30)=\frac{3}{20}$; $p(X=150)=\frac{1}{20}$.

On a le tableau :

x	0	20	30	150
p(X = x)	$\frac{10}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

2) • L'espérance mathématique de X est : $E(X)=\sum_{x\in X(\Omega)} xp(X=x)$. Donc :

$E(X)=0\times\frac{10}{20}+20\times\frac{6}{20}+30\times\frac{3}{20}+150\times\frac{1}{20}=18$. D'où E(X) = 18.

Scanned by CamScanner

Le gain moyen d'un joueur sans la mise de départ est 18 francs.

- La variance est donnée par la formule : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ et $E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 p(X = x)$.

Donc $E(X^2) = 0^2 \times \frac{10}{20} + 20^2 \times \frac{6}{20} + 30^2 \times \frac{3}{20} + 150^2 \times \frac{1}{20} = 1380$.

D'où V(X) = 1380 – 18², soit V(X) = 1056.

3) Le gain moyen de 100 joueurs est 18×100 = 1800 francs. La mise est de 5000 francs.

Le bénéfice réalisé par l'organisateur est 3200 francs.

Exercice 33

On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x	1	2	. . .	n
p(X = x)	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$

Calculer l'espérance de X.

Solution 33

L'ensemble des valeurs prises par X est : $X(\Omega) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Pour tout élément x de $X(\Omega)$, $p(X = x) = \frac{1}{n}$.

L'espérance de X est : $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x p(X = x) = \sum_{x=1}^{n} \left(x \times \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} x = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$. D'où $E(X) = \frac{n+1}{2}$.

Exercice 34

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur {1 , 2 , 3 , 4 , 5}. Les lois de probabilité sont données par les tableaux suivants :

x	1	2	3	4	5
p(X = x)	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

y	1	2	3	4	5
p(Y = y)	0,05	a	b	0,15	c

Déterminer a, b et c pour que X et Y aient la même espérance et la même variance.

Solution 34

L'espérance de X est E(X) = 2,9 et sa variance est V(X) = 1,29. *(A vérifier par le lecteur).*

Le deuxième tableau est celui d'une loi de probabilité d'une variable aléatoire si et seulement si a, b et c sont positifs et 0,05 + a + b + 0,15 + c = 1. Soit a + b + c = 0,8.

L'espérance de Y est : E(Y) = 0,05 + 2a + 3b + 0,6 + 5c = 2a + 3b + 5c + 0,65.

Et sa variance est V(Y) = 0,05 + 4a + 9b + 2,4 + 25c – 2,9² = 4a + 9b + 25c – 5,96.

Or E(X) = E(Y) et V(X) = V(Y) équivaut au système d'équations : $\begin{cases} a+b+c=0,8 \\ 2a+3b+5c=2,25 \\ 4a+9b+25c=7,25 \end{cases}$.

La résolution de ce système donne pour solutions : $a = \frac{5}{12}$, $b = \frac{1}{4}$ et $c = \frac{2}{15}$.

Exercice 35

Une étude statistique a montré que la fréquence de naissance d'une fille est 0,45. On considère des familles de quatre enfants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de filles dans ces familles.

1) Donner la loi de probabilité suivie par X.

2) Quelle est la probabilité dans une famille de quatre enfants d'avoir au moins une fille ?

Scanned by CamScanner

3) Quelle est la probabilité dans une famille de quatre enfants d'avoir quatre filles ?
4) Déterminer E(X), V(X) et σ(X).

Solution 35

1) l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
Dans cette épreuve, il s'agit d'un schéma de Bernoulli de succès, « la naissance d'une fille ».

Soit k appartenant à {0, 1, 2, 3, 4}, $p(X = k) = C_4^k (0{,}45)^k (0{,}55)^{4-k}$.

2) l'événement : « avoir au moins une fille » est $(X \geq 1)$, donc l'événement contraire est $(X < 1)$.
$p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (0{,}55)^4 = 0{,}90849375$. D'où $p(X \geq 1) = 0{,}90849375$.

3) $p(X = 4) = (0{,}45)^4 = 0{,}04100625$.

4) • L'espérance de X est : $E(X) = np = 4 \times 0{,}45 = 1{,}8$. n est le nombre de répétitions de l'épreuve de Bernoulli et p la probabilité du succès.

• La variance de X est : $V(X) = np(1 - p) = 4 \times 0{,}45 \times 0{,}55 = 0{,}99$.

Son écart type est : $\sigma(X) = \sqrt{V(x)} \approx 0{,}99$.

Exercice 36

Soit X la variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau :

x	-5	-2	0	1	3	6
p(X = x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

1) Représenter graphiquement sa fonction de répartition.
2) Calculer son espérance, sa variance et son écart-type.

Solution 36

1) Vérifions que le tableau ci-dessus définit une loi de probabilité. En effet, on a : $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = 1$.

D'où ce tableau définit bel et bien une loi de probabilité.
La fonction de répartition de X est l'application $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$

$$x \mapsto F(x) = p(X \leq x)$$

Alors, si $x < -5$, alors $p(X \leq x) = 0$

si $-5 \leq x < -2$, alors $p(X \leq x) = \frac{1}{6} = \frac{2}{12}$.

si $-2 \leq x < 0$, alors $p(X \leq x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12}$.

si $0 \leq x < 1$, alors $p(X \leq x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12}$.

si $1 \leq x < 3$, alors $p(X \leq x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{9}{12}$.

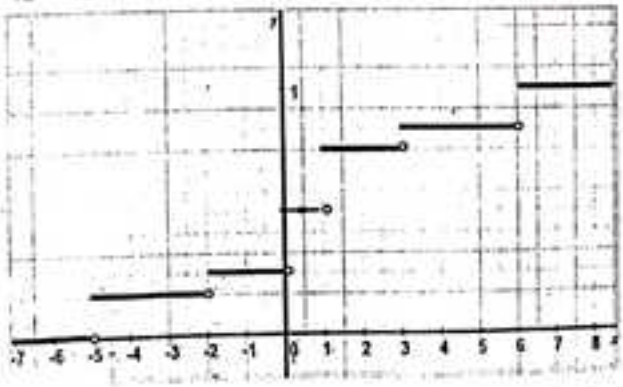
si $3 \leq x < 6$, alors $p(X \leq x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{10}{12}$.

si $6 \leq x$, alors

$p(X \leq x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = 1$.

Point méthode :
Remarquons que nous laissons les fractions avec le même dénominateur, ceci pour représenter aisément la fonction de répartition. On subdivisera l'unité sur l'axe des ordonnées en douze.

Le graphe de la fonction de répartition :



Scanned by CamScanner

2) • L'espérance mathématique de X est : $E(X) = -5\times\frac{1}{6} - 2\times\frac{1}{12} + 0\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{4} + 3\times\frac{1}{12} + 6\times\frac{1}{6} = 0,5$.

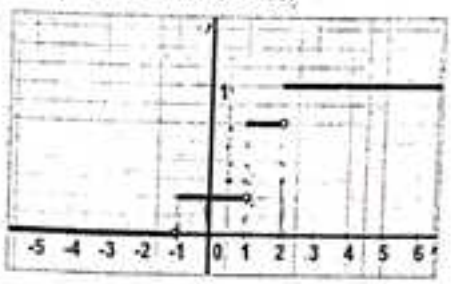
• La variance de X est : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Or $E(X^2) = (-5)^2\times\frac{1}{6} + (-2)^2\times\frac{1}{12} + 0^2\times\frac{1}{4} + 1^2\times\frac{1}{4} + 3^2\times\frac{1}{12} + 6^2\times\frac{1}{6} = \frac{23}{2}$. D'où $V(X) = \frac{23}{2} - \frac{1}{4} = 11,25$.

• L'écart type de X est : $\sigma(X) = \frac{3}{2}\sqrt{5} \approx 3,354$.

Exercice 37

Soit X la variable aléatoire dont la fonction de répartition est représentée ci-dessous :
Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance.



Solution 37

L'ensemble des valeurs prises par X est : $X(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$.

• Soit F la fonction de répartition de X, on a, d'après la courbe ci-dessus :
$F(-1) = 0,25$; $F(1) = 0,75$ et $F(2) = 1$.
D'où $p(X = -1) = F(-1) = 0,25$.
$p(X = 1) = F(1) - F(-1) = 0,75 - 0,25 = 0,5$.
$p(X = 2) = F(2) - F(1) = 1 - 0,75 = 0,25$.

• L'espérance de X est : $E(X) = -1\times 0,25 + 1\times 0,5 + 2\times 0,25 = 0,75$.

• Sa variance est : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (-1)^2\times 0,25 + 1^2\times 0,5 + 2^2\times 0,25 - (0,75)^2 = 1,1875$

• Son écart type est : $\sigma(X) = \frac{\sqrt{19}}{4} \approx 1,09$.

Exercice 38

Un forain a construit un appareil de jeu contenant six boules blanches et trois boules rouges. Lorsque l'on introduit un jeton dans l'appareil, trois boules prises au hasard tombent dans un panier.
Si les trois boules sont rouges, le joueur gagne 100 francs. Si deux des boules sont rouges, il gagne 15 francs. Si une seule boule est rouge, il gagne un lot de 5 francs.
Le prix du jeton est fixé à 8 francs.
1) Soit X la variable aléatoire désignant la somme gagnée par le joueur.
Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
En déduire le gain moyen du forain.
2) L'appareil ne s'avère pas suffisamment rentable, le forain envisage deux solutions : augmenter de 1 franc le prix du jeton ou bien ajouter une boule blanche dans l'urne.
Quelle est la solution la plus rentable pour le forain ?

Solution 38

1) Il y a équiprobabilité au cours de cette épreuve. Soit Ω l'univers des possibles.
L'ensemble des valeurs prises par X est : $X(\Omega) = \{0, 5, 15, 100\}$.

On a : $p(X=0) = \frac{C_6^3}{C_9^3} = \frac{5}{21}$; $p(X=5) = \frac{C_3^1 C_6^2}{C_9^3} = \frac{15}{28}$; $p(X=15) = \frac{C_3^2 C_6^1}{C_9^3} = \frac{3}{14}$ et $p(X=100) = \frac{C_3^3}{C_9^3} = \frac{1}{84}$.

L'espérance mathématique de X est :

$E(X) = 0\times\frac{5}{21} + 15\times\frac{3}{14} + 100\times\frac{1}{84} = \frac{595}{84}$. D'où $E(X) = \frac{595}{84} \approx 7,08$.

Soit Y la variable aléatoire désignant le gain du forain. On a : $Y = 8 - X$.

Scanned by CamScanner

$E(Y) = 8 - E(X)$. D'où $E(Y) = 0{,}92$. D'où le gain moyen du forain est 0,92 francs.

2) • Si on augmente d'un franc le prix du jeton, alors le gain moyen du forain est :

$$E(Y) = 9 - E(X) = 9 - \frac{595}{84} = \frac{23}{12} \text{ francs}.$$

• Si on ajoute une boule blanche dans l'urne, la loi de probabilité de X devient :

$$p(X=0) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{24} \; ; \; p(X=5) = \frac{C_3^1 C_7^2}{C_{10}^3} = \frac{21}{40} \; ; \; p(X=15) = \frac{C_3^2 C_7^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{40} \text{ et } p(X=100) = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}.$$

Et le gain moyen du joueur est : $E(X) = 0 \times \frac{7}{24} + 5 \times \frac{21}{40} + 15 \times \frac{7}{40} + 100 \times \frac{1}{120} = \frac{73}{12} \approx 6{,}08$ francs.

Le gain moyen du forain est : $E(Y) = 8 - E(X) = 8 - \frac{73}{12} = \frac{23}{12}$.

Alors, les deux solutions lui rapportent le même gain.

Exercice 39

Un jeu comporte 16 cartes (4 valets, 4 dames, 4 rois et 4 as).

L'épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard 2 cartes du jeu et à les remettre dans le jeu après avoir noté les cartes tirées.

1) On procède à une épreuve. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 as ?

2) On répète 3 fois l'épreuve, on suppose que les tirages sont indépendants :

Un joueur met une mise de 5 francs.

S'il obtient 0 fois deux as, il perd sa mise.

S'il obtient 1 fois deux as, on lui rembourse sa mise.

S'il obtient 2 fois deux as, on lui rembourse sa mise, plus 50 francs.

S'il obtient 3 fois deux as, on lui rembourse sa mise, plus 100 francs.

Soit X la variable aléatoire définie par le gain algébrique du joueur au bout des trois tirages.

Déterminer la loi de probabilité de X.

Calculer l'espérance mathématique de X.

Solution 39

1) Soit A l'événement : « avoir deux as ».

$\text{card}\Omega = C_{16}^2 = 120$, $\text{card}A = C_4^2 = 6$. D'où $p(A) = \frac{1}{20}$.

2) L'ensemble des valeurs prises par X est : $X(\Omega) = \{-5, 0, 50, 100\}$.

Il s'agit ici d'un schéma de Bernoulli. Le succès étant : « avoir deux as ».

$$p(X=-5) = C_3^0 \left(\frac{1}{20}\right)^0 \left(\frac{19}{20}\right)^3 = \left(\frac{19}{20}\right)^3 = \frac{6859}{8000}. \qquad p(X=0) = C_3^1 \left(\frac{1}{20}\right)^1 \left(\frac{19}{20}\right)^2 = \frac{1083}{8000}.$$

$$p(X=50) = C_3^2 \left(\frac{1}{20}\right)^2 \left(\frac{19}{20}\right)^1 = \frac{57}{8000}. \qquad p(X=100) = C_3^3 \left(\frac{1}{20}\right)^3 \left(\frac{19}{20}\right)^0 = \frac{1}{8000}.$$

L'espérance de X est : $E(X) = -5 \times \frac{6859}{8000} + 0 \times \frac{1083}{8000} + 50 \times \frac{57}{8000} + 100 \times \frac{1}{8000} \approx -3{,}918$.

Scanned by CamScanner

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER

Exercice 40

35 minutes

Un dé cubique a quatre faces blanches et deux faces noires. Quand on lance ce dé, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition.

A) On lance ce dé une fois. Quelle est la probabilité d'avoir :

1) une face supérieure blanche ?

2) Une face supérieure noire ?

B) On répète cette épreuve cinq fois de suite, les lancers étant indépendants.

1) Quelle est la probabilité pour qu'une face noire apparaisse :

a) exactement une fois ?

b) au moins une fois ?

2) Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de faces noires sorties.
Quelle est la loi de probabilité de X et son espérance mathématique ?

Exercice 41

30 minutes

Une urne contient une boule blanche et n boules rouges ($n \geq 2$).

1) Calculer la probabilité $p_1(n)$ de tirer une boule rouge dans un tirage d'une boule au hasard. La suite de terme général $p_1(n)$ est-elle monotone ?

2) Calculer la probabilité $p_2(n)$ de tirer deux boules rouges dans un tirage simultané de deux boules au hasard.

3) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels on a : $p_1(n) - p_2(n) < \frac{1}{8}$.

Exercice 42

50 minutes

A) Soit la fonction $f : x \mapsto f(x) = \frac{(x+3)(x+8)}{(x+5)^2}$.

Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé. On déterminera en particulier les points d'intersection de (C) avec les axes Ox et Oy et avec l'asymptote parallèle à Ox.

B) Soit x un entier naturel.

On place dans une urne 1 + x boules rouges, 3 + x boules blanches et six boules noires.

Un joueur tire une boule de l'urne ; on suppose tous les tirages équiprobables. S'il tire une boule rouge, il a perdu ; s'il tire une boule blanche, il a gagné ; s'il tire une boule noire, il remet cette boule dans l'urne et effectue un nouveau tirage toujours avec équiprobabilité. S'il tire une boule blanche, il a gagné ; sinon il a perdu.

1) Démontrer que la probabilité p(x) que ce joueur a de gagner la partie est $\frac{1}{2}f(x)$.

2) Déterminer l'entier x pour que cette probabilité soit maximale ; déterminer cette probabilité.
Déterminer la limite éventuelle de la fonction $x \mapsto p(x)$ en $+\infty$.

C) Dans une autre urne, on place 10 + x boules blanches et 5 + 2x boules rouges (x est toujours un entier naturel).
Un joueur tire une boule de cette nouvelle urne ; chaque boule a la même probabilité d'être tirée.
S'il tire une boule blanche, il a gagné ; sinon il a perdu.

1) Quelle est la probabilité q(x) qu'a ce joueur de gagner à ce nouveau jeu ?

2) Tracer dans le même repère que dans A), la courbe (C') de g : $x \mapsto 2q(x)$.

3)En déduire qu'il existe un entier x_0, que l'on déterminera , tel que pour $x \geq x_0$, le joueur ait au moins autant de chances de gagner au premier jeu qu'au deuxième.

Exercice 43

40 minutes

Une urne contient deux jetons ; sur l'un est inscrit le nombre 2 et sur l'autre le nombre - 3. On tire trois fois de suite un jeton de l'urne en le remettant dans celle-ci à chaque fois, après avoir noté le nombre qui y est inscrit. Si a, b, c désignent les nombres obtenus dans cet ordre, au triplet (a, b, c), on associe l'équation dans $\mathbb{C}$: $az^2 + bz + c = 0$.
On suppose que tous les triplets ont la même probabilité d'être obtenus.

1) Quelle est la probabilité pour que cette équation admette deux solutions réelles ?

Scanned by CamScanner

2) Soit X (respectivement Y) la variable aléatoire réelle, qui à chaque triplet obtenu, associe la somme (respectivement le produit) des solutions dans $\mathbb{C}$ de cette équation.

Déterminer les lois de probabilité de X et de Y. Calculer les espérances mathématiques respectives de X et Y.

Exercice 44 — BAC S – Amérique du Sud – 1997 — 35 minutes

Monsieur M est chargé de vente à domicile pour le bénéfice d'une association. A chaque personne sollicitée, il propose l'achat d'un livre seul, ou d'une cassette seule, ou l'achat d'un livre et d'une cassette. Après un premier bilan de son activité, monsieur M estime que la probabilité qu'une personne visitée choisie au hasard achète un livre (événement L) est 0,2, la probabilité qu'elle achète une cassette (événement C) est 0,1 et la probabilité qu'elle n'achète rien (événement R) est 0,75.

Partie A

1) Calculer les probabilités des événements suivants :

D : « la personne visitée achète un livre ou une cassette »

E : « la personne visitée achète un livre et une cassette »

F : « la personne visitée achète seulement un livre »

G : « la personne visitée achète seulement une cassette »

2) Sachant que la personne visitée a acheté un livre, quelle est la probabilité qu'elle ait acheté aussi une cassette ?

Partie B

Monsieur M se présente successivement chez n personnes choisies au hasard.

Calculer la probabilité p_n qu'une personne au moins lui achète un livre ou une cassette.

Comment faut-il choisir l'entier naturel n pour avoir $p_n > 0{,}9$?

Exercice 45 — 40 minutes

1) Une assemblée se compose de 10 personnes : 5 hommes et 5 femmes. On choisit au hasard 5 personnes.

a) Calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement deux femmes parmi les 5 personnes.

b) Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins deux hommes parmi les cinq personnes.

2) Soit n un entier naturel non nul. Une assemblée de 2n personnes contient n hommes et n femmes.

On choisit au hasard n personnes dans cette assemblée.

Soit X la variable aléatoire qui à cette épreuve associe le nombre de femmes obtenu.

a) Déterminer les valeurs possibles de X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) En déduire que : $\sum_{k=0}^{n} \left|C_n^k\right|^2 = C_{2n}^n$.

Exercice 46 — 40 minutes

Soit x un entier naturel non nul et $\overline{a_p a_{p-1} \ldots a_1 a_0}^{\text{huit}}$ son écriture en base huit.

1)a) Démontrer que $x \equiv (a_p + a_{p-1} + \ldots + a_1 + a_0)[7]$.

b) On donne $A = \overline{1234432112344321 56}^{\text{huit}}$ écrit en base huit.

Déterminer le reste de la division euclidienne de A par 7.

2) Un sac contient 8 jetons indiscernables au toucher, numérotés de 0 à 7. On tire successivement et sans remise 2 jetons du sac. On désigne par x et y les numéros obtenus respectivement au premier et au second tirage. Calculer la probabilité pour que le nombre $B = \overline{xy}^{\text{huit}}$ en base huit soit un multiple de 7.

Exercice 47 — Concours d'entrée à l'ENSP de Yaoundé – Cameroun – 1996 — 30 minutes

On place dans un sac 4 boules marquées respectivement des nombres : 0, -1, $\frac{1}{2}$ et $-\frac{3}{7}$.

On tire successivement du sac, au hasard, 3 boules, marquées respectivement a, b et c dans l'ordre de leur tirage, et ce, sans remise après chaque tirage.

1) Quelle est la probabilité pour que l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$, ait deux solutions complexes, non réelles, et dont les images M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à l'origine O du plan complexe ?

2) Les chances de cet événement auraient-elles été plus grandes si le tirage des boules avait plutôt été effectué avec remise après chaque tirage ?

Scanned by CamScanner

Exercice 48 — BAC C – Cameroun – 1998 — 40 minutes

Soit α un réel strictement positif. On considère l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et p l'application de $\wp(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, qui à tout élément n de Ω, associe $p(\{n\}) = \ln(\alpha^n)$.

On suppose que pour tous éléments A et B de $\wp(\Omega)$, si $A \cap B = \emptyset$, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

1) Déterminer α pour que $(\Omega, \wp(\Omega), p)$ soit un espace probabilisé fini.

2) On suppose $\alpha = e^{\frac{1}{15}}$ et on définit la variable aléatoire réelle X qui, à tout élément n de Ω, associe sa probabilité $p(\{n\})$. Déterminer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

NB : *$\wp(\Omega)$ désignent l'ensemble des parties de Ω.*

Exercice 49 — BAC C – Cameroun – 2002 — 40 minutes

p désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1)a) Démontrer par récurrence que : $\sum_{j=1}^{p} j2^j = (p-1)2^{p+1} + 2$.

b) On a mis dans une boîte N jetons numérotés de 1 à p et indiscernables au toucher. Le tableau ci-dessous donne la répartition des jetons selon leurs numéros.

Numéro du jeton	1	2	3	...	j	...	p
Nombre de jetons	2	2^2	2^3	...	2^j	...	2^p

Calculer N.

2) On extrait au hasard un jeton de la boîte ; les tirages sont supposés équiprobables. Pour tout j entier naturel pris entre 1 et p inclus, on note A_j l'événement « tirer un jeton portant le numéro j » et p_j la probabilité de A_j.

a) Calculer p_j en fonction de j et de p.

b) On pose $E = \sum_{j=1}^{p} jp_j$. En utilisant le résultat de la question 1)a), calculer E en fonction de p.

Exercice 50 — BAC C – Cameroun – 2005 — 40 minutes

1) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et x un réel positif. Montrer par récurrence que : $(1 + nx) \leq (1 + x)^n$.

2) On dispose de n boules numérotées de 1 à n. On les place toutes au hasard dans n boîtes numérotées de 1 à n, chaque boîte pouvant contenir de zéro à n boules.

Calculer la probabilité p_n pour que chaque boîte contienne exactement une boule.

3) On pose $p_n = \frac{n!}{n^n}$, où n! désigne factoriel n.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on a : $\frac{p_n}{p_{n+1}} \geq 2$.

b) En déduire l'inégalité : $p_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1.

c) Calculer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 51 — 40 minutes

Une urne contient n + 8 boules de trois couleurs : n boules bleues ($n \geq 2$), cinq boules rouges et trois boules vertes.

1) On tire deux boules de l'urne sans remise et l'on se place dans l'hypothèse d'équiprobabilité.

Une règle du jeu a été établie de la façon suivante :

On gagne quand on a tiré deux boules de la même couleur, on perd sinon.

Calculer en fonction de n la probabilité p_n de gain, puis la probabilité q_n de perte.

Calculer $\lim_{n \to +\infty} p_n$. Ce résultat était-il prévisible ?

2) On effectue maintenant une série de dix tirages de deux boules comme au 1), en remettant chaque fois les deux boules tirées dans l'urne.

Scanned by CamScanner

Calculer en fonction de n la probabilité P_n pour obtenir neuf fois seulement un tirage de deux boules de la même couleur. Calculer $\lim_{n\to+\infty} P_n$. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 52 — BAC C – Cameroun – 1997 — 30 minutes

On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On note p_k la probabilité d'apparition de la face k lorsque le dé est lancé. Le dé est supposé pipé de telle sorte que les nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 constituent dans cet ordre une progression géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

1) Calculer p_k pour tout k de {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
Le dé est utilisé pour un jeu dont les conditions sont les suivantes :
- L'apparition d'une face portant un nombre pair fait gagner 200 francs.
- L'apparition d'une face portant un nombre impair fait perdre 300 francs.

Un joueur réalise trois lancers successifs.
2) calculer la probabilité de l'événement : « après ces trois lancers, le gain du joueur est exactement 100 francs ».

Exercice 53 — 40 minutes

Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires.
Ces six boules sont indiscernables au toucher.
1) On effectue quatre tirages successifs d'une boule sans remise.
a) Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche.
b) Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche au cours de ces quatre tirages.
2) n étant un nombre entier naturel non nul, on effectue n tirages successifs d'une boule avec remise ; on appelle p_n la probabilité d'obtenir au cours de ces n tirages une boule blanche au dernier tirage.
a) Calculer p_1, p_2, p_3 et p_4.
b) Soit $S_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$. En déduire S_n en fonction de n puis déterminer la limite de S_n.

Exercice 54 — BAC D – Cameroun – 1999 — 25 minutes

Un joueur de basket-ball est amené à réaliser trois lancers consécutifs de balle dans le panier de l'équipe adverse.
On note p_1, p_2 et p_3 les probabilités de réussir le lancer respectivement aux premier, deuxième et troisième lancers.
On admet que : $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,5$ et $p_3 = 0,7$.
1) Calculer la probabilité pour que le joueur ait réussi un seul lancer parmi les trois.
2) Calculer la probabilité pour que le joueur ait réussi au moins un lancer parmi les trois.

Exercice 55 — BAC D – Cameroun - 2000 — 50 minutes

A) Une urne contient n boules noires et une boule blanche indiscernables au toucher. Un jeu consiste à tirer de cette urne une boule, de noter sa couleur et la remettre dans l'urne. Cette épreuve s'effectue deux fois. Si après le tirage on obtient deux boules noires, on gagne 1F ; si après on obtient deux boules blanches on gagne 10 F, si on obtient deux boules de couleurs différentes on perd 3,5F. Soit X la variable aléatoire qui au résultat associe le gain.
1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2) Calculer l'espérance mathématique E(X).

B) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{(x+1)^2}$.

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2) Tracer soigneusement la courbe représentative (C) de f dans un repère orthogonal (unité sur les axes : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées).
3) Utiliser la courbe représentative (C) de la fonction f pour donner les valeurs de n pour lesquelles :
a) Le jeu de la partie A est équitable.
b) Le jeu est avantageux.

4) Soit la fonction F définie par : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$; $x \geq 0$.
a) Justifier l'existence de F.
b) Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout x différent de -1, $f(x) = a + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}$.

Scanned by CamScanner

En déduire l'expression de F(x) et calculer F(0).

c) Calculer l'aire du domaine plan limité par les droites d'équations x = 2, x = 5, y = 5 et (C).

Exercice 56 — 25 minutes

On lance simultanément trois dés et on fait le total. On constate que six situations conduisent à un total de 9 : (6, 2, 1), (5, 3, 1), (5, 2, 2), (4, 4, 1), (4, 3, 2) et (3, 3, 3) et six situations conduisent à un total de 10 : (6, 3, 1), (6, 2, 2), (5, 4, 1), (5, 3, 2), (4, 4, 2) et (4, 3, 3).
Comparer la probabilité d'obtenir un total de 9 à la probabilité d'obtenir un total de 10.

Exercice 57 — 25 minutes

Mariska, Cyrille, China, Bronda, Promesse, Adassa et Marina choisissent chacun au hasard une couleur parmi le vert, le rouge et le jaune. Quelle est la probabilité de pouvoir reconstituer le drapeau vert, rouge, jaune ?

Exercice 58 — 25 minutes

La probabilité que les clés de Marlyse soient dans les poches d'un de ses quatre blousons est 0,8.
Quelle est la probabilité qu'elles soient dans le quatrième blouson sachant qu'elles n'étaient pas dans les trois premiers ?

Exercice 59 — 25 minutes

Dans un établissement, on observe, trois classes C_1, C_2 et C_3, dont les effectifs sont de 44, 33 et 40 élèves, ont des taux de réussite de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$. Un élève a réussi, quelle est la probabilité qu'il vienne de C_2 ?

Exercice 60 — 25 minutes

Au mondial de football, un quart des buts sont marqués sur corner. Parmi ces buts, 80% sont marqués de la tête. Parmi les buts marqués de la tête, 60% proviennent d'un corner. Un but vient d'être marqué. Quelle est la probabilité qu'il le soit de la tête.

Exercice 61 — 40 minutes

Un voyageur peut prendre le train ou l'avion. Le premier jour il prend le train. Si au jour n il prend le train alors, la probabilité qu'il prenne l'avion au jour n + 1 est $\frac{1}{2}$. Si au jour n il prend l'avion, alors il prend le train le jour n + 1. Notons T_n : « le voyageur prend le train le jour n » et $p_n = p(T_n)$.

1) Montrer que $p_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}p_n$.

2) Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite définie par $u_n = p_n - \frac{2}{3}$.

Montrer que $(u_n)_{n>0}$ est une suite géométrique. Donner la probabilité p_n, que le voyageur prenne le train le jour n.

Exercice 62 — 25 minutes

Une étude statistique portant sur les attaquants partant à la limite du hors jeu au football a montré que : dans 75% des cas, il y a hors jeu.

- Quand un attaquant reçoit le ballon en étant hors jeu, le juge de ligne lève son drapeau 95 fois sur 100.
- Quand l'attaquant reçoit le ballon à la limite du hors jeu sans être hors jeu alors le juge de ligne lève son drapeau 3 fois sur 10. Calculer la probabilité que le juge fasse erreur.

Exercice 63 — 30 minutes

Quelle est la probabilité p_n d'obtenir exactement n piles en lançant 2n pièces de monnaie ?

A l'aide de l'approximation « $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ pour n assez grand », montrer que $p_n \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

Scanned by CamScanner

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER – SOLUTIONS

Solution 40

A)1) Soit A : « la face supérieure est blanche ». $p(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

2) Soit B : « la face supérieure est noire ». $p(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

B)1)a) Notons C : « avoir exactement une face noire ». $p(C)=C_5^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$.

b) Notons D : « avoir au moins une face noire ». $p(\overline{D})=C_5^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$. D'où $p(D)=1-p(\overline{D})=\frac{211}{243}$.

2) L'ensemble des valeurs prises par X est : $X(\Omega)=\{0,1,2,3,4,5\}$.

$p(X=0)=C_5^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$.

$p(X=1)=C_5^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$.

$p(X=2)=C_5^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}$.

$p(X=3)=C_5^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}$.

$p(X=4)=C_5^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{10}{243}$.

$p(X=5)=C_5^5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{243}$.

L'espérance mathématique de X est : $E(X)=5\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$.

Solution 41

1) • Il y a équiprobabilité.

Soit Ω_1 l'univers des possibles. $\text{card}\Omega_1=C_{n+1}^1=n+1$.

Notons A_1 : « avoir une boule rouge ».

$\text{Card}A_1=n$; donc $p_1(A_1)=\frac{\text{Card}A_1}{\text{Card}\Omega_1}$. C'est-à-dire $p_1(n)=\frac{n}{n+1}$.

• Soit n un entier naturel, avec $n\geq 2$. $p_1(n+1)-p_1(n)=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0$.

D'où la suite de terme général $p_1(n)$ est strictement croissante.

2) Il y a équiprobabilité. Notons Ω_2 l'univers des possibles. $\text{card}\Omega_2=C_{n+1}^2=\frac{n(n+1)}{2}$.

A_2 : « avoir deux boules rouges ».

$\text{card}A_2=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$ et $p_2(A_2)=\frac{\text{Card}A_2}{\text{Card}\Omega_2}$. Donc $p_2(n)=\frac{n-1}{n+1}$.

3) Soit n un entier naturel, avec $n>3$.

$p_1(n)-p_2(n)<\frac{1}{8}\Leftrightarrow\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n+1}-\frac{1}{8}<0\Leftrightarrow\frac{7-n}{8(n+1)}<0\Leftrightarrow 7-n<0\ (\text{car } n+1>0)\Leftrightarrow n>7$.

Finalement, $p_1(n)-p_2(n)<\frac{1}{8}$ si et seulement si, n est un entier strictement supérieur à 7.

Solution 42

A) • Soit la fonction $f: x\mapsto f(x)=\frac{(x+3)(x+8)}{(x+5)^2}=\frac{x^2+11x+24}{(x+5)^2}$.

Scanned by CamScanner

f est une fonction rationnelle, donc elle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}-\{-5\}$.

Et pour tout réel x différent de -5, on a : $f'(x)=\dfrac{-x+7}{(x+5)^3}$.

Le signe de f '(x) est celui de (-x + 7)(x + 5) pour tout réel x différent de -5.
D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-5		7		$+\infty$
f'(x)		-	‖	+	0	-	
f(x)	1	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{25}{24}$	↘	1

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+11x+24}{x^2+10x+25}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+11x+24}{x^2+10x+25}=1$. Alors la droite d'équation y = 1 est asymptote horizontale à la courbe de f.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-5} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-5} f(x)=-\infty$. Alors la droite d'équation x = -5 est asymptote verticale à la courbe de f.

- f(x) = 0, si et seulement si x = -3 ou x = -8.

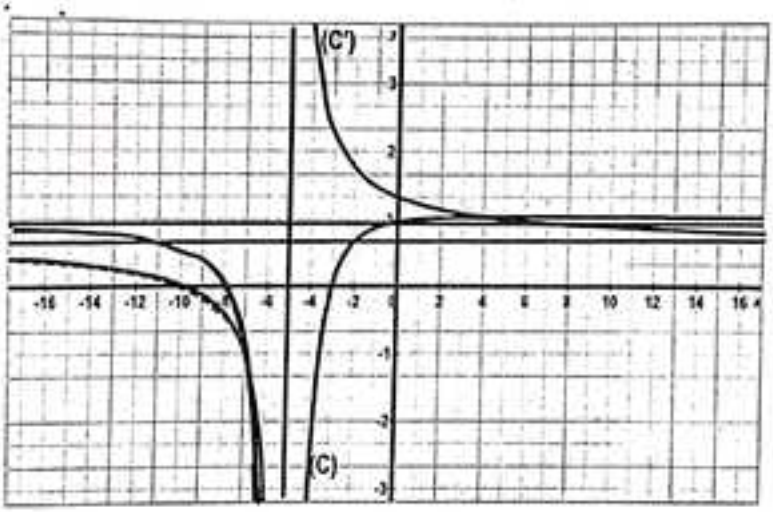
D'où la courbe de f rencontre l'axe des abscisses aux points A(-3 , 0) et B(-8 , 0).

- $f(0)=\dfrac{24}{25}$, d'où la courbe de f rencontre l'axe des ordonnées au point $C\left(0,\dfrac{24}{25}\right)$.

- f(x) = 1 si et seulement si $\dfrac{x^2+11x+24}{x^2+10x+25}=1$. C'est-à-dire x = 1.

D'où la courbe de f rencontre la droite d'équation y = 1 au point D(1 , 1).

D'où la courbe de g :



B)1) L'urne contient 1 + x boules rouges, 3 + x boules blanches et 6 boules noires, soit en tout 10 + 2x boules.

Ainsi, la probabilité de tirer une boule rouge est $\dfrac{1+x}{10+2x}$, celle de tirer une boule blanche est $\dfrac{3+x}{10+2x}$ et celle de tirer une boule noire est $\dfrac{6}{10+2x}$. Puisque la boule est remise dans l'urne après chaque tirage, les tirages des boules aux premier et second tirages sont indépendants :

Donc $p(x)=\dfrac{3+x}{10+2x}+\dfrac{6}{10+2x}\times\dfrac{3+x}{10+2x}=\dfrac{3+x}{2(5+x)}\left(1+\dfrac{3}{5+x}\right)=\dfrac{(x+3)(x+8)}{2(x+5)^2}=\dfrac{1}{2}f(x)$. D'où $p(x)=\dfrac{1}{2}f(x)$.

2) • Pour tout x > 0, $p(x)=\dfrac{1}{2}f(x)$. D'où p(x) admet un maximum si et seulement si f(x) admet un maximum.

Or dans [0 , +∞[, f admet un maximum pour x = 7, alors p(x) est maximal si et seulement si x = 7.

Scanned by CamScanner

Et ce maximum est $p(7) = \frac{1}{2}f(7) = \frac{25}{48}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2}$.

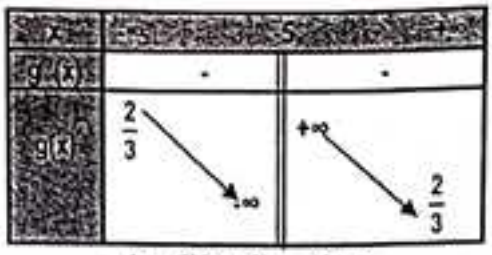
C)1) On a $q(x) = \frac{10+x}{15+3x}$.

2) Soit g la fonction qui au réel x, associe g(x) = 2q(x).

g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-5\}$, car fonction rationnelle.

Et pour tout réel $x \neq -5$, $g'(x) = \frac{-10}{3(x+5)^2}$. D'où pour tout réel $x \neq -5$, on a $g'(x) < 0$.

g est donc strictement décroissante dans chaque intervalle où elle définie. D'où son tableau de variation qui suit :



3) Soit $x \geq 0$, on a $p(x) \geq q(x)$ si et seulement si $\frac{(x+3)(x+8)}{2(x+5)^2} \geq \frac{10+x}{15+3x}$ avec $x \geq 0$.

C'est-à-dire $\frac{(x+7)(x-4)}{6(x+5)^2} \geq 0$ et $x \geq 0$. Soit $x \geq 4$. D'où pour $x \geq 4$, on a $p(x) \geq q(x)$. On prendra donc $x_0 = 4$.

Solution 43

1) Il y a équiprobabilité. Soit Ω l'univers des possibles. Card$\Omega = 2^3 = 8$.

$\Omega = \{(2, 2, 2), (2, 2, -3), (2, -3, 2), (2, -3, -3), (-3, 2, -3), (-3, -3, 2), (-3, 2, 2), (-3, -3, -3)\}$.

L'équation admet deux solutions réelles si et seulement si : $b^2 - 4ac > 0$.

Soit A : « avoir deux solutions réelles ».

On a : $A = \{(2, 2, -3), (-3, 2, 2), (2, -3, -3), (-3, -3, 2)\}$. D'où $p(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

2) • On sait que X prend la valeur $-\frac{b}{a}$. D'où les valeurs possibles de X sont : -1, $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$.

On a X = -1, lorsque a = 2 et b = 2, ou lorsque a = -3 et b = -3. Donc $p(X = -1) = \frac{1}{2}$.

On a $X = \frac{2}{3}$, lorsque a = - 3 et b = 2. Donc $p\left(X = \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}$.

On a $X = \frac{3}{2}$, lorsque a = 2 et b = -3. Donc $p\left(X = \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

- L'espérance mathématique de X est : $E(X) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{12} + \frac{3}{8} = \frac{1}{24}$.

- On sait que Y prend la valeur $\frac{c}{a}$. D'où les valeurs possibles de Y sont : $-\frac{3}{2}$, $-\frac{2}{3}$ et 1.

On a $Y = -\frac{3}{2}$, lorsque a = 2 et c = -3. Donc $p\left(Y = -\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

On a $Y = -\frac{2}{3}$, lorsque a = -3 et c = 2. Donc $p\left(Y = -\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Scanned by CamScanner

On a Y = 1, lorsque a = 2 et c = 2, ou lorsque a = -3 et c = -3. On a alors $p(Y=1)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$..

L'espérance mathématique de Y est : $E(Y)=-\frac{3}{2}\times\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}=-\frac{9}{24}-\frac{4}{24}+\frac{12}{24}=-\frac{1}{24}$.

Solution 44

Partie A

1) • L'événement D = L∪C est l'événement contraire de l'événement $R=\overline{L}\cap\overline{C}=\overline{L\cup C}$.

Donc $p(D)=p(\overline{R})=1-p(R)=1-0,75=0,25$.

D'où la probabilité que la personne visitée achète un livre ou une cassette est égale à 0,25.

• L'événement E est l'intersection des événements L et C, donc :

$p(E)=p(L\cap C)=p(L)+p(C)-p(L\cup C)$.

D'où p(E) = p(L) + p(C) – p(D), car D = L∪C

= 0,2 + 0,1 – 0,25

= 0,05.

D'où la probabilité pour que la personne visitée achète un livre et une cassette est 0,05.

• L'événement F est l'événement $L-C=L\cap\overline{C}$.

On rappelle que $p(L-C)=p(L)-p(L\cap C)$.

D'où p(F) = p(L) – p(E) = 0,2 – 0,05 = 0,15.

D'où la probabilité pour qu'une personne achète seulement un livre est égale à 0,15.

• L'événement G est l'événement C – L. D'où p(G) = p(C) – p(E) = 0,1 – 0,05 = 0,05.

D'où la probabilité qu'une personne visitée achète seulement une cassette est égale à 0,05.

2) Il s'agit ici de calculer $p_L(C)$.

Or $p_L(C)=\frac{p(C\cap L)}{p(L)}=\frac{p(E)}{p(L)}=\frac{0,05}{0,2}=0,25$. D'où la probabilité cherchée est égale à 0,25.

Partie B

• Soit A : « une personne au moins achète un livre ou une cassette sur les n personnes visitées ».

Alors $\overline{A}$ est l'événement « aucune personne sur les n personnes visitées n'achète un livre ou une cassette ».

Dans cette partie, il s'agit d'un schéma de Bernoulli où le succès est l'événement D et l'échec est R.

L'événement $\overline{A}$, signifie qu'il n'y a aucun succès.

D'où $p(\overline{A})=C_n^0(0,25)^0(0,75)^n=(0,75)^n$. Donc $p_n=p(A)=1-p(\overline{A})$. Ainsi, $p_n=1-(0,75)^n$.

• D'après ce qui précède, on cherche n tel que : $1-(0,75)^n>0,9$. C'est-à-dire $(0,75)^n<0,1$.

Ce qui équivaut à nln(0,75) < ln(0,1). Ce qui signifie $n>\frac{\ln 0,1}{\ln 0,75}$ (car ln0,75 < 0, puisque 0,75 appartient à]0 , 1[).

Or $\frac{\ln 0,1}{\ln 0,75}\approx 8,004$, alors $p_n > 0,9$ pour tout entier n supérieur ou égal à 9.

Ainsi, à partir de 9 personnes visitées, la probabilité que monsieur M puisse vendre au moins un livre ou une cassette dépasse 0,9.

Solution 45

1) Il y a équiprobabilité. Soit Ω l'univers des possibles. $\text{card}\Omega=C_{10}^5=252$.

a) Soit A l'événement : « il y a exactement deux femmes ». $\text{card}A=C_5^2C_5^3=100$. D'où $p(A)=\frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}=\frac{25}{63}$.

b) Soit B : « il y a au moins deux hommes ». On a $\overline{B}$: « il y a au plus un homme ».

$\text{card}\overline{B}=C_5^5+C_5^1C_5^4=26$. D'où $p(\overline{B})=\frac{\text{card}\overline{B}}{\text{card}\Omega}=\frac{13}{126}$ et donc $p(B)=1-p(\overline{B})=\frac{113}{126}$.

Scanned by CamScanner

2)a) L'ensemble des valeurs prises par X est : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

b) Soit k appartenant à $X(\Omega)$, $\text{card}\Omega = C_{2n}^{n}$ et $\text{card}(X=k) = C_n^k C_n^{n-k}$.

D'où $p(X=k) = \dfrac{C_n^k C_n^{n-k}}{C_{2n}^{n}}$. Or $C_n^k = C_n^{n-k}$, alors $p(X=k) = \dfrac{\left[C_n^k\right]^2}{C_{2n}^{n}}$.

c) Nous savons que $\sum_{k=0}^{n} p(X=k) = 1$, c'est-à-dire : $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{\left[C_n^k\right]^2}{C_{2n}^{n}} = 1$.

Or $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{\left[C_n^k\right]^2}{C_{2n}^{n}} = \dfrac{1}{C_{2n}^{n}} \sum_{k=0}^{n} \left[C_n^k\right]^2$, alors on a : $\dfrac{1}{C_{2n}^{n}} \sum_{k=0}^{n} \left[C_n^k\right]^2 = 1$. Finalement, $\sum_{k=0}^{n} \left[C_n^k\right]^2 = C_{2n}^{n}$.

Solution 46

1)a) On sait que : $x = \overline{a_p a_{p-1} \ldots a_1 a_0}^{\text{huit}} = \sum_{k=0}^{p} a_k 8^k$.

Or on a $8 \equiv 1[7]$, alors $8^k \equiv 1[7]$. Ainsi, pour tout entier naturel $k \leq p$, on a : $a_k 8^k \equiv a_k[7]$.

On en déduit que $\sum_{k=0}^{p} a_k 8^k \equiv \sum_{k=0}^{p} a_k [7]$. C'est-à-dire en conclusion $x \equiv (a_p + a_{p-1} + \ldots + a_1 + a_0)[7]$.

b) D'après la question 1)a), on a :
$A \equiv 1+2+3+4+4+3+2+1+1+2+3+4+4+3+2+1+5+6\ [7]$. C'est-à-dire $A \equiv 2\ [7]$.
D'où le reste de la division euclidienne de A par 7 est 2.

2) Il y a équiprobabilité. Soit Ω l'univers des possibles.

D'après la question 1)a), $B = \overline{xy}^{\text{huit}}$ est divisible par 7 si et seulement si, x + y est un multiple de 7.

Le tableau ci-dessous donne les différentes valeurs de x + y en fonction du couple (x , y) :

x \ y	0	1	2	3	4	5	6	7
0		1	2	3	4	5	6	7
1	1		3	4	5	6	7	8
2	2	3		5	6	7	8	9
3	3	4	5		7	8	9	10
4	4	5	6	7		9	10	11
5	5	6	7	8	9		11	12
6	6	7	8	9	10	11		13
7	7	8	9	10	11	12	13	

Soit M : « B est un multiple de 7 ». D'après ce tableau, cardM = 8 et $p(M) = \dfrac{\text{cardM}}{\text{card}\Omega} = \dfrac{8}{56}$.

La probabilité pour que B soit un multiple de 8 est alors $\dfrac{1}{7}$.

Point méthode :

Le tableau ci-dessus peut être fait et utilisé lorsqu'il s'agit d'un tirage de deux éléments, d'un lancer d'un élément deux fois, de deux éléments (les pièces, les dés...).
On remarque que la diagonale n'a pas été prise en compte, c'est parce que le tirage se fait sans remise. En effet,

- *Lorsqu'il s'agit d'un tirage de deux éléments avec remise et successivement, comme dans le lancer d'un élément deux fois de suite, ou de deux éléments, on ne néglige aucune case du tableau, et le nombre d'éventualités est égal au nombre de cases du tableau.*
- *Dans un tirage de deux éléments successivement sans remise, on néglige les éléments de la diagonale.*
- *Dans un tirage simultané de deux éléments, on néglige la diagonale et la partie au-dessus de la diagonale.*

Scanned by CamScanner

Solution 47

1) Soit a, b et c trois nombres réels, l'équation $az^2 + bz + c = 0$, admet deux solutions non réelles si et seulement si, $b^2 - 4ac < 0$.

Nous savons que les solutions z_1 et z_2 de cette équation sont conjuguées l'une de l'autre ($z_2 = \overline{z_1}$) car a, b et c sont des réels.

Or M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à O, donc $z_2 = -z_1$. On en déduit que $z_1 = -\overline{z_1}$.

Par conséquent, z_1 et z_2 sont imaginaires purs, c'est-à-dire b = 0.

En résumé, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes, non réelles, avec M_1 et M_2 symétriques par rapport à O, si et seulement si, : b = 0 et ac > 0.

Les triplets (a , b , c) vérifiant cette condition sont : $\left(-1, 0, -\frac{3}{7}\right)$ et $\left(-\frac{3}{7}, 0, -1\right)$.

Au cours de cette épreuve, il y a équiprobabilité.

Soit Ω, l'univers des possibles, $\text{card}\Omega = A_4^3 = 24$.

Notons A : « M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à O », cardA = 2. D'où $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{1}{12}$.

2) Si au cours de cette épreuve, il y a remise, alors les triplets (a , b , c) vérifiant b = 0 et ac > 0 auront :

(-1 , 0 , -1), $\left(-1, 0, -\frac{3}{7}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{7}, 0, -1\right)$ et $\left(-\frac{3}{7}, 0, -\frac{3}{7}\right)$.

On aurait aussi $\text{card}\Omega = 4^3$ et cardA = 5. D'où $p(A) = \frac{5}{64} < \frac{1}{12}$.

Les chances ne sont pas plus grandes, mais plus petites.

Solution 48

1) $(\Omega , \wp(\Omega) , p)$ est un espace probabilisé fini si et seulement si, p est une probabilité.

Or pour tous éléments A et B de $\wp(\Omega)$, si $A \cap B = \emptyset$, on a $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ (d'après l'énoncé).

D'où p est une probabilité si et seulement si $p(\Omega) = 1$. Comme $p(\Omega) = p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) + p(\{5\})$, alors $P(\Omega) = \ln(\alpha^1) + \ln(\alpha^2) + \ln(\alpha^3) + \ln(\alpha^4) + \ln(\alpha^5) = \ln(\alpha^{1+2+3+4+5}) = \ln(\alpha^{15}) = 15\ln\alpha$,

alors, $p(\Omega) = 1$, si et seulement si $15\ln\alpha = 1$. C'est-à-dire $\ln\alpha = \frac{1}{15}$, soit $\alpha = e^{\frac{1}{15}}$.

Et pour $\alpha = e^{\frac{1}{15}}$, on a, pour tout n élément de Ω, $p(\{n\}) = \ln(\alpha^n) = \frac{n}{15}$.

D'où $(\Omega , \wp(\Omega) , p)$ est un espace probabilisé fini si et seulement si , $\alpha = e^{\frac{1}{15}}$.

2) On a pour tout élément n de Ω, $p(\{n\}) = \frac{n}{15}$. D'où $X(\Omega) = \left\{\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{5}, \frac{4}{15}, \frac{1}{3}\right\}$.

- Et $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xp(X = x) = \sum_{k=1}^{5} \frac{k}{15} p\left(X = \frac{k}{15}\right) = \sum_{k=1}^{5} \left(\frac{k}{15}\right)^2 = \left(\frac{1}{15}\right)^2 + \left(\frac{2}{15}\right)^2 + \left(\frac{3}{15}\right)^2 + \left(\frac{4}{15}\right)^2 + \left(\frac{5}{15}\right)^2$.

D'où l'espérance mathématique de X est : $E(X) = \frac{11}{45}$.

- La variance de X est :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{k=1}^{5} \left(\frac{k}{15}\right)^2 p\left(X = \frac{k}{15}\right) - \left(\frac{11}{45}\right)^2 = \sum_{k=1}^{5} \left(\frac{k}{15}\right)^3 - \left(\frac{11}{45}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{15}\right)^3 + \left(\frac{2}{15}\right)^3 + \left(\frac{3}{15}\right)^3 + \left(\frac{4}{15}\right)^3 + \left(\frac{5}{15}\right)^3 - \left(\frac{11}{45}\right)^2$$

Scanned by CamScanner

D'où, $V(X)=\frac{14}{2025}$.

- Et l'écart-type de X est : $\sigma(X)=\frac{\sqrt{14}}{45}$.

Solution 49

1)a) Notons P_p la propriété : « $\sum_{j=1}^{p} j2^j=(p-1)2^{p+1}+2$ ».

Pour p = 2 :

$\sum_{j=1}^{p} j2^j=2+2\times2^2=10$ et $(p-1)\times2^{p+1}+2=(2-1)\times2^{2+1}+2=10$. D'où P_2 est vraie.

Supposons P_p vraie pour un certain entier naturel $p\geq2$ (c'est-à-dire $\sum_{j=1}^{p} j2^j=(p-1)2^{p+1}+2$), montrons qu'alors P_{p+1} est aussi vraie (c'est-à-dire $\sum_{j=1}^{p+1} j2^j=p2^{p+2}+2$) :

On a $\sum_{j=1}^{p+1} j2^j=\sum_{j=1}^{p} j2^j+(p+1)\times2^{p+1}=(p-1)\times2^{p+1}+2+(p+1)\times2^{p+1}=2p\times2^{p+1}+2=p\times2^{p+2}+2$.

D'où P_{p+1} est vraie.

Ainsi, pour tout entier naturel $p>1$, on a $\sum_{j=1}^{p} j2^j=(p-1)2^{p+1}+2$.

b) $N=2+2^2+...+2^p=2\times\frac{1-2^p}{1-2}=2^{p+1}-2$.

2)a) Il y a équiprobabilité.

Soit Ω l'univers des possibles, $card\Omega=2^{p+1}-2$. $CardA_j=2^j$, $p_j=\frac{cardA_j}{card\Omega}$, d'où $p_j=\frac{2^j}{2^{p+1}-2}$.

b) $E=\sum_{j=1}^{p} jp_j=\sum_{j=1}^{p}\frac{j2^j}{2^{p+1}-2}=\frac{1}{2^{p+1}-2}\sum_{j=1}^{p} j2^j=\frac{(p-1)2^{p+1}+2}{2^{p+1}-2}$ (car d'après 1)a), $\sum_{j=1}^{p} j2^j=(p-1)2^{p+1}+2$).

Solution 50

1) Notons P_n la propriété : « $(1+nx)\leq(1+x)^n$ ».

Pour n = 1, $1+nx=1+x$ et $(1+x)^n=1+x$.

D'où, on a : $(1+nx)\leq(1+x)^n$ pour n = 1. C'est-à-dire P_1 est vraie.

Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel non nul n (c'est-à-dire $(1+nx)\leq(1+x)^n$), et montrons que P_{n+1} est aussi vraie (c'est-à-dire $1+(n+1)x\leq(1+x)^{n+1}$) :

D'après hypothèse de récurrence, on a : $(1+nx)\leq(1+x)^n$.

D'où, en ajoutant x aux deux membres de l'inégalité, on a : $1+(n+1)x\leq(1+x)^n+x$ (1).

Comparons maintenant $(1+x)^n+x$ et $(1+x)^{n+1}$.

Pour le faire, étudions le signe de la différence de ces deux nombres :

On a: $(1+x)^{n+1}-(1+x)^n-x=(1+x)(1+x)^n-(1+x)^n-x=(1+x)^n+x(1+x)^n-(1+x)^n-x=x(1+x)^n-x$
$=x[(1+x)^n-1]$.

Or on a $x\geq0$, et $(1+x)^n\geq1+nx\geq1$, d'après l'hypothèse de récurrence.

Ainsi on a $x[(1+x)^n-1]\geq0$. D'où $(1+x)^{n+1}\geq(1+x)^n+x$ (2)

Des inégalités (1) et (2), on déduit que $1+(n+1)x\leq(1+x)^n+x\leq(1+x)^{n+1}$.

Donc $1+(n+1)x\leq(1+x)^{n+1}$. Et P_{n+1} est vraie.

On peut donc conclure que pour tout entier naturel non nul n, pour tout réel positif x, on a : $(1+nx)\leq(1+x)^n$.

Scanned by CamScanner

2) Il y a équiprobabilité au cours de cette épreuve :
Soit Ω l'univers des possibles, pour chaque boule, il y a n possibilités de trouver une boîte qui va la contenir.
D'où $\text{card}\Omega = n^n$.
Soit A : « chaque boîte tirée contient une boule ». Il suffit de ranger les n boules dans les n boîtes.

D'où $\text{card}A = n!$ et $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{n!}{n^n}$. D'où $p_n = \frac{n!}{n^n}$.

3)a) Soit n entier naturel non nul, on a : $p_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$.

Donc $\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{n!}{n^n} \times \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{n!}{n^n} \times \frac{(n+1)^{n+1}}{n! \times (n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Or si on pose $x = \frac{1}{n}$ dans l'inégalité démontrée à la question 1), on obtient alors :

$$1 + n \times \frac{1}{n} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \text{ c'est-à-dire } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

On peut donc conclure que $\frac{p_n}{p_{n+1}} \geq 2$ pour tout entier naturel n non nul.

b) Soit Q_n la propriété : « $p_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ ».

Pour n = 1, on a $p_1 = \frac{1!}{1} = 1$ et $\frac{1}{2^{1-1}} = 1$. D'où $\frac{1!}{1} \leq \frac{1}{2^{1-1}}$. Par conséquent, Q_1 est vraie.

Supposons Q_n vraie pour un certain entier naturel non nul n, (c'est-à-dire $p_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$) et montrons que Q_{n+1} est aussi vraie (c'est-à-dire $p_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$) :

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $p_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, donc $\frac{1}{2}p_n \leq \frac{1}{2^n}$. (3)

Or d'après la question 3)a), on a : $\frac{p_n}{p_{n+1}} \geq 2$, donc $p_{n+1} \leq \frac{1}{2}p_n$ (4).

Des inégalités (3) et (4), on peut conclure que : $p_{n+1} \leq \frac{1}{2}p_n \leq \frac{1}{2^n}$. Donc $p_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$, c'est-à-dire Q_{n+1} est vraie.

Finalement, pour tout entier naturel non nul, on a : $p_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

c) On a $0 \leq p_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, pour tout entier naturel non nul n.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$, alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$.

Solution 51

1) • Soit Ω l'univers des possibles, $\text{card}\Omega = C_{n+8}^2 = \frac{(n+8)(n+7)}{2}$.

Notons A : « les deux boules ont la même couleur ».

$$\text{card}A = C_n^2 + C_5^2 + C_3^2 = \frac{n(n-1)}{2} + 10 + 3 = \frac{n^2 - n + 26}{2}.$$

$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$. Donc $p_n = \frac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$ et $q_n = 1 - p_n = \frac{16n + 30}{n^2 + 15n + 56}$.

Scanned by CamScanner

- $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1$. Ce résultat était prévisible, car s'il y a un très grand nombre de boules bleues, alors on est presque certain de tirer deux boules bleues, donc deux boules de même couleur.

2) Il s'agit ici d'un schéma de Bernoulli, où le succès est « avoir deux boules de même couleur ».

La probabilité d'avoir 9 succès sur 10 étant : $p_n = C_{10}^9 (p_n)^9 q_n = \dfrac{10(16n+30)(n^2-n+26)^9}{(n^2+15n+56)^{10}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 10\dfrac{n^{19}}{n^{20}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{10}{n} = 0$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$.

Ce résultat était prévisible. Si l'urne contient un très grand nombre de boules bleues, alors il est presque certain qu'on tirera deux boules bleues donc, on obtiendra presque certainement dix fois et non neuf fois un tirage de deux boules de la même couleur.

Solution 52

1) L'univers des possibles au cours de cette épreuve est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

On a d'une part $p_2 = qp_1$, $p_3 = q^2p_1$, $p_4 = q^3p_1$, $p_5 = q^4p_1$ et $p_6 = q^5p_1$.

D'autre part, on a : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$.

Donc $p_1(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5) = 1$. C'est-à-dire $p_1\left(\dfrac{1-q^6}{1-q}\right) = 1$. D'où $p_1 = \dfrac{1-q}{1-q^6}$.

Or $q = \dfrac{1}{2}$, alors $p_1 = \dfrac{32}{63}$. Finalement,

$p_1 = \dfrac{32}{63}$; $p_2 = qp_1 = \dfrac{16}{63}$; $p_3 = qp_2 = \dfrac{8}{63}$; $p_4 = qp_3 = \dfrac{4}{63}$; $p_5 = qp_4 = \dfrac{2}{63}$ et $p_6 = qp_5 = \dfrac{1}{63}$.

2) On a un schéma de Bernoulli où le succès est S : « avoir une face paire ».

Ainsi, la probabilité du succès est $p = p(S) = p_2 + p_4 + p_6 = \dfrac{1}{3}$ et celle de l'échec est $1-p = 1-\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

Notons A : « le gain du joueur est exactement 100 francs après les trois lancers » ; on a aussi A : « obtenir deux faces paires et une face impaire ».

Alors, $p(A) = C_3^2 p^2(1-p) = 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^1 = \dfrac{2}{9}$. La probabilité de gagner exactement 100 francs est égale à $\dfrac{2}{9}$.

Solution 53

1) Il y a équiprobabilité au cours de cette épreuve.

Soit Ω l'univers des possibles, on a $\text{card}\Omega = A_6^4 = 360$.

a) Soit A : « tirer une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche ».

CardA = 4×3×2×2 = 48. Et donc $p(A) = \dfrac{\text{cardA}}{\text{card}\Omega} = \dfrac{2}{15}$.

b) Soit B : « tirer une seule boule blanche ».

$\text{cardB} = C_2^1 C_4^1 A_4^3 = 192$. D'où $p(B) = \dfrac{\text{cardB}}{\text{card}\Omega} = \dfrac{8}{15}$.

2) Il y a équiprobabilité. Soit Ω' l'univers des possibles, on a $\text{card}\Omega' = 6^n$.

Notons A_n : « tirer une boule blanche uniquement au dernier tirage ».

a) • $\text{card}A_1 = 2$, d'où $p_1 = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

• $\text{card}A_2 = 4\times2$, d'où $p_2 = 2\times\dfrac{4}{6^2} = \dfrac{2}{9}$.

• $\text{card}A_3 = 4^2\times2$, d'où $p_3 = 2\times\dfrac{4^2}{6^3} = \dfrac{4}{27}$.

• $\text{card}A_4 = 4^3\times2$, d'où $p_4 = 2\times\dfrac{4^3}{6^4} = \dfrac{8}{81}$.

Scanned by CamScanner

b) • Plus généralement, $\text{card}A_n = 4^{n-1}\times 2$, d'où $p_n = 2\times\frac{4^{n-1}}{6^n} = \frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

(p_n) est une suite géométrique, de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $p_1 = \frac{1}{3}$.

D'où $S_n = p_1 + p_2 + ... + p_n = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\times\frac{1}{3}$. On en déduit que $S_n = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

• Or $\frac{2}{3}\in[0,1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

Solution 54

1) Soit A : « le joueur a réussi un seul lancer des trois » et A_i : « le joueur a réussi le $i^{ème}$ lancer ».

On a $A = (A_1\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}\cap A_2\cap\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap A_3)$, et

$p(A) = p(A_1\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}) + p(\overline{A_1}\cap A_2\cap\overline{A_3}) + p(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap A_3)$.

Notons que les lancers sont deux à deux indépendants. On a alors :

$p(A) = p(A_1)p(\overline{A_2})p(\overline{A_3}) + p(\overline{A_1})p(A_2)p(\overline{A_3}) + p(\overline{A_1})p(\overline{A_2})p(A_3)$

$= p_1\times(1-p_2)\times(1-p_3) + (1-p_1)\times p_2\times(1-p_3) + (1-p_1)\times(1-p_2)\times p_3$

$= 0,4\times0,5\times0,3 + 0,6\times0,5\times0,3 + 0,6\times0,5\times0,7 = 0,36$.

2) Soit B : « le joueur ait réussi au moins un lancer parmi les trois ».

Son événement contraire est : « le joueur n'a réussi aucun lancer ».

On a : $\overline{B} = \overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$. Donc $p(\overline{B}) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) = 0,6\times0,5\times0,3 = 0,09$.

D'où $p(B) = 1-p(\overline{B}) = 1-0,09 = 0,91$.

Solution 55

A)1) Soit Ω l'univers des possibles au cours de cette épreuve. $\text{card}\Omega = C_{n+1}^1 C_{n+1}^1 = (n+1)^2$.

L'ensemble des valeurs prises par X est : X(Ω) = {-3,5 ; 1 ; 10}.

$p(X=-3,5) = \frac{n\times1+1\times n}{(n+1)^2} = \frac{2n}{(n+1)^2}$; $p(X=1) = \frac{n\times n}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$; $p(X=10) = \frac{1\times1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2}$

On résume ces résultats dans le tableau suivant :

x_i	-3,5	1	10
$p(X=x_i)$	$\frac{2n}{(n+1)^2}$	$\frac{n^2}{(n+1)^2}$	$\frac{1}{(n+1)^2}$

2) L'espérance de X est : $E(X) = -3,5\times\frac{2n}{(n+1)^2} + 1\times\frac{n^2}{(n+1)^2} + 10\times\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2-7n+10}{(n+1)^2}$.

D'où l'espérance mathématique de X est $E(X) = \frac{n^2-7n+10}{(n+1)^2}$.

B)1) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}-\{-1\}$, comme fonction rationnelle.

Pour tout réel x différent de -1, $f'(x) = \frac{9(x+1)(x-3)}{(x+1)^4}$.

Pour tout réel $x \neq -1$, le signe de f '(x) est celui de (x + 1)(x – 3), car $(x+1)^4 > 0$.

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $[3, +\infty[$. f est strictement décroissante sur]-1 , 3].

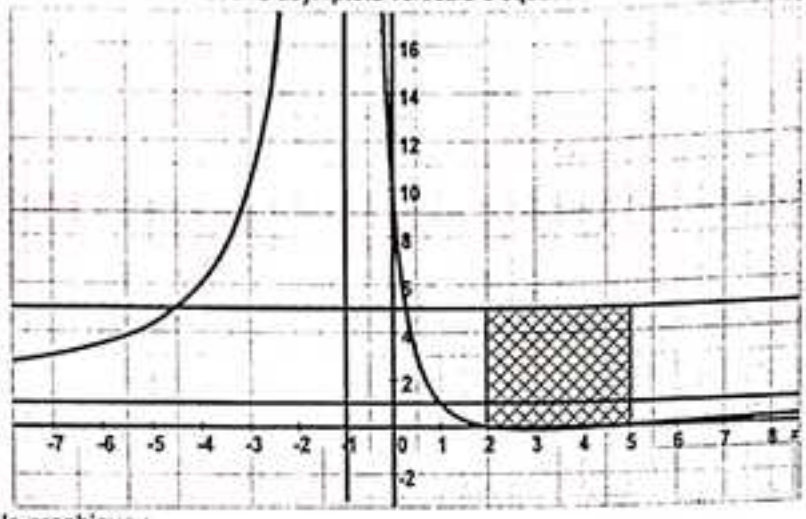
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$.

Scanned by CamScanner

D'où le tableau de variation de f qui suit :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
f'(x)		+	‖	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	$-0,125$	↗	1

2) Notons que la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation x = -1 et une asymptote horizontale d'équation y = 1.



3) En utilisant le graphique :

a) Le jeu est équitable si et seulement si E(X) = 0, c'est-à-dire f(n) = 0.

Or f(n) = 0 équivaut à n = 2 ou n = 5, alors le jeu est équitable si et seulement si n = 2 ou n = 5.

b) Le jeu est avantageux si et seulement si E(X) > 0, c'est-à-dire n = 0 ou n = 1 ou n est un entier strictement supérieur à 5.

4)a) f est continue sur $[0, +\infty[$, donc F est définie sur $[0, +\infty[$.

b) • Soit x différent de -1, $f(x)=\dfrac{x^2-7x+10}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2-9(x+1)+18}{(x+1)^2}=1-\dfrac{9}{x+1}+\dfrac{18}{(x+1)^2}$.

Par identification, a = 1, b = -9 et c = 18.

• $F(x)=\displaystyle\int_0^x\left(1-9\frac{1}{t+1}+18\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt=\left[t-9\ln(t+1)-\frac{18}{(t+1)}\right]_0^x=x-9\ln(x+1)-\frac{18}{x+1}+18.$

• F(0) = 0

c) Dans [2 , 5], la courbe de f est en dessous de la droite d'équation y = 5, donc l'aire cherchée est :

$A=\displaystyle\int_2^5(5-f(t))dt=[5x-F(x)]_2^5=(25-F(5))-(10-F(2))=(25-20+9\ln6)-(10-14+9\ln3)=9+9\ln2$ u.a.

Or le repère est orthogonal et l'unité graphique est 2cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées, Ainsi, 1 u.a. = 2×1 cm², donc A = 18 + 18ln2 cm².

Solution 56

• Il y a : 3! = 6 résultats du type (6, 2, 1), de même pour les couples (5, 3, 1) et (4, 3, 2).

Il y a 3 résultats du type (5, 2, 2), de même pour (4, 4, 1). Et il y a un résultat du type (3, 3, 3).

Il y a donc en tout 25 résultats donc le total est 9.

D'où la probabilité d'obtenir un total de 9 est : $\dfrac{25}{216}$, car cardΩ = 6^3 = 216.

• On procède de la même manière avec le total de 10, et on obtient 27 résultats possibles.

Et la probabilité d'obtenir 10 est : $\dfrac{27}{216}$.

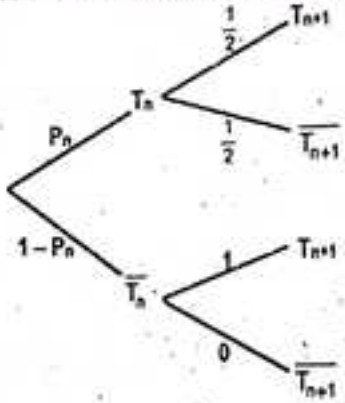
D'où la probabilité d'obtenir un total de 10 est supérieure à celle d'obtenir un total de 9.

Scanned by CamScanner

Or $p_B(A)p(B) = p_A(B)p(A)$ D'où $p(B) = \dfrac{p_A(B)p(A)}{p_B(A)} = \dfrac{0{,}25\times 0{,}8}{0{,}6}$. D'où $p(B) = \dfrac{1}{3}$.

Solution 61

On a l'arbre des probabilités :



1) $p(T_{n+1}) = p_{T_n}(T_{n+1})p(T_n) + p_{\overline{T_n}}(T_{n+1})p(\overline{T_n}) = \dfrac{1}{2}p_n + (1-p_n) = 1 - \dfrac{1}{2}p_n$.

2) On montre aisément que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $\dfrac{1}{3}$.

D'où $u_n = \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ et $p_n = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Solution 62

Notons H : « l'attaquant est hors-jeu »
D : « le juge lève son drapeau ».

$p(H) = 0{,}75$; $p(\overline{H}) = 0{,}25$; $p_H(D) = 0{,}95$; $p_H(\overline{D}) = 0{,}05$ et $p_{\overline{H}}(D) = 0{,}3$.

Le juge de ligne fait une erreur si et seulement s'il lève son drapeau et l'attaquant n'est pas hors-jeu ou l'attaquant est hors jeu et il ne lève pas son drapeau. C'est l'événement $(H\cap\overline{D})\cup(\overline{H}\cap D)$

$p\left[(H\cap\overline{D})\cup(\overline{H}\cap D)\right] = p(H)\times p_H(\overline{D}) + p(\overline{H})\times p_{\overline{H}}(D) = 0{,}05\times 0{,}75 + 0{,}3\times 0{,}25 = 0{,}1125$.

Solution 63

- Pour chaque pièce lancée, il y a deux issues : pile ou face.

Supposons que le succès soit l'événement : « avoir pile ».

Lancer 2n pièces, revient à réaliser un schéma de Bernoulli, de paramètres $\dfrac{1}{2}$ et 2n.

D'où la probabilité d'obtenir n fois pile est : $p_n = C_{2n}^n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{(2n)!}{n!\times n!}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$.

Ainsi, $p_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$. D'après l'approximation de l'énoncé, on a $(2n)! = 2\sqrt{\pi n}\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n} = 2\sqrt{\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^{2n}\times 2^{2n}$.

D'où $p_n = \dfrac{2\sqrt{\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^{2n}\times 2^{2n}}{2\pi n\left(\dfrac{n}{e}\right)^{2n}}\times\dfrac{1}{2^{2n}}$. C'est-à-dire $p_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

- D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$.

ALVAREZ

Scanned by CamScanner



Cette collection va à coup sûr marquer l'univers du support didactique au Cameroun, voire au-delà de nos frontières nationales.

Dès les premières pages, le ton est donné : le lecteur est embarqué dans le sillage d'une approche méthodologique et pédagogique atypique, pittoresque, très élaboré et accessible à tous.

Elèves, étudiants et même les enseignants y trouveront une véritable source d'inspiration et une meilleure couverture des programmes officiels. Nous ne saurions que trop leur recommander de faire de cette collection leurs nouveaux manuels de chevet.

Gilbert NKENG ESSOMBO

Professeur de classe exceptionnelle

Inspecteur Pédagogique National de Mathématiques.

Scanned by CamScanner