AL MOUFID

EN

MATHS

conçu pour réussir

MATHEMATIQUES 1SM

Tome 2

ANALYSE

Scanné avec CamScanner

AL MOUFID EN MATHÉMATIQUES

1ère Année Du Cycle De Baccalauréat

Sciences Mathématiques

TOME 2 : ANALYSE MATHÉMATIQUE

Hicham AJANA
Agrégatif en mathématiques
Enseignant aux classes BTS

Ahmed SANI
Inspecteur de mathématiques
Enseignant chercheur

Abderrahman AGOURRAM
Professeur principal
de l'enseignement secondaire qualifiant

Sous l'égide de

Abdeslem HAKKANI
Inspecteur principal de l'enseignement
secondaire qualifiant

Mohamed GHOUZAILI
Professeur principal
de l'enseignement secondaire qualifiant

Mostafa FAHMI
Inspecteur principal de l'enseignement
secondaire qualifiant

Mostafa JYAD
Professeur principal de l'enseignement
secondaire qualifiant

LIVRE DE L'ÉLÈVE

Scanné avec CamScanner

IFL
2020 edition

Dépol Légal : 2017MO5279
ISBN : 978-9954-613-55-9

Scanné avec CamScanner

AVANT-PROPOS

C'est dans le cadre de la réforme globale du système éducatif et selon les développements enregistrés par le curriculum, que ce manuel a été élaboré. Il s'adresse aux élèves du 1ère année du baccalauréat (Sciences Mathématiques) ; il accompagne ainsi une étape cruciale importante du cursus scolaire des élèves.

Cette étape se caractérise par :

- L'acquisition d'un bagage cognitif mathématique permettant l'amélioration de l'apprentissage ;
- L'émergence d'aptitudes et de capacités facilitant l'orientation vers des études appropriées meilleures.

L'élaboration de ce livre a donc tenu compte des considérations et caractéristiques suivantes :

- Maintien, organisation et perfectionnement des acquis.
- Introduction de chaque chapitre par des activités préparatoires qui incitent l'élève à l'adhésion et à l'engagement dans son apprentissage. Ces activités représentent un trait d'union entre les prérequis et les « nouveaux » savoirs et savoirs-faire.
- Consolidation des savoirs et savoirs-faire fondamentaux par le biais d'exemples et d'applications qui jalonnent la totalité de l'ouvrage et qui favorisent la fixation des concepts et leurs appréhension.
- Proposition d'exercices résolus et commentés qui conduisent à la confirmation des notions et leur assimilation à travers l'application fonctionnelle, au contrôle du degré d'acquisition et de la qualité de maîtrise aussi bien que l'entraînement à la formulation rigoureuse du raisonnement.
- Proposition d'exercices et problèmes nombreux, diversifiés et catégorisés comme suit :
  - Exercices d'application.
  - Exercices de perfectionnement.
  - Problème de synthèse.

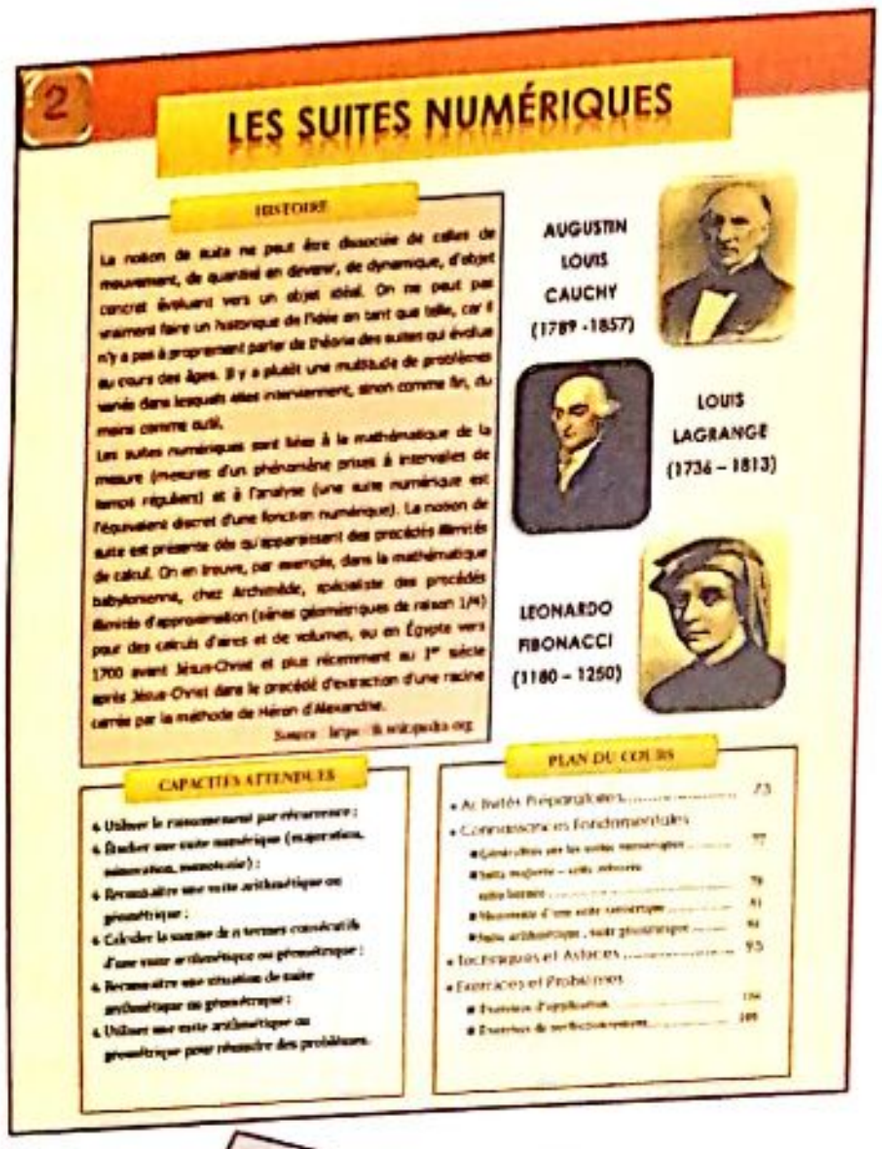
Les exercices et les problèmes proposés sont calibrés en fonction des capacités exigibles et sont classés selon le degré de difficulté. Dans tous les cas, ces exercices permettent de montrer la pertinence et l'efficacité des outils mathématiques dans des situations variées.

En conclusion, nous souhaitons que ce manuel soit un moyen d'éclairement pour les enseignants et un outil profitable aux élèves.

Finalement, le manuel scolaire reste un instrument pédagogique efficient que le professeur investit pour réaliser les ambitions auxquelles il aspire. C'est dans cette optique qu'il a été conçu.

Scanné avec CamScanner

COMMENT J'UTILISE CE LIVRE ?


2

LES SUITES NUMÉRIQUES

HISTOIRE

La notion de suite ne peut être dissociée de celles de mouvement, de quantité en devenir, de dynamique, d'objet concret évoluant vers un objet idéal. On ne peut pas vraiment faire un historique de l'idée en tant que telle, car il n'y a pas à proprement parler de théorie des suites qui évolue au cours des âges. Il y a plutôt une multitude de problèmes variés dans lesquels elles interviennent, soit comme fin, du moins comme outil.

Les suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse (une suite numérique est l'équivalent discret d'une fonction numérique). La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés itératifs de calcul. On en trouve, par exemple, dans la mathématique babylonienne, chez Archimède, spécialiste des procédés itératifs d'approximation (séries géométriques de raison 1/4) pour des calculs d'aires et de volumes, ou en Égypte vers 1700 avant Jésus-Christ et plus récemment au 1er siècle après Jésus-Christ dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie.

Source : fr.wikipedia.org

AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789 -1857)

LOUIS LAGRANGE (1736 – 1813)

LEONARDO FIBONACCI (1180 – 1250)

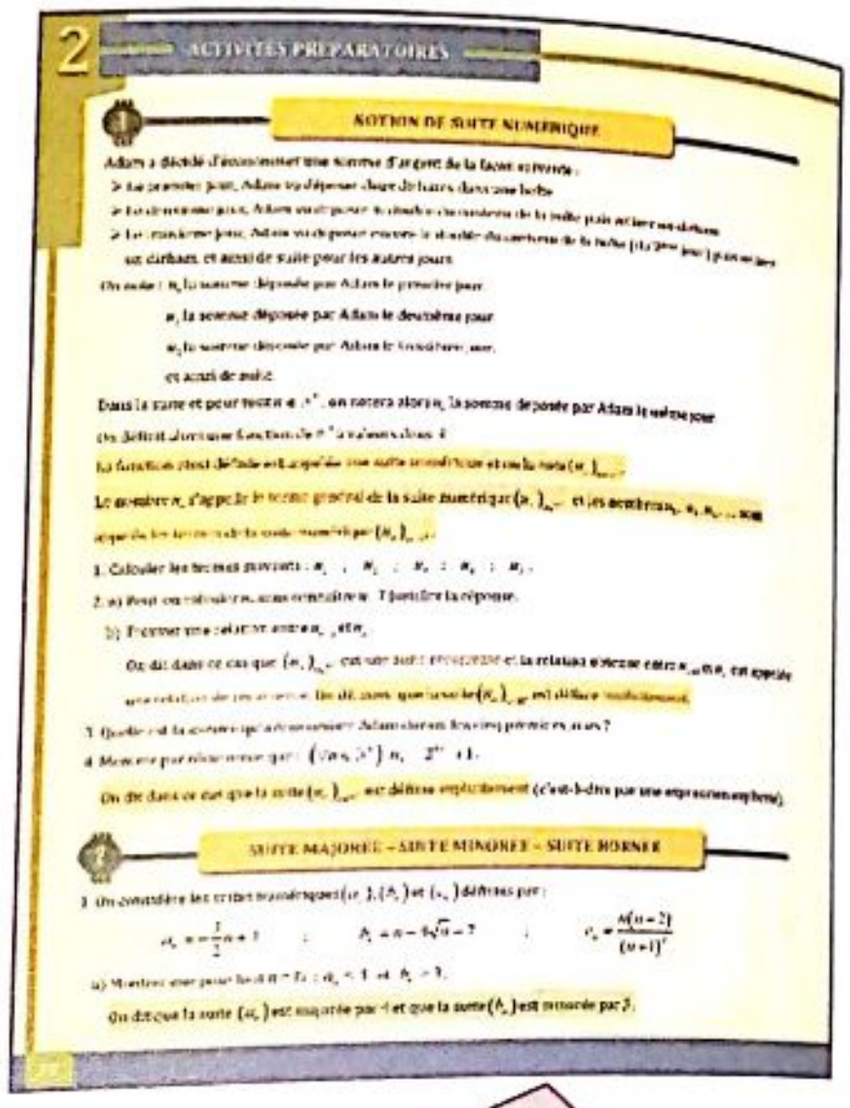
CAPACITÉS ATTENDUES

- Utiliser le raisonnement par récurrence ;
- Étudier une suite numérique (majoration, minoration, monotonie) ;
- Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique ;
- Calculer la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique ;
- Reconnaître une situation de suite arithmétique ou géométrique ;
- Utiliser une suite arithmétique ou géométrique pour résoudre des problèmes.

PLAN DU COURS

- Activités Préparatoires 73
- Connaissances Fondamentales
  - Généralités sur les suites numériques 77
  - Suite majorée – suite minorée – suite bornée 79
  - Monotonie d'une suite numérique 81
  - Suite arithmétique – suite géométrique 84
- Techniques et Astuces 93
- Exercices et Problèmes
  - Exercices d'application 104
  - Exercices de synthèse et d'approfondissement 109

Cette page présente les principaux titres, les capacités attendues et un aperçu historique sur des savants mathématiciens.


2 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

NOTION DE SUITE NUMÉRIQUE

Adam a décidé d'économiser une somme d'argent de la façon suivante :

- Le premier jour, Adam va déposer deux dirhams dans une boîte.
- Le deuxième jour, Adam va déposer la double de la somme déposée la veille pour acheter un cahier.
- Le troisième jour, Adam va déposer encore le double de la somme déposée la veille pour acheter un cartable, et ainsi de suite pour les autres jours.

On note : u_1 la somme déposée par Adam le premier jour ;

u_2 la somme déposée par Adam le deuxième jour ;

u_3 la somme déposée par Adam le troisième jour ;

et ainsi de suite.

Dans la suite et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera alors u_n la somme déposée par Adam le $n^{ème}$ jour.

On définit ainsi une fonction de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{R}$ par : $n \mapsto u(n) = u_n$.

La fonction u est définie sur $\mathbb{N}^*$ et appelée une suite numérique et on la note $(u_n)_{n\geq 1}$.

Le nombre u_n s'appelle le terme général de la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ et les nombres $u_1, u_2, u_3, \ldots$ sont appelés les termes de la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$.

1. Calculer les termes suivants : u_4 ; u_5 ; u_6 ; u_7 ; u_8.
2. a) Peut-on calculer u_{-1}, sans contexte ? Justifier la réponse.

   b) Exprimer une relation entre u_{n+1} et u_n.

   On dit dans ce cas que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite récurrente et la relation exprimée entre u_{n+1} et u_n est appelée une relation de récurrence. On dit aussi que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est définie implicitement.
3. Quelle est la somme que Adam devrait déposer le cinquième jour ?
4. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n = 2^{n+1} - 2$.

On dit dans ce cas que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est définie explicitement (c'est-à-dire par une expression en n).

SUITE MAJORÉE – SUITE MINORÉE – SUITE BORNÉE

1. On considère les suites numériques (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

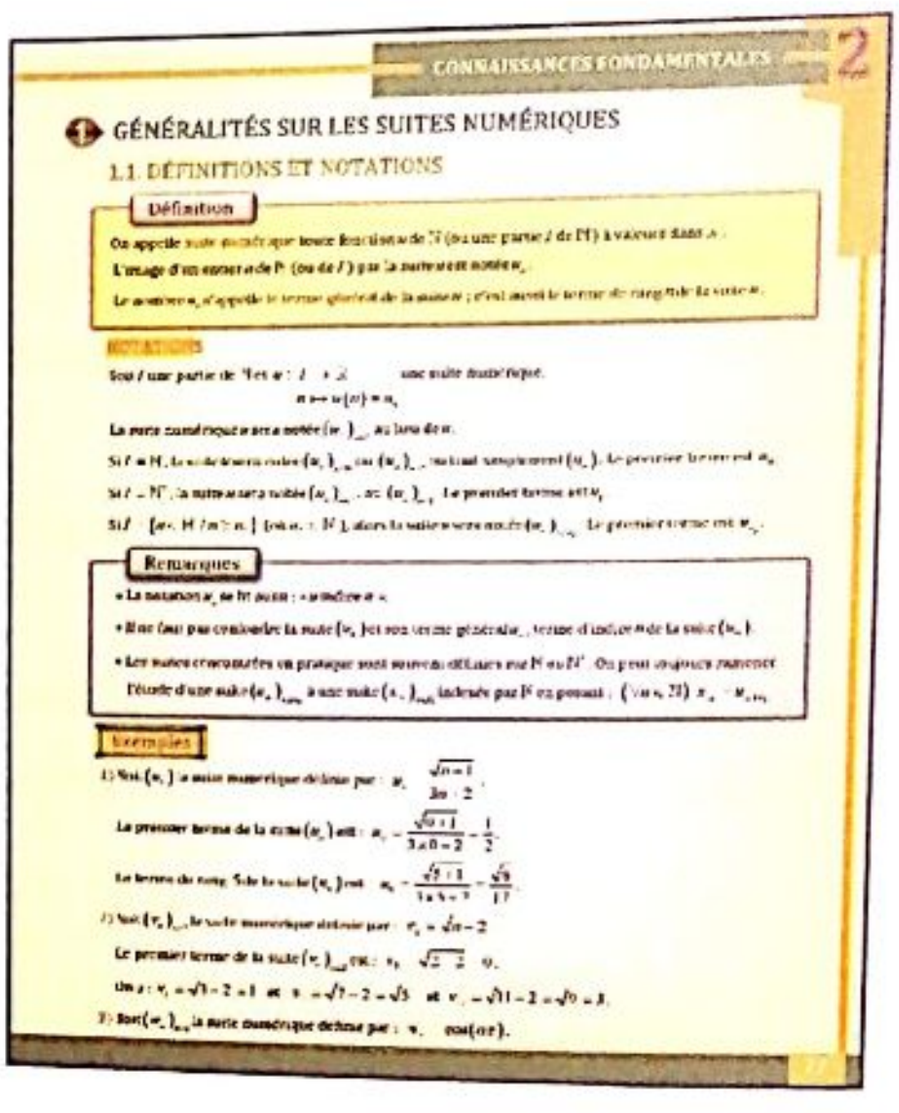
$u_n = \frac{1}{2}n + 1$; $v_n = n - 6\sqrt{n} + 7$; $w_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

a) Montrer que pour tout $n \geq 2$: $u_n < 3$ et $v_n > 3$.

On dit que la suite (u_n) est majorée par 3 et que la suite (v_n) est minorée par 3.

Ces activités facilitent la construction du savoir en se référant aux prérequis.

On trouve, à ce stade, les savoirs fondamentaux, les règles et les formules qui ont été établies.


CONNAISSANCES FONDAMENTALES 2

GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

1.1. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Définition

On appelle suite numérique toute fonction de $\mathbb{N}$ (ou une partie I de $\mathbb{N}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

L'image d'un entier n de $\mathbb{N}$ (ou de I) par la suite est notée u_n.

Le nombre u_n s'appelle le terme général de la suite ; c'est aussi le terme de rang n de la suite.

NOTATIONS

Soit I une partie de $\mathbb{N}$ et $u : I \to \mathbb{R}$ une suite numérique.

$n \mapsto u(n) = u_n$

La suite numérique sera notée $(u_n)_{n\in I}$ ou bien (u_n).

Si $I = \mathbb{N}$, la suite sera notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$; souvent simplement (u_n). Le premier terme est u_0.

Si $I = \mathbb{N}^*$, la suite sera notée $(u_n)_{n\geq 1}$ ou $(u_n)_{n>0}$. Le premier terme est u_1.

Si $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$, alors la suite sera notée $(u_n)_{n\geq n_0}$. Le premier terme est u_{n_0}.

Remarques

- La notation u_n se lit aussi : « u indice n ».
- Il ne faut pas confondre la suite (u_n) et son terme général u_n, terme d'indice n de la suite (u_n).
- Les suites rencontrées en pratique sont souvent définies sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$. On peut toujours ramener l'étude d'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ à une suite $(v_n)_{n\geq 0}$ indexée par $\mathbb{N}$ en posant : $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = u_{n+n_0}$.

Exemples

1) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{3n+2}$.

Le premier terme de la suite (u_n) est : $u_0 = \frac{\sqrt{0+1}}{3\times 0+2} = \frac{1}{2}$.

Le terme de rang 5 de la suite (u_n) est : $u_5 = \frac{\sqrt{5+1}}{3\times 5+2} = \frac{\sqrt{6}}{17}$.

2) Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $v_n = \sqrt{n-2}$.

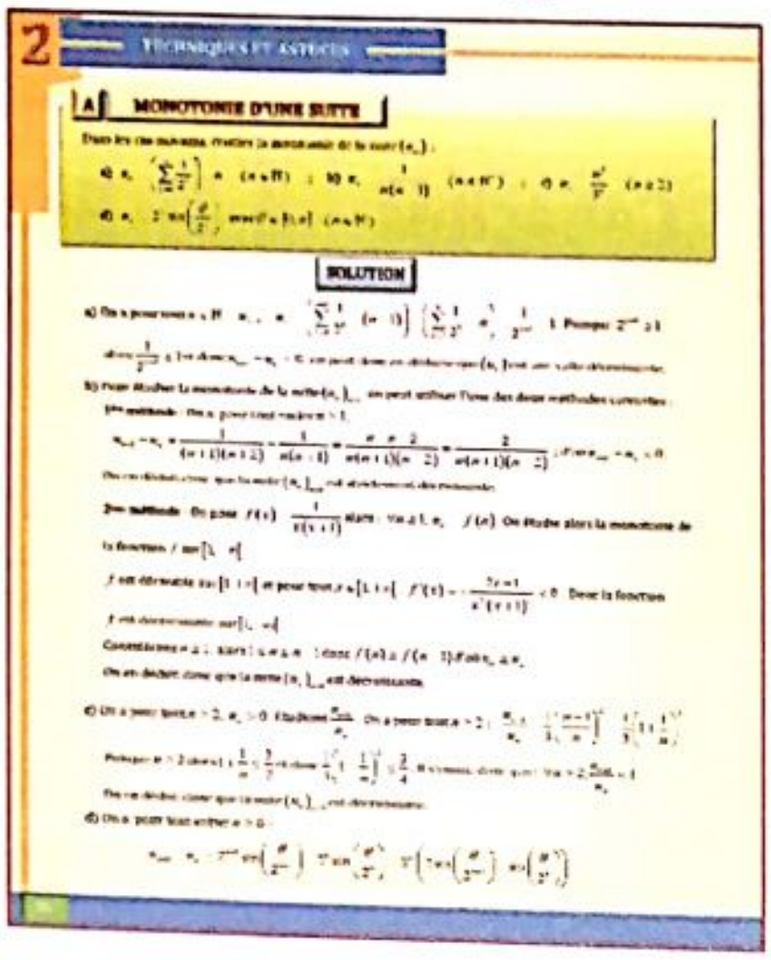
Le premier terme de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est : $v_1 = \sqrt{1-2} = \sqrt{-1}$.

On a : $v_3 = \sqrt{3-2} = 1$ et $v_7 = \sqrt{7-2} = \sqrt{5}$ et $v_{11} = \sqrt{11-2} = \sqrt{9} = 3$.

3) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $w_n = \cos(n\pi)$.

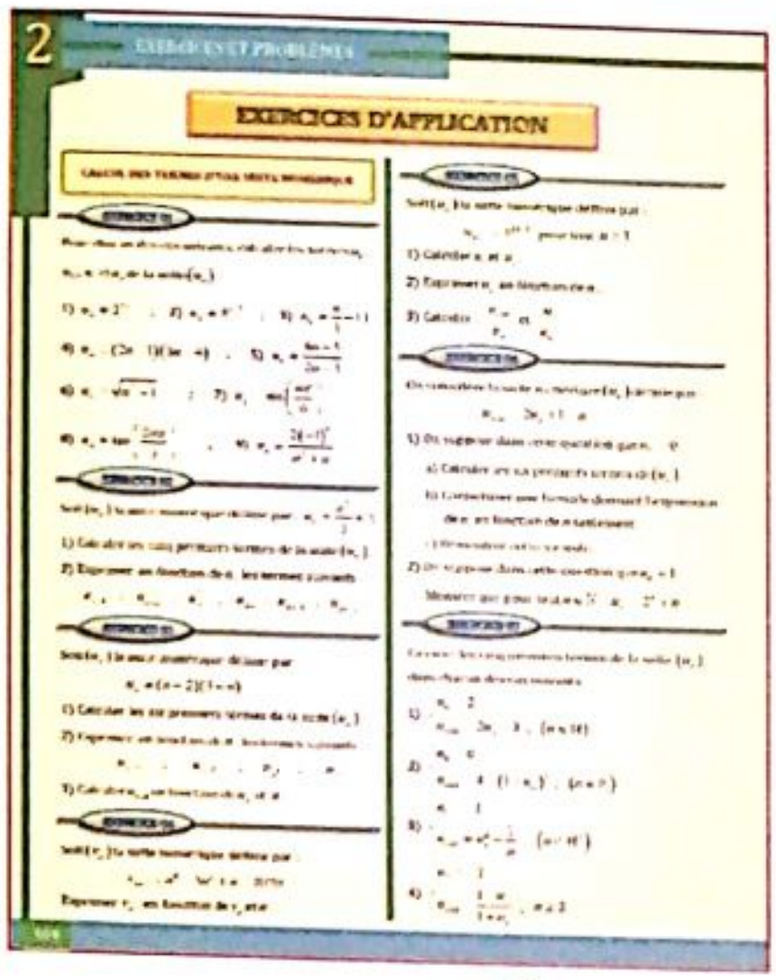
Scanné avec CamScanner

Méthodes Et Astuces
Ce type d'exercices permet de consolider le savoir, de l'investir et de s'exercer au raisonnement.

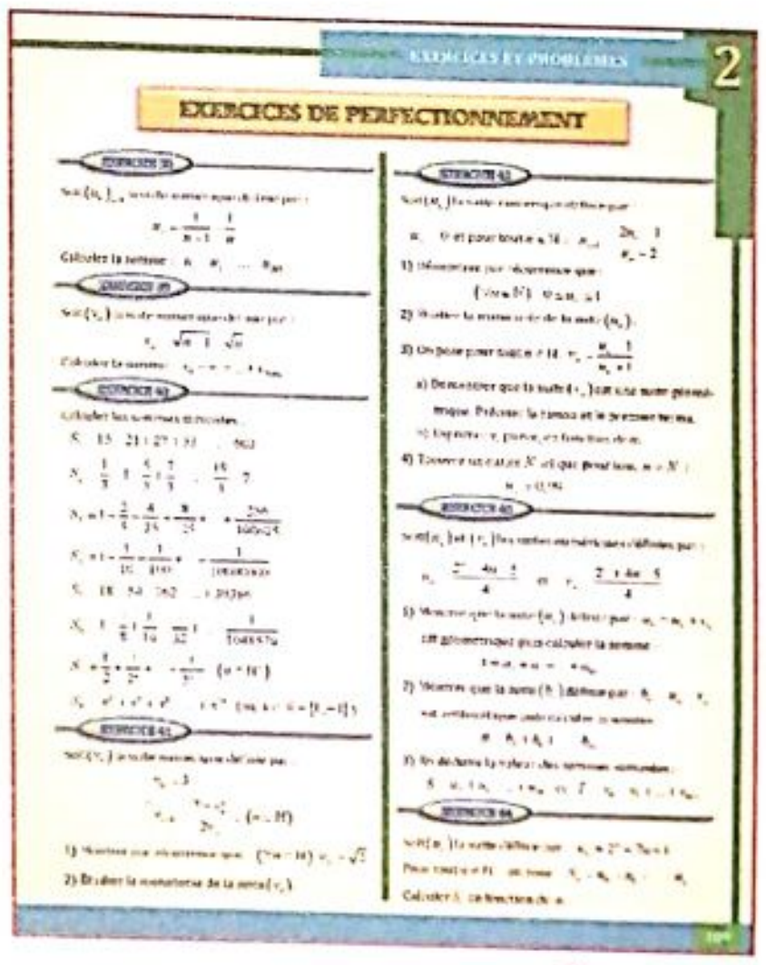

2 TECHNIQUES ET ASTUCES

A MONOTONIE D'UNE SUITE

SOLUTION


2 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICES D'APPLICATION


2 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

Exercices d'Application
Exercices d'évaluation et d'application immédiate des apprentissages.

Exercices de Perfectionnement
Ces exercices permettent l'amélioration des apprentissages et leur évolution vers la maîtrise, la perfection et l'enrichissement des acquis.

Scanné avec CamScanner

PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DE LA PREMIÈRE ANNÉE DU CYCLE DU BACCALAURÉAT SCIENCES MATHÉMATIQUES

Contenu Du Programme	Capacités Attendues	Recommandations Pédagogiques
1 Généralités sur les fonctions numériques (rappel et compléments)		
• Fonction majorée ; fonction minorée ; fonctions bornée ; fonction périodique ; • Comparaison de deux fonctions, interprétation géométrique ; • Extrémums d'une fonction numérique ; • Monotonie d'une fonction numérique ; • Composée de deux fonctions numériques ; • Monotonie de la composée de deux fonctions numériques monotones ; • Représentation graphique des fonctions : $x \mapsto \sqrt{x+a}$; $x \mapsto ax^3$ $x \mapsto E(x)$	• Comparer deux expressions en utilisant différentes techniques ; • Déduire les variations ou les extrémums ou le signe d'une fonction à partir de sa représentation graphique ou à partir de son tableau de variation ; • Déterminer les variations des fonctions $f+\lambda$ et λf à partir des variations de la fonction f ; • Déterminer les variations de la fonction $g\,o\,f$ à partir des variations des fonctions f et g ; • Discuter les solutions d'une équation du type $f(x)=c$ et $f(x)=g(x)$ à partir de la représentation graphique ; • Étude d'équations et d'inéquations en utilisant et en représentant les fonctions.	• On présentera ce chapitre à partir d'exemples de révisions avec quelques compléments • On construira les courbes représentatives des fonctions de références qui ont été étudiées ainsi que les fonctions : $x \mapsto \sqrt{x+a}$; $x \mapsto ax^3$ $x \mapsto E(x)$ et les fonctions de la forme $f+\lambda$ de la même manière que celle utilisée au niveau du tronc commun. • Les fonctions du type $x \mapsto E(f(x))$ et du type $x \mapsto f(E(x))$ sont hors programme ; • On habituera les élèves à déterminer les variations d'une fonction numérique à partir de sa courbe représentative tout en accordant de l'importance à la construction des courbes ; • On traitera la résolution graphique d'équations et d'inéquations de la forme : $f(x) \le c$; $f(x) \le g(x)$ $f(x)=g(x)$; $f(x)<g(x)$

Scanné avec CamScanner

		• On utilisera dans la limite de ce qui est disponible les calculatrices et les logiciels pour étudier des fonctions ; • Il est souhaitable de traiter des situations choisies à partir des disciplines de la spécialité.

2	Généralités sur les suites numériques	
• Suites numériques ; • Suites récurrentes ; • Suites majorées, suites minorées, suites bornées ; • Monotonie d'une suite ; • Suites arithmétiques ; • Suites géométriques.	• Utiliser le raisonnement par récurrence ; • Étudier une suite numérique (majoration, minoration, monotonie) ; • Reconnaitre une suite arithmétique ou géométrique ; • Calculer la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique ; • Reconnaitre une situation de suite arithmétique ou géométrique ; • Utiliser une suite arithmétique ou géométrique pour résoudre des problèmes	• On pourra approcher la notion de suite récurrente à travers des situations issues des différentes disciplines ; • La leçon des suites numériques constituera pour les élèves une occasion pour utiliser l'outil informatique ; • On saisira cette occasion pour utiliser le raisonnement par récurrence ; • On traitera les suites récurrentes sans excès.

3	Trigonométrie	
• Formules de transformation ; • Transformation de l'expression : $a\cos x + b\sin x$	• Maitriser les différentes formules de transformation ; • Résoudre les équations et les inéquations trigonométriques se ramenant à la résolution d'équations et d'inéquations fondamentales ; • Représenter et lire les solutions d'une équation et d' une inéquation sur le cercle trigonométrique.	• On optera pour la simplicité lors de la présentation de ce chapitre en utilisant toute technique convenable au niveau des élèves ; • On utilisera le cercle trigonométrique pour résoudre une inéquation simple sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Scanné avec CamScanner

4 Limite d'une fonction numérique

• Limite finie en un point ; limite infinie en un point ; limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$; limite infinie en $+\infty$ et en $-\infty$ • Limite à gauche, limite à droite ; • Opérations sur les limites ; • Limites de fonction polynôme, de fonction rationnelle et limites de fonction de la forme $\sqrt{f}$ où f est une fonction usuelle ; • Les limites : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ • Limites et ordre.	• Calculer les limites des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles et des fonctions irrationnelles ; • Calculer les limites de fonctions trigonométriques simples en utilisant les limites usuelles ; • Résoudre des inéquations du type $\lvert f(x)-\ell\rvert<\varepsilon$ et du type $f(x)>A$ pour montrer que $f(x)$ tend vers ℓ ou vers $+\infty$ dans des situations simples.	• On approchera la notion de limite d'une manière intuitive à partir du « comportement » des fonctions : $x\mapsto x^2$; $x\mapsto x^3$ $x\mapsto\sqrt{x}$; $x\mapsto x^n$ et leurs inverses au voisinage de 0 et de $+\infty$ et de $-\infty$ et on admettra ces limites ; • On se basera sur les propriétés de l'ordre dans $\mathbb{R}$ pour calculer les limites de fonctions simples vérifiant : ▪ $\lvert f(x)-\ell\rvert\le u(x)$ où u est une fonction dont la limite est 0 ; ▪ $f(x)\ge u(x)$ où u est une fonction dont la limite est $+\infty$; ▪ $f(x)\le u(x)$ où u est une fonction dont la limite est $-\infty$; • On habituera les élèves à lever les indéterminations ; • On se limitera, dans l'utilisation de la définition de la limite, à démontrer quelques propriétés signalées au programme et dans la résolution de quelques exercices pour se familiariser tout simplement avec la définition.

5 Dérivation

• Dérivabilité en un point ; nombre dérivé ; interprétation géométrique ; tangente à une courbe ; approximation d'une fonction dérivable par une fonction affine en un point ; • Dérivabilité à droite ; dérivabilité à gauche ; interprétation géométrique et, demi- tangente ; tangente ou demi-tangente verticale ; point anguleux ;	• Approcher une fonction au voisinage d'un point ; • Reconnaitre que le nombre dérivé de la fonction en x_0 est le coefficient directeur de la tangente à cette courbe au point d'abscisse x_0.	• Parmi les exemples à traiter, on approchera les fonctions : $h\mapsto(1+h)^2$; $h\mapsto(1+h)^3$ $h\mapsto\sqrt{1+h}$; $h\mapsto\dfrac{1}{1+h}$ par des fonctions affines au voisinage de 0.

Scanné avec CamScanner

• Dérivabilité sur un intervalle ; dérivée première ; dérivée seconde ; dérivées successives ; • Dérivation de $f+g$, λf , $f\times g$, $\frac{1}{f}$, $\frac{f}{g}$, $f^n\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$, $f(ax+b)$, $\sqrt{f}$ • Équation différentielle : $y''+\omega^2 y=0$	• Reconnaitre les dérivées des fonctions de référence ; • Maitriser les techniques de calcul de la dérivée de fonctions ; • Déterminer une équation de la tangente à une courbe en un point et construire cette tangente ; • Déterminer la monotonie d'une fonction à partir de l'étude du signe de sa dérivée ; • Déterminer le signe d'une fonction à partir de son tableau de variation ou de sa courbe représentative ; • Résoudre des problèmes concernant des valeurs minimales et des valeurs maximales. • Appliquer la dérivation dans le calcul de certaines limites.	• On utilisera $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ pour déterminer la dérivée de chacune des fonctions $x\mapsto \sin x$ et $x\mapsto \cos x$ • On démontrera les résultats : ▪ Si f est une fonction constante sur in intervalle I alors f' est nulle sur I . ▪ Si f est une fonction dérivable et croissante sur un intervalle I alors f' est positive sur I . ▪ Si f est une fonction dérivable et décroissante sur un intervalle I alors f' est négative sur I . • On admettra les propriétés réciproques dans le cas où f est dérivable ; • On admettra la solution générale de l'équation différentielle : $y''+\omega^2 y=0$

6	**Représentation graphique d'une fonction numérique**	
• Branches infinies ; droites asymptotes ; directions asymptotiques ; • Point d'inflexion ; concavité de la courbe d'une fonction ; • Éléments de symétrie de la courbe d'une fonction.	• Résoudre graphiquement des équations et des inéquations ; • Utiliser la périodicité et les éléments de symétrie d'une courbe pour réduire le domaine d'étude d'une fonction ; • Utiliser le signe de la dérivée seconde pour étudier la concavité d'une courbe et déterminer ses points d'inflexion ; • Étudier et représenter des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles et des fonctions irrationnelles. • Étudier et représenter des fonctions trigonométriques simples.	• On étudiera des fonctions dont le calcul et le signe de la dérivée ne présentent pas beaucoup de difficultés.

Scanné avec CamScanner

1

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

HISTOIRE

La définition du concept de fonction a évolué depuis son introduction par Leibniz à la fin du XVII^{e} siècle. Il s'agissait alors d'associer un objet à chaque point d'une courbe, par exemple la tangente. En identifiant chaque point de la courbe avec son ordonnée, Jean Bernoulli puis Euler redéfinissent ensuite ce terme pour décrire une expression composée d'une variable et d'éventuels paramètres constants.
Les opérations utilisées comprennent non seulement les opérations algébriques élémentaires, les séries et produits infinis mais aussi l'exponentielle, le logarithme et les lignes trigonométriques, considérés comme des opérations transcendantes.
Le lien entre l'expression d'une fonction et sa courbe représentative conduit Euler à élargir la notion en admettant des définitions par morceaux puis des courbes qui ne peuvent être obtenues par des expressions analytiques.

Source : https://fr.wikipedia.org



G. WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716)



JACQUES BERNOULLI (1759 – 1789)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Comparer deux expressions en utilisant différentes techniques ;
- Déduire les variations ou les extrémums ou le signe d'une fonction à partir de son graphe ou à partir de son tableau de variations ;
- Déterminer les variations des fonctions $f + \lambda$ et λf à partir des variations de la fonction f ;
- Déterminer les variations de la fonction $g \circ f$ à partir des variations des fonctions f et g ;
- Discuter les solutions d'une équation de type $f(x) = c$ et $f(x) = g(x)$ à partir de graphe.
- Étude d'équations et d'inéquations en utilisant et en représentant les fonctions.

PLAN DU COURS

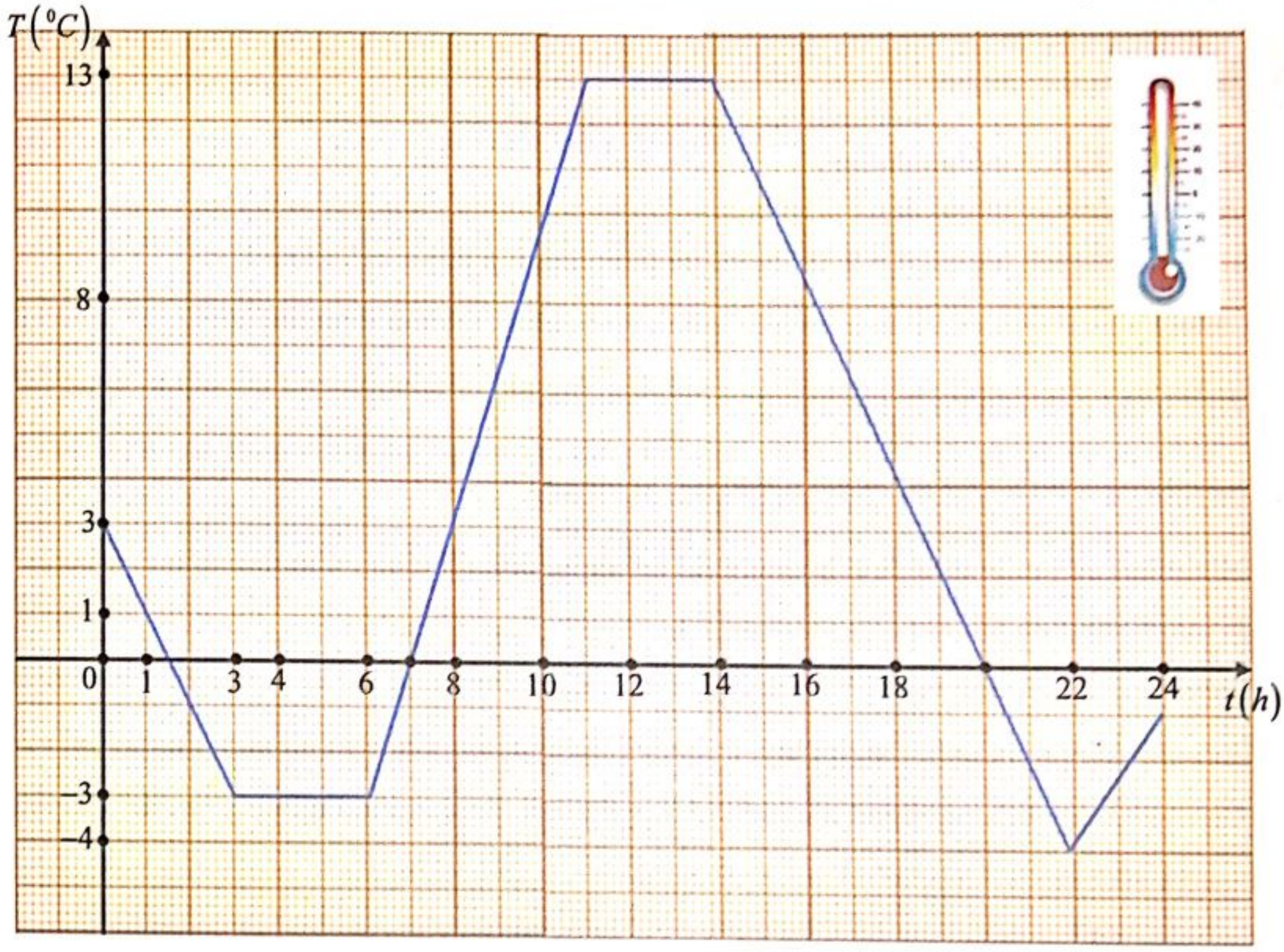
- Activités Préparatoires..... 11
- Connaissances Fondamentales
  - Ensemble de définition – Parité d'une fonction.... 18
  - Monotonie d'une fonction numérique..... 20
  - Comparaison de deux fonctions 24
  - Fonction majorée – minorée – bornée 27
  - Extremums d'une fonction numérique..... 28
  - Représentation graphique de quelques fonctions usuelles..... 30
  - Composée de deux fonctions numériques..... 36
  - Fonction périodique..... 39
- Techniques et Astuces 43
- Exercices et Problèmes
  - Exercices d'application..... 53
  - Exercices de perfectionnement..... 64

Scanné avec CamScanner

1 FONCTION – IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION

Le graphe ci-dessous présente la température relevée à une région montagneuse par une journée d'hiver.

La température T (en ^0C) est une fonction du temps t (en h). On note f cette fonction et $\mathscr{C}_f$ son graphe.



1. a) Déterminer les périodes où la température est croissante, décroissante ou constante.

   b) Déterminer les températures minimale et maximale et indiquer l'heure ou la période correspondante.

   c) Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;24]$.

   d) Déterminer le signe de la fonction f sur l'intervalle $[6;22]$.

2. Soit S_1 l'ensemble solution de l'inéquation $f(t) \leq 0$ sur $[0;24]$ et S_2 l'ensemble solution de l'inéquation $f(t) \geq 0$ sur $[0;24]$.

   Déterminer les ensembles S_1 et S_2 puis interpréter les résultats obtenus.

3. a) Déterminer les températures indiquées par le thermomètre dans les périodes $[8;11]$ et $[14;19]$.

   b) Déterminer les images des intervalles temporels suivants par la fonction f puis interpréter les résultats obtenus :

$$I_1 = [8;11] \quad ; \quad I_2 = [14;19] \quad ; \quad I_3 = [0;7] \quad ; \quad I_4 = [0;24]$$

Scanné avec CamScanner

1 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

4. a) Déterminer graphiquement les temps où le degré de température vaut $3\,^{0}C$.

b) Soit T_0 un degré de température tel que : $-3 < T_0 < 13$.

Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(t) = T_0$ puis donner une interprétation des résultats obtenus.

2 PARABOLE - HYPERBOLE

Les parties A) et B) sont indépendantes :

A) Fonction trinôme du second degré - Parabole :

1. Soit a, b et c des réels tels que $a \neq 0$. On considère la fonction : $p : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

On note (P) la parabole représentative de la fonction p dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $p(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

b) On pose : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$. Calculer $p(\alpha)$ en fonction de a, b et c.

c) Déterminer suivant le signe de a, la nature de l'extremum de la fonction p puis déterminer le couple de coordonnées du sommet de la parabole (P).

d) Dresser suivant le signe de a, le tableau de variations de la fonction p.

e) Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions : $p_1 : x \mapsto x^2 - 3x - 4$ et $p_2 : x \mapsto -2x^2 + 3x + 2$.

2. On considère la fonction numérique $f : x \mapsto x^2 - 3x - 4$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Calculer $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$, $f(0)$, $f(-1)$ et $f(4)$ puis construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) Résoudre graphiquement chacune des inéquations : $(I_1) : f(x) \geq 0$; $(I_2) : f(x) < 0$.

c) Déterminer les images des intervalles suivants par la fonction f :

$I_1 =]-\infty;\dfrac{3}{2}]$; $I_2 = [\dfrac{3}{2};+\infty[$; $I_3 = [2;3]$; $I_4 = [-3;0]$; $I_5 = \mathbb{R}$

3. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 - 3|x| - 4$ et soit $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative.

a) Étudier la parité de la fonction g.

b) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $g(x) = f(x)$.

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ dans le repère précédent puis discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation : $x^2 - 3|x| - 4 - m = 0$.

d) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -x^2 + 3|x| + 4$ et soit $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative.

Tracer la courbe $\mathscr{C}_h$ dans le repère précédent en justifiant les étapes utilisées.

Scanné avec CamScanner

B) Fonction homographique - Hyperbole :

1. Soit a, b et c des réels tels que $c(ad-bc)\neq 0$ et on considère la fonction : $h : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

On note (H) l'hyperbole représentative de la fonction h dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}-\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$: $h(x)=\beta+\dfrac{\gamma}{x-\alpha}$ où : $\alpha=-\dfrac{d}{c}$ et $\beta=\dfrac{a}{c}$ et $\gamma=-\dfrac{1}{c^2}(ad-bc)$.

b) On pose $\Delta=ad-bc$. Soit x_1 et x_2 deux éléments distincts de $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

Montrer que : $\dfrac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{\Delta}{(cx_1+d)(cx_2+d)}$.

c) En déduire suivant les valeurs de Δ, les variations de h sur chacun des intervalles $]-\infty;\alpha[$ et $]\alpha;+\infty[$.

d) Donner les coordonnées du point Ω centre de (H) et les équations cartésiennes de ses asymptotes.

e) Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions : $h_1 : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x+1}$ et $h_2 : x \mapsto \dfrac{3x+1}{x-2}$.

2. On considère la fonction numérique $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Calculer $f(0)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(2)$, $f(-2)$, $f(3)$ et $f(-3)$ puis construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) Résoudre graphiquement les inéquations suivantes : $(I_1) : f(x)\geq 0$; $(I_2) : f(x)<0$.

c) Déterminer les images des intervalles suivants par la fonction f :

$I_1=]1;+\infty[$; $I_2=]-\infty;1[$; $I_3=]1;2[$; $I_4=[4;7]$; $I_5=]-2;1[$

d) On considère la fonction numérique k définie par : $k(x)=\dfrac{x}{|x|-1}$

d1) Déterminer D_k l'ensemble de définition de la fonction k puis étudier sa parité.

d2) Tracer la courbe $\mathscr{C}_k$ de la fonction k dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

d3) Dresser le tableau de variations de la fonction k.

3 COMPARAISON DE DEUX FONCTIONS NUMÉRIQUES

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-5x+4$ et $g(x)=-2x^2+7x-5$.

Soit (P) et (P') les paraboles représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer le sommet de la parabole (P) et donner le tableau de variations de f.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

3. a) Montrer que (P) et (P') se coupent en deux points A et B que l'on déterminera.

Scanné avec CamScanner

b) Tracer (P) et (P') puis en déduire la position relative des courbes (P) et (P').

4. Déterminer graphiquement le signe de la fonction f.

4 FONCTION MAJORÉE, MINORÉE ET BORNÉE

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$.

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)\geq\dfrac{1}{2}$.

On dit que la fonction f est minorée sur $\mathbb{R}$ par le nombre $\dfrac{1}{2}$.

2. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)\leq 2$.

On dit que la fonction f est majorée sur $\mathbb{R}$ par le nombre 2.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\dfrac{1}{2}\leq f(x)\leq 2$. On dit que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$ par 2 et $\dfrac{1}{2}$.

GÉNÉRALISATION

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble D.

- On dit que f est minorée sur D s'il existe $m\in\mathbb{R}$ tel que : $(\forall x\in D)\ f(x)\geq m$.
- On dit que f est majorée sur D s'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que : $(\forall x\in D)\ f(x)\leq M$.
- On dit que f est bornée sur D si elle est à la fois majorée et minorée.

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x)=\sqrt{x+1}+x$.

a) Montrer que la fonction g est minorée.

b) Montrer par l'absurde que la fonction g n'est pas majorée.

4. Montrer que la fonction h définie par : $h(x)=2\sin^2 x-5\cos x+1$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

5 REPRÉSENTATION DES FONCTIONS $x\mapsto ax^3$ ET $x\mapsto\sqrt{x+a}$

Les parties A), B) et C) sont indépendantes :

A) La fonction $x\mapsto ax^3$: $(a\in\mathbb{R}^*)$

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3$.

a) Montrer que la fonction f est impaire.

b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variations.

c) Calculer : $f(0)$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $f(1)$; $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$; $f(2)$; $f\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

d) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Scanné avec CamScanner

2. On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2x^3$ et $h(x)=-2x^3$.

a) Montrer que les fonctions f et g ont le même sens de monotonie et que f et h ont des sens de monotonie contraires.

b) Montrer que si $M(x;y)$ est un point de $\mathscr{C}_f$, alors $M'(x;2y)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_g$ et $M''(x;-2y)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_h$.

c) Tracer $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

B) La fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$: $(a \in \mathbb{R})$

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\sqrt{x}$.

a) Vérifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) Calculer $f(0), f(1), f(4)$ et $f(9)$ puis tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2. On considère la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{x+2}$.

a) Vérifier que la fonction g est strictement croissante sur son domaine de définition.

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_g$ de g est l'image de la courbe $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-2\vec{i}$.

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

C) Résolution graphique :

1. En utilisant deux fonctions convenables, résoudre graphiquement l'équation suivante :

$$x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[\; ; \; (2x-1)\sqrt{x+3}=x+1$$

2. En utilisant deux fonctions convenables, résoudre graphiquement l'inéquation suivante :

$$x \in \mathbb{R}^+ \; ; \; 4x^6-x-3 \geq 0$$

6 COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS NUMÉRIQUES

A) Composée de deux fonctions numériques :

Un point P se déplace dans le sens direct sur le cercle trigonométrique (U) et fait un tour en 150 secondes.

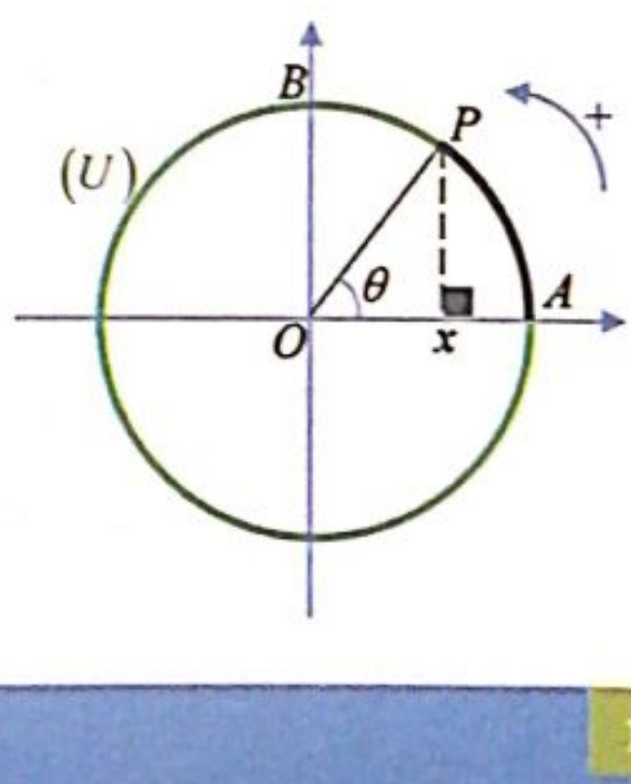
À l'instant $t=0$, le point mobile P est en A.

On suppose que la vitesse angulaire du point P est constante et vaut $0,25$ tour par seconde.

Soit θ la mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OP}}\right)$ en radian

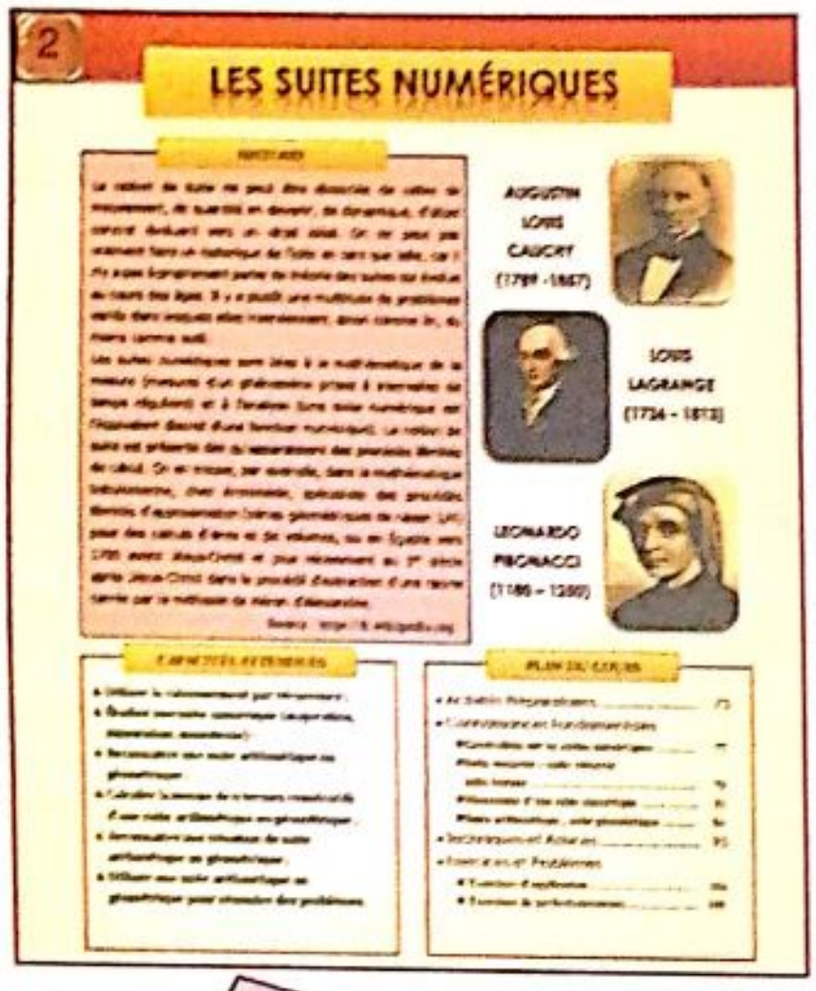
et soit x l'abscisse du point P dans le repère $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$.

Le but de cette activité est de trouver la relation liant x au temps t écoulé par le point P lorsqu'il parcourt une distance égale à la longueur de l'arc $\widehat{AP}$.

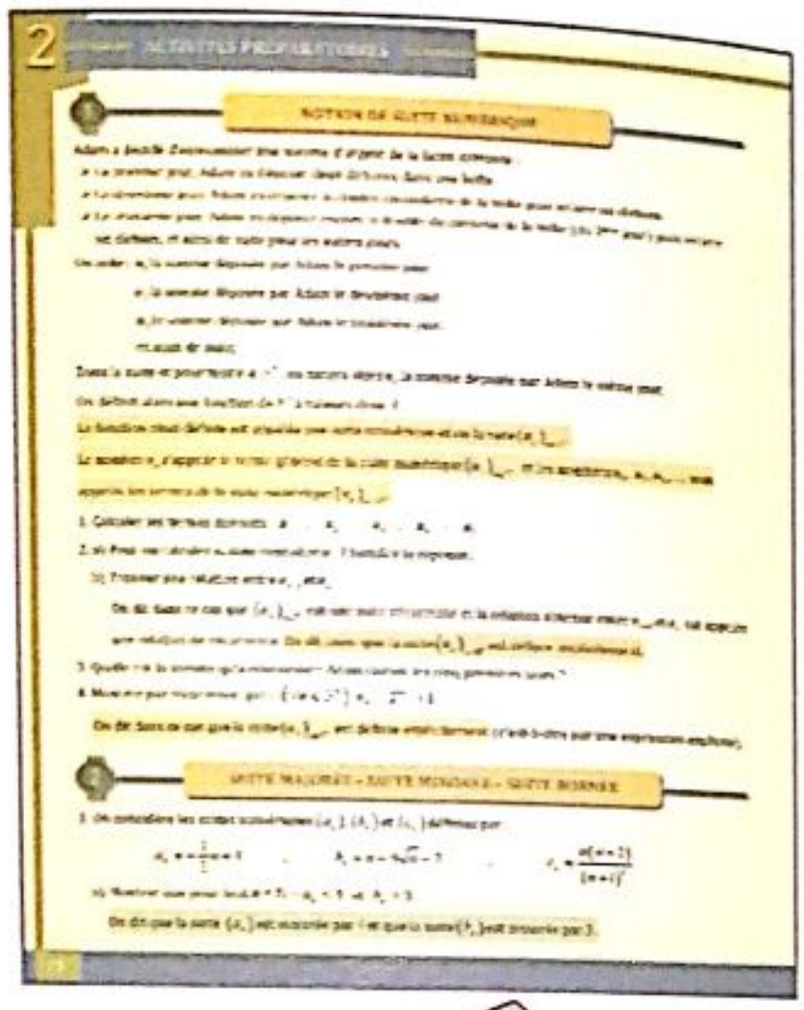


Scanné avec CamScanner

COMMENT J'UTILISE CE LIVRE ?

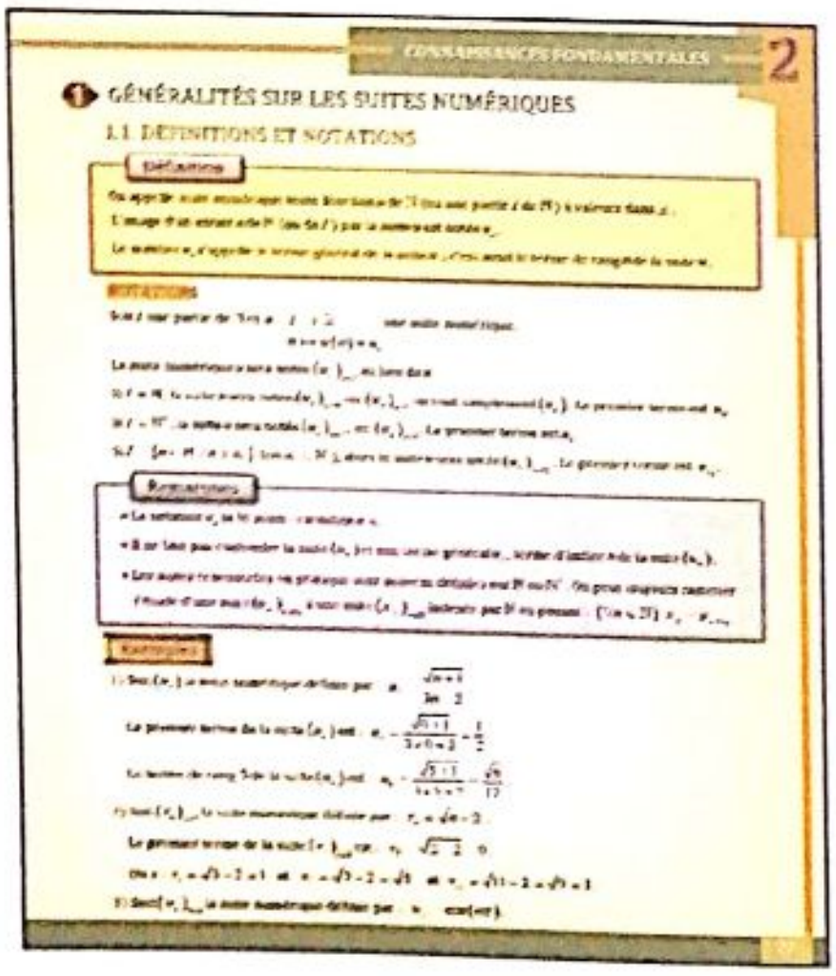


Cette page présente les principaux titres, les capacités attendues et un aperçu historique sur des savants mathématiciens.



Ces activités facilitent la construction du savoir en se référant aux prérequis.

On trouve, à ce stade, les savoirs fondamentaux, les règles et les formules qui ont été établies.



Scanné avec CamScanner

3. a) Soit x un élément de l'intervalle $[2;3[$. Comparer $E(x+2)$ et $E(x)+2$ puis $E(x-3)$ et $E(x)-3$.

b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall p \in \mathbb{Z})\ \ E(x+p)=E(x)+p$.

4. La fonction numérique f définie par : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto E(x)$

est appelée fonction partie entière.

a) Soit $k \in \mathbb{Z}$ et on considère l'intervalle $I_k = [k;k+1[$. Déterminer $E(x)$ pour tout $x \in I_k$.

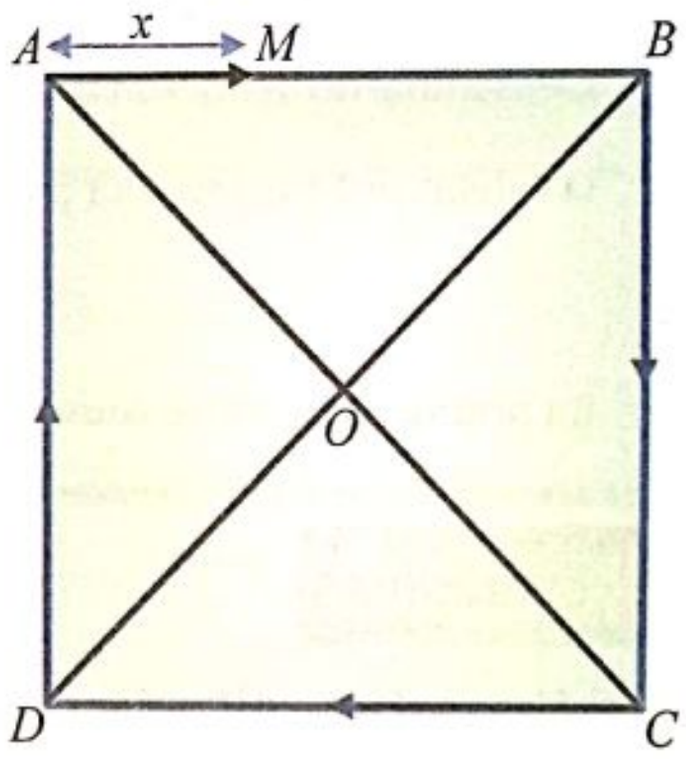
b) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $I = [-8;8[$ dans un repère orthonormé.

8 FONCTION PÉRIODIQUE

Soit $ABCD$ un carré de centre O et de longueur de côté égale à 2.

Soit M un point mobile se déplaçant sur le périmètre de ce carré à partir de A. (Voir figure en-dessous).

Soit x la distance parcourue par le point M à partir du point A.



On pose : $f(x)=OM^2$.

1. a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

b) Calculer : $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(8)$.

c) Sans calculer l'expression de $f(x)$, donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$.

2. a) On suppose que le point M a parcouru une distance égale à x et soit M' le lieu de ce point lorsque M parcourt une distance égale à $x+2$.

Montrer que les triangles OAM et OBM' sont isométriques (prendre sur la figure $0 \leq x < 2$).

b) En déduire que $f(x+2)=f(x)$ puis donner une explication de ce résultat.

On dit que f est une fonction périodique de période 2.

3. On pose : $I_0 = [0;2]$.

a) Montrer que : $(\forall x \in I_0)\ \ f(x)=x^2-2x+2$.

b) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle I_0 dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

c) Montrer par récurrence que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall k \in \mathbb{N})\ f(x+2k)=f(x)$.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose : $E\left(\frac{x}{2}\right)=n$. Calculer $f(x)$ en fonction de x et n.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $I_k = [2k;2(k+1)[$ et soit $\mathscr{C}_k$ la courbe de f sur l'intervalle I_k.

Montrer que la courbe $\mathscr{C}_k$ est l'image de la courbe $\mathscr{C}_0$ par la translation de vecteur $2k\vec{i}$

puis représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$.

Scanné avec CamScanner

1 ENSEMBLE DE DÉFINITION – PARITÉ D'UNE FONCTION

1.1. ENSEMBLE DE DÉFINITION D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

Une fonction f définie d'un ensemble A dans $\mathbb{R}$ est la donnée pour chaque élément de A d'un unique élément y de $\mathbb{R}$ appelé image de x. On note alors $y = f(x)$.

L'ensemble A, des nombres réels qui possèdent une image par f, est appelé ensemble de définition de la fonction numérique f. Il est noté traditionnellement D_f.

Remarque

L'ensemble de définition d'une fonction f est la plus grande partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle on peut calculer la valeur de $f(x_0)$ en tout point x_0 de cette partie. On a donc :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ f(x) \in \mathbb{R}\}$$

En pratique, on utilise souvent l'équivalence : $x \in D_f \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ et } f(x) \in \mathbb{R})$

Exemples

1) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - \sqrt{2}$:

Puisque f est une fonction polynômiale, alors $D_f = \mathbb{R}$.

2) L'ensemble de définition de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{5x+1}{x^2-3x+2}$:

On a : $D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 \neq 0\}$. Les solutions de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

Par suite : $D_g =]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$

3) L'ensemble de définition de la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$:

On a : $x \in D_h \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ et } x^2 - 3x + 2 \geq 0)$

Après avoir dressé le tableau de signe de $x^2 - 3x + 2$, on obtient : $D_h =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

4) L'ensemble de définition de la fonction k définie par $k(x) = \sqrt{x-3} + \dfrac{1}{x-5}$:

On a : $x \in D_k \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ et } x - 5 \neq 0 \text{ et } x - 3 \geq 0)$

Donc : $x \in D_k \Leftrightarrow (x \neq 5 \neq 0 \text{ et } x \geq 3)$

Par suite : $D_k = [3, 5[\cup]5, +\infty[$.

Scanné avec CamScanner

Applications

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2-x-1}$; 2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-5x-6}}$; 3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-5x-6}}$

4) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{2|x|-1}$; 5) $f(x)=\dfrac{\tan x}{\cos x-1}$; 6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin^2 x+\sin x-2}$

1.2. PARITÉ D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

- On dit que la fonction f est paire si pour tout $x\in D_f$: $-x\in D_f$ et $f(-x)=f(x)$.
- On dit que la fonction f est impaire si pour tout $x\in D_f$: $-x\in D_f$ et $f(-x)=-f(x)$.

Exemples

1) Les fonctions suivantes :

$f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 3x^2$; $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 2|x|-3$; $f_3:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2-\dfrac{3}{x^2}$; $f_4:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\cos x$

sont des fonctions paires.

2) Les fonctions suivantes :

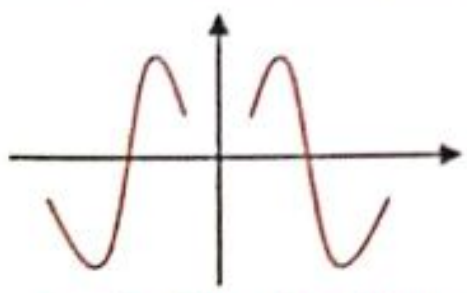
$g_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto -5x$; $g_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{1}{2}x^3$; $g_3:\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sin x-\tan x$; $g_4:]-1;1[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$

sont des fonctions impaires.

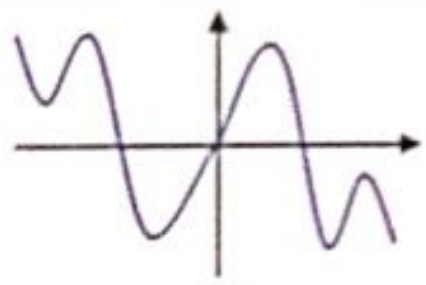
Proposition

Si f est une fonction paire, alors l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de sa courbe $\mathscr{C}_f$.

Si f est une fonction impaire, alors l'origine du repère est un centre de symétrie de sa courbe $\mathscr{C}_f$.



Graphe d'une fonction paire



Graphe d'une fonction impaire

Scanné avec CamScanner

Applications

Étudier la parité de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{4-x^2}}$; 3) $f(x)=x^3-x^2+1$

4) $f(x)=\dfrac{\sin x}{2\cos x-1}$; 5) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; 6) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^4+1}$

2 MONOTONIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

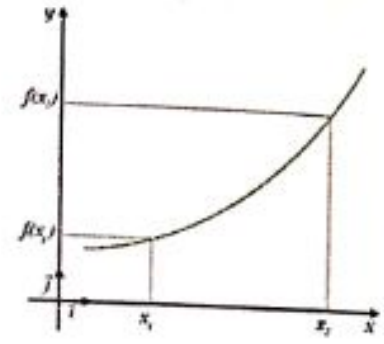
2.1. SENS DE VARIATIONS D'UNE FONCTION (RAPPELS)

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I inclus dans son ensemble de définition.

- On dit que la fonction f est croissante sur I si :

$$\left(\forall (x_1;x_2)\in I^2\right)\ \left(x_1\le x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)\right)$$

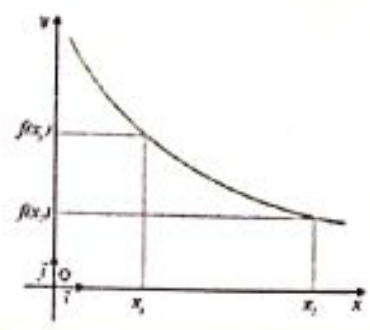


- On dit que la fonction f est strictement croissante sur I si :

$$\left(\forall (x_1;x_2)\in I^2\right)\ \left(x_1< x_2 \Rightarrow f(x_1)< f(x_2)\right)$$

- On dit que la fonction f est décroissante sur I si :

$$\left(\forall (x_1;x_2)\in I^2\right)\ \left(x_1\le x_2 \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)\right)$$



- On dit que la fonction f est strictement décroissante sur I si :

$$\left(\forall (x_1;x_2)\in I^2\right)\ \left(x_1< x_2 \Rightarrow f(x_1)> f(x_2)\right)$$

Proposition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I, x_1 et x_2 deux éléments distincts de I.

Le nombre $T(x_1;x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ est appelé le taux de variation (ou d'accroissement) de la fonction f entre x_1 et x_2. De plus, on a les propriétés suivantes :

- f est croissante sur I si, et seulement si : $\left(\forall (x_1;x_2)\in I^2\right): x_1\ne x_2 \Rightarrow T(x_1;x_2)\ge 0$.
- f est strictement croissante sur I si, et seulement si : $\left(\forall (x_1;x_2)\in I^2\right): x_1\ne x_2 \Rightarrow T(x_1;x_2)> 0$.
- f est décroissante sur I si, et seulement si : $\left(\forall (x_1;x_2)\in I^2\right): x_1\ne x_2 \Rightarrow T(x_1;x_2)\le 0$.
- f est strictement décroissante sur I si, et seulement si : $\left(\forall (x_1;x_2)\in I^2\right): x_1\ne x_2 \Rightarrow T(x_1;x_2)< 0$.

Scanné avec CamScanner

Exemple

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\dfrac{x}{x^3+16}$.

Étudions la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles $[0;2]$ et $[2;+\infty[$:

Soit x_1 et x_2 deux éléments distincts de $\mathbb{R}^+$. On a :

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\dfrac{x_1}{x_1^3+16}-\dfrac{x_2}{x_2^3+16}}{x_1-x_2}=\frac{x_1\left(x_2^3+16\right)-x_2\left(x_1^3+16\right)}{(x_1-x_2)\left(x_1^3+16\right)\left(x_2^3+16\right)}$$

Par conséquent : $T(x_1;x_2)=\dfrac{(x_1-x_2)\left[16-x_1x_2(x_1+x_2)\right]}{(x_1-x_2)\left(x_1^3+16\right)\left(x_2^3+16\right)}=\dfrac{16-x_1x_2(x_1+x_2)}{\left(x_1^3+16\right)\left(x_2^3+16\right)}$

• Monotonie de la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$:

On a : $0\le x_1\le 2$ et $0\le x_2\le 2$, donc : $0\le x_1x_2\le 4$ et $0\le x_1+x_2\le 4$. Par conséquent :

$$0\le x_1x_2(x_1+x_2)\le 16 \quad \text{et} \quad \left(x_1^3+16\right)\left(x_2^3+16\right)>0$$

Il s'ensuit donc que : $\dfrac{16-x_1x_2(x_1+x_2)}{\left(x_1^3+16\right)\left(x_2^3+16\right)}\ge 0$; c'est-à-dire que : $T(x_1;x_2)\ge 0$.

Ainsi, la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;2]$.

• Monotonie de la fonction f sur l'intervalle $[2;+\infty[$:

On a : $x_1\ge 2$ et $x_2\ge 2$, donc : $x_1x_2\ge 4$ et $x_1+x_2\ge 4$. Par conséquent :

$$x_1x_2(x_1+x_2)\ge 16 \quad \text{et} \quad \left(x_1^3+16\right)\left(x_2^3+16\right)>0$$

Il s'ensuit donc que : $\dfrac{16-x_1x_2(x_1+x_2)}{\left(x_1^3+16\right)\left(x_2^3+16\right)}\le 0$; c'est-à-dire que : $T(x_1;x_2)\le 0$.

Ainsi, la fonction f est décroissante sur $[2;+\infty[$.

• Tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$:

x	0		2		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{12}$	↘	

Applications

Étudier les variations de la fonction numérique f sur les intervalles I et J dans les deux cas suivants :

1. $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$; $I=]-1;+\infty[$ et $J=]-\infty;-1[$.

2. $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$; $I=]-\infty;1]$ et $J=[3;+\infty[$.

Scanné avec CamScanner

2.2. MONOTONIE ET PARITÉ

Proposition

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire que pour tout $x \in D_f$: $-x \in D_f$).

Pour tout intervalle I inclus dans $\mathbb{R}^+ \cap D_f$, on pose : $I' = \{-x / x \in I\}$. Alors :

- Si la fonction f est paire, alors les sens de monotonie sur I et I' sont opposés.
- Si la fonction f est impaire, alors les sens de monotonie sur I et I' sont identiques.

Exemples

1) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 4|x|$.

On montre facilement que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Puisque la fonction f est paire, alors elle est décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

2) On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

On montre facilement que la fonction g est croissante sur $[0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$.

Puisque g est impaire, alors elle est croissante sur $[-1;0]$ et décroissante sur $]-\infty;-1]$.

Applications

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + \dfrac{2}{x}$.

a) Étudier la parité de la fonction f.

b) Étudier la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles $]0;\sqrt{2}]$ et $[\sqrt{2};+\infty[$.

c) En déduire la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles $[-\sqrt{2};0[$ et $]-\infty;-\sqrt{2}]$.

2. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2+|x|+1}$.

a) Étudier la parité de la fonction g.

b) Étudier la monotonie de la fonction g sur $\mathbb{R}^+$.

c) En déduire la monotonie de la fonction g sur $\mathbb{R}^-$ puis dresser son tableau de variations.

3. Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x + |2x-3| - |2x+3|$.

a) Montrer que la fonction h est impaire.

b) Étudier la monotonie de la fonction h sur chacun des intervalles $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right[$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction h.

d) Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$ de la fonction h dans un repère orthonormé.

Scanné avec CamScanner

2.3. VARIATIONS DES FONCTIONS $f + \lambda$ et λf

Proposition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et λ un nombre réel non nul.

- Les fonctions f et $f + \lambda$ ont le même sens de variation sur l'intervalle I .
- Si $\lambda > 0$ alors les fonctions f et λf ont le même sens de variation sur l'intervalle I .
- Si $\lambda < 0$ alors les fonctions f et λf ont des sens de variation opposés sur l'intervalle I .

Preuve

- Soit x_1 et x_2 deux éléments distincts de l'intervalle I . On a :

$$\frac{(f+\lambda)(x_1)-(f+\lambda)(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{f(x_1)+\lambda-f(x_2)-\lambda}{x_1-x_2}=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

Par conséquent, les fonctions f et $f + \lambda$ ont le même sens de variation sur l'intervalle I .

- Soit x_1 et x_2 deux éléments distincts de l'intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\frac{(\lambda f)(x_1)-(\lambda f)(x_2)}{x_1-x_2}=\lambda\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

- Si $\lambda > 0$ alors les fonctions f et λf ont le même sens de variation sur l'intervalle I .
- Si $\lambda < 0$ alors les fonctions f et λf ont des sens de variation opposés sur l'intervalle I .

Exemples

1) Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{-3}{x}$.

On sait que la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$. Comme $-3 < 0$, alors la fonction $g = -3f$ est croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Soit h la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=\frac{-3+2x}{x}$.

On a pour tout $x \in]0;+\infty[$: $h(x)=g(x)+2$.

Puisque la fonction g est croissante sur $]0;+\infty[$, alors il en est de même pour la fonction h .

2) Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $u(x)=2\sqrt{x}$.

Puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et puisque $2 > 0$, alors la fonction u est aussi une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Soit v la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $v(x)=2\sqrt{x}-7$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $v(x)=u(x)-7$. Donc, la fonction v est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Scanné avec CamScanner

Applications

Étudier la monotonie de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=2\sqrt{x}-3$ et $I=\mathbb{R}^+$; 2) $f(x)=x^2-5$ et $I=\mathbb{R}^-$.

3) $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ et $I=]0;+\infty[$; 4) $f(x)=\dfrac{14x-10}{x}$ et $I=]-\infty;0[$.

3 COMPARAISON DE DEUX FONCTIONS NUMÉRIQUES

3.1. FONCTION POSITIVE – FONCTION NÉGATIVE

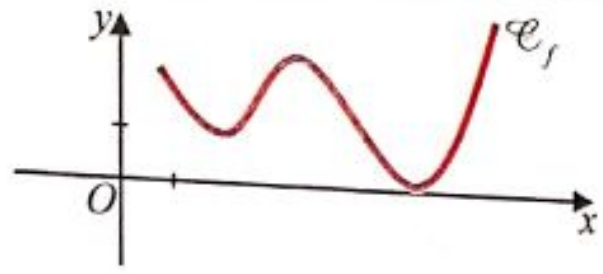
Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

- On dit que la fonction f est positive sur D_f si : $(\forall x\in D_f)\ f(x)\geq 0$.
  et on écrit : $f\geq 0$.
- On dit que la fonction f est négative sur D_f si : $(\forall x\in D_f)\ f(x)\leq 0$.
  et on écrit : $f\leq 0$.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

- Dire que la fonction f est positive sur D_f équivaut à dire que sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de l'axe des abscisses.



- Dire que la fonction f est négative sur D_f équivaut à dire que sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de l'axe des abscisses.



Exemples

1) Les fonctions $f_1: x\mapsto x^2+3$ et $f_2: x\mapsto 3|x|+5$ et $f_3: x\mapsto 1+\sin x$ sont positives sur $\mathbb{R}$.

2) Les fonctions $g_1: x\mapsto -2x^2$ et $g_2: x\mapsto \dfrac{-3}{x^2+1}$ et $g_3: x\mapsto \cos x-1$ sont négatives sur $\mathbb{R}$.

3) On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{4-x^2}{2x-3}$.

Étudions le signe de la fonction f sur $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$:

En dressant le tableau de signe de l'expression $f(x)$, on obtient :

Scanné avec CamScanner

On en déduit donc que :

- La fonction f est positive sur

$$]-\infty;-2]\cup\left]\frac{3}{2};2\right]$$

- La fonction f est négative sur

$$\left[-2;\frac{3}{2}\right[\cup[2;+\infty[$$

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$4-x^2$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		
$2x-3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		
$f(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$		

Applications

Étudier le signe de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{3x+2}{-2x^2+x+1}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{2x+1}$; 3) $f(x)=\left(x^2+x+1\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)$

3.2. COMPARAISON DE DEUX FONCTIONS NUMÉRIQUES

Définition

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un même ensemble D.

On dit que f est inférieure ou égale à g sur D (ou que g est supérieure ou égale à f sur D) si :

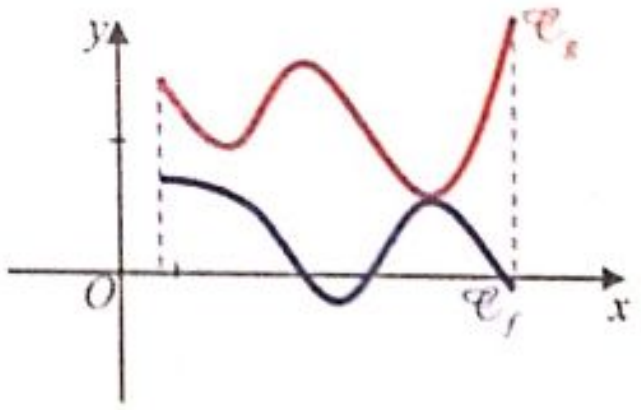
$$(\forall x\in D)\quad f(x)\le g(x)$$

et on écrit : $f\le g$ sur D.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Dire que la fonction f est inférieure ou égale à g sur D équivaut à dire que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ pour tout $x\in D$.

Remarquer bien que : $f\le g \Leftrightarrow (g-f \text{ est positive})$.



Exemples

1) On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^2+x+2$ et $f(x)=x+1$.

Comparons les fonctions f et g :

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $g(x)-f(x)=\left(x^2+x+2\right)-(x+1)=x^2+1$.

Comme $x^2+1\ge 0$, alors $f(x)\le g(x)$; d'où : $f\le g$.

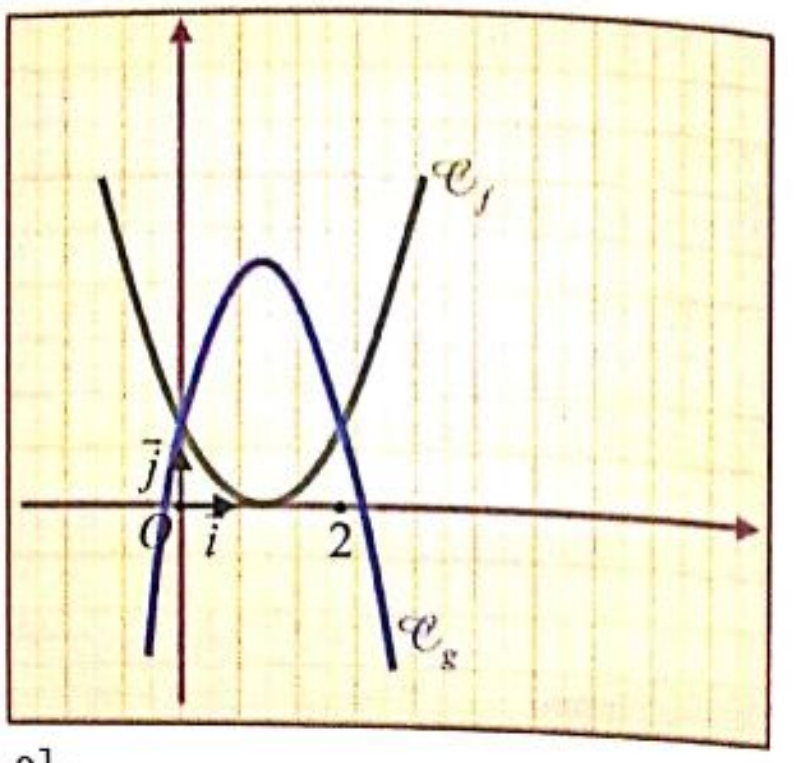
2) On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x-1)^2$ et $g(x)=-2x^2+4x-1$.

Comparons les fonctions f et g :

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $g(x)-f(x)=-3x^2+6x=3x(2-x)$

Scanné avec CamScanner

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$g(x)-f(x)$	$-$	0 $+$		$-$
position de $\mathscr{C}_g$ par rapport à $\mathscr{C}_f$	$\mathscr{C}_g$ est en-dessous de $\mathscr{C}_f$	$\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$		$\mathscr{C}_g$ est en-dessous de $\mathscr{C}_f$



En résumé :

- $f \geq g$ sur la réunion des intervalles $[2;+\infty[$ et $]-\infty;0]$;
- $f \leq g$ sur l'intervalle $[0;2]$.

Applications

Comparer les fonctions f et g dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=x$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ et $g(x)=x^2$

3) $f(x)=\dfrac{1+2x}{1+4x}$ et $g(x)=\dfrac{1-4x}{1-2x}$; 4) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ et $g(x)=x+2$

4 FONCTION MAJORÉE – FONCTION MINORÉE – FONCTION BORNÉE

Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

- On dit que la fonction f est majorée s'il existe un réel M tel que : $(\forall x \in D_f)\ f(x) \leq M$.
  Le nombre M est dit un majorant de la fonction f.
- On dit que la fonction f est minorée s'il existe un réel m tel que : $(\forall x \in D_f)\ f(x) \geq m$.
  Le nombre m est dit un minorant de la fonction f.
- On dit que la fonction f est bornée si elle à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire qu'il existe deux réels m et M tels que : $(\forall x \in D_f)\ m \leq f(x) \leq M$

Exemples

1) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}$

Montrons que la fonction f est majorée sur $\mathbb{R}$ par le nombre 3 :

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $3-f(x)=3-\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}=\dfrac{3x^2+3-2x^2-3}{x^2+1}=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

Puisque $\dfrac{x^2}{x^2+1} \geq 0$, alors $f(x) \leq 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, f est majorée par le nombre 3.

Scanné avec CamScanner

Montrons que la fonction f est minorée par le nombre 2 :

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) - 2 = \dfrac{2x^2+3}{x^2+1} - 2 = \dfrac{2x^2+3-2x^2-2}{x^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Puisque $\dfrac{1}{x^2+1} \geq 0$, alors $f(x) \geq 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, f est minorée par le nombre 2.

Enfin, la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$ car elle est à la fois majorée et minorée.

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 3\cos^2 x - 5\sin x + 1$

Montrons que la fonction g est bornée :

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ et $-5 \leq -5\sin x \leq 5$; donc : $-5 \leq 3\cos^2 x - 5\sin x \leq 8$, ce qui entraîne que : $-4 \leq g(x) \leq 9$. Par suite, la fonction g est bornée par -4 et 9.

3) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^2 - 4x + 3$.

Montrons par l'absurde que la fonction h n'est pas majorée :

Par l'absurde, supposons que la fonction h est majorée ; il existe donc $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) \leq M$. Il s'ensuit donc que : $(x-2)^2 - 1 \leq M$, ce qui donne : $(x-2)^2 \leq M + 1 \leq |M+1|$.

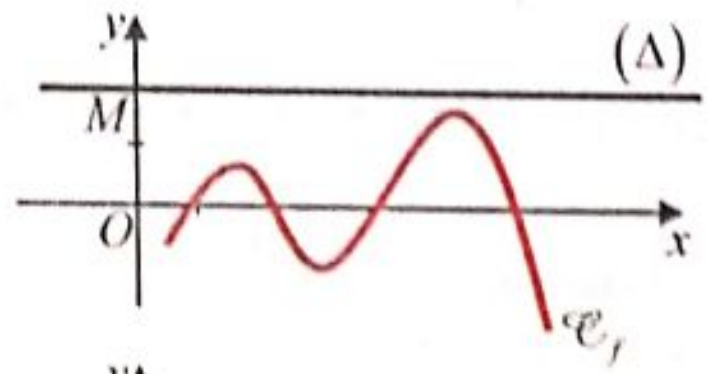
On obtient donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ |x-2| \leq \sqrt{|M+1|}$. En prenant : $x = 3 + \sqrt{|M+1|}$, on obtient :

$1 + \sqrt{|M+1|} \leq \sqrt{|M+1|}$, c'est-à-dire : $1 \leq 0$. Absurde.

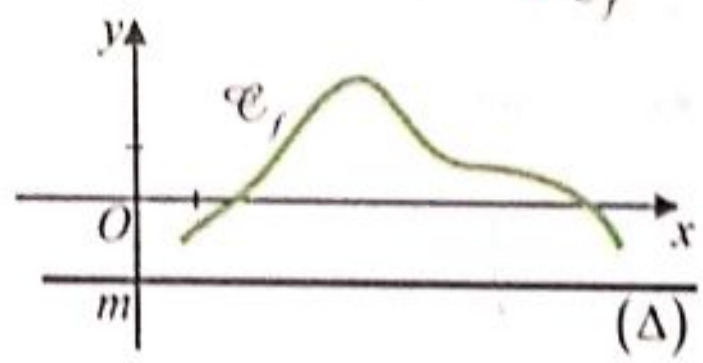
Par suite, la fonction h n'est pas majorée.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Dire que la fonction f est majorée par M sur D_f signifie que sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de la droite (Δ) d'équation $y = M$.



Dire que la fonction f est minorée par m sur D_f signifie que sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la droite (Δ) d'équation $y = m$.



Proposition

Soit f une fonction numérique et D_f son domaine de définition.

Pour que la fonction f soit bornée, il faut et il suffit que : $(\exists \alpha \in \mathbb{R}^+); (\forall x \in D_f)\ |f(x)| \leq \alpha$.

Preuve

- Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in D_f$: $|f(x)| \leq \alpha$.

Scanné avec CamScanner

Il s'ensuit donc que : $-\alpha \le f(x) \le \alpha$ pour tout $x \in D_f$. Donc, la fonction f est bornée sur D_f.

- Inversement, supposons que la fonction f soit bornée. Il existe donc deux réels m et M tels que pour tout $x \in D_f$, $m \le f(x) \le M$. Puisque $-|m| \le m$ et $M \le |M|$, alors : $-|m| \le f(x) \le |M|$.

En notant α le plus grand des nombres $|m|$ et $|M|$, on obtient : $(\forall x \in D_f)$: $|f(x)| \le \alpha$.

Applications

1. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$.

a) Montrer que la fonction f est majorée par $\dfrac{7}{3}$.

b) Montrer que la fonction f est minorée par 1.

2. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

a) Montrer que la fonction g est majorée par 2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) En déduire que la fonction g est minorée par -2 sur $\mathbb{R}_-^*$.

3. Soit u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = \dfrac{x^4-x^2}{x^4+1}$ et $v(x) = 2\cos x - 7\sin(2x) + 3$

Montrer que les fonctions u et v sont bornées sur $\mathbb{R}$.

4. On considère la fonction numérique w définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $w(x) = x - \sqrt{x+1}$

Montrer par l'absurde que la fonction w n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^+$.

5 EXTREMUMS D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Définition

Soit f une fonction numérique, D_f son ensemble de définition et $x_0 \in D_f$.

- On dit que $f(x_0)$ est la valeur maximale absolue (ou le maximum absolu) de la fonction f si :

$$(\forall x \in D_f)\ f(x) \le f(x_0)$$

- On dit que $f(x_0)$ est une valeur maximale relative de la fonction f s'il existe un intervalle ouvert I centré en x_0 et inclus dans D_f tel que : $(\forall x \in I)\ f(x) \le f(x_0)$
- On dit que $f(x_0)$ est la valeur minimale absolue (ou le minimum absolu) de la fonction f si :

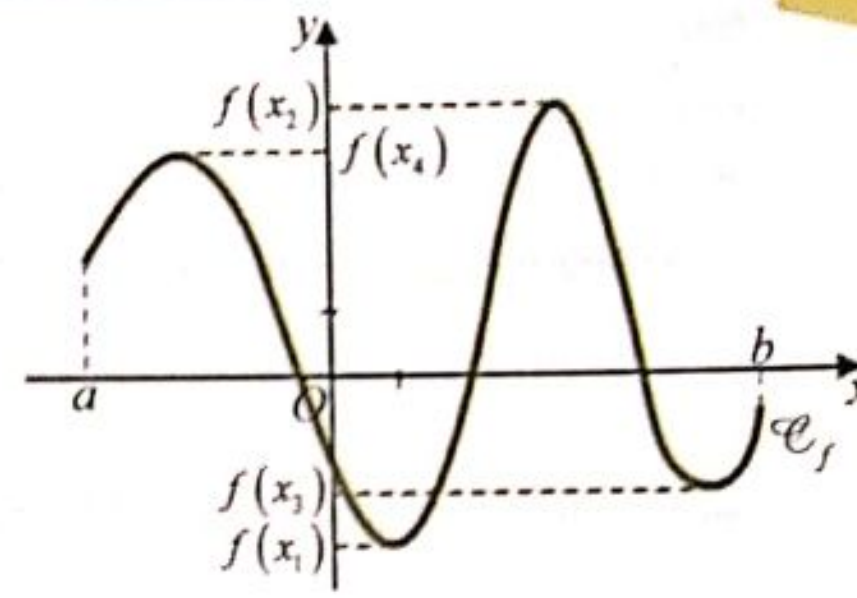
$$(\forall x \in D_f)\ f(x) \ge f(x_0)$$

- On dit que $f(x_0)$ est une valeur minimale relative de la fonction f s'il existe un intervalle ouvert I centré en x_0 et inclus dans D_f tel que : $(\forall x \in I)\ f(x) \ge f(x_0)$
- Les valeurs minimales et maximales de la fonction f sont appelées les extremums de f.

Scanné avec CamScanner

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$ représentée par la figure ci-contre.



- $f(x_1)$ est la valeur minimale absolue de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$.
- $f(x_2)$ est la valeur maximale absolue de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$.
- $f(x_3)$ est une valeur minimale relative de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$.
- $f(x_4)$ est une valeur maximale relative de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\dfrac{1}{2}-f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1-2x}{2(x^2+1)}=\dfrac{(x-1)^2}{2(x^2+1)}$.

Puisque $\dfrac{(x-1)^2}{2(x^2+1)}\geq 0$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)\leq\dfrac{1}{2}$. Comme $f(1)=\dfrac{1}{2}$, alors : $f(x)\leq f(1)$.

Ainsi, la fonction f admet un maximum absolu en 1 qui est $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

De même, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x^2+1+2x}{2(x^2+1)}=\dfrac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}$.

Puisque $\dfrac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}\geq 0$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)\geq-\dfrac{1}{2}$. Comme $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$, alors : $f(x)\geq f(-1)$.

Ainsi, la fonction f admet un minimum absolu en -1 qui est $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$.

Remarques

- Ne jamais confondre minorant et minimum d'une fonction. Le minimum d'une fonction est un minorant qui admet un antécédent. Autrement dit, le réel m est une valeur minimale de f sur I si, et seulement si :
$$\begin{cases}(\forall x\in I)\quad f(x)\geq m\\(\exists x_0\in I);\ f(x_0)=m\end{cases}$$
- Ne jamais confondre majorant et maximum d'une fonction. Le maximum d'une fonction est un majorant qui admet un antécédent. Autrement dit, le réel M est une valeur maximale de f sur I si, et seulement si :
$$\begin{cases}(\forall x\in I)\quad f(x)\leq M\\(\exists x_0\in I);f(x_0)=M\end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

Applications

1. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$: $f(x)=x^2+2x+3$ et $g(x)=-x^2+3x+5$.

a) Montrer que 2 est la valeur minimale absolue de la fonction f.

b) Montrer que $\frac{29}{4}$ est la valeur maximale absolue de la fonction g.

2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$: $h(x)=|x|+\frac{1}{|x|}$.

Montrer que h admet un minimum absolu au point 1.

6 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE QUELQUES FONCTIONS USUELLES

6.1. LA FONCTION TRINÔME DU SECOND DEGRÉ - PARABOLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ax^2+bx+c$ où a, b et c sont des réels avec $a\neq 0$.

- Tableaux de variations :

$a>0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗

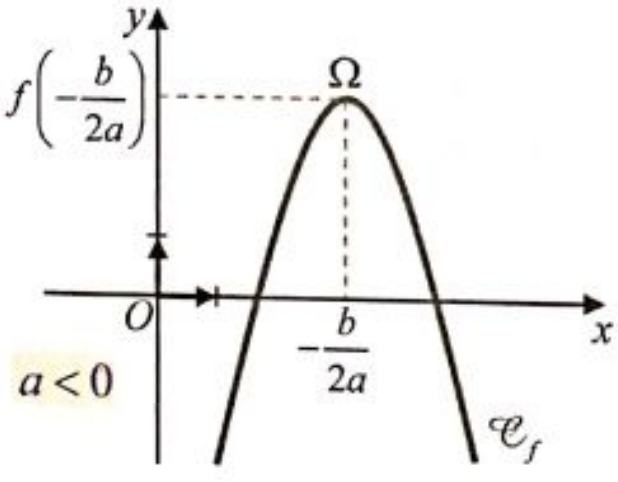
$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ est la valeur minimale absolue de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

$a<0$

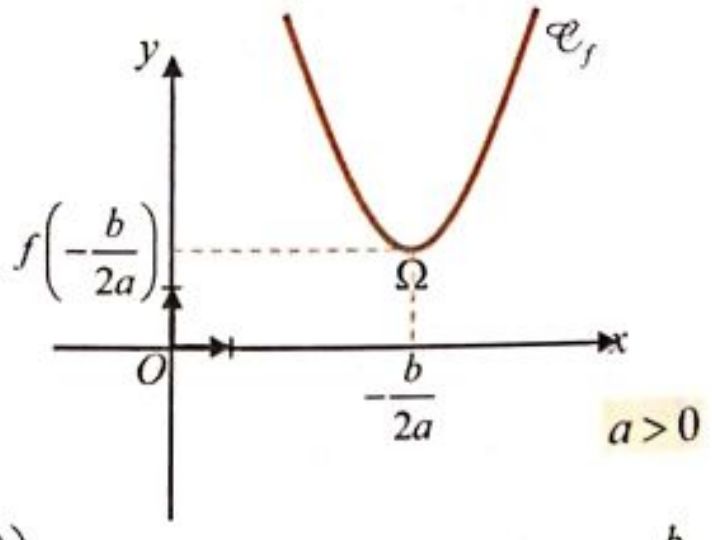
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘

$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ est la valeur maximale absolue de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

- Courbes représentatives :



$a<0$



$a>0$

$\mathscr{C}_f$ est une parabole de sommet $\Omega\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ et d'axe de symétrie d'équation $x=-\frac{b}{2a}$.

Scanné avec CamScanner

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

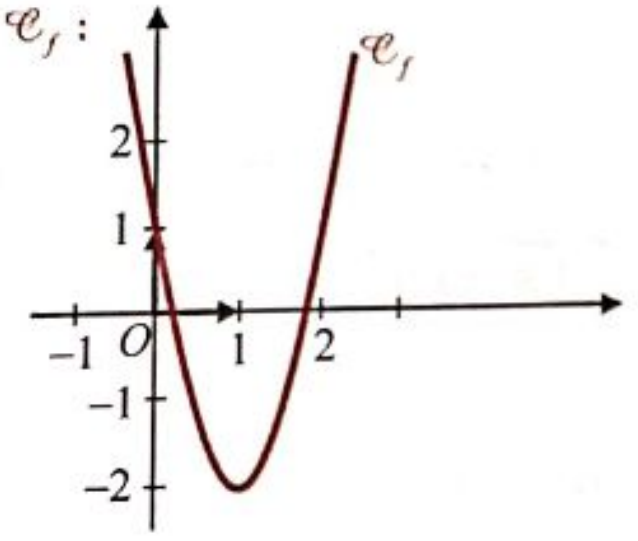
La courbe $\mathscr{C}_f$ de f est une parabole de sommet $\Omega(1;-2)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 1$.

- Tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	-2	↗	

- Tableau de quelques valeurs de $f(x)$ et construction de $\mathscr{C}_f$:

x	0	1	2
$f(x)$	1	-2	1



Applications

Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes puis tracer sa courbe représentative :

$f(x) = -2x^2 + x + 1$; $g(x) = x^2 + 2x + 2$; $h(x) = -x^2 + |x|$

6.2. LA FONCTION HOMOGRAPHIQUE - HYPERBOLE

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ par : $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c et d sont des réels avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$. On pose : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

- Tableaux de variations :

$\Delta > 0$

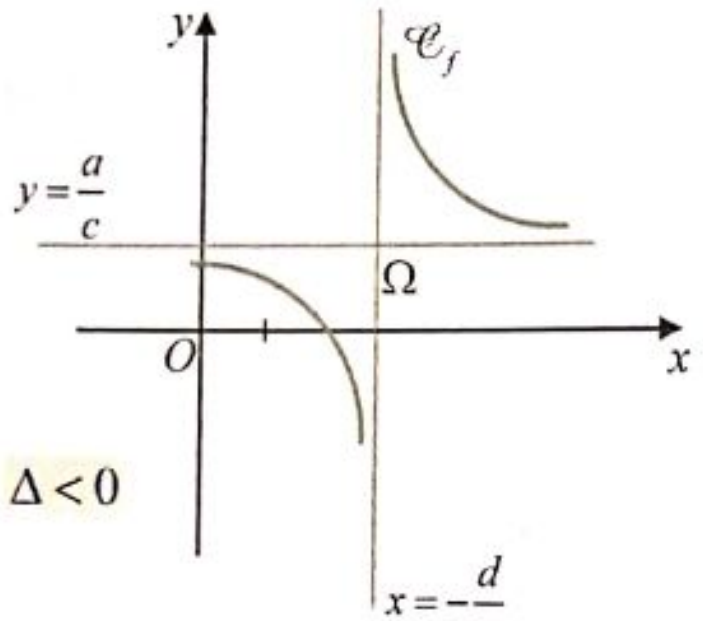
x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↗	

$\Delta < 0$

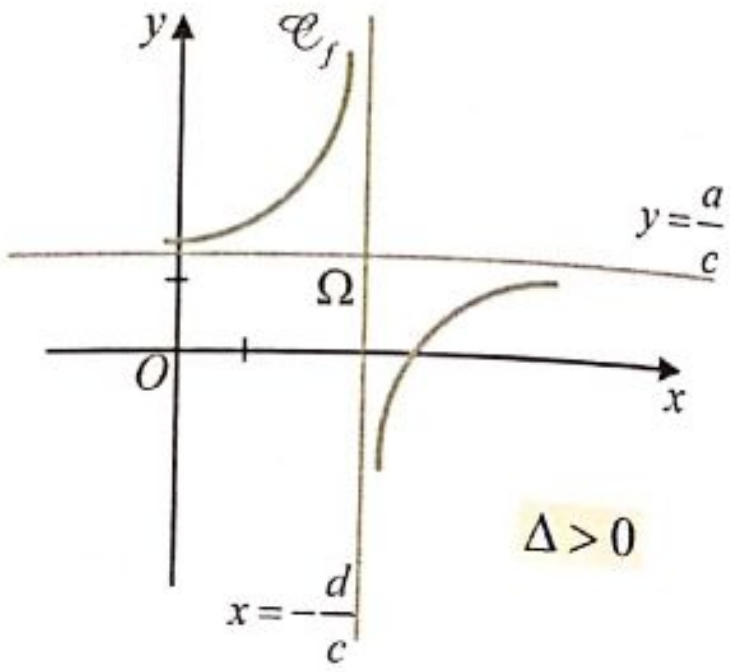
x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
$f(x)$		↘	‖	↘	

Scanné avec CamScanner

- Courbes représentatives :



$\Delta<0$



$\Delta>0$

$\mathscr{C}_f$ est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{3x-2}{2x+1}$.

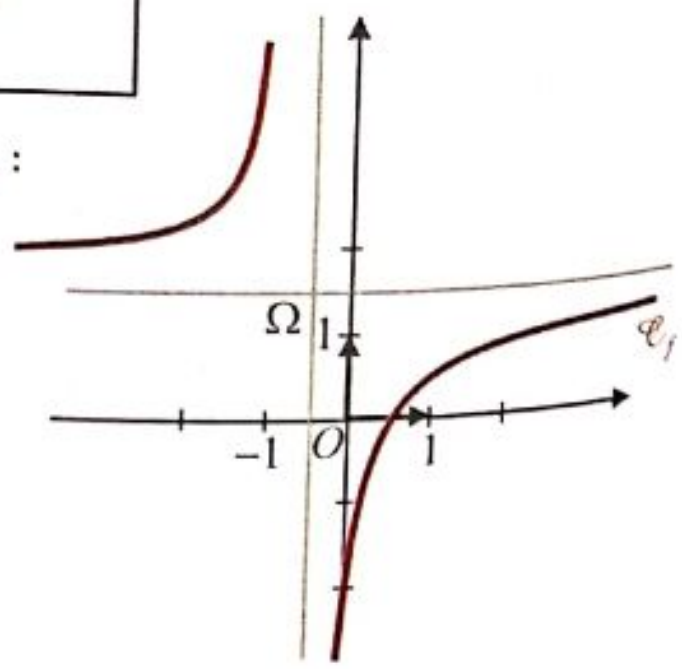
La courbe $\mathscr{C}_f$ de f est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations cartésiennes $x=-\frac{1}{2}$ et $y=\frac{3}{2}$.

- Tableau de variations de la fonction f : (ici $\Delta=7$ et $\Delta>0$)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗		

- Tableau de quelques valeurs de $f(x)$ et construction de $\mathscr{C}_f$:

x	0	$\frac{2}{3}$	1	2
$f(x)$	-2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{5}$



Applications

Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes puis tracer sa courbe représentative :

$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$; $g(x)=\frac{3x+1}{x+1}$; $h(x)=-1+\frac{1}{x}$; $k(x)=\frac{|x|}{|x|+2}$

Scanné avec CamScanner

6.3. LA FONCTION $x \longmapsto ax^3 \ (a \neq 0)$

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3$ où a est un réel non nul.

- Tableaux de variations :

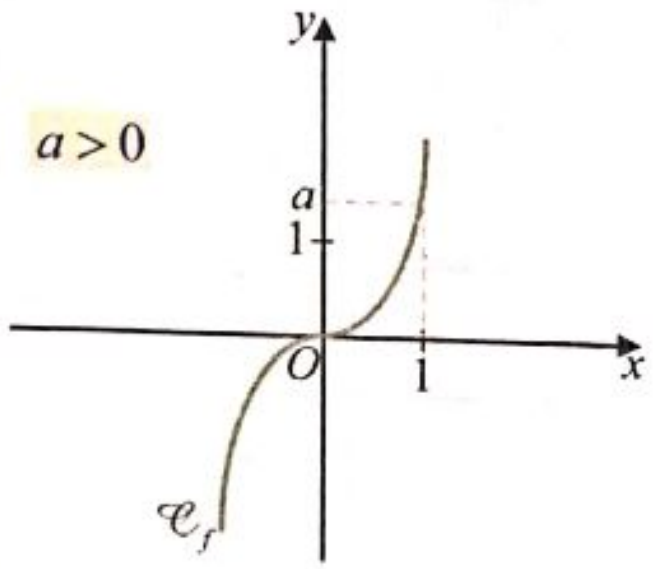
x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f(x)$	↗

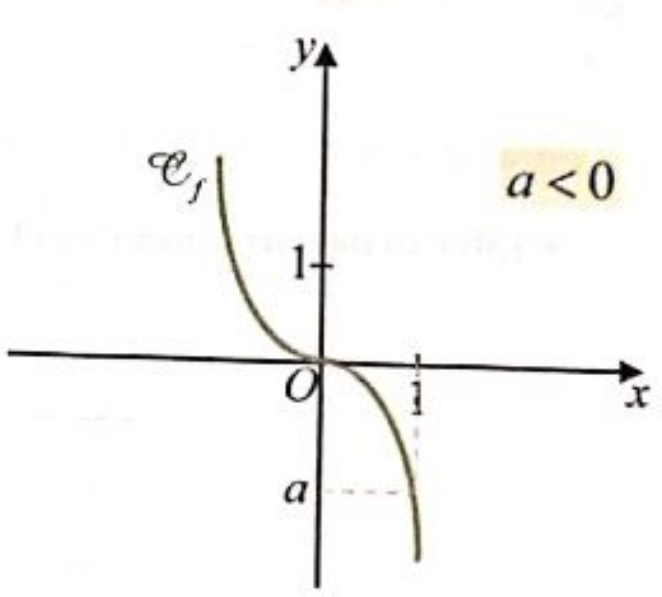
$a > 0$

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f(x)$	↘

$a < 0$

- Courbes représentatives :





La fonction $f : x \mapsto ax^3$ est impaire et sa courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

La courbe $\mathscr{C}_f$ passe aussi par le point de coordonnées $(1;a)$ car : $f(1) = a$.

Applications

Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes puis tracer sa courbe représentative :

$f(x) = x^3$; $g(x) = -\frac{1}{2}x^3$; $h(x) = \frac{1}{4}x^2|x|$

6.4. LA FONCTION $x \longmapsto \sqrt{x+a} \ (a \in \mathbb{R})$

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \sqrt{x+a}$ où a est un nombre réel.

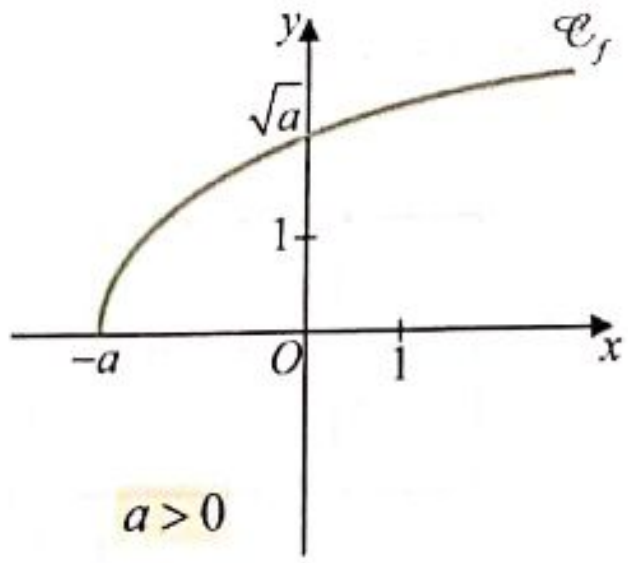
La fonction f est définie et strictement croissante sur l'intervalle $[-a;+\infty[$.

- Tableau de variations :

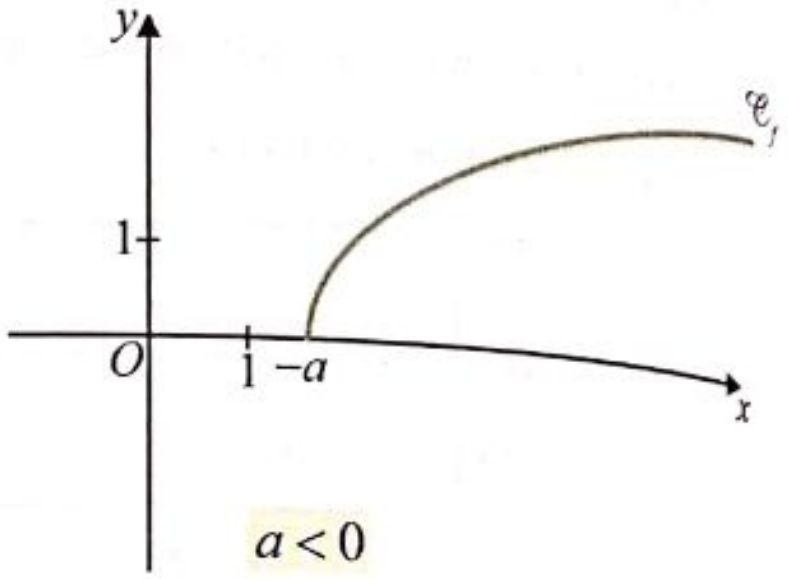
x	$-a$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f(x)$	0 ↗

Scanné avec CamScanner

- Courbes représentatives :



$a>0$



$a<0$

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{x-1}$.

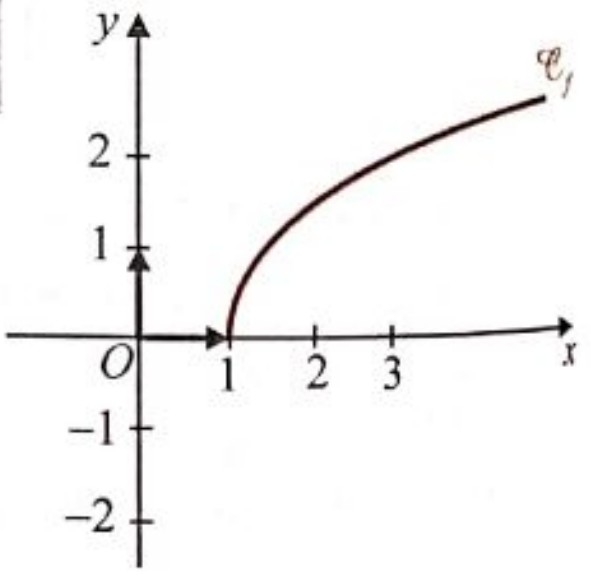
L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f=[1;+\infty[$

- Tableau de variations de la fonction f :

x	1	$+\infty$
$f(x)$	0	↗

- Tableau de quelques valeurs de $f(x)$ et construction de $\mathscr{C}_f$:

x	1	2	3	4
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$



6.5. FONCTION PARTIE ENTIÈRE

Définition

Soit x un nombre réel.

La partie entière de x est le plus grand entier relatif n qui est inférieur ou égal à x. On la note : $E(x)$ ou $[x]$.

Exemples

$E(4,2)=4$; $E(-3,75)=-4$; $E(\sqrt{3})=1$; $E\left(-\frac{9}{4}\right)=-3$; $E\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$E(\pi)=3$; $E(-0,1457)=-1$; $E(\sqrt{3}+\sqrt{2})=3$; $E(-1)=-1$

Scanné avec CamScanner

Applications

Déterminer la partie entière de chacun des nombres suivants : $(n \in \mathbb{N}^*)$

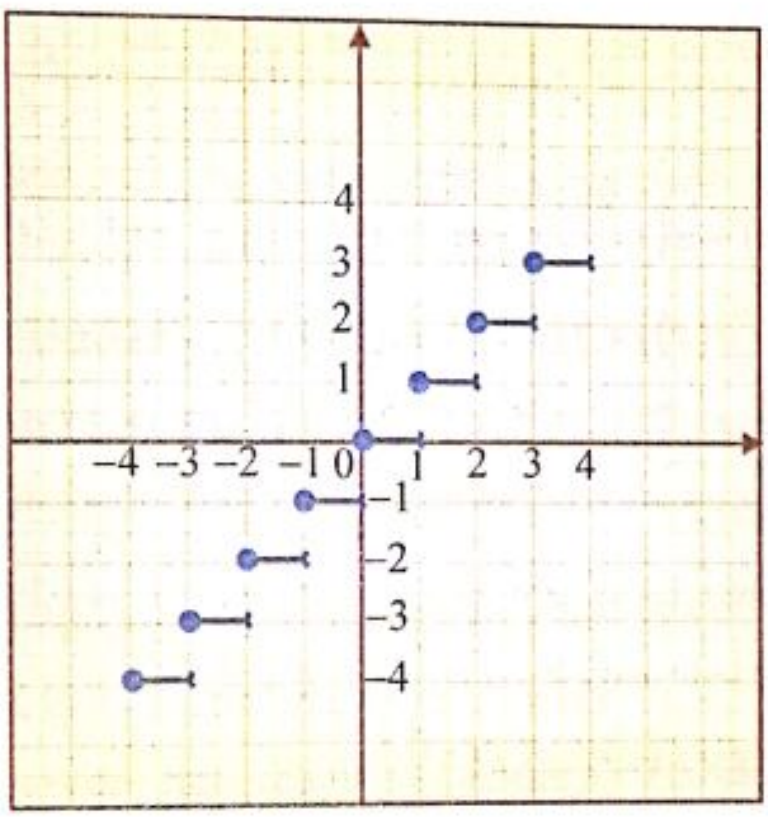
$\frac{17}{3}$; $-\frac{2020}{19}$; -2018 ; $\frac{24}{25}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{n}{n+1}$; $\frac{n+1}{n}$; $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

Proposition

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $E(x) \leq x < E(x)+1$ et $x-1 < E(x) \leq x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $E(x+n) = E(x)+n$

Courbe représentative de la fonction partie entière :

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Si $k \leq x < k+1$ alors $E(x) = k$. Par suite, la fonction partie entière est constante sur l'intervalle $[k;k+1[$. On obtient ainsi la courbe représentative suivante :



Applications

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$E(x) = 0$; $E(x) = 2$; $E(x) = -3$; $3E(x)-1 = 0$

$E(x) < 2$; $E(x) \geq -1$; $-1 \leq E(x) < 3$; $2E(x)+3 < 0$

2. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - E(x)$.

a) Calculer : $f(-5)$; $f(\sqrt{2})$; $f(8)$; $f(\frac{3}{2})$; $f(5,2)$.

b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ 0 \leq f(x) < 1$.

c) Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-6;6]$.

Scanné avec CamScanner

7 COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS NUMÉRIQUES

Définition

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur deux ensembles I et J tels que : $f(I) \subset J$.

La fonction numérique h définie sur I par :

$$h(x) = g(f(x))$$

est appelée **composée** des fonctions f et g dans cet ordre.

Elle est notée $g \circ f$ (se lit : g rond f).

On a alors : $(\forall x \in I)\ g \circ f(x) = g(f(x))$

$$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$$
$$g \circ f(x)$$

Exemples

1) Soit f et g les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = 2x + 1$

Déterminons $g \circ f$ et $f \circ g$:

Puisque les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$, alors il en est de même pour $g \circ f$ et $f \circ g$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2x + 3) = 2(x^2 - 2x + 3) + 1 = 2x^2 - 4x + 7$$

De même : $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2 - 2(2x+1) + 3 = 4x^2 + 2$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g \circ f(x) = 2x^2 - 4x + 7$ et $f \circ g(x) = 4x^2 + 2$

On remarque bien que : $g \circ f \neq f \circ g$.

2) Soit f et h les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1$ et $h(x) = 2x^2 + 3x - 1$

Déterminons la fonction g telle que : $h = g \circ f$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$.

On pose : $y = f(x)$, donc $y = x - 1$, d'où : $x = y + 1$. Donc :

$$g(y) = h(x) = 2x^2 + 3x - 1 = 2(y+1)^2 + 3(y+1) - 1 = 2y^2 + 7y + 4$$

Donc g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$: $g(x) = 2x^2 + 7x + 4$

Remarques

- On n'a pas en général : $g \circ f = f \circ g$.
- On a : $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$ et $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f\}$.
- Pour décomposer une fonction, les conventions de priorité de calcul (entre puissance, produit, somme, ...) permettent de déterminer les fonctions de référence et l'ordre dans lequel les enchaîner.

Scanné avec CamScanner

Applications

1. Définir les fonctions $f\,o\,g$ et $g\,o\,f$ dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=x^2$ et $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$; b) $f(x)=2x-1$ et $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

c) $f(x)=x^2+2$ et $g(x)=\sqrt{x}$; d) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ et $g(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$

2. Décomposer la fonction f en deux fonctions dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=(x-1)^3$; b) $f(x)=\sqrt{2-5x}$; c) $f(x)=3-\dfrac{1}{(2x-1)^2}$

Proposition

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur deux intervalles I et J tels que : $f(I)\subset J$.

- Si f et g ont le même sens de variation, alors $g\,o\,f$ est croissante (éventuellement strictement croissante) sur l'intervalle I.
- Si f et g ont des sens de variation contraires, alors $g\,o\,f$ est décroissante (éventuellement strictement décroissante) sur l'intervalle I.

Preuve

- On suppose que f est croissante sur I et g est croissante sur J.

Soit x_1 et x_2 deux éléments de I tels que $x_1 \leq x_2$. Puisque f est croissante sur I, alors : $f(x_1)\leq f(x_2)$.

Comme $f(x_1)\in J$ et $f(x_2)\in J$, alors : $g(f(x_1))\leq g(f(x_2))$ (car g est croissante sur J).

Il s'ensuit donc que : $g\,o\,f(x_1)\leq g\,o\,f(x_2)$. Ainsi, la fonction $g\,o\,f$ est croissante sur I.

- On suppose que f est croissante sur I et g est décroissante sur J.

Soit x_1 et x_2 deux éléments de I tels que $x_1 \leq x_2$. Puisque f est croissante sur I, alors : $f(x_1)\leq f(x_2)$.

Comme $f(x_1)\in J$ et $f(x_2)\in J$, alors : $g(f(x_1))\geq g(f(x_2))$ (car g est décroissante sur J).

Il s'ensuit donc que : $g\,o\,f(x_1)\geq g\,o\,f(x_2)$. Ainsi, la fonction $g\,o\,f$ est décroissante sur I.

Exemples

1) Soit f la fonction numérique définie sur $]-\infty;0[$ par : $f(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$.

Étudions la monotonie de la fonction f sur $]-\infty;0[$:

En posant : $u(x)=x^2$ et $v(x)=1+\dfrac{1}{x}$, on obtient : $(\forall x\in\,]-\infty;0[)\ f(x)=v(u(x))=v\,o\,u(x)$.

De plus :

Scanné avec CamScanner

- la fonction u est décroissante sur $]-\infty;0[$;
- $u(]-\infty;0[) \subset]0;+\infty[$;
- la fonction v est décroissante sur $]0;+\infty[$.

Il s'ensuit donc que la fonction $f = vou$ est croissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

2) Soit f la fonction numérique définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^3+1}$.

Étudions la monotonie de la fonction f sur $[-1;+\infty[$:

En posant : $u(x) = x^3$ et $v(x) = \sqrt{1+x}$, on obtient : $(\forall x \in [-1;+\infty[)\ f(x) = v(u(x)) = vou(x)$.

De plus :

- la fonction u est croissante sur $[-1;+\infty[$;
- $u([-1;+\infty[) \subset [-1;+\infty[$;
- la fonction v est croissante sur $[-1;+\infty[$.

Il s'ensuit donc que la fonction $f = vou$ est croissante sur l'intervalle $[-1;+\infty[$.

3) Soit f la fonction numérique définie sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = \cos^2 x$.

Étudions la monotonie de la fonction f sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$:

En posant : $u(x) = \cos x$ et $v(x) = x^2$, on obtient : $\left(\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)\ f(x) = v(u(x)) = vou(x)$.

La fonction u n'est pas monotone sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. En effet, le tableau de variations de la fonction u sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ est donné par :

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$u(x)$	0	↗	1	↘	0

Monotonie de f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$:

- la fonction u est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$;
- $u\left(\left[-\frac{\pi}{2};0\right]\right) \subset [0;1]$;
- la fonction v est croissante sur $[0;1]$.

Il s'ensuit donc que la fonction $f = vou$ est croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

Scanné avec CamScanner

Monotonie de f sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

- la fonction u est décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$;
- $u\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)\subset[0;1]$;
- la fonction v est croissante sur $[0;1]$.

Il s'ensuit donc que la fonction $f = v\circ u$ est décroissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Applications

1. En utilisant la propriété de la monotonie de la composée de deux fonctions, étudier la monotonie de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=1+\frac{5}{x^3}$ et $I=\mathbb{R}^-$; b) $f(x)=\frac{-3}{x^2+1}$ et $I=\mathbb{R}^+$

c) $f(x)=\frac{\cos x-1}{\cos x+1}$ et $I=[0;\pi[$; d) $f(x)=x^4+x^2$ et $I=\mathbb{R}^+$

e) $f(x)=\frac{x^3-1}{x^3+1}$ et $I=]-\infty;-1[$; f) $f(x)=1+\frac{1}{\sin x}$ et $I=\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

2. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{2x^2-4x+3}$.

a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \ \frac{1}{2}<f(x)\leq 1$.

b) On considère les fonctions numériques u et v définies par : $u(x)=x^2-2x$ et $v(x)=\frac{x+2}{2x+3}$.

Donner le tableau de variations de chacune des fonctions u et v.

c) En utilisant les variations des fonctions u et v, étudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $[1;+\infty[$ et $]-\infty;1]$.

8 FONCTION PÉRIODIQUE

Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

On dit que f est périodique s'il existe un réel non nul T tel que pour tout $x\in D_f$:

$$(x+T)\in D_f \quad \text{et} \quad (x-T)\in D_f \quad \text{et} \quad f(x+T)=f(x)$$

Le nombre réel T est appelé alors une période de f. La plus petite période strictement positive de la fonction f (lorsqu'elle existe) est appelée la période de la fonction f.

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont périodiques de période 2π car :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \cos(x+2\pi) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x+2\pi) = \sin x$$

2) La fonction $x \mapsto \tan x$ est périodique de période π.

3) Soit ω_0 un réel strictement positif et $\varphi \in \mathbb{R}$.

Les fonctions $f : t \mapsto \sin(\omega_0 t + \varphi)$ et $g : t \mapsto \cos(\omega_0 t + \varphi)$ sont périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

En effet, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) = \sin\left(\omega_0\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) + \varphi\right) = \sin(\omega_0 t + 2\pi + \varphi) = \sin(\omega_0 t + \varphi) = f(t)$$

et : $$g\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) = \cos\left(\omega_0\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) + \varphi\right) = \cos(\omega_0 t + 2\pi + \varphi) = \cos(\omega_0 t + \varphi) = g(t).$$

Applications

1. Soit a un réel strictement positif.

Montrer que la fonction $x \mapsto \tan(ax)$ est périodique et donner sa période.

2. Déterminer la période de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \cos^2 x \quad ; \quad f_2 : x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \quad ; \quad f_3 : x \mapsto \sin(3x) + \cos(2x) \quad ; \quad f_4 : x \mapsto \tan(3x) - \cos(4x)$$

3. Montrer que la fonction $x \mapsto x - E(x)$ est périodique de période égale 1.

Proposition

Soit f une fonction périodique de période T et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- Pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, le nombre kT est aussi une période de la fonction f.
- La courbe de $\mathcal{C}_f$ est invariante par toute translation de vecteur $kT.\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $x_0 \in \mathbb{R}$ est un réel donné, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est la réunion des images de l'ensemble $\{M(x;f(x)) / x \in D_f \cap [x_0, x_0 + T[\}$ par toutes les translations de vecteur $kT.\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, pour étudier une fonction périodique de période T, il suffit de l'étudier sur un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur T. (Très souvent, on choisit un des deux intervalles $[0,T[$ ou $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$).

Preuve

- Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrons que kT est aussi une période de la fonction f :

Deux cas se présentent : $k \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}_-^*$.

Scanné avec CamScanner

- Dans le cas où $k \in \mathbb{N}^*$, on va utiliser un raisonnement par récurrence :

  Initialisation : Pour $k = 1$, on a bien T est une période de la fonction f.

  Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons que kT est une période de f et montrons que $(k+1)T$ est aussi une période de f.

  Puisque T est une période de la fonction f, alors pour tout $x \in D_f$:

$$f\left(x+(k+1)T\right) = f\left(x+kT+T\right) = f\left(x+kT\right) = f\left(x\right)$$

  Par conséquent, $(k+1)T$ est aussi une période de la fonction f.

  Conclusion : Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, kT est une période de la fonction f.

- Dans le cas où $k \in \mathbb{Z}_-^*$, on a évidemment $-k \in \mathbb{N}^*$ et donc pour tout $x \in D_f$:

$$f\left(x+kT\right) = f\left(\left(x+kT\right)-kT\right) = f\left(x\right)$$

- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On pose : $D_0 = D_f \cap \left[x_0 ; x_0 + T\right[$ et $D_k = D_f \cap \left[x_0 + kT ; x_0 + (k+1)T\right[$.

Soit $\mathscr{C}_0$ la courbe de la restriction de f sur D_0 et $\mathscr{C}_k$ la courbe de la restriction de f sur D_k.

On considère la translation t de vecteur $kT.\vec{i}$. Montrons que : $t\left(\mathscr{C}_0\right) = \mathscr{C}_k$.

On a : $M\left(x;y\right) \in \mathscr{C}_0 \Rightarrow \left[x_0 \le x < x_0 + T \text{ et } y = f\left(x\right)\right]$

$$\Rightarrow \left[x_0 + kT \le x + kT < x_0 + (k+1)T \text{ et } y = f\left(x+kT\right)\right]$$

$$\Rightarrow M_k\left(x+kT ; f\left(x+kT\right)\right) \in \mathscr{C}_k$$

On a : $\overrightarrow{MM_k} = \left(x+kT-x\right)\vec{i} = kT\,\vec{i}$. Par suite : $t\left(\mathscr{C}_0\right) \subset \mathscr{C}_k$.

Réciproquement, on a : $M_k\left(x;y\right) \in \mathscr{C}_k \Rightarrow \left[x_0 + kT \le x < x_0 + (k+1)T \text{ et } y = f\left(x\right)\right]$

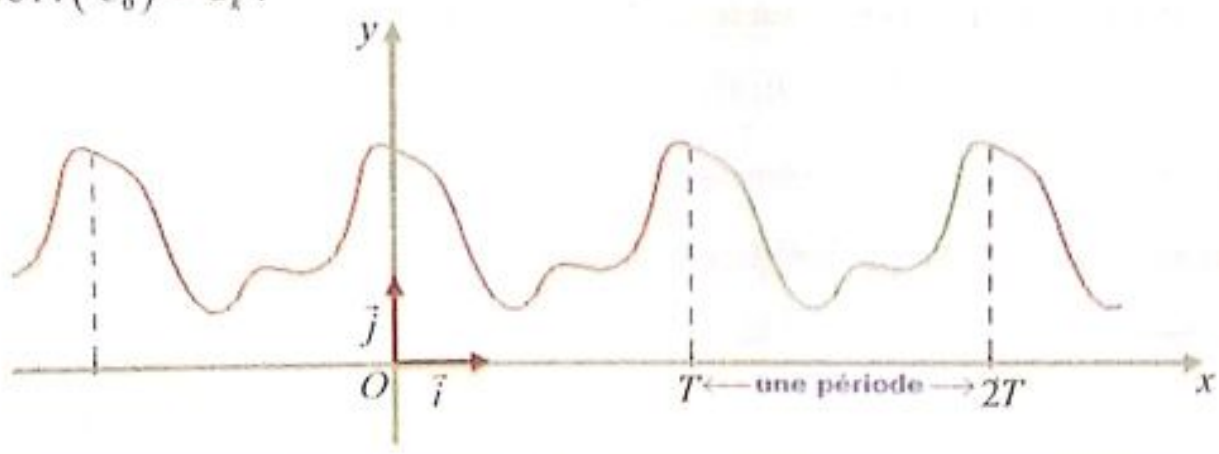
$$\Rightarrow \left[x_0 \le x - kT < x_0 + T \text{ et } y = f\left(x\right)\right]$$

Puisque $x \in D_f$ et f périodique de période T, alors :

$$f\left(x-kT\right) = f\left(x\right) \text{ et } x - kT \in D_f \cap \left[x_0 ; x_0 + T\right[$$

Par conséquent : $N\left(x-kT;y\right) \in \mathscr{C}_0$ et $\overrightarrow{NM_k} = \left(x-x+kT\right)\vec{i} = kT\,\vec{i}$. D'où : $\mathscr{C}_k \subset t\left(\mathscr{C}_0\right)$.

En définitive : $t\left(\mathscr{C}_0\right) = \mathscr{C}_k$.



Scanné avec CamScanner

Exemple

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\left(x-2E\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(2E\left(\frac{x}{2}\right)-x+2\right)$

- Montrons que f est périodique de période 2 :

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

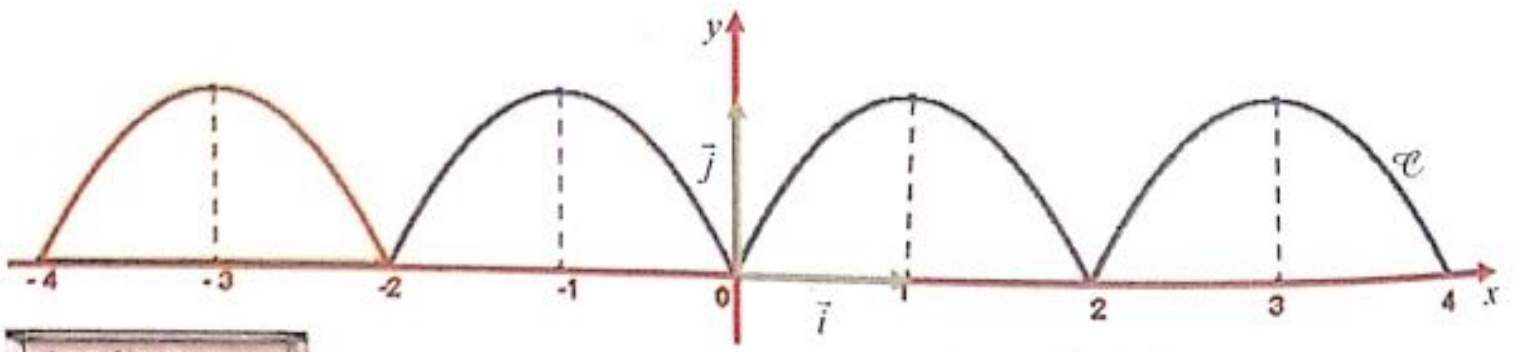
$$\begin{aligned}f(x+2)&=\left(x+2-2E\left(\frac{x}{2}+1\right)\right)\left(2E\left(\frac{x}{2}+1\right)-x-2+2\right)\\&=\left(x+2-2E\left(\frac{x}{2}\right)-2\right)\left(2E\left(\frac{x}{2}\right)+2-x-2+2\right)\\&=\left(x-2E\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(2E\left(\frac{x}{2}\right)-x+2\right)\\&=f(x)\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est périodique de période 2.

- Représentons la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[-4;4]$:

Puisque f est périodique de période 2, alors il suffit de tracer sa courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0;2[$ puis de procéder par translation de vecteur $2\vec{i}$ sur les autres intervalles pour obtenir la courbe complète sur l'intervalle $[-4;4]$.

On a pour tout $x\in[0;2[$: $E\left(\frac{x}{2}\right)=0$ (car $\frac{x}{2}\in[0;1[$), donc : $f(x)=x(-x+2)=-x^2+2x$.



Applications

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, périodique de périodique $T=3$ et telle que :

$$(\forall x\in[0;3])\ f(x)=|x-2|$$

a) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $I=[-6;9]$.

b) Calculer : $f(9,78)$ et $f(-8,75)$ et $f(2020)$.

c) Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, on pose : $I_k=[3k;3(k+1)[$.

Calculer $f(x)$ en fonction de x et k lorsque $x\in I_k$.

Scanné avec CamScanner

A PARABOLE ET HYPERBOLE

On considère les fonctions numériques f et g définies par : $f(x)=-x^2-2x+3$ et $g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$.

On désigne respectivement par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions f et g.

2) a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_g$ avec l'axe des abscisses.

3) a) Construire les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans le même repère.

b) En déduire l'ensemble solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $f(x)=g(x)$.

c) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\geq g(x)$.

SOLUTION

1) Tableau de variations de la fonction f :

En posant : $a=-1$, $b=-2$ et $c=3$, on obtient : $-\dfrac{b}{2a}=-1$ et $f(-1)=4$.

Le tableau de variations de la fonction f est donc :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	

Tableau de variations de la fonction g :

L'ensemble de définition de g est : $D_g=\mathbb{R}-\{-2\}$. De plus, on a : $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3>0$.

Le tableau de variations de la fonction g est donc :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	

2) a) Déterminons les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses :

Il s'agit alors de résoudre le système suivant : $\begin{cases}y=0\\ y=f(x)\end{cases}$

On a les équivalences suivantes :

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} y=0 \\ y=f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ -x^2-2x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \text{ ou } x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=0 \\ x=-3 \end{cases} \right)$$

Par suite, les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses sont : $A(1;0)$ et $B(-3;0)$.

b) Déterminons les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_g$ avec l'axe des abscisses :

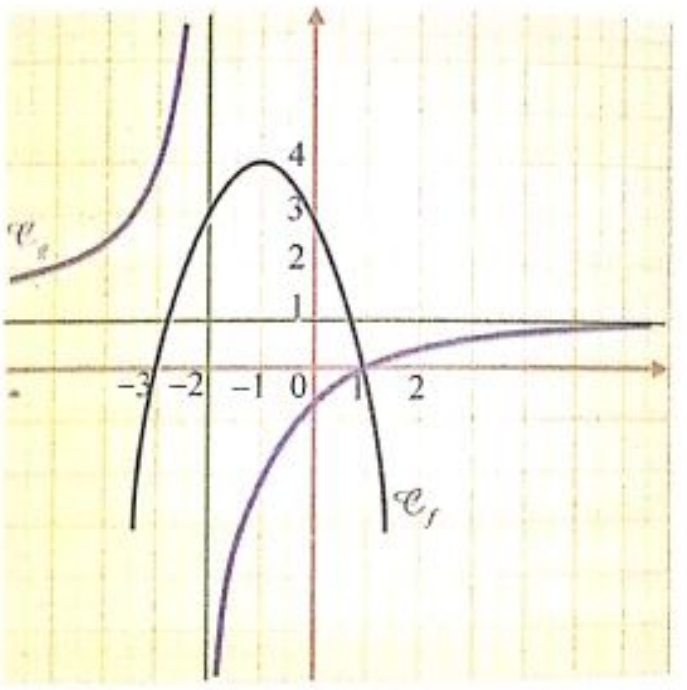
Il s'agit alors de résoudre le système suivant : $\begin{cases} y=0 \\ y=g(x) \end{cases}$

On a les équivalences suivantes : $\begin{cases} y=0 \\ y=g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ \dfrac{x-1}{x+2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$.

Par suite, le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_g$ avec l'axe des abscisses est : $A(1;0)$.

3) a) Construction des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$:

- La courbe $\mathscr{C}_f$ est une parabole de sommet $\Omega_1(-1;4)$ et d'axe la droite d'équation : $x=-1$.
- La courbe $\mathscr{C}_g$ est une hyperbole de centre $\Omega_2(-2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-2$ et $y=1$.



b) Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Comme $\mathscr{C}_f \cap \mathscr{C}_g = \{A(1;0)\}$, alors l'ensemble solution de l'équation $f(x)=g(x)$ est : $S_1=\{1\}$.

c) Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés sur la courbe $\mathscr{C}_g$ ou au-dessus d'elle. Par suite, l'ensemble solution demandé est : $S_2=]-2;1]$.

- Il faut bien connaître les tableaux de variations et les caractéristiques des graphes des fonctions usuelles vues dans le cours.
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés sur la courbe $\mathscr{C}_g$ ou en-dessous d'elle.
- Pour déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=g(x)$, on détermine le nombre de points d'intersection entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Scanné avec CamScanner

B MAJORATION ET MINORATION D'UNE FONCTION

Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

1) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

a) Montrer que la fonction f est minorée.

b) Montrer que la fonction f est majorée par $\frac{1}{2}$.

2) On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{x-E(x)}{\sqrt{x}}$

Montrer que la fonction g est bornée sur $]0;+\infty[$.

SOLUTION

1) a) Montrons que la fonction f est minorée :

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $x+\sqrt{x}\geq x$, donc : $\sqrt{x+\sqrt{x}}\geq\sqrt{x}$, c'est-à-dire que : $f(x)\geq 0$.

Ainsi, la fonction f est minorée par 0.

b) Montrons que la fonction f est majorée par $\frac{1}{2}$:

On a pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}.$$

On a : $\frac{1}{\sqrt{x}}>0$, donc : $1+\frac{1}{\sqrt{x}}>1$; par conséquent : $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1>2$. D'où : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ f(x)<\frac{1}{2}$

Comme $f(0)=0$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $f(x)<\frac{1}{2}$. En résumé : la fonction f est majorée par $\frac{1}{2}$.

2) Montrons que la fonction g est bornée sur $]0;+\infty[$:

On a pour tout $x\in]0;+\infty[$: $0\leq x-E(x)<1$, donc : $0\leq\frac{x-E(x)}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{x}}$, c'est-à-dire : $0\leq g(x)<\frac{1}{\sqrt{}}$

- Si $x\in]0;1[$, alors $E(x)=0$; ce qui entraîne que : $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$. D'où : $0\leq g(x)<1$.
- Si $x\in[1;+\infty[$, alors $\sqrt{x}\geq 1$; ce qui entraîne que : $0\leq g(x)<\frac{1}{\sqrt{x}}\leq 1$. D'où : $0\leq g(x)<1$.

On a donc montré que : $\left(\forall x\in]0;+\infty[\right)\quad 0\leq g(x)<1$

Par suite, la fonction g est bornée sur $]0;+\infty[$.

Scanné avec CamScanner



• Pour montrer qu'une fonction f est majorée par un réel M sur un ensemble D, il suffit de montrer qu'on a pour tout $x \in D$: $f(x) \leq M$. Pour se faire, on utilise souvent les propriétés de l'ordre dans $\mathbb{R}$, par exemple :

- Pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$: $a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0$.
- Les relations entre ordre et opérations.
- Les règles de calculs dans $\mathbb{R}$ (identités remarquables, conjugués, factorisation,....).
- L'inégalité triangulaire : $\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$ et $|a+b| \leq |a|+|b|$.
- Les inégalités suivantes ($x \in \mathbb{R}$) :

$$|\cos x| \leq 1 \;;\; |\sin x| \leq 1 \;;\; -|x| \leq x \leq |x| \;;\; x-1 < E(x) \leq x \;;\; E(x) \leq x < E(x)+1$$

- L'inégalité suivante : $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ où a et b deux réels positifs.
- etc.

La même remarque vaut pour montrer que f est minorée par un réel m sur D : $(\forall x \in D)\ f(x) \geq m$.

• Pour montrer que la fonction f est bornée sur un ensemble D, on peut montrer soit qu'elle est à la fois majorée et minorée sur D, soit trouver un réel positif S tel que : $(\forall x \in D)\ |f(x)| \leq S$.

• On peut parfois étudier les variations de la fonction f sur un intervalle I pour déduire un majorant ou un minorant de cette fonction sur cet intervalle.

C EXTREMUMS D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

1) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} + x - 4$

a) Montrer que la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que la fonction f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^+$.

2) On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2+2}$

Montrer que $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ est la valeur maximale absolue de la fonction g.

SOLUTION

1) a) Montrons que la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}^+$:

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $f(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} + \left(\sqrt{x}\right)^2 - 4 = \left(x+\sqrt{x}\right)^2 - 4$.

Par conséquent : $f(x)+4 = \left(x+\sqrt{x}\right)^2 \geq 0$. Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ f(x) \geq -4$.

Scanné avec CamScanner

Enfin, puisque $f(0)=-4$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $f(x)\geq f(0)$.

En résumé, -4 est la valeur minimale de la fonction f et elle est atteinte en $x_0=0$.

b) Montrons que la fonction f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^+$:

Par l'absurde, supposons que la fonction f est majorée sur $\mathbb{R}^+$; il existe donc un réel positif M tel que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $f(x)\leq M$. Il s'ensuit donc que :

$$f(x)\leq M \Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x}\right)^2\leq M+4 \Leftrightarrow x+\sqrt{x}\leq\sqrt{M+4} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^2\leq\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}$$

Par conséquent : $f(x)\leq M \Leftrightarrow \sqrt{x}\leq\sqrt{\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\leq\left(\sqrt{\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2$.

Cette dernière proposition est fausse car il suffit de prendre : $x=\left(\sqrt{\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2+1$.

Donc ce qu'on a supposé est faux. Par suite, la fonction f n'est pas majorée.

2) Montrons que $\frac{\sqrt{2}}{4}$ est la valeur maximale absolue de la fonction g :

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\frac{\sqrt{2}}{4}-g(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{|x|}{x^2+4}=\frac{\sqrt{2}x^2-4|x|+2\sqrt{2}}{4\left(x^2+2\right)}=\frac{\sqrt{2}\left(|x|-\sqrt{2}\right)^2}{4\left(x^2+2\right)}$.

Puisque $\frac{\sqrt{2}\left(|x|-\sqrt{2}\right)^2}{4\left(x^2+2\right)}\geq 0$, alors : $(\forall x\in\mathbb{R})\ g(x)\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$.

D'autre part : $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow\sqrt{2}\left(|x|-\sqrt{2}\right)^2=0\Leftrightarrow|x|-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow\left(x=\sqrt{2}\text{ ou }x=-\sqrt{2}\right)$.

Donc en particulier : $(\forall x\in\mathbb{R})\ g(x)\leq g\left(\sqrt{2}\right)$.

D'où : $\frac{\sqrt{2}}{4}$ est la valeur maximale absolue de la fonction g.

D COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS NUMÉRIQUES

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{6x^2+8x+11}{(x-1)^2}$

On considère les deux fonctions numériques g et h définies par : $h(x)=x^2+2$ et $g(x)=\frac{2x+3}{x-1}$

1) Dresser les tableaux de variations des fonctions g et h.

2) Étudier le signe de la fonction g.

3) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$: $f(x)=hog(x)$.

b) Étudier les variations de la fonction f sur les intervalles : $]1;+\infty[$ et $\left[-\frac{3}{2};1\right[$ et $]-\infty;-\frac{3}{2}\left]\right.$

Scanné avec CamScanner

SOLUTION

1) Tableau de variations de la fonction g :

L'ensemble de définition de g est : $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$. De plus, on a : $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 < 0$.

Le tableau de variations de la fonction g est donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$	↘		‖	↘	

Tableau de variations de la fonction h :

En posant : $a = 1$, $b = 0$ et $c = 2$, on obtient : $-\dfrac{b}{2a} = 0$ et $f(0) = 2$.

Le tableau de variations de la fonction f est donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)$	↘		2	↗	

2) Signe de la fonction g sur son ensemble de définition :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

3) a) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$: $f(x) = hog(x)$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$:

$$hog(x) = h(g(x)) = (g(x))^2 + 2 = \left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2 + 2 = \frac{4x^2+12x+9+2x^2-4x+2}{(x-1)^2}$$

Par conséquent : $hog(x) = \dfrac{6x^2+8x+11}{(x-1)^2} = f(x)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) = hog(x)$.

b) Variations de la fonction f sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$:

- La fonction g est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ et $g\left(\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\right) \subset \mathbb{R}^+$;
- La fonction h est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Scanné avec CamScanner

Par suite, la fonction $f = h\,o\,g$ est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$.

Variations de la fonction f sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$:

- La fonction g est décroissante sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$ et $g\left(\left[-\frac{3}{2};1\right[\right) \subset \mathbb{R}^-$;
- La fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

Par suite, la fonction $f = h\,o\,g$ est croissante sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$.

Variations de la fonction f sur $[1;+\infty[$:

- La fonction g est décroissante sur $[1;+\infty[$ et $g\left([1;+\infty[\right) \subset \mathbb{R}^+$;
- La fonction h est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Par suite, la fonction $f = h\,o\,g$ est décroissante sur $[1;+\infty[$.

- Pour déterminer, graphiquement, l'image d'un intervalle I, par une fonction numérique f, on suit les étapes suivantes :
  - Déterminer une partie $\mathscr{C}_1$ de sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ (dans le cas où $I \subset D_f$) qui correspond à l'intervalle I ;
  - Déterminer le projeté de $\mathscr{C}_1$ sur l'axe des ordonnées parallèlement à l'axe des abscisses ; ce projeté détermine une partie $J \subset \mathbb{R}$ (représentée sur l'axe des ordonnées).
    La partie J est l'image de l'intervalle I par la fonction f.
- Pour étudier la monotonie de la fonction $g\,o\,f$ sur un intervalle I, on suit les étapes suivantes :
  - On détermine la monotonie de la fonction f sur I ;
  - On détermine la monotonie de la fonction g sur $J = f(I)$;
  - On utilise la règle suivante :
    - ✓ Si f et g ont la même monotonie respectivement sur I et J, alors la fonction $g\,o\,f$ est croissante sur l'intervalle I,
    - ✓ Si f et g ont des sens de monotonie contraires respectivement sur I et J, alors la fonction $g\,o\,f$ est décroissante sur l'intervalle I.
- Voici quelques erreurs classiques auxquelles il convient de prêter plus de soin et d'attention :
  - Confondre f qui est une fonction et $f(x)$ qui est un élément de l'ensemble d'arrivée.
  - Toute fonction est soit croissante, soit décroissante.
  - Une fonction périodique admet une seule période.
  - Confondre un maximum et un majorant (ou un minimum et un minorant).

Scanné avec CamScanner

E FONCTION PARTIE ENTIÈRE

On désigne par $E(x)$ la partie entière d'un réel x.

1) Montrer que pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $x\le y\Rightarrow E(x)\le E(y)$

2) Montrer que pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $E(x)+E(y)\le E(x+y)\le E(x)+E(y)+1$

3) Montrer que pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $E(x)+E(y)+E(x+y)\le E(2x)+E(2y)$

4) a) Montrer que si $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$: $nE(x)\le E(nx)\le nE(x)+n-1$

b) En déduire que si $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$: $E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right)=E(x)$

5) a) Montrer que pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $E(x)-E(y)-1\le E(x-y)\le E(x)-E(y)$

b) Démontrer que pour tout $x\notin\mathbb{Z}$: $E(-x)=-E(x)-1$

6) a) Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $E(2x)=E(x)+E\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

b) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\sum_{k=0}^{n}E\left(\dfrac{x+2^k}{2^{k+1}}\right)=E(x)-E\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$

SOLUTION

1) Montrons que pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $x\le y\Rightarrow E(x)\le E(y)$

On sait que $E(x)\le x$, cela entraîne que $E(x)\le y$. Par définition de $E(y)$, on a : $y<E(y)+1$

Donc : $E(x)<E(y)+1$, c'est-à- dire : $E(x)\le E(y)$

2) Montrons que pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $E(x)+E(y)\le E(x+y)\le E(x)+E(y)+1$

On sait que : $E(x)\le x<E(x)+1$ et $E(y)\le y<E(y)+1$

donc : $E(x)+E(y)\le x+y<E(x)+E(y)+2$; d'où $E(x)+E(y)\le E(x+y)<E(x)+E(y)+2$.

Par suite : $E(x)+E(y)\le E(x+y)\le E(x)+E(y)+1$

3) Montrer que pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $E(x)+E(y)+E(x+y)\le E(2x)+E(2y)$

Posons : $p=E(x)$ et $q=E(y)$, on a alors la discussion suivante :

- Si $x\in\left[p,p+\dfrac{1}{2}\right[$ et $y\in\left[q,q+\dfrac{1}{2}\right[$, alors $x+y\in[p+q,p+q+1[$ et donc :

$$E(x+y)=p+q \text{ et } E(x)+E(y)+E(x+y)=2p+2q$$

On a $2x\in[2p,2p+1[$ et $2y\in[2q,2q+1[$ et donc $E(2x)+E(2y)=2p+2q$

Scanné avec CamScanner

Donc : $E(x)+E(y)+E(x+y)=E(2x)+E(2y)$

• Si $x\in\left[p+\frac{1}{2},p+1\right[$ et $y\in\left[q+\frac{1}{2},q+1\right[$; alors $x+y\in[p+q+1,p+q+2[$ et donc :

$E(x+y)=p+q+1$ et $E(x)+E(y)+E(x+y)=2p+2q+1$

On a $2x\in[2p+1,2p+2[$ et $2y\in[2q+1,2q+2[$; donc $E(2x)+E(2y)=2p+2q+2$

Donc : $E(x)+E(y)+E(x+y)\le E(2x)+E(2y)$.

• Si $x\in\left[p,p+\frac{1}{2}\right[$ et $y\in\left[q+\frac{1}{2},q+1\right[$, alors $x+y\in\left[p+q+\frac{1}{2},p+q+\frac{3}{2}\right[$ et donc :

$E(x+y)=p+q$ ou $E(x+y)=p+q+1$

On a $2x\in[2p+1,2p+2[$ et $2y\in[2q+1,2q+2[$ et donc $E(2x)+E(2y)=2p+2q+2$

Donc : $E(x)+E(y)+E(x+y)\le E(2x)+E(2y)$

• Même chose si $x\in\left[p+\frac{1}{2},p+1\right[$ et $y\in\left[q,q+\frac{1}{2}\right[$. On trouve aussi :

$E(x)+E(y)+E(x+y)\le E(2x)+E(2y)$

<u>Conclusion :</u> Pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $E(x)+E(y)+E(x+y)\le E(2x)+E(2y)$

4) a) Montrons que si $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$: $nE(x)\le E(nx)\le nE(x)+n-1$

On va faire un raisonnement par récurrence.

Initialisation : Pour $n=1$, on a bien : $E(x)\le E(x)\le E(x)$

Hérédité : Supposons que $nE(x)\le E(nx)\le nE(x)+n-1$ et montrons que :

$(n+1)E(x)\le E((n+1)x)\le(n+1)E(x)+n$

On a d'après le résultat de la question 2) : $E(nx)+E(x)\le E(nx+x)\le E(nx)+E(x)+1$

D'où : $E(nx)+E(x)\le E((n+1)x)\le E(nx)+E(x)+1$

Puisque : $nE(x)\le E(nx)\le nE(x)+n-1$

Alors : $nE(x)+E(x)\le E((n+1)x)\le nE(x)+n-1+E(x)+1$

Enfin : $(n+1)E(x)\le E((n+1)x)\le(n+1)E(x)+n$

Conclusion : Pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$: $nE(x)\le E(nx)\le nE(x)+n-1$.

b) Soit $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. D'après le résultat trouvé en 4) a) : $nE(x)\le E(nx)\le nE(x)+n-1$

Donc : $E(x)\le\frac{E(nx)}{n}\le E(x)+1-\frac{1}{n}<E(x)+1$; ce qui montre que : $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)=E(x)$.

Scanné avec CamScanner

5) a) Montrons que pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $E(x)-E(y)-1\le E(x-y)\le E(x)-E(y)$

D'après le résultat de la question 2) et en écrivant $x=(x-y)+y$, on aura :

$$E(x-y)+E(y)\le E(x)\le E(x-y)+E(y)+1$$

C'est-à-dire : $$E(x)-E(y)-1\le E(x-y)\le E(x)-E(y)$$

b) Démontrons que pour tout $x\notin\mathbb{Z}$: $E(-x)=-E(x)-1$

Posons : $p=E(-x)$. On a : $p\in\mathbb{Z}$ et $p\le -x<p+1$. Il s'ensuit donc que : $-p-1<x\le -p$.

Puisque $x\notin\mathbb{Z}$, alors : $-p-1\le x<-p$, et par conséquent : $E(x)=-p-1$

D'où, pour tout $x\notin\mathbb{Z}$: $E(-x)=-E(x)-1$

6) a) Démontrons que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $E(2x)=E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right)$

Posons $E(x)=p$ avec $p\in\mathbb{Z}$. Deux cas peuvent se présenter :

- Si $x\in\left[p,p+\frac{1}{2}\right[$, alors $x+\frac{1}{2}\in\left[p+\frac{1}{2};p+1\right[$ et $2x\in[2p,2p+1[$. Par conséquent :

$$E\left(x+\frac{1}{2}\right)=p\ ,\ E(2x)=2p \text{ et donc : } E(2x)=E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

- Si $x\in\left[p+\frac{1}{2},p+1\right[$, alors $x+\frac{1}{2}\in\left[p+1,p+\frac{3}{2}\right[$ et $2x\in[2p+1,2p+2[$. Par conséquent :

$$E\left(x+\frac{1}{2}\right)=p+1\ ,\ E(2x)=2p+1 \text{ et donc : } E(2x)=E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Conclusion : Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $E(2x)=E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right)$

b) Calcul de $\sum_{k=0}^{n}E\left(\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right)$:

On a d'après le résultat de la question 6) a) :

$$E\left(\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right)=E\left(\frac{x}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right)=E\left(\frac{x}{2^k}\right)-E\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)$$

Donc : $$\sum_{k=0}^{n}E\left(\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(E\left(\frac{x}{2^k}\right)-E\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right)=E(x)-E\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

Remarque : On peut faire aussi un raisonnement par récurrence.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES D'APPLICATION

ENSEMBLE DE DÉFINITION D'UNE FONCTION

EXERCICE 01

Vérifier que la fonction f est bien définie sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$; $I=]1;+\infty[$.

2) $f(x)=\sqrt{3-x}$; $I=]-\infty;3]$.

3) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$; $I=\mathbb{R}$.

4) $f(x)=\sqrt{3-x^2}$; $I=\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$.

5) $f(x)=\sqrt{(1+\cos x)(1-\sin x)}$; $I=\mathbb{R}$.

6) $f(x)=\sqrt{\sin x}$; $I=[0;\pi]$.

EXERCICE 02

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}$; 2) $f(x)=3x^2-x+5$

3) $f(x)=\dfrac{2x-3}{2x^2-x-1}$; 4) $f(x)=\dfrac{2-x}{x^2+x+1}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{(4x^2-9)(x^2-1)}$; 6) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-x}$

EXERCICE 03

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{3}{2|x|-3}$; 2) $f(x)=\dfrac{x-1}{1-2|x|}$

3) $f(x)=\dfrac{2-x}{3|x|+5}$; 4) $f(x)=\dfrac{2x}{4x^2-7|x|+3}$

5) $f(x)=\dfrac{-5x-7}{x^2+|x|}$; 6) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-|x+2|}$

EXERCICE 04

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\sqrt{5+x}-\sqrt{2-x}$; 2) $f(x)=\sqrt{2|x|-1}$

3) $f(x)=\sqrt{1+|x|}$; 4) $f(x)=\sqrt{2x^2+x-1}$

5) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$; 6) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

7) $f(x)=\dfrac{6x-4}{\sqrt{7-2x}}$; 8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-2}}$.

EXERCICE 05

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=2\cos x-\sin x$; 2) $f(x)=3x+\tan x$

3) $f(x)=\dfrac{\sin x}{2\cos x-1}$; 4) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{3}-\tan x}$

5) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin x+\sqrt{3}}$; 6) $f(x)=\sqrt{2\cos x-\sqrt{3}}$

7) $f(x)=\dfrac{3\sin x}{1-2\cos^2 x}$; 8) $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{3}{\sin(3x)}$

EXERCICE 06

Soit la fonction : $f: x\mapsto \dfrac{|x|-1}{x^2-1}-\dfrac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Simplifier l'expression de $f(x)$ pour tout $x\in D_f$.

EXERCICE 07

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+5x+4} ; & x\le -2 \\ f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} ; & x>-2 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

PARITÉ D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

EXERCICE 08

Étudier la parité de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=|x-2|-|x+2|$; 2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

3) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2-9}}$; 4) $f(x)=x^2-2|x|+3$

5) $f(x)=x|x|+1$; 6) $f(x)=x^3+4x$

7) $f(x)=x^2+7x-4$; 8) $f(x)=x-\dfrac{9}{x}$

EXERCICE 09

Étudier la parité de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\cos^2 x-\sin x$; 2) $f(x)=\sin(3x)$

3) $f(x)=x-\tan^3 x$; 4) $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+x^2}$

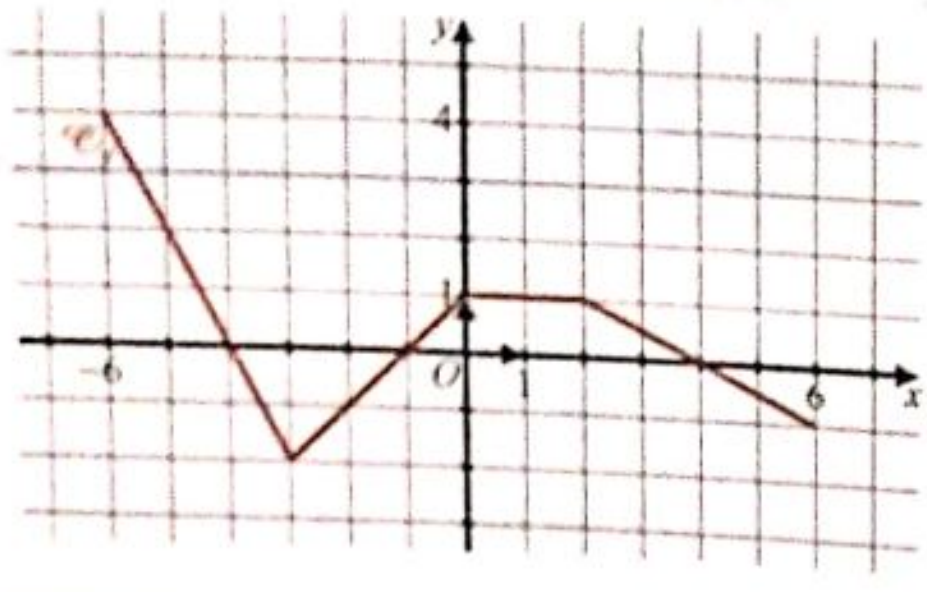
5) $f(x)=\dfrac{2\cos x+1}{|\sin x|}$; 6) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{2-\cos x}$

7) $f(x)=|\sin x-x|$; 8) $f(x)=x^3\tan(3x)$

VARIATIONS D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

EXERCICE 10

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-6;6]$ et dont la représentation graphique est la suivante :



1) Déterminer l'expression $f(x)$ en fonction de x pour tout $x\in[-6;6]$.

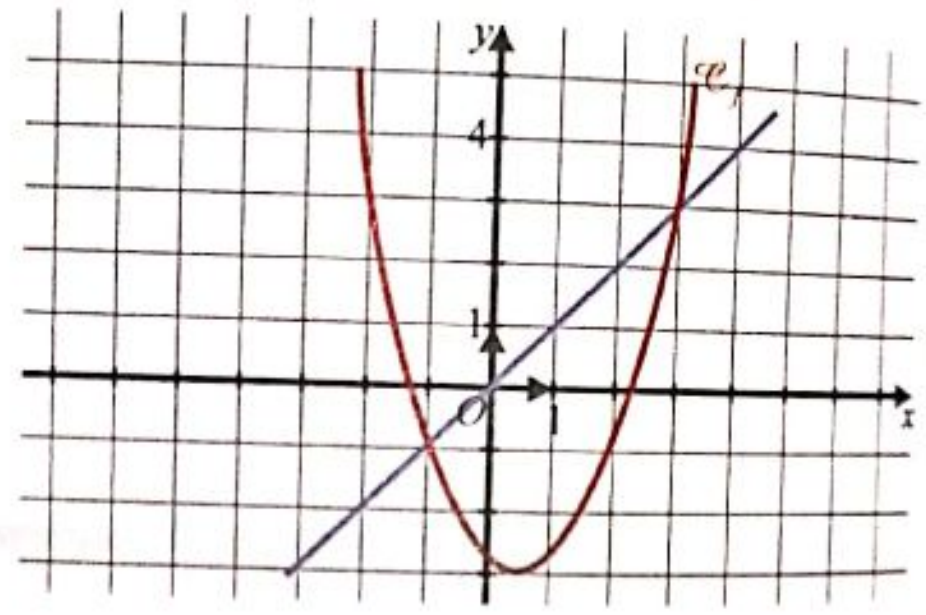
2) Calculer $f\left(\sqrt{3}\right)$ et $f\left(\dfrac{22}{7}\right)$.

3) Déterminer le signe de $f(x)$ sur $[-6;6]$.

4) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

EXERCICE 11

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et dont la représentation graphique est la suivante :



1) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x)=x$.

2) Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

a) $f(x)\geq x$; b) $f(x)<x$

3) Déterminer l'expression de $f(x)$ sachant que f est un polynôme du second degré.

4) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 12

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=|x+1|-2|x|+|x-1|-1$$

$\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Montrer que la fonction f est paire.

2) Étudier les variations de la fonction f.

3) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

4) Résoudre graphiquement l'inéquation suivante :

$$|x+1|+|x-1|>2|x|+\frac{2x+4}{5}$$

Scanné avec CamScanner

COMPARAISON DE DEUX FONCTIONS

EXERCICE 13

Étudier le signe de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=x^2-5x+6$; 2) $f(x)=-15x^2+x+2$

3) $f(x)=\dfrac{2x-3}{4x+7}$; 4) $f(x)=\dfrac{\sin x-1}{1-\cos x}$

5) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{2x^2+x-1}$; 6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$

7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+x}$; 8) $f(x)=\dfrac{1-x}{2\sin x-3}$

9) $f(x)=\sin x(2\cos x-1)$; 10) $f(x)=\dfrac{\tan x}{1-\sin x}$

EXERCICE 14

Soit f et g les fonctions définies par :

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{x-1}{2x-1}$$

1) Déterminer les ensembles de définition de f et g.

2) Comparer les fonctions f et g.

3) Comparer les nombres suivants :

$$a=\frac{0,9999}{0,9998} \quad \text{et} \quad b=\frac{1,0002}{1,0001}$$

EXERCICE 15

Comparer les fonctions f et g dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{2}{x^2+3}$ et $g(x)=\dfrac{2}{x+3}$.

2) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ et $g(x)=x^2$.

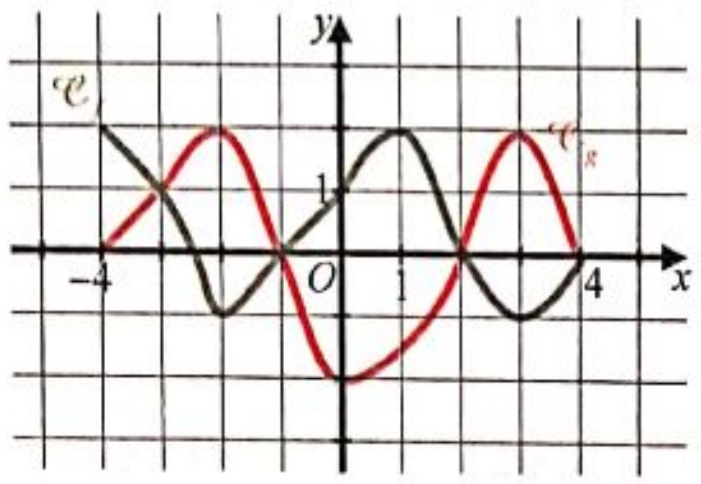
3) $f(x)=x^2-3x+5$ et $g(x)=-x^2+2x+2$.

4) $f(x)=\dfrac{3x^2-x+3}{x-1}$ et $g(x)=3x-2$.

5) $f(x)=\dfrac{x}{2}$ et $g(x)=\dfrac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x}$.

EXERCICE 16

Soit $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de deux fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.



1) a) Comparer les fonctions f et g sur $[-4;4]$.

b) En déduire les solutions dans $[-4;4]$ de l'inéquation : $f(x)>g(x)$.

2) Déterminer le signe de chacune des fonctions f et g.

3) Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions f et g.

EXERCICE 17

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\frac{x^2-6x+5}{-x^2+x+6}$$

$\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.

FONCTION MAJORÉE – MINORÉE - BORNÉE

EXERCICE 18

1) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2x^2-4x-1$$

Montrer que la fonction f est minorée par -3.

2) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=\frac{1}{x^2-2x+2}$$

a) Déterminer D_g l'ensemble de définition de g.

b) Montrer que : $(\forall x\in D_g)\ 0<g(x)\leq 1$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 19

1) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

Montrer que la fonction f est bornée par $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

2) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Montrer que la fonction g est bornée par 0 et 1.

EXERCICE 20

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-x^2+x+\frac{7}{4}$$

1) Montrer que la fonction f est majorée par 2.

2) Montrer par l'absurde que f n'est pas minorée.

EXERCICE 21

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{2}{|x-2|-1}$$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^-\right)\ 0<f(x)\le 2$

EXERCICE 22

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Étudier le signe de la fonction f.

3) Montrer que la fonction f est majorée par $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

EXERCICE 23

Soit f et g les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$

par : $f(x)=\frac{x\cos x}{x^2+1}$ et $g(x)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$.

Montrer que f et g sont bornées sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 24

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{2x^4-x^2}{x^4+1}$$

1) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$|f(x)|\le\frac{2x^4}{x^4+1}+\frac{x^2}{x^4+1}$$

2) En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 25

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{4x+3}{\sqrt{x^2+1}}$$

1) Vérifier que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\ (4x+3)^2\le 25\left(x^2+1\right)$

2) En déduire que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\ |f(x)|\le 5$

EXTREMA D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

EXERCICE 26

1) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-x^2+4x+5$$

Montrer que 9 est la valeur maximale absolue de f.

2) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=x^2-2x+3$$

Montrer que 2 est la valeur minimale absolue de g.

EXERCICE 27

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$$

1) Montrer que 1 est la valeur minimale absolue de f.

2) Montrer que $\frac{7}{3}$ est la valeur maximale absolue de f.

EXERCICE 28

Soit la fonction $f: x\mapsto\frac{\cos x}{1+\sqrt{x^2+1}}$.

Montrer que f admet un maximum absolu sur $\mathbb{R}$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 29

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 + 3x$$

1) Montrer que $f(1)$ est la valeur maximale de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$.

2) a) Vérifier que la fonction f est impaire.

b) En déduire la valeur minimale de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}^-$.

EXERCICE 30

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_*^*)\ f(x) \geq 2$

2) La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}^*$? Justifier

3) La fonction f admet-elle un minimum sur $\mathbb{R}^*$? un maximum sur $\mathbb{R}^*$?

MONOTONIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

EXERCICE 31

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 6x$

1) Vérifier que la fonction f est impaire.

2) Montrer que pour tous réels x et y tels que $x \neq y$:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = x^2 + xy + y^2 - 6$$

3) Étudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $\left[0;\sqrt{2}\right]$ et $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$.

4) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

5) En déduire les extrema de la fonction f.

EXERCICE 32

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{|x| + 1}$$

1) Étudier la parité de la fonction f.

2) Montrer que la fonction f admet un minimum absolu au point $x_0 = 1$.

3) a) Étudier la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles $[0;1]$ et $[1;+\infty[$.

b) Donner le tableau de variations de la fonction f.

EXERCICE 33

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^-$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^3 + 2}$$

1) Montrer que pour tous réels positifs a et b :

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{2 - ab(a+b)}{(a^3+2)(b^3+2)}$$

2) a) Étudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $[0;1]$ et $[1;+\infty[$.

b) En déduire que : $(\forall x \in [2;3])\ \frac{3}{29} \leq f(x) \leq \frac{1}{5}$

EXERCICE 34

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x|x|}{x^2 + 1}$$

1) Étudier la parité de la fonction f.

2) Étudier la monotonie de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.

3) En déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}^-$.

EXERCICE 35

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{9 - x^2}}$

1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

b) Étudier la parité de la fonction f.

2) Soit a et b deux éléments de D_f.

a) Calculer $(f(a))^2 - (f(b))^2$.

b) En déduire la monotonie de f sur chacun des intervalles $[0;3[$ et $]-3;0]$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 36

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{|x|}{x^2+|x|+1}$$

1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

b) Étudier la parité de la fonction f.

2) Étudier la monotonie de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.

3) En déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}^-$ puis dresser le tableau de variations de f.

EXERCICE 37

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=x+\frac{3}{x}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f puis vérifier que la fonction f est impaire.

2) a) Soit a et b deux éléments distincts de D_f.

Montrer que : $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{ab-3}{ab}$.

b) En déduire la monotonie de f sur chacun des intervalles $]0;\sqrt{3}]$ et $[\sqrt{3};+\infty[$.

3) Dresser le tableau de variations de f sur D_f.

4) Déterminer les extrema de la fonction f.

EXERCICE 38

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=|x+1|-|x-1|$$

1) Étudier la parité de la fonction f.

2) Donner une expression simplifiée de $f(x)$ puis étudier les variations de la fonction f.

3) Tracer $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 39

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=|x+2|+|x-2|+1$$

1) Étudier la parité de la fonction f.

2) Donner une expression simplifiée de $f(x)$ puis étudier les variations de la fonction f.

3) Tracer $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 40

Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $[-5;6]$ par le tableau de variations suivant :

x	-5		-4		-3		0		3		5		6
$f(x)$	-1	↗	0	↗	2	↘	0	↗	1	↘	0	↘	-2

1) Déterminer les extrema de la fonction f.

2) Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[-5;6]$.

EXERCICE 41

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{3-2x}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) a) Soit a et b deux éléments distincts de D_f.

Montrer que :

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{-2}{\sqrt{3-2a}+\sqrt{3-2b}}.$$

b) En déduire la monotonie de f sur D_f.

3) Étudier les variations de la fonction g définie par :

$$g(x)=\sqrt{3-2|x|}$$

EXERCICE 42

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+x+1}$$

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f(x)>-\frac{1}{2}$

2) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Scanné avec CamScanner

FONCTION TRINÔME - FONCTION HOMOGRAPHIQUE

EXERCICE 43

Dresser le tableau de variations de la fonction f puis tracer sa courbe représentative dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=5-x^2$; 2) $f(x)=x^2-2x+3$

3) $f(x)=-x^2+x+2$; 4) $f(x)=2(x-3)^2$

5) $f(x)=x^2+2x$; 6) $f(x)=-2x^2+3x-5$

EXERCICE 44

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2-3x+2$$

1) Dresser le tableau de variations de f .

2) Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

c) Déterminer graphiquement $f([0;4])$.

3) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=|x^2-3x+2|$$

a) Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

b) Dresser le tableau de variations de g .

c) Déterminer selon les valeurs du paramètre m , le nombre de solutions de l'équation :

$$|x^2-3x+2|=m$$

EXERCICE 45

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x(4-|x|)$$

1) Étudier la parité de la fonction f .

2) Étudier la monotonie de f puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.

3) Tracer $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

4) En déduire les extrema de la fonction f .

EXERCICE 46

Dresser le tableau de variations de la fonction f puis tracer sa courbe représentative dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=4-\dfrac{2}{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-3}$

3) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$; 4) $f(x)=3+\dfrac{1}{x+1}$

5) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$; 6) $f(x)=\dfrac{1-2x}{2-x}$

EXERCICE 47

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\frac{2x-3}{x-2}$$

1) Dresser le tableau de variations de f .

2) Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

c) Déterminer graphiquement $f(]2;3])$.

3) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=\frac{2|x|-3}{|x|-2}$$

a) Étudier la parité de la fonction g .

b) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}^+-\{2\}: g(x)=f(x)$ puis dresser le tableau de variations de g .

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

d) Déterminer selon les valeurs du paramètre m , le nombre de solutions de l'équation :

$$(2-m)|x|-3+2m=0$$

Scanné avec CamScanner

1 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 48

Soit f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x)=\frac{2x}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x)=x^2$$

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=g(x)$.

b) Interpréter le résultat graphiquement.

2) Tracer les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

3) En déduire une comparaison des fonctions f et g.

COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS NUMÉRIQUES

EXERCICE 49

Pour chacun des cas suivants, calculer $f\,o\,g$ et $g\,o\,f$ après avoir déterminé leurs ensembles de définition.

1) $f(x)=2x-3$ et $g(x)=x+5$.

2) $f(x)=x^2$ et $g(x)=x-1$.

3) $f(x)=x^2$ et $g(x)=\frac{x+1}{x}$.

4) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ et $g(x)=\frac{x+2}{x-3}$.

5) $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=x^2-4$.

6) $f(x)=x^3$ et $g(x)=\frac{1}{x-1}$.

EXERCICE 50

Pour chacun des cas suivants, écrire la fonction f sous forme de composée de deux fonctions usuelles :

1) $f(x)=(2x-3)^2$; 2) $f(x)=\frac{2}{3x-5}$

3) $f(x)=2\sqrt{x}+3$; 4) $f(x)=\sqrt{5-3x}$

5) $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$; 6) $f(x)=\sqrt{\cos x-\frac{1}{2}}$

7) $f(x)=\frac{\sin x}{1-\sin x}$; 8) $f(x)=-\frac{1}{\cos x}$

EXERCICE 51

Pour chacun des cas suivants, écrire la fonction f sous forme de composée de deux fonctions usuelles :

1) $f(x)=x+\sqrt{x}$; 2) $f(x)=\frac{1}{2+\sqrt{x}}$

3) $f(x)=(x+1)^3$; 4) $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$

5) $f(x)=\sqrt{2-x^2}$; 6) $f(x)=\sqrt{5x-3}$

7) $f(x)=x^6-2x^3+1$; 8) $f(x)=\frac{-1}{(1-2x)^2}+3$

EXERCICE 52

Soit f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x)=x^2+2 \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{2x+3}{x-1}$$

1) a) Étudier les variations de la fonction g.

b) Étudier le signe de $g(x)$ sur D_g.

2) Étudier les variations de la fonction f.

3) On considère la fonction numérique h définie par :

$$h(x)=f\,o\,g(x)$$

a) Déterminer D_h l'ensemble de définition de h.

b) Calculer $h(x)$ pour tout $x\in D_h$.

c) En utilisant les variations de la composée de deux fonctions, étudier les variations de la fonction h sur les intervalles suivantes :

$]1;+\infty[$ et $\left]-\frac{3}{2};1\right[$ et $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[$

EXERCICE 53

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-x^2+x+6$$

1) Donner le tableau de variations de f.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x)\geq\frac{1}{2}$.

3) Étudier la monotonie de la fonction $f\,o\,f$.

4) Calculer $f\,o\,f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 54

Soit f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x)=\frac{x}{x+2} \quad \text{et} \quad g(x)=\sqrt{x+1}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $h=g\,o\,f$.

2) Dresser le tableau de variations de f et g.

3) Étudier les variations de la fonction h sur chacun des intervalles $]-\infty;-2[$ et $[-1;+\infty[$.

4) Calculer $h(x)$ pour tout $x \in D_h$.

EXERCICE 55

Soit f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x)=x^2-x \quad \text{et} \quad g(x)=\sqrt{x}$$

1) Étudier les variations des fonctions f et g.

2) Étudier les variations de la fonction $h=f\,o\,g$ sur chacun des intervalles $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ et $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$.

3) Montrer que h admet un minimum absolu au point d'abscisse $\frac{1}{4}$.

4) On considère la fonction numérique k définie par :

$$k(x)=g\,o\,f(x)$$

a) Déterminer D_k l'ensemble de définition de k.

b) Étudier les variations de la fonction k.

c) Calculer $k(x)$ pour tout $x \in D_k$.

EXERCICE 56

On considère la fonction numérique f définie par :

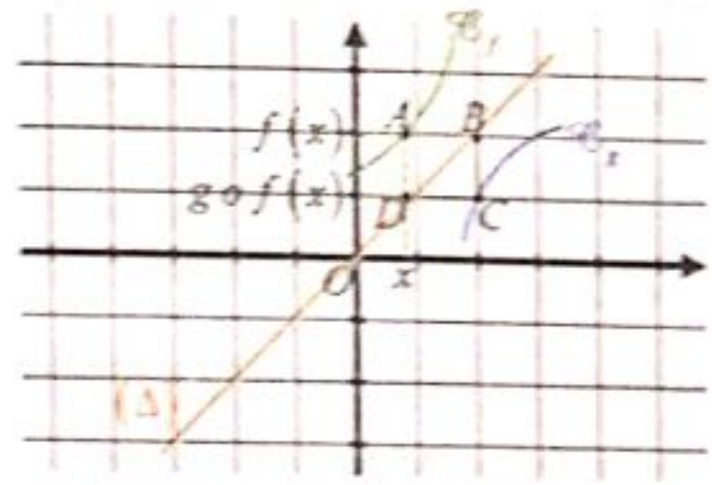
$$f(x)=\frac{6x^2+8x+11}{(x-1)^2}$$

1) Montrer que pour tout $x \in D_f$: $f(x)=2+(g(x))^2$ où g est une fonction à déterminer.

2) Étudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles : $\left]-\frac{3}{2};1\right[$ et $]-\infty;-\frac{3}{2}[$ et $]1;+\infty[$.

EXERCICE 57

1) Observer bien le graphe en-dessous et donner une méthode de construction du point $M(x;g\,o\,f(x))$ en utilisant les graphes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et la droite (Δ) d'équation cartésienne $y=x$.



2) En utilisant cette technique, tracer la courbe de la fonction h: $x \mapsto (x+1)^3$.

EXERCICE 58

Soit f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-1 \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{2x-1}{x+1}$$

1) Étudier les variations des fonctions f et g.

2) Montrer que la fonction f est majorée par 1.

3) Déterminer l'image de l'intervalle $[-1;0]$ par f.

4) On considère la fonction numérique h définie par :

$$h(x)=\frac{2x^2-8x+6}{x^2-4x}$$

a) Déterminer D_h l'ensemble de définition de h.

b) Vérifier que : $(\forall x \in D_h)\ h(x)=g\,o\,f(x)$

c) Étudier les variations de la fonction h sur chacun des intervalles suivants :

$]-\infty;0[$; $]0;2]$; $[2;4[$; $]4;+\infty[$

EXERCICE 59

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{-x}{1-\sqrt{x+1}} \ ; \ x \neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que : $\left(\forall x \in D_f\right)\ f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$.

3) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé.

4) Montrer que : $f\left([-1;0[\right) = [1;2[$.

5) Soit a un réel tel que $a \geq -1$ et g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 + a$.

a) Déterminer D_{fog} puis calculer $fog(x)$ pour tout $x \in D_{fog}$.

b) Déterminer la valeur du réel x pour laquelle :

$$\left(\forall x \in D_{fog}\right)\ fog(x) = 1 + |x|$$

FONCTION PÉRIODIQUE

EXERCICE 60

1) Montrer que T est une période de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \cos(3x)$ et $T = \dfrac{2\pi}{3}$.

b) $f(x) = \sin(2x) + \cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$ et $T = 6\pi$.

c) $f(x) = \cos^2 x + \sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{9}\right)$ et $T = \pi$.

d) $f(x) = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \sin^2(x)$ et $T = \pi$.

e) $f(x) = \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$ et $T = \pi$.

2) Déterminer une période de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$f(x) = \cos(3x) + \sin x$; $f(x) = 3\cos x + 1$

$f(x) = \cos\dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{x}{3}$; $f(x) = 2\tan x.\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$f(x) = \cos^2 x + \sin(2x)$; $f(x) = \dfrac{\tan x}{1 - \tan x}$

EXERCICE 61

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- f est périodique de période 1 ;
- Pour tout $x \in [0;1[$: $f(x) = 2x$.

1) Représenter graphiquement la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[-5;5]$.

2) Calculer : $f(245,75)$ et $f(2018,12)$.

3) Calculer $f(x)$ en fonction de x pour tout $x \in [2018;2019[$.

EXERCICE 62

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- f est périodique de période 2 ;
- Pour tout $x \in [0;2[$: $f(x) = \sin x$.

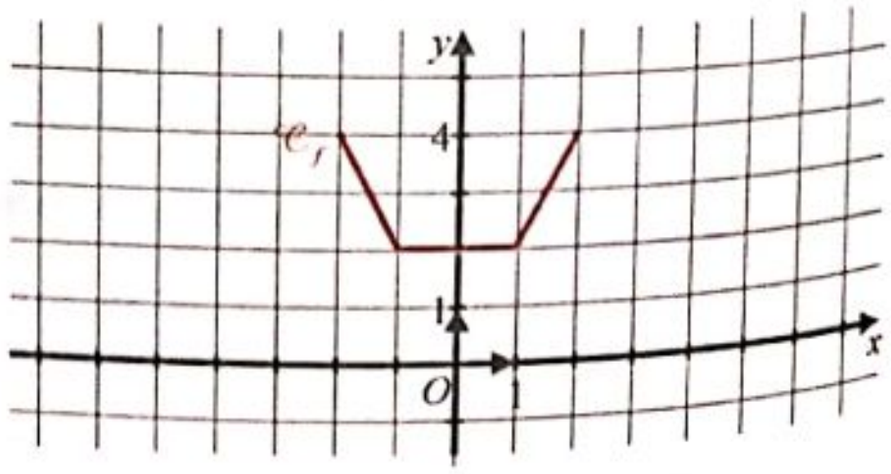
1) Représenter graphiquement la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[-5;5]$.

2) Calculer : $f(4,5)$; $f(2245,75)$; $f(2\pi)$.

3) Calculer $f(x)$ en fonction de x pour tout $x \in [2018;2020[$.

EXERCICE 63

La figure en-dessous est la représentation graphique de la restriction d'une fonction f sur $[-2;2]$.



1) Montrer que pour tout $x \in [-2;2]$:

$$f(x) = |x+1| + |x-1|$$

2) On suppose que la fonction f est périodique de période 4 et on considère l'intervalle :

$I_k = [4k;4(k+1)[$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Scanné avec CamScanner

Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x et k pour tout $x \in I_k$ puis construire la représentation graphique de la restriction de f sur $[-6;10]$.

EXERCICE 64

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- f est périodique de période 2 ;
- Pour tout $x \in [0;1]$: $f(x) = x$;
- Pour tout $x \in]1;2]$: $f(x) = 2 - x$.

Représenter graphiquement la restriction de f sur l'intervalle $[-5;7]$.

EXERCICE 65

On considère la fonction numérique f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ telle que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x+1) = \frac{1}{1-f(x)}$$

Montrer que f est périodique.

FONCTION PARTIE ENTIÈRE

EXERCICE 66

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

1) $E(x) = 0$; 2) $E(x) = 2$; 3) $E(x) = -3$

4) $3E(x) - 1 = 0$; 5) $E(x) < 2$; 6) $E(x) \geq -1$

7) $-1 \leq E(x) < 3$; 8) $2E(x) + 3 < 0$

EXERCICE 67

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x - E(x)$$

1) Calculer $f\left(\frac{2019}{2}\right)$ et $f\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ ce qui suit :

$$f(x) = x \quad ; \quad f(x) \leq 2x + 1$$

EXERCICE 68

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x - E(x))(E(x) - x + 2)$$

1) Calculer $f\left(\frac{2019}{2}\right)$ et $f\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ ce qui suit :

$$f(x) = x \quad ; \quad f(x) \leq 2x + 1$$

EXERCICE 69

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x - E(x))(E(x) - x + 2)$

1) Montrer que f est périodique de période 1.

2) Représenter la restriction de la fonction f sur chacun des intervalles $[0;1[$ et $[-4;4]$.

3) Résoudre dans $[-4;4]$ les équations suivantes :

a) $f(x) = 0$; b) $f(x) = 1$

c) $f(x) = 8$; d) $2f(x) = 3$

EXERCICE 70

Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $d(x) = x - E(x)$

1) Calculer les images des réels suivants par d :

$$-5 \quad ; \quad \sqrt{2} \quad ; \quad 8 \quad ; \quad \frac{3}{2} \quad ; \quad 5{,}2$$

2) Déterminer trois réels positifs et trois réels négatifs vérifiant l'égalité : $d(x) = 0{,}3$

3) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 0 \leq d(x) < 1$

4) Montrer que la fonction d est périodique puis représenter sa restriction sur l'intervalle $[-6;6]$.

EXERCICE 71

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = E(x)$$

Calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(-\sqrt{2}\right)$ et $f(2020)$

Scanné avec CamScanner

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 72

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On pose : $S = f + g$ et $P = f \times g$.

1) a) Montrer que si f et g sont croissantes sur I, alors S est croissante sur I.

b) Déterminer la monotonie de S lorsque f et g sont décroissantes sur I.

c) On suppose dans cette question que f et g sont monotones et de monotonies contraires sur I. La fonction S est-elle monotone sur I ?

d) Applications :

Déterminer la monotonie des fonctions suivantes sur l'intervalle I :

- $U : x \mapsto x^3 + 2x^2 + 5x - 3$ et $I = \mathbb{R}^+$.
- $V : x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{x}$ et $I = \mathbb{R}_-^*$.
- $W : x \mapsto \sqrt{x+1} + x^3$ et $I = [-1; +\infty[$.

2) On suppose dans cette question que les fonctions f et g sont positives sur l'intervalle I.

a) Montrer que si les fonctions f et g ont la même monotonie sur I, alors la fonction P est monotone et déterminer sa monotonie.

b) On suppose dans cette question que f et g sont monotones et de monotonies contraires sur I. La fonction P est-elle monotone sur I ?

c) Applications :

Déterminer la monotonie des fonctions suivantes sur l'intervalle I :

- $P_1 : x \mapsto x\sqrt{x+3}$ et $I = [1; +\infty[$.
- $P_2 : x \mapsto \dfrac{\cos x}{x}$ et $I = \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
- $P_3 : x \mapsto (x^2 - 4x)\sqrt{x-1}$ et $I = [2; +\infty[$.

EXERCICE 73

Soit f la fonction numérique définie sur $[0;1]$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

1) Montrer que f est décroissante sur $[0;1]$.

2) En déduire que la fonction f est majorée par 1 et minorée par -1.

EXERCICE 74

Soit f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Étudier les variations des fonctions f et g.

2) a) Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.

b) Vérifier que les points $A(1;1)$ et $B(4;2)$ appartiennent à chacune des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

c) Tracer les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

3) Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$x(x-4) + 3(2 - \sqrt{x}) \geq 0$$

EXERCICE 75

Soit f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x) = \frac{2}{27}x^3 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x+1}$$

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Étudier les variations des fonctions f et g.

2) Vérifier que le point $A(3;2)$ appartient à chacune des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

3) Tracer les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Scanné avec CamScanner

4) Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$2x^3 - 27\sqrt{x+1} \geq 0$$

EXERCICE 76

Soit f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{4-x}{1+2x}$$

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Dresser les tableaux des variations de f et g.

2) a) Calculer $f(1)$ et $g(1)$.

b) Tracer les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

3) Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$g(x) - f(x) \geq 0$$

EXERCICE 77

Soit f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x) = x^2 + 4x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x+1}$$

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $f(0)$ et $g(0)$.

2) Étudier les variations des fonctions f et g.

3) a) Tracer les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$f(x)g(x) \geq 0$$

4) Soit h la fonction numérique définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(x) = x + 2 + 4\sqrt{x+1}$

a) Vérifier que : $h = f \circ g$

b) Étudier les variations de la fonction h.

EXERCICE 78

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x - E(x)}{\sqrt{x}}$.

1) Déterminer D_f ensemble de définition de f.

2) Montrer que f est bornée sur D_f.

EXERCICE 79

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x^2+1}$$

1) a) Montrer que f est minorée par le nombre 1.

Le nombre 1 est-il le minimum absolu de f ?

b) Montrer que f est majorée par le nombre 2.

Le nombre 2 est-il le maximum absolu de f ?

2) Soit a et b deux réels distincts.

a) Montrer que : $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} = \dfrac{a+b}{(a^2+1)(b^2+1)}$.

b) En déduire les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $[0;+\infty[$ et $]-\infty;0]$.

3) Soit g la fonction numérique définie par :

$$g(x) = \sqrt{x-1}$$

Étudier les variations de la fonction g.

4) Soit h la fonction numérique définie par :

$$h(x) = g \circ f(x)$$

a) Déterminer D_h ensemble de définition de h.

b) Étudier les variations de h sur D_h.

c) En déduire la valeur minimale absolue de h.

EXERCICE 80

Soit f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x) = \sqrt{7-x} - \sqrt{x-2} \quad \text{et} \quad g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer D_f ensemble de définition de f.

2) Étudier les variations des fonctions f et g sur l'intervalle $[2;7]$.

3) a) Vérifier que le point $A(3;1)$ appartient à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

b) En déduire l'ensemble solution de l'inéquation :

$$f(x) < g(x)$$

Scanné avec CamScanner

1 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 81

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

1) Soit x et y deux réels positifs et distincts.

a) Montrer que :

$$f(x)-f(y)=\frac{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{y}+1\right)}$$

b) En déduire que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrer que la fonction f est bornée par 1 et -1.

3) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$h(x)=\frac{\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x^3}+1}$$

En utilisant les variations de la composée de deux fonctions, étudier les variations de la fonction h.

EXERCICE 82

Soit f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x)=\sqrt{3+x} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{2}{x}$$

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i}\ ;\vec{j}\right)$.

1) a) Vérifier que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent au point $A(1;2)$.

b) Tracer les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

c) Déterminer graphiquement les solutions de l'inéquation : $x\sqrt{3+x}-2\geq 0$

2) a) Montrer que : $\left(\forall x\in\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right]\right)\ 3+\frac{2}{x}\geq 0$.

b) Soit h la fonction numérique définie par :

$$h(x)=\sqrt{3+\frac{2}{x}}$$

En utilisant les variations de la composée de deux fonctions, étudier les variations de la fonction h.

c) Montrer que h est majorée par le nombre $\sqrt{3}$.

EXERCICE 83

Soit f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x)=-x^2+2x+1 \quad \text{et} \quad g(x)=\sqrt{x-1}$$

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i}\ ;\vec{j}\right)$.

1) a) Vérifier que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent au point $A(2;1)$.

b) Tracer les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2) Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$x^2-2x-1+\sqrt{x-1}<0$$

3) Déterminer graphiquement les images des intervalles $[0;1]$ et $[1;2]$ par la fonction f.

4) Soit h la fonction numérique définie par :

$$h(x)=\sqrt{-x^2+2x}$$

a) Déterminer D_h ensemble de définition de h.

b) Vérifier que : $\left(\forall x\in D_h\right)\ h(x)=g\,o\,f(x)$

c) Étudier les variations de la fonction h sur les intervalles $[0;1]$ et $[1;2]$.

EXERCICE 84

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\frac{|x|}{x^3+x}$$

1) a) Déterminer D_f ensemble de définition de f.

b) Vérifier que la fonction f est impaire.

2) Montrer que f est décroissante sur $]0;+\infty[$ puis dresser son tableau de variation sur D_f.

3) Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ 0<f(x)<1$

4) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x)=\frac{x^4+2x^2+1}{x^4+2x^2+2}$$

a) Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ g(x)=f\,o\,f(x)$

b) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 85

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{4x-3}{x^2+1}$$

1) Montrer que f est bornée par -4 et 1.

2) Soit x et y deux réels distincts de $[2;+\infty[$.

a) Montrer que :

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{(2x+1)(2-y)+(2y+1)(2-x)}{(x^2+1)(y^2+1)}$$

b) En déduire que f est décroissante sur $[2;+\infty[$.

3) Soit h la fonction numérique définie par :

$$h(x)=\frac{4\sqrt{x+2}-3}{x+3}$$

a) Déterminer D_h ensemble de définition de h.

b) En utilisant les variations de la composée de deux fonctions, étudier les variations de la fonction h.

EXERCICE 86

Soit f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x)=x^2+x \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

1) Déterminer les variations de f et g.

2) a) Déterminer $D_{g\circ f}$ l'ensemble de définition de la fonction $g\circ f$.

b) Calculer $g\circ f(x)$ pour tout $x\in D_{g\circ f}$.

3) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}<1$

b) Étudier les variations de la fonction $g\circ f$ sur chacun des intervalles $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$.

c) Montrer que $g\circ f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 87

Soit f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x)=\frac{x}{x^2+x+1} \quad \text{et} \quad g(x)=\sqrt{x+1}$$

1) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2) a) Tracer $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$(I):\ (x+1)\sqrt{x+1}\le 1$$

c) Soit $a\in]1;+\infty[$.

Vérifier que $-\frac{1}{\sqrt{a}}$ est solution de l'inéquation (I)

d) En déduire que pour tout réel $a>1$:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}}<\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}$$

EXERCICE 88

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-4x+5-\frac{4}{x^2-4x+8}$

1) Montrer que la fonction f est minorée par 0.

2) Le nombre 0 est-il le minimum absolu de f ?

EXERCICE 89

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$$

1) a) Étudier la parité de la fonction f.

b) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ |f(x)|\le 1$

2) Soit x et y deux réels distincts.

a) Montrer que : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{2(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$

b) En déduire les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $[0;1]$ et $[1;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3) Soit a et b deux réels tels que : $a+b\ge\sqrt{2}$.

Montrer que : $\frac{(a+b)^2+1}{a+b}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

4) Soit g et h les fonctions numériques définies par :

$$g(x)=\sqrt{x+1} \quad \text{et} \quad h(x)=\frac{|x+1|}{\sqrt{1+x^2}}$$

Scanné avec CamScanner

a) Tracer $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé.

b) Déterminer graphiquement :

$$g([-1;0]) \quad \text{et} \quad g([0;+\infty[)$$

c) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ h(x) = g\,o\,f(x)$

d) En déduire les variations de h sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 90

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$$

1) a) La fonction f est-elle paire ? Impaire ?

b) Montrer que 3 est la valeur minimale de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

c) Étudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles : $]-\infty;0[$; $]0;\frac{1}{2}[$; $[\frac{1}{2};+\infty[$.

2) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$

a) Tracer $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé.

b) Déterminer graphiquement :

$$g(]0;1]) \quad \text{et} \quad g([1;+\infty[) \quad \text{et} \quad g(]-\infty;0[)$$

3) Soit h la fonction numérique définie par :

$$h(x) = f\,o\,g(x)$$

a) Déterminer D_h ensemble de définition de h.

b) Calcule $h(x)$ pour tout $x \in D_h$.

c) Étudier la monotonie de la fonction h.

d) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ h(x) \geq 3$.

EXERCICE 91

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(b-x)^2 + c^2}$$

où a, b et c des réels positifs.

Déterminer la valeur minimale de la fonction f.

EXERCICE 92

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction strictement positive et décroissante sur $[a;b]$.

1) Montrer que pour tous x et y de l'intervalle $[a;b]$:

$$\frac{f(b)}{f(a)} < \frac{f(x)}{f(y)} < \frac{f(a)}{f(b)}$$

2) On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^3+1}$.

a) En utilisant les variations de la composée de deux fonctions, étudier les variations de f.

b) Montrer que pour tout tous x et y de $[0;2]$:

$$\frac{1}{3}\sqrt{y^3+1} \leq \sqrt{x^3+1} < 3\sqrt{y^3+1}$$

EXERCICE 93

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x^2 + x$$

1) a) Montrer que pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x^2 + x(1+y) + y^2 + y + 1 > 0$$

b) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet au plus une solution dans $\mathbb{R}$.

2) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I =]-\infty;10]$ par : $g(x) = \sqrt{10-x}$.

a) Étudier les variations de la fonction g sur I.

b) En déduire que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une solution unique dans l'intervalle I.

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$h(x) = \frac{1+x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$$

a) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ h(x) = f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

b) En déduire la monotonie de la fonction h sur $\mathbb{R}_+^*$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 94

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{2-|x|} & ; \quad |x|\le 2 \\ f(x)=\dfrac{-2|x|+4}{|x|+1} & ; \quad |x|>2 \end{cases}$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que la fonction f est paire et que le point $A(2;0)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.

3) a) Montrer que f est minorée par -2 sur $\mathbb{R}$.

Le nombre -2 est-il le minimum absolu de f ?

b) Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x)=2+\dfrac{1}{x}$

Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ puis en déduire une comparaison des deux fonctions f et g.

6) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$h(x)=f\circ g(x)$$

a) Déterminer $h(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$.

b) En utilisant les variations de la composée de deux fonctions, étudier les variations de h.

c) Étudier le signe de la fonction h.

EXERCICE 95

Soit f une fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(x)f(y)-f(xy)=x+y \qquad (1)$$

1) Déterminer $f(0)$.

2) Déterminer toutes les fonctions f vérifiant (1).

EXERCICE 96

Les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-4;4]$ sont données par le tableau suivant :

x	-4		-2		0		2		3		4
$f(x)$	4	↘		↘ 1		↗ 3		↘ 0		↘ -3	↗ 2

À partir de ce tableau, déterminer les variations de la fonction g dans chacun des cas suivants :

1) $g(x)=3f(x)-5$; 2) $g(x)=-f(x)+1$

3) $g(x)=(f(x))^2$; 4) $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

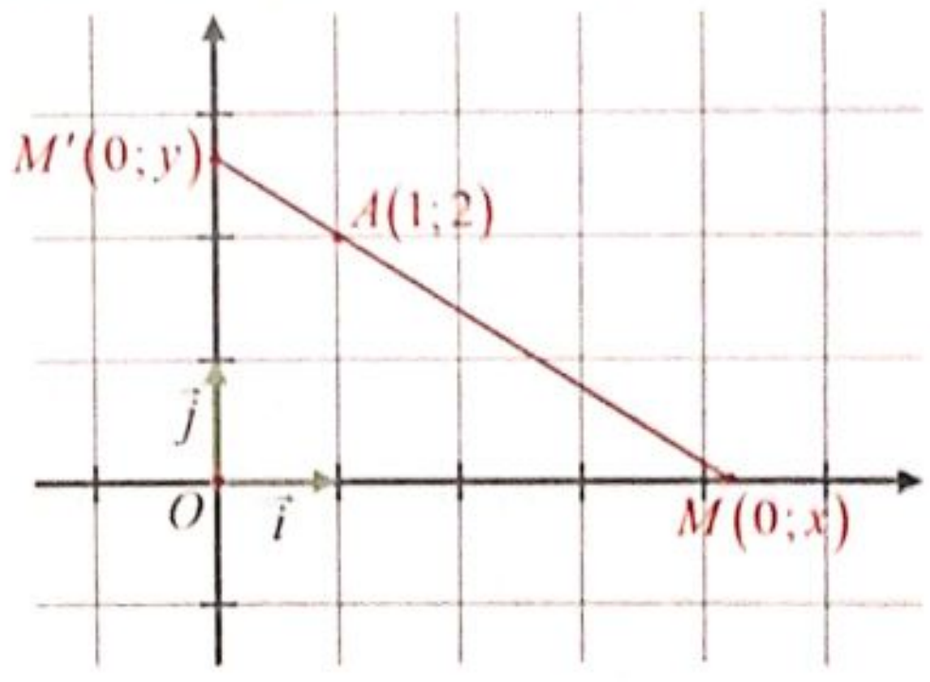
5) $g(x)=\dfrac{f(x)+1}{f(x)+4}$; 6) $g(x)=\dfrac{3-2f(x)}{f(x)+5}$

7) $g(x)=|f(x)|$; 8) $g(x)=\sqrt{f(x)+3}$

EXERCICE 97

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points : $A(1;2)$, $M(x;0)$ et $M'(0;y)$ (avec $x>1$ et $y>0$).

On suppose de plus que les points A, M et M' sont alignés (voir figure en-dessous).



1) Soit $S(x)$ l'aire du triangle OMM'

Vérifier que : $(\forall x>1)\ S(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$

2) Soit x et x' deux réels tels que : $1<x<x'$.

Scanné avec CamScanner

a) Montrer que :

$$S(x)-S(x')=\frac{xx'-x-x'}{(x-1)(x'-1)}(x-x')$$

b) En déduire les variations de la fonction S sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

3) Déterminer le point M pour lequel l'aire $S(x)$ du triangle OMM' est minimale.

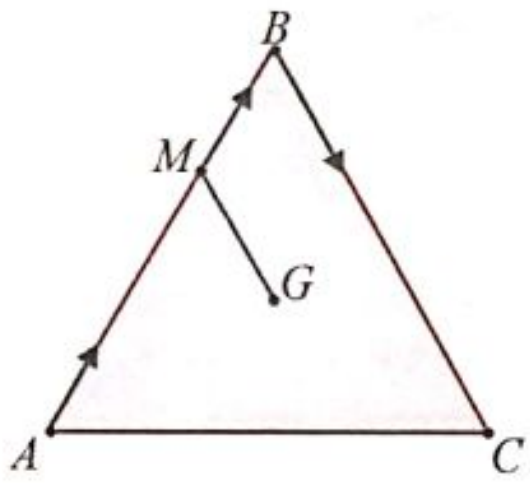
EXERCICE 98

Soit ABC un triangle équilatéral dont la longueur de côté est $8cm$ et G son centre de gravité.

Soit M un point mobile sur le périmètre de ABC.

Le point est parti de A pour faire un tour autour du triangle ABC.

Afin de déterminer la position du point M, on désigne par x la distance parcourue par le point M à partir de point A et on pose : $f(x)=GM$.



1) Calculer : $f(0)$; $f(4)$; $f(8)$.

2) Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$.

3) Calculer $f(x)$ en fonction de x pour tout $x\in[0;8]$.

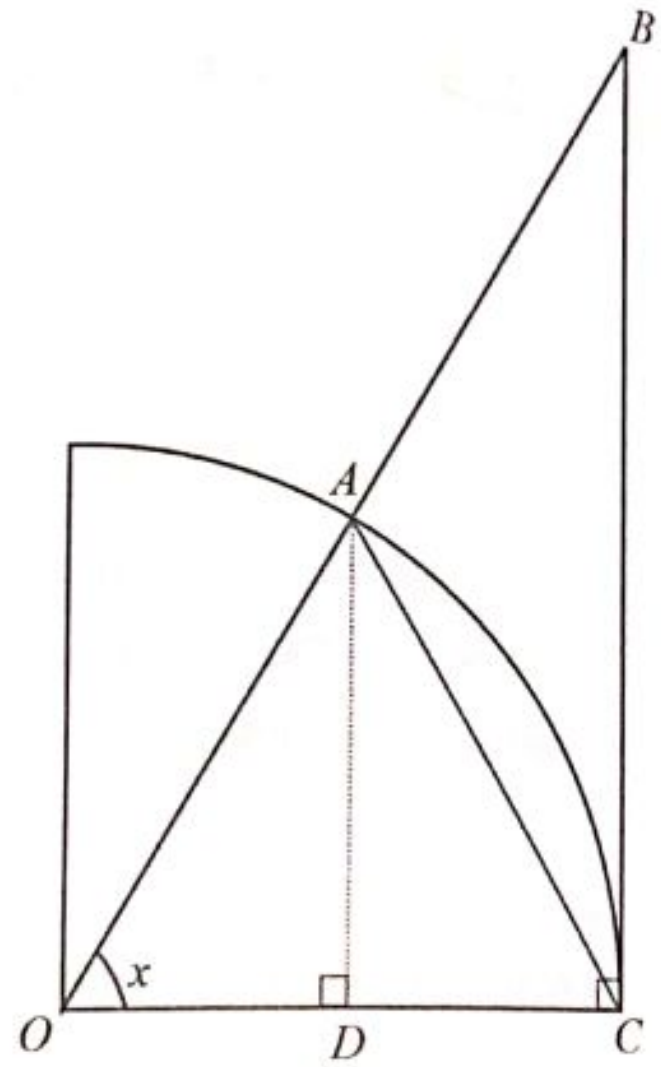
4) Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x lorsque : a) $x\in[8;16]$; b) $x\in[16;24]$

EXERCICE 99

Dans la figure suivante, un quart de cercle de rayon 1.

On désigne par x la mesure en radian de l'angle $\widehat{AOC}$.

On note que : $(OC)\perp(AD)$ et $(OC)\perp(BC)$



1) En utilisant la figure ci-dessus, montrer que :

$$\left(\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right)\quad \sin x\le x\le\tan x$$

2) En déduire que pour tout $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$:

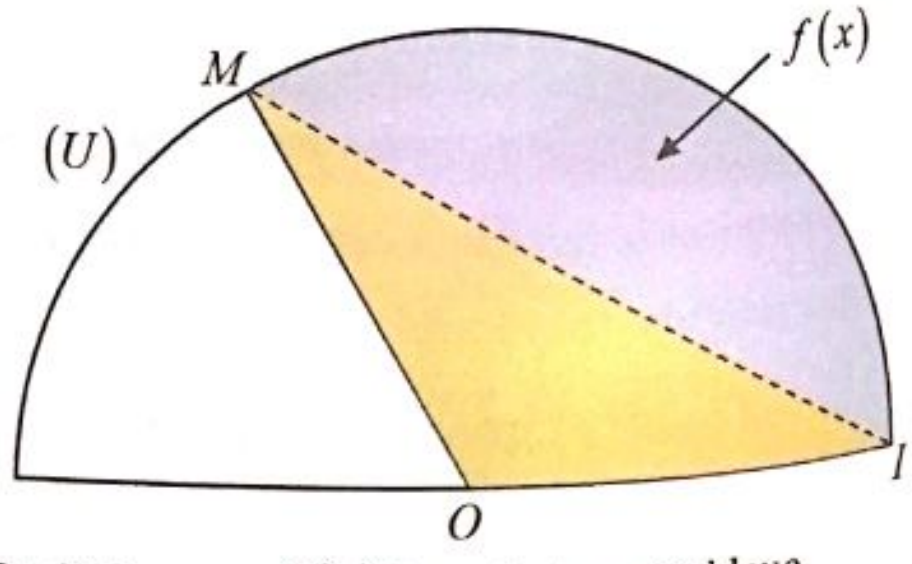
$$\sin x\ge\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\quad\text{et}\quad\cos x\ge\sqrt{1-x^2}$$

puis interpréter géométriquement ses résultats.

EXERCICE 100

Soit (U) le cercle trigonométrique et x un réel de l'intervalle $[0;\pi]$.

Soit M un point du cercle (U) d'abscisse curviligne x.



On désigne par $f(x)$ l'aire de la partie bleue.

Scanné avec CamScanner

1) Donner le tableau de variations de la fonction f (géométriquement).

2) a) Déterminer, en fonction de x, l'aire du secteur angulaire OMI puis l'aire du triangle OMI

b) Conclure l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

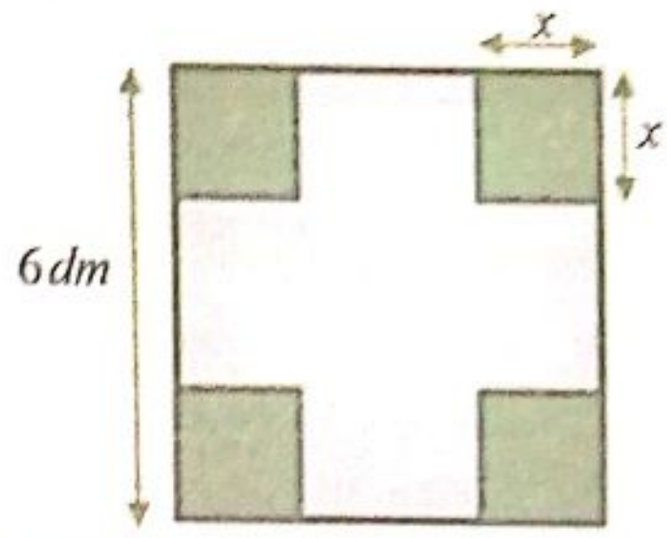
3) Déterminer les variations de la fonction g définie sur l'intervalle $[0;\pi]$ par : $g(x) = x - \sin x$.

EXERCICE 101

On dispose d'une plaque en carton de forme carrée dont la longueur du côté est $6\,cm$.

À partir de cette plaque, on réalise une boîte dont la forme est un parallélépipède rectangle selon les consignes suivantes :

- On découpe, dans chaque coin de la plaque, un carré de côté $x\,dm$;
- Puis, on élève les quatre bords de la pièce en les pliant.



1) Montrer que le volume, en dm^3, de la boîte obtenue est $v(x)$ où :

$$v(x) = 4\left(x^3 - 6x^2 + 9x\right) \text{ avec } 0 \le x \le 3$$

2) Soit x et y deux éléments distincts de l'intervalle $[0;3]$. Montrer que :

$$\frac{v(x)-v(y)}{x-y} = 4\left[\left(x+\frac{1}{2}y-3\right)^2 + \frac{3}{4}y(y-4)\right]$$

3) a) Donner le tableau de variations de la fonction f définie sur $[0;3]$ par : $f(x) = \frac{3}{4}x(x-4)$.

b) En déduire un encadrement de $\frac{v(x)-v(y)}{x-y}$ sur chacun des intervalles $[0;1]$ et $[1;3]$.

4) En déduire le tableau de variations de la fonction v sur l'intervalle $[0;3]$.

EXERCICE 102

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x - E(x)\right)^2$$

1) Montrer que la fonction f est bornée.

2) Montrer que 1 est une période de la fonction f.

3) a) Simplifier $f(x)$ sur l'intervalle $[0;1[$.

b) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[-3;3[$.

4) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{1}{\left(x - E(x)\right)^2}$

a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$$

b) En déduire D_g l'ensemble de définition de g.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[-3;3[$.

d) Construire la courbe $\mathscr{C}_g$ sur $[-3;3[$.

EXERCICE 103

Soit f une fonction numérique croissante et strictement positive sur un intervalle $I = [a;b]$.

1) Montrer que pour tout $(x;y) \in I^2$:

$$\frac{f(a)}{f(b)}f(y) \le f(x) \le \frac{f(b)}{f(a)}f(y)$$

2) En déduire que pour tout $(x;y) \in [1;3]^2$:

$$\frac{1}{3}\left(y^2 - 2y + 3\right) \le x^2 - 2x + 3 \le 3\left(y^2 - 2y + 3\right)$$

Scanné avec CamScanner

2

LES SUITES NUMÉRIQUES

HISTOIRE

La notion de suite ne peut être dissociée de celles de mouvement, de quantité en devenir, de dynamique, d'objet concret évoluant vers un objet idéal. On ne peut pas vraiment faire un historique de l'idée en tant que telle, car il n'y a pas à proprement parler de théorie des suites qui évolue au cours des âges. Il y a plutôt une multitude de problèmes variés dans lesquels elles interviennent, sinon comme fin, du moins comme outil.

Les suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse (une suite numérique est l'équivalent discret d'une fonction numérique). La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul. On en trouve, par exemple, dans la mathématique babylonienne, chez Archimède, spécialiste des procédés illimités d'approximation (séries géométriques de raison 1/4) pour des calculs d'aires et de volumes, ou en Égypte vers 1700 avant Jésus-Christ et plus récemment au 1er siècle après Jésus-Christ dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie.

Source : https://fr.wikipedia.org



AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789 -1857)



LOUIS LAGRANGE (1736 – 1813)



LEONARDO FIBONACCI (1180 – 1250)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Utiliser le raisonnement par récurrence ;
- Étudier une suite numérique (majoration, minoration, monotonie) ;
- Reconnaitre une suite arithmétique ou géométrique ;
- Calculer la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique ;
- Reconnaitre une situation de suite arithmétique ou géométrique ;
- Utiliser une suite arithmétique ou géométrique pour résoudre des problèmes.

PLAN DU COURS

- Activités Préparatoires 73
- Connaissances Fondamentales
  - Généralités sur les suites numériques 77
  - Suite majorée – suite minorée suite bornée 79
  - Monotonie d'une suite numérique 81
  - Suite arithmétique , suite géométrique 84
- Techniques et Astuces 95
- Exercices et Problèmes
  - Exercices d'application 104
  - Exercices de perfectionnement 109

Scanné avec CamScanner

1 NOTION DE SUITE NUMÉRIQUE

Adam a décidé d'économiser une somme d'argent de la façon suivante :

- Le premier jour, Adam va déposer deux dirhams dans une boîte.
- Le deuxième jour, Adam va déposer le double du contenu de la boîte puis retirer un dirham.
- Le troisième jour, Adam va déposer encore le double du contenu de la boîte (du 2ème jour) puis retirer un dirham, et ainsi de suite pour les autres jours.

On note : u_1 la somme déposée par Adam le premier jour.

u_2 la somme déposée par Adam le deuxième jour.

u_3 la somme déposée par Adam le troisième jour.

et ainsi de suite.

Dans la suite et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera alors u_n la somme déposée par Adam le n[ième] jour.

On définit alors une fonction de $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

La fonction ainsi définie est appelée une suite numérique et on la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Le nombre u_n s'appelle le terme général de la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et les nombres u_1, u_2, u_3, ... sont appelés les termes de la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Calculer les termes suivants : u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5.

2. a) Peut-on calculer u_7 sans connaître u_6 ? Justifier la réponse.

   b) Trouver une relation entre u_{n+1} et u_n.

   On dit dans ce cas que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente et la relation obtenue entre u_{n+1} et u_n est appelée une relation de récurrence. On dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie implicitement.

3. Quelle est la somme qu'a économisée Adam durant les cinq premiers jours ?

4. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n = 2^{n-1} + 1$.

On dit dans ce cas que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie explicitement (c'est-à-dire par une expression explicite).

2 SUITE MAJORÉE – SUITE MINORÉE – SUITE BORNÉE

1. On considère les suites numériques (a_n), (b_n) et (c_n) définies par :

$$a_n = -\frac{3}{2}n + 4 \quad ; \quad b_n = n - 4\sqrt{n} + 7 \quad ; \quad c_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq 4$ et $b_n \geq 3$.

On dit que la suite (a_n) est majorée par 4 et que la suite (b_n) est minorée par 3.

Scanné avec CamScanner

2 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq c_n \leq 1$.

On dit que la suite (c_n) est bornée par 0 et 1.

2. On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{u_n + 1} \end{cases} ; (n \in \mathbb{N})$$

a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 0$.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq 1$.

3 MONOTONIE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

Les parties A) et B) sont indépendantes :

A) Suite croissante :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = (n+1)(n+2)$.

1. a) Calculer : u_0 , u_1 , u_2 , u_3 , u_4.

b) Mettre les nombres u_0, u_1, u_2 , u_3 et u_4 dans l'ordre croissant.

c) Calcule en fonction de n, la différence $u_{n+1} - u_n$. En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} \geq u_n$.

On dit dans ce cas que la suite (u_n) est croissante.

2. a) Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n puis montrer que : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. (Remarquer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 0$).

b) En déduire encore une fois que la suite (u_n) est croissante.

B) Suite décroissante :

Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_0 = \dfrac{1}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{1}{4} v_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. a) Calculer : v_0 , v_1 , v_2 , v_3 .

b) Ordonner les v_0, v_1, v_2 et v_3 dans l'ordre croissant.

2. a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < v_n < 1$.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_{n+1} < v_n$.

On dit dans ce cas que la suite (v_n) est strictement décroissante.

4 SUITE ARITHMÉTIQUE – SUITE GÉOMÉTRIQUE



Une personne loue une machine à partir du premier janvier 2014 . Elle a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer mensuel initial est de 2000 *Dhs* et le locataire s'engage à utiliser la machine pendant 10 années complètes.

Les valeurs décimales seront arrondies, si nécessaire, au centime près.

Scanné avec CamScanner

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES 2

A) Contrat N°1 :

Le locataire accepte une augmentation mensuelle forfaitaire de $100 Dhs$ du loyer mensuel de l'année précédente.

On note u_n le loyer mensuel payé en dirhams lors de la $(n+1)^{ième}$ année. On a donc : $u_0 = 2000$.

1. a) Calculer le loyer mensuel u_1 payé pour chacun des mois de la deuxième année.

   b) Calculer le loyer mensuel à payer pour les mois de la cinquième année.

2. Justifier l'égalité suivante : $u_{n+1} = u_n + 100$.

   On dit dans ce cas que (u_n) est une suite arithmétique de raison 100 et de premier terme $u_0 = 2000$.

3. a) Montrer que : $u_n = 2000 + 100n$.

   b) En déduire les valeurs de u_7 et u_{10}.

4. Calculer la somme payée à l'issue des 10 années de contrat.

B) Contrat N°2 :

Le locataire accepte une augmentation annuelle de 5% du loyer de l'année précédente.

On note v_n le loyer payé en dirhams lors de la $(n+1)^{ième}$ année. On a donc : $v_0 = 2000$.

1. a) Calculer le loyer mensuel v_1 payé pour chacun des mois de la deuxième année.

   b) Calculer le loyer mensuel à payer pour les mois de la cinquième année.

2. Justifier l'égalité suivante : $v_{n+1} = 1,05v_n$.

   On dit dans ce cas que (v_n) est une suite géométrique de raison $1,05$ et de premier terme $v_0 = 2000$.

3. a) Montrer que : $v_n = 2000 \times (1,05)^n$.

   b) En déduire les valeurs de v_8 et v_{10}.

4. Calculer la somme payée à l'issue des 10 années de contrat.

5. Quel est le contrat le plus avantageux pour cette personne ?

5 QUELQUES APPLICATIONS DES SUITES NUMÉRIQUES

A) Production industrielle :

L'augmentation annuelle de la production dans une usine de bicyclette est de 5% chaque année.

L'usine a été ouverte en janvier 2015. En janvier 2016, sa production a atteint 40000 bicyclettes. Quelle serait sa production à la fin de 2020 ? 2021 ? 2025 ?



B) Spirale et suite :

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les droites : $(\Delta_1) : y = x$ et $(\Delta_2) : y = -x$ et on définit une suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le procédé décrit sur la figure (voir la page suivante).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $b_n = A_{n-1}A_n$.

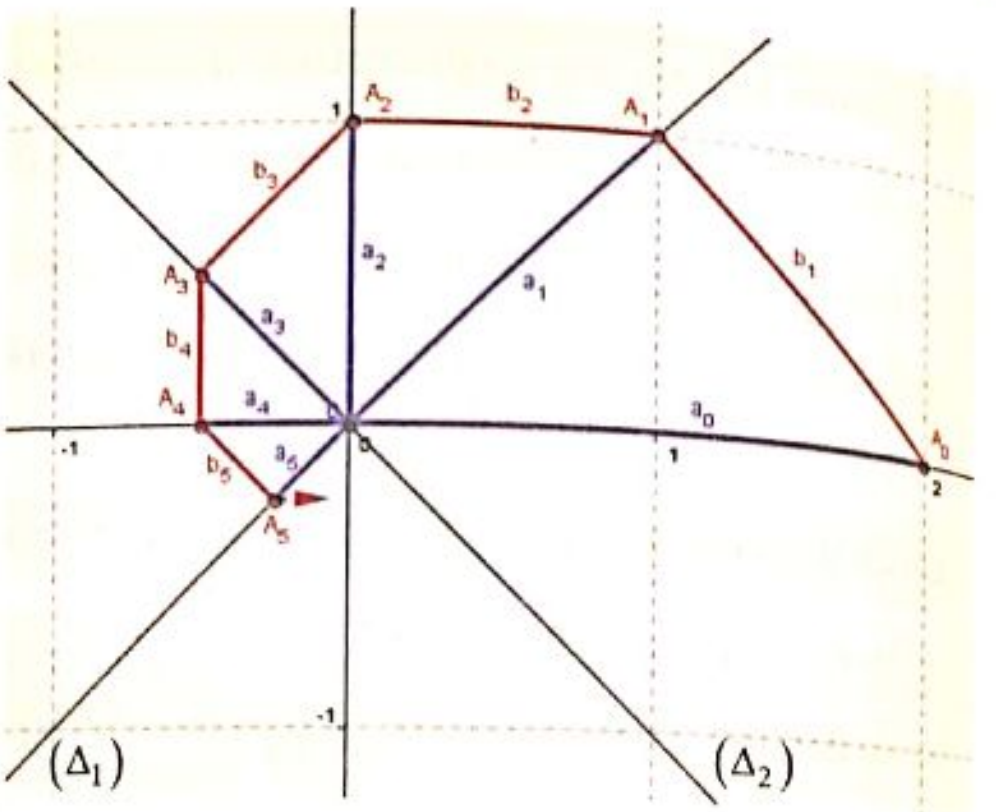
Scanné avec CamScanner

2 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

1. Calculer b_0, b_1 et b_2.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer b_{n+1} en fonction de b_n.

3. Exprimer en fonction de n, la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2...A_n$.

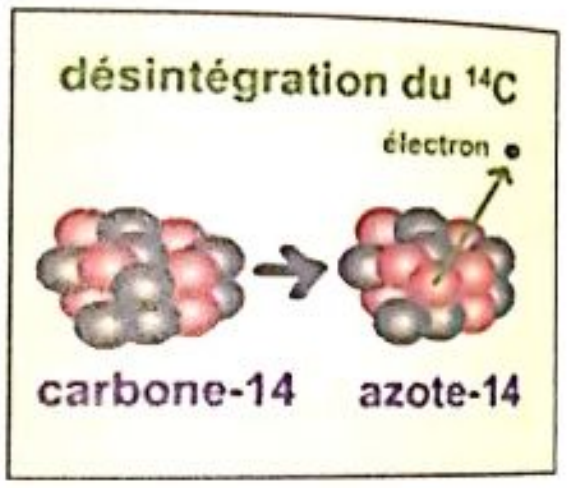


C) Désintégration du Carbone 14 et datation :

La matière vivante retient dans ses tissus du carbone 14.

Après la mort, le carbone 14 radioactif se désintègre à raison de $\frac{12}{1000}$ tous les cent ans.

C'est en mesurant cette désintégration que les archéologues procèdent à des datations.



1. Un échantillon de matière contient 5 grammes de carbone 14.

   On note u_n la quantité (en grammes) de carbone 14 contenue dans l'échantillon après $100 \times n$ années.

   a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

   b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Que déduit-on ?

   c) Combien l'échantillon contiendra-t-il de carbone 14 dans 1000 ans ? dans 3500 ans ?

   d) À l'aide d'une calculette, estimer au bout de combien d'années, la masse de carbone 14 de l'échantillon aura diminué de moitié.

2. Dans une grotte de Souss, on a découvert un foyer contenant du charbon de bois.

   À quantité égale, un morceau de charbon de bois actuel contient 1,5 fois plus de carbone 14 que le charbon prélevé dans la grotte.

   Avec la calculatrice, estimer une datation de l'occupation de la grotte.

D) La légende du jeu d'échecs :

On raconte que le jeu d'échecs a été inventé par un savant indien nommé « Sêta », quand il l'avait offert à l'empereur « CHIRAM » qui fut tant impressionné, l'empereur demanda lui de choisir lui-même sa récompense. Le savant répondit :

« Je veux juste un grain de blé pour la première case, deux grains pour la deuxième, quatre pour la troisième, huit pour la quatrième et ainsi de suite, en doublant le nombre de grains de blé d'une case à l'autre jusqu'à la $64^{ième}$ case ».

1. Soit q un réel non nul et différent de 1.

   a) Démontrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1+q+q^2+...+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

   b) En déduire que le nombre total de grains de blé demandé est : $2^{64}-1$.

   (Ce nombre est excessivement grand : $2^{64}-1 = 18446744073709551615$)



Scanné avec CamScanner

1 GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

1.1. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Définition

On appelle suite numérique toute fonction u de $\mathbb{N}$ (ou une partie I de $\mathbb{N}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

L'image d'un entier n de $\mathbb{N}$ (ou de I) par la suite u est notée u_n.

Le nombre u_n s'appelle le terme général de la suite u ; c'est aussi le terme de rang n de la suite u.

NOTATIONS

Soit I une partie de $\mathbb{N}$ et $u : I \to \mathbb{R}$ une suite numérique.

$$n \mapsto u(n) = u_n$$

La suite numérique u sera notée $(u_n)_{n\in I}$ au lieu de u.

Si $I = \mathbb{N}$, la suite u sera notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$ ou tout simplement (u_n). Le premier terme est u_0.

Si $I = \mathbb{N}^*$, la suite u sera notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $(u_n)_{n\geq 1}$. Le premier terme est u_1.

Si $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ (où $n_0 \in \mathbb{N}$), alors la suite u sera notée $(u_n)_{n\geq n_0}$. Le premier terme est u_{n_0}.

Remarques

- La notation u_n se lit aussi : « u indice n ».
- Il ne faut pas confondre la suite (u_n) et son terme général u_n, terme d'indice n de la suite (u_n).
- Les suites rencontrées en pratique sont souvent définies sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$. On peut toujours ramener l'étude d'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ à une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$ en posant : $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n = u_{n+n_0}$

Exemples

1) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{3n+2}$.

Le premier terme de la suite (u_n) est : $u_0 = \dfrac{\sqrt{0+1}}{3\times 0+2} = \dfrac{1}{2}$.

Le terme de rang 5 de la suite (u_n) est : $u_5 = \dfrac{\sqrt{5+1}}{3\times 5+2} = \dfrac{\sqrt{6}}{17}$.

2) Soit $(v_n)_{n\geq 2}$ la suite numérique définie par : $v_n = \sqrt{n-2}$.

Le premier terme de la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est : $v_2 = \sqrt{2-2} = 0$.

On a : $v_3 = \sqrt{3-2} = 1$ et $v_7 = \sqrt{7-2} = \sqrt{5}$ et $v_{11} = \sqrt{11-2} = \sqrt{9} = 3$.

3) Soit $(w_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $w_n = \cos(n\pi)$.

Scanné avec CamScanner

Le premier terme de la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est : $w_1 = \cos\pi = -1$.

On a : $w_{2018} = \cos(2018\pi) = 1$ et $w_{2025} = \cos(2025\pi) = -1$.

4) Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Le premier terme de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est : $S_1 = 1$.

On a : $S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

1.2. MODES USUELS DE GÉNÉRATION D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

Une suite (u_n) peut être définie :

- Par une formulation explicite de son terme général u_n :

  En particulier $u_n = f(n)$, où f est une fonction numérique donnée

- Par la donnée de son premier terme (ou de ses premiers termes) et une relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \\ u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \end{cases} \quad \ldots \text{etc.}$$

Exemples

1) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

La suite (u_n) est définie explicitement. Ici : $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x+2}$.

2) Soit (a_n) la suite numérique définie par : $a_n = n^{(-1)^n}$.

La suite (a_n) est définie explicitement comme suit : $a_n = n$ si n est pair et $a_n = \frac{1}{n}$ si n est impair.

3) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 5v_n - 7$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (v_n) est définie par une relation de récurrence. Ici : $v_{n+1} = g(v_n)$ avec $g : x \mapsto 5x - 7$.

Calculons v_1, v_2 et v_3 :

$v_1 = 5v_0 - 7 = 5\times 2 - 7 = 3$; $v_2 = 5v_1 - 7 = 5\times 3 - 7 = 8$; $v_3 = 5v_2 - 7 = 5\times 8 - 7 = 33$

4) Soit (T_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} T_0 = 2 \text{ et } T_1 = -1 \\ T_{n+2} = 2T_{n+1} - 3T_n \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Calculons T_2 et T_3 :

$T_2 = 2T_1 - 3T_0 = 2(-1) - 3\times 2 = -2 - 6 = -8$; $T_3 = 2T_2 - 3T_1 = 2(-8) - 3\times(-1) = -16 + 3 = -13$

Application

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $u_1 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = \frac{n+1}{4n}u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer : u_2, u_3, u_4 et u_5.

Scanné avec CamScanner

2 SUITE MAJORÉE – SUITE MINORÉE – SUITE BORNÉE

Soit n_0 un entier naturel. On pose $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ et on considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Définition

- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée s'il existe un réel M tel que : $(\forall n \in I)\ u_n \leq M$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est minorée s'il existe un réel m tel que : $(\forall n \in I)\ u_n \geq m$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples

1) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = \dfrac{2n+3}{5n+1}$.

- Montrons que la suite (u_n) est majorée par 3 :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $3 - u_n = 3 - \dfrac{2n+3}{5n+1} = \dfrac{15n+3-2n-3}{5n+1} = \dfrac{13n}{5n+1}$.

Puisque $n \in \mathbb{N}$, alors $\dfrac{13n}{5n+1} \geq 0$. Par conséquent : $3 - u_n \geq 0$, c'est-à-dire : $u_n \leq 3$.

Ainsi, la suite (u_n) est majorée par 3.

- Montrons que la suite (u_n) est minorée par $\dfrac{2}{5}$:

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n - \dfrac{2}{5} = \dfrac{2n+3}{5n+1} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{10n+15-10n-2}{25n+5} = \dfrac{13}{25n+5}$.

Puisque $n \in \mathbb{N}$, alors $\dfrac{13}{25n+5} \geq 0$. Par conséquent : $u_n - \dfrac{2}{5} \geq 0$, c'est-à-dire : $u_n \geq \dfrac{2}{5}$.

Ainsi, la suite (u_n) est minorée par $\dfrac{2}{5}$.

Puisque la suite (u_n) est majorée est minorée, alors elle est bornée.

2) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_0 = \dfrac{8}{3}$ et $v_{n+1} = 5 - \dfrac{25}{4v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrons par récurrence que la suite (v_n) est minorée par $\dfrac{5}{2}$:

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $v_0 = \dfrac{8}{3}$, donc : $v_0 \geq \dfrac{5}{2}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_n \geq \dfrac{5}{2}$ et montrons que $v_{n+1} \geq \dfrac{5}{2}$.

On a : $v_{n+1} - \dfrac{5}{2} = 5 - \dfrac{25}{4v_n} - \dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{25}{4v_n} = \dfrac{10v_n - 25}{4v_n} = \dfrac{10\left(v_n - \frac{5}{2}\right)}{4v_n} = \dfrac{5\left(v_n - \frac{5}{2}\right)}{2v_n}$.

Scanné avec CamScanner

On a par hypothèse $v_n \geq \frac{5}{2}$, donc : $v_n - \frac{5}{2} \geq 0$ et alors $\frac{5\left(v_n - \frac{5}{2}\right)}{2v_n} \geq 0$. Par conséquent : $v_{n+1} - \frac{5}{2} \geq 0$,

c'est-à-dire : $v_{n+1} \geq \frac{5}{2}$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq \frac{5}{2}$. Ainsi, la suite (v_n) est minorée par $\frac{5}{2}$.

Remarques

- On prendra garde au fait que, dans la définition ci-dessus, les réels M et m sont des constantes et ne dépendent pas de l'indice de la suite. Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n}$ vérifie l'inégalité $u_n \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais n'est pas une suite majorée.
- S'il existe un réel $S \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leq S$, alors la suite (u_n) est bornée.

Exemple

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = 3\cos n - 7(-1)^n \sin n - 9$

Montrons que la suite (u_n) est bornée :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\cos n| \leq 1$ et $|\sin n| \leq 1$ et $\left|(-1)^n\right| = 1$; d'après l'inégalité triangulaire, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n| \leq |3\cos n| + \left|7(-1)^n \sin n\right| + 9$. Par conséquent :

$$|u_n| \leq 3|\cos n| + 7\left|(-1)^n \sin n\right| + 9 \leq 3 + 7 + 9$$

On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n| \leq 19$. Ainsi, la suite (u_n) est bornée.

Applications

1. Soit (a_n) la suite numérique définie par : $a_n = \frac{2n+5}{n+1}$.

   Montrer que la suite (a_n) est majorée par 5 et minorée par 2.

2. Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \leq u_n < 2$.

3. Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = \sqrt{6 + v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 < v_n < 3$.

4. Soit $(w_n)_{n \geq 2}$ la suite numérique définie par : $w_n = \frac{5^n + 3^n}{5^n - 2 \times 3^n}$.

   Vérifier que pour tout entier $n \geq 2$: $w_n = 1 + \frac{3}{\left(\frac{5}{3}\right)^n - 2}$ puis en déduire que la suite $(w_n)_{n \geq 2}$ est bornée.

Scanné avec CamScanner

3 MONOTONIE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

Soit n_0 un entier naturel. On pose $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ et on considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Définition

- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante si : $(\forall (n;m) \in I^2) \quad (m \geq n \Rightarrow u_m \geq u_n)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante si : $(\forall (n;m) \in I^2) \quad (m \geq n \Rightarrow u_m \leq u_n)$

Remarques

- Si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante alors : $(\forall n \in I) \; u_n \geq u_{n_0}$.
- Si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante alors : $(\forall n \in I) \; u_n \leq u_{n_0}$.
- On définit de même une suite strictement croissante et strictement décroissante. Il suffit de remplacer dans la définition précédente, les symboles « $\leq$ » et « $\geq$ » par les symboles « $<$ » et « $>$».

Proposition

- La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante si, et seulement si : $(\forall n \in I) \; u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissante si, et seulement si : $(\forall n \in I) \; u_{n+1} - u_n > 0$.
- La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante si, et seulement si : $(\forall n \in I) \; u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissante si, et seulement si : $(\forall n \in I) \; u_{n+1} - u_n < 0$.
- La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est constante si, et seulement si : $(\forall n \in I) \; u_{n+1} = u_n$.
- La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est monotone si, et seulement si, elle est croissante ou décroissante.

Exemples

1) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = \dfrac{2n+3}{n+2}$.

Étudions la monotonie de la suite (u_n) :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+3}{(n+1)+2} - \frac{2n+3}{n+2} = \frac{(n+2)(2n+5)-(n+3)(2n+3)}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

Puisque $n \in \mathbb{N}$, alors $\dfrac{1}{(n+2)(n+3)} > 0$, c'est-à-dire : $u_{n+1} - u_n > 0$.

En résumé, la suite (u_n) est strictement croissante.

Scanné avec CamScanner

2) Soit (v_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = \dfrac{8v_n - 8}{v_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2 < v_n < 4$

  <u>Initialisation :</u> Pour $n = 0$, on a $v_0 = 3$, donc on a bien $2 < v_0 < 4$.

  <u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $2 < v_n < 4$ et montrons que $2 < v_{n+1} < 4$.

  On a : $v_{n+1} - 2 = \dfrac{8v_n - 8}{v_n + 2} - 2 = \dfrac{6v_n - 12}{v_n + 2} = \dfrac{6(v_n - 2)}{v_n + 2}$.

  Puisque $2 < v_n < 4$, alors : $\dfrac{6(v_n - 2)}{v_n + 2} > 0$; par conséquent $v_{n+1} - 2 > 0$, c'est-à-dire : $2 < v_{n+1}$.

  De même, on a : $4 - v_{n+1} = 4 - \dfrac{8v_n - 8}{v_n + 2} = \dfrac{4(4 - v_n)}{v_n + 2}$.

  Puisque $2 < v_n < 4$, alors $\dfrac{4(4 - v_n)}{v_n + 2} > 0$; par conséquent $4 - v_{n+1} > 0$, c'est-à-dire : $v_{n+1} < 4$.

  <u>Conclusion :</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 < v_n < 4$.

- Étudions la monotonie de la suite (v_n) :

  On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = \dfrac{8v_n - 8}{v_n + 2} - v_n = -\dfrac{v_n^2 - 6v_n + 8}{v_n + 2}$

  Considérons le trinôme : $P(x) = x^2 - 6x + 8$. Le discriminant de $P(x)$ est : $\Delta = 36 - 32 = 4$

  et les racines du trinôme $P(x)$ sont : $x_1 = 2$ et $x_1 = 4$. Il s'ensuit donc : $P(x) = (x-2)(x-4)$.

  Il en résulte donc que : $v_{n+1} - v_n = -\dfrac{v_n^2 - 6v_n + 8}{v_n + 2} = -\dfrac{(v_n - 2)(v_n - 4)}{v_n + 2}$.

  Comme $2 < v_n < 4$, alors : $v_n - 2 > 0$ et $v_n - 4 < 0$; par conséquent : $-\dfrac{(v_n - 2)(v_n - 4)}{v_n + 2} > 0$,

  c'est-à-dire : $v_{n+1} - v_n > 0$. En définitive, la suite (v_n) est strictement croissante.

- Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ v_n \geq \dfrac{16}{5}$

  Puisque la suite (v_n) est strictement croissante , alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n \geq v_1$.

  Or : $v_1 = \dfrac{8v_0 - 8}{v_0 + 2} = \dfrac{16}{5}$, donc : $v_n \geq \dfrac{16}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

Montrons que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est croissante :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{n+1}$.

Puisque $\dfrac{1}{n+1} \geq 0$, alors : $S_{n+1} - S_n \geq 0$. Ainsi, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

Scanné avec CamScanner

Remarque

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique telle que : $(\forall n \in I)\ u_n > 0$.

On a pour tout $n \in I$: $u_{n+1} - u_n = u_n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right)$; le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui donc de $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

Ainsi, pour étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 et on a :

- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante si, et seulement si : $(\forall n \in I)\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.
- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante si, et seulement si : $(\forall n \in I)\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.

Applications

1. Étudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \frac{2n+1}{3n+1}$ et $v_n = 3^{2n-1}$.

2. On considère la suite numérique (w_n) définie par : $w_0 = 6$ et $w_{n+1} = 4 - \frac{3}{w_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ w_n > 3$.

   b) Montrer que la suite (w_n) est décroissante puis en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 3 < w_n \leq 6$.

3. Soit (a_n) et (b_n) les deux suites numériques définies par : $a_0 = 4$, $b_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

   a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq b_n$.

   b) Montrer que la suite (b_n) est croissante et que la suite (a_n) est décroissante.

4. Soit (t_n) une suite réelle vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq t_n \leq 1$ et $(1 - t_n)t_{n+1} > \frac{1}{4}$.

   Prouver que la suite (t_n) est strictement croissante.

5. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n} + 2\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \leq u_n \leq 4$.

   b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{u_n}\right)\left(1 + \sqrt{u_n}\right)$ puis déduire la monotonie de (u_n).

   c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 4 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(4 - u_n)$.

   d) En déduire par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 4 - u_n \leq 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Scanné avec CamScanner

3 SUITE ARITHMÉTIQUE – SUITE GÉOMÉTRIQUE

Soit n_0 un entier naturel. On pose $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ et on considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq n_0}$.

3.1. SUITE ARITHMÉTIQUE

Définition

On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est arithmétique s'il existe un réel r (indépendant de n) tel que :

$$(\forall n \in I) \quad u_{n+1} - u_n = r$$

Le nombre r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Exemples

1) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = \frac{2}{3}n - 4$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}(n+1) - 4 - \frac{2}{3}n + 4 = \frac{2}{3}$.

Par conséquent, la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = \frac{2}{3}$.

2) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n = n^2 + 3n + 1$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 3(n+1) + 1 - n^2 - 3n - 1 = 2n + 4$.

Puisque le nombre $2n + 4$ dépend de n, alors la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

3) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$. Montrons que la suite (v_n) est arithmétique :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} + 1} - \frac{1}{u_n + 1} = \frac{1}{\frac{u_n - 1}{u_n + 3} + 1} - \frac{1}{u_n + 1} = \frac{u_n + 3}{2u_n + 2} - \frac{2}{2u_n + 2} = \frac{u_n + 1}{2(u_n + 1)} = \frac{1}{2}$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}$. Ainsi, la suite (v_n) est arithmétique de raison : $r = \frac{1}{2}$.

Applications

1. Soit (w_n) la suite numérique définie par : $w_n = -\sqrt{3}\,n + \frac{3}{2}$.

Montrer que la suite (w_n) est arithmétique et déterminer sa raison r.

2. Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Scanné avec CamScanner

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et déterminer sa raison r

3. Soit (b_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})\ b_0 + b_1 + \ldots + b_n = 4n^2 - 3n$.

Montrer que la suite (b_n) est arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

Proposition

Pour que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ soit arithmétique, il faut et il suffit que : $(\forall n \geq n_0)\ \ 2u_{n+1} = u_n + u_{n+2}$.

C'est une propriété caractéristique d'une suite arithmétique.

Preuve

- Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r .

  On a donc pour tout entier $n \geq n_0$: $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + r$; donc : $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$,

  c'est-à-dire : $2u_{n+1} = u_n + u_{n+2}$.

- Inversement, soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique telle que : $(\forall n \geq n_0)\ \ 2u_{n+1} = u_n + u_{n+2}$.

  On a pour tout entier $n \geq n_0$: $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$. Par conséquent, la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \geq n_0}$ est constante,

  c'est-à-dire, il existe un réel r (indépendant de n) tel que : $u_{n+1} - u_n = r$ pour tout entier $n \geq n_0$.

  Ainsi, la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est arithmétique de raison r .

Remarque

Pour que trois réels x, y et z, choisis dans cet ordre, soient des termes consécutifs d'une suite arithmétique, il faut et il suffit que : $x + z = 2y$.

Proposition

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout $(n; p) \in I^2$: $u_n = u_p + (n - p)r$

Preuve

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r . On a :

$$\begin{cases} u_{p+1} = u_p + r \\ u_{p+2} = u_{p+1} + r \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ u_n = u_{n-1} + r \end{cases} \qquad (n - p \text{ égalités})$$

Scanné avec CamScanner

En additionnant ces égalités, on obtient : $u_n = u_p + \underbrace{r + r + \ldots + r}_{n-p \text{ fois}}$, c'est-à-dire : $u_n = u_p + (n-p)r$

(On peut aussi faire un raisonnement par récurrence sur n).

Remarques

- Si la suite (u_n) est arithmétique de raison r, alors : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = u_0 + nr$.
- Si la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est arithmétique de raison r, alors : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n = u_1 + (n-1)r$.
- Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r.
  - Si $r > 0$ alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante.
  - Si $r < 0$ alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement décroissante.

Exemples

1) Soit (u_n) la suite arithmétique telle que : $u_1 = 3$ et $u_5 = 9$.

- Déterminons la raison r de la suite (u_n) :

On sait que : $(\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2)\ u_n = u_p + (n-p)r$; d'où : $u_5 = u_1 + (5-1)r$ (Ici : $p = 1$ et $n = 5$).

Par conséquent : $r = \dfrac{u_5 - u_1}{4} = \dfrac{9-3}{4} = \dfrac{3}{2}$.

- Déterminons l'expression de u_n en fonction de n :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_1 + (n-1)r = 3 + (n-1)\dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}n$.

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \dfrac{3}{2}n + \dfrac{3}{2}$

2) On considère les suites numériques (w_n) et (T_n) définies par :

$$w_0 = \sqrt{3} \quad , \quad w_{n+1} = \sqrt{1 + w_n^2} \quad \text{et} \quad T_n = w_n^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- Calculons w_1, w_2, T_0 et T_1 :

On a : $w_1 = \sqrt{1 + w_0^2} = 2$; $w_2 = \sqrt{1 + w_1^2} = \sqrt{5}$; $T_0 = w_0^2 = 3$; $T_1 = w_1^2 = 4$.

- Montrons que la suite (T_n) est arithmétique :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T_{n+1} - T_n = w_{n+1}^2 - w_n^2 = 1 + w_n^2 - w_n^2 = 1$.

Par conséquent, (T_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

- Expressions de T_n et w_n en fonction de n :

Puisque la suite (T_n) est arithmétique de raison $r = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T_n = T_0 + nr$, d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ T_n = n + 3$$

Scanné avec CamScanner

De l'égalité $T_n = w_n^2$ et en tenant compte du fait que la suite (w_n) est positive, on tire : $w_n = \sqrt{T_n}$.

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \sqrt{n+3}$.

Applications

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r telle que : $\begin{cases} u_0 - u_4 = 6 \\ 2u_0 + u_4 = 3 \end{cases}$

a) Déterminer u_0, u_4 et r.

b) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n puis en déduire u_{100}.

2. Soit (v_n) une suite arithmétique de raison r telle que : $\begin{cases} v_2 + v_3 + v_4 = 15 \\ v_6 = 20 \end{cases}$.

Déterminer v_0 et r puis en déduire l'expression du terme général v_n en fonction de n.

3. Soit (w_n) la suite numérique définie par : $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = \dfrac{5w_n}{2w_n + 5}$. On pose : $(\forall n \in \mathbb{N})\ t_n = \dfrac{1}{w_n}$.

a) Calculer w_1 et w_2.

b) Vérifier que la suite (t_n) est arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

c) Exprimer t_n et w_n en fonction de n.

3.2. SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS D'UNE SUITE ARITHMÉTIQUE

Proposition

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique.

On pose : $S_n = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n$ où $(n; p) \in \mathbb{N}^2$ et $n \geq p \geq n_0$.

Alors : $$S_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$$

Preuve

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r. On a : $\begin{cases} S_n = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n \\ S_n = u_n + u_{n-1} + \ldots + u_p \end{cases}$.

Il s'ensuit donc : $2S_n = (u_p + u_n) + (u_{p+1} + u_{n-1}) + \ldots + (u_{n-1} + u_{p+1}) + (u_n + u_p)$.

On a pour tout $k \in \{0;1;\ldots;n\}$: $u_{p+k} + u_{n-k} = (u_p + kr) + u_p + (n-k-p)r$; donc :

$$u_{p+k} + u_{n-k} = u_p + \left[u_p + (n-p)r\right] = u_p + u_n$$

Par conséquent : $$2S_n = \underbrace{(u_p + u_n) + (u_n + u_p) + \ldots + (u_n + u_p)}_{n-p+1 \text{ termes}} = (n-p+1)(u_n + u_p).$$

En définitive : $S_n = \dfrac{(n-p+1)(u_n + u_p)}{2}$.

Scanné avec CamScanner

Remarques

- La somme $S_n = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n$ peut aussi s'écrire simplement : $S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k$.

  Cette somme contient $(n - p + 1)$ termes.

- Dans le cas où $p = 0$, on obtient : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$.

- Dans le cas où $p = 1$, on obtient : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$.

- De façon générale, la somme de termes successifs d'une suite arithmétique est égale au nombre de termes multiplié par la moyenne arithmétique des termes extrêmes.

$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$$

$$= \frac{(nombre\ \text{de}\ termes) \times (1er\ terme\ de\ la\ somme + dernier\ terme\ de\ la\ somme)}{2}$$

Exemples

1) Calculons en fonction de n la somme : $S_n = 1 + 2 + \ldots + n$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n$. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 1$.

On a donc : $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

2) Calculons en fonction de n la somme : $T_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1)$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 2n + 1$. La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 2$.

On a donc : $T_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) = \frac{(n+1)}{2}(1 + 2n + 1)$. Ainsi : $T_n = (n+1)^2$.

3) Soit (u_n) une suite arithmétique telle que : $S = u_3 + u_4 + \ldots + u_{10} = 168$ et $u_6 = 5$.

Déterminons la raison r de cette suite et son premier terme u_0 :

Puisque la suite (u_n) est arithmétique, alors : $S = \frac{10-3+1}{2}(u_3 + u_{10}) = 4(u_3 + u_{10})$.

De plus : $u_3 = u_6 + (3-6)r = 5 - 3r$ et $u_{10} = u_6 + (10-6)r = 5 + 4r$.

Par conséquent : $S = 4(5 - 3r + 5 + 4r) = 40 + 4r = 168$, ce qui donne : $r = \frac{168-40}{4} = 32$.

De l'égalité $u_6 = u_0 + 6r$, on tire : $u_0 = u_6 - 6r = 5 - 6 \times 32 = -187$.

En résumé : $u_0 = -187$ et $r = 32$.

Scanné avec CamScanner

Applications

1. Calculer la somme : $S_n = -3+1+5+...+(4n+1)$.

2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r telle que :

$$u_1+u_2+...+u_{26}=1144 \quad \text{et} \quad u_{26}=94$$

Calculer u_1 et r puis exprimer u_n en fonction de n.

3. Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. On considère la suite numérique (u_n) définie par : $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n=an+b$.

Montrer que la suite (u_n) est arithmétique puis exprimer en fonction de n la somme : $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$.

4. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n+2n-2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n=u_{n+1}-u_n$.

a) Vérifier que la suite (v_n) est arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Calculer la somme $S_n=\sum_{k=0}^{n}v_k$ en fonction de n.

c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

3.3. SUITE GÉOMÉTRIQUE

Définition

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **géométrique** s'il existe un réel q (indépendant de n) tel que :

$$(\forall n\in I)\quad u_{n+1}=qu_n$$

Le nombre q est appelé **la raison** de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Exemples

1) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n=4\left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=4\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}=4\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^n=-\frac{2}{3}u_n$.

Par conséquent, la suite (u_n) est géométrique de raison $q=-\frac{2}{3}$.

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=0$ et $u_{n+1}=\frac{2u_n+3}{u_n+4}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+3}$.

Montrons que la suite (v_n) est géométrique :

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

Scanné avec CamScanner

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3}=\frac{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}+3}=\frac{\dfrac{u_n-1}{u_n+4}}{\dfrac{5u_n+15}{u_n+4}}=\frac{u_n-1}{5u_n+15}=\frac{1}{5}\times\frac{u_n-1}{u_n+3}=\frac{1}{5}v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q=\frac{1}{5}$.

Applications

1. Soit (a_n) et (b_n) les deux suites numériques définies par : $a_n=\left(\sqrt{2}-1\right)^n$ et $b_n=3\times\frac{\sqrt{5}}{2^{n-1}}$.

Montrer que (a_n) et (b_n) sont géométriques.

2. Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\frac{9u_n}{4u_n+3}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n\neq 0$.

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $v_n=2-\frac{3}{u_n}$.

Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

3. Soit (x_n) la suite numérique définie par : $x_0=2$ et $x_{n+1}=\frac{10+x_n}{3}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $y_n=x_n-5$.

Montrer que la suite (y_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

Proposition

Pour que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ soit géométrique, il faut et il suffit que : $(\forall n\geq n_0)\ u_{n+1}^2=u_n\times u_{n+2}$.

C'est une propriété caractéristique d'une suite géométrique.

Preuve

- Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison q.
  - Si $q=0$, alors pour tout $n\geq n_0$: $u_{n+1}=0$ et $u_{n+2}=0$. Donc : $(\forall n\geq n_0)\ u_{n+1}^2=u_n\times u_{n+2}=0$.
  - Si $q\neq 0$, alors on peut distinguer deux cas :
    - Si $u_{n_0}=0$, alors pour tout $n\geq n_0$: $u_{n+1}=0$ et $u_{n+2}=0$. Donc : $(\forall n\geq n_0)\ u_{n+1}^2=u_n\times u_{n+2}=0$.
    - Si $u_{n_0}\neq 0$, alors pour tout entier $n\geq n_0$: $u_{n+1}=qu_n$ et $u_{n+2}=qu_{n+1}$; donc : $qu_{n+1}^2=qu_n\times u_{n+2}$.

    Puisque $q\neq 0$ alors : $u_{n+1}^2=u_n\times u_{n+2}$.
- Inversement, soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique telle que : $(\forall n\geq n_0)\ u_{n+1}^2=u_n\times u_{n+2}$.
  - Si $u_{n_0}=0$ alors pour tout $n\geq n_0$, $u_n=0$. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est nulle.

Scanné avec CamScanner

• Si $u_{n_0} \neq 0$, alors on peut distinguer deux cas :

- Si $u_{n_0+1} = 0$, alors pour tout $n \geq n_0 + 1$: $u_n = 0$.

La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est donc géométrique de raison $q = 0$.

- Si $u_{n_0+1} \neq 0$, alors pour tout $n \geq n_0$: $u_n \neq 0$.

De l'égalité $u_{n+1}^2 = u_n \times u_{n+2}$, on tire : $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Par conséquent, la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ est constante, c'est-à-dire, il existe un réel q (indépendant de n)

tel que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est géométrique de raison q.

Remarque

Pour que trois réels x, y et z, dans cet ordre, soient des termes consécutifs d'une suite géométrique, il faut et il suffit que : $x.z = y^2$.

Proposition

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 0$, alors pour tout $(n; p) \in I^2$: $u_n = u_p q^{n-p}$

Preuve

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique de raison q.

▪ Si $u_{n_0} = 0$, alors la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est nulle.

▪ Si $u_{n_0} \neq 0$, alors pour tout entier $n \geq n_0$: $u_n \neq 0$.

On a de plus :

$$\begin{cases} u_{p+1} = qu_p \\ u_{p+2} = qu_{p+1} \\ \vdots \quad \vdots \\ u_n = qu_{n-1} \end{cases} \qquad (n - p \text{ égalités})$$

En multipliant ces égalités, on obtient :

$u_n = u_p \times \underbrace{q \times q \times \ldots \times q}_{n-p \text{ fois}}$, c'est-à-dire : $u_n = u_p q^{n-p}$

(On peut aussi faire un raisonnement par récurrence sur n).

Scanné avec CamScanner

Remarques

- Si la suite (u_n) est géométrique de raison q, alors : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = u_0 q^n$.
- Si la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison q, alors : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n = u_1 q^{n-1}$.
- Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison q.
  - Si $u_{n_0} > 0$ et $q > 1$, alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante.
  - Si $u_{n_0} > 0$ et $0 < q < 1$, la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement décroissante.

Exemples

1) Soit (u_n) la suite géométrique telle que : $u_1 = \frac{3}{2}$ et $u_4 = \frac{3}{16}$.

- Déterminons la raison q de la suite (u_n) :

On sait que : $(\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2)\ u_n = u_p q^{n-p}$; d'où : $u_4 = u_1 q^3$ (Ici : $p = 1$ et $n = 4$).

Par conséquent : $q^3 = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, ce qui donne : $q = \frac{1}{2}$.

- Déterminons l'expression de u_n en fonction de n :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_1 q^{n-1} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

2) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_0 = \frac{1}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{v_n}{3 - v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $w_n = 1 - \frac{2}{v_n}$.

- Montrons que la suite (w_n) est géométrique :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_{n+1} = 1 - \frac{2}{v_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{v_n}{3 - v_n}} = 1 - \frac{6 - 2v_n}{v_n} = 3\left(1 - \frac{2}{v_n}\right) = 3w_n$.

Ainsi, la suite (w_n) est géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $w_0 = 1 - \frac{2}{v_0} = -3$.

- Expressions de w_n et v_n en fonction de n :

Puisque la suite (w_n) est géométrique de raison $q = 3$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = w_0 q^n = -3 \times 3^n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = -3^{n+1}$.

De l'égalité $w_n = 1 - \frac{2}{v_n}$, on tire : $v_n = \frac{2}{1 - w_n}$. Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = \frac{2}{1 + 3^{n+1}}$

Scanné avec CamScanner

Applications

1. Soit (u_n) une suite géométrique à termes positifs tels que : $u_4 = 0,84$ et $u_6 = 5,25$

a) Calculer la raison q de cette suite et le premier terme u_0.

b) Exprimer u_n en fonction de n.

c) Préciser la monotonie de la suite (u_n).

2. On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - 3$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

3. Soit a, b et c trois termes consécutifs d'une suite géométrique tels que : $\begin{cases} a+b+c = 36,75 \\ abc = 343 \end{cases}$

Déterminer a, b et c.

4. Soit (u_n) la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = \frac{1}{3}(7u_{n+1} - 2u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2u_n$ et $w_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$.

a) Calculer v_1 et w_1.

b) Montrer que les suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ sont géométriques.

c) Exprimer u_n en fonction de n.

3.4. SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

Proposition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$.

On pose : $S_n = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n$ où $(n;p) \in \mathbb{N}^2$ et $n \geq p \geq n_0$.

Alors : $$S_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Preuve

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. On a : $S_n = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n$; Par conséquent :

$$qS_n = qu_p + qu_{p+1} + \ldots + qu_n = u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_n + u_{n+1}.$$

Il en résulte donc l'égalité : $S_n - qS_n = u_p - u_{n+1} = u_p - u_p.q^{n-p+1} = u_p\left(1-q^{n-p+1}\right)$

Il s'ensuit donc : $(1-q)S_n = u_p\left(1-q^{n-p+1}\right)$. En définitive : $S_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Scanné avec CamScanner

Remarques

- Dans le cas où $p=0$, on obtient : $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et $S_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}u_k=u_0\times\frac{1-q^{n}}{1-q}$

- Dans le cas où $p=1$, on obtient : $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1\times\frac{1-q^{n}}{1-q}$.

- Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison $q=1$, alors : $\sum_{k=p}^{n}u_k=(n-p+1)u_p$

- De façon générale, la somme de termes successifs d'une suite géométrique peut être retenue par :

$$u_p+u_{p+1}+\ldots+u_n=u_p\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

$$=1^{er}\ terme\ de\ la\ somme\times\frac{1-q^{nombre\ de\ termes}}{1-q}$$

Exemples

1) Calculons en fonction de n la somme : $S_n=1+2+2^2+\ldots+2^n$

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=2^n$. La suite (u_n) est géométrique de raison $q=2$.

On a donc : $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n=u_0\times\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=1\times\frac{1-2^{n+1}}{-1}$. Ainsi : $S_n=2^{n+1}-1$.

2) Calculons en fonction de n la somme : $S_n=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$. La suite (v_n) est géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$.

On a donc : $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n=u_0\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$. Ainsi : $S_n=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

Applications

1. Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=\frac{3}{5}u_n+\frac{2}{5}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que la suite (v_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par : $v_n=u_{n+1}-u_n$ est géométrique.

b) Calculer en fonction de n la somme $S_n=\sum_{k=0}^{n}v_k$ puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q\neq 1$. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$.

b) Montrer que : $\sqrt{u_1u_2}+\sqrt{u_3u_4}+\ldots+\sqrt{u_{2n-1}u_{2n}}=\sqrt{u_1+u_3+\ldots+u_{2n-1}}\times\sqrt{u_2+u_4+\ldots+u_{2n}}$.

Scanné avec CamScanner

A SUITE ARITHMÉTIQUE – SUITE GÉOMÉTRIQUE

Soit (u_n) une suite numérique et (S_n) la suite définie par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

1) On suppose dans cette question que (u_n) est arithmétique de raison r.

a) Sachant que $r = 5$ et $u_0 = 1$, calculer u_4 et S_{10}.

b) Sachant que $u_3 = 5$ et $S_4 = 15$, déterminer r et u_0.

2) On suppose dans cette question que (u_n) est géométrique de raison q.

a) Sachant que $q = -5$ et $u_0 = 3$, calculer u_3 et S_3.

b) Sachant que $q = 2$ et $u_0 = 1$, déterminer le rang N pour lequel $S_N = 65535$.

c) Sachant que $u_4 = -5$ et $u_7 = 40$, déterminer q et S_{10}.

SOLUTION

1) On suppose ici que la suite (u_n) est arithmétique : (On rappelle que $u_n = u_0 + nr$)

a) En appliquant les règles vues dans le cours on obtient :

$$u_4 = u_0 + 4r = 1 + 20 = 21 \qquad \text{et} \qquad S_{10} = \frac{11}{2}(u_0 + u_{10}) = 5{,}5(2u_0 + 10r) = 5{,}5 \times 52 = 286$$

b) On a $u_3 = 5$ et $S_4 = 15$, donc : $u_0 + 3r = 5$ et $\frac{5}{2}(u_0 + u_4) = 15$. Par conséquent, $(u_0 ; r)$ est la solution du système : $\begin{cases} u_0 + 3r = 5 \\ \frac{5}{2}(2u_0 + 4r) = 15 \end{cases}$, ce qui donne : $u_0 = -1$ et $r = 2$.

2) On suppose ici que la suite (u_n) est géométrique : (On rappelle que $u_n = u_0 q^n$)

a) On a : $u_3 = u_0 q^3 = 3 \times (-5)^3 = -375$ et $S_3 = u_0 \frac{1 - q^4}{1 - q} = \frac{3}{6}\left(1 - (-5)^4\right) = -312$.

b) On sait que : $S_N = u_0 \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$; donc $65535 = 2^{N+1} - 1$, c'est-à-dire $65536 = 2^{N+1} = 2^{16}$.

Il en résulte alors que : $N = 15$

c) On sait que $u_7 = u_4 q^3$, donc : $q^3 = \frac{u_7}{u_3} = -8$, et ce qui donne $q = -2$.

Pour la valeur de S_{10} :

On calcul d'abord u_0. Comme $u_4 = u_0 q^4$ alors : $u_0 = \frac{u_4}{q^4} = \frac{-5}{16}$. Il s'ensuit alors :

$$S_{10} = u_0 \frac{1 - q^{11}}{1 - q} = -\frac{5}{16} \times \frac{1 - (-2)^{11}}{3} = -\frac{3415}{16}$$

Scanné avec CamScanner

2 TECHNIQUES ET ASTUCES

- Pour prouver qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmétique, on calcule la différence $u_{n+1}-u_n$ et on vérifie que cette différence est constante. Concrètement, on se donne un entier naturel n et l'on doit prouver que la différence $u_{n+1}-u_n$ est égale à une constante r.



Ce réel r n'étant rien d'autre que la raison de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Si on trébuche, on calcule la différence u_1-u_0 pour connaître la raison, admettre le résultat et poursuivre le problème avec la bonne raison r.

- Pour prouver qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ n'est pas une suite arithmétique, il suffit de trouver deux différences de termes consécutifs qui sont inégales.
- Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est arithmétique de raison r, alors pour tout entier $n \geq n_0$: $u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r$.

Il est essentiel de bien observer l'ensemble sur lequel la suite est définie.

De façon générale, si $n \geq n_0$ et $p \geq n_0$ alors : $u_n = u_p + (n-p)r$.

- Pour prouver qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique, on calcule le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et on vérifie que ce quotient est constant. Concrètement, on se donne un entier naturel n et l'on doit réussir à écrire le nombre u_{n+1} comme le produit d'une constante q par u_n. Le réel q est la raison de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.
- Pour prouver qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ n'est pas une suite géométrique, il suffit de trouver deux quotients de termes consécutifs qui ne sont pas égaux.
- Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est géométrique de raison q, alors pour tout entier $n \geq n_0$: $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$.

Là encore, il est essentiel de bien observer l'ensemble sur lequel la suite est définie.

De façon générale, si $n \geq n_0$ et $p \geq n_0$ alors : $u_n = u_p\, q^{n-p}$.

B ÉTUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTE (1)

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 2$

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$

a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et préciser sa raison.

b) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$. Exprimer S_n en fonction de n.

Scanné avec CamScanner

SOLUTION

1) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 2$.

Initialisation : pour $n = 0$, on a bien $u_0 > 2$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > 2$ et montrons que $u_{n+1} > 2$.

On a : $u_{n+1} - 2 = \dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1} - 2 = \dfrac{3u_n - 6}{u_n + 1} = \dfrac{3(u_n - 2)}{u_n + 1}$.

Comme $u_n > 2$, alors $\dfrac{3(u_n - 2)}{u_n + 1} > 0$. Ceci qui conduit à $u_{n+1} > 2$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.

2) Montrons que la suite (u_n) est décroissante :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1} - u_n = \dfrac{-4 + 4u_n - u_n^2}{u_n + 1} = -\dfrac{(u_n - 2)^2}{u_n + 1}$

Comme : $-\dfrac{(u_n - 2)^2}{u_n + 1} \leq 0$, alors $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Par conséquent, la suite (u_n) est décroissante.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$

a) Montrons que la suite (v_n) est arithmétique en précisant sa raison :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - 2} - \dfrac{1}{u_n - 2} = \dfrac{u_n + 1}{3(u_n - 2)} - \dfrac{1}{u_n - 2} = \dfrac{u_n - 2}{3(u_n - 2)} = \dfrac{1}{3}$

Il en résulte que la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{3}$.

b) Puisque la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{3}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 + nr = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}n = \frac{2n+3}{6}$$

De l'égalité $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$, on tire $u_n - 2 = \dfrac{1}{v_n}$. Par suite : $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 2 = \dfrac{6}{2n+3} + 2 = \dfrac{4n+12}{2n+3}$

En résumé, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{2n+3}{6}$ et $u_n = \dfrac{4n+12}{2n+3}$

c) La suite (v_n) étant arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{3}$. Il en résulte donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2n+3}{6}\right) = \frac{(n+1)(n+3)}{6}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \dfrac{(n+1)(n+3)}{6}$

Scanné avec CamScanner

2 TECHNIQUES ET ASTUCES



- Pour montrer qu'une suite (u_n) est majorée par un réel M, on peut envisager deux méthodes selon les données de l'exercice :
  - Dans un premier temps, on peut évidemment essayer de prouver directement que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq M$.
  - Si cette méthode n'aboutit pas, on peut essayer de mettre en place un raisonnement par récurrence. Une récurrence s'avère particulièrement efficace lorsque l'on a un lien évident entre u_n et u_{n+1}.

    Bref, une récurrence est intéressante lorsque, par exemple, la suite (u_n) obéit à une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Supposons que l'on veuille étudier la monotonie d'une suite (u_n). Il y a en gros trois façons de procéder :
  - Soit on étudie la différence entre deux termes consécutifs :
    - ✓ (u_n) est croissante si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
    - ✓ (u_n) est décroissante si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
  - Soit on étudie le quotient de deux termes consécutifs, à condition que tous les termes soient strictement positifs :
    - ✓ (u_n) est croissante si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.
    - ✓ (u_n) est décroissante si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.

    Attention, cette méthode ne s'applique que dans le cas où les termes sont strictement positifs. De plus, cette méthode est praticable lorsque les termes de la suite sont définis sous forme de produit. En effet, le quotient de deux termes consécutifs est alors simple à calculer
  - Soit on fait appel à un raisonnement par récurrence :

    Lorsque l'énoncé fournit la monotonie de la suite (u_n) et lorsqu'aucune des deux méthodes ci-dessus ne fonctionne, on peut mettre en place un raisonnement par récurrence. Si l'on veut par exemple prouver que la suite (u_n) est croissante, on peut définir la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leq u_{n+1}$ ».

    On vérifie d'abord que $u_0 \leq u_1$. On suppose ensuite que $u_n \leq u_{n+1}$ et montre que $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

    Cette méthode est praticable pour les suites définies par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$, où le sens de variations de la fonction numérique f est clair.
- La comparaison entre u_0 et u_1 (ou bien entre u_1 et u_2) peut donner une idée sur la monotonie de (u_n).

  Si on trouve $u_0 \leq u_1$ (par exemple), on essaye de montrer que la suite (u_n) est croissante.

Scanné avec CamScanner

C ÉTUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTE (2)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = \dfrac{8u_n - 8}{u_n + 2}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2 < u_n < 4$

2) a) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

b) Justifier, sans calcul, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq \dfrac{16}{5}$

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

c) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$. Exprimer S_n en fonction de n.

SOLUTION

1) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 < u_n < 4$:

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 3$, donc on a bien $2 < u_0 < 4$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $2 < u_n < 4$ et montrons que $2 < u_{n+1} < 4$.

On a : $u_{n+1} - 2 = \dfrac{8u_n - 8}{u_n + 2} - 2 = \dfrac{6u_n - 12}{u_n + 2} = \dfrac{6(u_n - 2)}{u_n + 2}$. Or $2 < u_n < 4$, donc $\dfrac{6(u_n - 2)}{u_n + 2} > 0$, d'où : $2 < u_{n+1}$.

De même, on a : $4 - u_{n+1} = 4 - \dfrac{8u_n - 8}{u_n + 2} = \dfrac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} > 0$. Puisque $2 < u_n < 4$, alors $\dfrac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} > 0$.

Par conséquent : $u_{n+1} < 4$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 < u_n < 4$.

2) a) Étude de la monotonie de la suite (u_n) :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{8u_n - 8}{u_n + 2} - u_n = -\dfrac{u_n^2 - 6u_n + 8}{u_n + 2} = -\dfrac{(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2}$.

Comme $2 < u_n < 4$, alors : $-\dfrac{(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2} \geq 0$. En résumé, la suite (u_n) est croissante.

b) La suite (u_n) étant croissante, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq u_1$; ce qui donne : $u_n \geq \dfrac{16}{5}$.

3) a) Montrons que la suite numérique (v_n) est géométrique :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Scanné avec CamScanner

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-4}{u_{n+1}-2}=\frac{\dfrac{8u_n-8}{u_n+2}-4}{\dfrac{8u_n-8}{u_n+2}-2}=\frac{\dfrac{4u_n-16}{u_n+2}}{\dfrac{6u_n-12}{u_n+2}}=\frac{4(u_n-4)}{6(u_n-2)}=\frac{2}{3}v_n$$

Donc la suite numérique (v_n) est géométrique de raison $q=\frac{2}{3}$.

b) Puisque la suite (v_n) est géométrique de raison $q=\frac{2}{3}$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=v_0q^n$.

Par suite : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad v_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

De l'expression $v_n=\frac{u_n-4}{u_n-2}$, on en déduit que : $v_n(u_n-2)=u_n-4$. Ceci donne :

$$u_n=\frac{2v_n-4}{v_n-1}=\frac{-2\left(\frac{2}{3}\right)^n-4}{-\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}=\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n+4}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}$$

c) La suite (v_n) étant géométrique de raison $q=\frac{2}{3}$. Il en résulte alors que :

$$S_n=v_0\frac{1-q^n}{1-q}=-\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}=-3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

- Toute suite croissante est minorée par son premier terme et toute suite décroissante est majorée par son premier terme.
- Une somme de n termes consécutifs est minorée par n fois le plus petit terme, et majorée par n fois le plus grand. Si, par exemple, la suite (u_n) est croissante, alors :

$$n.u_1\le u_1+u_2+....+u_n\le n.u_n$$

D ÉTUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTE (3)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=0$ et $u_{n+1}=\sqrt{3u_n+4}$

1) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 4.

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

3) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $4-u_n\le 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Scanné avec CamScanner

SOLUTION

1) Montrons par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 4 :

On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $u_0 \leq 4$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leq 4$ et montrons que $u_{n+1} \leq 4$.

On a : $4 - u_{n+1} = 4 - \sqrt{3u_n + 4} = \dfrac{16 - 3u_n - 4}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = \dfrac{3(4 - u_n)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}$

Par hypothèse, on a : $4 - u_n \geq 0$, donc $\dfrac{3(4 - u_n)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \geq 0$, d'où : $4 - u_{n+1} \geq 0$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4$ et la suite (u_n) est majorée par 4.

2) Montrons que la suite (u_n) est croissante :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \sqrt{3u_n + 4} - u_n = \dfrac{3u_n + 4 - u_n^2}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n} = \dfrac{(4 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$

Puisque $0 \leq u_n \leq 4$, alors : $\dfrac{(4 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{3u_n + 4} - u_n} \geq 0$ et donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

La suite (u_n) est donc croissante.

3) a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2}(4 - u_n) - (4 - u_{n+1}) = \frac{1}{2}(4 - u_n) - \frac{3(4 - u_n)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = (4 - u_n)\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}\right)$$

Par conséquent : $\dfrac{1}{2}(4 - u_n) - (4 - u_{n+1}) = (4 - u_n)\dfrac{\sqrt{3u_n + 4} - 2}{2\left(4 + \sqrt{3u_n + 4}\right)}$

Puisque : $0 \leq u_n \leq 4$, alors : $\sqrt{3u_n + 4} \geq 2$ et. Il s'ensuit donc que : $(4 - u_n)\dfrac{\sqrt{3u_n + 4} - 2}{2\left(4 + \sqrt{3u_n + 4}\right)} \geq 0$.

Ainsi : $\dfrac{1}{2}(4 - u_n) - (4 - u_{n+1}) \geq 0$. En définitive, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $4 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$.

b) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $4 - u_n \leq 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Première méthode : Raisonnement par récurrence

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et donc : $4 - u_0 \leq 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$.

Hérédité : Supposons que $4 - u_n \leq 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et montrons que : $4 - u_{n+1} \leq 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Scanné avec CamScanner

D'après le résultat 3) a), on a : $4-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4-u_n) \le 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\left(\text{car } 4-u_n \le 4\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

Par suite : $4-u_{n+1} \le 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $4-u_n \le 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Deuxième méthode : Méthode descendante ou télescopage

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < 4-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4-u_n)$

En particulier : $0 < 4-u_1 \le \frac{1}{2}(4-u_0)$

$$0 < 4-u_2 \le \frac{1}{2}(4-u_1)$$

$$\vdots$$

$$0 < 4-u_n \le \frac{1}{2}(4-u_{n-1})$$

En multipliant les membres de ces inégalités, terme à terme, et après simplification, on obtient :

$0 < 4-u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (4-u_0)$. Par suite : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4-u_n \le 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

E ÉTUDE DE DEUX SUITES SIMULTANÉES

On considère les suites $(u_n)_{n\ge1}$ et $(v_n)_{n\ge1}$ définies comme suit : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} \end{cases}$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \le v_n$.

SOLUTION

Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \le v_n$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $u_0 \le v_0$

Hérédité : Supposons que $u_n \le v_n$ et montrons que $u_{n+1} \le v_{n+1}$.

On a : $v_{n+1} - u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} - u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_{n+1}}\right) = \sqrt{u_{n+1}}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{\dfrac{u_n+v_n}{2}}\right)$

Or : $u_n \le v_n$ nous donne $2v_n \ge u_n + v_n$ et donc $v_n \ge \dfrac{u_n+v_n}{2}$ et alors $\sqrt{v_n} - \sqrt{\dfrac{u_n+v_n}{2}} \ge 0$.

Par conséquent : $u_{n+1} \le v_{n+1}$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \le v_n$.

Scanné avec CamScanner

F SUITE RÉCURRENTE D'ORDRE DEUX

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{4}{9}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n)$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - \frac{1}{3^n}$.

1) Montrer que pur tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$.

2) a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

b) Déterminer v_n et u_n en fonction de n.

c) Calculer la somme : $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$ en fonction de n.

SOLUTION

1) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien : $u_1 = \frac{1}{9}u_0 + \frac{2}{3^{0+2}} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$. Vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$ et montrons que : $u_{n+2} = \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}}$.

On a : $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$, donc : $u_n = 9\left(u_{n+1} - \frac{2}{3^{n+2}}\right)$. Il s'ensuit donc :

$$u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{27}\left(12u_{n+1} - 9\left(u_{n+1} - \frac{2}{3^{n+2}}\right)\right) = \frac{1}{27}\left(3u_{n+1} + \frac{2}{3^n}\right) = \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$

2) a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} - \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{9}\left(u_n - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{9}v_n$

Donc, la suite (v_n) est géométrique est géométrique de raison $q = \frac{1}{9}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

b) Puisque la suite (v_n) est géométrique, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 q^n = \left(\frac{1}{9}\right)^n$.

De l'égalité $v_n = u_n - \frac{1}{3^n}$, on tire : $u_n = v_n + \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_k + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{9}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right) + \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$. Par suite :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{21}{8} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Scanné avec CamScanner

EXERCICES D'APPLICATION

CALCUL DES TERMES D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

EXERCICE 01

Pour chacun des cas suivants, calculer les termes u_1, u_2, u_3 et u_n de la suite (u_n) :

1) $u_n = 2^{2n}$; 2) $u_n = 3^{n+2}$; 3) $u_n = \frac{n}{3} - 11$

4) $u_n = (2n-1)(3n+4)$; 5) $u_n = \frac{8n-5}{2n-3}$

6) $u_n = \sqrt{n^2+1}$; 7) $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

8) $u_n = \tan\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$; 9) $u_n = \frac{2(-1)^n}{n^2+n}$

EXERCICE 02

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = \frac{n^2}{3} + 2$

1) Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

2) Exprimer, en fonction de n, les termes suivants :

u_{n+1} ; u_{n+2} ; u_{n-1}^2 ; u_{2n} ; u_{2n-1} ; u_{2n+1}

EXERCICE 03

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_n = (n+2)(3-n)$$

1) Calculer les six premiers termes de la suite (u_n).

2) Exprimer, en fonction de n, les termes suivants :

u_{n+1} ; u_{n+2} ; u_{n^2} ; u_{3n}

3) Calculer u_{n+1} en fonction de u_n et n.

EXERCICE 04

Soit (v_n) la suite numérique définie par :

$$v_{n+1} = n^4 - 5n^3 + n - 2020$$

Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et n.

EXERCICE 05

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_{n-1} = 3^{2n-3} \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

1) Calculer u_0 et u_3.

2) Exprimer u_n en fonction de n.

3) Calculer : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\frac{u_n}{u_{n-1}}$.

EXERCICE 06

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 - n$$

1) On suppose dans cette question que $u_0 = 0$.

a) Calculer les six premiers termes de (u_n).

b) Conjecturer une formule donnant l'expression de u_n en fonction de n seulement.

c) Démontrer cette formule.

2) On suppose dans cette question que $u_0 = 1$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n + n$.

EXERCICE 07

Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$; $(n \in \mathbb{N})$

2) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 4 + (1+u_n)^2 \end{cases}$; $(n \in \mathbb{N})$

3) $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{n} \end{cases}$; $(n \in \mathbb{N}^*)$

4) $\begin{cases} u_2 = -3 \\ u_{n+1} = \frac{1-u_n}{1+u_n} \end{cases}$; $n \geq 2$

Scanné avec CamScanner

5) $\begin{cases} u_3 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2-u_n} - 1 \ ; \ n \geq 3 \end{cases}$

6) $\begin{cases} u_0 = -1 \ ; \ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 5u_n \ ; \ (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

7) $\begin{cases} u_0 = 1 \ ; \ u_1 = -3 \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{4}u_{n-1} + 3 - n \ ; \ (n \geq 1) \end{cases}$

SUITE MAJORÉE, MINORÉE, BORNÉE

EXERCICE 08

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = \dfrac{3n-2}{4n+1}$

1) Montrer que la suite (u_n) est majorée par $\dfrac{3}{4}$.

2) Montrer que la suite (u_n) est minorée par -2.

EXERCICE 09

Soit (v_n) la suite numérique définie par :

$$v_n = n^2 - 2n + 3$$

1) Montrer que la suite (v_n) est minorée par 2.

2) Montrer que la suite (v_n) n'est pas majorée.

EXERCICE 10

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n}$$

Prouver que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ -1 \leq u_n \leq 2$

EXERCICE 11

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1 \ ; (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ 1 \leq u_n \leq 2$$

EXERCICE 12

Soit (v_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \sqrt{2+v_n} \ ; (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 0 \leq v_n \leq 2$

MONOTONIE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

EXERCICE 13

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n = -2n^2 + 3$$

Étudier la monotonie de la suite (u_n).

EXERCICE 14

Soit $(H_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

1) Calculer H_1, H_2 et H_3.

2) Étudier la monotonie de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $H_n = n - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \ldots + \dfrac{n-1}{n}\right)$

b) $H_1 + H_2 + \ldots + H_n + n = (n+1)H_n$

EXERCICE 15

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+u_n^2} \ ; (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Prouver que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 0 < u_n < 1$.

3) a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n \geq \dfrac{1}{2}$

Scanné avec CamScanner

2 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 16

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = \dfrac{3^n}{n}$

1) Exprimer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n.

2) Comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 et en déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

EXERCICE 17

On considère les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \; ; \; u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad ; \; n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = u_{n-1} - u_n$$

1) Montrer que la suite (v_n) est constante.

2) En déduire que la suite (u_n) est croissante.

EXERCICE 18

Soit (u_n) une suite croissante à termes strictement positifs. On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; v_n = \dfrac{1}{u_n}$

Étudier la monotonie de la suite (v_n).

SUITES ARITHMÉTIQUES

EXERCICE 19

Parmi les suites numériques suivantes, indiquer celles qui sont des suites arithmétiques en déterminant la raison et le premier terme :

1) $u_n = 5 - 3n$ et $n \in \mathbb{N}$.

2) $v_n = 5n + 3$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

3) $w_n = (n+1)^2 - n^2$ et $n \geq 3$.

4) $x_n = n(n-1)$ et $n \in \mathbb{N}$.

5) $y_n = 2^n$ et $n \in \mathbb{N}$.

6) $z_0 = -1$ et $z_n = 5 + z_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 20

1) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = -6$.

Calculer : u_6 ; u_{12} ; u_{35}

2) Soit (v_n) une suite arithmétique telle que :

$$v_1 = 5 \quad \text{et} \quad v_{13} = 7$$

Calculer la raison et le premier terme de (v_n).

EXERCICE 21

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = 6$ telle que $u_{20} = 11$.

Calculer u_0 et u_{15} puis exprimer u_n en fonction de n.

EXERCICE 22

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

1) Calculer u_{20} sachant que : $u_0 = -4$ et $r = 2$.

2) Calculer r sachant que : $u_0 = -20$ et $u_{11} = 13$.

3) Calculer u_{39} sachant que : $u_4 = -5$ et $u_{13} = -8$.

EXERCICE 23

Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ une suite arithmétique de raison $r = -2$ telle que : $u_2 = 23$ et $u_p = 5$.

1) Déterminer l'entier p.

2) Calculer la somme $u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ en fonction de n.

EXERCICE 24

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3 puis v_0, v_1 et v_3.

2) Prouver que la suite (v_n) est arithmétique.

3) Donner les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

4) Déterminer la monotonie de la suite (u_n).

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 25

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan.

On considère le vecteur $\vec{u}(2;-1)$ et on définit une suite de points (A_n) comme suit :

- $A_0(-6;5)$;
- A_{n+1} est l'image de A_n par la translation $t_{\vec{u}}$.

1) Représenter dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les points :

$$A_0 \quad ; \quad A_1 \quad ; \quad A_2 \quad ; \quad A_3$$

2) Soit $(x_n;y_n)$ le couple de coordonnées du point A_n.

a) Prouver que les suites (x_n) et (y_n) sont arithmétiques.

b) Exprimer x_n et y_n en fonction de n.

EXERCICE 26

Depuis qu'il a acheté une voiture neuve, Ahmed a parcouru chaque jour le même nombre de kilomètres.

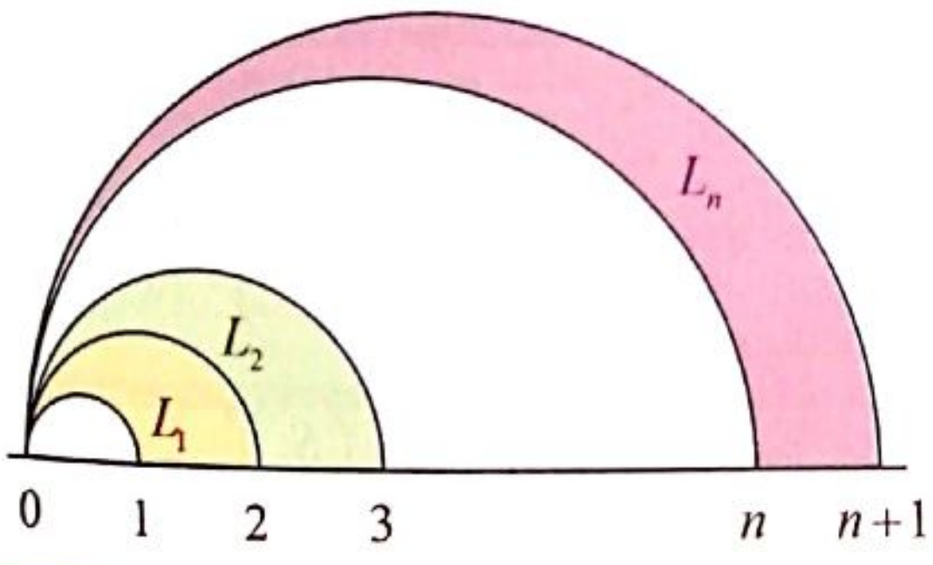
À la fin de la journée du 15 janvier, le compteur de la voiture affichait 495 kilomètres parcourus depuis l'achat et le 25 janvier, on lisait 1045 kilomètres.

1) Combien de kilomètres Ahmed parcourt-il chaque jour avec sa voiture ?

2) Quel jour a-t-il roulé pour la première fois avec sa voiture ?

EXERCICE 27

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, L_n est l'aire de la partie du plan comprise entre les demi-cercles de diamètres n et $n+1$ sur la figure suivante :



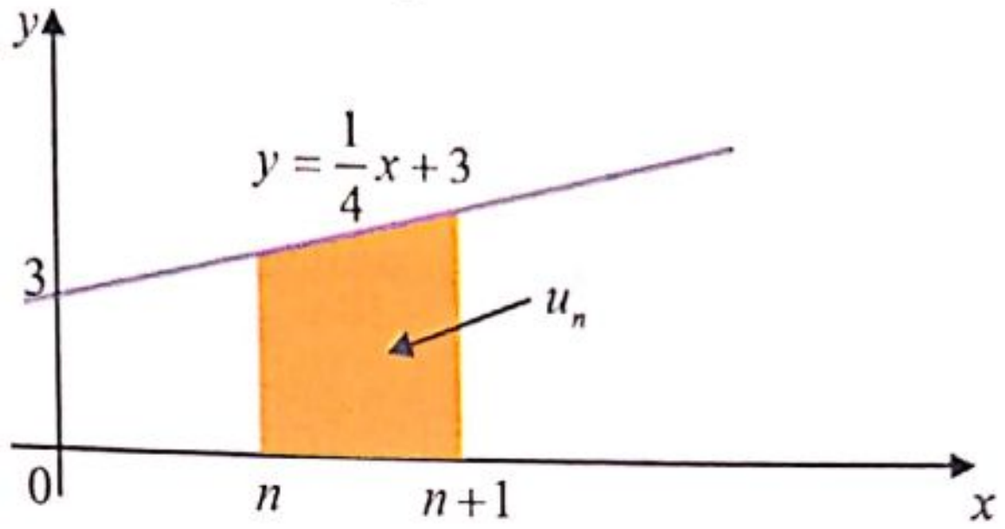
1) Démontrer que la suite $(L_n)_{n\geq 1}$ est arithmétique.

2) Calculer de deux façons différentes la somme :

$$L_1 + L_2 + \ldots + L_n$$

EXERCICE 28

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est l'aire de la partie du plan, colorée en orange sur la figure.



1) Exprimer u_n en fonction de n.

2) Démontrer que la suite (u_n) est arithmétique.

3) Déterminer géométriquement : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

SUITES GÉOMÉTRIQUES

EXERCICE 29

Parmi les suites numériques suivantes, indiquer celles qui sont des suites géométriques en déterminant la raison et le premier terme :

1) $u_n = (-1)^n$ et $n \in \mathbb{N}$.

2) $v_n = 6^{2n}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

3) $w_n = 2^n + 3^n$ et $n \in \mathbb{N}$.

4) $x_n = \dfrac{3^n}{7^{n+1}}$ et $n \in \mathbb{N}$.

5) $y_n = (-5)^{n+3}$ et $n \in \mathbb{N}$.

6) $z_0 = 2$ et $z_{n+1} = z_n + \dfrac{6}{100} z_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7) $a_n = \dfrac{2^n}{n^2}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

8) $b_n = \pi^n + \pi^{n+1}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Scanné avec CamScanner

2 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 30

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

1) Calculer u_4 et u_{10} sachant que : $u_0 = 32$ et $q = \frac{1}{2}$.

2) Calculer u_n en fonction de n sachant que :

$$u_2 = -\frac{1}{81} \quad \text{et} \quad q = 3.$$

3) Calculer q sachant que : $u_1 = 1$ et $u_4 = 8$.

4) Calculer q et u_n en fonction de n sachant que :

$$q < 0 \quad \text{et} \quad u_7 = \frac{1}{18} \quad \text{et} \quad u_5 = 2$$

5) Calculer u_{12} sachant que : $u_5 = 5$ et $u_2 = \frac{-5}{8}$.

EXERCICE 31

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ telle que $u_0 = 2$. Calculer la somme : $S = u_{10} + u_{11} + \ldots + u_{20}$.

EXERCICE 32

Soit (u_n) une suite géométrique croissante telle que :

$$u_2 = 16 \quad \text{et} \quad u_6 = 625$$

Exprimer u_n en fonction de n.

EXERCICE 33

Soit a, b et c trois termes consécutifs d'une suite géométrique telle que :

$$\begin{cases} a + b + c = 36,75 \\ abc = 343 \end{cases}$$

Calculer a, b et c.

EXERCICE 34

On s'intéresse au cours d'une expérience à la croissance d'une population de bactéries dont le nombre augmente de 50% toutes les heures. À l'origine, la population notée p_0 est de 1200 bactéries. On note p_n le nombre de bactéries après n heures.

1) Calculer p_1 et p_2.

2) Démontrer que la suite (p_n) est géométrique.

3) Calculer le nombre de bactéries au bout d'une journée.

EXERCICE 35

Une tête de coquelicot contient environ 3000 graines. Chaque graine germe l'année suivante et donne naissance à un nouveau coquelicot ayant aussi 3000 graines. Combien aura-t-on de fleurs, au bout de cinq ans, issues d'un seul coquelicot ?

EXERCICE 36

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan.

On considère le point $A_0(6;4)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point A_{n+1} est l'image du point A_n par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.

1) Représenter dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les points :

$$A_0 \quad ; \quad A_1 \quad ; \quad A_2 \quad ; \quad A_3$$

2) Soit $(x_n ; y_n)$ le couple de coordonnées du point A_n.

a) Prouver que les suites (x_n) et (y_n) sont géométriques.

b) Donner l'expression de x_n et y_n en fonction de n.

EXERCICE 37

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q telle que :

$q \neq 1$ et $u_0 \neq 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} \quad ; \quad P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n-1}$$

$$T_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \ldots + \frac{1}{u_{n-1}}$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ S_n = u_0\, q^{n-1}\, T_n$

2) En déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (P_n)^2 = \left(\frac{S_n}{T_n}\right)^n$$

Scanné avec CamScanner

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 38

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

Calculer la somme : $u_1 + u_2 + \ldots + u_{2020}$.

EXERCICE 39

Soit (v_n) la suite numérique définie par :

$$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Calculer la somme : $v_0 + v_1 + \ldots + v_{2018}$.

EXERCICE 40

Calculer les sommes suivantes :

$S_1 = 15 + 21 + 27 + 33 + \ldots + 603$

$S_2 = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + \ldots + \frac{19}{3} + 7$

$S_3 = 1 + \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{8}{125} + \ldots + \frac{256}{390625}$

$S_4 = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots + \frac{1}{10000000}$

$S_5 = 18 + 54 + 162 + \ldots + 39366$

$S_6 = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{1048576}$

$S_7 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

$S_8 = x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{34}$ (où $x \in \mathbb{R} - \{1;-1\}$)

EXERCICE 41

Soit (v_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \dfrac{2 + v_n^2}{2v_n} \ ; \ (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ v_n > \sqrt{2}$

2) Étudier la monotonie de la suite (v_n).

EXERCICE 42

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

1) Démontrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n \leq 1$$

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

4) Trouver un entier N tel que pour tout $n > N$:

$$u_n > 0{,}99$$

EXERCICE 43

Soit (u_n) et (v_n) les suites numériques définies par :

$$u_n = \frac{2^n - 4n + 5}{4} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{2^n + 4n - 5}{4}$$

1) Montrer que la suite (a_n) définie par : $a_n = u_n + v_n$ est géométrique puis calculer la somme :

$$A = a_0 + a_1 + \ldots + a_{10}$$

2) Montrer que la suite (b_n) définie par : $b_n = u_n - v_n$ est arithmétique puis calculer la somme :

$$B = b_0 + b_1 + \ldots + b_{10}$$

3) En déduire la valeur des sommes suivantes :

$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$ et $T = v_0 + v_1 + \ldots + v_{10}$.

EXERCICE 44

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = 2^n - 7n + 1$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

Calculer S_n en fonction de n.

Scanné avec CamScanner

2 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 45

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 25}{u_n - 3}$

1) Démontrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \neq 5$

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 5}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique. Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculer la somme : $v_1 + v_2 + ... + v_{10}$.

EXERCICE 46

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 3}{3u_n - 1}$

1) Démontrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n \neq 1$

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1}$.

a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique. Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculer en fonction de n la somme :

$$v_1 + v_2 + ... + v_n$$

EXERCICE 47

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculer en fonction de n la somme :

$$u_0 + u_1 + ... + u_n$$

EXERCICE 48

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = -\dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$

1) Démontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n < 0$.

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculer en fonction de n la somme :

$$v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$$

EXERCICE 49

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \dfrac{1}{2}u_{n+1} + \dfrac{1}{2}u_n \ ; (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1) a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

b) Écrire v_n en fonction de n.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ S_n = u_n$.

b) Écrire u_n en fonction de n.

EXERCICE 50

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \dfrac{n^2 + n}{3}$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) Calculer u_n et u_{n+1} en fonction de n.

3) En déduire que la suite (u_n) est arithmétique.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 51

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \left(1-\sqrt{2}\right)u_n + 2\sqrt{2} \ ; (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1) Calculer u_2 et u_3.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = u_n - 2$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

3) Calculer en fonction de n la somme :

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

EXERCICE 52

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_1 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3u_n + 4^n$

1) Calculer u_0 et u_2.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = 4u_n - u_{n+1}$.

a) Prouver que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = u_n - 4^n$

b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

EXERCICE 53

Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$S_n = \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{2\times 5} + \frac{1}{3\times 7} + \ldots + \frac{1}{n(2n+1)}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{2}S_n = 1 - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right)$$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 - \frac{n}{n+1} < \frac{1}{2}S_n < 1 - \frac{n}{2n+1}$$

3) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

EXERCICE 54

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{16}\left(1 + 4u_n + \sqrt{1+24u_n}\right) \ ; (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \sqrt{1+24u_n}$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ v_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}(v_n - 3)$.

2) Calculer u_n en fonction de n.

EXERCICE 55

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$u_1 = \frac{2}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \frac{2n+2}{3n}u_n$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \frac{u_n}{n}$.

1) Calculer u_2 et u_3.

2) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

3) Calculer en fonction de n la somme :

$$S_n = u_1 + \frac{u_2}{2} + \ldots + \frac{u_n}{n}$$

EXERCICE 56

Soit (x_n) la suite numérique définie par :

$x_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$.

1) a) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\quad x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{\left(x_n - \sqrt{2}\right)^2}{2x_n}$$

b) En déduite que la suite (x_n) est minorée par $\sqrt{2}$.

2) Montrer que (x_n) est strictement décroissante.

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < x_n - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 57

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 1$.

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

4) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ n < \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq n + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

EXERCICE 58

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n} - \frac{2}{u_n^2}$

1) Démontrer que la suite (u_n) est minorée par 2.

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

EXERCICE 59

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = 4u_n - 6n + 15$.

1) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

Quelle est sa raison ?

2) a) Calculer v_0 puis exprimer v_n en fonction de n.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = t_n + w_n$

avec : $t_n = \frac{19}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $w_n = \frac{3}{2}n - \frac{15}{4}$

c) Expliquer pourquoi (t_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et (w_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{3}{2}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $T_n = t_0 + t_1 + \ldots + t_n$,

$W_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$ et $U_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

a) Calculer T_n et W_n en fonction de n.

b) En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

EXERCICE 60

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = 2^n + 1$.

EXERCICE 61

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ et $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer une expression du terme général de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ en fonction de n.

EXERCICE 62

On considère la suite de Fibonacci (f_n) définie par :

$f_0 = f_1 = 1$ et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que la suite (f_n) est croissante.

2) Montrer que pour tout $n \geq 3$: $\frac{f_{n+1}}{f_n} < 2$.

3) On considère la suite numérique (S_n) définie par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{f_n}{3^n}$$

a) Calculer : $3S_n$; $3S_n - S_n$; $3(3S_n - S_n)$.

b) En déduire une relation entre S_n, S_{n-2}, f_n et n.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 63

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 2u_n + n + 1$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) Expression de u_n par une première méthode :

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = 2^n \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}\right)$$

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

c) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 3 \times 2^n - n - 2$$

3) Expression de u_n par une deuxième méthode :

Comme on cherche à employer une autre méthode, on ne s'autorise pas à utiliser dans les questions a) et b) le résultat de la question précédente.

a) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n + n + 2$.

Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 2$.

b) En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n.

c) Retrouver ensuite le résultat de 2) c).

EXERCICE 64

Soit (x_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n} \; ; \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Soit φ la solution positive de l'équation : $x = 1 + \dfrac{1}{x}$.

(φ est le nombre d'or).

1) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \; x_n \geq 1$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x_n - \varphi = \dfrac{\varphi - x_{n-1}}{\varphi . x_{n-1}}$.

3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|x_n - \varphi| \leq \frac{|\varphi - x_{n-1}|}{\varphi}$$

4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|x_n - \varphi| \leq \dfrac{1}{\varphi^n}$.

puis que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \; |x_n - \varphi| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

EXERCICE 65

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

3) Montrer que pour tout entier $p \geq 2$:

$$\frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \geq \frac{1}{2p\sqrt{p}}$$

4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leq u_n \leq 3 - \dfrac{2}{n}$.

EXERCICE 66

Soit a, b et c trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$.

EXERCICE 67

1) Montrer que pour tout $x \in]0;1]$:

$$\sqrt{1-x} < 1 - \frac{1}{2}x < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = \left(1 - \dfrac{1}{2n}\right) u_{n-1} \; ; \; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de n.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = u_n . \sqrt{n+1} \quad \text{et} \quad w_n = u_n . \sqrt{n}$$

Scanné avec CamScanner

a) Montrer que la suite (v_n) est strictement décroissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n < \dfrac{1}{2\sqrt{1+n}}$.

b) Montrer que la suite (v_n) est strictement croissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{4\sqrt{n}} \leq u_n$.

EXERCICE 68

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$1+\frac{x}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)^2}+\frac{x^3}{(x+1)^3}=0$$

EXERCICE 69

Au premier janvier 2014, une commune rurale contient 100 habitants. On sait de plus que le taux annuel de croissance de la population est de 1,2% et que 0,3% émigre chaque année vers les villes voisines.

Soit p_n l'effectif de la population de cette commune en l'année $2014+n$.

1) Calculer p_1, p_2 et p_3.

2) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.

3) Calculer l'effectif de la population de cette commune en 2025.

EXERCICE 70

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 2 \\ u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) a) Calculer u_2, u_3 et u_4.

b) (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(u_{n+1}-u_n)(u_{n+2}-u_{n+1}) \geq 0$$

b) En déduire la monotonie de la suite (u_n).

3) Soit (v_n) la suite numérique définie par :

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4) Montrer que la suite (u_n) est bornée.

EXERCICE 71

Soit (u_n) et (v_n) les suites numériques définies par :

$u_0 = 2$, $v_0 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{u_n + v_n}$

1) Calculer u_1 et v_1.

2) Calculer $u_{n+1} - v_{n+1}$ et $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$ en fonction de u_n et v_n.

3) En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

EXERCICE 72

1) Soit x un nombre réel.

Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{Z})\ E(x+a) = E(x)+a$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

2) Soit x un réel de l'intervalle $]1;+\infty[$.

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par:

$$\begin{cases} u_1 = E(x) \\ u_{n+1} = u_n + E(u_n) \ ; \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Calculer u_2 et u_3.

b) Calculer $E(u_n)$ en fonction de n.

c) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

EXERCICE 73

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [0;1] \\ u_{n+1} = 2 + u_n - \sqrt{3+u_n^2} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; \ 0 \leq u_n \leq 1$

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

Scanné avec CamScanner

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq 1-u_{n+1} \leq \left(\sqrt{3}-1\right)\left(1-u_n\right)$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq 1-u_n \leq \left(\sqrt{3}-1\right)^n \left(1-u_0\right)$$

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{3+u_k^2} \quad \text{et} \quad T_n = u_n + S_n$$

a) Déterminer la nature de la suite $\left(T_n\right)_{n\geq 1}$.

b) Exprimer S_n en fonction de n, u_0 et u_n.

EXERCICE 74

1) Montrer que : $\left(\forall x \in \left]0;\frac{1}{2}\right[\right) \quad 0 < \frac{x^2}{1-2x^2} < \frac{1}{2}$.

2) Soit $\left(u_n\right)$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \ ; \ a \in \left]0;\frac{1}{4}\right[\\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{1-2u_n^2} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \quad 0 < u_n < \frac{1}{4}$.

b) Montrer que $\left(u_n\right)$ est strictement décroissante.

c) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \ u_{n+1} < \frac{2}{7} u_n$.

d) En déduire que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \ u_n < \left(\frac{2}{7}\right)^n a$

EXERCICE 75

Soit $\left(u_n\right)$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{16u_n}{\left(2+\sqrt{u_n}\right)^2} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \quad 0 \leq u_n \leq 4$.

2) Étudier la monotonie de la suite $\left(u_n\right)$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = 1 - \frac{2}{\sqrt{u_n}}$

a) Montrer que la suite $\left(v_n\right)$ est géométrique.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

EXERCICE 76

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f\left(x\right) = \left|x\right| - 2 + \sqrt{x^2+1}$$

1) Étudier la partie de la fonction f.

2) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que f possède un minimum absolu que l'on déterminera.

4) On considère la suite numérique $\left(u_n\right)$ définie par :

$u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - 2 + \sqrt{u_n^2+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \ u_n \geq 3$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 1$

c) En déduire que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \ u_n \geq 3+n$

d) La suite $\left(u_n\right)$ est-elle majorée ? Justifier la réponse.

EXERCICE 77

Soit $\left(u_n\right)$ la suite numérique définie par :

$$u_0 = -1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = \frac{4+u_n}{5-u_n}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1+u_n}{2-u_n}$.

1) Montrer que la suite $\left(v_n\right)$ est arithmétique.

2) On considère la suite numérique $\left(w_n\right)$ définie par :

$w_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_{n+1} = \left(u_n + \dfrac{5}{n+1}\right) w_n$.

et on pose : $X_n = \dfrac{w_n}{n+1}$ et $S_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$

a) Montrer que la suite $\left(X_n\right)$ est géométrique.

b) Montrer que : $S_n = \left(n+1\right) X_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis exprimer S_n en fonction de n.

Scanné avec CamScanner

3

TRIGONOMÉTRIE

HISTOIRE

Les origines de la trigonométrie remontent aux civilisations d'Égypte antique, de Mésopotamie et de la vallée de l'Indus, il y a plus de 4000 ans. C'est dans le monde musulman que la trigonométrie prend le statut de discipline à part entière et se détache de l'astronomie.

Omar Khayyam combine l'utilisation de la trigonométrie et la théorie de l'approximation pour fournir des méthodes de résolutions d'équations algébriques par la géométrie. Des méthodes détaillées de constructions de tables de sinus et cosinus pour tous les angles sont écrites par le mathématicien Bhāskara en 1150. Il développe aussi la trigonométrie sphérique. Au xiiie siècle, Nasir al-Din Tusi, à la suite de Bhāskara, est probablement un des premiers à considérer la trigonométrie comme une discipline distincte des mathématiques. Enfin, au xive siècle, Al-Kachi réalise des tables de fonctions trigonométriques lors de ses études en astronomie.

Les applications de la trigonométrie sont extrêmement nombreuses. En particulier, elle est utilisée en astronomie et en navigation avec notamment la technique de triangulation.

Les autres champs où la trigonométrie intervient sont (liste non exhaustive) : physique, électricité, électronique, mécanique, acoustique, optique, statistiques, économie, biologie, chimie, médecine, météorologie, géodésie, géographie, cartographie, cryptographie, etc.

Source : https://fr.wikipedia.org

OMAR KHAYYAM (1048 -1131)





GHIYATH AL - KACHI (1380 – 1429)

BHĀSKARA II (1114 – 1185)



CAPACITÉS ATTENDUES

- Maitriser les différentes formules de transformation ;
- Résoudre les équations et les inéquations trigonométriques se ramenant à la résolution d'équations et d'inéquations fondamentales ;
- Représenter et lire les solutions d'une équation et d' une inéquation sur le cercle trigonométrique..

PLAN DU COURS

- Activités Préparatoires..... 117
- Connaissances Fondamentales
  - Formules de Transformation de base 120
  - Transformation de produits en sommes
    Transformation de sommes en produits..... 125
- Techniques et Astuces 129
- Exercices et Problèmes
  - Exercices d'application..... 134
  - Exercices de perfectionnement..... 138

Scanné avec CamScanner

1 RAPPELS

A) Dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points :

$A(-1;-2)$; $B(3;1)$; $C(2;3)$

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\|\overrightarrow{AB}\|$; $\|\overrightarrow{AC}\|$.

B) Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{k}$ des vecteurs du plan orienté tels que :

$(\overrightarrow{\vec{u};\vec{v}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$; $(\overrightarrow{\vec{w};\vec{v}}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$; $(\overrightarrow{\vec{k};\vec{w}}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Déterminer une mesure de chacun des angles orientés : $(\widehat{\vec{u};\vec{w}})$, $(\widehat{\vec{k};\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{k};\vec{u}})$.

C) Simplifier les expressions suivantes :

$A = \cos x \sin x\left(\tan x - \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$; $B = \sin(11\pi - x) + \cos(5\pi + x) + \cos(14\pi - x) - \sin\left(\frac{19\pi}{2} - x\right)$

$C = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$; $D = \tan\left(\frac{\pi}{5}\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

D) Résolution des équations et inéquations :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\cos x = -\frac{1}{2}$; $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$; $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$; $\tan x = -1$

2. Résoudre dans l'intervalle I les inéquations suivantes :

a) $\cos x < \frac{1}{2}$ et $I = [-\pi;\pi]$; b) $\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $I = [0;2\pi]$.

c) $\tan x \geq \sqrt{3}$ et $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$; d) $\sin x + \cos x \geq 2$ et $I =]-\pi;\pi]$.

2 TRANSFORMATION DE cos (a − b) ET SES RÉSULTATS

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$ et $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique qui lui est associé. Soit a et b deux nombres réels.

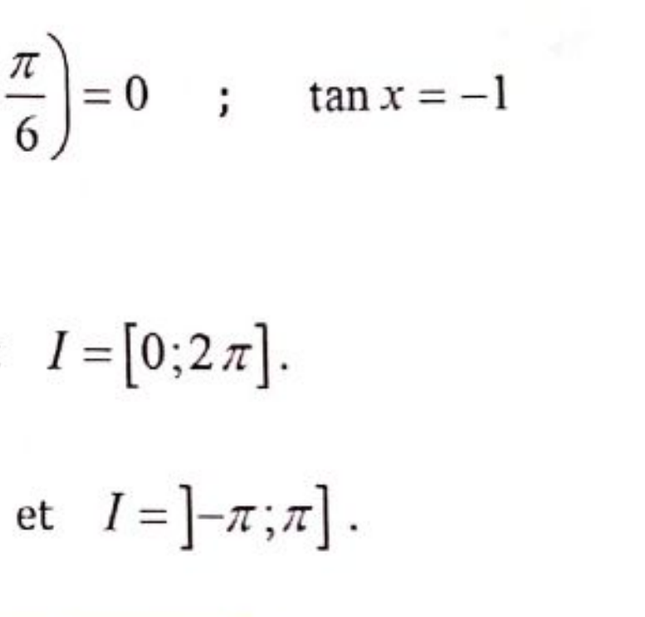
On considère les points A et B du cercle $\mathscr{C}$ tels que :

$(\overrightarrow{\vec{i};\overrightarrow{OA}}) \equiv a\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{\vec{i};\overrightarrow{OB}}) \equiv b\ [2\pi]$

1. a) Montrer que : $(\overrightarrow{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) \equiv b - a\ [2\pi]$.

b) En déduire que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \cos(b-a)$.

2. a) Déterminer les coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.



Scanné avec CamScanner

3 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

b) En utilisant l'expression analytique du produit scalaire, établir :

$$\cos(b-a)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b$$

3. Établir les égalités suivantes :

$\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b$; $\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b$

$$\sin(a-b)=\sin a.\cos b-\cos a.\sin b$$

4. a) En utilisant les résultats de la question 3, montrer que :

$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$ et $\sin(2a)=2\sin a.\cos a$

b) En déduire que : $\cos^2 a=\dfrac{1+\cos(2a)}{2}$ et $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

5. <u>Applications :</u>

a) En écrivant $\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$, calculer $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

b) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \cos x=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

c) En écrivant $\dfrac{\pi}{6}=2\times\dfrac{\pi}{12}$, Montrer que : $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

3 TRANSFORMATION DE tan $(a-b)$ ET SES RÉSULTATS

Soit a et b deux réels tels que : $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $a+b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ et $a-b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

1. En utilisant les résultats de l'activité 2, montrer que :

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}\quad\text{et}\quad\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$$

2. On suppose dans cette question que : $a\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

a) Déduire de la question précédente que : $\tan(2a)=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

b) Montrer que : $\tan\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$.

4 TRANSFORMATION DES PRODUITS EN SOMMES ET INVERSEMENT

Soit a et b deux nombres réels.

1. En utilisant les résultats de l'activité 2, établir les égalités suivantes :

$\cos a.\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$; $\sin a.\sin b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$

$\sin a.\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$; $\cos a.\sin b=\dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b)-\sin(a-b)\right]$

Scanné avec CamScanner

2. On pose : $p = a + b$ et $q = a - b$.

a) Vérifier que : $a = \dfrac{p+q}{2}$ et $b = \dfrac{p-q}{2}$.

b) En utilisant les résultats de la question précédente, déduire les égalités suivantes :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad ; \quad \cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad ; \quad \sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos(x) - \cos(3x) = 4\sin^2(x).\cos(x)$

5 TRANSFORMATION DE $a\cos x + b\sin x$

Soit a et b deux réels tels que : $(a;b) \neq (0;0)$.

Pour tout réel x, on pose : $A(x) = a\cos x + b\sin x$.

1. Vérifier que : $A(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$.

2. a) Montrer qu'il existe un nombre réel α tel que : $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

b) En déduire que : $A(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$.

3. Transformer les expressions suivantes :

$$A_1(x) = \cos x - \sin x \quad ; \quad A_2(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x \quad ; \quad A_3(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$$

6 RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

1. Résoudre dans l'intervalle I les équations et les inéquations suivantes :

a) $(2\cos x - 1)\left(2\sin x + \sqrt{2}\right) \leq 0$ et $I = [0;2\pi]$; b) $\dfrac{2\cos x - 1}{2\sin x + \sqrt{2}} > 0$ et $I = [0;2\pi]$.

c) $\dfrac{\tan x}{\tan x - 1} \geq 0$ et $I = [-\pi;\pi]$; d) $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) + \sqrt{2} = 0$ et $I = \mathbb{R}$.

2. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

b) Résoudre dans l'intervalle $I = [0;2\pi]$: $\cos(3x) = -2\cos^3 x$ et $\cos(3x) + 2\cos^3 x \leq 0$

3. a) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = \dfrac{1}{2}\cos(2x)$.

b) Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions dans $[0;\pi]$ de l'équation et l'inéquation suivantes :

$$(E) : \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad ; \quad (I) : \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Scanné avec CamScanner

3 CONNAISSANCES FONDAMENTALES

1 FORMULES DE TRANSFORMATION DE BASE

1.1. FORMULES D'ADDITION

Proposition

Soit a et b deux nombre réels. On a les formules suivantes :

$$\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b \quad ; \quad \cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b$$

$$\sin(a-b)=\sin a.\cos b-\cos a.\sin b \quad ; \quad \sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b$$

Exemples

1) Calculons $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$:

On a : $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$, donc : $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$

Par conséquent : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$

Par conséquent : $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

2) Calculons $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$:

On a : $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$, donc : $\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

Par conséquent : $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

Par conséquent : $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

3) Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrons que : $\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\cos x.\cos\frac{\pi}{6}-\sin x.\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)$

Par suite : $2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$

Scanné avec CamScanner

Applications

1. En remarquant que $\frac{5\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, calculer : $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

2. Calculer : $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.

3. Soit $x\in\mathbb{R}$. Établir les égalités suivantes :

$\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$; $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; $-\sqrt{6}\cos x-\sqrt{2}\sin x=2\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)$

Proposition

Soit a et b deux réels tels que : $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$. On a les formules suivantes :

- Si $a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, alors : $\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$.
- Si $a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, alors : $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$.

Exemples

1) Calculons $\tan\frac{\pi}{12}$:

On a : $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$, donc : $\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}.\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$.

Par conséquent : $\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.

2) Calculons $\tan\frac{7\pi}{12}$:

On a : $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, donc : $\tan\frac{7\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}.\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$.

Par conséquent : $\tan\frac{7\pi}{12}=-2-\sqrt{3}$.

Applications

1. En remarquant que $\frac{5\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{6}$, calculer : $\tan\frac{5\pi}{12}$.

2. Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que : $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi$ et $x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi$. Simplifier : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right).\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

Scanné avec CamScanner

1.2. TRANSFOMATION DE $\cos(2a)$, $\sin(2a)$ ET $\tan(2a)$

FORMULES DE LINÉARISATION

Proposition

Soit a et b deux nombre réels. On a les formules suivantes :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$;
- $\sin(2a) = 2\sin a.\cos a$;
- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$ et $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$ et $\tan^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)}$;
- Si $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ et $2a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors : $\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

Exemples

1) Calculons les rapports trigonométriques de $\dfrac{\pi}{8}$:

On a : $2 \times \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$, donc : $\cos^2 \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Puisque $\dfrac{\pi}{8} \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ alors : $\cos\dfrac{\pi}{8} \geq 0$. Par suite : $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

De même : $\sin^2 \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$.

Puisque $\dfrac{\pi}{8} \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ alors : $\sin\dfrac{\pi}{8} \geq 0$. Par suite : $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Enfin : $\tan\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{8}}{\cos\dfrac{\pi}{8}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \sqrt{2}-1$. Ainsi : $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$.

Remarque : On peut aussi utiliser la formule $\tan^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)}$ pour calculer $\tan\dfrac{\pi}{8}$ en prenant $a = \dfrac{\pi}{8}$.

2) Soit $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$. Montrons que : $\dfrac{\sin(3x)}{\sin x} - \dfrac{\cos(3x)}{\cos x} = 2$:

On a : $\dfrac{\sin(3x)}{\sin x} - \dfrac{\cos(3x)}{\cos x} = \dfrac{\sin(3x)\cos x - \sin x.\cos(3x)}{\sin x.\cos x} = \dfrac{\sin(3x-x)}{\dfrac{1}{2}\sin(2x)} = \dfrac{\sin(2x)}{\dfrac{1}{2}\sin(2x)} = 2$

D'où le résultat.

Scanné avec CamScanner

Remarques

- On a pour tout réel a :

$$1+\cos a = 2\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) \quad ; \quad 1-\cos a = 2\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \quad ; \quad \sin a = 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{a}{2}\right)$$

- On rappelle que pour tout réel a : $\sin a = \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)$

Applications

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Établir les égalités suivantes :

$$1+\sin x = \left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2 \quad ; \quad 1+\cos x+2\sin^2\frac{x}{2} = 2 \quad ; \quad 2\sin x+\sin(2x) = 8\sin\left(\frac{x}{2}\right).\cos^3\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$1-\cos x+\sin x = 2\sin\frac{x}{2}.\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right) \quad ; \quad 1+\cos x-\sin x = 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}.\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

2. Soit α un réel tel que : $\sin\alpha \neq -1$.

Montrer que : $\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Montrer que : $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \tan\dfrac{x}{2}$ et $\sin x = (1+\cos x)\tan\dfrac{x}{2}$.

1.3. FORMULES $\cos(a)$, $\sin(a)$ ET $\tan(a)$ EN FONCTION DE $\tan\left(\frac{a}{2}\right)$

Proposition

Soit a un nombre réel tel que : $a \neq \pi+2k\pi$ et $a \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On pose : $t = \tan\dfrac{a}{2}$.

On a : $\sin a = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et $\cos a = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\tan a = \dfrac{2t}{1-t^2}$

Preuve

Soit a un nombre réel tel que : $a \neq \pi+2k\pi$ et $a \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On a : $\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \dfrac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} = \dfrac{\dfrac{\cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}}} = \cos^2\dfrac{a}{2}-\sin^2\dfrac{a}{2} = \cos\left(2\times\dfrac{a}{2}\right) = \cos a$.

Scanné avec CamScanner

On a : $\dfrac{2t}{1+t^2} = \dfrac{2\tan\dfrac{a}{2}}{1+\tan^2\dfrac{a}{2}} = \dfrac{2\times\dfrac{\sin\dfrac{a}{2}}{\cos\dfrac{a}{2}}}{\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{a}{2}}} = 2\sin\left(\frac{a}{2}\right).\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \sin\left(2\times\frac{a}{2}\right) = \sin a$.

On a : $\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a} = \dfrac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \dfrac{2t}{1-t^2}$. D'où le résultat.

Exemple

Soit a un nombre réel tel que : $\tan\dfrac{a}{2} = \sqrt{2}$.

Calculons $\cos a$, $\sin a$ et $\tan a$:

$$\cos a = \frac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} = \frac{1-\left(\sqrt{2}\right)^2}{1+\left(\sqrt{2}\right)^2} = -\frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \sin a = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{1+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan a = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{1-\left(\sqrt{2}\right)^2} = -2\sqrt{2}$$

Par suite : $\cos a = -\dfrac{1}{3}$; $\sin a = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; $\tan a = -2\sqrt{2}$

Applications

1. Soit x un nombre réel tel que $\tan x = 2$.

   Calculer : $\cos(2x)$; $\sin(2x)$; $\tan(2x)$.

2. Soit x un nombre réel tel que $x \neq \pi + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On pose : $t = \tan\dfrac{x}{2}$

   Montrer que : $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} = t^2$ et $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} = t$.

3. Soit a et b deux réels de l'intervalle $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

   Prouver les inégalités suivantes : $1+\dfrac{1}{\tan a} < \dfrac{1}{\tan\dfrac{a}{2}}$; $\tan\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leq \dfrac{\tan a + \tan b}{2}$

   (**Indication :** on pourra poser $x = \tan\dfrac{a}{2}$ et $y = \tan\dfrac{b}{2}$).

Scanné avec CamScanner

2 TRANSFORMATION DE PRODUITS EN SOMMES TRANSFORMATION DE SOMMES EN PRODUITS

2.1. TRANSFORMATION DE PRODUITS EN SOMMES

Proposition

Soit a et b deux nombre réels. On a les formules suivantes :

$$\cos a.\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right] \quad ; \quad \sin a.\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$$

$$\sin a.\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right] \quad ; \quad \cos a.\sin b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)-\sin(a-b)\right]$$

Preuve

On a : $\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b$ et $\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b$

Il s'ensuit donc que :

$$\cos(a-b)+\cos(a+b)=2\cos a.\cos b \quad \text{et} \quad \cos(a-b)-\cos(a+b)=2\sin a.\sin b$$

ce qui donne les deux premiers égalités.

On a : $\sin(a-b)=\sin a.\cos b-\cos a.\sin b$; $\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b$

Il s'ensuit donc que :

$$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a.\cos b \quad \text{et} \quad \sin(a+b)-\sin(a-b)=2\cos a.\sin b$$

ce qui donne les deux dernières égalités.

Exemples

1) Calculons $\cos\frac{7\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$:

On a : $\cos\frac{7\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\cos\pi+\cos\frac{\pi}{6}\right]$

Par conséquent : $\cos\frac{7\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-2}{4}$.

On a : $\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\sin\pi+\sin\frac{\pi}{6}\right]$

Par conséquent : $\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

2) Résolvons dans l'intervalle $[0;2\pi[$ l'inéquation suivante : $\cos\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$

Scanné avec CamScanner

Soit $x \in [0;2\pi[$. On a :

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

Donc : $\cos\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\leq\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Posons : $X=x+\frac{\pi}{4}$. On a l'équivalence : $x\in[0;2\pi[\Leftrightarrow X\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{9\pi}{4}\right[$. Par conséquent :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leq\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos(X)\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\\ X\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{9\pi}{4}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}\leq X\leq\frac{7\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}\leq x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{7\pi}{4} \Leftrightarrow 0\leq x\leq\frac{3\pi}{2}$$

Ainsi, l'ensemble solution de l'inéquation $\cos\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ est : $S=\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.

Applications

Écrire sous forme de sommes les produits suivants :

$A(x)=\cos x.\cos(5x)$; $B(x)=\sin(3x).\sin(4x)$; $C(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

2.2. TRANSFORMATION DE SOMMES EN PRODUITS

Proposition

Soit p et q deux nombre réels. On a les formules suivantes :

$$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad ; \quad \cos p-\cos q=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad ; \quad \sin p-\sin q=2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Preuve

On a : $\cos(a-b)+\cos(a+b)=2\cos a.\cos b$ et $\cos(a-b)-\cos(a+b)=2\sin a.\sin b$

$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a.\cos b$ et $\sin(a+b)-\sin(a-b)=2\cos a.\sin b$

En posant : $a+b=p$ et $a-b=q$, on obtient : $a=\frac{p+q}{2}$ et $b=\frac{p-q}{2}$.

Par suite : $\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et $\cos p-\cos q=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et $\sin p-\sin q=2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin x + \sin(3x) = 2\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) = 2\sin(2x)\cos(-x)$

Par conséquent : $\sin x + \sin(3x) = 2\sin(2x)\cos x$ (la fonction cos est paire)

2) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos(5x) - \cos(8x) = -2\sin\left(\frac{5x+8x}{2}\right)\sin\left(\frac{5x-8x}{2}\right) = -2\sin\left(\frac{13x}{2}\right)\sin\left(-\frac{3x}{2}\right)$

Par conséquent : $\cos(5x) - \cos(8x) = 2\sin\left(\frac{13x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x}{2}\right)$ (la fonction sin est impaire)

3) Factorisons la somme suivante : $G(x) = \cos x + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x)$ où $x \in \mathbb{R}$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos x + \cos(4x) = 2\cos\left(\frac{x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-4x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)$

et : $\cos(2x) + \cos(3x) = 2\cos\left(\frac{2x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-3x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Par conséquent : $G(x) = 2\cos\left(\frac{5x}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{3x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right] = 4\cos\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}}{2}\right)$.

Par suite : $G(x) = 4\cos\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos x$.

Applications

1. Écrire sous forme d'un produit les sommes suivantes :

$A(x) = \sin x + \sin(2x) + \sin(3x)$; $B(x) = 1 + \cos x + \cos(2x) + \cos(3x)$

$C(x) = 1 + \sin(2x) - \cos(2x)$; $D(x) = \sin x + \sin(5x) + \sin(7x)$

2. a) Écrire sous forme de produit l'expression : $\cos x + \cos(2x)$ où $x \in \mathbb{R}$.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $\cos x + \cos(2x) = 0$.

c) Résoudre dans l'intervalle $[0;\pi]$, l'inéquation suivante : $\cos x + \cos(2x) \geq 0$.

3. a) Factoriser l'expression : $\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x)$ où $x \in \mathbb{R}$.

b) Résoudre dans l'intervalle $[-\pi;0]$, l'inéquation suivante : $\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) < 0$.

4. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin(3x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin x + 2\sin(3x) - \sqrt{3}\cos x = 0$

c) Résoudre dans l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation : $\sin x + 2\sin(3x) - \sqrt{3}\cos x \leq 0$.

Scanné avec CamScanner

2.3. TRANSFORMATION DE L'EXPRSSION $a\cos(x)+b\sin(x)$

Proposition

Soit a et b deux réels tels que $(a;b)\neq(0;0)$. Alors il existe un réel α tel que :

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha) \text{ avec } \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Exemples

1) Écrivons $\sqrt{3}\cos x+\sin x$ sous la forme : $r\cos(x-\alpha)$.

On a : $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1}=\sqrt{4}=2$ $\quad(a=\sqrt{3} \text{ et } b=1)$.

Par conséquent :

$$\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

Ainsi : $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

2) Écrivons $\cos x-\sin x$ sous la forme : $r\cos(x-\alpha)$.

On a : $\sqrt{1+(-1)^2}=\sqrt{2}$ $\quad(a=1 \text{ et } b=-1)$.

Par conséquent :

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Ainsi : $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Applications

1. Mettre les expressions suivantes sous forme de $\rho\cos(\omega x+\varphi)$:

$$A(x)=\cos(2x)+\sin(2x) \quad ; \quad B(x)=\cos x-\sqrt{3}\sin x \quad ; \quad C(x)=3\cos\frac{x}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}$$

2. a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \cos(2x)-\sqrt{3}\sin(2x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $\cos(2x)-\sqrt{3}\sin(2x)=1$.

c) Résoudre dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation : $\cos(2x)-\sqrt{3}\sin(2x)\geq 1$.

3. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;2\pi[$ l'inéquation : $\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\geq -1$.

Scanné avec CamScanner

A ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Soit x un nombre réel et on considère l'expression : $A(x)=\cos(3x)-3\sin x+3\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

1) Calculer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$ et calculer $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

2) En déduire une expression simplifiée du nombre $A(x)$.

3) a) Résoudre dans l'intervalle $I=[-\pi;\pi]$ l'équation $A(x)=\frac{1}{2}$.

b) Résoudre dans l'intervalle I l'inéquation $A(x)\leq\frac{1}{2}$.

SOLUTION

1) On a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\cos(3x)&=\cos(2x+x)\\&=\cos(2x)\cos x-\sin(2x).\sin x\\&=\left(2\cos^2 x-1\right)\cos x-(2\sin x\cos x).\sin x\\&=2\cos^3 x-\cos x-2\left(1-\cos^2 x\right)\cos x\end{aligned}$$

Par conséquent : $\cos(3x)=4\cos^3 x-3\cos x$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x.\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$$

Par conséquent : $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$

2) D'après les résultats obtenus dans la question précédente, on en déduit que :

$$A(x)=4\cos^3 x-3\cos x-3\sin x+3(\sin x+\cos x)=4\cos^3 x$$

En résumé : $(\forall x\in\mathbb{R})\ A(x)=4\cos^3 x$

3) a) On a pour tout $x\in I$:

$$A(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos^3 x-\frac{1}{8}=0\Leftrightarrow\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\right)=0$$

Donc : $A(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(\cos x-\frac{1}{2}=0\ \text{ ou }\ \cos^2 x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}=0\right)$

En posant $X=\cos x$, l'équation $\cos^2 x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}=0$ devient $X^2+\frac{1}{2}X+\frac{1}{4}=0$. Cette dernière équation n'admet pas de solution réelle car son discriminant est strictement négatif $\left(\Delta=-\frac{3}{4}\right)$

Scanné avec CamScanner

Par conséquent : $A(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}$.

Par suite, l'ensemble solution de l'équation $A(x)=\frac{1}{2}$ dans I est : $S=\left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$.

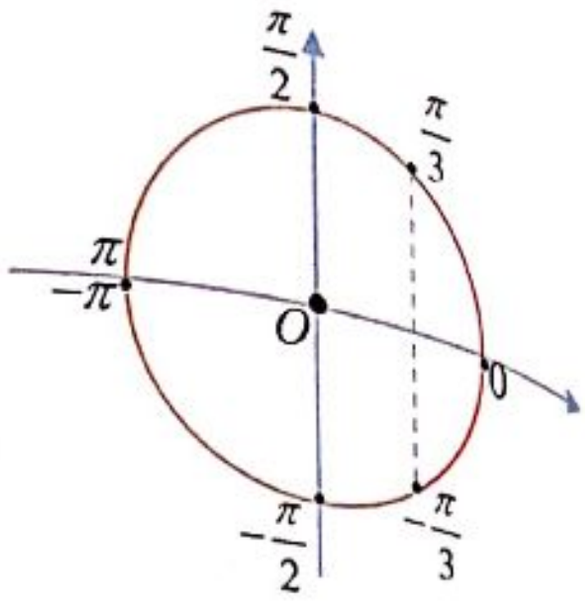
b) D'après les résultats de la question précédente,

on a pour tout $x \in I$: $\cos^2 x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}>0$.

Il s'ensuit donc que pour tout $x \in I$: $A(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{1}{2}$.

En définitive, l'ensemble solution de l'inéquation $A(x) \leq \frac{1}{2}$ est :

$$S=\left[-\pi;-\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$$





- On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

  $\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$ et $\sin(2x)=2\sin x.\cos x$

- Pour résoudre une équation faisant intervenir des fonctions trigonométriques, on essaie de se ramener à des équations de la forme : $\cos x=\cos\alpha$, $\sin x=\sin\alpha$ ou $\tan x=\tan\alpha$ puis utiliser les résultats du cours : (avec $k \in \mathbb{Z}$)

  $\cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow (x=\alpha+2k\pi$ ou $x=-\alpha+2k\pi)$; $\tan x=\tan\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi$

  $\sin x=\sin\alpha \Leftrightarrow (x=\alpha+2k\pi$ ou $x=\pi-\alpha+2k\pi)$; $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$; $\tan x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$

  $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $\cos x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi$

- Pour résoudre une inéquation du genre : $\cos x \geq a$, $\cos x \leq a$, $\sin x \geq a$, $\sin x \leq a$, $\tan x \geq a$, $\tan x \leq a$ (ou des inégalités strictes), on utilise alors le cercle trigonométrique et la périodicité des fonctions trigonométriques. Ceci nécessite en premier temps l'emplacement des points dont les abscisses curvilignes sont solutions de l'équation $\cos x=a$ (ou $\sin x=a$ ou $\tan x=a$) sur le cercle trigonométrique.

B FORMULES DE TRANSFORMATION ET CALCUL (1)

On pose : $A=\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{3\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}$.

1) Montrer que : $\sin\frac{\pi}{9}.\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)$ et $\cos\frac{5\pi}{9}.\sin\frac{2\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2) En déduire que : $A=\frac{3}{16}$

Scanné avec CamScanner

SOLUTION

1) Montrons que : $\sin\frac{\pi}{9}.\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)$

On sait que : $\sin a.\sin b=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)$; il en résulte donc :

$$\sin\frac{\pi}{9}.\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{9}\right)-\cos\frac{5\pi}{9}\right)=-\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos\frac{5\pi}{9}\right)$$

Par conséquent : $\sin\frac{\pi}{9}.\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)$.

Montrons que : $\cos\frac{5\pi}{9}.\sin\frac{2\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

On sait que : $\cos a.\sin b=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)-\sin(a-b)\right)$; donc : $\cos\frac{5\pi}{9}.\sin\frac{2\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Par conséquent : $\cos\frac{5\pi}{9}.\sin\frac{2\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2) Montrons que $A=\frac{3}{16}$:

On a : $A=\left(\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}\right)\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{3\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{9}-\cos\frac{5\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\right)$

Donc : $A=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{9}-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]=\frac{\sqrt{3}}{8}\left[\sin\left(\pi-\frac{7\pi}{9}\right)-\sin\frac{7\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Comme : $\sin\left(\pi-\frac{7\pi}{9}\right)=\sin\frac{7\pi}{9}$, alors : $A=\frac{\sqrt{3}}{8}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{16}$. D'où le résultat.

C TRANSFORMATION DE a cos (x) + b sin (x)

Soit α un réel de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

1) Calculer $\cos(2\alpha)$ puis en déduire la valeur de α.

2) Calculer $\sin\alpha$.

3) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose : $A(x)=\left(2-\sqrt{2}\right)\cos x+\sqrt{2}\sin x$.

a) Montrer que : $A(x)=2\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\sin\alpha.\cos x+\cos\alpha.\sin x\right)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $A(x)=\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Scanné avec CamScanner

SOLUTION

1) On a : $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Par conséquent : $\cos(2\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Puisque $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ alors $0 \le 2\alpha \le \pi$. Il s'ensuit donc que :

$$\begin{cases} \cos(2\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} \\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ainsi : $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

2) On a : $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. Comme $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, alors : $\sin^2\alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

3) a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\sin\alpha.\cos x + \cos\alpha.\sin x\right) = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.\cos x + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.\sin x\right)$$

$$= \left(2-\sqrt{2}\right)\cos x + \sqrt{2}\sin x$$

Par suite : $A(x) = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\sin\alpha.\cos x + \cos\alpha.\sin x\right)$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$A(x) = \sqrt{2-\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\sin\alpha.\cos x + \cos\alpha.\sin x\right) = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha.\cos x + \cos\alpha.\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow x + \alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x + \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{24} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{17\pi}{24} + 2k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z}$$

Par suite, l'ensemble solution de cette équation est : $S = \left\{\frac{\pi}{24} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{17\pi}{24} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- Une équation du type : $a\cos x + b\sin x = c$ (avec $(a;b) \neq (0;0)$) peut se ramener à une équation trigonométrique fondamentale en transformant le membre gauche qui peut s'écrire $\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$ et par suite l'équation devient : $\cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$



Scanné avec CamScanner

• Pour la résolution d'une inéquation trigonométrique de la forme $f(x) \geq 0$ ou $f(x) \leq 0$ dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, on suit les étapes suivantes :

• Résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle I ;

• Ordonner les solutions de cette équation et dresser les intervalles qui forment la partition de I ; donnée par ces solutions.

• Étudier le signe de $f(x)$ dans chacun de ces intervalles et distinguer les intervalles qui vérifient l'inéquation.

D AUTRES FORMULES DE TRANSFORMATION

Soit $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $3\sin\theta + 5\cos\theta = 5$.

Montrer que : $5\sin\theta - 3\cos\theta = 3$ puis en déduire les valeurs de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

SOLUTION

On a : $3\sin\theta + 5\cos\theta = 5 \Leftrightarrow 3\sin\theta = 5 - 5\cos\theta = 5(1-\cos\theta) \Leftrightarrow 3\sin\theta = 5\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$.

Il s'ensuit donc que : $3\sin\theta + 5\cos\theta = 5 \Leftrightarrow 3\sin\theta = 10\sin^2\frac{\theta}{2} \Leftrightarrow 6\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 10\sin^2\frac{\theta}{2}$.

Puisque $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, alors $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$, alors : $3\sin\theta + 5\cos\theta = 5 \Leftrightarrow 6\cos\frac{\theta}{2} = 10\sin\frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \tan\frac{\theta}{2} = \frac{3}{5}$.

On sait que : $\sin\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$ et $\cos\theta = \dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$; donc :

$$5\sin\theta - 3\cos\theta = \frac{10\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} - \frac{3\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{10\times\frac{3}{5}}{1+\frac{9}{25}} - \frac{3\left(1-\frac{9}{25}\right)}{1+\frac{9}{25}} = \frac{150}{34} - \frac{48}{34} = 3$$

Ainsi : $5\sin\theta - 3\cos\theta = 3$.

On a le système : $\begin{cases} 3\sin\theta + 5\cos\theta = 5 \\ 5\sin\theta - 3\cos\theta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\cos\theta = \frac{8}{17} \text{ et } \sin\theta = \frac{15}{17}\right)$.

Remarque : On pourra aussi utiliser les formules : $\sin\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$ et $\cos\theta = \dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

Scanné avec CamScanner

EXERCICES D'APPLICATION

FORMULES D'ADDITION

EXERCICE 01

1) Vérifier que : $\frac{11\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

2) Calculer $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.

3) Calculer $\tan\frac{11\pi}{12}$ sans utiliser les résultats de questions 2).

EXERCICE 02

1) Vérifier que : $\frac{\pi}{42} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{7}$.

2) Calculer $\cos\frac{\pi}{42}$ et $\sin\frac{\pi}{42}$ en fonction de $\cos\frac{\pi}{7}$ et $\sin\frac{\pi}{7}$.

EXERCICE 03

1) Calculer :

$$\cos\frac{\pi}{12}.\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}.\sin\frac{5\pi}{12}$$

$$\cos\frac{\pi}{12}.\cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}.\sin\frac{5\pi}{12}$$

2) En déduire que :

$$\cos\frac{\pi}{12}.\cos\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12}.\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$$

EXERCICE 04

Calculer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ les expressions suivantes :

$$A = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$B = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$C = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{3} + x\right)$$

$$D = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$E = 2\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right)$$

EXERCICE 05

Simplifier les expressions suivantes :

1) $\cos(4x)\cos(5x) + \sin(4x).\sin(5x)$

2) $\sin(5x)\cos(7x) - \sin(7x).\cos(5x)$

3) $\frac{\tan x + \tan(2x)}{1 - \tan x.\tan(2x)}$; 4) $\frac{\tan(2x) - \tan(3x)}{1 + \tan(2x).\tan(3x)}$

EXERCICE 06

Soit a un réel tel que : $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ et $\sin a = \frac{4}{5}$

et soit b un réel tel que : $0 < b < \frac{\pi}{2}$ et $\cos b = \frac{1}{2}$.

1) Calculer $\cos a$ et $\sin b$.

2) Calculer : $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$.

3) Calculer : $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

EXERCICE 07

Soit α et β deux réels de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tels que :

$\cos\alpha = \frac{8}{17}$ et $\sin\beta = \frac{21}{29}$.

Calculer : $\sin\alpha$; $\cos\beta$; $\cos(\alpha+\beta)$; $\sin(\alpha-\beta)$.

EXERCICE 08

Montrer que pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{4}\right[$:

$$\frac{\sin(6x)}{\sin(2x)} - \frac{\cos(6x)}{\cos(2x)} = 2$$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 09

Calculer $\cos(2a)$ dans chacun des cas suivants :

1) $\cos a = \frac{1}{2}$; 2) $\cos a = -\frac{3}{4}$; 3) $\cos a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

4) $\sin a = \frac{3}{4}$; 5) $\sin a = -\frac{1}{3}$; 6) $\sin a = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

EXERCICE 10

Calculer $\sin(2a)$ dans chacun des cas suivants :

1) $\sin a = \frac{1}{3}$ et $a \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

2) $\sin a = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ et $a \in [2\pi;3\pi]$.

3) $\cos a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $a \in [\pi;2\pi]$.

4) $\cos a = -\frac{4}{5}$ et $a \in [-\pi;0]$.

EXERCICE 11

Soit a un réel de l'intervalle $[-\pi;0]$ tel que $\cos a = \frac{-1}{3}$.

Calculer : $\sin(2a)$; $\cos(2a)$; $\sin(4a)$

EXERCICE 12

Calculer α dans chacun des cas suivants :

1) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (calculer $\cos(2\alpha)$)

2) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

(calculer $\cos(2\alpha)$ et $\cos(4\alpha)$)

3) $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ et $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

4) $\tan\alpha = \sqrt{2}-1$ et $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (calculer $\tan(2\alpha)$)

EXERCICE 13

Montrer les égalités suivantes :

$$\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad ; \quad \cos\frac{\pi}{18} - \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18} = 2\cos\frac{7\pi}{18}$$

EXERCICE 14

Soit x un nombre réel.

1) Calculer en fonction de $\cos(2x)$ les expressions suivantes :

$A = 3\cos^2 x - 5\sin^2 x$

$B = 3\cos^2 x + 2\sin^2 x + 4\sin^2 x\cos^2 x$

$C = \cos^4 x - \sin^4 x$

2) Calculer en fonction de $\cos(2x)$ les expressions suivantes :

$D = (\cos x - \sin x)^2$; $E = \cos^4 x - 2\sin^4 x$

EXERCICE 15

1) Montrer que : $\left(\forall a \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)$ $\tan\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{\sin a}$.

2) Calculer : $\tan\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{8}$.

EXERCICE 16

Calculer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ ce qui suit :

$\sin(3x)$; $\cos(3x)$; $\cos(4x)$; $\sin(4x)$

EXERCICE 17

Soit x un nombre réel. Montrer les égalités suivantes :

$$\cos x + \cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

$$\sin x + \sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

TRANSFORMATION DES PRODUITS EN SOMMES

EXERCICE 18

Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$. Établir les égalités suivantes :

$\cos(x+y).\cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y$

$\sin(3x)\sin^3 x + \cos(3x)\cos^3 x = \cos^2(2x)$

$4\sin x.\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right).\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right) = \sin(3x)$

Scanné avec CamScanner

3 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 19

1) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right).\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos(2x)+\frac{1}{2}$$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E):\ \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right).\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

b) En déduire les solutions de l'équation (E) appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$ puis représenter ses solutions sur le cercle trigonométrique.

TRANSFORMATION DES SOMMES EN PRODUITS

EXERCICE 20

Transformer en produit les expressions suivantes :

$A=\cos(2x)+\cos(6x)$; $B=\cos(7x)-\cos(3x)$

$C=\sin(3x)+\sin(5x)$; $D=\sin(8x)-\sin(6x)$

EXERCICE 21

Montrer les égalités suivantes :

$$\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}}{2}\ ;\ \cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}+\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}}{2}\ ;\ \sin\frac{\pi}{12}-\sin\frac{5\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

EXERCICE 22

Soit $x \in \mathbb{R}$. Établir les égalités suivantes :

$$1+\cos(2x)+2\cos x=2\cos x(1+\cos x)$$

$$1-\cos(2x)+2\sin x=2\sin x(1+\sin x)$$

EXERCICE 23

Transformer en produit les expressions suivantes :

$A(x)=\sin x+\sin(2x)+\sin(3x)+\sin(4x)$

$B(x)=\cos x+\cos(2x)+\cos(3x)+\cos(4x)$

$C(x)=\cos x-\cos(2x)+\sin(2x)-\sin(3x)$

EXERCICE 24

Transformer en produit les expressions suivantes :

$A=1+\cos(2x)+\cos x$; $B=1-\cos(2x)+\sin x$

$C=1+\cos x+\cos\frac{x}{2}$; $D=1-\cos x+\sin\frac{x}{2}$

EXERCICE 25

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(2x)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\frac{12x-\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{4x+\pi}{8}\right)$$

EXERCICE 26

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$A(x)=\cos x+\cos(3x)+\cos(5x)+\cos(7x)$$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$A(x)=4\cos x.\cos(2x).\cos(4x)$$

2) En déduire que : $\cos\frac{\pi}{9}.\cos\frac{2\pi}{9}.\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{8}$.

EXERCICE 27

Montrer que pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}=2\cos\frac{x}{2}$$

EXERCICE 28

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x)=2\cos^3 x-\cos x+2\sin x-2\sin^3 x$$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x-\sin^3 x=\frac{1}{2}\sin(2x).\cos x$$

$$2\cos^3 x-\cos x=\cos(2x).\cos x$$

2) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right).\cos x$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=0$.

4) Montrer que : $\left(\forall x \in \left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]\right)\ f(x)\geq 0$

Scanné avec CamScanner

ÉQUATIONS - INÉQUATIONS - SYSMÈMES

EXERCICE 29

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi;\pi]$ les équations suivantes :

1) $2\cos x.\sin x = \cos(3x)$.

2) $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1=0$.

3) $\cos(4x)\cos x-\sin(4x)\sin(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4) $\cos^2 x-\sin^2 x+2\sin x.\cos x=2$.

5) $2\cos^2 x+2\sin x.\cos x=3$.

EXERCICE 30

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\cos x+\cos(2x)+\cos(3x)+\cos(4x)=0$.

2) $\cos x+\sin(2x)+\sin(4x)-\sin(5x)=0$.

3) $4\sin^2 x+2\left(1+\sqrt{3}\right)\sin x+\sqrt{3}=0$.

4) $\sqrt{3}\sin(3x)-\cos(3x)+1=0$.

5) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

EXERCICE 31

1) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\sin(4x)=4\sin x\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin(4x)=\frac{3}{2}\tan x$

EXERCICE 32

Résoudre dans $[0;2\pi]$ les inéquations suivantes :

1) $\cos(2x)+2\sin x.\cos x\geq 1$.

2) $\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x.\sin x<0$.

3) $\left(\sqrt{2}\cos x-1\right)(2\sin x+1)$.

4) $4\sin^2 x-2\left(1+\sqrt{3}\right)\sin x+\sqrt{3}\leq 0$.

EXERCICE 33

Résoudre dans I les inéquations suivantes :

1) $2\sin^3 x-\sin^2 x+3\sin x-\frac{3}{2}\geq 0$; $I=[0;2\pi]$

2) $\tan^2 x-\sqrt{2}\tan x+\sqrt{2}-1<0$; $I=[-5\pi;-3\pi]$

3) $\cos(2x)-\sqrt{3}\sin(2x)\geq-\sqrt{2}$; $I=[-\pi;\pi]$.

EXERCICE 34

Étudier le signe des expressions suivantes sur $[-\pi;\pi]$:

$A=\sin x+\cos x-1$; $B=\sqrt{3}\sin x+\cos x-\sqrt{2}$

$$C=\frac{\sin x-\cos x-1}{\sqrt{3}\sin x+\cos x-\sqrt{2}}$$

EXERCICE 35

1) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

2) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin(2x)+\frac{\sqrt{3}}{2}=(1+2\cos x)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin x\right)$$

3) Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'équation :

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin(2x)+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

4) Résoudre dans l'intervalle $[0;\pi]$ l'inéquation :

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin(2x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\geq 0$$

EXERCICE 36

Soit x et y deux réels de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tels que :

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{3} \\ \tan x+\tan y=\frac{3\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Calculer $\tan x.\tan y$ puis déterminer les valeurs de $\tan x$ et $\tan y$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 37

1) Soit a et b deux réels de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tels que :

$$\tan a=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \tan b=\frac{1}{3}$$

Calculer $\tan(a+b)$ et en déduire $a+b$.

2) Soit x et y deux réels de l'intervalle $]0;\pi[$ tels que :

$$x+y=\frac{2\pi}{3} \quad \text{et} \quad \tan x+\tan y=3\sqrt{3}$$

Calculer $\tan x$ et $\tan y$.

3) Soit α et β deux réels tels que :

$$\tan\alpha=\frac{1}{5} \quad \text{et} \quad \tan\beta=\frac{1}{239}$$

Calculer $\tan(4\alpha-\beta)$.

EXERCICE 38

Soit x et y deux réels de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ tels que :

$$\cos x=\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \cos y=\frac{3}{5}$$

Calculer $\cos(2x-y)$ et $\sin(x-2y)$.

EXERCICE 39

Soit x et y deux réels de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tels que :

$$\tan x=\frac{1}{7} \quad \text{et} \quad \sin y=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

1) Montrer que $\tan(2y)=\frac{3}{4}$.

2) En déduire que : $x+2y=\frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 40

Soit A, B et C des réels tels que : $A+B+C=\pi$.

Montrer que :

$$\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$$

EXERCICE 41

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x)=\frac{\sin(3x)}{\sin x}-\frac{\cos(3x)}{\cos x}$$

1) Déterminer D_f ensemble de définition de f.

2) Prouver que f est constante sur D_f.

EXERCICE 42

Prouver les égalités suivantes :

1) $\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1-\sin(2x)}{1+\sin(2x)}$.

2) $\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\frac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}$.

3) $1+\cos(4x)+\sin(4x)=2\sqrt{2}\sin(2x)\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

4) $\tan x-\tan y=\frac{2\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$.

5) $\cos(x-y).\sin(x+y)=\sin x.\cos x+\sin y.\cos y$.

6) $\sin(x-y).\sin(x+y)=\sin^2 x-\sin^2 y$.

EXERCICE 43

Pour tout réel x, on pose :

$$f(x)=\sqrt{3}\left(4\cos^2 x+\sin^2(2x)\right)-2\sin(2x)$$

1) Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$4\cos^4 x=4\cos^2 x-\sin^2(2x)$$

2) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=4\cos x\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)$$

b) Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'équation : $f(x)=0$

3) a) Vérifier que pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$:

Scanné avec CamScanner

$$f(x)=4\cos^2 x\left(\sqrt{3}-\tan x\right)$$

b) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation : $f(x)\geq 0$.

EXERCICE 44

1) a) Calculer $\cos(2\alpha)$ sachant que : $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

b) En déduire la valeur de α telle que $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

2) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose :

$$f(x)=\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x.\cos x-\sin^2 x$$

Montrer que : $f(x)=\cos(2x)+\sqrt{3}\sin(2x)$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

EXERCICE 45

Soit x un nombre réel tel que : $x\neq\frac{k\pi}{8}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

On pose : $A=\tan x.\tan(2x).\tan(4x)$.

1) a) Montrer que : $A=\frac{4\sin^2 x.\sin(2x)}{\cos(4x)}$.

b) En déduire : $A=\frac{2\sin x\left(\cos x-\cos(3x)\right)}{\cos(4x)}$

2) On suppose dans ce qui suit que : $3x=\frac{\pi}{3}$.

a) Montrer que : $A=\frac{\sin(2x)-\sin x}{\cos(4x)}=\frac{\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}}{\cos(4x)}$

b) En déduire que : $\tan\frac{\pi}{9}.\tan\frac{2\pi}{9}.\tan\frac{4\pi}{9}=\sqrt{3}$

EXERCICE 46

Simplifier les expressions suivantes :

$$A=\frac{\sin(2x)+\cos(2x)-1}{\sin(2x)-\cos(2x)-1}\quad ;\quad B=\frac{\tan(2x)+\tan x}{\tan(2x)-\tan x}$$

$$C=\frac{\sin x+2\sin(3x)+\sin(5x)}{\sin(2x)-\cos(2x)-1}$$

$$D=\sin^{10}x+\cos^{10}x+5\left(\sin^2 x\cos^2 x-\sin^4 x\cos^4 x\right)$$

EXERCICE 47

1) Montrer que pour tout réel a, on a :

$$\cos(5a)=16\cos^5 a-20\cos^3 a+5\cos a$$

2) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$16x^5-20x^3+5x+1=(x+1)\left(4x^2-2x-1\right)^2$$

3) On pose : $t=\cos\frac{\pi}{5}$.

a) Montrer que t est solution de l'équation :

$$4x^2-2x-1=0$$

b) En déduire que : $t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

4) En déduire les valeurs de :

$$\sin\frac{\pi}{5}\ ;\ \cos\frac{2\pi}{5}\ ;\ \sin\frac{2\pi}{5}\ ;\ \cos\frac{\pi}{10}\ ;\ \sin\frac{\pi}{10}$$

EXERCICE 48

On considère l'équation suivante :

$$(E):\ \tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=2\sqrt{2}$$

1) Déterminer D_E ensemble de définition de (E).

2) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\cos(2x)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

b) En déduire que pour tout $x\in D_E$:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{2}{\cos(2x)}$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).

EXERCICE 49

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E):\ \tan x+\tan(4x)=0$$

2) Exprimer $\tan(2x)$ et $\tan(4x)$ en fonction de $\tan x$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $y^4-10y^2+5=0$.

4) En déduire $\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ où $k\in\{1;2;3;4\}$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 50

On pose :

$$S=\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5} \quad \text{et} \quad P=\cos\frac{\pi}{5}\times\cos\frac{3\pi}{5}$$

1) Montrer que : $S+2P=0$.

2) En calculant $P\times\sin\frac{\pi}{5}$, en déduire que :

$$P=-\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad S=\frac{1}{2}$$

3) Déterminer les valeurs de $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{3\pi}{5}$.

EXERCICE 51

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$.

1) Montrer que :

$$\sin^2(x+y)=\cos^2 x+\cos^2 y-2\cos x.\cos y.\cos(x+y)$$

2) Soit $z\in\mathbb{R}$ tel que : $x+y+z=\pi$. Montrer que :

$$\cos^2 x+\cos^2 y+2\cos x.\cos y.\cos z=1$$

EXERCICE 52

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cos^2 x+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\sin^2 x + 2\sin x.\cos x$$

1) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=\sqrt{3}\cos(2x)+\sin(2x)+\sqrt{2}$$

2) Calculer : $f\left(\frac{37\pi}{8}\right)$ et $f\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$.

3) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{2}$$

4) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$ et représenter ses solutions sur le cercle trigonométrique.

b) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation : $f(x)\le 0$.

EXERCICE 53

Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[\right)\ \tan(2\alpha)>\tan\alpha$

EXERCICE 54

Résoudre dans l'intervalle I les inéquations suivantes :

1) $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\cos(2x)>0$; $I=[-\pi;\pi]$.

2) $\cos^2 x+3\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x.\cos x<1$ sur l'intervalle $I=\left[-2\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

3) $\cos x+\sin x\le\frac{1}{\cos x}$; $I=\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

4) $\frac{1}{\cos x}<\frac{1}{\sin x}$; $I=[0;2\pi]$.

EXERCICE 55

1) Soit x un nombre réel.

Montrer que : $\cos^6 x+\sin^6 x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos(4x)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\cos^6(2x)+\sin^6(2x)=\frac{13}{16}$$

3) Résoudre dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ l'inéquation :

$$\cos^6 x+\sin^6 x\le\frac{7}{16}$$

EXERCICE 56

1) Soit a un réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\cos a.\cos(2a)\cos(4a)....\cos(2^n a)=\frac{\sin(2^{n+1}a)}{2^{n+1}\sin a}$$

2) En déduire la valeur du produit :

$$\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{17}\right)\cos\left(\frac{8\pi}{17}\right)$$

EXERCICE 57

Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$:

$$\cos y=\frac{2\cos x+1}{2+\cos x}\Rightarrow\sqrt{3}\tan\frac{y}{2}=\tan\frac{x}{2}$$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 58

Soit α, β et γ des mesures des angles d'un triangle ABC. Établir les égalités suivantes :

1) $\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}$

2) $\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}$

3) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

4) $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}=1$

EXERCICE 59

Soit x, y et z des réels strictement positifs tels que :

$$x+y+z=\pi$$

1) a) Montrer que : $\sin\frac{y}{2}.\sin\frac{z}{2}\le\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)$

b) En déduire que : $\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{y}{2}.\sin\frac{z}{2}\le\frac{1}{8}$

2) Montrer que : $(1-\cos x)(1-\cos y)(1-\cos z)\le\frac{1}{8}$

EXERCICE 60

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$.

On pose : $a=\cos x+\sin y$ et $b=\sin x+\cos y$.

1) Montrer que si $ab\neq 0$, alors :

$$\cos(x-y)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

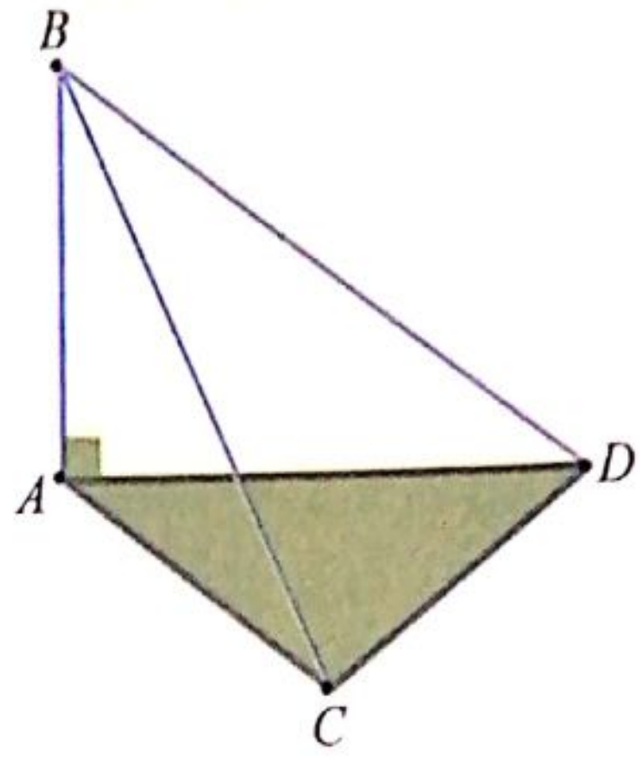
$$\begin{cases}\cos x+\sin y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin x+\cos y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

EXERCICE 61

Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que :

$$(AB)\perp(ACD) \quad \text{et} \quad CD=1$$

On pose : $\widehat{ACB}=\alpha$; $\widehat{BCD}=\beta$; $\widehat{CDB}=\gamma$



1) a) Montrer que : $BC=\dfrac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$.

b) En déduire que : $AB=\dfrac{\sin\alpha.\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$

2) Calculer AB sachant que : $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{4}$ et $\gamma=\dfrac{\pi}{3}$.

EXERCICE 62

Soit ABC un triangle.

On désigne par α, β et γ les mesures en radian des angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ respectivement.

On pose : $a=BC$; $b=CA$; $c=AB$.

1) a) Vérifier que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=AB^2$.

b) En déduire que : $c=a\cos\beta+b\cos\alpha$

2) On suppose dans cette question que : $\beta=2\alpha$.

a) Montrer que : $0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$.

b) Montrer que : $\cos\alpha=\dfrac{b}{2a}$.

(indication : $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$)

c) En déduire que : $b^2-a^2=ac$.

EXERCICE 63

Résoudre dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]$ l'équation :

$$\sin\left(\frac{\pi}{8\sin^2 x}\right)+E\left(\sqrt{1-\cos(2x)}\right)=\frac{3}{2}$$

Scanné avec CamScanner

4

LIMITE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

HISTOIRE

La définition de la dérivée se fait à l'aide de la limite d'un quotient a priori indéterminé. Lorsque cette notion fut introduite à la fin du XVIIe siècle, la notion de limite n'existait pas. Leibniz et Euler considéraient l'existence d'un état intermédiaire appelé infiniment petit situé entre le fait d'être différent de 0 et celui d'être nul. Ceci explique que certains mathématiciens aient combattu ces nouveaux outils malgré leur efficacité pour résoudre de nombreux problèmes jusque-là sans réponse.

Jean le Rond d'Alembert chercha fort maladroitement à formuler une définition de la limite mais il faut attendre le milieu du siècle suivant pour que ce concept soit introduit de manière rigoureuse par Augustin-Louis
Cauchy puis Karl Weierstrass.

Source : https://fr.wikipedia.org



AUGUSTIN LOUIS CAUCHY
(1789 – 1857)



KARL WEIERSTRASS
(1812 – 1897)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Calculer les limites des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles et des fonctions irrationnelles ;
- Calculer les limites de fonctions trigonométriques simples en utilisant les limites usuelles ;
- Résoudre des inéquations du type :

  $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ et du type $f(x)>A$ pour

  montrer que $f(x)$ tend vers ℓ ou vers $+\infty$ dans des situations simples.

PLAN DU COURS

- Activités Préparatoires..... 143
- Connaissances Fondamentales
  - Limite finie d'une fonction en un point 150
  - Limite infinie d'une fonction en un point 159
  - Limite finie d'une fonction en $+\infty$ et $-\infty$..... 162
  - Limite infinie d'une fonction en $+\infty$ et $-\infty$..... 165
  - Opérations sur les limites 169
  - Quelques méthodes pour lever une indétermination..... 175
- Techniques et Astuces 181
- Exercices et Problèmes
  - Exercices d'application..... 190
  - Exercices de perfectionnement..... 194

Scanné avec CamScanner

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES 4

1 LIMITE NULLE EN ZÉRO D'UNE FONCTION DE RÉFÉRENCE

1. Soit f la fonction numérique sur l'intervalle $[-1;1]$ par : $f(x)=\sqrt{|x|}$.

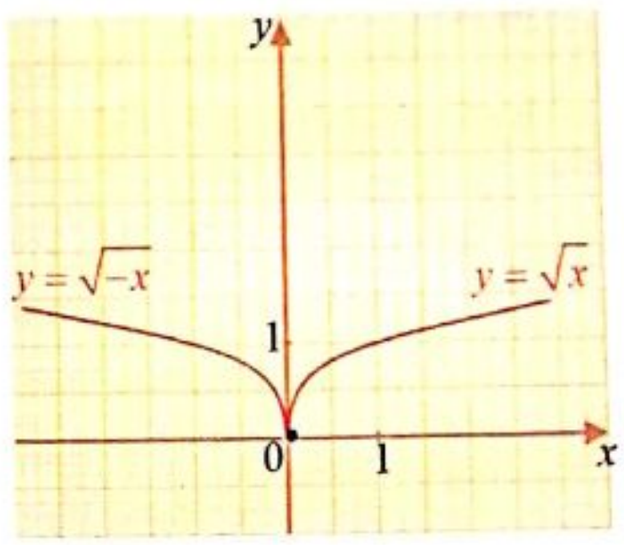
a) Recopier puis compléter le tableau suivant sur le cahier à l'aide de la calculatrice : (à 0,001 près)

x	0,05	0,01	10^{-4}	10^{-9}	10^{-12}	0	-10^{-12}	-10^{-9}	-10^{-6}	$-0,01$	$-0,05$
$f(x)$											

b) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \left(|x|\le 0,0001\Rightarrow |f(x)|\le 0,01\right)$.

c) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}^*)\left(|x|\le 10^{-2n}\Rightarrow |f(x)|\le 10^{-n}\right)$.

En se basant sur les résultats de a), b) et c) et en utilisant le graphe ci-contre, que peut-on conclure pour les valeurs de $f(x)$ quand x s'approche de plus en plus de zéro ?

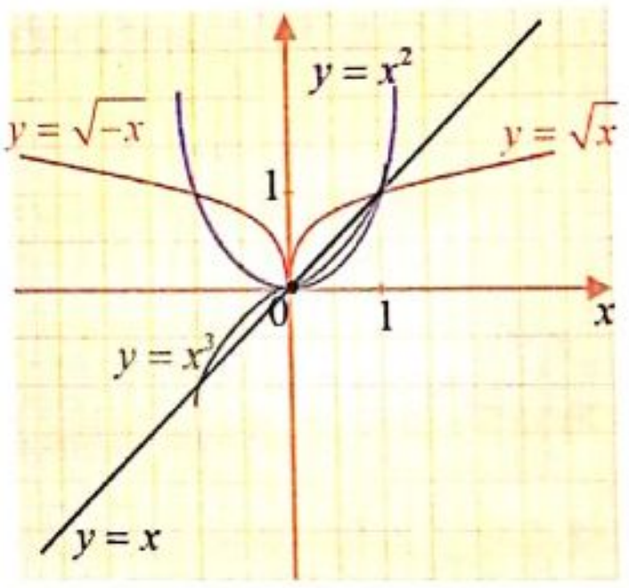


2. a) Montrer que pour tout $x\in[0;1]$: $x^3\le x^2\le x\le\sqrt{x}$.

et en déduire que pour tout $x\in[-1;1]$: $|x^3|\le x^2\le|x|\le\sqrt{|x|}$.

b) Montrer que : $(\forall x\in[-1;1])(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ |x^n|\le|x|$.

c) Quand x prend des valeurs de plus en plus proches de zéro, que peut-on remarquer quant aux valeurs de $\sqrt{|x|}$, x^2, x^3 et x^n ? Justifier la réponse en se basant sur les résultats précédents.



Lorsque x s'approche de plus en plus de zéro, les nombres $\sqrt{|x|}$, x^2, x^3 et x^n s'approchent de plus en plus de zéro. On dit alors que la limite des fonctions $x\mapsto\sqrt{|x|}$, $x\mapsto x^2$, $x\mapsto x^3$ et $x\mapsto x^n$ est égale à 0 quand x tend vers 0 et on écrit : $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{|x|}=0$; $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$; $\lim\limits_{x\to0}x^3=0$; $\lim\limits_{x\to0}x^n=0$.

2 LIMITE NULLE EN ZÉRO D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

1. Soit f_1 la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x)=x^2-\frac{x}{2}$.

a) Montrer que si $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, alors : $|f_1(x)|\le|x|$.

b) En déduire que si $-10^{-6}<x<10^{-6}$, alors : $-10^{-6}<f_1(x)<10^{-6}$.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $|x|\le10^{-n}\Rightarrow|f_1(x)|\le10^{-n}$.

Que peut-on conclure pour les valeurs de $f_1(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus proches de zéro ?

Scanné avec CamScanner

4 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

2. Soit f_2 la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_2(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

a) Montrer que si $-1<x<1$, alors : $|f_2(x)|\leq x^2$.

b) En déduire que : $(\forall x\in[-1;1])\,(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \left(|x|<10^{-n}\Rightarrow|f_2(x)|\leq 10^{-2n}\right)$.

Que peut-on conclure pour les valeurs de $f_2(x)$ quand x s'approche de plus en plus de zéro ?

3. Soit f_3 la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f_3(x)=\sqrt{|x|}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ |f_3(x)|\leq\sqrt{|x|}$.

b) En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\,(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \left(|x|<10^{-2n}\Rightarrow|f_3(x)|\leq 10^{-n}\right)$.

Que peut-on conclure pour les valeurs de $f_3(x)$ quand x s'approche de plus en plus de zéro ?

GÉNÉRALISATION

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]-\alpha;\alpha[$ où $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, ou sur un ensemble de la forme $]-\alpha;\alpha[-\{0\}$.

Si $f(x)$ tend vers zéro (c'est-à-dire s'approche de plus en plus de zéro) quand x tend vers 0, on dit que : « la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 est égale à 0 » et on écrit : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

3 LIMITE FINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN UN POINT

1. Soit f_1 la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x)=x^2+7x-8$.

a) Montrer que pour tout $x\in]0;2[$: $|f_1(x)-2|\leq 10|x-1|$.

b) En déduire que si $|x-1|\leq 10^{-9}$, alors : $|f_1(x)-2|\leq 10^{-8}$.

c) On pose : $h=x-1$. Vérifier que : $|f_1(1+h)-2|\leq 10|h|$.

En remarquant que lorsque x tend vers 1, le réel h tend vers 0 et en se basant sur l'activité précédente,

Déterminer la limite de la fonction $h\mapsto f_1(1+h)-2$ lorsque h tend vers 0.

2. Soit f_2 la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-3\}$ par : $f_2(x)=\dfrac{5x+5}{x+3}$.

a) Montrer que si $\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{5}{2}$, alors : $|f_2(x)-3|\leq\dfrac{4}{9}|x-2|$.

et en déduire que si : $|x-2|\leq 10^{-10}$, alors : $|f_2(x)-3|\leq\dfrac{4}{9}\times 10^{-10}$.

Que peut-on conclure pour les valeurs de $f_2(x)$ quand x s'approche de plus en plus de 2 ?

Scanné avec CamScanner

b) On pose : $h = x - 2$. Vérifier que : $\left|f_2(2+h) - 3\right| \leq \frac{4}{7}|h|$ et déterminer la limite de la fonction numérique $h \mapsto f_2(2+h) - 3$ lorsque h tend vers 0.

GÉNÉRALISATION

Soit a et ℓ deux nombres réels.

L'écriture $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) - \ell = 0$ signifie : la valeur de $f(x)$ s'approche de ℓ, d'aussi près que l'on voudra, quitte à attribuer à la variable x des valeurs suffisamment proches de a.

On écrit : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ (On a posé : $x - a = h$)

4 LIMITE INFINIE EN ZÉRO DE L'INVERSE D'UNE FONCTION DE RÉFÉRENCE

1. Recopier puis compléter le tableau suivant : (n est un entier naturel supérieur ou égal à 4)

x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{10^4}$	$\frac{1}{10^n}$
$\frac{1}{x}$									
$\frac{1}{x^2}$									
$\frac{1}{x^3}$									
$\frac{1}{\sqrt{x}}$									

Soit f une des fonctions suivantes : $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto \frac{1}{x^2}$; $x \mapsto \frac{1}{x^3}$; $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Que peut-on conclure pour les valeurs de $f(x)$ quand x s'approche de plus en plus de 0 et $x > 0$?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x un réel de l'intervalle $]0;1[$.

a) Mettre les nombres $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ dans l'ordre croissant.

b) Déterminer un entier naturel p tel que pour tout $x \in \left]0;\frac{1}{10^p}\right[$:

$\frac{1}{x} > 10^n$ et $\frac{1}{x^2} > 10^{2n}$ et $\frac{1}{x^3} > 10^{3n}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}} > \sqrt{10^n}$

Que peut-on remarquer des valeurs de $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ quand l'entier n prend des valeurs de plus en plus grandes ?

Scanné avec CamScanner

4 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

GÉNÉRALISATION

• Lorsque le réel x s'approche de plus en plus de 0 par valeurs positives, les nombres $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ prennent des valeurs de plus en plus grandes. On dit alors que la limite des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x^3}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ à droite de 0 est égale à $+\infty$.

On écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^3} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

• Lorsque le réel x s'approche de plus en plus de 0 par valeurs négatives, on écrit :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^3} = -\infty$

5 LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN UN POINT

1. On considère la fonction numérique f_1 définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f_1(x) = \frac{2x^2+1}{x}$

a) Montrer que pour tout $x > 0$: $f_1(x) > \frac{1}{x}$ puis déterminer la limite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_1(x)$.

b) Montrer que pour tout $x < 0$: $f_1(x) < \frac{1}{x}$ puis déterminer la limite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f_1(x)$.

2. On considère la fonction numérique f_2 définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f_2(x) = \frac{3x^2+1}{x^4}$

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f_2(x) > \frac{3}{x^2}$.

b) Conclure : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_2(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f_2(x)$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Tracer $\mathscr{C}_f$ puis conjecturer le comportement de $f(x)$ quand x s'approche de plus en plus de 1 et $x > 1$ puis le comportement de $f(x)$ quand x s'approche de plus en plus de 1 et $x < 1$.

b) Remplir le tableau suivant :

Que remarque - t - on ?

x	0,98	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,02
$f(x)$							

Scanné avec CamScanner

GÉNÉRALISATION

Soit a un nombre réel.

- Si $x > a$ tel que x tend vers a, on dit que « x prend des valeurs de plus en plus proches de a avec $x > a$ » ou « x tend vers a à droite ».
- Si $x < a$ tel que x tend vers a, on dit que « x prend des valeurs de plus en plus proches de a avec $x < a$ » ou « x tend vers a à gauche ».
- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a à droite, on dit que « la limite de $f(x)$ à droite en a est égale à $+\infty$ » et on écrit : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.
- Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a à gauche, on dit que « la limite de $f(x)$ à gauche en a est égale à $-\infty$ » et on écrit : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

6 LIMITE NULLE À L'INFINI DE L'INVERSE D'UNE FONCTION DE RÉFÉRENCE

1. Recopier puis compléter le tableau suivant : (n est un entier naturel supérieur ou égal à 5).

x	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{2n}
$\frac{1}{x}$					
$\frac{1}{x^2}$					
$\frac{1}{x^3}$					
$\frac{1}{\sqrt{x}}$					

Soit f une des fonctions suivantes : $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto \frac{1}{x^2}$; $x \mapsto \frac{1}{x^3}$; $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Que peut-on conclure pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus grandes ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x un réel de l'intervalle $]1;+\infty[$.

a) Mettre les nombres $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ dans l'ordre croissant.

b) Déterminer un entier naturel p tel que pour tout $x \in]10^p;+\infty[$:

$\frac{1}{x} < 10^{-n}$ et $\frac{1}{x^2} < 10^{-2n}$ et $\frac{1}{x^3} < 10^{-3n}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}} < \sqrt{10^{-n}}$

Scanné avec CamScanner

4 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

Que peut-on remarquer des valeurs de $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ quand l'entier n prend des valeurs de plus en plus grandes ?

GÉNÉRALISATION

Lorsque le réel $|x|$ prend des valeurs de plus en plus grandes, les réels $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ s'approchent de plus en plus de 0.

On dit alors que la limite des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x^3}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ quand x tend vers $+\infty$ « ou vers $-\infty$ » est égale à 0 et on note :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

On a aussi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

7

LIMITE À L'INFINI D'UNE FONCTION DE RÉFÉRENCE

1. Recopier puis compléter le tableau suivant : (n est un entier naturel supérieur ou égal à 5).

x	10	10^2	10^3	10^4	10^n
x^2					
x^3					
$\sqrt{x}$					

Soit f une des fonctions suivantes : $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto \sqrt{x}$.

Que peut-on conclure quant aux valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus grandes ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x un réel de l'intervalle $]1;+\infty[$.

a) Mettre les nombres x, x^2, x^3 et $\sqrt{x}$ dans l'ordre croissant.

b) Déterminer un entier naturel p tel que pour tout $x \in]10^p;+\infty[$:

$x^2 > 10^{2n}$ et $x^3 > 10^{3n}$ et $\sqrt{x} > \sqrt{10^n}$

Que peut-on remarquer pour les nombres x, x^2, x^3 et $\sqrt{x}$ quand l'entier n prend des valeurs de plus en plus grandes ?

c) Conjecturer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$

Scanné avec CamScanner

8

LIMITES ET ORDRE

A) Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I =]1;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x-1}$.

1. Vérifier que : $(\forall x \in I)\ \ f(x) \geq x^2$.

2. Si $x > 10^{100}$, quelles sont les valeurs possibles de $f(x)$?

3. Rappeler $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$. Que peut-on conclure pour le nombre $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

B) Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2+3}$.

1. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ |g(x)-1| \leq \dfrac{1}{x^2}$.

2. Déterminer une valeur approchée de $g(x)$ et la précision de cette valeur dans chacun des cas suivants :

a) $x = 100$; b) $x = 10^6$; c) $x = 10^{50}$; d) $x = 10^{100}$

3. Rappeler $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}$. Que peut-on conclure pour le nombre $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

C) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$

1. a) Recopier puis compléter le tableau suivant à l'aide de la calculatrice : (arrondir les résultats à 10^{-5} près).

x	-10^{-4}	-10^{-3}	-10^{-2}	$-0,1$	$0,1$	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
$h(x)$								

b) Que peut-on conclure pour le nombre $h(x)$ quand x tend vers 0 ?

2. a) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ \ -x^2 \leq h(x) \leq x^2$.

b) Rappeler $\lim\limits_{x\to0} x^2$ puis déterminer $\lim\limits_{x\to0} h(x)$.

D) On admet dans ce qui suit que : $\left(\forall x \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[\right)\ \ \sin x \leq x \leq \tan x$

1. a) Montrer que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$: $|\sin x| \leq |x|$ puis en déduire : $\lim\limits_{x\to0} \sin x = 0$.

b) En remarquant que : $\cos x = 1 - \sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$, déterminer $\lim\limits_{x\to0} \cos x$ et $\lim\limits_{x\to0} \tan x$.

2. Montrer que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[\cup \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$: $\cos x \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$ puis en déduire que : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

3. a) Vérifier que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[\cup \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$: $\dfrac{\tan x}{x} = \dfrac{\sin x}{x} \times \dfrac{1}{\cos x}$ et $\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$.

b) En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x}$.

Scanné avec CamScanner

1 LIMITE FINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN UN POINT

1.1. FONCTION DÉFINIE AU VOISINAGE D'UN NOMBRE RÉEL

Définition

Soit f une fonction numérique, D_f son ensemble de définition et a un nombre réel.

- On dit que f est définie au voisinage de a sauf peut-être en a s'il existe un réel r strictement positif tel que : $]a-r;a+r[-\{a\} \subset D_f$
- On dit que f est définie au voisinage de a à droite s'il existe un réel r strictement positif tel que : $]a;a+r[\subset D_f$
- On dit que f est définie au voisinage de a à gauche s'il existe un réel r strictement positif tel que : $]a-r;a[\subset D_f$

Exemples

1) La fonction $f : x \mapsto x^2$ est définie au voisinage de $a = 1$ car $D_f = \mathbb{R}$ et $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[- \{1\} \subset D_f$ $\left(r = \frac{1}{2}\right)$.

2) La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est définie au voisinage de $a = 0$ sauf en 0 car $D_f = \mathbb{R}^*$ et $]-1;1[- \{0\} \subset D_f$.

3) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{\cos(2\pi x) - 1}$ n'est pas définie au voisinage d'aucun point de $\mathbb{R}$ car : $D_f = \mathbb{Z}$.

4) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x(x-2)(x-1)^2}$ n'est pas définie au voisinage de 1 car :

$$D_f =]-\infty;0[\cup]2;+\infty[\cup \{1\}.$$

5) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie au voisinage de 0 à droite car $D_f = \mathbb{R}^+$ et $]0;1[\subset D_f$.

6) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x}$ est définie au voisinage de 1 à droite car $D_f =]-\infty;1]$ et $]0;1[\subset D_f$.

1.2. LIMITE NULLE EN ZÉRO D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

INTRODUCTION

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de zéro sauf peut-être en 0.

Si l'on peut rendre $f(x)$ aussi voisin que l'on veut de 0, pourvu que x soit assez voisin de 0, alors on dit que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, et on écrit : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Au cours des activités, on a déjà vu des exemples de fonctions de référence dont la limite est nulle en zéro à savoir : $x \mapsto x$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto$; $x \mapsto x^n$ $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

On a alors : $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$; $\lim\limits_{x \to 0}$ $= 0$

Scanné avec CamScanner

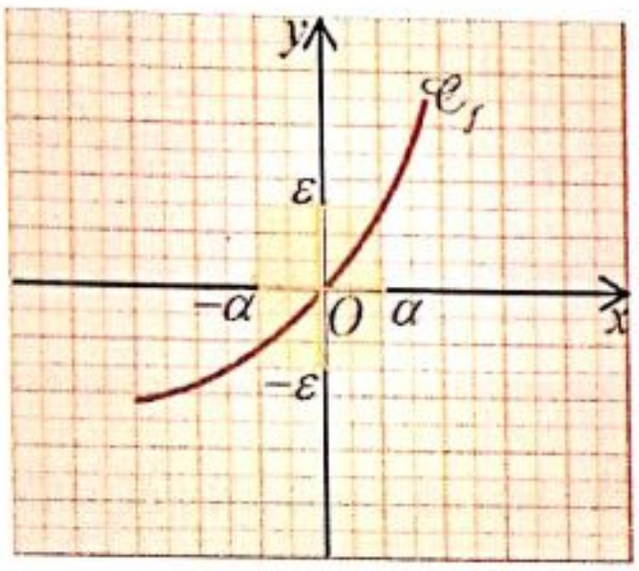
Définition

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de zéro sauf peut-être en 0.

Dire que f a pour limite 0 quand x tend vers 0 signifie : aussi petit que soit le réel strictement positif ε, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]-\alpha;\alpha[- \{0\}$, $f(x)$ est dans l'intervalle $]-\varepsilon;\varepsilon[$.

Autrement dit : $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha > 0)\,;\,(\forall x \in D_f)\;\; (0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$

On écrit : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ ou $\lim\limits_{0} f = 0$



Exemples

1) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$. Montrons en utilisant la définition que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Il s'agit donc de montrer que : $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha > 0)\,;\,(\forall x \in D_f)\;\; (0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$

Soit x un élément de l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$ (c'est-à-dire $|x| < \dfrac{1}{2}$).

On a : $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x+1}\right| < 2$. Par conséquent, on a pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$: $|f(x)| < 2|x|$.

Soit $\varepsilon > 0$. Cherchons un nombre $\alpha > 0$ tel que : $|x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

Pour avoir $|f(x)| < \varepsilon$, il suffit d'avoir : $2|x| < \varepsilon$ et $|x| < \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire : $|x| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $|x| < \dfrac{1}{2}$.

Il suffit donc de choisir $\alpha = \min\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$. Par suite : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 3x^2 + 2x$.

Montrons en utilisant la définition que $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$:

Soit x un élément de l'intervalle $]-1;1[$ (c'est-à-dire $|x| < 1$).

On a : $|g(x)| = |3x^2 + 2x| = |x|.|3x+2|$ et $|3x+2| \leq 5$. Par conséquent : $|g(x)| \leq 5|x|$.

Pour avoir $|g(x)| < \varepsilon$, il suffit d'avoir : $5|x| < \varepsilon$ et $|x| < 1$, c'est-à-dire : $|x| < \dfrac{\varepsilon}{5}$ et $|x| < 1$.

Scanné avec CamScanner

Il suffit donc de choisir $\alpha = \min\left(1;\frac{\varepsilon}{5}\right)$. Par suite : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

Applications

Montrer en utilisant la définition que :

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x\right)=0$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x+1}=0$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{x^2+1}=0$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x+x^2-x^3\right)=0$

Proposition

Soit f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I=]-r;r[-\{0\}$ où $r\in\mathbb{R}_+^*$.

Alors : $\begin{cases}(\forall x\in I)\ |f(x)|\le u(x)\\ \lim\limits_{x\to 0} u(x)=0\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

Exemples

1) Montrons que : $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{2}{x}=0$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $\left|\cos\frac{2}{x}\right|\le 1$, donc : $\left|x^2\cos\frac{2}{x}\right|\le x^2$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$, alors $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{2}{x}=0$.

2) Calculons $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x^4}$:

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $\left|\sin\frac{1}{x^4}\right|\le 1$, donc : $\left|x\sin\frac{1}{x^4}\right|\le|x|$. Comme $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, alors $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x^4}=0$.

3) Montrons que pour tout $x\in]-1;1[$: $|x^2+5x|\le 6|x|$ puis déterminons $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+5x\right)$:

On a : $|x^2+5x|=|x|.|x+5|$. De plus, pour tout $x\in]-1;1[$: $4<x+5<6$, donc : $|x+5|<6$.

Il s'ensuit donc que : $(\forall x\in]-1;1[)\ |x^2+5x|\le 6|x|$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} 6|x|=0$ alors $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+5x\right)=0$.

Remarques

- Pour tous $k\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to 0} kx^n=0$ et $\lim\limits_{x\to 0} k\sqrt{|x|}=0$.
- La limite d'une fonction en 0 est une notion locale : elle ne dépend de la fonction qu'au voisinage de 0. C'est pourquoi on peut considérer : $x\in]-1;1[$ ou $x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ ou n'importe quel intervalle ouvert centré en 0 inclus dans le ensemble de définition de la fonction étudiée.
- On peut avoir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ sans que la fonction f soit définie en 0.

Scanné avec CamScanner

Applications

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\left(\frac{\pi}{x^3}\right)$.

2. Justifier que pour tout $x \in]-1;1[$, $\left|2x^3-3x\right| \le 3|x|$ puis déterminer : $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x^3-3x\right)$.

3. Justifier que pour tout $x \in [-1;1]$, $\sqrt{|x|-x^2} \le \sqrt{|x|}$ puis déterminer : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{|x|-x^2}\right)$.

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

a) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right)\ \left|f(x)\right| \le |x|$.

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

1.3. LIMITE FINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN UN POINT

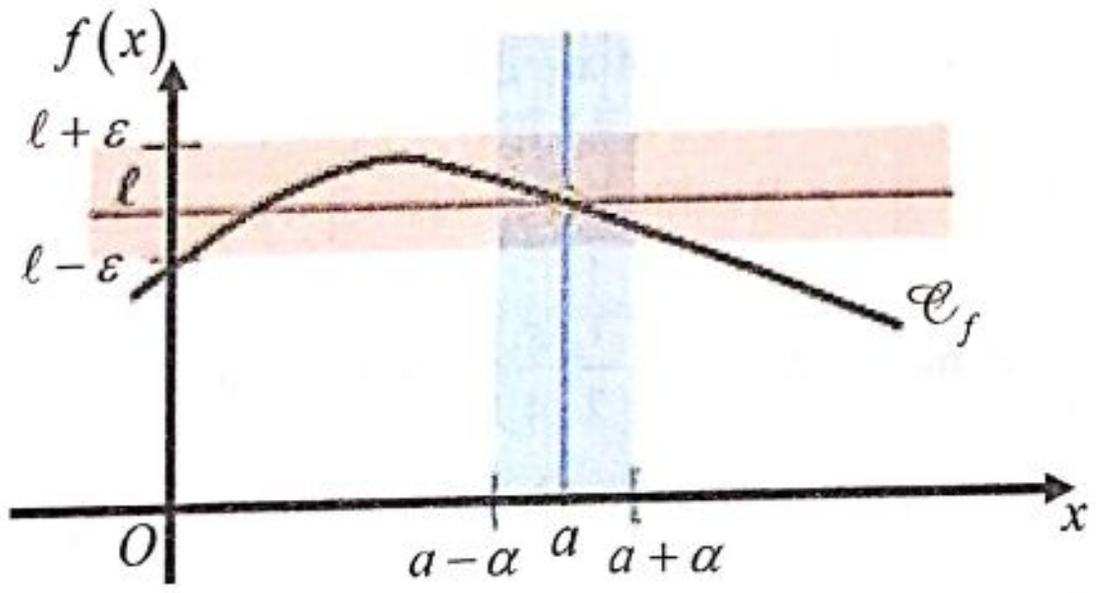
Définition

Soit f une fonction numérique définie au voisinage d'un réel a et $\ell \in \mathbb{R}$.

Dire que f a pour limite ℓ quand x tend vers a signifie : aussi petit que soit le réel strictement positif ε, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\alpha;a+\alpha[-\{a\}$, $f(x)$ est dans l'intervalle $]\ell-\varepsilon;\varepsilon+\ell[$.

Autrement dit : $\left(\forall \varepsilon>0\right)\left(\exists \alpha>0\right);\ \left(\forall x \in D_f\right)\ \left(0<|x-a|<\alpha \Rightarrow \left|f(x)-\ell\right|<\varepsilon\right)$

On écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ ou $\lim\limits_{a} f=\ell$



Si x est une valeur approchée de a à la précision α,

alors $f(x)$ est une valeur approchée de ℓ à la précision ε.

Remarque

En posant $x-a=h$, on obtient : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=\ell$.

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x$.

Montrons en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|f(x) - 3| = |(x+1)(x-3)| = |x+1|.|x-3|$ (1)

Soit maintenant $x \in]-2;0[$. On a : $-2 < x < 0$, donc : $-5 < x-3 < -3$, d'où : $|x-3| < 5$. (2)

De (1) et (2) on en déduit que : $|f(x) - 3| \leq 5|x+1|$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour avoir $|f(x) - 3| < \varepsilon$, il suffit d'avoir $5|x+1| < \varepsilon$ et $x \in]-2;0[$, c'est-à-dire :

$|x+1| < \dfrac{\varepsilon}{5}$ et $|x+1| < 1$. On pose : $\alpha = \min\left(1; \dfrac{\varepsilon}{5}\right)$. Il en résulte alors :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha > 0)\,;\ (\forall x \in \mathbb{R})\ \ \left(0 < |x+1| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon\right)$$

ce qui montre que : $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3$

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par : $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$.

Montrons en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = -1$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2\}$: $|g(x) + 1| = \left|\dfrac{2(x-1)}{x-2}\right| = \dfrac{2}{|x-2|} \times |x-1|$ (1)

Soit maintenant $x \in \left]\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right[$. On a : $-\dfrac{3}{2} < x-2 < -\dfrac{1}{2}$, donc : $\dfrac{1}{2} < |x-2| < \dfrac{3}{2}$, d'où : $\dfrac{1}{|x-2|} < 2$. (2)

De (1) et (2) on en déduit que : $|g(x) + 1| \leq 4|x-1|$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour avoir $|g(x) + 1| < \varepsilon$, il suffit d'avoir $4|x-1| < \varepsilon$ et $x \in \left]\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right[$, c'est-à-dire :

$|x-1| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ et $|x-1| < \dfrac{1}{2}$. On pose : $\alpha = \min\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\varepsilon}{4}\right)$. Il en résulte alors :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha > 0)\,;\ (\forall x \in \mathbb{R} - \{2\})\ \ \left(0 < |x-1| < \alpha \Rightarrow |g(x) + 1| < \varepsilon\right)$$

ce qui montre que : $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = -1$.

Applications

1. Montrer en utilisant la définition que :

$$\lim_{x \to 1}\left(3x^2 - 5x + 1\right) = -1 \quad ; \quad \lim_{x \to -1} \frac{2x+1}{x-1} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x \to 2} \sqrt{4x+1} = 3$$

2. Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{3x+3}$; $\lim\limits_{x \to 1}\left(x^3 - 4\right)$; $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+1}{2x-1}$.

Scanné avec CamScanner

Proposition

Soit f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I =]a-r;a+r[-\{a\}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$, $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors : $\begin{cases} (\forall x \in I)\ |f(x)-\ell| \le u(x) \\ \lim\limits_{x\to a} u(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

Remarques

- Pour tout $(a;k) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to a} k(x-a)^n = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} k\sqrt{|x-a|} = 0$.
- Si la limite d'une fonction numérique f existe en un point, alors elle est unique.

Exemples

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2 + x^2 \sin\frac{1}{x}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $|f(x)-2| = x^2\left|\sin\frac{1}{x}\right|$; et puisque $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$, alors : $|f(x)-2| \le x^2$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$.

2) On considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$.

Montrons que : $(\forall x \in D_g)\left|g(x)-\frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}|x+1|$ puis déterminons $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = \frac{1}{2}$.

On a : $D_g = [-2;-1[\cup]-1;+\infty[$ et pour tout $x \in D_g$:

$$g(x)-\frac{1}{2} = \frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-1}{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{x+2}+1} - \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{x+2}}{2\left(\sqrt{x+2}+1\right)} = -\frac{(x+1)}{2\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2}$$

Comme $\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2 \ge 1$, alors : $(\forall x \in D_g)\ \left|g(x)-\frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}|x+1|$.

Puisque $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{2}|x+1| = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = \frac{1}{2}$.

Applications

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

a) Prouver que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ |f(x)-1| \le (x-1)^2$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

Scanné avec CamScanner

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

a) Prouver que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)\ \left|g(x)-\dfrac{1}{2}\right|\le\dfrac{1}{2}|x-1|$.

b) Conclure la valeur de la limite : $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

3. On considère la fonction $h : x\mapsto\dfrac{x-1}{2x+1}$.

a) Trouver un réel k tel que pour tout $x\in D_h$: $|x+1|\le\dfrac{1}{3}\Rightarrow|h(x)-2|\le k|x+1|$

b) Déterminer : $\lim\limits_{x\to -1} h(x)$.

4. On considère la fonction $k : x\mapsto x^3-2x^2+2x+1$.

a) Trouver un réel λ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $|x|\le 1\Rightarrow|k(x)-1|\le\lambda|x|$.

b) Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} k(x)$.

1.4. LIMITE DE QUELQUES FONCTIONS USUELLES EN UN POINT

Proposition

Soit P et Q deux fonctions polynomiales et $a\in\mathbb{R}$. Alors :

(1) $\lim\limits_{x\to a} P(x)=P(a)$

(2) Si $Q(a)\neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(a)}{Q(a)}$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$

(4) Si $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ alors $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a$

(5) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

(6) Si $a>0$ alors $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$

Exemples

1) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3x^2-5x+6$.

On a f est une fonction polynomiale, par conséquent :

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=4\quad\text{et}\quad\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{4}\quad\text{et}\quad\lim_{x\to-\sqrt{2}} f(x)=f\left(-\sqrt{2}\right)=12+5\sqrt{2}$$

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$ par : $g(x)=\dfrac{3x-1}{2x+5}$.

Calculons $\lim\limits_{x\to 7} g(x)$: g étant une fonction rationnelle et de plus $7\in D_g$, donc : $\lim\limits_{x\to 7} g(x)=g(7)=\dfrac{20}{19}$.

3) On a immédiatement :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad;\quad\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad;\quad\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\tan x=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Scanné avec CamScanner

Applications

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2-7x-1\right)$; $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^{2018}-x^{2017}+2\right)$; $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\left(x^3-5x^2+x+1\right)$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\dfrac{x^2+x}{2x-1}$; $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-6x^2+5x+4}{x^2+4x+3}$

$\lim\limits_{x\to 3}(x-2)^3\left(1-x^2\right)$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2x-1)\left(x^2-5x+3\right)}{\left(5x^2-6\right)\left(1-x+x^2\right)}$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\sin x$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan x$

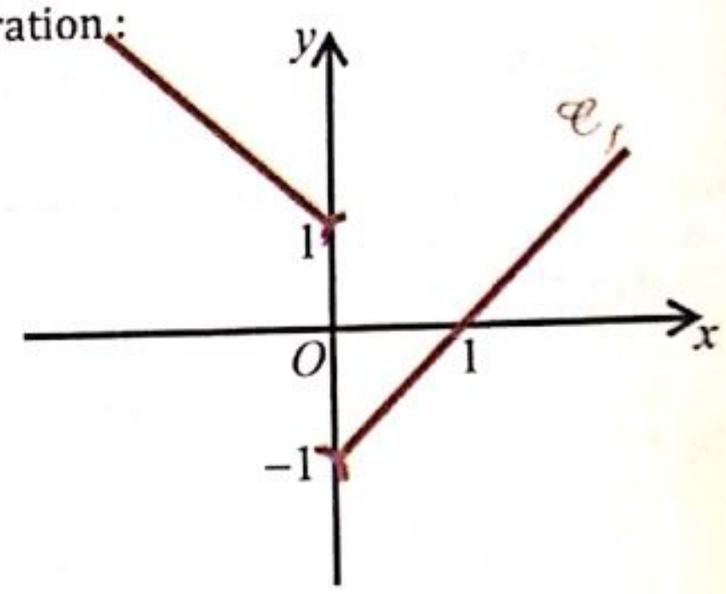
1.5. LIMITE À DROITE – LIMITE À GAUCHE

INTRODUCTION

Pourquoi la limite à gauche et la limite à droite ?

Parfois, il arrive que le comportement d'une fonction f en un point a soit différent « à gauche » de a, c'est-à-dire pour les réels x strictement inférieurs à a, et « à droite » de a, c'est-à-dire pour les réels x strictement supérieurs à a. Voici un exemple simple d'illustration :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|}$



On voit sur le graphe de f que le comportement en 0 n'est pas le même lorsqu'on s'approche de 0 par valeurs négatives ou par valeurs positives. En effet, quand x s'approche de 0 par valeurs inférieures, $f(x)$ s'approche de 1 alors que, par contre quand x s'approche de 0 par valeurs supérieures, $f(x)$ s'approche de -1.

Une telle fonction n'a donc pas de limite en 0.

Néanmoins, si on ne considère que le comportement de $f(x)$ quand x s'approche par valeurs négatives de 0, $f(x)$ s'approche de 1. On dit alors que la limite de f à gauche en 0 est égale à 1 et on note $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$ ou bien $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=1$.

D'autre part, si on ne s'intéresse qu'au comportement de $f(x)$ quand x s'approche de 0 par valeurs positives, $f(x)$ s'approche de -1. On dit alors que la limite de f à droite en 0 est égale à -1 et on note $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=1$.

Un point important à noter est que, dans le cas particulier où les limites à gauche et à droite en un point a d'une fonction f coïncident alors cela signifie que la fonction admet une limite en ce point.

Scanné avec CamScanner

4 CONNAISSANCES FONDAMENTALES

LIMITES USUELLES

On a les résultats importants suivants : (déjà vu au cours des activités préparatoires)

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^3}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^3}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}=+\infty$

Remarques

Soit $k\in\mathbb{R}_+^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On a les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{k}{x^n}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{k}{\sqrt{x}}=+\infty$;
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{k}{x^n}=+\infty$ si l'entier n est pair ;
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{k}{x^n}=-\infty$ si l'entier n est impair.

Proposition

Soit f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I=]-r;r[-\{0\}$ où $r\in\mathbb{R}_+^*$.

- Si pour tout $x\in I$: $f(x)\geq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$.
- Si pour tout $x\in I$: $f(x)\leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=-\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$.

Ces propriétés restent valables si x tend vers 0 à droite ou à gauche.

Exemples

1) Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$: On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\sqrt{1+x^2}\geq 1$; par conséquent : $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\geq\dfrac{1}{x^2}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}=+\infty$.

2) Calculons $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2+1}\right)$: On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2+1}\leq\dfrac{1}{x}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2+1}\right)=-\infty$.

3) Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}+2+\sin\dfrac{1}{x}\right)$: On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $-2\leq\sin\dfrac{1}{x}$; donc : $\dfrac{1}{x}\leq\dfrac{1}{x}+2+\sin\dfrac{1}{x}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}+2+\sin\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$.

Scanné avec CamScanner

Applications

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-x+x^2}}{x^3} \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2}{x}-1+\cos\frac{2}{x}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}-\sin\frac{\pi}{x}\right)$$

2.2. LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN UN POINT

Définition

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de a sauf peut-être en a..

- Dire que f a pour limite $+\infty$ en a signifie que $f(x)$ est supérieur à tout réel $A>0$ quitte à attribuer au réel x des valeurs suffisamment proches de a. Autrement dit :

$$(\forall A>0)\,(\exists \alpha>0);\left(\forall x\in D_f\right)\left(0<|x-a|<\alpha \Rightarrow f(x)>A\right)$$

On écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{a} f=+\infty$

- Dire que f a pour limite $-\infty$ en a signifie que $f(x)$ est inférieur à tout réel $-A<0$ quitte à attribuer au réel x des valeurs suffisamment proches de a. Autrement dit :

$$(\forall A>0)\,(\exists \alpha>0);\left(\forall x\in D_f\right)\left(0<|x-a|<\alpha \Rightarrow f(x)<-A\right)$$

On écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{a} f=-\infty$

Remarques

- Dire que f a pour limite $+\infty$ en a signifie que la limite de la fonction $h\mapsto f(a+h)$ quand h tend vers 0 est égale à $+\infty$. Ainsi, on a l'équivalence : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=+\infty$.

De même, on a les équivalences suivantes : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=-\infty$

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim_{h\to 0^+} f(a+h)=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim_{h\to 0^-} f(a+h)=+\infty$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim_{h\to 0^+} f(a+h)=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim_{h\to 0^-} f(a+h)=-\infty .$$

- Soit $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On a les limites suivantes :
  - $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{x-a}=+\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{x-a}=-\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{(x-a)^2}=+\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{\sqrt{x-a}}=+\infty$.
  - $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{(x-a)^n}=+\infty$ si n est un entier pair.
  - $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{(x-a)^n}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{(x-a)^n}=-\infty$ si n est un entier impair.

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) On a : $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{1}{(x+3)^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{1}{(x-\pi)^3}=-\infty$.

2) Calculons $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\cos^2 x+1}{(x-2)^3}$:

On a pour tout $x\in]-\infty;-2[$, $\cos^2 x+1\geq1$ et $(x-2)^3<0$; donc : $\dfrac{\cos^2 x+1}{(x-2)^3}\leq\dfrac{1}{(x-2)^3}$.

Comme $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{(x-2)^3}=-\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\cos^2 x+1}{(x-2)^3}=-\infty$.

Applications

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3}{(x+1)^2}$; $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{1}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\tan^2 x+1}{(x+1)^2}$; $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^3-1}{(x-1)^3}$

$\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\left|\sin\dfrac{2}{(x-2)^2}\right|\right)$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\times\dfrac{1}{(x-1)^{2019}}$; $\lim\limits_{x\to-4^-}\dfrac{E(x)}{(x+4)^3}$.

3 LIMITE FINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN $+\infty$ ET $-\infty$

3.1. LIMITE NULLE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN $+\infty$ ET $-\infty$

Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

- On dit que f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si son ensemble de définition contient au moins un intervalle de la forme $]A,+\infty[$ (resp. de la forme $]-\infty,A[$).
- On dit que f définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) admet en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) une limite nulle si, pour $x\in D_f$, $|f(x)|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut à condition que x (resp. $-x$) soit suffisamment grand.

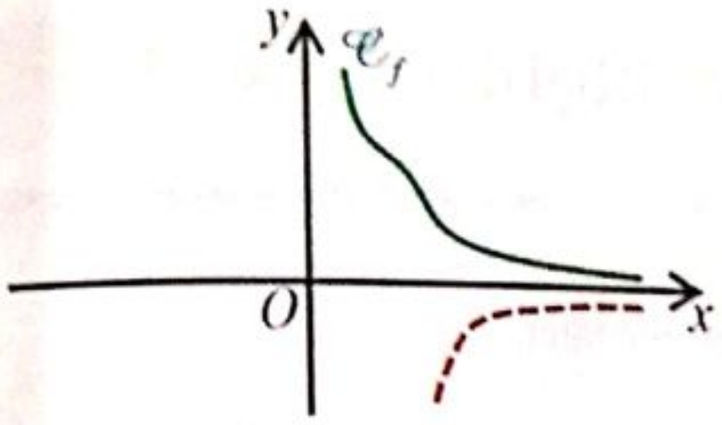
On écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ou $\lim\limits_{+\infty}f=0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ ou $\lim\limits_{-\infty}f=0$).

On a donc :

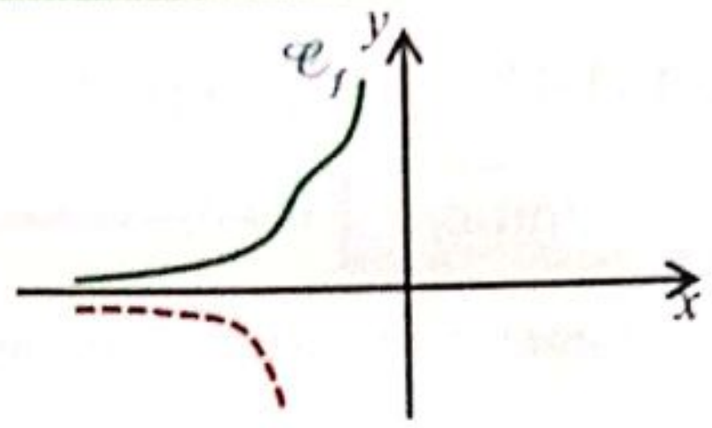
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0\Leftrightarrow\left[(\forall\varepsilon>0)(\exists B>0)\,;\,(\forall x\in D_f)\ \left(x>B\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon\right)\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0\Leftrightarrow\left[(\forall\varepsilon>0)(\exists B>0)\,;\,(\forall x\in D_f)\ \left(x<-B\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon\right)\right]$$

Scanné avec CamScanner



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

LIMITES USUELLES

On a les résultats importants suivants : (déjà vu au cours des activités préparatoires)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{|x|}}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{|x|}}=0$$

Exemple

Montrons en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=0$.

On considère la fonction $f : x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Montrons que la proposition suivante est vraie :

$$P : \text{" } (\forall \varepsilon>0)\,(\exists B>0)\,;\,(\forall x\in D_f)\ \left(x>B \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon\right) \text{ "}$$

Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $x\in\,]1;+\infty[$, on a : $|f(x)|<\varepsilon \Leftrightarrow x^2-1>\dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x>\sqrt{1+\dfrac{1}{\varepsilon}}$.

Donc il suffit de prendre : $B=\sqrt{1+\dfrac{1}{\varepsilon}}$. On a bien $B>0$ et pour tout $x\in D_f$:

$$x>B \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$$

Ainsi, la proposition P est vraie et donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=0$.

Remarques

- De la définition précédente, on obtient l'équivalence : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)=0$.
- Soit $k\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{k}{x^n}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{k}{x^n}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{k}{\sqrt{x}}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{k}{\sqrt{-x}}=0$$

- Lorsqu'on écrit $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=0$, cela signifie que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

Scanné avec CamScanner

3 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 50

On pose :

$$S=\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5} \text{ et } P=\cos\frac{\pi}{5}\times\cos\frac{3\pi}{5}$$

1) Montrer que : $S+2P=0$.

2) En calculant $P\times\sin\frac{\pi}{5}$, en déduire que :

$$P=-\frac{1}{4} \text{ et } S=\frac{1}{2}$$

3) Déterminer les valeurs de $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{3\pi}{5}$.

EXERCICE 51

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$.

1) Montrer que :

$$\sin^2(x+y)=\cos^2 x+\cos^2 y-2\cos x.\cos y.\cos(x+y)$$

2) Soit $z\in\mathbb{R}$ tel que : $x+y+z=\pi$. Montrer que :

$$\cos^2 x+\cos^2 y+2\cos x.\cos y.\cos z=1$$

EXERCICE 52

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cos^2 x+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\sin^2 x + 2\sin x.\cos x$$

1) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=\sqrt{3}\cos(2x)+\sin(2x)+\sqrt{2}$$

2) Calculer : $f\left(\frac{37\pi}{8}\right)$ et $f\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$.

3) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{2}$$

4) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$ et représenter ses solutions sur le cercle trigonométrique.

b) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation : $f(x)\le 0$.

EXERCICE 53

Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[\right)\ \tan(2\alpha)>\tan\alpha$

EXERCICE 54

Résoudre dans l'intervalle I les inéquations suivantes :

1) $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\cos(2x)>0$; $I=[-\pi;\pi]$.

2) $\cos^2 x+3\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x.\cos x<1$

sur l'intervalle $I=\left[-2\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

3) $\cos x+\sin x\le\frac{1}{\cos x}$; $I=\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

4) $\frac{1}{\cos x}<\frac{1}{\sin x}$; $I=[0;2\pi]$.

EXERCICE 55

1) Soit x un nombre réel.

Montrer que : $\cos^6 x+\sin^6 x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos(4x)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\cos^6(2x)+\sin^6(2x)=\frac{13}{16}$$

3) Résoudre dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ l'inéquation :

$$\cos^6 x+\sin^6 x\le\frac{7}{16}$$

EXERCICE 56

1) Soit a un réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\cos a.\cos(2a)\cos(4a)....\cos(2^n a)=\frac{\sin(2^{n+1}a)}{2^{n+1}\sin a}$$

2) En déduire la valeur du produit :

$$\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{17}\right)\cos\left(\frac{8\pi}{17}\right)$$

EXERCICE 57

Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$:

$$\cos y=\frac{2\cos x+1}{2+\cos x}\Rightarrow\sqrt{3}\tan\frac{y}{2}=\tan\frac{x}{2}$$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 58

Soit α, β et γ des mesures des angles d'un triangle ABC. Établir les égalités suivantes :

1) $\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}$

2) $\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}$

3) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

4) $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}=1$

EXERCICE 59

Soit x, y et z des réels strictement positifs tels que :

$$x+y+z=\pi$$

1) a) Montrer que : $\sin\frac{y}{2}.\sin\frac{z}{2}\le\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)$

b) En déduire que : $\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{y}{2}.\sin\frac{z}{2}\le\frac{1}{8}$

2) Montrer que : $(1-\cos x)(1-\cos y)(1-\cos z)\le\frac{1}{8}$

EXERCICE 60

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$.

On pose : $a=\cos x+\sin y$ et $b=\sin x+\cos y$.

1) Montrer que si $ab\neq 0$, alors :

$$\cos(x-y)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

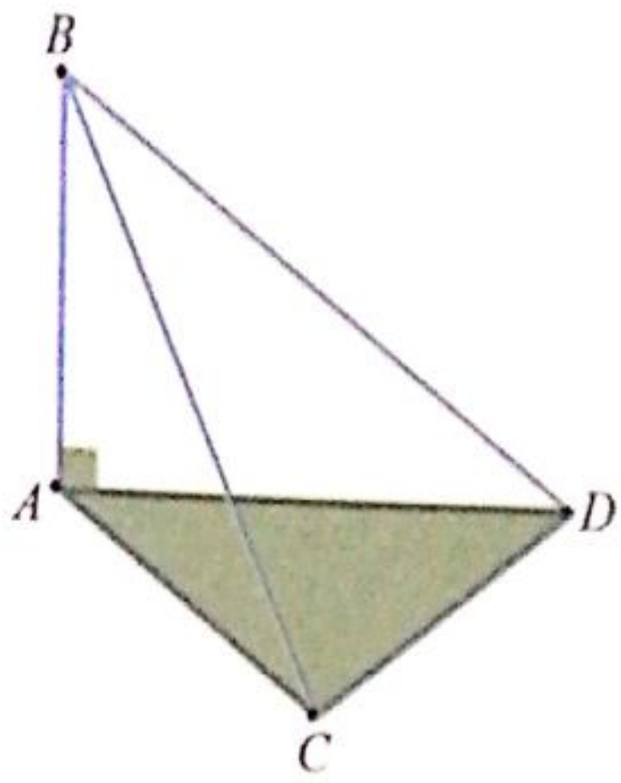
$$\begin{cases}\cos x+\sin y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin x+\cos y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

EXERCICE 61

Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que :

$$(AB)\perp(ACD) \quad \text{et} \quad CD=1$$

On pose : $\widehat{ACB}=\alpha$; $\widehat{BCD}=\beta$; $\widehat{CDB}=\gamma$



1) a) Montrer que : $BC=\dfrac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$.

b) En déduire que : $AB=\dfrac{\sin\alpha.\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$

2) Calculer AB sachant que : $\alpha=\beta=\frac{\pi}{4}$ et $\gamma=\frac{\pi}{3}$.

EXERCICE 62

Soit ABC un triangle.

On désigne par α, β et γ les mesures en radian des angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ respectivement.

On pose : $a=BC$; $b=CA$; $c=AB$.

1) a) Vérifier que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=AB^2$.

b) En déduire que : $c=a\cos\beta+b\cos\alpha$

2) On suppose dans cette question que : $\beta=2\alpha$.

a) Montrer que : $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$.

b) Montrer que : $\cos\alpha=\dfrac{b}{2a}$.

(indication : $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$)

c) En déduire que : $b^2-a^2=ac$.

EXERCICE 63

Résoudre dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]$ l'équation :

$$\sin\left(\frac{\pi}{8\sin^2 x}\right)+E\left(\sqrt{1-\cos(2x)}\right)=\frac{3}{2}$$

Scanné avec CamScanner

4

LIMITE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

HISTOIRE

La définition de la dérivée se fait à l'aide de la limite d'un quotient a priori indéterminé. Lorsque cette notion fut introduite à la fin du XVIIe siècle, la notion de limite n'existait pas. Leibniz et Euler considéraient l'existence d'un état intermédiaire appelé infiniment petit situé entre le fait d'être différent de 0 et celui d'être nul. Ceci explique que certains mathématiciens aient combattu ces nouveaux outils malgré leur efficacité pour résoudre de nombreux problèmes jusque-là sans réponse.

Jean le Rond d'Alembert chercha fort maladroitement à formuler une définition de la limite mais il faut attendre le milieu du siècle suivant pour que ce concept soit introduit de manière rigoureuse par Augustin-Louis Cauchy puis Karl Weierstrass.

Source : https://fr.wikipedia.org



AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789 – 1857)



KARL WEIERSTRASS (1812 – 1897)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Calculer les limites des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles et des fonctions irrationnelles ;
- Calculer les limites de fonctions trigonométriques simples en utilisant les limites usuelles ;
- Résoudre des inéquations du type : $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ et du type $f(x)>A$ pour montrer que $f(x)$ tend vers ℓ ou vers $+\infty$ dans des situations simples.

PLAN DU COURS

- Activités Préparatoires 143
- Connaissances Fondamentales
  - Limite finie d'une fonction en un point 150
  - Limite infinie d'une fonction en un point 159
  - Limite finie d'une fonction en $+\infty$ et $-\infty$ 162
  - Limite infinie d'une fonction en $+\infty$ et $-\infty$ 165
  - Opérations sur les limites 169
  - Quelques méthodes pour lever une indétermination 175
- Techniques et Astuces 181
- Exercices et Problèmes
  - Exercices d'application 190
  - Exercices de perfectionnement 194

Scanné avec CamScanner

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

1 LIMITE NULLE EN ZÉRO D'UNE FONCTION DE RÉFÉRENCE

1. Soit f la fonction numérique sur l'intervalle $[-1;1]$ par : $f(x)=\sqrt{|x|}$.

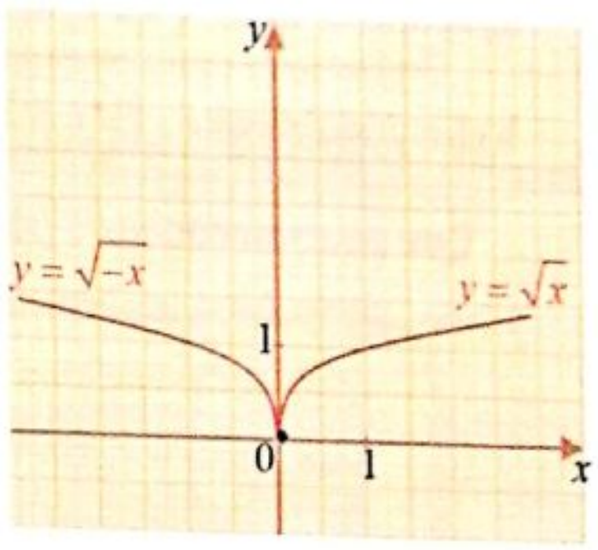
a) Recopier puis compléter le tableau suivant sur le cahier à l'aide de la calculatrice : (à 0,001 près)

x	0,05	0,01	10^{-4}	10^{-9}	10^{-12}	0	-10^{-12}	-10^{-9}	-10^{-6}	−0,01	−0,05
$f(x)$											

b) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \left(|x|\le 0,0001\Rightarrow|f(x)|\le 0,01\right)$.

c) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\left(|x|\le 10^{-2n}\Rightarrow|f(x)|\le 10^{-n}\right)$.

En se basant sur les résultats de a), b) et c) et en utilisant le graphe ci-contre, que peut-on conclure pour les valeurs de $f(x)$ quand x s'approche de plus en plus de zéro ?

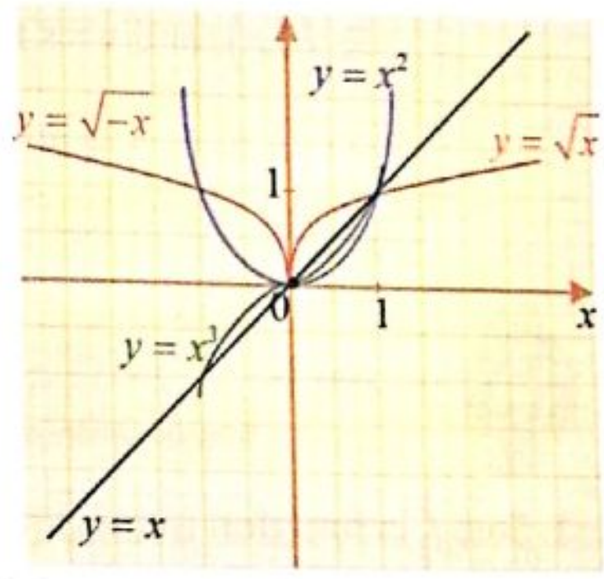


2. a) Montrer que pour tout $x\in[0;1]$: $x^3\le x^2\le x\le\sqrt{x}$.

et en déduire que pour tout $x\in[-1;1]$: $|x^3|\le x^2\le|x|\le\sqrt{|x|}$.

b) Montrer que : $(\forall x\in[-1;1])\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ |x^n|\le|x|$.

c) Quand x prend des valeurs de plus en plus proches de zéro, que peut-on remarquer quant aux valeurs de $\sqrt{|x|}$, x^2, x^3 et x^n ? Justifier la réponse en se basant sur les résultats précédents.



Lorsque x s'approche de plus en plus de zéro, les nombres $\sqrt{|x|}$, x^2, x^3 et x^n s'approchent de plus en plus de zéro. On dit alors que la limite des fonctions $x\mapsto\sqrt{|x|}$, $x\mapsto x^2$, $x\mapsto x^3$ et $x\mapsto x^n$ est égale à 0 quand x tend vers 0 et on écrit : $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{|x|}=0$; $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$; $\lim\limits_{x\to0}x^3=0$; $\lim\limits_{x\to0}x^n=0$.

2 LIMITE NULLE EN ZÉRO D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

1. Soit f_1 la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x)=x^2-\dfrac{x}{2}$.

a) Montrer que si $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$, alors : $|f_1(x)|\le|x|$.

b) En déduire que si $-10^{-6}<x<10^{-6}$, alors : $-10^{-6}<f_1(x)<10^{-6}$.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $|x|\le10^{-n}\Rightarrow|f_1(x)|\le10^{-n}$.

Que peut-on conclure pour les valeurs de $f_1(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus proches de zéro ?

Scanné avec CamScanner

4 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

2. Soit f_2 la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_2(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

a) Montrer que si $-1<x<1$, alors : $|f_2(x)|\leq x^2$.

b) En déduire que : $(\forall x\in[-1;1])(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \left(|x|<10^{-n}\Rightarrow|f_2(x)|\leq 10^{-2n}\right)$.

Que peut-on conclure pour les valeurs de $f_2(x)$ quand x s'approche de plus en plus de zéro ?

3. Soit f_3 la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f_3(x)=\sqrt{|x|}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ |f_3(x)|\leq\sqrt{|x|}$.

b) En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \left(|x|<10^{-2n}\Rightarrow|f_3(x)|\leq 10^{-n}\right)$.

Que peut-on conclure pour les valeurs de $f_3(x)$ quand x s'approche de plus en plus de zéro ?

GÉNÉRALISATION

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]-\alpha;\alpha[$ où $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, ou sur un ensemble de la forme $]-\alpha;\alpha[-\{0\}$.

Si $f(x)$ tend vers zéro (c'est-à-dire s'approche de plus en plus de zéro) quand x tend vers 0, on dit que : « la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 est égale à 0 » et on écrit : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

3 LIMITE FINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN UN POINT

1. Soit f_1 la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x)=x^2+7x-8$.

a) Montrer que pour tout $x\in]0;2[$: $|f_1(x)-2|\leq 10|x-1|$.

b) En déduire que si $|x-1|\leq 10^{-9}$, alors : $|f_1(x)-2|\leq 10^{-8}$.

c) On pose : $h=x-1$. Vérifier que : $|f_1(1+h)-2|\leq 10|h|$.

En remarquant que lorsque x tend vers 1, le réel h tend vers 0 et en se basant sur l'activité précédente, Déterminer la limite de la fonction $h\mapsto f_1(1+h)-2$ lorsque h tend vers 0.

2. Soit f_2 la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-3\}$ par : $f_2(x)=\dfrac{5x+5}{x+3}$.

a) Montrer que si $\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{5}{2}$, alors : $|f_2(x)-3|\leq\dfrac{4}{9}|x-2|$.

et en déduire que si : $|x-2|\leq 10^{-10}$, alors : $|f_2(x)-3|\leq\dfrac{4}{9}\times 10^{-10}$.

Que peut-on conclure pour les valeurs de $f_2(x)$ quand x s'approche de plus en plus de 2 ?

Scanné avec CamScanner

b) On pose : $h = x - 2$. Vérifier que : $\left|f_2(2+h) - 3\right| \leq \frac{4}{7}|h|$ et déterminer la limite de la fonction numérique $h \mapsto f_2(2+h) - 3$ lorsque h tend vers 0.

GÉNÉRALISATION

Soit a et ℓ deux nombres réels.

L'écriture $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) - \ell = 0$ signifie : la valeur de $f(x)$ s'approche de ℓ, d'aussi près que l'on voudra, quitte à attribuer à la variable x des valeurs suffisamment proches de a.

On écrit : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ (On a posé : $x - a = h$)

4 LIMITE INFINIE EN ZÉRO DE L'INVERSE D'UNE FONCTION DE RÉFÉRENCE

1. Recopier puis compléter le tableau suivant : (n est un entier naturel supérieur ou égal à 4)

x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{10^4}$	$\frac{1}{10^n}$
$\frac{1}{x}$									
$\frac{1}{x^2}$									
$\frac{1}{x^3}$									
$\frac{1}{\sqrt{x}}$									

Soit f une des fonctions suivantes : $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto \frac{1}{x^2}$; $x \mapsto \frac{1}{x^3}$; $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Que peut-on conclure pour les valeurs de $f(x)$ quand x s'approche de plus en plus de 0 et $x > 0$?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x un réel de l'intervalle $]0;1[$.

a) Mettre les nombres $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ dans l'ordre croissant.

b) Déterminer un entier naturel p tel que pour tout $x \in \left]0;\frac{1}{10^p}\right[$:

$\frac{1}{x} > 10^n$ et $\frac{1}{x^2} > 10^{2n}$ et $\frac{1}{x^3} > 10^{3n}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}} > \sqrt{10^n}$

Que peut-on remarquer des valeurs de $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ quand l'entier n prend des valeurs de plus en plus grandes ?

Scanné avec CamScanner

4 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

GÉNÉRALISATION

• Lorsque le réel x s'approche de plus en plus de 0 par valeurs positives, les nombres $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ prennent des valeurs de plus en plus grandes. On dit alors que la limite des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x^3}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ à droite de 0 est égale à $+\infty$.

On écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^3} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

• Lorsque le réel x s'approche de plus en plus de 0 par valeurs négatives, on écrit :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^3} = -\infty$

5 LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN UN POINT

1. On considère la fonction numérique f_1 définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f_1(x) = \frac{2x^2+1}{x}$

a) Montrer que pour tout $x > 0$: $f_1(x) > \frac{1}{x}$ puis déterminer la limite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_1(x)$.

b) Montrer que pour tout $x < 0$: $f_1(x) < \frac{1}{x}$ puis déterminer la limite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f_1(x)$.

2. On considère la fonction numérique f_2 définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f_2(x) = \frac{3x^2+1}{x^4}$

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f_2(x) > \frac{3}{x^2}$.

b) Conclure : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_2(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f_2(x)$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Tracer $\mathscr{C}_f$ puis conjecturer le comportement de $f(x)$ quand x s'approche de plus en plus de 1 et $x > 1$ puis le comportement de $f(x)$ quand x s'approche de plus en plus de 1 et $x < 1$.

b) Remplir le tableau suivant :

Que remarque - t - on ?

x	0,98	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,02
$f(x)$							

Scanné avec CamScanner

GÉNÉRALISATION

Soit a un nombre réel.

- Si $x > a$ tel que x tend vers a, on dit que « x prend des valeurs de plus en plus proches de a avec $x > a$ » ou « x tend vers a à droite ».
- Si $x < a$ tel que x tend vers a, on dit que « x prend des valeurs de plus en plus proches de a avec $x < a$ » ou « x tend vers a à gauche ».
- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a à droite, on dit que « la limite de $f(x)$ à droite en a est égale à $+\infty$ » et on écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$.
- Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a à gauche, on dit que « la limite de $f(x)$ à gauche en a est égale à $-\infty$ » et on écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$.

6 LIMITE NULLE À L'INFINI DE L'INVERSE D'UNE FONCTION DE RÉFÉRENCE

1. Recopier puis compléter le tableau suivant : (n est un entier naturel supérieur ou égal à 5).

x	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{2n}
$\frac{1}{x}$					
$\frac{1}{x^2}$					
$\frac{1}{x^3}$					
$\frac{1}{\sqrt{x}}$					

Soit f une des fonctions suivantes : $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto \frac{1}{x^2}$; $x \mapsto \frac{1}{x^3}$; $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Que peut-on conclure pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus grandes ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x un réel de l'intervalle $]1;+\infty[$.

a) Mettre les nombres $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ dans l'ordre croissant.

b) Déterminer un entier naturel p tel que pour tout $x \in]10^p;+\infty[$:

$\frac{1}{x} < 10^{-n}$ et $\frac{1}{x^2} < 10^{-2n}$ et $\frac{1}{x^3} < 10^{-3n}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}} < \sqrt{10^{-n}}$

Scanné avec CamScanner

4 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

Que peut-on remarquer des valeurs de $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ quand l'entier n prend des valeurs de plus en plus grandes ?

GÉNÉRALISATION

Lorsque le réel $|x|$ prend des valeurs de plus en plus grandes, les réels $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ s'approchent de plus en plus de 0.

On dit alors que la limite des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x^3}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ quand x tend vers $+\infty$ « ou vers $-\infty$ » est égale à 0 et on note :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

On a aussi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

7 LIMITE À L'INFINI D'UNE FONCTION DE RÉFÉRENCE

1. Recopier puis compléter le tableau suivant : (n est un entier naturel supérieur ou égal à 5).

x	10	10^2	10^3	10^4	10^n
x^2					
x^3					
$\sqrt{x}$					

Soit f une des fonctions suivantes : $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto \sqrt{x}$.

Que peut-on conclure quant aux valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus grandes ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x un réel de l'intervalle $]1;+\infty[$.

a) Mettre les nombres x, x^2, x^3 et $\sqrt{x}$ dans l'ordre croissant.

b) Déterminer un entier naturel p tel que pour tout $x \in]10^p;+\infty[$:

$x^2 > 10^{2n}$ et $x^3 > 10^{3n}$ et $\sqrt{x} > \sqrt{10^n}$

Que peut-on remarquer pour les nombres x, x^2, x^3 et $\sqrt{x}$ quand l'entier n prend des valeurs de plus en plus grandes ?

c) Conjecturer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$

Scanné avec CamScanner

8 LIMITES ET ORDRE

A) Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I =]1;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x-1}$.

1. Vérifier que : $(\forall x \in I)\ f(x) \geq x^2$.

2. Si $x > 10^{100}$, quelles sont les valeurs possibles de $f(x)$?

3. Rappeler $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$. Que peut-on conclure pour le nombre $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

B) Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2+3}$.

1. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ |g(x)-1| \leq \dfrac{1}{x^2}$.

2. Déterminer une valeur approchée de $g(x)$ et la précision de cette valeur dans chacun des cas suivants :

a) $x = 100$; b) $x = 10^6$; c) $x = 10^{50}$; d) $x = 10^{100}$

3. Rappeler $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}$. Que peut-on conclure pour le nombre $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

C) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$

1. a) Recopier puis compléter le tableau suivant à l'aide de la calculatrice : (arrondir les résultats à 10^{-5} près).

x	-10^{-4}	-10^{-3}	-10^{-2}	$-0,1$	$0,1$	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
$h(x)$								

b) Que peut-on conclure pour le nombre $h(x)$ quand x tend vers 0 ?

2. a) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ -x^2 \leq h(x) \leq x^2$.

b) Rappeler $\lim\limits_{x\to0} x^2$ puis déterminer $\lim\limits_{x\to0} h(x)$.

D) On admet dans ce qui suit que : $\left(\forall x \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[\right)\ \sin x \leq x \leq \tan x$

1. a) Montrer que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$: $|\sin x| \leq |x|$ puis en déduire : $\lim\limits_{x\to0} \sin x = 0$.

b) En remarquant que : $\cos x = 1 - \sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$, déterminer $\lim\limits_{x\to0} \cos x$ et $\lim\limits_{x\to0} \tan x$.

2. Montrer que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[\cup \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$: $\cos x \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$ puis en déduire que : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

3. a) Vérifier que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[\cup \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$: $\dfrac{\tan x}{x} = \dfrac{\sin x}{x} \times \dfrac{1}{\cos x}$ et $\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$.

b) En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x}$.

Scanné avec CamScanner

1 LIMITE FINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN UN POINT

1.1. FONCTION DÉFINIE AU VOISINAGE D'UN NOMBRE RÉEL

Définition

Soit f une fonction numérique, D_f son ensemble de définition et a un nombre réel.

- On dit que f est définie au voisinage de a sauf peut-être en a s'il existe un réel r strictement positif tel que : $]a-r;a+r[-\{a\} \subset D_f$
- On dit que f est définie au voisinage de a à droite s'il existe un réel r strictement positif tel que : $]a;a+r[\subset D_f$
- On dit que f est définie au voisinage de a à gauche s'il existe un réel r strictement positif tel que : $]a-r;a[\subset D_f$

Exemples

1) La fonction $f : x \mapsto x^2$ est définie au voisinage de $a = 1$ car $D_f = \mathbb{R}$ et $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[-\{1\} \subset D_f$ $\left(r = \frac{1}{2}\right)$.

2) La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est définie au voisinage de $a = 0$ sauf en 0 car $D_f = \mathbb{R}^*$ et $]-1;1[-\{0\} \subset D_f$.

3) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{\cos(2\pi x)-1}$ n'est pas définie au voisinage d'aucun point de $\mathbb{R}$ car : $D_f = \mathbb{Z}$.

4) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x(x-2)(x-1)^2}$ n'est pas définie au voisinage de 1 car :

$$D_f =]-\infty;0[\cup]2;+\infty[\cup \{1\}.$$

5) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie au voisinage de 0 à droite car $D_f = \mathbb{R}^+$ et $]0;1[\subset D_f$.

6) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x}$ est définie au voisinage de 1 à droite car $D_f =]-\infty;1]$ et $]0;1[\subset D_f$.

1.2. LIMITE NULLE EN ZÉRO D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

INTRODUCTION

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de zéro sauf peut-être en 0.

Si l'on peut rendre $f(x)$ aussi voisin que l'on veut de 0, pourvu que x soit assez voisin de 0, alors on dit que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, et on écrit : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Au cours des activités, on a déjà vu des exemples de fonctions de référence dont la limite est nulle en zéro à savoir : $x \mapsto x$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto$; $x \mapsto x^n$ $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

On a alors : $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$; $\lim\limits_{x \to 0}$ $= 0$

Scanné avec CamScanner

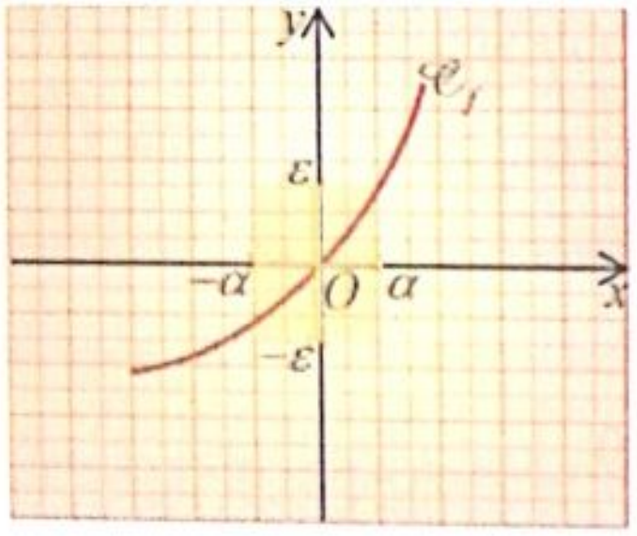
Définition

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de zéro sauf peut-être en 0.

Dire que f a pour limite 0 quand x tend vers 0 signifie : aussi petit que soit le réel strictement positif ε, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]-\alpha;\alpha[- \{0\}$, $f(x)$ est dans l'intervalle $]-\varepsilon;\varepsilon[$.

Autrement dit : $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha > 0)\,;\,(\forall x \in D_f)\;\; (0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$

On écrit : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ ou $\lim\limits_{0} f = 0$



Exemples

1) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$. Montrons en utilisant la définition que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Il s'agit donc de montrer que : $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha > 0)\,;\,(\forall x \in D_f)\;\; (0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$

Soit x un élément de l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$ (c'est-à-dire $|x| < \dfrac{1}{2}$).

On a : $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x+1}\right| < 2$. Par conséquent, on a pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$: $|f(x)| < 2|x|$.

Soit $\varepsilon > 0$. Cherchons un nombre $\alpha > 0$ tel que : $|x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

Pour avoir $|f(x)| < \varepsilon$, il suffit d'avoir : $2|x| < \varepsilon$ et $|x| < \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire : $|x| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $|x| < \dfrac{1}{2}$.

Il suffit donc de choisir $\alpha = \min\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$. Par suite : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 3x^2 + 2x$.

Montrons en utilisant la définition que $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$:

Soit x un élément de l'intervalle $]-1;1[$ (c'est-à-dire $|x| < 1$).

On a : $|g(x)| = |3x^2 + 2x| = |x|.|3x+2|$ et $|3x+2| \leq 5$. Par conséquent : $|g(x)| \leq 5|x|$.

Pour avoir $|g(x)| < \varepsilon$, il suffit d'avoir : $5|x| < \varepsilon$ et $|x| < 1$, c'est-à-dire : $|x| < \dfrac{\varepsilon}{5}$ et $|x| < 1$.

Scanné avec CamScanner

Il suffit donc de choisir $\alpha = \min\left(1;\frac{\varepsilon}{5}\right)$. Par suite : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

Applications

Montrer en utilisant la définition que :

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x\right)=0$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x+1}=0$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{x^2+1}=0$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x+x^2-x^3\right)=0$

Proposition

Soit f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I=\left]-r;r\right[-\{0\}$ où $r\in\mathbb{R}_+^*$.

Alors : $\begin{cases}(\forall x\in I)\ |f(x)|\le u(x)\\ \lim\limits_{x\to 0} u(x)=0\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

Exemples

1) Montrons que : $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{2}{x}=0$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $\left|\cos\frac{2}{x}\right|\le 1$, donc : $\left|x^2\cos\frac{2}{x}\right|\le x^2$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$, alors $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{2}{x}=0$.

2) Calculons $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x^4}$:

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $\left|\sin\frac{1}{x^4}\right|\le 1$, donc : $\left|x\sin\frac{1}{x^4}\right|\le|x|$. Comme $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, alors $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x^4}=0$.

3) Montrons que pour tout $x\in\left]-1;1\right[$: $\left|x^2+5x\right|\le 6|x|$ puis déterminons $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+5x\right)$:

On a : $\left|x^2+5x\right|=|x|.|x+5|$. De plus, pour tout $x\in\left]-1;1\right[$: $4<x+5<6$, donc : $|x+5|<6$.

Il s'ensuit donc que : $\left(\forall x\in\left]-1;1\right[\right)\ \left|x^2+5x\right|\le 6|x|$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} 6|x|=0$ alors $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+5x\right)=0$.

Remarques

- Pour tous $k\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to 0} kx^n=0$ et $\lim\limits_{x\to 0} k\sqrt{|x|}=0$.
- La limite d'une fonction en 0 est une notion locale : elle ne dépend de la fonction qu'au voisinage de 0. C'est pourquoi on peut considérer : $x\in\left]-1;1\right[$ ou $x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ ou n'importe quel intervalle ouvert centré en 0 inclus dans le ensemble de définition de la fonction étudiée.
- On peut avoir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ sans que la fonction f soit définie en 0.

Scanné avec CamScanner

Applications

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\left(\frac{\pi}{x^3}\right)$.

2. Justifier que pour tout $x \in]-1;1[$, $|2x^3 - 3x| \leq 3|x|$ puis déterminer : $\lim\limits_{x\to 0}(2x^3 - 3x)$.

3. Justifier que pour tout $x \in [-1;1]$, $\sqrt{|x| - x^2} \leq \sqrt{|x|}$ puis déterminer : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{|x| - x^2}\right)$.

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$.

a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ |f(x)| \leq |x|$.

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

1.3. LIMITE FINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN UN POINT

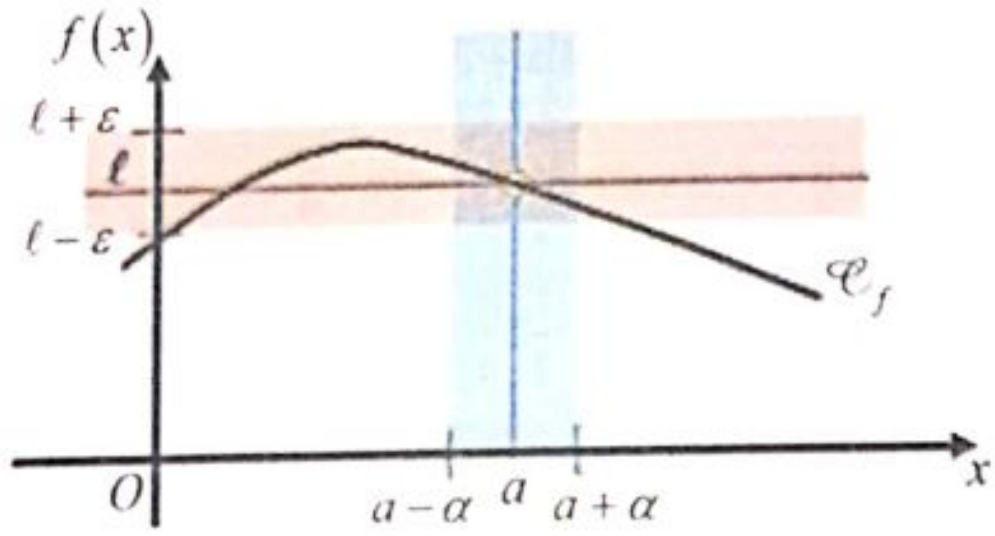
Définition

Soit f une fonction numérique définie au voisinage d'un réel a et $\ell \in \mathbb{R}$.

Dire que f a pour limite ℓ quand x tend vers a signifie : aussi petit que soit le réel strictement positif ε, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\alpha;a+\alpha[- \{a\}$, $f(x)$ est dans l'intervalle $]\ell - \varepsilon;\varepsilon + \ell[$.

Autrement dit : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)\ ;\ (\forall x \in D_f)\ \left(0 < |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\right)$

On écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a} f = \ell$



Si x est une valeur approchée de a à la précision α,

alors $f(x)$ est une valeur approchée de ℓ à la précision ε.

Remarque

En posant $x - a = h$, on obtient : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = \ell$.

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x$.

Montrons en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|f(x) - 3| = |(x+1)(x-3)| = |x+1|.|x-3|$ (1)

Soit maintenant $x \in]-2;0[$. On a : $-2 < x < 0$, donc : $-5 < x-3 < -3$, d'où : $|x-3| < 5$. (2)

De (1) et (2) on en déduit que : $|f(x) - 3| \leq 5|x+1|$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour avoir $|f(x) - 3| < \varepsilon$, il suffit d'avoir $5|x+1| < \varepsilon$ et $x \in]-2;0[$, c'est-à-dire :

$|x+1| < \dfrac{\varepsilon}{5}$ et $|x+1| < 1$. On pose : $\alpha = \min\left(1; \dfrac{\varepsilon}{5}\right)$. Il en résulte alors :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha > 0) : (\forall x \in \mathbb{R})\ \left(0 < |x+1| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon\right)$$

ce qui montre que : $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3$

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par : $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$.

Montrons en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = -1$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2\}$: $|g(x) + 1| = \left|\dfrac{2(x-1)}{x-2}\right| = \dfrac{2}{|x-2|} \times |x-1|$ (1)

Soit maintenant $x \in \left]\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right[$. On a : $-\dfrac{3}{2} < x-2 < -\dfrac{1}{2}$, donc : $\dfrac{1}{2} < |x-2| < \dfrac{3}{2}$, d'où : $\dfrac{1}{|x-2|} < 2$. (2)

De (1) et (2) on en déduit que : $|g(x) + 1| \leq 4|x-1|$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour avoir $|g(x) + 1| < \varepsilon$, il suffit d'avoir $4|x-1| < \varepsilon$ et $x \in \left]\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right[$, c'est-à-dire :

$|x-1| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ et $|x-1| < \dfrac{1}{2}$. On pose : $\alpha = \min\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\varepsilon}{4}\right)$. Il en résulte alors :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha > 0)\,;\ (\forall x \in \mathbb{R} - \{2\})\ \left(0 < |x-1| < \alpha \Rightarrow |g(x) + 1| < \varepsilon\right)$$

ce qui montre que : $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = -1$.

Applications

1. Montrer en utilisant la définition que :

$$\lim_{x \to 1}\left(3x^2 - 5x + 1\right) = -1 \quad ; \quad \lim_{x \to -1} \frac{2x+1}{x-1} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x \to 2} \sqrt{4x+1} = 3$$

2. Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{3x+3}$; $\lim\limits_{x \to 1}\left(x^3 - 4\right)$; $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+1}{2x-1}$.

Scanné avec CamScanner

Proposition

Soit f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I =]a-r;a+r[-\{a\}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$.

$a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors : $\begin{cases} (\forall x \in I)\ |f(x)-\ell| \le u(x) \\ \lim\limits_{x\to a} u(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

Remarques

- Pour tout $(a;k) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to a} k(x-a)^n = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} k\sqrt{|x-a|} = 0$.
- Si la limite d'une fonction numérique f existe en un point, alors elle est unique.

Exemples

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2 + x^2 \sin\frac{1}{x}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $|f(x)-2| = x^2\left|\sin\frac{1}{x}\right|$; et puisque $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$, alors : $|f(x)-2| \le x^2$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$.

2) On considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$.

Montrons que : $(\forall x \in D_g)\left|g(x)-\frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}|x+1|$ puis déterminons $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = \frac{1}{2}$.

On a : $D_g = [-2;-1[\cup]-1;+\infty[$ et pour tout $x \in D_g$:

$$g(x)-\frac{1}{2} = \frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-1}{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{x+2}+1} - \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{x+2}}{2\left(\sqrt{x+2}+1\right)} = -\frac{(x+1)}{2\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2}$$

Comme $\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2 \ge 1$, alors : $(\forall x \in D_g)\ \left|g(x)-\frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}|x+1|$.

Puisque $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{2}|x+1| = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = \frac{1}{2}$.

Applications

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

a) Prouver que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ |f(x)-1| \le (x-1)^2$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

Scanné avec CamScanner

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

a) Prouver que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ \left|g(x)-\dfrac{1}{2}\right|\le\dfrac{1}{2}|x-1|$.

b) Conclure la valeur de la limite : $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

3. On considère la fonction $h : x\mapsto\dfrac{x-1}{2x+1}$.

a) Trouver un réel k tel que pour tout $x\in D_h$: $|x+1|\le\dfrac{1}{3}\Rightarrow|h(x)-2|\le k|x+1|$

b) Déterminer : $\lim\limits_{x\to -1} h(x)$.

4. On considère la fonction $k : x\mapsto x^3-2x^2+2x+1$.

a) Trouver un réel λ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $|x|\le 1\Rightarrow|k(x)-1|\le\lambda|x|$.

b) Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} k(x)$.

1.4. LIMITE DE QUELQUES FONCTIONS USUELLES EN UN POINT

Proposition

Soit P et Q deux fonctions polynomiales et $a\in\mathbb{R}$. Alors :

(1) $\lim\limits_{x\to a} P(x)=P(a)$

(2) Si $Q(a)\neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(a)}{Q(a)}$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$

(4) Si $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ alors $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a$

(5) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

(6) Si $a>0$ alors $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$

Exemples

1) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3x^2-5x+6$.

On a f est une fonction polynomiale, par conséquent :

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=4 \quad\text{et}\quad \lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{4} \quad\text{et}\quad \lim_{x\to-\sqrt{2}} f(x)=f\left(-\sqrt{2}\right)=12+5\sqrt{2}$$

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$ par : $g(x)=\dfrac{3x-1}{2x+5}$.

Calculons $\lim\limits_{x\to 7} g(x)$: g étant une fonction rationnelle et de plus $7\in D_g$, donc : $\lim\limits_{x\to 7} g(x)=g(7)=\dfrac{20}{19}$.

3) On a immédiatement :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\tan x=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Scanné avec CamScanner

Applications

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2-7x-1\right)$; $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^{2018}-x^{2017}+2\right)$; $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\left(x^3-5x^2+x+1\right)$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\dfrac{x^2+x}{2x-1}$; $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-6x^2+5x+4}{x^2+4x+3}$

$\lim\limits_{x\to 3}(x-2)^3\left(1-x^2\right)$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2x-1)\left(x^2-5x+3\right)}{\left(5x^2-6\right)\left(1-x+x^2\right)}$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\sin x$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan x$

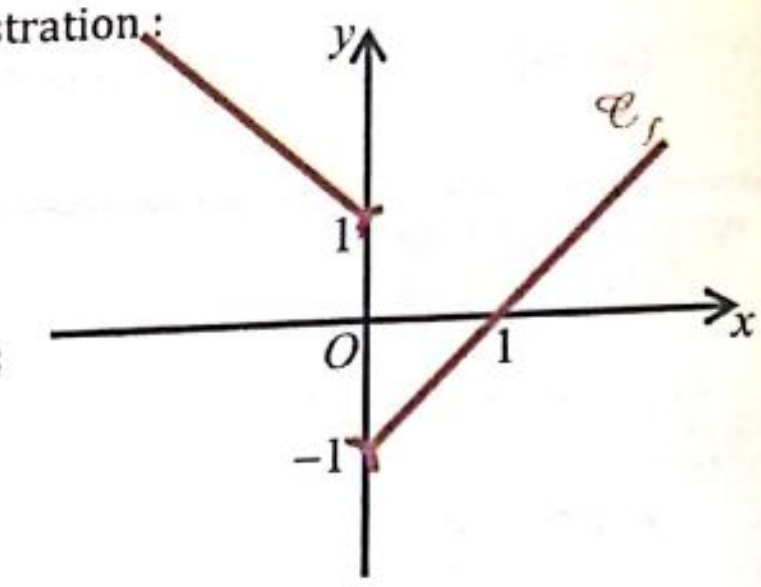
1.5. LIMITE À DROITE – LIMITE À GAUCHE

INTRODUCTION

Pourquoi la limite à gauche et la limite à droite ?

Parfois, il arrive que le comportement d'une fonction f en un point a soit différent « à gauche » de a, c'est-à-dire pour les réels x strictement inférieurs à a, et « à droite » de a, c'est-à-dire pour les réels x strictement supérieurs à a. Voici un exemple simple d'illustration :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|}$



On voit sur le graphe de f que le comportement en 0 n'est pas le même lorsqu'on s'approche de 0 par valeurs négatives ou par valeurs positives. En effet, quand x s'approche de 0 par valeurs inférieures, $f(x)$ s'approche de 1 alors que, par contre quand x s'approche de 0 par valeurs supérieures, $f(x)$ s'approche de -1.

Une telle fonction n'a donc pas de limite en 0.

Néanmoins, si on ne considère que le comportement de $f(x)$ quand x s'approche par valeurs négatives de 0, $f(x)$ s'approche de 1. On dit alors que la limite de f à gauche en 0 est égale à 1 et on note $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$ ou bien $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=1$.

D'autre part, si on ne s'intéresse qu'au comportement de $f(x)$ quand x s'approche de 0 par valeurs positives, $f(x)$ s'approche de -1. On dit alors que la limite de f à droite en 0 est égale à -1 et on note $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=1$.

Un point important à noter est que, dans le cas particulier où les limites à gauche et à droite en un point a d'une fonction f coïncident alors cela signifie que la fonction admet une limite en ce point.

Scanné avec CamScanner

Définition

Soit r un réel strictement positif et $a \in \mathbb{R}$.

- On dit qu'une fonction f, définie sur l'intervalle $]a;a+r[$, admet une limite finie ℓ en a à droite, si les valeurs de $f(x)$ s'approchent de plus en plus de ℓ, lorsque x s'approche de plus en plus de a en prenant des valeurs supérieures à a. Autrement dit :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha > 0)\,:\,(\forall x \in D_f)\ \left(0 < x - a < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\right)$$

Ce réel ℓ, s'il existe, est unique. Il est noté : $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

- On dit qu'une fonction f, définie sur l'intervalle $]a-r;a[$, admet une limite finie ℓ en a à gauche, si les valeurs de $f(x)$ s'approchent de plus en plus de ℓ, lorsque x s'approche de plus en plus de a en prenant des valeurs inférieures à a. Autrement dit :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha > 0)\,:\,(\forall x \in D_f)\ \left(-\alpha < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\right)$$

Ce réel ℓ, s'il existe, est unique. Il est noté : $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ par : $f(x) = \dfrac{|x-1|x}{x^2-1}$.

- Si $x > 1$ alors : $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$; donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

- Si $x < 1$ et $x \neq -1$, alors $f(x) = -\dfrac{x}{x+1}$; donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{-x}{x+1} = -\dfrac{1}{2}$.

Proposition

Soit f une fonction numérique définie au voisinage d'un point a sauf peut-être en a.

Pour que f admet une limite ℓ en a, il faut et il suffit qu'elle admette la limite ℓ à droite et à gauche au point a. Autrement dit : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \left(\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell \text{ et } \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell\right)$

Exemples

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ par : $f(x) = \dfrac{|x-1|x}{x^2-1}$.

On a déjà vu que : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\dfrac{1}{2}$. Puisque $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, alors f n'admet

Scanné avec CamScanner

pas de limite au point $a = 1$.

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ par : $g(x) = \dfrac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$.

- Si $x < -1$ alors : $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; donc : $\lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = 0$.
- Si $x > -1$ alors : $g(x) = -\dfrac{x+1}{x-1}$; donc : $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = 0$.

Puisque $\lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = 0$, alors g admet une limite en -1 et de plus : $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = 0$.

3) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} h(x) = \sin x \ ; \ x \geq \pi \\ h(x) = \cos x \ ; \ x < \pi \end{cases}$.

On a : $\lim\limits_{x \to \pi^+} h(x) = \lim\limits_{x \to \pi^+} \sin x = \sin \pi = 0$ et $\lim\limits_{x \to \pi^-} h(x) = \lim\limits_{x \to \pi^-} \cos x = \cos \pi = -1$

Puisque : $\lim\limits_{x \to \pi^+} h(x) \neq \lim\limits_{x \to \pi^-} h(x)$, alors h n'admet pas de limite en π.

Applications

Étudier la limite de la fonction f au point a dans les cas suivants : ($E(x)$ étant la partie entière de x)

1) $f(x) = \dfrac{|x^2-4|}{x^2-2x}$ et $a = 2$; 2) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x+2} \ ; \ x \geq 0 \\ f(x) = E(x) \quad ; \ x < 0 \end{cases}$ et $a = 0$

2 LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN UN POINT

2.1. LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN ZÉRO

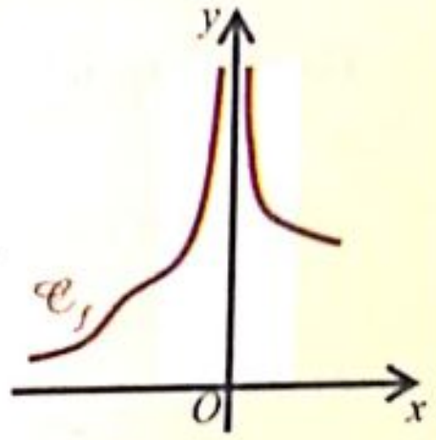
Définition

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de 0 sauf peut-être en 0.

- Dire que f a pour limite 0 en $+\infty$ signifie que $f(x)$ est supérieur à tout réel $A > 0$ quitte à attribuer au réel x des valeurs suffisamment proches de 0.

  Autrement dit : $(\forall A > 0)\ (\exists \alpha > 0); (\forall x \in D_f)\ (0 < |x| < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$

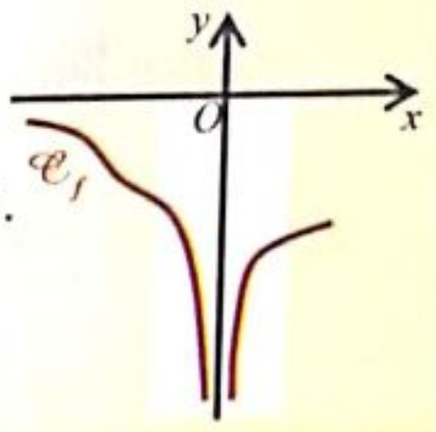
  On écrit : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{0} f = +\infty$



- Dire que f a pour limite $-\infty$ en 0 signifie que $f(x)$ est inférieur à tout réel $-A < 0$ quitte à attribuer au réel x des valeurs suffisamment proches de 0.

  Autrement dit : $(\forall A > 0)\ (\exists \alpha > 0); (\forall x \in D_f)\ (0 < |x| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A)$

  On écrit : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{0} f = -\infty$



Scanné avec CamScanner

4 CONNAISSANCES FONDAMENTALES

LIMITES USUELLES

On a les résultats importants suivants : (déjà vu au cours des activités préparatoires)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{|x|}}=+\infty$$

Remarques

Soit $k\in\mathbb{R}_+^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On a les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{k}{x^n}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{k}{\sqrt{x}}=+\infty$;
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{k}{x^n}=+\infty$ si l'entier n est pair ;
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{k}{x^n}=-\infty$ si l'entier n est impair.

Proposition

Soit f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I=]-r;r[-\{0\}$ où $r\in\mathbb{R}_+^*$.

- Si pour tout $x\in I$: $f(x)\geq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$.
- Si pour tout $x\in I$: $f(x)\leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=-\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$.

Ces propriétés restent valables si x tend vers 0 à droite ou à gauche.

Exemples

1) Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$: On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\sqrt{1+x^2}\geq 1$; par conséquent : $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\geq\dfrac{1}{x^2}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}=+\infty$.

2) Calculons $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2+1}\right)$: On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2+1}\leq\dfrac{1}{x}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2+1}\right)=-\infty$.

3) Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}+2+\sin\dfrac{1}{x}\right)$: On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $-2\leq\sin\dfrac{1}{x}$; donc : $\dfrac{1}{x}\leq\dfrac{1}{x}+2+\sin\dfrac{1}{x}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}+2+\sin\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$.

Scanné avec CamScanner

Applications

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x+x^2}}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2}{x}-1+\cos\dfrac{2}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^4}-\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$

2.2. LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN UN POINT

Définition

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de a sauf peut-être en a..

- Dire que f a pour limite $+\infty$ en a signifie que $f(x)$ est supérieur à tout réel $A>0$ quitte à attribuer au réel x des valeurs suffisamment proches de a. Autrement dit :

$$(\forall A>0)\,(\exists \alpha>0);(\forall x\in D_f)\,(0<|x-a|<\alpha \Rightarrow f(x)>A)$$

On écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{a} f=+\infty$

- Dire que f a pour limite $-\infty$ en a signifie que $f(x)$ est inférieur à tout réel $-A<0$ quitte à attribuer au réel x des valeurs suffisamment proches de a. Autrement dit :

$$(\forall A>0)\,(\exists \alpha>0);(\forall x\in D_f)\,(0<|x-a|<\alpha \Rightarrow f(x)<-A)$$

On écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{a} f=-\infty$

Remarques

- Dire que f a pour limite $+\infty$ en a signifie que la limite de la fonction $h\mapsto f(a+h)$ quand h tend vers 0 est égale à $+\infty$. Ainsi, on a l'équivalence : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=+\infty$.

De même, on a les équivalences suivantes : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0^+} f(a+h)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0^-} f(a+h)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0^+} f(a+h)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0^-} f(a+h)=-\infty$.

- Soit $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On a les limites suivantes :
  - $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{x-a}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{x-a}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{(x-a)^2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{\sqrt{x-a}}=+\infty$.
  - $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{(x-a)^n}=+\infty$ si n est un entier pair.
  - $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{(x-a)^n}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{(x-a)^n}=-\infty$ si n est un entier impair.

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) On a : $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{1}{(x+3)^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{1}{(x-\pi)^3}=-\infty$.

2) Calculons $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\cos^2 x+1}{(x-2)^3}$:

On a pour tout $x\in\left]-\infty;-2\right[$, $\cos^2 x+1\geq1$ et $(x-2)^3<0$; donc : $\dfrac{\cos^2 x+1}{(x-2)^3}\leq\dfrac{1}{(x-2)^3}$.

Comme $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{(x-2)^3}=-\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\cos^2 x+1}{(x-2)^3}=-\infty$.

Applications

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3}{(x+1)^2}$; $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{1}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\tan^2 x+1}{(x+1)^2}$; $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^3-1}{(x-1)^3}$

$\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\left|\sin\dfrac{2}{(x-2)^2}\right|\right)$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\times\dfrac{1}{(x-1)^{2019}}$; $\lim\limits_{x\to-4^-}\dfrac{E(x)}{(x+4)^3}$.

3 LIMITE FINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN $+\infty$ ET $-\infty$

3.1. LIMITE NULLE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN $+\infty$ ET $-\infty$

Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

- On dit que f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si son ensemble de définition contient au moins un intervalle de la forme $\left]A,+\infty\right[$ (resp. de la forme $\left]-\infty,A\right[$).
- On dit que f définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) admet en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) une limite nulle si, pour $x\in D_f$, $\left|f(x)\right|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut à condition que x (resp. $-x$) soit suffisamment grand.

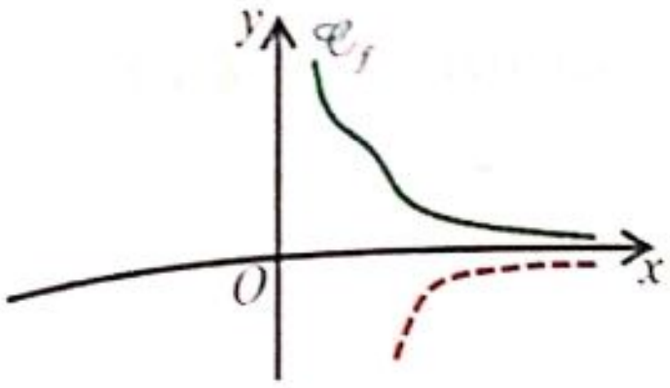
On écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ou $\lim\limits_{+\infty}f=0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ ou $\lim\limits_{-\infty}f=0$).

On a donc :

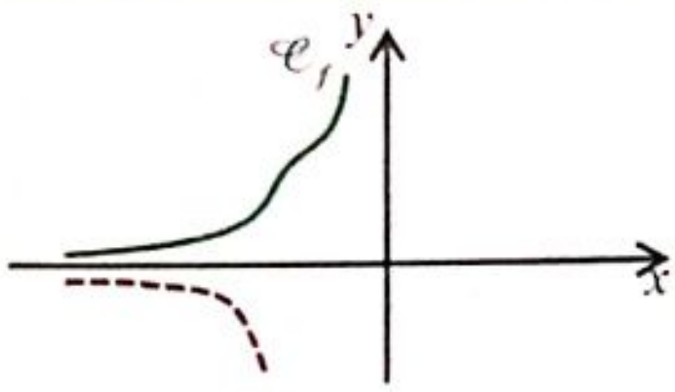
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0\Leftrightarrow\left[(\forall\varepsilon>0)(\exists B>0)\,;\,(\forall x\in D_f)\ \left(x>B\Rightarrow\left|f(x)\right|<\varepsilon\right)\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0\Leftrightarrow\left[(\forall\varepsilon>0)(\exists B>0)\,;\,(\forall x\in D_f)\ \left(x<-B\Rightarrow\left|f(x)\right|<\varepsilon\right)\right]$$

Scanné avec CamScanner



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

LIMITES USUELLES

On a les résultats importants suivants : (déjà vu au cours des activités préparatoires)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{|x|}}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{|x|}}=0$$

Exemple

Montrons en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=0$.

On considère la fonction $f : x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Montrons que la proposition suivante est vraie :

$$P : \text{" } (\forall\varepsilon>0)\,(\exists B>0)\,;\,(\forall x\in D_f)\ \left(x>B\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon\right) \text{ "}$$

Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $x\in]1;+\infty[$, on a : $|f(x)|<\varepsilon \Leftrightarrow x^2-1>\dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x>\sqrt{1+\dfrac{1}{\varepsilon}}$.

Donc il suffit de prendre : $B=\sqrt{1+\dfrac{1}{\varepsilon}}$. On a bien $B>0$ et pour tout $x\in D_f$:

$$x>B\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon$$

Ainsi, la proposition P est vraie et donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=0$.

Remarques

- De la définition précédente, on obtient l'équivalence : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)=0$.
- Soit $k\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{k}{x^n}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{k}{x^n}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{k}{\sqrt{x}}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{k}{\sqrt{-x}}=0$$

- Lorsqu'on écrit $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=0$, cela signifie que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

Scanné avec CamScanner

3.2. LIMITE FINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN $+\infty$ ET $-\infty$

Définition

• Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et ℓ un nombre réel.

On dit que la fonction f a pour limite ℓ quand x tend vers $+\infty$ si la limite de la fonction $x \mapsto f(x)-\ell$ est nulle quand x tend vers $+\infty$ et on écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ ou $\lim\limits_{+\infty} f=\ell$. Autrement dit :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow \left[(\forall \varepsilon>0)\,(\exists B>0)\,;\ (\forall x\in D_f)\ \ (x>B \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon)\right]$$

• Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$ et ℓ un nombre réel.

On dit que la fonction f a pour limite ℓ quand x tend vers $-\infty$ si la limite de la fonction $x \mapsto f(x)-\ell$ est nulle quand x tend vers $-\infty$ et on écrit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$ ou $\lim\limits_{-\infty} f=\ell$. Autrement dit :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow \left[(\forall \varepsilon>0)\,(\exists B>0)\,;\ (\forall x\in D_f)\ \ (x<-B \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon)\right]$$

Exemple

On considère la fonction $f: x\mapsto \dfrac{2x^2-3}{x^2+1}$. Montrons en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$.

On va montrer que : $(\forall \varepsilon>0)\,(\exists B>0)\,;\ (\forall x\in D_f)\ \ (x<-B \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon)$

Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $x\in\mathbb{R}_-^*$, on a : $|f(x)-2|=\dfrac{5}{x^2+1}$ et $\dfrac{5}{x^2+1}\le\dfrac{5}{x^2}$; par conséquent :

$$(\forall x\in\mathbb{R}_-^*)\ \ |f(x)-2|\le\frac{5}{x^2}$$

Pour avoir $|f(x)-2|<\varepsilon$, il suffit d'avoir : $\dfrac{5}{x^2}<\varepsilon$, c'est-à-dire : $x^2>\dfrac{5}{\varepsilon}$ et donc : $x<-\sqrt{\dfrac{5}{\varepsilon}}$ (car $x<0$)

Par suite, il suffit de prendre : $B=\sqrt{\dfrac{5}{\varepsilon}}$. On a bien $B>0$ et pour tout $x\in D_f$: $x<-B \Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$.

Proposition

• Soit f et u deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$ et ℓ un nombre réel.

Si pour tout $x\in I$: $|f(x)-\ell|\le u(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.

• Soit f et u deux fonctions définies au voisinage de $-\infty$ et ℓ un nombre réel.

Si pour tout $x\in I$: $|f(x)-\ell|\le u(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=0$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$.

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}+3\sin x}{\sqrt{x}}$. Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

On a pour tout $x>0$: $f(x)=1+\dfrac{3\sin x}{\sqrt{x}}$, donc : $\left|f(x)-1\right|\le\dfrac{3}{\sqrt{x}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x}}=0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

2) On considère la fonction $g: x\mapsto\dfrac{\cos x}{x^3-1}$. Déterminons $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$:

On a pour tout $x<0$: $\left|g(x)\right|\le\dfrac{1}{\left|x^3-1\right|}$ (car $\left|\cos x\right|\le 1$), donc : $\left|g(x)\right|\le\dfrac{1}{1-x^3}\le-\dfrac{1}{x^3}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x^3}=0$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$.

Applications

1. Montrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)=-1$

2. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4-2}{x^4+4}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+2+\cos x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\pi\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

3. Soit la fonction $h: x\mapsto\dfrac{2x^2-\sin^2(\pi x)}{x^2}$. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$.

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\cos x}-1}{x^2}$.

a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sqrt{1+\cos x}}\times\dfrac{1}{x^2}$.

b) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $\left|f(x)\right|\le\dfrac{1}{x^2}$ puis déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

4 LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION EN $+\infty$ ET $-\infty$

4.1. INTRODUCTION

Une fonction f définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) admet en $+\infty$ (resp. $-\infty$) la limite $+\infty$ si, pour tout $x\in D_f$, $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut dès que x (resp. $-x$) prend des valeurs suffisamment grandes.

On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f=+\infty$).

Une fonction f admet pour limite $-\infty$ si la fonction $(-f)$ admet pour limite $+\infty$.

On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f=-\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f=-\infty$).

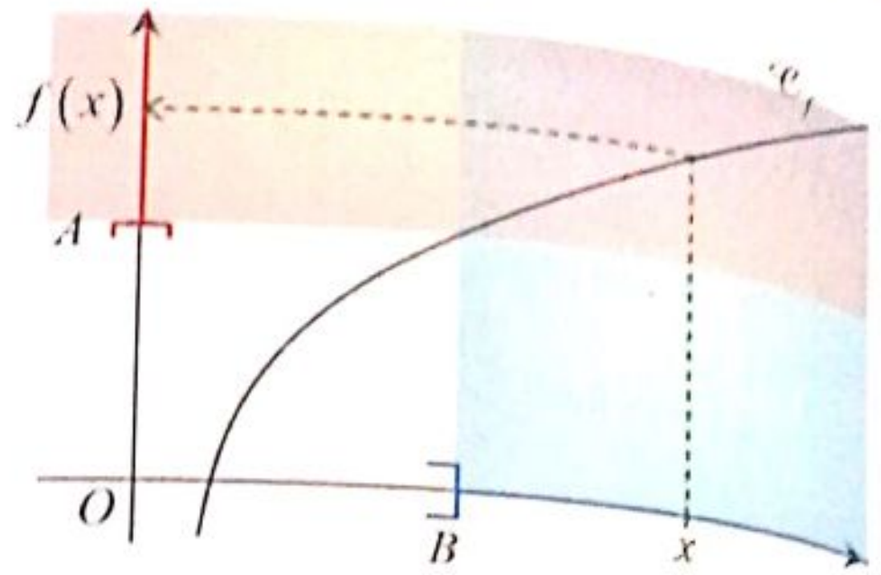
Scanné avec CamScanner

Illustrations graphiques

• Dire que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie :

aussi grand que soit le réel strictement positif A, il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout $x > B$, $f(x)$ est dans l'intervalle $]A; +\infty[$. (Figure ci-contre)

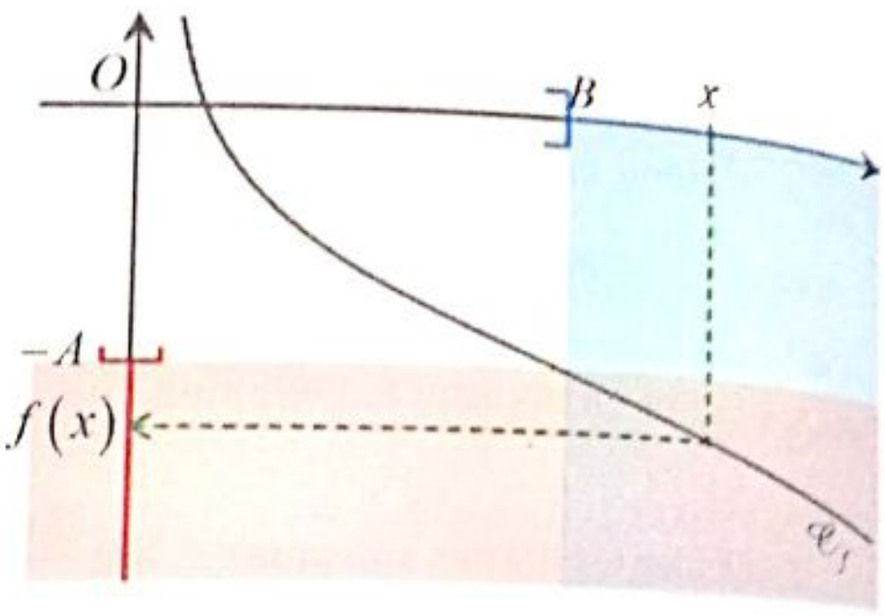
Graphiquement cela signifie qu'étant donnée une droite d'équation $y = A$, la courbe représentative de f est au-dessus de cette droite à partir d'un certain rang $B > 0$. On a donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



• Dire que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ signifie :

aussi grand que soit le réel strictement positif A, il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout $x > B$, $f(x)$ est dans l'intervalle $]-\infty; -A[$. (Figure ci-contre)

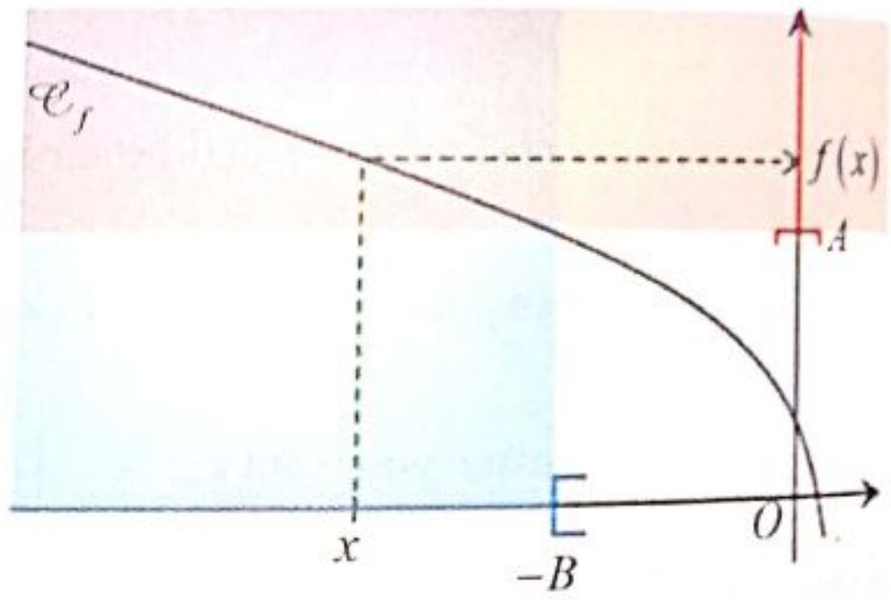
Graphiquement cela signifie qu'étant donné une droite d'équation $y = -A$, la courbe représentative de f est en-dessous de cette droite à partir d'un certain rang $B > 0$. On a donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.



• Dire que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ signifie :

aussi grand que soit le réel strictement positif A, il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout $x < -B$, $f(x)$ est dans l'intervalle $]A; +\infty[$. (Figure ci-contre)

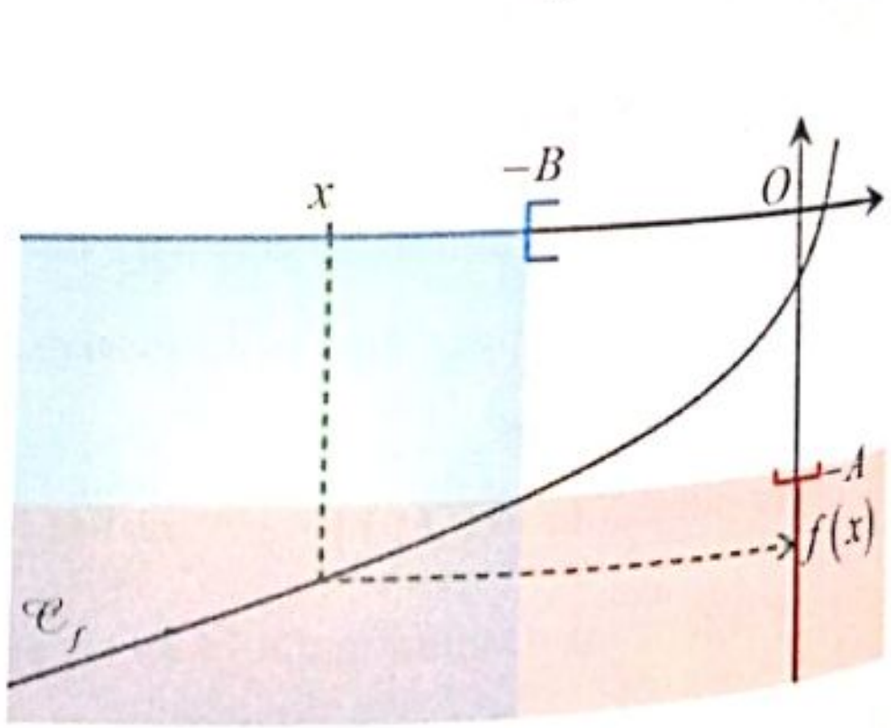
Graphiquement cela signifie qu'étant donné une droite d'équation $y = A$, la courbe représentative de f est au-dessus de cette droite à partir d'un certain rang $-B > 0$. On a donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.



• Dire que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ signifie :

aussi grand que soit le réel strictement positif A, il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout $x < -B$, $f(x)$ est dans l'intervalle $]-\infty; -A[$. (Figure ci-contre)

Graphiquement cela signifie qu'étant donné une droite d'équation $y = -A$, la courbe représentative de f est en-dessous de cette droite à partir d'un certain rang $-B > 0$. On a donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.



Scanné avec CamScanner

Définition

- Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.

On a les deux équivalences suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \left[(\forall A>0)\,(\exists B>0)\,;\ (\forall x\in D_f)\ \ (x>B \Rightarrow f(x)>A)\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left[(\forall A>0)\,(\exists B>0)\,;\ (\forall x\in D_f)\ \ (x>B \Rightarrow f(x)<-A)\right]$$

- Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$.

On a les deux équivalences suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \left[(\forall A>0)\,(\exists B>0)\,;\ (\forall x\in D_f)\ \ (x<-B \Rightarrow f(x)>A)\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left[(\forall A>0)\,(\exists B>0)\,;\ (\forall x\in D_f)\ \ (x<-B \Rightarrow f(x)<-A)\right]$$

LIMITES USUELLES

On a les résultats importants suivants : (déjà vu au cours des activités préparatoires)

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{-x} = +\infty$$

Remarques

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si l'entier n est pair et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ si l'entier n est impair.

4.2. LIMITES INFINIES ET ORDRE

Proposition

- Soit f et u deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$.
  - Si pour tout $x\in I$: $f(x)\geq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
  - Si pour tout $x\in I$: $f(x)\leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
- Soit f et u deux fonctions définies au voisinage de $-\infty$.
  - Si pour tout $x\in I$: $f(x)\geq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
  - Si pour tout $x\in I$: $f(x)\leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = -\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+\cos x-1$. Déterminons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\cos x\le 1$; donc : $f(x)\le x$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=5x^2-E(x^2)$. Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $E(x^2)\le x^2$; donc : $g(x)\ge 4x^2$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

Applications

1. On considère la fonction $f: x\mapsto 5x^2+x\sqrt{x^2+1}$.

a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $f(x)\ge 5x^2$ puis en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2. On considère la fonction $g: x\mapsto |x|+1-\sin(2x+1)$.

a) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ |x|\le g(x)$.

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

3. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2(2+\sin x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-1+\cos x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-E(x)\right)$.

5 OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

5.1. OPÉRATIONS SUR LES LIMITES FINIES

INTRODUCTION

Il n'est pas toujours facile de déterminer une majoration, une minoration ou un encadrement convenable pour une fonction pour calculer sa limite en un point a ou à l'infini ! Ceci explique l'usage fréquent des techniques de calculs et le recours systématique aux opérations suivantes que l'on admettra.

Proposition

Soit f et g deux fonctions numériques et $a\in\mathbb{R}$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell'$ alors :

(1) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\ell+\ell'$ (2) $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x)=\ell\ell'$ (3) $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|\ell|$

(4) Si $\ell'\neq 0$ alors : $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x)=\frac{1}{\ell'}$ et $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\ell}{\ell'}$.

(5) Si $k\in\mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x\to a}(kf)(x)=k\ell$ (6) Si $\ell>0$ alors $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\ell}$

Scanné avec CamScanner

Remarques

- Ces propriétés restent aussi valables quand x tend vers a à droite ou à gauche ou $+\infty$ ou $-\infty$.
- On peut démontrer ces propriétés en utilisant la définition de la limite finie en un point.

Exemples

1) Calculons la limite : $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2+x+1+\dfrac{x+1}{x^2+2}-\sqrt{3x+1}\right)$

On pose : $f(x)=3x^2+x+1+\dfrac{x+1}{x^2+2}-\sqrt{3x+1}$. On a : $D_f=\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

- La fonction $f_1 : x\mapsto 3x^2+x+1$ est polynomiale ; donc : $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)=f_1(1)=5$;
- La fonction $f_2 : x\mapsto \dfrac{x+1}{x^2+2}$ est rationnelle ; donc : $\lim\limits_{x\to 1} f_2(x)=f_2(1)=\dfrac{2}{3}$;
- La fonction $f_3 : x\mapsto 3x+1$ est polynomiale ; donc : $\lim\limits_{x\to 1} f_3(x)=f_3(1)=4$ et $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{f_3(x)}=\sqrt{4}=2$.

Il s'ensuit donc que : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)+\lim\limits_{x\to 1} f_2(x)-\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{f_3(x)}=5+\dfrac{2}{3}-2=\dfrac{11}{3}$.

En résumé : $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2+x+1+\dfrac{x+1}{x^2+2}-\sqrt{3x+1}\right)=\dfrac{11}{3}$

2) Calculons la limite : $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos x}{\dfrac{x}{\pi}+2}\times\sqrt{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to\pi}\cos x=\cos\pi=-1$ et $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\dfrac{x}{\pi}+2\right)=3$ et $\lim\limits_{x\to\pi}\sqrt{x}=\sqrt{\pi}$; d'où : $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos x}{\dfrac{x}{\pi}+2}\times\sqrt{x}=-\dfrac{\sqrt{\pi}}{3}$.

3) Calculons la limite : $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1-x}{x}+(x+3)\left|x^2-2\right|\right)$

En suivant la même façon des exemples précédents, on obtient :

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x}{x}+(x+3)\left|x^2-2\right|\right)=\frac{1-1}{1}+(1+3)\left|1^2-1\right|=0+4\times 1=4$$

Applications

1. On considère la fonction $f : x\mapsto x^3+x^2+\dfrac{3x}{x+1}-2\sqrt{x^2-1}$.

   Calculer : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

2. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-1\right)\ ;\ \lim_{x\to 1^-}\left(\pi-\frac{1}{x^3}\right)\left(\frac{1}{\pi}+2x\right)\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-1}{3x^2+4}\ ;\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3x+\cos x}{2\sin x}+2x\tan x\right)$$

Scanné avec CamScanner

5.2. LIMITES FINIES ET ORDRE

Proposition

Soit f , g et h trois fonctions définies sur un ensemble $I=]a-r;a+r[-\{a\}$ où $a\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$.

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ et f est positive sur I , alors : $\ell\geq 0$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell'$ et $f\leq g$ sur I , alors : $\ell\leq\ell'$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to a} h(x)=\ell$ et $g\leq f\leq h$ sur I , alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$.

Remarque

Ces propriétés restent aussi valables quand x tend vers a à droite ou à gauche ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemples

1) Calculons la limite : $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x^4\right)\sin\dfrac{1}{x}$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $-1\leq\sin\dfrac{1}{x}\leq 1$ et $x^2+x^4\geq 0$; il en résulte donc :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right)\ -x^2-x^4\leq\left(x^2+x^4\right)\sin\frac{1}{x}\leq\left(x^2+x^4\right)$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x^4\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2-x^4\right)=0$, alors : $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x^4\right)\sin\dfrac{1}{x}=0$

2) Calculons la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{E(x)}{x}$.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$: $x-1\leq E(x)\leq x$; par conséquent : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ 1-\dfrac{1}{x}\leq\dfrac{E(x)}{x}\leq 1$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{E(x)}{x}=1$.

Applications

1. On considère la fonction $f:x\mapsto\dfrac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $1\leq f(x)\leq 1+\dfrac{1}{x}$ puis en déduire la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x^2+\cos x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\cos x}{3x+\sin x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\cos x}{1+\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sin x}{x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{2-\cos x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\cos x}{3-\cos x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{E\left(\sqrt{x}\right)}{x}$

Scanné avec CamScanner

5.2. OPÉRATIONS SUR LE LIMITES INFINIES

On admet toutes les opérations suivantes.

Dans ce qui suit, a est un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$; ℓ et ℓ' sont deux nombres réels.

Ces opérations restent valables pour les limites à droite et à gauche en a.

L'abréviation « $F.I$ » signifie « Forme indéterminée », c'est-à-dire qu'on ne peut pas conclure la limite immédiatement et tout résultat est possible.

LIMITE D'UNE SOMME DE DEUX FONCTIONS

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I$

LIMITE D'UN PRODUIT DE DEUX FONCTIONS

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a}(f\times g)(x)$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I$

LIMITE D'UN QUOTIENT DE DEUX FONCTIONS

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou 0^+	$\ell>0$ ou 0^+	$\ell<0$ ou 0^-	$\ell<0$ ou 0^-	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$

LIMITE DE L'INVERSE D'UNE FONCTION

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x+2+\dfrac{1}{x^2}\right)$:

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x+2\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$; par conséquent : $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x+2+\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty$.

2) On considère la fonction $f: x\mapsto \dfrac{x^3+1}{(x-1)^3}$. Calculons $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

- Calcul de $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^3+1\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)^3=0^-$; Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$.

- Calcul de $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^3+1\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)^3=0^+$; Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$.

- Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*-\{1\}$: $f(x)=\dfrac{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^3}=\dfrac{1+\dfrac{1}{x^3}}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^3}$.

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^3=1$.

Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{1}=1$.

3) On considère la fonction $f: x\mapsto 2x^3+x^2-x+4$. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

On pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $f(x)=2x^3\left(1+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)$. De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^3}=0$;

par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)=1$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

On a de même : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2x^3}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3=-\infty$, d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

4) On considère la fonction $f: x\mapsto \dfrac{x+1}{x^2-2x}$. Calculons : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

Le tableau de signe du trinôme x^2-2x est :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2-2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Scanné avec CamScanner

• Calcul de $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-2x)=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-2x)=0^-$

Par suite : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

• Calcul de $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to 2^+}(x+1)=3$ et $\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-2x)=0^+$; par suite : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$.

Applications

1. Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+x^2\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-x^2+x+1\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{x^2+2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2+x}{(x-2)^2}$

$\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x}{3-x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{(1-x)^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2018}}{x^{2019}+1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{(1-x)^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\left(3-\sqrt{x}\right)$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{0;1\}$ par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x(x+1)}$.

Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$.

Remarques

• L'obtention d'une forme indéterminée « $F.I$ » signifie que la méthode mise en place pour calculer la limite de la fonction trébuche. Cela ne signifie en aucun cas que la fonction n'a pas de limite.
Des méthodes seront présentées au fur et à mesure, pour lever les indéterminations les plus classiques, à savoir : « $\dfrac{0}{0}=F.I$ » ; « $\dfrac{\infty}{\infty}=F.I$ » ; « $0\times\infty=F.I$ » ; « $+\infty+(-\infty)=F.I$ ».

Parmi ces méthodes, on peut citer jusqu'à présent les techniques suivantes :

- Factoriser par le (les) terme(s) de plus haut degré si un terme est prépondérant.
- Factoriser par $x-a$ si a est racine d'un polynôme P : $P(x)=(x-a)P'(x)$.
- Multiplier par l'expression conjuguée : $\left(X-\sqrt{Y}\right)\left(X+\sqrt{Y}\right)=X^2-Y$.
- Encadrement, majoration, minoration,.....

• Les tableaux précédents donnent les résultats les plus classiques des limites rencontrées.
Voici trois conseils pour bien manipuler ces tableaux :

- Par exemple, on retiendra que diviser par 0^+, c'est multiplier par $+\infty$;
- Il est souhaitable de comprendre ces tableaux au lieu de les apprendre par cœur.
- Une manière de lire ces tableaux est la suivante, mais attention **NE JAMAIS L'ECRIRE SUR SA COPIE** : « $+\infty-(-\infty)=+\infty$ » ; « $-\infty+\ell=-\infty$ » ; « $-\infty\times(-\infty)=+\infty$ »

« $\dfrac{3}{-\infty}=0$ » ; « $\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$ » ; « $\dfrac{+\infty}{0^+}=+\infty$ »

Scanné avec CamScanner

6 QUELQUES MÉTHODES POUR LEVER UNE INDÉTERMINATION

6.1. LIMITES D'UNE FONCTION POLYNÔME EN $+\infty$ ET $-\infty$

LIMITES D'UNE FONCTION RATIONNELLE EN $+\infty$ ET $-\infty$

Soit $P(x)$ une fonction polynôme de degré n : $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ où a_n, a_{n-1}, ..., a_1 et a_0 des nombres réels avec $a_n\neq 0$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $P(x)=a_nx^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}.\frac{1}{x}+\ldots+\frac{a_1}{a_n}.\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n}.\frac{1}{x^n}\right)$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^k}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^k}=0$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}.\frac{1}{x}+\ldots+\frac{a_1}{a_n}.\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n}.\frac{1}{x^n}\right)=1$;

par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}a_nx^n$. De même, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}a_nx^n$.

Soit $f=\frac{P}{Q}$ une fonction rationnelle telle que : $P(x)$ est une fonction polynôme de degré n et $Q(x)$ est une fonction polynôme de degré p. On pose : $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ et $Q(x)=b_px^p+\ldots+b_1x+b_0$

On a pour tout $x\in D_f-\{0\}$: $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_nx^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}.\frac{1}{x}+\ldots+\frac{a_1}{a_n}.\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n}.\frac{1}{x^n}\right)}{b_px^p\left(1+\frac{b_{p-1}}{b_p}.\frac{1}{x}+\ldots+\frac{b_1}{b_p}.\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{b_0}{b_p}.\frac{1}{x^n}\right)}$.

Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}.\frac{1}{x}+\ldots+\frac{a_1}{a_n}.\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n}.\frac{1}{x^n}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{b_{p-1}}{b_p}.\frac{1}{x}+\ldots+\frac{b_1}{b_p}.\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{b_0}{b_p}.\frac{1}{x^n}\right)=1$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n}{b_px^p}$ et de la même façon : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{a_nx^n}{b_px^p}$.

Proposition

Soit P et Q deux fonctions polynômes définies par :

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \quad \text{et} \quad Q(x)=b_px^p+b_{p-1}x^{p-1}+\ldots+b_1x+b_0$$

où a_n, ..., a_1, a_0, b_p, ..., b_0 des réels tels que : $a_n\neq 0$ et $b_p\neq 0$.

- La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ et $-\infty$ est la limite du monôme de plus haut degré :

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}a_nx^n \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}a_nx^n$$

- La limite d'une fonction rationnelle $+\infty$ et $-\infty$ est la limite du quotient des monômes de plus haut degré :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n}{b_px^p} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a_nx^n}{b_px^p}.$$

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) On considère le polynôme : $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x + 7$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$

2) Calculons les limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x - 2x^2)^3 (5x^2 - 6x + 2)^2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[(1-2x)^3 + 4x(2x^2 - 3x + 5)\right]$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x - 2x^2)^3 (5x^2 - 6x + 2)^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^2)^3 (5x^2)^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} -200x^{10} = -\infty$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(1-2x)^3 + 4x(2x^2 - 3x + 5) = 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3 + 8x^3 - 12x^2 + 20x = 14x + 1$$

Par suite : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[(1-2x)^3 - 4x(2x^2 - 3x + 5)\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} (14x + 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} 14x = -\infty$.

3) On considère la fonction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{-5x^3 + x^2 + 1}{2x + 3}$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-5x^3}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{5}{2}x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-5x^3}{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{5}{2}x^2 = -\infty$

4) Calculons les limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{3x^2 + x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2 + x - 7}{3x^2 + 2x + 1}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 4x + 17}{2x^2 - 5}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{3x^2 + x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{3x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2 + x - 7}{3x^2 + 2x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{3} = -\dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 4x + 17}{2x^2 - 5} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{2x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{2} = -\infty$.

Applications

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^2 + x + 1)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3 + 5x^2 + x + 1)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 - 4x)^3 (5x + 1)^2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x + 5}{x^2 + 1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 4x}{2x^2 + 1}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 7}{x^3 + 2x + 1}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + 3}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x - 1}$

Proposition

Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle de la forme $[A; +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

Remarque

Ces propriétés restent aussi valables quand x tend vers $-\infty$ ou vers a à droite ou à gauche.

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-x+4}$:

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^2-x+4\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}3x^2=+\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-x+4}=+\infty$.

2) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}=+\infty$.

3) Calculons $\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{3-\dfrac{1}{x}}$:

On a : $\lim\limits_{x\to0^-}\left(3-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{3-\dfrac{1}{x}}=+\infty$.

6.2. LIMITES DU TYPE $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ AVEC $f(a)=g(a)=0$

Pour lever une forme indéterminée lorsqu'il s'agit des limites aux réels a qui annulent le dénominateur, on peut :

- Factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x-a)$ ou $\sqrt{x-a}$ ou $(x-a)^n$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$), puis simplifier.
- Utiliser la technique de la quantité conjuguée, si l'expression contient des racines carrées, et on simplifie.
- Utiliser les formules suivantes :
  - Si $x_0\in\mathbb{Z}$: $\lim\limits_{x\to x_0^-}E(x)=x_0$ et $\lim\limits_{x\to x_0^-}E(x)=x_0-1$
  - Si $x_0\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$: $\lim\limits_{x\to x_0}E(x)=E(x_0)$.

Exemples

1) Calculons les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-x^3+2x^2+x-2}{-x^2+5x-6}$ et $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+2x-3}{x^2+2x-3}$

- $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-x^3+2x^2+x-2}{-x^2+5x-6}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(1-x^2)}{(x-2)(-x+3)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1-x^2}{-x+3}=-3$.

- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+2x-3}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+3)}{(x-1)(x+3)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+3}{x+3}=\dfrac{5}{4}$.

2) Calculons les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}$ et $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}-2}$

Scanné avec CamScanner

$$\bullet \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left[(2x-1)-\left(x^2-x+1\right)\right]\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(-x^2+3x-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(-x+2)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(-x+2)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}$$

Comme : $\lim\limits_{x\to 1}(-x+2)\left(\sqrt{x}+1\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)=2$, alors :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}=\frac{2}{2}=1$$

• On a : $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x+7}-4+3-\sqrt{x}}{\sqrt{x+16}-5+3-\sqrt{x}}$; par conséquent :

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 9}\frac{\dfrac{x-9}{\sqrt{x+7}+4}+\dfrac{9-x}{3+\sqrt{x}}}{\dfrac{x-9}{\sqrt{x+16}+5}+\dfrac{9-x}{3+\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 9}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x+7}+4}-\dfrac{1}{3+\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x+16}+5}-\dfrac{1}{3+\sqrt{x}}}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{10}-\frac{1}{6}}=\frac{5}{8}.$$

Par suite : $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}-2}=\dfrac{5}{8}$.

Applications

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 3}\frac{-x^2+x+6}{x^2-4x+3}\ ;\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-6x^2+11-6}{x^5-32}\ ;\ \lim_{x\to -1}\frac{2-\sqrt{1-3x}}{x^2-1}\ ;\ \lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}\ ;\ \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}$$

2. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{x+1}{|2x+3|-1}\ ;\ \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{x-1}\ ;\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-\sqrt{x+2}}\ ;\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^3-27}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1-x}}\ ;\ \lim_{x\to -1^+}\frac{\sqrt{x^2+x}+3x+3}{x+1}\ ;\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+x+1}-1}\ ;\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-x^2+x+4}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x}+1}$$

Scanné avec CamScanner

6.3. LIMITES DU TYPE $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta)$

Pour calculer une limite du type $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta\right)$, deux questions se posent alors :

- La limite à calculer peut-elle s'obtenir de façon directe à l'aide des règles d'opérations sur les limites et des limites classique ? Dans ce cas, il n'y a donc pas de forme indéterminée à l'horizon et les calculs se font simplement.
- La limite à déterminer fait-elle surgir une forme indéterminée ? Dans ce cas, il faut lever l'indétermination. Pour cela, deux grandes techniques peuvent en général être adoptées :
  - La première méthode consiste à mettre en facteur les termes « termes dominantes » et la conclusion provient alors de l'utilisation des propriétés d'opérations sur les limites et des limites de référence.
  - La deuxième méthode consiste à utiliser le conjugué. Cette méthode est applicable là où le calcul de la limite fait apparaître une expression de la forme $\sqrt{A}+B$ ou $\sqrt{A}-B$ ou $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ ou encore $\sqrt{A}-\sqrt{B}$. Il suffit de multiplier par la quantité conjuguée de cette expression (c'est-à-dire la même expression en changeant le signe « $-$ » en « $+$ » et vice versa).

    Les identités $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ et $a^3\pm b^3=(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right)$ permettent de simplifier les calculs et de conclure.

Voici enfin un truc pour enlever l'indétermination concernée :

- Si $\sqrt{a}\neq\alpha$, il suffit de factoriser par x en utilisant les égalités suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}\quad\text{et}\quad\lim_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=\lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}$$

- Si $\sqrt{a}=\alpha$, on multiple et on divise par le conjugué puis, si nécessaire, on factorise par x au numérateur et au dénominateur puis simplifier par x.

Signalons au passage que cette démarche est adaptable avec la plupart des limites du type $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(P(x)\pm\sqrt{Q(x)}\right)$ où P et Q sont des polynômes.

Exemples

1) Calculons les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+x-1}-4x+3\right)$

- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

  Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=2$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=+\infty$.

  Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x}\right)=+\infty$

- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+x-1}-4x+3\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-4x+3\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-4+\frac{3}{x}\right)$.

Scanné avec CamScanner

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=5$ et par conséquent :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-4+\frac{3}{x}\right)=\sqrt{5}-4$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-4+\frac{3}{x}\right)=-\infty$.

Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+x-1}-4x+3\right)=-\infty$.

2) Calculons les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x-7}+2x+5\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

• On a :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x-7}+2x+5\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^2+3x-7-4x^2}{\sqrt{4x^2+3x-7}-2x}+5\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-7}{\sqrt{4x^2+3x-7}-2x}+5\right)$$

Donc :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x-7}+2x+5\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{-x\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}-2x}+5\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3-\frac{7}{x}}{-\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}-2}+5\right)$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3-\frac{7}{x}}{-\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}-2}+5\right)=\frac{3-0}{-\sqrt{4}-2}+5=-\frac{3}{4}+5=\frac{17}{4}$.

Par suite : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x-7}+2x+5\right)=\frac{17}{4}$.

• On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x^2-1}{x-\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$.

Comme $x-\sqrt{x^2+1}\le x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=-\infty$.

En définitive : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=0$.

Applications

1. Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-x-2}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+3x^2+4}-x^2+2\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2-6x-1}+2x-5\right)$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x-3\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+3x^2+4}-x^2+2\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1-x^3}+x-1\right)$

2. Calculer suivant les valeurs du paramètre réel m, la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+mx\right)$

3. Soit a, b et c trois réels non nuls tels que $a>0$. Calculer suivant les valeurs de a la limite suivante :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$$

Scanné avec CamScanner

6.4. LIMITES DE FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Proposition

Soit a un réel non nul. On a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{ax}=1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Exemples

1) Calculons les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{\tan x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\pi x)-1}{x}$

• On a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin(2x)}{2x}\times 2x}{\dfrac{\sin(3x)}{3x}\times 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\dfrac{\sin(2x)}{2x}}{\dfrac{\sin(3x)}{3x}}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{1}=\dfrac{2}{3}$. Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}=\dfrac{2}{3}$

• On a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin(3x)}{3x}\times 3x}{\dfrac{\tan x}{x}\times x}=\lim\limits_{x\to 0}3\dfrac{\dfrac{\sin(3x)}{3x}}{\dfrac{\tan x}{x}}=3\times\dfrac{1}{1}=3$. Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{\tan x}=3$

• On a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\pi x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\pi x)}{(\pi x)^2}\times(-\pi^2 x)$. En posant $X=\pi x$ on obtient :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\pi x)-1}{x}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{1-\cos(X)}{X^2}\times(-\pi X)=\dfrac{1}{2}\times 0=0$. Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\pi x)-1}{x}=0$.

2) Calculons la limite : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\dfrac{\pi}{6}}$.

On a : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\dfrac{\pi}{6}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{x-\dfrac{\pi}{6}}$. En posant $X=x-\dfrac{\pi}{6}$, on obtient :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}=2\lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=2$$

Applications

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{\sin(4x)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(6x)}{\sin(4x)\tan(3x)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3(2x)}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan(x-1)}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan(\pi x)}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{x-\dfrac{\pi}{4}}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{x-\dfrac{\pi}{3}}$

Scanné avec CamScanner

A LIMITES DE FONCTIONS ET ORDRE

1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^3} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}\right)$$

2) Soit h une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ x^3-3x^2<h(x)<x^3+x^2$

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x^3}$

3) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{2E(x)+\left(x-E(x)\right)^2}{x^2}$

a) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$. La fonction f admet-elle une limite en 0 ? Justifier la réponse.

b) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

SOLUTION

1) Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\le 1$; par conséquent : $\left|x^2\sin\dfrac{1}{x}\right|\le x^2$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$, alors : $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x^3}$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $|\cos x|\le 1$; par conséquent : $\left|\dfrac{\cos x}{x^3}\right|\le\dfrac{1}{x^3}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x^3}=0$.

Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $-1\le\cos x\le 1$ et $-1\le\sin x\le 1$; Il en résulte donc : $0\le\dfrac{1+\sin x}{2+\cos x}\le 2$ et alors :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right)\quad 0\le\frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}\le\frac{2}{x^2}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2}=0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}=0$.

Scanné avec CamScanner

Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}\right)$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on pose : $g(x)=1+\dfrac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $2+\sqrt{x^4+1}\geq\sqrt{x^4}$, c'est-à-dire : $2+\sqrt{x^4+1}\geq x^2$. Donc : $\dfrac{1}{2+\sqrt{x^4+1}}\leq\dfrac{1}{x^2}$

et par suite : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right)\ |g(x)-1|\leq\dfrac{1}{|x|}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1$.

2) Soit h une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ x^3-3x^2<h(x)<x^3+x^2$

- Calculons $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)$:

  On a : $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^3-3x^2\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^3+x^2\right)=0$; donc : $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=0$.

- Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$:

  On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-3x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$.

- Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x^3}$:

  On a pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$: $1-\dfrac{3}{x}<\dfrac{h(x)}{x^3}<1+\dfrac{1}{x}$.

  Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x^3}=1$.

3) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{2E(x)+\left(x-E(x)\right)^2}{x^2}$

a) Calculons $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$:

On a pour tout $x\in\left]0;1\right[$: $E(x)=0$; donc : $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2}=1$. Par suite : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$.

On a pour tout $x\in\left]-1;0\right[$: $E(x)=-1$; donc : $f(x)=\dfrac{-2+\left(x+1\right)^2}{x^2}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to0^-}\left(-2+\left(x+1\right)^2\right)=-1$ et $\lim\limits_{x\to0^-}x^2=0^+$, alors : $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$.

Enfin, puisque $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$, alors f n'admet pas de limite en 0.

b) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$:

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $E(x)\leq x\leq E(x)+1$, donc : $0\leq x-E(x)\leq1$, d'où : $0\leq\left(x-E(x)\right)^2\leq1$.

Scanné avec CamScanner

On en déduit donc que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $2x-2 \leq 2E(x)+\left(x-E(x)\right)^2 \leq 2x+1$.

Comme $x^2 > 0$, alors : $\dfrac{2x-2}{x^2} \leq f(x) \leq \dfrac{2x+1}{x^2}$.

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

De même, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-2}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x} = 0$, d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

En résumé : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.



- On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\sin x| \leq 1$; $|\cos x| \leq 1$; $x \leq E(x) < x+1$.
- On a les formules suivantes :
  - Si $x_0 \in \mathbb{Z}$: $\lim\limits_{x\to x_0^+} E(x) = x_0$ et $\lim\limits_{x\to x_0^-} E(x) = x_0 - 1$
  - Si $x_0 \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$: $\lim\limits_{x\to x_0} E(x) = E(x_0)$
- Voici les résultats du cours à savoir et savoir appliquer : (avec a réel ou infini)

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad ; \quad \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

$$\begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad \text{(Ici } \ell \text{ réel ou infini)}$$

$$\begin{cases} |f(x)-\ell| \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad \text{(Ici } \ell \text{ réel ou infini)}$$

- On rappelle que le passage à la limite fait perdre les inégalités strictes.

Par exemple, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\dfrac{1}{x} > 0$, mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

B OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

On considère les fonctions numériques suivantes définies par :

$$f(x) = \sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right) \; ; \; g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right) \; ; \; h(x) = \frac{1+x^2}{x^3}\sin x \; ; \; k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)}$$

1) Déterminer les limites : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Déterminer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$.

3) Déterminer la limite : $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

4) Calculer les limites de la fonction k aux bornes de son ensemble de définition.

Scanné avec CamScanner

SOLUTION

1) Calcul de $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$ et $\lim\limits_{x\to 2}\left(-3x^2+x\right)=-10$; donc : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\sqrt{5}\times(-10)=-10\sqrt{5}$.

Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}=+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^2+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^2\right)=-\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2) Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{x}\right)=+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2}{x^2}=-2$. Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x}=\sqrt{3}$, donc $\lim\limits_{x\to 3}\left(1+\sqrt{x}\right)=1+\sqrt{3}$.

On a : $\lim\limits_{x\to 3}\left(-2x^2+1\right)=-17$ et $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^2=0^+$; donc : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}=-\infty$. Par suite : $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=-\infty$.

3) Calcul de $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^2}{x^2}\times\dfrac{\sin x}{x}$. De plus : $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0^+$; il s'ensuit donc que :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^2}{x^2}=+\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, alors : $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=+\infty$.

4) L'ensemble de définition de la fonction k est : $D_k=]-\infty;0[\cup]0;2[\cup]2;+\infty[$.

Puisque k est une fonction rationnelle, alors :

$\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3}{x}=0$

On a : $\lim\limits_{x\to 0}(-3x+1)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0} x(x-2)=0$. Étudions le signe de $x(x-2)$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

À partir du tableau ci-contre, on en déduit que :

$\lim\limits_{x\to 0^+} x(x-2)=0^-$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} x(x-2)=0^+$; donc :

$\lim\limits_{x\to 0^+} k(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} k(x)=+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to 2}(-3x+1)=-5$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} x(x-2)=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} x(x-2)=0^-$; donc :

$\lim\limits_{x\to 2^+} k(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} k(x)=-\infty$.

Scanné avec CamScanner

C LEVER L'INDÉTERMINATION

1) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-3x\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}\right)$

2) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x^2+x^3}}{\left|2x+x^2\right|}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}-x-1\right)$

3) Calculer les limites en zéro des fonctions suivantes :

$f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$; $g(x)=\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$; $h(x)=\dfrac{x(1-\cos x)}{\sin(3x)-3\sin x}$

4) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

SOLUTION

1) Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{\left(\sqrt{2x}+2\right)(x-2)(x+5)}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{\left(\sqrt{2x}+2\right)(x+5)}=\frac{1}{14}$$

Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(2x^2+5x+1\right)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+5x+1}{x^2+x+1}=\frac{8}{3}$$

Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}=1$.

Scanné avec CamScanner

Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-3x\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3\right)$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3\right)=-2$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-3x\right)=-\infty$.

Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-1}{x-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}.$$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=+\infty$, d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=0$.

Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0.\ (\text{Car}:\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty\ \text{ et }\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty)$$

Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)(2x-4)}=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2x+5}+3}{2\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x-1}}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x-1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{-2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(\frac{-2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\right)$$

$$=0$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-1}=+\infty$.

Scanné avec CamScanner

2) Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x^2+x^3}}{\left|2x+x^2\right|}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x^2+x^3}}{\left|2x+x^2\right|}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{4x^2+x^3}{\left(2x+x^2\right)^2}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^2(4+x)}{x^2(2+x)^2}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{4+x}{(2+x)^2}}=1$$

Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=-1$

De même : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{x+\sqrt{-x}}{x-\sqrt{-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{-x}\left(-\sqrt{-x}+1\right)}{\sqrt{-x}\left(-\sqrt{-x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sqrt{-x}+1}{-\sqrt{-x}-1}=-1$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}=-1$

Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}-x-1\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\frac{x}{x-1}}-x-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1\right)-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\frac{\dfrac{x}{x-1}-1}{\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}+1}-1\right),\text{ et donc :}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\frac{x}{x-1}}-x-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}+1}-1\right)=\frac{1}{\sqrt{1}+1}-1=-\frac{1}{2}\quad\left(\text{car }\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1\right)$$

3) Calculons les limites en zéro des fonctions suivantes :

On a : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)\tan x}$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\times\dfrac{\sin x}{x}}{\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)\dfrac{\tan x}{x}}=\dfrac{2}{2}=1$

Scanné avec CamScanner

On a : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} \times \dfrac{1-\cos x}{x^2} = 1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

On a : $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(1-\cos x)}{\sin(3x) - 3\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(1-\cos x)}{3\sin x - 4\sin^3 x - 3\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} - \dfrac{x(1-\cos x)}{4\sin^3 x}$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} - \dfrac{\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)}{4\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3} = -\dfrac{1}{8}$. (Car : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$).

- Pour calculer les limites contenant des fonctions trigonométriques, on utilise les résultats vus dans le cours, par exemple :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

ainsi que les formules de transformation vues dans le chapitre précédent.



4) Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$

On a : $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) = \sqrt{2}\left(\sin x.\cos\dfrac{\pi}{4} - \cos x.\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Donc : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}}$. En posant : $X = x - \dfrac{\pi}{4}$, on obtient :

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sqrt{2}\sin X}{X} = \sqrt{2}$. (Car : $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$) .

Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}$

En posant : $X = x - 1$, on obtient :

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin(\pi X + \pi)}{X} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{-\sin(\pi X)}{X} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{-\sin(\pi X)}{\pi X} \times \pi = -\pi$. (Car : $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin(\pi X)}{\pi X} = 1$).

Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

En posant : $X = x - \dfrac{\pi}{2}$, on obtient : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + X\right)}{X} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{-\sin X}{X} = -1$.

Scanné avec CamScanner

Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x^2}.x\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\times 0=0$. (Car : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}x\sqrt{x}=0$).

Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

On a : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}\times\dfrac{1}{\cos x}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$. (Car : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$)

Remarque : on peut aussi utiliser le changement $X=x-\dfrac{\pi}{4}$ et la formule : $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$.



- Pour montrer que f admet une limite en un point x_0, on peut :
  - Utiliser les limites usuelles.
  - Utiliser les théorèmes d'encadrement.
  - Utiliser les opérations algébriques sur les limites.
  - Faire un changement de variable : Si on pose $X=x-x_0$ et si $x\to x_0$, alors : $X\to 0$
  - Exploiter la courbe de la fonction f.
- Les principales formes indéterminées rencontrées sont : $\dfrac{0}{0}$; $0\times\infty$; $(+\infty)+(-\infty)$; $\dfrac{\infty}{\infty}$.
- Pour lever une forme indéterminée lorsqu'il s'agit d'une limite à l'infini :
  - Pour un polynôme, on cherche la limite de terme du plus haut degré.
  - Pour une fonction rationnelle, on cherche la limite du rapport de ses termes de plus haut degré.
  - Pour une fonction présentant une racine carrée dans son expression, on peut :
    - Factoriser par le (les) terme(s) de plus haut degré si un terme est prépondérant.
    - Multiplier par l'expression conjuguée.
    - Multiplier par l'expression conjuguée et si l'indétermination n'est toujours pas levée, on factorise par le(les) terme(s) de plus haut degré.
    - Utiliser les formules suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}\quad\text{et}\quad\lim_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=\lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}$$

- Pour lever une forme indéterminée lorsqu'il s'agit des limites aux réels x_0 qui annulent le dénominateur, on peut :
  - Factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x-x_0)$ ou $(x-x_0)^n$, puis simplifier.
  - Multiplier par l'expression conjuguée, si l'expression contient des racines carrées, et on simplifie.
  - Penser à utiliser la dérivation (chapitre suivant).

Scanné avec CamScanner

EXERCICES D'APPLICATION

LECTURE GRAPHIQUE DE LIMITES

EXERCICE 01

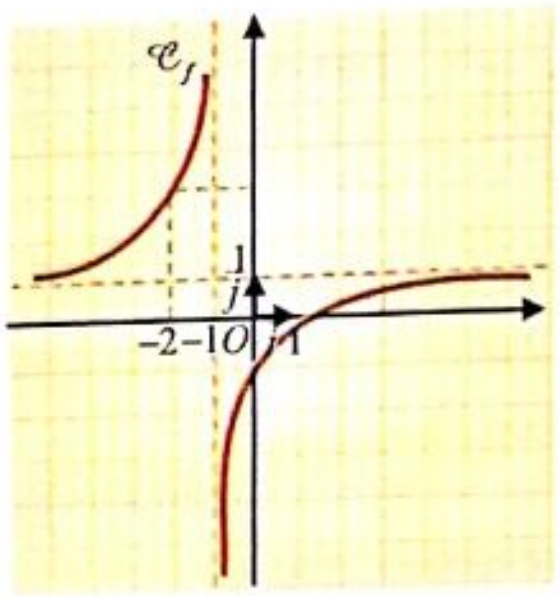
La figure suivante représente la courbe d'une fonction numérique f.

Déterminer, par lecture graphique, les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

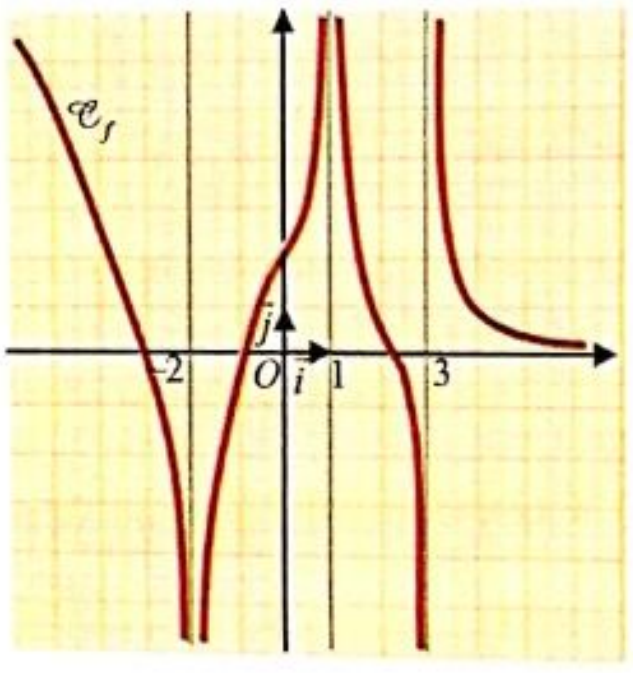
$\lim\limits_{x\to-2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)-1}$



EXERCICE 02

La figure suivante représente la courbe d'une fonction numérique f :



Conjecturer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

LIMITES DE FONCTIONS USUELLES ET OPÉRATIONS

EXERCICE 03

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-2}\left(-\dfrac{1}{3}x^2-5x+7\right)$; $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}x^3-3x^2-x\right)$

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{(3-x)^2}$; $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

EXERCICE 04

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+x\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-x+x^3\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\pi x+2020)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3+\left(x^2-1\right)(1-3x)\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^4-x^2+x+1\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-2x^2\right)(1+3x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^2-(2x-1)(2x+1)\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3(1-2x)^5$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^6+x^5+x^4-x\right)\left(x^3-x^2+x+1\right)$

EXERCICE 05

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5+x^4+2}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3x}{4x+7}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x^2+x+5}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^3+5x+9}{7x^3-6}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)^2(2x-7)^2}{4x^3+x+5}$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{3x-x^4+x\left(1-5x^2\right)}{\left(x^2+1\right)\left(2-3x^3\right)}$; $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{\sqrt{5}x^3\left(2-x^2\right)^3}{\left(x^4-1\right)^2}$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 06

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^3-5x-22}{x^2-x-2}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-7x^2+4x+4}{x^3-x^2-8x+12}$

$\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{x+\sqrt{3}}{3-x^2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4+3x^3-7x^2-27x-18}{x^4-3x^3-7x^2+27x-18}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

EXERCICE 07

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+9}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+1}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+3x-1}}{x+5}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{x+5}{2x-4}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

EXERCICE 08

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+4x^2-x+5\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x+5}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-2x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{x^3+1}{2x+3}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x}+2x-5\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+7+\sqrt{4-2x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+x+4}-2x+1\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-7x}{3x+5}\sqrt{1-2x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+4x}-3x+8\right)$; $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+12}-\sqrt{x}-2}$

EXERCICE 09

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^4}{x^2-x}}+2x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\sqrt{x^4-x^3}}-x\right)$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+5}-5}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x^2+5x+23}-9}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5x}}$

EXERCICE 10

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 2}\left|5x^3-7x^2-2\right|$; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\left|\dfrac{x^2-6x}{3x-1}\right|$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\dfrac{3|x-5|+2}{|4x^2-9|}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left|\dfrac{5x^2-7x^5+2x-6}{x^5+3x^4-8x^2+9}\right|$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{|-5x+7|}$; $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x+5}{|x^2+4x|}$; $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|x^2-2x|-8}{x^2-5x+4}$

LIMITE À DROITE – LIMITE À GAUCHE

EXERCICE 11

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{x}{x-4}$; $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2-3x}{2-x}$; $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x^2-x+1}{(3-x)(-1-x)}$

$\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{-7}{\sqrt{x-3}}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\sqrt{x}+2\right)$; $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^3-8}{x^2-4x+4}$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)^2}{(x^2-1)^5}$; $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{4x^2-x+5}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3-1}{x^2-x}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^3-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x-3}}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}\dfrac{3x^2-x-1}{4x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{x^3}{|x^2-9|}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x}-\sqrt{2x^2}}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2}{|\sqrt{x}-1|}$

Scanné avec CamScanner

4 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 12

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + x + 1 \ ; \ x \geq 1 \\ f(x) = 4x - 1 \ ; \ x < 1 \end{cases}$$

Calculer : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

La fonction f admet-elle une limite en 1 ? Justifier.

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-1} \ ; \ x < 1 \\ g(x) = \dfrac{-x}{x^3-1} \ ; \ x > 1 \end{cases}$$

Calculer : $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$.

La fonction g admet-elle une limite en 1 ? Justifier.

EXERCICE 13

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x - 2} \ ; \ x \geq 1 \\ f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \ ; \ x < 1 \end{cases}$$

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

EXERCICE 14

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - x + a \ ; \ x \leq -1 \\ f(x) = \dfrac{2x+b}{x+2} \ ; \ x > -1 \end{cases}$$

Trouver les réels a et b pour que : $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 5$.

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \left|(x+\alpha)(x+1)\right| \ ; \ x \leq 1 \\ g(x) = (x+\alpha)(x+\beta) \ ; \ x > 1 \end{cases}$$

Trouver les réels α et β pour que : $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 4$.

LIMITES DE FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

EXERCICE 15

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(5x)}{\tan(3x)}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(2x)}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(7x)}{\sin x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{3x^2}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{\sin x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x) - 2\sin x}{x^3}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - \cos\sqrt{x}}{\sin x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - \sqrt{x+4}}{\tan(5x)}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(4x)}{\tan(2x)\sin x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \tan x}{x^3}$

EXERCICE 16

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \dfrac{1 + \sin x}{\cos}$; $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x$; $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan x$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x - 1}$; $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{2x - \pi}$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - \cos\sqrt{x}}{\sin x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - 2\sin\dfrac{x}{2}}{x^3}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x(\cos x - 1)}{x^3 \cos x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^6 x}{x\sin(2x)}$; $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2\sin(x-1)}{x^2 - x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\sin x)}{x}$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x)\tan^2 x$; $\lim\limits_{x \to 1} (x-1)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

$\lim\limits_{x \to -1} (x+1)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{\cos(2x) - \cos(3x)}}{x}$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin(x^2 - 2x)}{x - 2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \cos\left(\dfrac{2}{x}\right)\right)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\tan(2x)}}{\sqrt{\tan(3x)} - \sqrt{\tan(4x)}}$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 17

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{x-\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{1+\sqrt{2}\cos x} \quad ; \quad \lim_{x\to-\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x + \sqrt{3}\sin x}{x+\frac{\pi}{6}}$$

LIMITES ET ENCADREMENT

EXERCICE 18

1) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{2+\sin\frac{1}{x}}{x^2}$$

a) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right)\ f(x) \geq \frac{1}{x^2}$.

b) Déterminer la limite : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \frac{\cos x}{x}$$

a) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)\ |g(x)| \leq \frac{1}{x}$.

b) Déterminer la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

3) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

a) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right)\ |h(x)| \leq x^2$.

b) Déterminer la limite : $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

4) Soit k la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = x^2 - 3\sin x$$

a) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)\ k(x) \geq x^2 - 3$.

b) En déduire les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)$

EXERCICE 19

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} \ ; \ x > 0 \\ f(x) = \dfrac{\cos x - |x+1|}{x} \ ; \ x < 0 \end{cases}$$

1) a) Vérifier que : $\left(\forall x \in]-\infty;-1]\right)\ |f(x)-1| \leq \frac{-2}{x}$.

b) En déduire la limite : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) Calculer la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

EXERCICE 20

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x}$$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2) a) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right)\ |f(x)| \leq \frac{1}{|x|}$.

b) En déduire les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

EXERCICE 21

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = E(x) + \sin x$$

où $E(x)$ désigne la partie entière du nombre x.

1) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)\ x-2 < f(x) \leq x+1$.

2) En déduire les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \ ; \ \lim_{x\to-\infty} f(x) \ ; \ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \ ; \ \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

3) Étudier la limite de la fonction f en 0.

EXERCICE 22

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x^2 E\left(\frac{1}{x}\right)$

1) a) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right)\ |f(x)-x| < x^2$.

b) En déduire la limite : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2) Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 23

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\dfrac{2x^2-2}{\sqrt{x+1}}$; $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+64}{3x^2+14x+8}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^4+1}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{1-3x}-2}{x^2+4x+3}$; $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+7}-4}$

EXERCICE 24

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-x}{x^2-3x}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3+x}}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x^2+3}}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-x}{\sqrt{1+x+x^2}-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}-1}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-3x+2}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{4x+6}+x^2-3x-3}{2x+1}$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-x^2+x+4}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}-3}{x-2}$

EXERCICE 25

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^4+1}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-1}}{x}$

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{1-3x}-2}{x^2+4x+3}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+x^3+x^4-4}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x^2+1}-x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2020}-2020x+2019}{(x-1)^2}$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x-1+2\sqrt{1-x}\right)$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-2\sqrt{x-3}\right)$

EXERCICE 26

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5+x^4+x^3-3}{x^{12}+x^{10}-2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|+|x-1|-|x+1|}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x-6}}$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+4}-x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{\sqrt{x^4-x^3}}-x\right)$

$\lim\limits_{|x|\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+2x-3}}{x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}x^{2018}\left[\dfrac{x}{x-1}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\ldots+\dfrac{1}{x^{2018}}\right)\right]$

EXERCICE 27

Soit a et b deux réels tels que : $0<a<b$.

Calculer la limite : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{\cos(ax)-\cos(bx)}}{x}$.

EXERCICE 28

Déterminer les réels α et β sachant que :

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-\alpha x-\beta\right)=0$$

EXERCICE 29

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+5}-5}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x^2+5x+23}-9}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}-\sqrt{x+9}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}-\sqrt{1-x}-\sqrt{9-x}}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}-\sqrt{26-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-\sqrt{10-x}}$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 30

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \dfrac{\sqrt{\cos x}-1+\sin x}{\cos x-\cos(3x)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+2x\sin x\right)$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x-\sin x}{1-\sqrt{2}\cos x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\cos(2x)}{1-\sin x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(3x)}{\sin^2(5x)}$; $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\cos x}{\sin(2x)\tan(3x)}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{\dfrac{\sin x}{1+\cos x}}-1}{x-\dfrac{\pi}{2}}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{6x-\pi}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$

EXERCICE 31

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x-1}{2\sin x-\sqrt{2}} \times \dfrac{2\cos^2 x-1}{\sqrt{\tan x}+\tan x-2}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x+\cos x-\sin x-1}{\cos(2x)+\sin(2x)-1}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\tan x\sqrt{\tan x}-\sin x\sqrt{\sin x}}{x^3\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^3 x+\tan^3(2x)+\tan^3(3x)}{\tan^3(4x)+\tan^3(5x)+\tan^3(6x)}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 x+\sin^3(2x)+\sin^3(3x)}{\sin^4 x+\sin^4(2x)+\sin^4(3x)}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x.\cos(2x).\cos(3x).\cos(4x)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1}{x-\pi}\left(\sqrt{\dfrac{4\cos^2 x}{2+\cos x}}-2\right)$

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-\sin(x-3)-3}{(x-3)\cos(x-3)}$

EXERCICE 32

Déterminer les limites suivantes : $\left(a\in\mathbb{R}^*\right)$

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-ax}{x^2-a^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^5+x^4+x^3+x^2+1}{x^4-1}-ax\right)$

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x-\sin a}{\cos x-\cos a}$; $\lim\limits_{x\to a}(a-x)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2a}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-ax\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-ax\right)$

EXERCICE 33

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x+\cos(2x)+\cos(3x)-3}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right).\tan\left(\frac{\pi}{4}+2x\right).\tan\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)}{x^3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^{2n+1}}{x-1}}-2x\right)$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$)

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^{2n}-4^n}{x^2-3x+2}$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$)

$\lim\limits_{x\to a^2} \dfrac{\sqrt{x}+x-a-a^2}{x\sqrt{x}+x\sqrt{a}-a^2\sqrt{x}-a^2\sqrt{a}}$ (avec $a\in\mathbb{R}_+^*$)

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x}{|x+a|+|x-a|-|x-2a|}$ (avec $a\in\mathbb{R}^*$)

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{x+a}-(1+2a)\sqrt{2a-x}}$ (avec $a\in\mathbb{R}_+^*$)

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{|x+\alpha|+|x-\alpha|-|x-2\alpha|}$ (avec $\alpha\in\mathbb{R}$)

EXERCICE 34

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{x(3+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $f(x)\le -4x^2$

et en déduire la valeur de la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Scanné avec CamScanner

4 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 35

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin(2x)}{x}-2 \ ; \ x>0 \\ f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x^2-4} \quad ; \ x\le 0 \text{ et } x\neq -2 \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction f admet une limite en 0 que l'on déterminera.

2) a) Calculer la limite : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$-\frac{1}{x}-2\le f(x)\le\frac{1}{x}-2$$

puis en déduire la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$.

EXERCICE 36

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x)=3x^2-1 \ ; \ x\le 1 \\ g(x)=\dfrac{a\sin(x^2-1)}{x-1}+1 \ ; \ x>0 \end{cases}$$

où a est un réel non nul.

Déterminer la valeur de a sachant que :

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} g(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} g(x)$$

EXERCICE 37

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=3x^3+x^2+b \ ; \ x\ge 1 \\ f(x)=\dfrac{x^4+x-2}{x-1} \quad ; \ x<1 \end{cases}$$

où b est un nombre réel.

1) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) Déterminer la limite : $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$.

3) Quelle est la valeur de b pour laquelle la fonction f admet une limite en 1 ?

EXERCICE 38

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{2(x^2-x)} \ ; \ x>1 \\ f(x)=\dfrac{x-1}{|2x-1|-1} \ ; \ x<0 \end{cases}$$

La fonction f admet-elle une limite en 1 ? Justifier.

EXERCICE 39

Soit $a\in\mathbb{R}$ et on considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{ax-1}{2x^2-x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0^-} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to0^+} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

3) Déterminer la valeur de a pour que la fonction f admet une limite au point $x_0=\dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 40

Soit m un nombre réel et on considère la fonction numérique f_m définie par :

$$f_m(x)=\frac{mx^2+(m-1)x-2m+1}{x^2+x-2}$$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de f_m.

2) Déterminer les limites de f_0 aux bornes de D.

3) On suppose dans cette question que $m\neq0$.

a) Étudier suivant les valeurs de m, la limite de la fonction f_m au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

b) Vérifier que 1 est une racine du polynôme :

$$P(x)=mx^3+(m-1)x-2m+1$$

puis déterminer $\lim\limits_{x\to1} f_m(x)$.

c) Étudier suivant les valeurs de m, la limite :

$$\lim_{x\to-2} f_m(x)$$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 41

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On pose : $f_n(x)=\dfrac{(1-x^2)^n}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)}$.

1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 1} f_n(x)=\dfrac{2^n}{1\times 2\times\ldots\times n}$.

2) a) Montrer que si n est impair, alors : $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-x^2}{1-x^n}=0$.

a) Montrer que si n est pair, alors : $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-x^2}{1-x^n}=\dfrac{2}{n}$.

3) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n\geq 2)\quad \lim_{x\to -1} f_n(x)=0$$

EXERCICE 42

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\tan^2(2x)} \;;\; x\in\left]0;\dfrac{1}{2}\right[\\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{4x} \;;\; x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[\end{cases}$$

1) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{1}{8}$.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$. Que peut-on conclure ?

EXERCICE 43

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{2+x} \;;\; x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{\cos x-\sqrt{1+\sin x}}{x} \;;\; x<0 \end{cases}$$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\dfrac{1}{2}$.

3) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_-^*)\quad |f(x)|\leq\dfrac{1+\sqrt{2}}{|x|}$

et en déduire la limite : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

EXERCICE 44

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\frac{x\sqrt{3-x}}{2+\sin\dfrac{1}{x}}$$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de f.

2) a) Montrer que : $(\forall x\in[-1;1]-\{0\})\quad |f(x)|\leq 2|x|$.

b) En déduire que f admet une limite finie en 0 que l'on déterminera.

3) Déterminer la limite : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

EXERCICE 45

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} \;;\; \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1-x^3}+x-1\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x} \;;\; \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x\sqrt{\sin x}-\tan x\sqrt{\tan x}}{x^3\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\dfrac{-\sin x}{1+\cos x}}-1}{x+\dfrac{\pi}{2}} \;;\; \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos x+\sin x-\tan x}{\sin(2x)-1+\cos(2x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}}{\tan x} \;;\; \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)(2\cos^2 x-1)}{(2-\tan x-\sqrt{\tan x})(\sqrt{2}-2\sin x)}$$

EXERCICE 46

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x-\left|2x-\sqrt{x}\right|}$$

1) Vérifier que l'ensemble de définition de f est :

$$D_f=\left]0;\frac{1}{9}\right[\cup\left]\frac{1}{9};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$$

2) Calculer les limites de f aux bornes de D.

Scanné avec CamScanner

4 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 47

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=x^2E\left(\frac{1}{x}\right)$$

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ |f(x)-x|<x^2$.

2) En déduire : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

EXERCICE 48

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{E(x)+\sin x}{x}\ ;\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) Calculer les limites $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ puis les comparer avec $f(0)$.

2) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ |f(x)-1|\leq\dfrac{2}{|x|}$.

b) En déduire la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

EXERCICE 49

Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\cos x}{\sqrt{x}(2x-\pi)}\ ;\ x>0 \\ f(0)=0 \\ f(x)=\dfrac{\sin x-\tan x}{x\sqrt{1-\cos x}}\ ;\ -\dfrac{\pi}{2}<x<0 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$.

Que peut-on conclure ?

2) Étudier la limite de la fonction f en $\dfrac{\pi}{2}$.

3) Déterminer la limite : $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x)$

4) Montrer que : $\left(\forall x\in\left]1+\dfrac{\pi}{2};+\infty\right[\right)\ |f(x)|\leq\dfrac{3}{\sqrt{x}}$

et en déduire la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

EXERCICE 50

Soit a et b deux réels strictement positifs.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=\frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right)$$

1) Montrer que :

a) $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ \dfrac{b}{a}-\dfrac{x}{a}<f(x)\leq\dfrac{b}{a}$

b) $\left(\forall x\in\mathbb{R}_-^*\right)\ \dfrac{b}{a}\leq f(x)<\dfrac{b}{a}-\dfrac{x}{a}$

2) En déduire que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right)\ \left|f(x)-\dfrac{b}{a}\right|\leq\left|\dfrac{x}{a}\right|$

puis déterminer la limite : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

EXERCICE 51

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=\sin(x)E\left(\frac{1}{x}\right)$$

1) a) Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right)\ \left|f(x)-\dfrac{\sin x}{x}\right|<|\sin x|$.

b) En déduire la limite : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2) a) Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ |f(x)|<\dfrac{1}{x}$.

b) En déduire la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$.

b) Retrouver le résultat de la question 1) a).

EXERCICE 52

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x\sqrt{\left(1+E\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^2+1}\ ;\ x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

1) a) Montrer que :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ \sqrt{1+x^2}\leq f(x)\leq\sqrt{2x^2+2x+1}$$

Scanné avec CamScanner

b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

c) Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

2) Déterminer : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

3) Étudier la limite de la fonction f en $\frac{1}{k}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 53

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de f.

2) Déterminer : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

3) Soit p un entier supérieur ou égal à 2.

Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x et p dans les deux cas suivants :

a) $x \in \left]\frac{1}{p^2}; \frac{1}{(p-1)^2}\right[$; b) $x \in \left]\frac{1}{(p+1)^2}; \frac{1}{p^2}\right[$

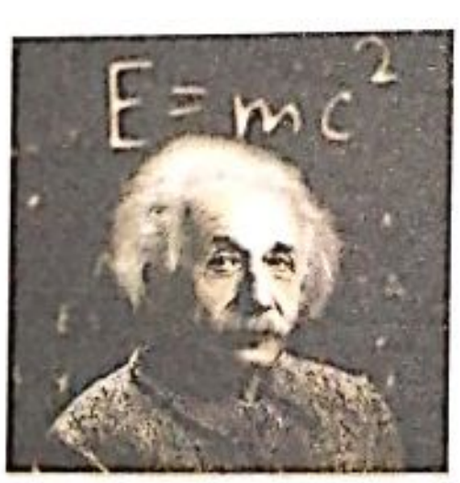
puis en déduire : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{p^2}\right)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{p^2}\right)^-} f(x)$

EXERCICE 54

La théorie de la relativité d'Albert Einstein montre que la masse d'un objet en mouvement dépend de sa vitesse par la relation : $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

où m_0 est la masse de cet objet au repos (c-à-d : $v = 0$) et c la célérité de la lumière :

$$c \approx 300000\, km/s$$



1) Calculer la limite :

$$\lim_{\substack{v\to c \\ v<c}} \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

2) Interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 55

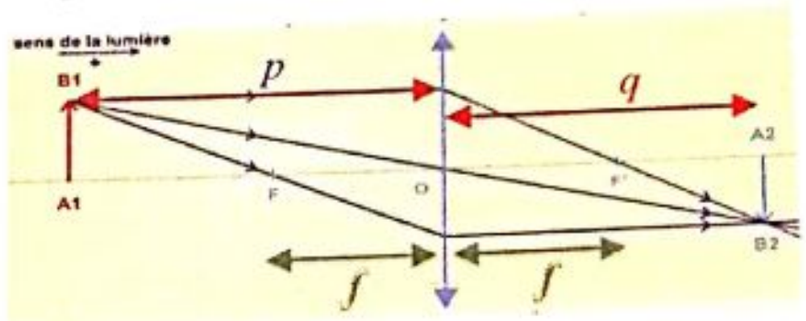
Pour une lentille convexe dont la distance focale est f, la distance p d'un objet au centre et la distance q de son image au centre sont liées par le relation :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

1) Exprimer q en fonction de p et donner l'ensemble de définition de la fonction $h : p \mapsto q$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{p\to +\infty} h(p)$ et $\lim\limits_{p\to f^+} h(p)$.

b) Interpréter les résultats obtenus.



EXERCICE 56

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On considère le point $\Omega(3;1)$.

Soit M un point d'abscisse x mobile sur l'axe des abscises et M' le point d'intersection de la droite (ΩM) avec l'axe des ordonnées. On pose $f(x) = y_{M'}$ où $y_{M'}$ est l'ordonnée du point M'.

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Conjecturer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) \; ; \; \lim_{x\to -\infty} f(x) \; ; \; \lim_{x\to 3^+} f(x) \; ; \; \lim_{x\to 3^-} f(x)$$

3) a) Montrer que : $f(x) = \frac{x}{x-3}$.

b) Vérifier les résultats de la question 1) et 2).

EXERCICE 57

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x \; ; \; x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = 0 \; ; \; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Scanné avec CamScanner

5

DÉRIVATION

HISTOIRE

Au XIV[e] siècle, les études du mouvement par Galilée conduisent les mathématiciens à adopter une écriture systématique des variables, aboutissant à la création de la géométrie analytique. Cette représentation permet de formuler de manière générale le calcul des aires et des tangentes, auquel s'intéressent durant le siècle suivant Fermat, Descartes ou encore Pascal. L'unification et la systématisation de ces travaux s'effectuent pendant le XVIIe siècle, sous l'impulsion notamment de Newton et de Leibniz, qui créent l'analyse moderne. Tout d'abord, Newton, vers 1670, développe le calcul différentiel pour établir les principales lois de la mécanique classique. Puis Leibniz, en 1673, découvre indépendamment de Newton le calcul des dérivées, puis le calcul intégral en 1676. Si tous deux saisissent le lien entre le calcul des aires et celui des tangentes, c'est Leibniz qui impose sa vision de l'analyse infinitésimale.

Source : https://fr.wikipedia.org

ISAAC NEWTON (1642 – 1727)





THĀBIT IBN QURRA (826 – 901)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Approcher une fonction au voisinage d'un point ;
- Reconnaitre que le nombre dérivé de la fonction en x_0 est le coefficient directeur de la tangente à cette courbe au point d'abscisse x_0.
- Reconnaitre les dérivées des fonctions de référence ;
- Maitriser les techniques de calcul des dérivées ;
- Déterminer une équation de la tangente à une courbe en un point et construire cette tangente ;
- Déterminer la monotonie d'une fonction à partir de l'étude du signe de sa dérivée ;
- Déterminer le signe d'une fonction à partir de son tableau de variation ou de son graphe.
- Résoudre des problèmes concernant des valeurs minimales et des valeurs maximales.
- Appliquer la dérivation dans le calcul de certaines limites.

PLAN DU COURS

- Activités Préparatoires..... 201
- Connaissances Fondamentales
  - Dérivabilité d'une fonction en un point 208
  - Dérivabilité à droite – Dérivabilité à gauche.... 211
  - Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle 215
  - Applications de la dérivation..... 221
  - Dérivées successives..... 225
  - L'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ 226
- Techniques et Astuces 228
- Exercices et Problèmes
  - Exercices d'application..... 234
  - Exercices de perfectionnement..... 241

Scanné avec CamScanner

1 APPROXIMATION D'UNE FONCTION PAR UNE FONCTION AFFINE

A) Vitesse instantanée et nombre dérivée :

Une expérience en mécanique a montré que la chute libre d'un corps sans vitesse initiale (c'est-à-dire $v_0 = 0$ à l'instant $t = 0$) a un mouvement uniforme et défini par la fonction temps : $d = f(t) = 5t^2$ (où t en seconde et $d = f(t)$ en mètre).



1. Montrer que la vitesse moyenne du corps entre les instants t et $t+h$ (où $h \neq 0$ et $t+h > 0$) est : $10t + 5h$.

2. Le mouvement du corps à l'instant $t = 1s$ a une vitesse donnée.

Le but de cette question est de déterminer une valeur approchée de cette vitesse.

a) Recopier puis compléter le tableau suivant : (on rappelle que $t = 1s$)

h	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$	$0,0001$	$0,001$	$0,01$
$t+h$						
Vitesse moyenne entre t et $t+h$						

b) En utilisant ce tableau, conjecturer la limite de la vitesse moyenne quand h tend vers 0.

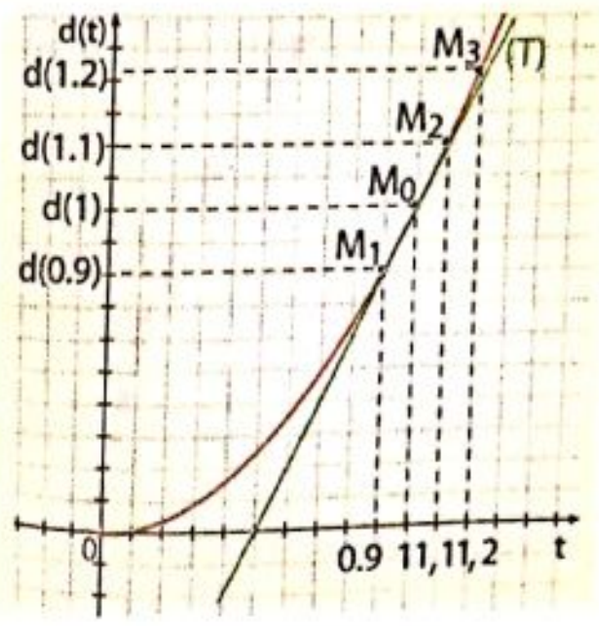
3. Calculer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ puis comparer cette limite au résultat de la question 2. b).

Le nombre $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ s'appelle la vitesse instantanée du corps à l'instant $t = 1s$ et on l'appelle aussi le nombre dérivé de f en $t_0 = 1$ et on écrit : $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

B) Approximation de la fonction $x \longmapsto 5x^2$ par une fonction affine :

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé et (T) la droite passant par le point $A(1;5)$ et de coefficient directeur égal à 10.

On note g la fonction affine représentée par la droite (T).



1. Montrer que $g(t) = 10t - 5$ et en déduire que : $(\forall h \in [-1;+\infty[)\ f(1+h) = g(1+h) + 5h^2$.

2. Recopier puis remplir le tableau suivant pour comparer $f(1+h)$ et $g(1+h)$ quand h se rapproche de 0 :

h	$-0,2$	$-0,1$	$-0,05$	$-0,02$	0	$0,02$	$0,05$	$0,1$	$0,2$
$5(1+h)^2$									
$10h+5$									

Scanné avec CamScanner

En déduire que $10h+5$ est une valeur approchée de $5(1+h)^2$ quand h est proche de zéro :

3. Vérifier qu'il existe une fonction θ définie au voisinage de 0 telle que : $f(1+h)=5+10h+h\theta(h)$ avec : $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=0$.

On peut négliger $h\theta(h)$ et considérer $10h+5$ comme une approximation du nombre $f(1+h)$ quand le nombre h est proche de zéro. Par conséquent : la fonction affine $t\mapsto 10t-5$ est une approximation de la fonction $t\mapsto 5t^2$ au voisinage de 1 et on écrit : $5t^2\approx 10t-5$.

4. Déterminer une valeur approchée de chacun des nombres : $5\times(0,998)^2$ et $5\times(1,001)^2$.

On a : $f(1+h)=5+10h+h\theta(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=0$; donc : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}10+\theta(h)=10$.

On dit alors que la fonction f est dérivable en 1 et on écrit : $f'(1)=10$.

C) Approximation des fonctions $x\longmapsto x^3$ et $x\longmapsto\frac{1}{x}$ et $x\mapsto\sqrt{x}$ par une fonction affine :

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3$.

a) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

b) Soit $x\in[0;2]$ et on pose : $x-1=h$.

Montrer que : $f(1+h)=1+3h+hu(h)$ où u est une fonction à déterminer puis vérifier que : $\lim\limits_{h\to 0}u(h)=0$

c) Soit la fonction affine $g: x\mapsto 3x-2$ et (T) sa droite représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Déterminer l'intersection de (T) et $(\mathscr{C}_f)$ puis vérifier que : $g(1+h)=1+3h$.

2. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

a) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $]0;2]$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

b) Soit $x\in]0;2]$ et on pose : $x-1=h$.

Montrer que : $f(1+h)=1-h+hu(h)$ où u est une fonction à déterminer puis vérifier que : $\lim\limits_{h\to 0}u(h)=0$.

c) Soit la fonction affine $g: x\mapsto -x+2$ et (T) sa droite représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Déterminer l'intersection de (T) et $(\mathscr{C}_f)$ puis vérifier que : $g(1+h)=1-h$.

3. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\sqrt{x}$.

a) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

b) Soit $x\in]0;2]$ et on pose : $x-1=h$. Vérifier que : $\sqrt{1+h}-\left(1+\dfrac{1}{2}h\right)=-\dfrac{h^2}{2\left(1+\sqrt{1+h}\right)^2}$.

Scanné avec CamScanner

c) En déduire que : $f(1+h)=1+\frac{1}{2}h+hu(h)$ où u est une fonction numérique à déterminer puis vérifier que : $\lim\limits_{h\to 0}u(h)=0$.

d) Soit la fonction affine $g: x\mapsto \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ et (T) sa droite représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Déterminer l'intersection de (T) et $(\mathscr{C}_f)$ puis vérifier que : $g(1+h)=1+\frac{1}{2}h$.

2 NOMBRE DÉRIVÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT

INTRODUCTION

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I. On pose : $x-a=h$.

Si $f(a+h)$ peut s'écrire sous la forme :

$f(a+h)=f(a)+\ell h+u(h)$ où u est une fonction numérique telle que : $\lim\limits_{h\to 0}u(h)=0$ et $\ell\in\mathbb{R}$

On dit alors que la fonction f est dérivable au point a et que ℓ est le nombre dérivé de la fonction f en a et on le note $f'(a)$: $\ell=f'(a)$.

1. En utilisant les résultats obtenus dans l'activité précédente, quels sont les nombres dérivés des fonctions suivantes au point $a=1$: $f_1: x\mapsto x^2$; $f_2: x\mapsto x^3$; $f_3: x\mapsto\frac{1}{x}$; $f_4: x\mapsto\sqrt{x}$.

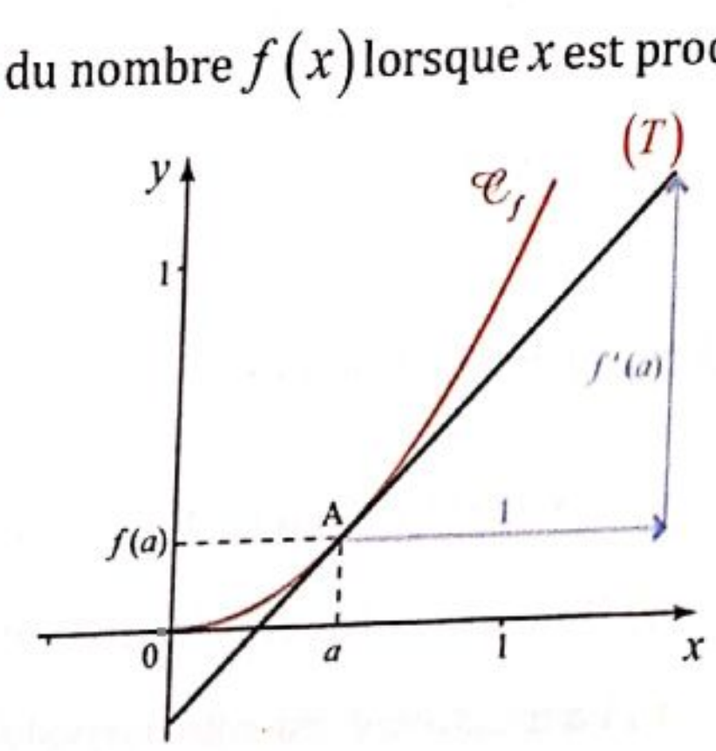
2. Remarquer que : $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et comparer cette limite avec le nombre dérivé $f'(a)$

3. a) En déduire que si la fonction f est dérivable en a, alors le nombre $f'(a)h+f(a)$ est une approximation du nombre $f(a+h)$ quand h tend vers 0.

b) Déterminer en fonction de h des approximations de chacun des nombres $(1+h)^3$, $\frac{1}{1+h}$ et $\sqrt{1+h}$ quand h se rapproche de 0.

c) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de chacun des nombres : $(0,997)^3$ et $\frac{1}{1,0003}$ et $\sqrt{0,92}$.

Remarquons que $f'(a)(x-a)+f(a)$ est une approximation affine du nombre $f(x)$ lorsque x est proche de a (ici : $x=a+h$) : $f(x)\approx f'(a)(x-a)+f(a)$.



La fonction affine $\varphi: x\mapsto f'(a)(x-a)+f(a)$ est appelée la fonction affine tangente à la fonction f au point a et la droite $(T): y=f'(a)(x-a)+f(a)$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(a;f(a))$.

Scanné avec CamScanner

3 DÉRIVABILITÉ À DROITE – DÉRIVABILITÉ À GAUCHE

1. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x - 3 & ; \ x \geq 2 \\ f(x) = x^2 - 5 & ; \ x < 2 \end{cases}$

a) Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 1$.

On dit que la fonction f est dérivable à droite en 2 et le nombre 1 s'appelle le nombre dérivé à droite de la fonction f en 2 et on écrit : $f'_d(2) = 1$.

b) Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 4$.

On dit que la fonction f est dérivable à gauche en 2 et le nombre 4 s'appelle le nombre dérivé à gauche de la fonction f en 2 et on écrit : $f'_g(2) = 4$.

c) La fonction f est-elle dérivable au point $a = 2$? Justifier la réponse.

2. On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x-1)|x-1|$

a) Étudier la dérivabilité à droite de la fonction g au point 1.

b) Étudier la dérivabilité à gauche de la fonction g au point 1.

c) La fonction g est-elle dérivable au point 1 ? Justifier la réponse.

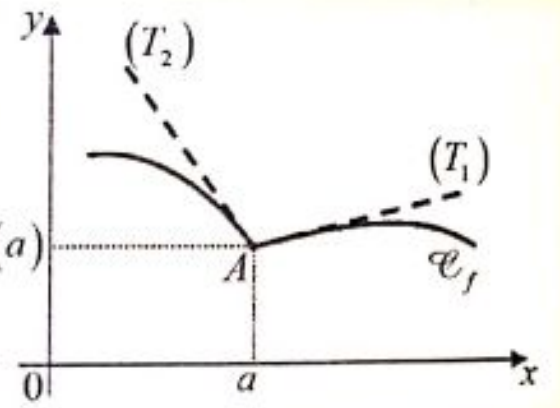
INTRODUCTION

Si f est une fonction dérivable à droite au point a, alors la demi-droite (T_1) définie par le système : $\begin{cases} y = f'_d(a)(x-a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$

est appelée la demi-tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ à droite au point $A(a; f(a))$.

Si f est une fonction dérivable à droite au point a, alors la demi-droite (T_2) définie par le système : $\begin{cases} y = f'_g(a)(x-a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$

est appelée la demi-tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ à gauche au point $A(a; f(a))$.



3. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \left|\dfrac{x}{x-1}\right|$.

a) Montrer que la fonction f est dérivable à droite et à gauche en 0 et donner $f'_d(0)$ et $f'_g(0)$.

b) Donner les équations cartésiennes des demi-tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $O(0;0)$ puis les construire.

c) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier la réponse.

Scanné avec CamScanner

4. Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} h(x) = x^2 & ; \ x \leq 1 \\ h(x) = \dfrac{1}{x} & ; \ x > 1 \end{cases}$.

a) Montrer que la fonction h est dérivable à droite et à gauche en 1 et donner $h'_d(1)$ et $h'_g(1)$

b) Donner les équations cartésiennes des demi-tangentes à la courbe $\mathscr{C}_h$ au point $A(1;1)$.

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}_h$ et les demi-tangentes au point $A(1;1)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

4 DÉRIVABILITÉ SUR UN INTERVALLE – FONCTION DÉRIVÉE

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{x}$.

a) La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifier la réponse.

b) Soit a un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$.

Montrer que la fonction f est dérivable au point a et que : $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

La fonction f est dérivable en tout point a de l'intervalle $]0;+\infty[$.

On dit que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

La fonction qui, à tout réel $a \in]0;+\infty[$, associe le nombre dérivé $f'(a)$ est appelée la fonction dérivée de la fonction f et on la note f' .

Pour cet exemple, la fonction dérivée f' de la fonction f est donnée par : $(\forall x \in]0;+\infty[) \quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2. Soit u et v les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^2$ et $v(x) = x^3$

Montrer que les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et déterminer $u'(x)$ et $v'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Soit w la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Montrer que la fonction w est dérivable sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ puis définir la fonction dérivée w' sur chacun de ces intervalles.

5 DÉRIVÉES DE QUELQUES FONCTIONS USUELLES

Soit $k \in \mathbb{R}$ et n un entier naturel non nul.

On considère les fonctions numériques f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 définies par :

$f_1(x) = k$; $f_2(x) = kx$; $f_3(x) = x^n$; $f_4(x) = \sin x$; $f_5(x) = \cos x$

1. Montrer que la fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est la fonction nulle.

2. Montrer que la fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est la fonction constante $x \mapsto k$.

Scanné avec CamScanner

5 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

3. a) Vérifier que pour tout x et a de $\mathbb{R}$: $x^{n+1}-a^{n+1}=x\left(x^n-a^n\right)+(x-a)a^n$

b) Montrer par récurrence l'identité remarquable : $x^n-a^n=(x-a)\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots+a^{n-1}\right)$.

c) En déduire que la fonction f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et définir sa fonction dérivée.

4. Soit a et h deux réels tels que $h\neq 0$.

a) Vérifier que : $\dfrac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\cos\left(a+\dfrac{h}{2}\right).\dfrac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}$.

b) En déduire que la fonction f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f_4'(x)=\cos x$.

5. Montrer que la fonction f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f_5'(x)=-\sin x$.

6 APPLICATIONS DE LA FONCTION DÉRIVÉE

A) Fonction dérivée et monotonie :

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-2x$.

a) En utilisant le taux de variations, montrer que f est croissante sur $[1;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;1]$.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

c) Vérifier que : $\begin{cases}(\forall x\in[1;+\infty[) & f'(x)\geq 0\\ (\forall x\in]-\infty;1]) & f'(x)\leq 0\end{cases}$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

a) Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

b) Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ puis étudier son signe.

3. Étudier les variations de la fonction h: $x\mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$.

GÉNÉRALISATION

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- La fonction f est constante sur I si, et seulement, si : $(\forall x\in I)\ f'(x)=0$.
- La fonction f est croissante sur I si, et seulement, si : $(\forall x\in I)\ f'(x)\geq 0$.
- La fonction f est décroissante sur I si, et seulement, si : $(\forall x\in I)\ f'(x)\leq 0$.

B) Fonction dérivée et extremums :

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-2x+3$.

Scanné avec CamScanner

a) Donner le tableau de variation de la fonction f .

b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) \geq f(1)$

c) En déduire que f admet un extremum au point 1 et donner sa nature.

d) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ en précisant $f'(1)$.

2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I =]-\infty;0[$ par : $g(x) = x + \frac{4}{x}$.

a) Montrer que g est dérivable sur I et que : $(\forall x \in I)\ g'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$.

b) Montrer que la fonction g est croissante sur $]-\infty;-2]$ et décroissante sur $[-2;0[$.

c) Montrer que la fonction g admet un maximum au point $x_0 = -2$.

d) Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle I puis dresser le tableau de variation de g sur I .

C) Fonction dérivée et équation différentielle :

INTRODUCTION

Soit ω un nombre réel non nul.

• L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ où l'inconnue est une fonction y telle y'' est sa dérivée seconde est appelée équation différentielle.

• Toute fonction f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'égalité $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ pour tout réel x, est appelée solution de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$.

• Résoudre l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$, c'est déterminer toutes les solutions de cette équation.

1. Soit f et g les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(\pi x)$ et $g(x) = \cos(\pi x)$.

a) Vérifier que f et g sont solutions de l'équation différentielle : $y'' + \pi^2 y = 0$.

b) Soit $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$.

Montrer que la fonction h est aussi une solution de l'équation différentielle : $y'' + \pi^2 y = 0$.

GÉNÉRALISATION

Soit ω un nombre réel non nul.

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x) \quad \text{où} \quad (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$$

2. Résoudre les équations différentielles suivantes : $y'' + 4y = 0$; $y'' + 3y = 0$; $25y'' + 16y = 0$.

3. Déterminer la fonction f vérifiant l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$ telle que : $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$.

Scanné avec CamScanner

1 DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT

1.1. NOMBRE DÉRIVÉ EN UN POINT

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel ℓ tel que : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$

Le nombre ℓ est appelé le nombre dérivé de la fonction f en x_0. Il est noté $f'(x_0)$.

On écrit : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$ ou encore $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

Exemples

1) On considère la fonction $f: x\mapsto x^2+x$. Étudions la dérivabilité de la fonction f en $a=1$:

On a pour tout $h\in\mathbb{R}^*$: $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{(1+h)^2+(1+h)-2}{h}=h+3$. Par conséquent :

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h+3)=3$. Ainsi, f est dérivable en 1 et $f'(1)=3$.

2) On considère la fonction $f: x\mapsto|x-2|$. Étudions la dérivabilité de la fonction f en $a=2$:

On a pour tout $h\in\mathbb{R}^*$: $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\dfrac{|h|}{h}$.

- Si $h>0$ alors $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=1$ et donc : $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=1$.
- Si $h<0$ alors $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=-1$ et donc : $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=-1$.

On en déduit alors qu'il n'existe aucun réel ℓ tel que : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\ell$, ce qui signifie bien que la fonction f n'est pas dérivable en $a=2$.

3) On considère la fonction $f: x\mapsto\sqrt{|x-1|}$. Étudions la dérivabilité de la fonction f en $a=1$:

On a pour tout $h\in\mathbb{R}^*$: $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{\sqrt{|h|}}{h}=\dfrac{|h|}{h\sqrt{|h|}}$. Il en résulte alors que :

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{|h|}}=+\infty.$$

Par suite, la fonction f n'est pas dérivable en $a=1$.

Scanné avec CamScanner

Remarques

- Dans le taux de variation $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $x-a$ représente une variation de x et $f(x)-f(a)$ la variation correspondante de y. Quand les accroissements de x et y deviennent petits, le taux d'accroissement tend vers $f'(a)$.

C'est pour cette raison qu'on trouve parfois, notamment en physique, la notation $\frac{df}{dx}(a)$ pour le nombre dérivé de f en a.

- La notion de dérivabilité, étant définie à l'aide d'une limite, est une notion locale.

Applications

Étudier la dérivabilité de la fonction f au point a dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=3x^2+2x-1$ et $a=\sqrt{2}$; 2) $f(x)=|x^2-2x|$ et $a=0$

3) $f(x)=\sqrt{|x+3|}$ et $a=-3$; 4) $f(x)=\frac{x+1}{x-5}$ et $a=\frac{2}{3}$

5) $f(x)=\sin x$ et $a=0$; 6) $f(x)=\cos x$ et $a=\frac{\pi}{2}$

1.2. APPROXIMATION AFFINE D'UNE FONCTION DÉRIVABLE

Si f est dérivable en a, alors il existe un réel ℓ tel que : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell=f'(a)$.

On pose : $u(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\ell$; donc : $f(a+h)=f(a)+\ell h+hu(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}u(h)=0$.

Ainsi, lorsque les valeurs de h s'approchent de plus en plus de 0, les valeurs de $u(h)$ s'approchent de 0 ; on peut alors négliger $hu(h)$ et considérer $f(a)+\ell h$ comme approximation de $f(a+h)$ au voisinage de 0. On écrit alors : $f(a+h)\approx f(a)+\ell h$.

Si $x\approx a$ alors : $f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)$.

Définition

Soit f une fonction dérivable en a.

La droite (T) d'équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ est appelée la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au point d'abscisse a.

La fonction $x\mapsto f'(a)(x-a)+f(a)$ s'appelle l'approximation affine de f au voisinage de a.

On écrit alors :

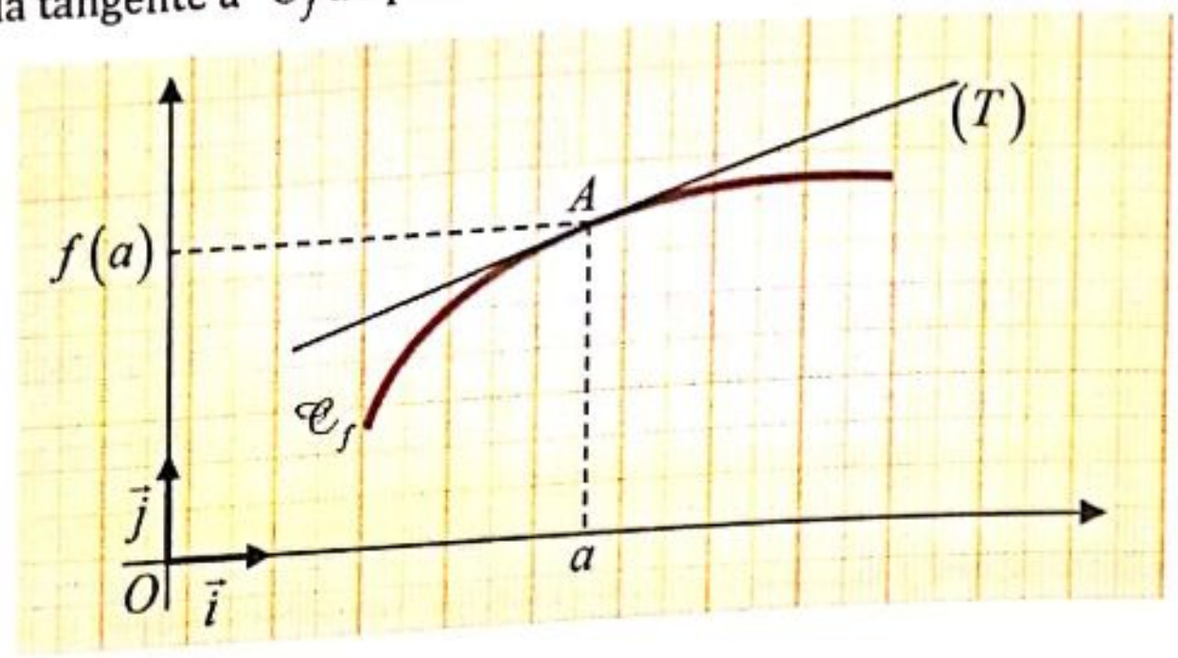
$f(x)\approx f'(a)(x-a)+f(a)$ au voisinage de a ou $f(h)\approx hf'(a)+f(a)$ au voisinage de 0

Scanné avec CamScanner

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU NOMBRE DÉRIVÉ

Si la fonction f est dérivable en a alors sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une tangente (T) au point $A\big(a, f(a)\big)$ et dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$.

L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A est donnée par : $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$



Exemples

1) On considère la fonction $f: x \mapsto x^2$.

On a pour tout $h \in \mathbb{R}^*$: $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{(1+h)^2 - 1}{h} = h + 2$. Par conséquent :

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h+2) = 2$. Donc $f'(1) = 2$. Par suite : $(1+h)^2 \approx 1 + 2h$ au voisinage de 0.

En prenant $h = 0,0234$, on obtient l'approximation : $(1,0234)^2 = (1+0,0234)^2 \approx 1,0468$

L'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(1;1)$ est donnée par : $y = 2x - 1$.

2) On considère la fonction $g: x \mapsto \sqrt{x}$.

On a pour tout $h > -1$ et $h \neq 0$: $\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{1+h}+1}$. Par conséquent :

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \dfrac{1}{2}$. Donc $g'(1) = \dfrac{1}{2}$. Par suite : $\sqrt{1+h} \approx 1 + \dfrac{h}{2}$ au voisinage de 0.

En prenant $h = 0,0008$, on obtient l'approximation : $\sqrt{1,0008} = \sqrt{1+0,0008} \approx 1,0004$

L'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(1;1)$ est donnée par : $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

Remarque

- On a déjà vu dans les activités les approximations suivantes, valables pour h voisin de 0 :

$$\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2} \quad ; \quad \frac{1}{1+h} \approx 1 - h \quad ; \quad (1+h)^2 \approx 1 + 2h \quad ; \quad (1+h)^3 \approx 1 + 3h$$

- L'approximation affine locale consiste donc à assimiler $\mathscr{C}_f$ à (T) pour h proche de 0 (et donc pour x proche de a).

Scanné avec CamScanner

Applications

1. Donner des valeurs approchées des nombres suivants :

$(0,998)^3$; $(2,00578)^2$; $(1,04958)^3$; $\sqrt{1,00791}$; $\frac{1}{1,0434}$; $\frac{1}{(0,999)^2}$.

2. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au point A d'abscisse a, dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=2x^2+x-1$ et $a=1$; b) $f(x)=3x^2+2$ et $a=-1$

c) $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+x^2$ et $a=2$; d) $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$ et $a=1$

2 DÉRIVABILITÉ À DROITE - DÉRIVABILITÉ À GAUCHE

2.1. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Définition

• Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a,a+r[$ où $r\in\mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est dérivable à droite de a s'il existe un réel ℓ_1 tel que : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell_1$

Le nombre ℓ_1 est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en a. Il est noté $f'_d(a)$.

On écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'_d(a)$

• Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a-r,a]$ où $r\in\mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est dérivable à gauche de a s'il existe un réel ℓ_2 tel que : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell_2$

Le nombre ℓ_2 est appelé le nombre dérivé de la fonction f à gauche en a. Il est noté $f'_g(x_0)$.

On écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'_g(a)$

Exemples

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x|x-1|$

Étudions la dérivabilité de la fonction f à droite et à gauche au point $a=1$:

• Dérivabilité à droite en 1 :

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}x=1$; donc f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1)=1$.

Scanné avec CamScanner

• Dérivabilité à gauche en 1 :

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x(1-x)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} -x = -1$; donc f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = -1$.

2) On considère la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$.

Étudions la dérivabilité de la fonction g à droite au point $a = 0$:

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$; donc g n'est pas dérivable à droite en 0.

Applications

Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite et à gauche au point a dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = |x^2 - 1|$ et $a = -1$;

2) $f(x) = |x^2 + 3x|$ et $a = -3$

3) $\begin{cases} f(x) = x^3 + 1 \ ; \ x \le 1 \\ f(x) = x^2 + 2 - \dfrac{1}{x} \ ; \ x > 1 \end{cases}$ et $a = 1$;

4) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^3 + x^2} \ ; \ x \ge -1 \\ f(x) = \sin(\pi x) \ ; \ x < -1 \end{cases}$ et $a = -1$

Proposition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

La fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle est dérivable à droite et à gauche en a, avec $f'_d(a) = f'_g(a)$, et alors : $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Exemples

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \ ; \ x \ge 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{3}{4} \ ; \ x < 1 \end{cases}$$

Étudions la dérivabilité de la fonction f au point $a = 1$:

• Dérivabilité à droite en 1 :

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$; donc f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = \dfrac{1}{2}$.

• Dérivabilité à gauche en 1 :

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{1}{4}(x+1) = \dfrac{1}{2}$; donc f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = \dfrac{1}{2}$.

Puisque $f'_d(1) = f'_g(1) = \dfrac{1}{2}$, alors la fonction f est dérivable au point $a = 1$; de plus : $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Scanné avec CamScanner

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - |x|$

Étudions la dérivabilité de la fonction f au point $a = 0$:

• Dérivabilité à droite en 0 :

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} (x - 1) = -1$; donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -1$.

• Dérivabilité à gauche en 0 :

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 + x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} (x + 1) = 1$; donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 1$.

Puisque $f'_d(0) \neq f'_g(0)$, alors la fonction f n'est pas dérivable au point $a = 0$.

Applications

Étudier la dérivabilité de la fonction f au point a dans chacun des cas suivants :

1) $\begin{cases} f(x) = x^3 & ; \ x \geq -1 \\ f(x) = x^2 - 2 & ; \ x < -1 \end{cases}$ et $a = -1$;

2) $\begin{cases} f(x) = x\sqrt{x} & ; \ x \geq 0 \\ f(x) = x^2 & ; \ x < 0 \end{cases}$ et $a = 0$

3) $f(x) = |x^2 - 3x|$ et $a = 3$;

4) $\begin{cases} f(x) = x^3 - x & ; \ x \geq 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{3} & ; \ x < 1 \end{cases}$ et $a = 1$

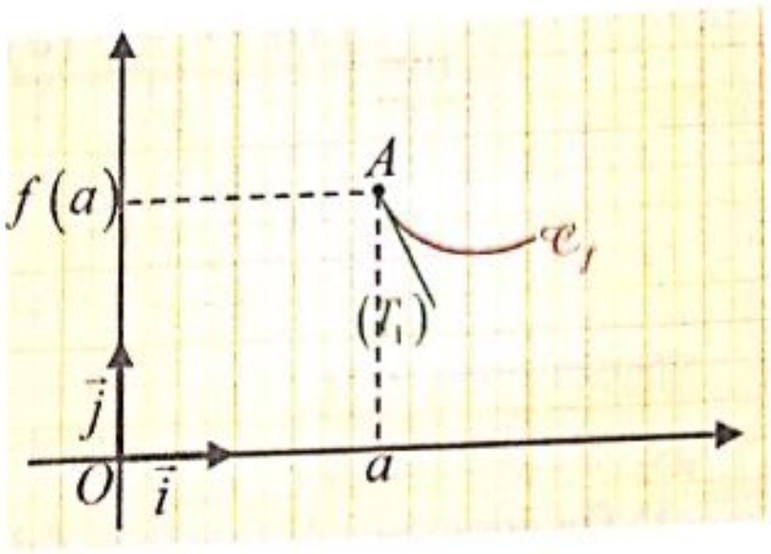
2.2. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

DEMI-TANGENTE EN UN POINT D'UNE COURBE

Si f est une fonction dérivable à droite au point a, alors sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente (T_1) au point $A(a; f(a))$ de coefficient directeur $f'_d(a)$.

L'équation de la demi-tangente (T_1) est donnée par :

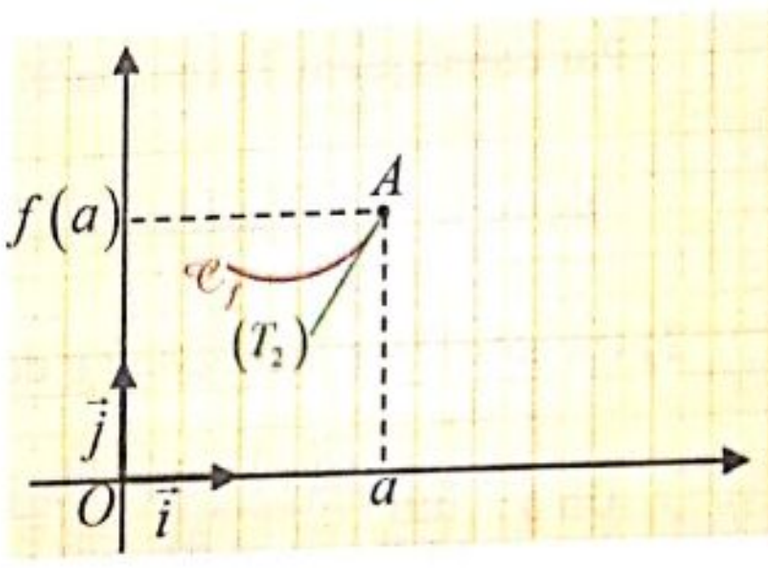
$$\begin{cases} y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$



Si f est une fonction dérivable à gauche au point a, alors sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente (T_2) au point $A(a; f(a))$ de coefficient directeur $f'_g(a)$.

L'équation de la demi-tangente (T_2) est donnée par :

$$\begin{cases} y = f'_g(a)(x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$

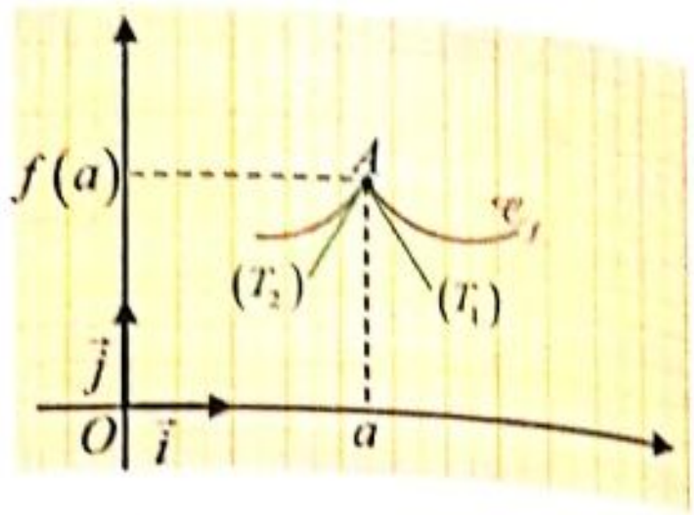


Scanné avec CamScanner

5 CONNAISSANCES FONDAMENTALES

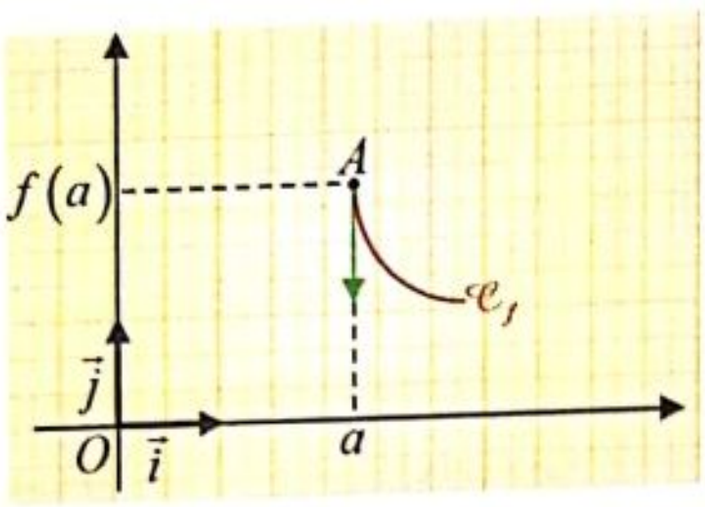
Si f est une fonction dérivable à gauche et à droite en a telle que $f'_g(a) \neq f'_d(a)$, alors f n'est dérivable en a.

On dit que $A\big(a;f(a)\big)$ est un point anguleux de $\mathscr{C}_f$.



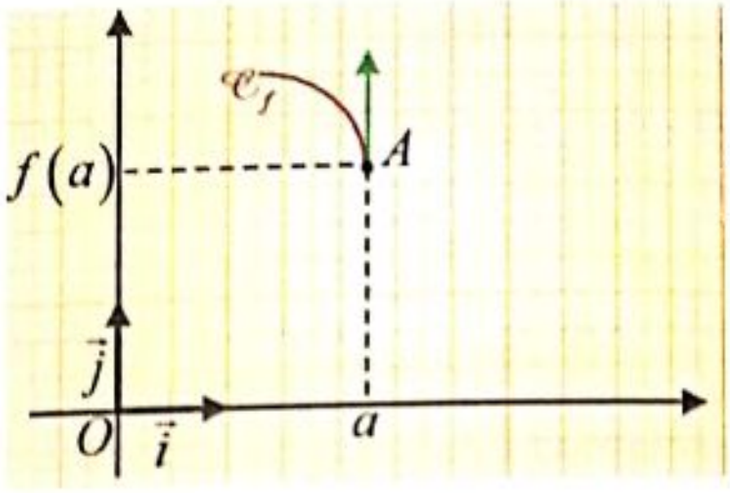
Remarques

- Si $f'_d(a)=0$ (resp. $f'_g(a)=0$), alors la demi-tangente (T_1) (resp. (T_2)) est horizontale, c'est-à-dire, parallèle à l'axe des abscisses.
- Si $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\pm\infty$, alors la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente verticale au point $A\big(a;f(a)\big)$ (parallèle à l'axe des ordonnées).



$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=-\infty$$

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$$



$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=-\infty$$

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$$

Exemples

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-|x|$

On a déjà montré que f est dérivable à droite et à gauche en 0 et que : $f'_d(0)=-1$ et $f'_g(0)=1$.

Par conséquent, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au point O deux demi-tangentes définies par :

demi-tangente à droite : $(T_1):\begin{cases}y=-x\\x\geq 0\end{cases}$; demi-tangente à droite : $(T_2):\begin{cases}y=x\\x\leq 0\end{cases}$

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\sqrt{x+1}$

On a : $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}=+\infty$.

Scanné avec CamScanner

La fonction g n'est pas donc dérivable à droite au point -1.

Interprétation géométrique

La courbe $\mathscr{C}_g$ admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point $A(-1;0)$.

Applications

Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f à droite et à gauche au point a puis définir les demi-tangentes de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au point $A(a;f(a))$.

1) $f(x)=x|x-2|$ et $a=2$; 2) $f(x)=|x^2+x|$ et $a=0$

3) $\begin{cases} f(x)=x^3-x & ; \ x\leq -1 \\ f(x)=x^2+x & ; \ x>-1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} f(x)=-x^3+3x & ; \ x\leq -2 \\ f(x)=\sqrt{4-x^2} & ; \ -2<x\leq 2 \end{cases}$ et $a=-2$

3 DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE

3.1. FONCTION DÉRIVÉE

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I. On note f' la fonction qui, à chaque $x\in I$, associe le nombre dérivée de f en x. On l'appelle la fonction dérivée de f, ou plus simplement la dérivée de f. On écrit aussi : $f'=\dfrac{df}{dx}$.

Exemples

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+x$

Montrons que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminons sa fonction dérivée :

On a pour tout $a\in\mathbb{R}$: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2a+1+h)=2a+1$

Par conséquent, la fonction f est dérivable en tout point a de $\mathbb{R}$ et de plus : $f'(a)=2a+1$.

En résumé, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f'(x)=2x+1$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=x\sqrt{x}$

Montrons la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et déterminons sa fonction dérivée :

On a pour tout $a\in\mathbb{R}^+$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)\sqrt{a+h}-a\sqrt{a}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{a}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}+\sqrt{a+h}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{a}$$

Scanné avec CamScanner

Par conséquent, la fonction f est dérivable en tout point a de $\mathbb{R}^+$ et de plus : $f'(a)=\frac{3}{2}\sqrt{a}$.

En résumé, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)\ f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a;b]$.

On dit que f est dérivable sur $[a;b]$ si elle est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$ et dérivable à droite en a et à gauche en b.

Applications

Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle I puis définir sa fonction dérivée f' sur l'intervalle I :

1) $f(x)=x^2+3x-1$ et $I=\mathbb{R}$; 2) $f(x)=\sqrt{x-x^2}$ et $I=[0;1]$

3) $f(x)=\sqrt{2x-1}$ et $I=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$; 4) $f(x)=\left(x^2-x\right)\sqrt{x-1}$ et $I=[1;+\infty[$

5) $f(x)=2\cos x+1$ et $I=\mathbb{R}$; 6) $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$ et $I=]-\infty;-2[$

TABLEAU DES DÉRIVÉES USUELLES

La fonction f	La fonction f'	Domaine de dérivabilité
$x\mapsto a\ \ (a\in\mathbb{R})$	$x\mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto ax+b\ \ (a\in\mathbb{R}^*\text{ et }b\in\mathbb{R})$	$x\mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto x^n\ \ (n\in\mathbb{N}^*)$	$x\mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto\frac{1}{x}$	$x\mapsto-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x\mapsto\sqrt{x}$	$x\mapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x\mapsto\sin x$	$x\mapsto\cos x$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto\cos x$	$x\mapsto-\sin x$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto\tan x$	$x\mapsto 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\ \ (k\in\mathbb{Z})$

Scanné avec CamScanner

3.2. OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

Proposition

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I ; n un entier naturel non nul et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a alors les propriétés suivantes :

$$(f+g)' = f' + g' \quad ; \quad (\alpha f)' = \alpha f' \quad ; \quad (f.g)' = f'.g + g'.f \quad ; \quad (f^n)' = n.f'.f^{n-1}$$

Si la fonction g ne s'annule pas sur I alors : $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$.

Enfin, si f est strictement positive sur I, alors : $\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$.

Preuve

• Dérivabilité de la somme de deux fonctions :

On a pour tout $a \in I$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right) = f'(a)+g'(a)$$

Par conséquent, $f+g$ est dérivable sur I et de plus : $(\forall a \in I) \quad (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

• Dérivabilité du produit d'une fonction par un réel :

On a pour tout $a \in I$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\alpha f)(a+h)-(\alpha f)(a)}{h} = \alpha \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \alpha f'(a)$$

Par conséquent, αf est dérivable sur I et de plus : $(\forall a \in I) \quad (\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$.

• Dérivabilité d'un produit de deux fonctions :

On a pour tout $a \in I$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)}{h} + \frac{f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} g(a+h) + f(a)\frac{g(a+h)-g(h)}{h}\right)$$

$$= f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

Par conséquent, $f.g$ est dérivable sur I et de plus : $(\forall a \in I) \quad (f.g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

• Dérivabilité de l'inverse d'une fonction :

On a pour tout $a \in I$:

Scanné avec CamScanner

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(a+h)}-\frac{1}{g(a)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\times\left(-\frac{1}{g(a+h).g(a)}\right)=-\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$$

Par conséquent, $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et de plus : $(\forall a\in I)\quad \left(\frac{1}{g}\right)'(a)=-\frac{g'(a)}{g^2(a)}$.

- Dérivabilité du quotient de deux fonctions :

Il suffit de remarquer que pour tout $a\in I$: $\frac{f}{g}=f\times\frac{1}{g}$ puis appliquer la formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions.

- Dérivabilité de la racine carrée d'une fonction :

On a pour tout $a\in I$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{f(a+h)}-\sqrt{f(a)}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(h)}{h}\times\frac{1}{\sqrt{f(a+h)}+\sqrt{f(a)}}\right)=\frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}}$$

Par conséquent $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et de plus : $(\forall a\in I)\quad \left(\sqrt{f}\right)'(a)=\frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}}$.

- Dérivabilité d'une puissance d'une fonction :

Il suffit de faire un raisonnement par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ et remarquer que pour tout $a\in I$:

$$\left(f^{n+1}\right)'(a)=\left(f^n\times f\right)'(a)$$

Proposition

- Toute fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

Exemples

1) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+3x-1$.

La fonction f est polynomiale ; donc dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\left(x^2+3x-1\right)'=\left(x^2\right)'+(3x-1)'=2x+3$$

Ainsi : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f'(x)=2x+3$

2) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=x^3+\sqrt{x}$.

On sait que la fonction $x\mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; par conséquent, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. De plus, on a pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)=\left(x^3+\sqrt{x}\right)'=\left(x^3\right)'+\left(\sqrt{x}\right)'=3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Scanné avec CamScanner

Ainsi : $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)\ f'(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4\sin x$.

On sait que la fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus,

on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 4(\sin x)' = 4\cos x$

4) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 \cos x$.

On sait que les fonctions $x \mapsto x^4$ et $x \mapsto \cos x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$; par conséquent, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. De plus, on a pour

tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \left(x^4 \cos x\right)' = \left(x^4\right)' \cos x + x^4 (\cos x)' = 4x^3 \cos x - x^4 \sin x$

Ainsi : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)\ f'(x) = x^3(4\cos x - x\sin x)$

5) Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{6}{4x^2 + 3x - 1}$.

Le domaine de définition de la fonction f est : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-1; \dfrac{1}{4}\right\}$.

Puisque f est une fonction rationnelle, alors elle est dérivable sur chaque intervalle inclus dans D_f .

De plus, on a pour tout $x \in D_f$:

$$f'(x) = \left(\frac{6}{4x^2 + 3x - 1}\right)' = 6\left(\frac{1}{4x^2 + 3x - 1}\right)' = -6 \times \frac{\left(4x^2 + 3x - 1\right)'}{\left(4x^2 + 3x - 1\right)^2} = -6 \times \frac{8x + 3}{\left(4x^2 + 3x - 1\right)^2}$$

Par suite : $\left(\forall x \in D_f\right)\ f'(x) = -\dfrac{48x + 18}{\left(4x^2 + 3x - 1\right)^2}$

6) Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$.

Le domaine de définition de la fonction f est : $D_f =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$.

La fonction $x \mapsto x^2 - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale. Il s'ensuit donc que la fonction f est dérivable en tout point de D_f tel que $x^2 - x > 0$. Par conséquent, la fonction f est dérivable sur chaque intervalle inclus dans $D_f - \{0;1\}$. De plus, on a pour tout $x \in D_f - \{0;1\}$:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - x}\right)' = \frac{\left(x^2 - x\right)'}{2\sqrt{x^2 - x}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

Par suite : $\left(\forall x \in D_f - \{0;1\}\right)\ f'(x) = \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$

7) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left(x^3 - 4x^2 + 5x - 7\right)^6$.

La fonction f est polynomiale ; donc dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

Scanné avec CamScanner

$$f'(x) = \left((x^3 - 4x^2 + 5x - 7)^6\right)'$$
$$= 6(x^3 - 4x^2 + 5x - 7)'(x^3 - 4x^2 + 5x - 7)^5$$
$$= 6(3x^2 - 8x + 5)(x^3 - 4x^2 + 5x - 7)^5$$

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x) = 6(3x^2 - 8x + 5)(x^3 - 4x^2 + 5x - 7)^5$

Applications

Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition des fonctions f et f' puis définir la fonction dérivée f' :

1) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 3$; 2) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x - 1$; 3) $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$

4) $f(x) = \frac{3}{(2x-1)^2}$; 5) $f(x) = \frac{\cos x + \sin x}{x+1}$; 6) $f(x) = \frac{7x-1}{2x+3}$

7) $f(x) = (x^2 + x)^5$; 8) $f(x) = \frac{3}{x}\sqrt{2x+1}$; 9) $f(x) = (1 - x^2)\tan x$

10) $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}$; 11) $f(x) = 5\cos^3 x - 7\sin^2 x$; 12) $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$

13) $f(x) = \frac{1}{2(x^2 + 2x - 3)^4}$; 14) $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 6x - 5)^2$; 15) $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$

Proposition

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I ; a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$.

Soit J l'ensemble des réels x tels que $(ax + b) \in I$. Alors :

La fonction f définie par : $f(x) = u(ax + b)$ est dérivable sur l'intervalle J et de plus :

$$(\forall x \in J)\ f'(x) = au'(ax + b)$$

Exemples

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(3x + 2)$

On sait que la fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc il en est de même pour la fonction f.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3\sin'(3x + 2) = 3\cos(3x + 2)$

2) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Soit D_f le domaine de définition de f. On a :

Scanné avec CamScanner

$$x \in D_f \Leftrightarrow \left[(\forall k \in \mathbb{Z})\ \frac{\pi}{2}x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right] \Leftrightarrow \left[(\forall k \in \mathbb{Z})\ x \neq 2k+1\right]$$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{2k+1 / k \in \mathbb{Z}\}$.

On sait que la fonction tan est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition ;

donc f est dérivable sur D_f et de plus, pour tout $x \in D_f$: $f'(x) = \frac{\pi}{2}\tan'\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

Applications

Définir la fonction dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \cos(\pi x - 1)$; 2) $f(x) = 5\sin(4x+3)$; 3) $f(x) = \tan(2x)$

4) $f(x) = \cos^3(\pi x + 2)$; 5) $f(x) = \sin^2(3x-1)$; 6) $f(x) = \cos(2x)\sin(3x)$

4 APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION

4.1. MONOTONIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si la fonction f est constante sur I, alors : $(\forall x \in I)\ f'(x) = 0$
- Si la fonction f est croissante sur I, alors : $(\forall x \in I)\ f'(x) \geq 0$
- Si la fonction f est décroissante sur I, alors : $(\forall x \in I)\ f'(x) \leq 0$

Preuve

Soit $x \in I$. On pose $J = I - \{x\}$ et on considère la fonction F définie par : $(\forall t \in J)\ F(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$.

Puisque la fonction f est dérivable sur I, alors elle est dérivable en x. Donc : $\lim\limits_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(x)$.

- Si la fonction f est constante sur I, alors : $(\forall t \in J)\ F(t) = 0$.

Donc : $\lim\limits_{t \to x} F(t) = 0$, c'est-à-dire : $f'(x) = 0$.

- Si la fonction f est croissante sur I, alors : $(\forall t \in J)\ F(t) \geq 0$.

Donc : $\lim\limits_{t \to x} F(t) \geq 0$, c'est-à-dire : $f'(x) \geq 0$.

- Si la fonction f est décroissante sur I, alors : $(\forall t \in J)\ F(t) \leq 0$.

Donc : $\lim\limits_{t \to x} F(t) \leq 0$, c'est-à-dire : $f'(x) \leq 0$.

Scanné avec CamScanner

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si f' est positive sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors la fonction f est strictement croissante sur I.
- Si f' est négative sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
- Si f' est nulle sur I, alors la fonction f est constante sur I.

Exemples

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-12x$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynômiale. De plus, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\left(x^3-12x\right)'=3x^2-12=3\left(x^2-4\right)$$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$f'(x)>0\Leftrightarrow x\in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ et $f'(x)<0\Leftrightarrow x\in]-2;2[$

Par conséquent :

- La fonction f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty;-2[$ et $]2;+\infty[$;
- La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-2;2[$.

2) On considère la fonction f définie par : $f(x)=x\sqrt{x^2-x}$

Déterminons d'abord D_f ensemble de définition de la fonction f :

$$x\in D_f\Leftrightarrow\left(x\in\mathbb{R}\text{ et }x^2-x\geq 0\right)\Leftrightarrow x\in]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$$

Par conséquent : $D_f=]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$.

On a pour tout $x\in D_f-\{0;1\}$:

$$f'(x)=\left(x\sqrt{x^2-x}\right)'=(x)'\sqrt{x^2-x}+x\left(\sqrt{x^2-x}\right)'=\sqrt{x^2-x}+\frac{x(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x}}=\frac{4x^2-3x}{2\sqrt{x^2-x}}$$

Comme $\sqrt{x^2-x}>0$, alors le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $4x^2-3x$.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $4x^2-3x>0\Leftrightarrow x(4x-3)>0\Leftrightarrow x\in]-\infty;0[\cup\left]\frac{3}{4};+\infty\right[$.

Par conséquent :

- La fonction f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $\left]\frac{3}{4};+\infty\right[$;
- La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0;\frac{3}{4}\right[$.

Scanné avec CamScanner

Remarques

- Les résultats de la proposition précédente ne sont valables que sur un intervalle.
- La fonction dérivée est un outil puissant pour étudier la monotonie d'une fonction numérique. Pour étudier la monotonie d'une fonction f dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$, on calcule la fonction dérivée f' puis on détermine son signe et on utilise la proposition précédente.

Applications

En utilisant la fonction dérivée, étudier les variations de la fonction f dans chacun des cas suivantes :

1) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x-1}$; 3) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$

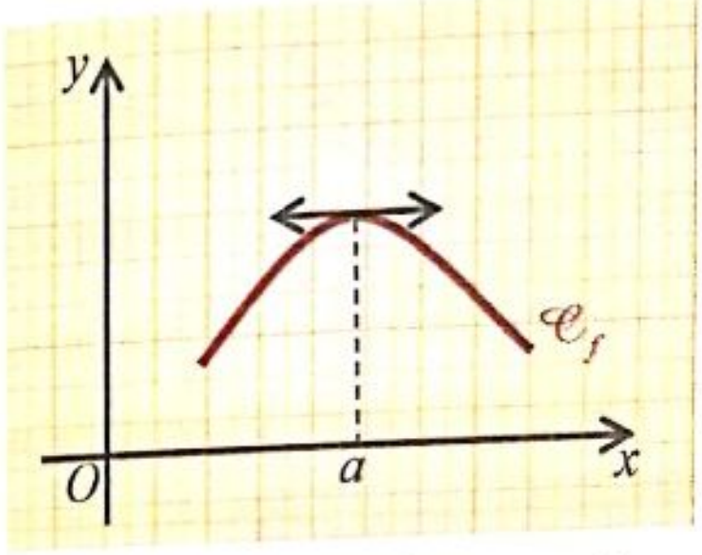
4) $f(x)=\cos(2x)+1$; 5) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$; 6) $f(x)=x\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

4.2. EXTREMA D'UNE FONCTION DÉRIVABLE SUR UN INTERVALLE

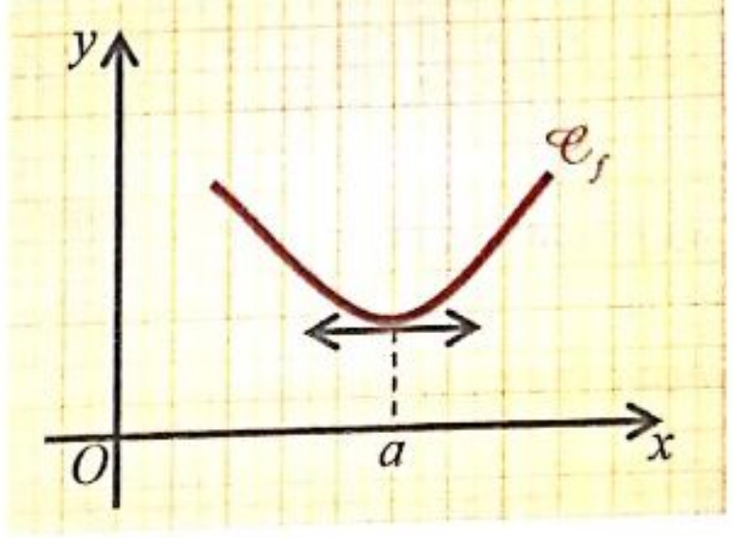
Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

Si f admet un extremum local au point a, alors : $f'(a)=0$.



f présente un maximum en a

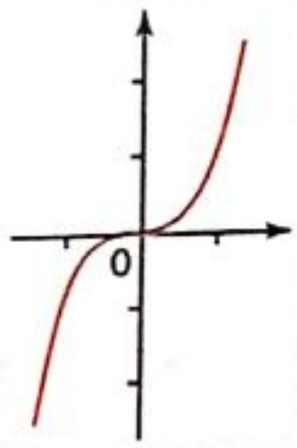


f présente un minimum en a

Remarques

- La réciproque de la proposition précédente est évidemment fausse comme le montre l'exemple classique $f(x)=x^3$ sur $\mathbb{R}$. Pour cet exemple, on a $f'(0)=0$ mais f ne présente pas un extremum en 0.

  La condition $f'(a)=0$ est donc nécessaire mais pas suffisante pour que la fonction f présente un extremum un point a d'un intervalle ouvert I.



- Si f admet un extremum local au point a, alors la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(a;f(a))$ est horizontale.

Scanné avec CamScanner

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum en a.

Exemples

1) On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + \dfrac{1+x}{1+2x}$

• Le domaine de définition de la fonction f est : $D_f = \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

• Calculons les limites de f aux bornes de son domaine de définition :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1+x}{1+2x}\right) = -\infty \text{ car } \lim_{x\to-\infty} x = -\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty}\frac{1+x}{1+2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1+x}{1+2x}\right) = +\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{1+2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+}\left(x+\frac{1+x}{1+2x}\right) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-}\left(x+\frac{1+x}{1+2x}\right) = -\infty$$

• La fonction f est dérivable sur D_f car c'est une fonction rationnelle. De plus, on a pour $x \in D_f$:

$$f'(x) = \left(x+\frac{1+x}{1+2x}\right)' = 1 - \frac{1}{(1+2x)^2} = \frac{(1+2x)^2 - 1}{(1+2x)^2}$$

Et par suite, pour tout $x \in D_f$: $f'(x) = \dfrac{4x(1+x)}{(1+2x)^2}$

Tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

• La fonction f admet deux extremums locaux sur son domaine de définition :

▪ Un minimum local en 0 et qui est $f(0) = 1$.

▪ Un maximum local en -1 et qui est $f(-1) = -1$.

Scanné avec CamScanner

2) On considère la fonction g définie sur $I=\left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ par : $g(x)=\sin x-\cos x$

La fonction g est dérivable sur I en tant que différence de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

De plus, pour tout $x\in I$: $g'(x)=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

On a pour tout $x\in I$: $g'(x)=0\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}$.

Tableau de variations de la fonction g :

x	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	$\sqrt{2}$	↘	0

On en déduit donc que la fonction g admet un maximum absolu en $\frac{3\pi}{4}$ qui est : $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

Applications

Déterminer les extrema de chacune des fonctions suivantes :

$f(x)=4x^3-x^2-1$; $g(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$; $h(x)=\frac{x^2-4}{x^2+1}$

5 DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que la fonction f est deux fois dérivable sur I si f est dérivable sur I et f' dérivable sur I.

La dérivée de la fonction f' s'appelle la dérivée seconde de f est notée f''.

Plus généralement, on définit par récurrence la dérivée $n^{ième}$ de la fonction f, notée $f^{(n)}$, comme suit :

- On pose $f^{(0)}=f$.
- Pour $n\geq 1$, on dit que f est n fois dérivable sur I si elle est $n-1$ fois dérivable sur I et si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I. On pose alors $f^{(n)}=\left(f^{(n-1)}\right)'$.

Exemples

1) On considère la fonction f définie par : $f(x)=6x^3-5x^2+11x-7$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=18x^2-10x+11$; $f''(x)=36x-10$; $f^{(3)}(x)=36$

Enfin, on a pour tout entier $n\geq 4$: $f^{(n)}(x)=0$.

Scanné avec CamScanner

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\ \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

• **Initialisation :** pour $n = 1$, on a : $\cos'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; donc le résultat est vraie.

• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ et montrons que :

$$\cos^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

On a : $\cos^{(n+1)}(x) = \left(\cos^{(n)}(x)\right)' = \left(\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$

Par conséquent : $\cos^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$.

• **Conclusion :** $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\ \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

Applications

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Définir la fonction de la fonction polynôme f définie par : $f(x) = -4x^3 + 6x^2 - 11x + 5$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

b) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}\right)\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n . n!}{(x-1)^{n+1}}$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\ \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

6 L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y'' + \omega^2 y = 0$

Définition

Soit ω un nombre réel non nul.

- L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ où l'inconnue est une fonction y telle que y'' est sa dérivée seconde est appelée équation différentielle.
- Toute fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est appelée solution de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$.

Résoudre l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ signifie la détermination de toutes les solutions de cette équation.

Scanné avec CamScanner

Proposition

Soit ω un nombre réel non nul.

La solution générale de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$ où $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

Exemples

1) La solution générale de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est :

$$y(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x \quad \text{où} \quad (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$$

2) La solution générale de l'équation différentielle $y'' + 2y = 0$ est :

$$y(x) = \alpha\cos\left(\sqrt{2}x\right) + \beta\sin\left(\sqrt{2}x\right) \quad \text{où} \quad (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$$

Proposition

Soit ω un nombre réel non nul et $(x_0 ; y_0 ; y_1) \in \mathbb{R}^3$. Alors l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ possède une solution unique f vérifiant les conditions : $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$

Exemple

Déterminons la solution f de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ vérifiant : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

La solution générale de l'équation $y'' + 4y = 0$ est : $y(x) = \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)$ où $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$.

Comme f est solution de l'équation $y'' + 4y = 0$, alors : $f(x) = \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)$ où $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -2\alpha\sin(2x) + 2\beta\cos(2x)$.

Les conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$ se traduisent donc par le système : $\begin{cases} \alpha = 1 \\ 2\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 1$.

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$

Remarques

- Dans le cas où $\omega = 0$, l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ devient $y'' = 0$. Dans ce cas, la solution générale de l'équation $y'' = 0$ est donnée par : $y(x) = ax + b$ où $(a;b) \in \mathbb{R}^2$.
- La solution générale de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega \neq 0$ peut encore s'écrire sous la forme : $y(x) = \lambda\cos(\omega x + \varphi)$ ou $y(x) = \lambda\sin(\omega x + \varphi)$ avec $(\lambda;\varphi) \in \mathbb{R}^2$.

Applications

1. Résoudre les équations différentielles suivantes : $y'' + 3y = 0$; $y'' + 9y = 0$; $y'' + 5y = 0$.
2. Déterminer la solution G de l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$ telle que : $G\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ et $G'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Scanné avec CamScanner

A NOMBRE DÉRIVÉ – TANGENTE À UNE COURBE

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I=]-\pi;\pi[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{2(\cos x-1)}{\sin x} \;;\; 0<x\leq\pi \\ f(x)=\dfrac{x|x+1|}{x-1} \;;\; -\pi<x\leq 0 \end{cases}$$

1) a) Montrer que la fonction f est dérivable au point $a=0$ en déterminant le nombre dérivé $f'(0)$.

b) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse 0.

2) a) Étudier la dérivabilité de la fonction f au point -1.

La fonction f est-elle dérivable au point -1 ? Justifier la réponse.

b) Déterminer les équations des demi-tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.

SOLUTION

1) a) Montrons que la fonction f est dérivable au point $a=0$:

• Dérivabilité à droite en 0 :

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2(\cos x-1)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}-2\dfrac{1-\cos x}{x^2}\times\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}=-2\times\dfrac{1}{2}\times 1=-1.$

Par conséquent, la fonction f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=-1$.

• Dérivabilité à gauche en 0 :

On a : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x+1|}{x-1}=-1.$

Par conséquent, la fonction f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=-1$.

• Puisque $f'_d(0)=f'_g(0)=-1$, alors la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0)=-1$.

b) L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse 0 est : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$;

par suite : $(T):y=-x$.

2) a) Étude de la dérivabilité de la fonction f au point -1 :

On a : $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{-x}{x-1}=-\dfrac{1}{2}$

Donc, la fonction f est dérivable à droite et à gauche au point -1 et : $f'_d(-1)=\dfrac{1}{2}$ et $f'_g(-1)=-\dfrac{1}{2}$.

Puisque $f'_d(-1)\neq f'_g(-1)$, alors la fonction f n'est pas dérivable au point -1.

Scanné avec CamScanner

b) Les équations des demi-tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1 :

• Pour la demi-tangente à droite :

$$(T_d):\begin{cases} y = f'_d(-1)(x+1)+f(-1) \\ x \geq -1 \end{cases}, \text{ ce qui donne : } (T_d):\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}(x+1) \\ x \geq -1 \end{cases}$$

• Pour la demi-tangente à gauche :

$$(T_g):\begin{cases} y = f'_g(-1)(x+1)+f(-1) \\ x \leq -1 \end{cases}, \text{ ce qui donne : } (T_g):\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}(x+1) \\ x \leq -1 \end{cases}$$

• Pour montrer qu'une fonction f est dérivable en un point x_0, on peut :



▪ Appliquer la définition et montrer que : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell \in \mathbb{R}$

▪ Montrer que f est dérivable à gauche et à droite, et son nombre dérivé à gauche est égal à son nombre dérivé à droite : $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

▪ Utiliser les opérations sur les fonctions dérivables.

▪ Vérifier que la courbe admet en $A(x_0, f(x_0))$ une tangente non verticale.

• Dans le cas où : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$, f n'est pas dérivable en x_0 et sa courbe représentative admet une tangente parallèle à (Oy) au point $M_0(x_0, f(x_0))$.

B DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE

On considère la fonction numérique définie par : $f(x) = \sqrt{3x-2}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^3$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction f puis définir sa fonction dérivée f'.

SOLUTION

1) Notons D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

On a : $x \in D_f \Leftrightarrow (3x-2 \geq 0 \text{ et } x-1 \neq 0) \Leftrightarrow \left(x \geq \dfrac{2}{3} \text{ et } x \neq 1\right)$. Ainsi : $D_f = \left[\dfrac{2}{3};1\right[\cup]1;+\infty[$.

2) On a pour tout $x \in D_f$: $f(x) = g(3x-2) \times h(x)$ où : $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = \left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^3$.

Scanné avec CamScanner

On sait que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que la fonction polynôme $x \mapsto 3x-2$ est dérivable sur D_f ; donc la fonction $x \mapsto g(3x-2)$ est dérivable sur l'ensemble $D_f - \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

D'autre part, la fonction h est dérivable sur son ensemble de définition car c'est une fonction rationnelle.

Donc, la fonction h est dérivable sur D_f. Par suite, la fonction f est dérivable sur l'ensemble $D_f - \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

On a maintenant pour tout $x \in D_f - \left\{\frac{2}{3}\right\}$: $f'(x) = \left(g(3x-2)\right)' h(x) + g(3x-2)h'(x)$

et : $\left(g(3x-2)\right)' = 3g'(3x-2) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}$ et $h'(x) = 3\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)'\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2 = \dfrac{-9}{(x-1)^2}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)$;

Par suite : $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^3 - \dfrac{9\sqrt{3x-2}}{(x-1)^2}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2$.



- Pour montrer qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I et calculer sa dérivée, il suffit d'utiliser les théorèmes d'opérations sur les fonctions dérivables.

Pratiquement : il s'agit de considérer que la fonction f est une somme, un produit, un quotient, ...et d'appliquer le théorème et la formule qui correspondent.

Attention à bien vérifier que les conditions d'application sont satisfaites ; si ce n'est pas le cas, il faut revenir à l'une des méthodes précédentes.

Il va sans dire qu'il faut par conséquent connaître sur le bout des doigts les dérivées des fonctions classiques, ainsi que les formules de dérivation. Par exemple : $(k \in \mathbb{R})$

$$(u+v)' = u'+v' \quad ; \quad (uv)' = u'v+uv' \quad ; \quad (u^n)' = nu'u^{n-1} \quad ; \quad (ku)' = ku'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad ; \quad \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad ; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2} \quad ; \quad \left(f(ax+b)\right)' = a f'(ax+b)$$

$$\left(\sin(ax+b)\right)' = a\cos(ax+b) \quad ; \quad \left(\cos(ax+b)\right)' = -a\sin(ax+b)$$

C FONCTION DÉRIVÉE, VARIATIONS ET EXTREMUMS

1) Étudier les variations de chacune des fonctions suivantes puis déterminer ses extremums (s'ils existent) :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1 \quad ; \quad g(x) = -\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} \quad ; \quad h(x) = x-1-\sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

2) Soit φ la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $\varphi(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$.

Montrer que pour tout $x \in I$: $\varphi'(x) \geq 0$ puis en déduire que : $(\forall x \in I)\ 3x \leq 2\sin x + \tan x$.

Scanné avec CamScanner

SOLUTION

1) Pour la fonction f :

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme. De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Puisque $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour la fonction g :

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ car c'est une fonction rationnelle. De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$:

$$g'(x) = -\frac{(2x+1)(x-1)^2 - 2(x^2+x+1)(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3(x+1)}{(x-1)^3}$$

Puisque $\frac{3}{(x-1)^2} > 0$, alors le signe de $g'(x)$ est celui de $\frac{x+1}{x-1}$.

Tableau de variations de la fonction g :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$g(x)$	-1	↗	$-\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↗	-1

La fonction g' s'annule en -1 en changeant de signe. Ainsi, la fonction g admet un maximum relatif au point -1 qui est : $f(-1) = -\frac{1}{4}$.

Pour la fonction h :

Soit D_h le domaine de définition de la fonction h. On a :

$$x \in D_h \Leftrightarrow \left(x - 1 \neq 0 \text{ et } \frac{x}{x-1} \geq 0\right) \Leftrightarrow (x \leq 0 \text{ ou } x > 1)$$

Il s'ensuit donc que : $D_h =]-\infty;0] \cup]1;+\infty[$.

La fonction h est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]1;+\infty[$. Du plus, on a pour tout

$$x \in D_h - \{0\} : \quad h'(x) = (x-1)' - \left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}\right)' = 1 - \frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{2\sqrt{\frac{x}{x-1}}} = 1 + \frac{1}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x}{x-1}}}$$

On a donc pour tout $x \in D_h - \{0\}$, $h'(x) > 0$.

Ainsi, la fonction h est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]1;+\infty[$.

Scanné avec CamScanner

Tableau de variations de la fonction h :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$h'(x)$	$+$		‖		‖		$+$
$h(x)$	$-\infty$	↗	-1 ‖		$-\infty$	↗	$+\infty$

2) Soit φ la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $\varphi(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$.

La fonction φ étant dérivable sur I en tant que somme des fonctions dérivables sur cet intervalle.

On a pour tout $x \in I$: $\varphi'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}$.

On pose : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. On remarque bien que 1 est une racine du polynôme P ; donc en factorisant par $(x-1)$, on obtient : $P(x) = (x-1)(2x^2 - x - 1)$.

Comme : $2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$, alors : $P(x) = (x-1)^2(2x+1)$.

Par conséquent, pour tout $x \in I$: $\varphi'(x) = \frac{(\cos x - 1)^2(2\cos x + 1)}{\cos^2 x}$.

Puisque $x \in I$, alors : $\cos x > 0$. Par suite : $(\forall x \in I)\ \ \varphi'(x) \geq 0$

Montrons maintenant que : $(\forall x \in I)\ 3x \leq 2\sin x + \tan x$.

Puisque $\varphi'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors la fonction φ est croissante sur I .

Donc pour tout $x \in I$: $\varphi(x) \geq \varphi(0)$, ce qui donne : $2\sin x + \tan x \geq 3x$.

En résumé : $(\forall x \in I)\ 3x \leq 2\sin x + \tan x$.



- Pour étudier le sens de variation d'une fonction f dérivable sur son ensemble de définition, on étudie le signe de $f'(x)$ sur cet ensemble. En pratique, on étudie le sens de variation d'une fonction dérivable sur un ensemble en prenant les recommandations suivantes :
  - Avant de dériver une fonction, on justifie (même brièvement) sa dérivabilité.
  - On ne parle de monotonie que sur un intervalle, pas sur une réunion d'intervalles.
  - Pour étudier le signe de $f'(x)$, il peut être utile d'étudier une fonction auxiliaire.
  - Pour étudier les extremums locaux d'une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert $]a;b[$, il suffit de calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]a;b[$:

Scanné avec CamScanner

f admet alors un extremum local en x_0 si et seulement si f' s'annule en x_0 et change de signe de part et d'autre en x_0.

• Si une fonction est à dérivée strictement positive, la fonction est strictement croissante, mais l'inverse n'est pas vrai. Cependant, on dispose du résultat suivant : Si la dérivée est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur un intervalle, alors la fonction est strictement croissante.

D DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$ où $(a;b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Montrer par récurrence que pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$: $\quad f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n\, n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}$.

On rappelle que n ! désigne le produit $1 \times 2 \times \ldots \times n$ (se lit factorielle n)

SOLUTION

Montrons par récurrence que pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$: $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n\, n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

Initialisation : pour $n=1$, on a : $f'(x) = -\dfrac{a}{(ax+b)^2} = \dfrac{(-1)^1\, a}{(ax+b)^2}$.

Hérédité : Supposons que $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n\, n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}$ et montrons que $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)!\, a^{n+1}}{(ax+b)^{n+2}}$

On a : $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left(\dfrac{(-1)^n\, n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}\right)' = -(-1)^n\, n! a^n \times \dfrac{\left((ax+b)^{n+1}\right)'}{\left((ax+b)^{n+1}\right)^2}$

Donc : $f^{(n+1)}(x) = -(-1)^n\, n! a^n \times \dfrac{(n+1)a(ax+b)^n}{(ax+b)^{2n+2}} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)! a^{n+1}}{(ax+b)^{n+2}}$

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$: $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n\, n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES D'APPLICATION

DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT

EXERCICE 01

En utilisant la définition de la dérivabilité d'une fonction en un point, calculer le nombre dérivé de la fonction f au point a :

1) $f(x)=x^2+3x-1$ et $a=1$.

2) $f(x)=x^3+x^2$ et $a=1$.

3) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ et $a=0$.

4) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ et $a=\sqrt{3}$.

5) $f(x)=\sqrt{2x-1}$ et $a=4$.

6) $f(x)=\sin(2x)$ et $a=\dfrac{\pi}{6}$.

7) $f(x)=\cos x$ et $a=\pi$.

8) $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ et $a=-3$.

9) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} ; & x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases}$ et $a=0$.

10) $\begin{cases}f(x)=\dfrac{x^3+x^2-2}{x^2-1} ; & x\neq 1\\ f(1)=\dfrac{5}{2}\end{cases}$ et $a=1$.

EXERCICE 02

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $(\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2)\ \ f(x+y)=f(x)\times f(y)$.

1) Montrer que si la fonction f est dérivable en 0, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \ f'(x)=f'(0)f(x)$

NOMBRE DÉRIVÉ ET TANGENTE À UNE COURBE

EXERCICE 03

Dans chacun des cas suivants, donner une équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a :

1) $f(x)=3x-4$ et $a=2020$.

2) $f(x)=x^2-4x+3$ et $a=1$.

3) $f(x)=\sqrt{x}$ et $a=16$.

4) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $a=-\dfrac{3}{2}$.

5) $f(x)=\sqrt{3x+4}$ et $a=\dfrac{5}{3}$.

6) $f(x)=(3x+1)^2$ et $a=0$.

7) $f(x)=\cos(2x)$ et $a=\dfrac{\pi}{4}$.

EXERCICE 04

Soit f une fonction numérique et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative admettant au point $A(1;f(1))$ une tangente (T) d'équation : $(T): y=2x-1$

Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.

EXERCICE 05

Dans chacun des cas suivants, la courbe de la fonction f admet-elle une tangente (T_a) en un point a dont le coefficient directeur est égal m :

1) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3$ et $m=3$.

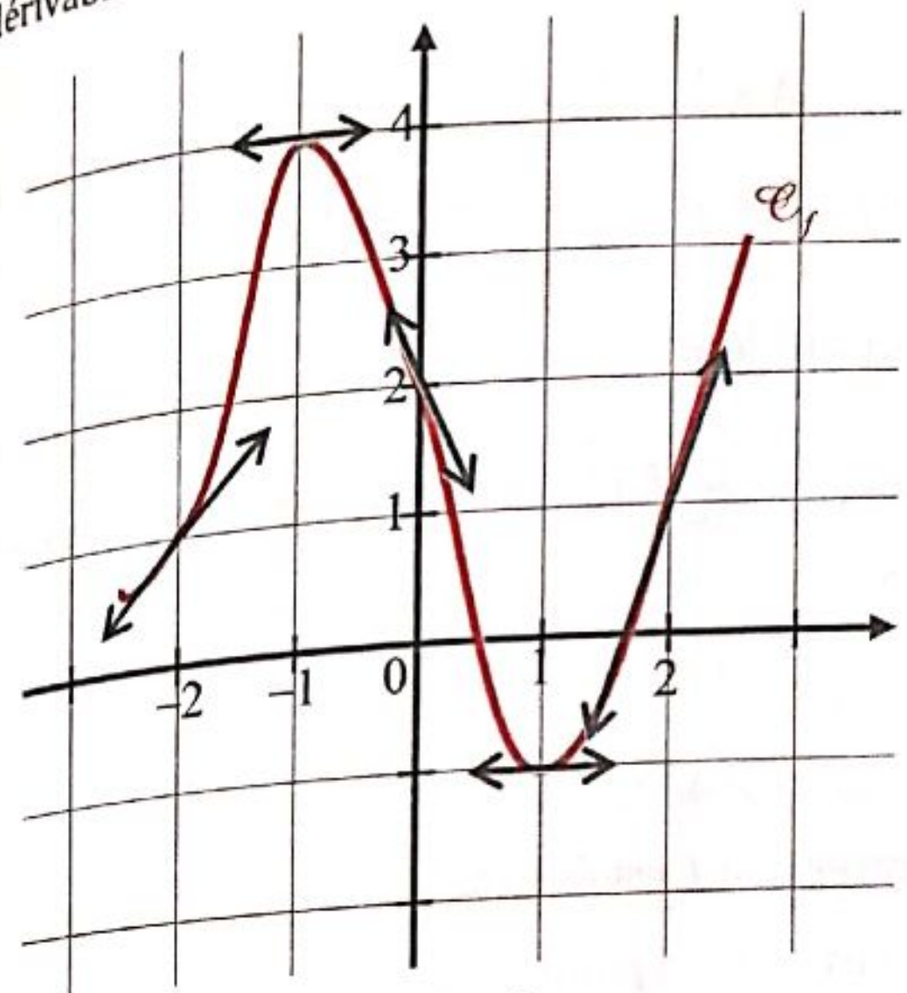
2) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+2x$ et $m=1$.

3) $f(x)=\sin(2x)$ et $m=-\sqrt{3}$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 06

La courbe $\mathscr{C}_f$ en-dessous représente une fonction dérivable sur un intervalle I.



En utilisant ce graphe, déterminer :

$f'(-2)$; $f'(-1)$; $f'(0)$; $f'(1)$; $f'(2)$

NOMBRE DÉRIVÉ ET APPROXIMATION

EXERCICE 07

On sait que si f est une fonction dérivable en un point a d'un intervalle ouvert I, alors pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in I$, $f'(a)h+f(a)$ est une approximation du nombre $f(a+h)$ lorsque h est proche de 0 et on écrit : $f(a+h) \approx f'(a)h+f(a)$

1) Copier puis compléter dans votre cahier :

Pour tout h proche de 0, on a :

$(1+h)^2 \approx$ ..... ; $(1+h)^3 \approx$ .....

$\dfrac{1}{1+h} \approx$ ..... ; $\sqrt{1+h} \approx$ .....

$\sin h \approx$ ..... ; $\cos h \approx$ .....

2) En déduire une valeur approchée de chacun des nombres suivants :

$a=(1,004)^2$; $b=(0,0981)^2$; $c=(1,05)^3$

$d=(0,95)^3$; $e=\sqrt{1,0004}$; $f=\sqrt{0,984}$

EXERCICE 08

On considère les fonctions f, g et h définies par :

$f(x)=x^2-x$; $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$; $h(x)=\tan x$

1) Déterminer la fonction affine tangente de la fonction numérique f au point -1 puis donner une valeur approchée du nombre $f(-1,002)$.

2) Déterminer une valeur approchée de chacun des nombres suivants :

$f(-0,02)$; $g(0,99)$; $g(1,008)$; $h(0,01)$

EXERCICE 09

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a puis donner une valeur approchée à $f(\alpha)$:

1) $f(x)=x^2-x+1$ et $a=1$ et $\alpha=1,03$.

2) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ et $a=2$ et $\alpha=1,98$.

3) $f(x)=\sqrt{2x+3}$ et $a=-1$ et $\alpha=-0,96$.

4) $f(x)=\sin x+\cos x$ et $a=0$ et $\alpha=0,091$.

5) $f(x)=\tan x$ et $a=\dfrac{\pi}{4}$ et $\alpha=40^\circ$.

6) $f(x)=\sin x$ et $a=\dfrac{\pi}{3}$ et $\alpha=63^\circ$.

EXERCICE 10

Soit f la fonction numérique définie sur $]-\pi;\pi[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{\tan\dfrac{x}{2}} \; ; \; x \neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction f est dérivable en 0.

2) Donner une valeur approchée au nombre $f(10^{-5})$.

Scanné avec CamScanner

DÉRIVABILITÉ À DROITE - DÉRIVABILITÉ À GAUCHE

EXERCICE 11

Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre dérivé à droite et le nombre dérivé à gauche de la fonction f au point a :

1) $f(x)=x^3+x-|x|$ et $a=0$.

2) $f(x)=x^3+|x-1|$ et $a=1$.

3) $f(x)=x+|x^2-4|$ et $a=-2$.

4) $f(x)=x|\sin x|$ et $a=\pi$.

5) $\begin{cases} f(x)=x^2+x & ; x\geq 1 \\ f(x)=\dfrac{2}{2-x} & ; x<1 \end{cases}$ et $a=1$.

6) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x+1} & ; x\geq 0 \\ f(x)=\cos(2x) & ; x<0 \end{cases}$ et $a=0$.

7) $\begin{cases} f(x)=\sin x+\cos x & ; x\geq 0 \\ f(x)=x^3+x^2+x+1 & ; x<0 \end{cases}$ et $a=0$.

8) $\begin{cases} f(x)=\tan x & ; 0\leq x<\dfrac{\pi}{2} \\ f(x)=\dfrac{2\cos x-2}{x} & ; x<0 \end{cases}$ et $a=0$.

EXERCICE 12

Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité à droite et à gauche de la fonction f au point a en déterminant les équations des deux demi-tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a :

1) $f(x)=|x^3-3x|$ et $a=3$.

2) $f(x)=x\sqrt{|x^2+x|}$ et $a=-1$.

3) $f(x)=|x|\sqrt{|x|}$ et $a=0$.

4) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x-1} & ; x\geq 1 \\ f(x)=x^2+x-2 & ; x<1 \end{cases}$ et $a=1$.

5) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x-1}{x-3} & ; x>4 \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+12}{2x} & ; 0\leq x<4 \end{cases}$ et $a=4$.

6) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+x-2}{x-1} & ; x>1 \\ f(x)=4x^3+x^2-1 & ; x\leq 1 \end{cases}$ et $a=1$.

7) $f(x)=|\cos x|$ et $a=\dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 13

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=x-\sin x & ; x\geq 0 \\ f(x)=1-\cos(9x) & ; x<0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en 0 et que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 et parallèle à l'axe des abscisses.

EXERCICE 14

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=x^3-\dfrac{1}{x^2} & ; x\geq 1 \\ f(x)=a\sin(x-1) & ; x<1 \end{cases} \quad (\text{où } a\in\mathbb{R})$$

1) Montrer que f est dérivable à droite au point 1 et déterminer $f'_d(1)$.

2) Déterminer la valeur de a pour que la fonction f soit dérivable en 1 puis donner dans ce cas l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 .

EXERCICE 15

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x} & ; x<-1 \\ f(x)=6x^2+11x+4 & ; x\geq -1 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en -1 puis donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(-1;-1)$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 16

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x-1} \ ; \ x\geq 1 \\ f(x)=x^2-1 \ ; \ x<1 \end{cases}$$

1) Étudier la dérivabilité de la fonction f en 1.

2) Déterminant les équations des deux demi-tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(1;0)$.

3) Tracer les demi-tangentes au point $A(1;0)$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un même repère.

FONCTION DÉRIVÉE – TECHNIQUES DE CALCUL

EXERCICE 17

Calculer la dérivée de la fonction f après avoir déterminé l'ensemble de définition de f et f' :

1) $f(x)=2x^3-4x^2+x-5$; 2) $f(x)=x^6+\dfrac{1}{x}$

3) $f(x)=-x^4+3x^2+5x+2$; 4) $f(x)=x^4+\sqrt{x}$

5) $f(x)=2x^3-x^2-\dfrac{2}{x}$; 6) $f(x)=\cos x-\sin x$

7) $f(x)=\sqrt{2}x^2-2\sqrt{x}+\dfrac{4}{x}$; 8) $f(x)=\tan x-x$

EXERCICE 18

Calculer la dérivée de la fonction f après avoir déterminé l'ensemble de définition de f et f' :

1) $f(x)=(2x-3)(x^3-2x^2+x+7)$

2) $f(x)=x^2(1+2\sqrt{x})$; 3) $f(x)=\cos x.\sin x$

4) $f(x)=(x^2+x+1)\sin x$; 5) $f(x)=x\sqrt{x}$

6) $f(x)=\sqrt{x}(1-2\cos x)$; 7) $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\tan x$

8) $f(x)=\left(x+\sqrt{x}\right)^6$; 9) $f(x)=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)^2$

10) $f(x)=\cos^4 x+\sin^3 x$; 11) $f(x)=(x\tan x)^5$

EXERCICE 19

Calculer la dérivée de la fonction f après avoir déterminé l'ensemble de définition de f et f' :

1) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{3x+4}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x^3}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$; 6) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$; 7) $f(x)=\dfrac{-1}{\tan x}$

8) $f(x)=\dfrac{2}{x^3+x^2+x-3}$; 9) $f(x)=\dfrac{-3}{(x-1)(x+2)}$

EXERCICE 20

Calculer la dérivée de la fonction f après avoir déterminé l'ensemble de définition de f et f' :

1) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$; 2) $f(x)=\dfrac{3x+4}{2x-1}$

3) $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x}-1}$; 4) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x-2}$

5) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{2x^2-3x-2}$; 6) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x-1}$

7) $f(x)=\dfrac{\cos^2 x+\cos x}{\sin x}$; 8) $f(x)=\dfrac{2\sin x-1}{\cos x+1}$

9) $f(x)=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)^2$; 10) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-x}{x-1}$

11) $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-4}$; 12) $f(x)=\dfrac{3\tan x+5}{1-\tan x}$

EXERCICE 21

Calculer la dérivée de la fonction f après avoir déterminé l'ensemble de définition de f et f' :

1) $f(x)=\sqrt{3x+2}$; 2) $f(x)=\sqrt{2x-1}$

3) $f(x)=\sqrt{x^2-x}$; 4) $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$

5) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$; 6) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+1}}$

7) $f(x)=\sqrt{x^2+x^2}$; 8) $f(x)=\sqrt{\sqrt{x}-1}$

Scanné avec CamScanner

5 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 22

Calculer la dérivée de la fonction f après avoir déterminé l'ensemble de définition de f et f' :

1) $f(x)=\cos(2x+1)$; 2) $f(x)=\sin(\pi x+3)$

3) $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$; 4) $f(x)=\cos(2x)\sin(3x)$

5) $f(x)=\sin(3x)+\tan(2x)$; 6) $f(x)=\frac{\cos(3x)}{\sin(2x)}$

7) $f(x)=\sin^3(2x+1)$; 8) $f(x)=\tan^2 x+\sin x$

9) $f(x)=\cos^3 x-\sin^3 x+2\cos x+1$.

EXERCICE 23

Déterminer l'intervalle ou les intervalles où la fonction f est dérivable puis déterminer sa dérivée f' :

1) $f(x)=(x^3-x^2+2x-1)(x^2-1)$

2) $f(x)=\frac{2}{x^2-x+1}+\sqrt{x}$

3) $f(x)=x-\sqrt{x^2-x}$

4) $f(x)=x^2+1-\frac{1}{x^2+1}$

5) $f(x)=\frac{x^2-2x+5}{3x^2+4x-7}$

6) $f(x)=-\frac{1}{2}x+1-\frac{2x+1}{x+3}$

7) $f(x)=x^3\left(1+\sqrt{x}\right)$

8) $f(x)=(2x+1)\sqrt{x-2}$

9) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)}$

10) $f(x)=\frac{(2x+1)^2}{x^2-5}+\sqrt{x^2-5}$

11) $f(x)=3x+4+\sqrt{x^2+1}$

12) $f(x)=\sin x.\cos x+\sin(2x)$

13) $f(x)=\sin^3 x-3\cos(2x)$

EXERCICE 24

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x)=x^3-x^2 \ ; \ x\geq 0 \\ g(x)=\dfrac{1-\cos x}{x} \ ; \ x<0 \end{cases}$$

1) Étudier la dérivabilité de la fonction g en $x_0=0$ puis interpréter les résultats géométriquement.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ puis calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.

EXERCICE 25

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=|x|\cos(3x)$$

1) Étudier la dérivabilité de la fonction f en $x_0=0$ puis interpréter les résultats géométriquement.

2) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.

3) Écrire l'équation de la tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point $A\left(\frac{\pi}{2};0\right)$.

EXERCICE 26

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par :

$$f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x+1}$$

et $\mathscr{C}_f$ son graphe dans un repère orthonormé.

1) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$.

2) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle une tangente de coefficient directeur égal à -4 ?

3) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle une tangente horizontale ?

EXERCICE 27

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I. Montrer que si la fonction f est dérivable en a, alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Scanné avec CamScanner

APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION

EXERCICE 28

Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f :

1) $f(x)=x^2-3x+2$; 2) $f(x)=x^3-2x$

3) $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}$; 4) $f(x)=x^2(x-1)^3$

5) $f(x)=1-x^3-x^5$; 6) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

7) $f(x)=(x^2-4x)^2$; 8) $f(x)=3x^4+4x^3+1$

EXERCICE 29

Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f :

1) $f(x)=\frac{-3}{x^2+x+1}$; 2) $f(x)=x-\cos x$

3) $f(x)=2x+\sin x$; 4) $f(x)=\sqrt{x^2+3x+5}$

5) $f(x)=\frac{1}{1+\cos^2 x}$; 6) $f(x)=\frac{x^3}{x^4+2}$

EXERCICE 30

Étudier les variations de la fonction numérique f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=x+\frac{4}{x}$ et $I=\mathbb{R}_+^*$.

2) $f(x)=x^2+\sqrt{x}$ et $I=\mathbb{R}^+$.

3) $f(x)=\frac{2x-1}{3x+4}$ et $I=\left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$.

4) $f(x)=3-\cos^2 x$ et $I=[0;\pi]$.

5) $f(x)=x^3-\frac{1}{x}$ et $I=\mathbb{R}_-^*$.

6) $f(x)=x^3-\cos(2x)$ et $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

7) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$ et $I=]-\infty;-3]$.

EXERCICE 31

Étudier les variations de la fonction numérique f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=2\sin x-\sin(2x)$ et $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

2) $f(x)=\sin x+\cos x$ et $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

3) $f(x)=\frac{2\sin x+1}{3\sin x+4}$ et $I=[0;\pi]$.

4) $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ et $I=[1;+\infty[$.

5) $f(x)=x-\sqrt{x^2+2x+2}$ et $I=\mathbb{R}$.

6) $f(x)=(x-1)\sqrt{x}$ et $I=\mathbb{R}^+$.

7) $f(x)=\frac{x^2-3x}{x+1}$ et $I=]-1;+\infty[$.

EXERCICE 32

Déterminer les extremums relatifs et absolus de la fonction f (s'ils existent) :

1) $f(x)=x^3-3x+5$; 2) $f(x)=\frac{5x+4}{x+2}$

3) $f(x)=-x^3+2x^2-5x+3$; 4) $f(x)=\frac{8}{x^2}-2x$

5) $f(x)=x^4-x^2+1$; 6) $f(x)=2x+3+\frac{1}{8x-5}$

7) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$; 8) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-4}$

9) $f(x)=-x+\sqrt{2x+1}$; 10) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x}$

EXERCICE 33

Déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de la fonction f sur l'intervalle I (si elles existent) :

1) $f(x)=x^3-3x+3$ et $I=\left[-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right]$.

2) $f(x)=-x^3+x^2$ et $I=[-1;+\infty[$.

3) $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$ et $I=[-12;12]$.

4) $f(x)=\cos^2 x+\sin x$ et $I=[-\pi;\pi]$.

Scanné avec CamScanner

5) $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$ et $I=[-3;0[$.

6) $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin(2x)+\cos x$ et $I=[0;2\pi]$.

7) $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x^4-2x^2-1\right)$ et $I=\mathbb{R}$.

8) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$ et $I=]-\infty;1[$.

9) $f(x)=x-2\sin x$ et $I=[0;2\pi]$.

10) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x$ et $I=\mathbb{R}$.

EXERCICE 34

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(1+x)^n \quad \text{où} \quad n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$$

1) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2) En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{2018}-1}{x}=2018$.

EXERCICE 35

Soit g la fonction numérique définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right[$

par : $g(x)=\tan(2x)$

1) Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\left]-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right[$.

2) En déduire la valeur de la limite :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\tan(2x)-\sqrt{3}}{x-\frac{\pi}{6}}$$

EXERCICE 36

En utilisant la notion du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5+3x^4-7x^3+x^2+x+1}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x\sin x}{x-\pi}$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos^3 x}{x-\pi}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(x+1)^3\cos x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}\cos(\pi x)+1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{3x-\pi}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x+\sin x)^3-1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)+\cos x-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(2x).\cos x}{x-\pi}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{4x-\pi}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\sin x}+x^2+x-}{x}$

EXERCICE 37

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $x+y=10$.

Déterminer x et y pour que le produit xy soit maxim

EXERCICE 38

Soit $(x;y)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2$ tels que : $xy=16$. Déterminer x et y pour que la somme x^3+3y soit minimale.

EXERCICE 39

L'aire d'un rectangle est $64\,m^2$.

Déterminer les dimensions de ce rectangle pour que son périmètre soit minimale.

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y''+\omega^2 y=0$

EXERCICE 40

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y''+y=0$; 2) $y''=-5y$; 3) $y''+8y=0$

4) $2y''+7y=0$; 5) $4y''+9y=0$

EXERCICE 41

Déterminer la solution y_0 de l'équation différentielle (E) vérifiant : $y_0(0)=x_0$ et $y_0\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=z_0$.

1) $(E): y''+4y=0$ et $x_0=1$ et $z_0=0$.

2) $(E): y''+9y=0$ et $x_0=2$ et $z_0=0$.

3) $(E): y''+\dfrac{9}{4}y=0$ et $x_0=-1$ et $z_0=1$.

4) $(E): 16y''+25y=0$ et $x_0=-3$ et $z_0=2$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 42

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x)=f(x)-f(-x)$ et $h(x)=f(x)+f(-x)$

1) Montrer que g et h sont dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer leurs dérivées.

2) En déduire que :

a) si f est paire, alors f' est impaire.

b) si f est impaire, alors f' est paire.

c) si f' est impaire, alors f est paire.

d) si f' est paire et $f(0)=0$, alors f est impaire.

EXERCICE 43

1) Déterminer une fonction polynôme P du second degré telle que :

$P(0)=1$ et $P'(0)=1$ et $P'(1)=0$

2) Déterminer une fonction polynôme P du troisième degré telle que :

$Q(0)=Q(1)=1$ et $Q'(1)=-1$ et $Q'(-1)=2$

EXERCICE 44

Soit f et g les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-|x|$ et $g(x)=|x|+x$.

1) Vérifier que f et g ne sont pas dérivables en 0.

2) Les fonctions $f+g$ et $f.g$ sont-elles dérivables en 0 ? Qu'en déduit-on ?

EXERCICE 45

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-x^4+2x^2+x$$

Montrer que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(-1;0)$ est confondue à la tangente à $\mathscr{C}_f$ en un autre point à déterminer.

EXERCICE 46

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et on considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x+1)^n$.

1) Calculer $f'(x)$ par deux façons différentes.

2) En déduire, en fonction de n, la somme suivante :

$$H=\sum_{k=1}^{n}k.C_n^k$$

EXERCICE 47

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3-5x^2+2$$

Déterminer les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans chacun des cas suivants :

1) La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en ces points est parallèle à l'axe des abscisses.

2) La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en ces points est parallèle à la droite d'équation : $y=-3x+1$.

3) La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en ces points est orthogonale à la droite d'équation : $y=\frac{1}{7}x-4$.

EXERCICE 48

Étudier les variations de la fonction numérique f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=x^3-3x^2+1$; 2) $f(x)=\sqrt{x^2-3x-4}$

3) $f(x)=\dfrac{x^2+x-3}{x^2+x-2}$; 4) $f(x)=\dfrac{x^2+x-3}{x+3}$

5) $f(x)=x-\sqrt{x^2+2}$; 6) $f(x)=3x+4-\dfrac{1}{x-2}$

7) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-2x^3+\dfrac{11}{2}x^2-6x+1$.

8) $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}-2x$.

Scanné avec CamScanner

5 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 49

Étudier les variations de la fonction numérique f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ et $I=]-\pi;\pi[$.

2) $f(x)=\cos x(\sin x+\cos x)$ et $I=[0;\pi]$.

3) $f(x)=\cos(2x)+\sin(2x)$ et $I=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

4) $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin(2x)+\dfrac{1}{3}\sin(3x)$ et $I=[0;\pi]$.

EXERCICE 50

Déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de la fonction f sur l'intervalle I (si elles existent) :

1) $f(x)=1+x^4-x^2$ et $I=[-2;3]$.

2) $f(x)=2x+\cos(2x)$ et $I=[-2;-1]$.

3) $f(x)=\dfrac{x^2+x-3}{x^2+x-2}$ et $I=]-2;-1[$.

4) $\begin{cases} f(x)=x^2+x \ ; & x\le 0 \\ f(x)=x^3-x^2 \ ; & x>0 \end{cases}$ et $I=\mathbb{R}$.

EXERCICE 51

Soit p et q deux réels strictement positifs tels que :

$$p+q=1$$

Montrer que : $\left(1+\dfrac{1}{p}\right)\left(1+\dfrac{1}{q}\right)\ge 9$

Indication : on pourra étudier les variations de la fonction f définie par : $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{1-x}\right)$

EXERCICE 52

Soit a, b et c des réels strictement positifs.

Montrer que : $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{a}\ge 6$.

EXERCICE 53

Prouver l'inégalité suivante (dite de Bernoulli) :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ (1+x)^n\ge 1+nx$$

EXERCICE 54

Prouver l'inégalité suivante (dite de Huygens) :

$$\left(\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right)\ 2\sin x+\tan x\ge 3x$$

EXERCICE 55

Soit f et g les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^4-3x+1$ et $g(x)=2x^3-3x-11$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose : $d(x)=f(x)-g(x)$.

1) Étudier les variations de la fonction d.

2) En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ d(x)>0$

puis étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

EXERCICE 56

Soit f et g deux fonctions numériques n fois dérivables sur un intervalle I où $n\in\mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence sur n que :

$$(\forall x\in I)\ (fg)^{(n)}(x)=\sum C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)}(x)$$

2) Soit H la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x)=x^3\sin(2x)$$

En utilisant la question 1), calculer : $H^{(2020)}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

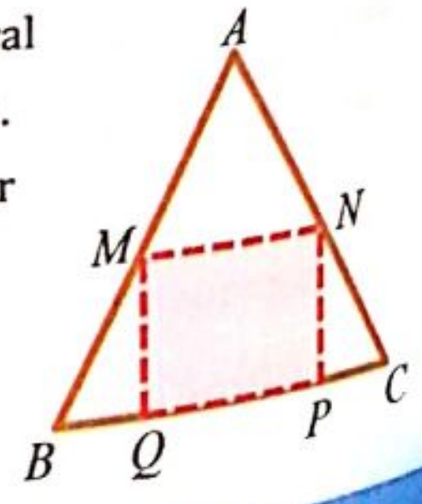
EXERCICE 57

1) Parmi les rectangles ayant le même périmètre p, quel est celui qui a la plus grande aire ?

2) Parmi les rectangles ayant la même aire S, quel est celui qui a le plus grand périmètre ?

EXERCICE 58

Soit ABC un triangle équilatéral dont la longueur de côté est a. On veut construire à l'intérieur de ABC un rectangle $MNPQ$ et dont l'aire est maximale. Déterminer les dimensions de ce rectangle.



Scanné avec CamScanner

EXERCICE 59

On considère la fonction numérique h définie par :

$$h(x)=\frac{2x^2-3x}{(x-1)^2}$$

1) Déterminer D ensemble de définition de h.

2) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$; $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$

3) Montrer que pour tout $x\in D$:

$$h'(x)=\frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{3-x}{x-1}\right)$$

puis étudier les variations de la fonction h.

4) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_h$.

EXERCICE 60

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^4-x^3+x^2-\frac{3}{4}x+1$$

1) Déterminer la dérivée de la fonction f.

2) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f''(x)=2\left(1-3x+6x^2\right)$

3) a) Donner le tableau de variations de la fonction f'.

b) Calculer $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

4) Donner le tableau de variations de la fonction f.

EXERCICE 61

Soit φ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x)=2\sin^2 x+4\sin x+2$$

1) Montrer que φ est périodique de période 2π.

2) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \varphi'(x)=4\cos x(1+\sin x)$

3) Donner le tableau de variation de la fonction φ sur l'intervalle $[-\pi;3\pi]$.

4) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction φ au point d'abscisse 0.

5) Calculer $\varphi''(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

EXERCICE 62

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{4}{x+1}$$

1) a) Déterminer D ensemble de définition de f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de D.

2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D$.

b) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au point d'abscisse -3.

3) a) Montrer que pour tout $x\in D$:

$$f''(x)=\frac{(x-1)\left(x^2+4x+7\right)}{(x+1)^2}$$

b) En déduire la monotonie de la fonction f'.

c) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout $x\in D$.

4) Donner le tableau de variations de la fonction f.

EXERCICE 63

Soit α un réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{3}\right]$.

On considère la fonction f définie sur $I=\left]0;\frac{\pi-\alpha}{2}\right[$ par : $f(x)=\sin x+\sin\alpha+\sin(x+\alpha)$

1) a) Montrer que pour tout $x\in I$:

$$f'(x)=2\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)$$

b) Étudier la monotonie de la fonction f sur I.

2) Soit ABC un triangle, p son demi-périmètre et R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

En déduire que : $p\le\frac{3\sqrt{3}}{2}R$.

EXERCICE 64

Montrer que pour tous a et b de $\mathbb{R}_+^*$:

$$\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\ge 2\sqrt{2}$$

Indication : on pourra poser $b=x$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 65

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2-x}} \ ; \ x\le 0 \\ g(x)=x-1+\dfrac{1}{x+1} ; \ x>0 \end{cases}$$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f au point 0 puis interpréter le résultat géométriquement.

3) Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.

4) Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$ puis donner le tableau de variations de la fonction g.

EXERCICE 66

Soit x un réel positif.

1) Montrer les inégalités suivantes :

a) $\sin x\le x$; b) $1-\dfrac{x^2}{2}\le\cos x$

c) $x-\dfrac{x^3}{6}\le\sin x$; d) $\cos x\le 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$

2) En déduire un encadrement de $\sin x$ puis donner une valeur approchée au nombre $\sin(0,7)$.

3) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0^+}\frac{x-\sin x}{1-\cos x}$$

EXERCICE 67

Partie A :

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose : $g(x)=2x+\sqrt{4x^2+1}$.

1) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ g(x).g(-x)=1$.

2) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ g(x)>0$.

b) En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}^-)\ g(x)>0$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x+\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i}\ ;\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{4x^2+1}}$$

b) En déduire le tableau de variations de f.

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

EXERCICE 68

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $\left]\dfrac{-\pi}{2};+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=(x-3)\sqrt{x} \ ; \ x\ge0 \\ f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\sin x} \ ; \ -\dfrac{\pi}{2}<x<0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i}\ ;\vec{j})$.

1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \ ; \ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \ ; \ \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}} f(x)$$

2) Étudier la dérivabilité à droite et à gauche de la fonction f au point 0 puis donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.

3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$ puis pour tout $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c) Déterminer l'équation de la tangente (Δ) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

4) Calculer $f''(x)$ pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 69

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

1) Déterminer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.

2) Montrer en utilisant un raisonnement par récurrence que :

$$(\forall n\in\mathbb{N})(\forall x\in\mathbb{R})\ \ f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}$$

où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n.

EXERCICE 70

Soit a un réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-\cos a.\cos(a+x).\cos x$

1) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\cos a.\sin(a+2x)$$

b) En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \ f'(x)\geq 0$.

2) Soit α, β et γ des réels strictement positifs tels que : $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Déterminer la valeur maximale de l'expression :

$$\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma$$

EXERCICE 71

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=ax^2+bx+c$ avec $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$ et $a\neq 0$.

et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i}\ ;\vec{j}\right)$.

Soit A et B deux points distincts de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives m et n.

1) Montrer que qu'il existe une tangente unique à la courbe $\mathscr{C}$ parallèle à la droite (AB).

2) Montrer que l'abscisse du point de tangence est $\frac{m+n}{2}$.

3) En déduire une méthode géométrique pour construire une tangente à une parabole en un de ses points.

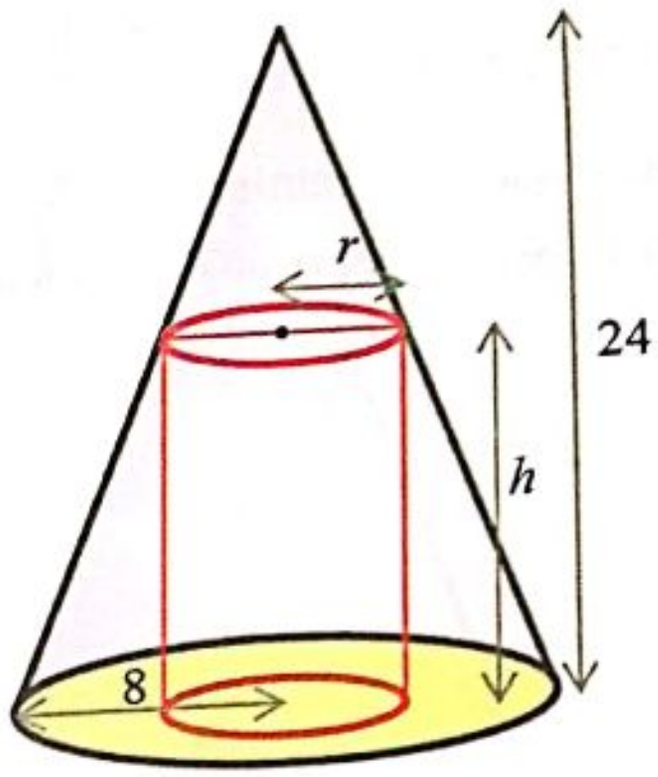
4) **Applications :**

Construire les tangentes à la courbe de la fonction $x\mapsto x^2+x-1$ aux points d'abscisses 1, -1, 2 et 0.

EXERCICE 72

La hauteur d'un cône de révolution est $24\,cm$ et le rayon de sa base est $8\,cm$.

On se propose de construire à l'intérieur de ce cône un cylindre de volume maximal.



Soit h la hauteur du cylindre et r le rayon de sa base.

1) Montrer que $h=3(8-r)$ et déterminer le volume du cylindre $V(r)$ en fonction de r.

2) Étudier les variations de la fonction $V: r\mapsto V(r)$ en déduire les valeurs de r et h.

EXERCICE 73

Une usine fabrique un produit M. Le coût global (en dirhams) pour fabriquer q unités de ce produit est donné par la formule :

$$C(q)=\frac{1}{3}q^3-10q^2+100q+300 \text{ où } q\in[0;30].$$

Le prix de vente d'une unité du produit M est $121\,Dh$.

1) Déterminer le prix de vente $R(q)$ réalisé par la vente de q unités du produit M.

Scanné avec CamScanner

2) a) Déterminer le bénéfice $B(q)$ en fonction de q.

b) Quelle est le nombre d'unités à fabriquer du produit M pour que ce bénéfice soit maximal puis calculer ce bénéfice.

EXERCICE 74

On veut construire un cône de révolution de volume minimal V, qui entoure une sphère de centre O et de rayon r. (Voir figure)

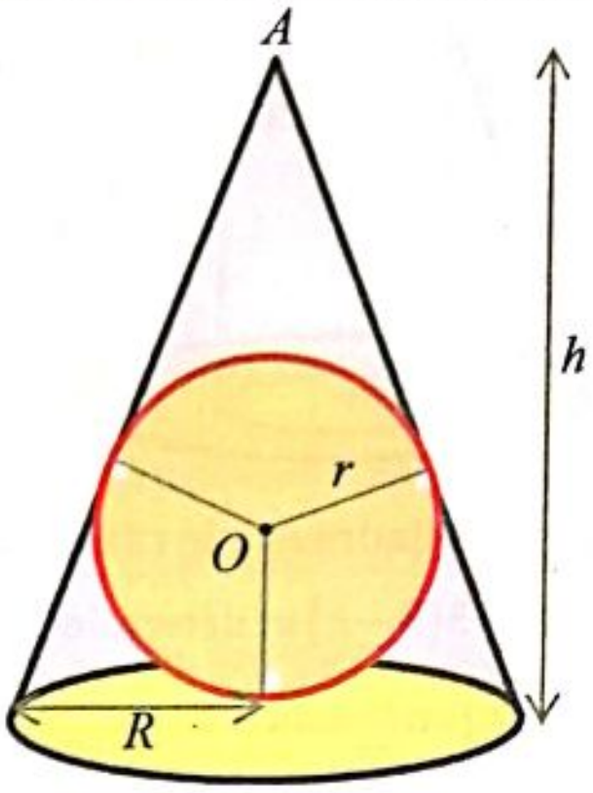
Soit h la hauteur du cône et R le rayon de sa base.

1) On pose : $OA = x$.

Montrer que : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{(x+r)^2}{x-r}$.

2) Montrer que V est minimal si $x = 3r$.

3) En déduire les valeurs de R et h en fonction de r.



EXERCICE 75

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

2) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$$

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2\sqrt{1+x^2}\, f'(x) = f(x)$$

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$4(1+x^2) f''(x) + 4x f'(x) = f(x)$$

EXERCICE 76

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1+x}{n}\right)^n$.

1) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

3) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left(1 + \frac{1+x}{n}\right)^n \geq x\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n-1}$$

EXERCICE 77

On considère les fonctions numériques f et g définies par :

$$f(x) = p(p-a)(p-x)(x+a-p)$$

$$g(x) = \frac{1}{4}p(p-x)x^2$$

où a et p deux réels tels que : $0 < a \leq \frac{2}{3}p$

1) a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[0; p - \frac{a}{2}\right]$.

b) En déduire que pour tout $x \in \left[0; p - \frac{a}{2}\right]$:

$$f(x) \leq g(a)$$

2) a) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $\left[0; \frac{2}{3}p\right]$.

b) En déduire que pour tout $x \in \left[0; p - \frac{a}{2}\right]$:

$$f(x) \leq g\left(\frac{2}{3}p\right)$$

3) Soit ABC un triangle dans le plan, S son aire et $2p$ son périmètre.

a) Montrer que : $S \leq \frac{\sqrt{3}}{9}p^2$.

b) À quelle condition y aura égalité ?

Scanné avec CamScanner

6

ÉTUDE DE FONCTIONS NUMÉRIQUES

HISTOIRE

Durant le XVIIIe siècle, la découverte du calcul infinitésimal ouvre la voie à l'étude des phénomènes physiques par le biais d'équations différentielles. Par exemple, le mathématicien français d'Alembert résout le problème des cordes vibrantes à l'aide d'une équation aux dérivées partielles. Les équations différentielles deviennent peu à peu un objet d'études à part entière, tout en demeurant intimement liées aux sciences physiques. Le XVIIIe siècle est également l'époque où les mathématiciens, comme le Suisse Euler, commencent à manipuler les séries et les produits infinis. Bien vite, ils se heurtent à des problèmes de convergence et de continuité, auxquels s'attelle le Français Cauchy dans les années 1820. Ce dernier redéfinit aussi avec rigueur la notion de limite introduite par d'Alembert, notion qui est ensuite complétée par l'Allemand Weierstrass. C'est également au XIXe siècle qu'est établie la théorie des fonctions, notamment par le mathématicien allemand Riemann. Celui-ci fait le lien avec l'analyse des surfaces, donnant naissance à la topologie, qui se développera au XXe siècle.

Source : https://fr.wikipedia.org



LEONHARD EULER (1707 – 1783)



RIEMANN BERNHARD (1826 – 1866)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Résoudre graphiquement des équations et des inéquations ;
- Utiliser la périodicité et les éléments de symétrie d'une courbe pour réduire le domaine d'étude d'une fonction ;
- Utiliser le signe de la dérivée seconde pour étudier la concavité d'une courbe et déterminer ses points d'inflexion ;
- Étudier et représenter des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles et des fonctions irrationnelles.
- Étudier et représenter des fonctions trigonométriques simples.

PLAN DU COURS

- Activités Préparatoires 248
- Connaissances Fondamentales
  - Branches infinies d'une courbe 252
  - Éléments de symétrie d'une courbe..... 261
  - Concavité d'une courbe
    Point d'inflexion..... 264
- Techniques et Astuces 267
- Exercices et Problèmes
  - Exercices d'application..... 277
  - Exercices de perfectionnement..... 282

Scanné avec CamScanner

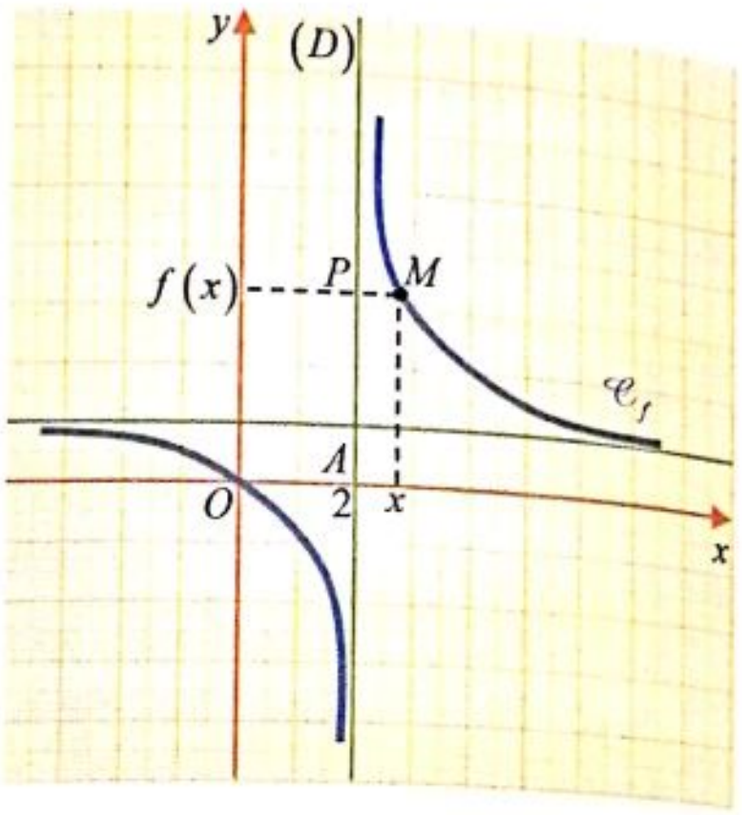
6 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

1 ASYMPTOTES D'UNE COURBE

A) Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées :

Dans la figure ci-contre, $\mathscr{C}_f$ est la courbe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-2}$

et $\mathscr{D}$ la droite d'équation : $x = 2$.



1. Calculer les limites : $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ et on considère le point M d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_f$; le point P de la droite $\mathscr{D}$ ayant la même ordonnée que M et A le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec l'axe des abscisses. On pose :

   - $d(x) = x_M - x_p$ (différence des abscisses de M et P) ;
   - $\Delta(x) = y_p - y_A$ (différence des ordonnées de A et P).

   a) Déterminer la limite de $d(x)$ et $\Delta(x)$ à droite et à gauche de 2.

   b) Calculer la distance MP en fonction de $d(x)$ et la distance AP en fonction de $\Delta(x)$.

   c) En déduire que lorsque x s'approche de plus en plus de 2, la distance AP tend vers $+\infty$ et MP vers 0.

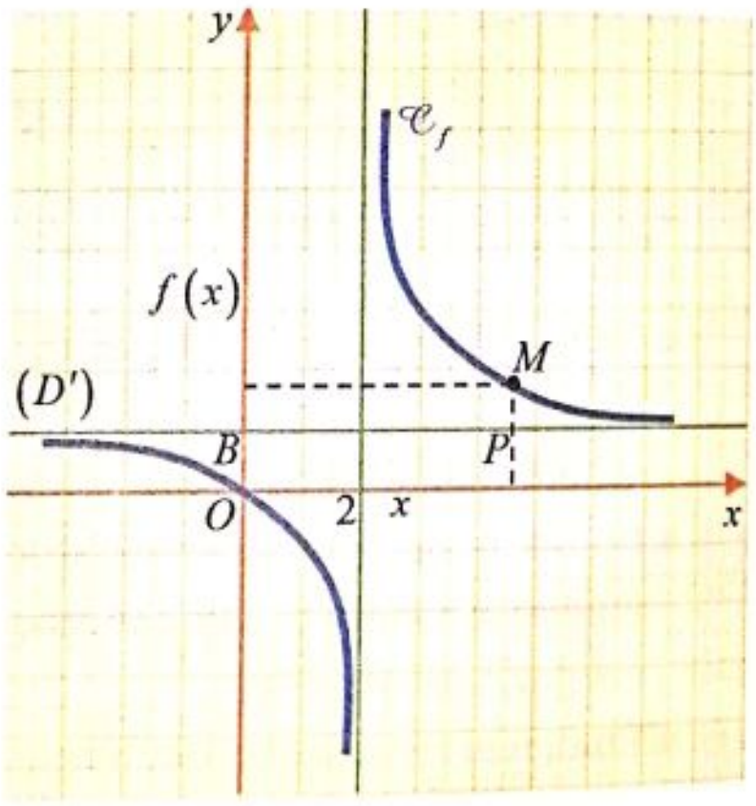
   Remarquer que MP est la distance du point M à la droite $\mathscr{D}$ et que cette distance s'approche de 0 quand x tend vers 2 ; c'est-à-dire qu'au voisinage de 2, la droite $\mathscr{D}$ est proche de la courbe $\mathscr{C}_f$.

On dit alors que la droite $\mathscr{D}$ est une asymptote verticale de la courbe $\mathscr{C}_f$.

B) Asymptote parallèle à l'axe des abscisses :

On considère dans cette partie la droite $\mathscr{D}'$ d'équation $y = 1$ et le point M d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_f$; P étant le point de la droite $\mathscr{D}'$ ayant la même abscisse que M et B le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}'$ avec l'axe des ordonnées.

On pose :



- $d'(x) = y_M - y_p$ (différence des ordonnées de M et P) ;
- $\Delta'(x) = x_p - x_B$ (différence des abscisses de B et P).

1. Calculer les limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2. a) Déterminer la limite de $d'(x)$ et $\Delta'(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

   b) Calculer la distance MP en fonction de $d'(x)$ et la distance BP en fonction de $\Delta'(x)$.

   c) En déduire que lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$, la distance BP tend vers $+\infty$ et MP vers 0.

   Remarquer que MP est la distance du point M à la droite $\mathscr{D}'$ et que cette distance s'approche de 0 quand x

Scanné avec CamScanner

tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$; c'est-à-dire qu'au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$, la droite $\mathscr{D}'$ est proche de la courbe $\mathscr{C}_f$.

On dit alors que la droite $\mathscr{D}$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

C) Asymptote oblique :

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = x - 1 - \dfrac{2}{x}$.

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

2. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$; $\lim\limits_{x\to0^-} g(x)$

3. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

4. Soit (D) la droite d'équation cartésienne $y = x - 1$ et $\mathscr{C}_g$ la courbe de g dans un repère orthonormé.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$; M un point de $\mathscr{C}_g$ et P le point de la droite (D) ayant la même abscisse que M.

On pose : $d(x) = y_M - y_P$ (différence des ordonnées de M et P).

a) Calculer $d(x)$ en fonction de x puis déterminer la limite de $d(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

b) Calculer la distance MP en fonction de $d(x)$ puis en déduire que lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$, le point M est proche du point P.

Remarquer qu'au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$, la courbe $\mathscr{C}_g$ est « presque confondue » avec la droite (D).

On dit alors que la droite (D) est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_g$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

2 DIRECTIONS ASYMPTOTIQUES

A) On considère les fonctions numériques f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^3 + 2x - 1$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé.

1. Donner le tableau de variation de chacune des fonctions f et g.

2. a) Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$.

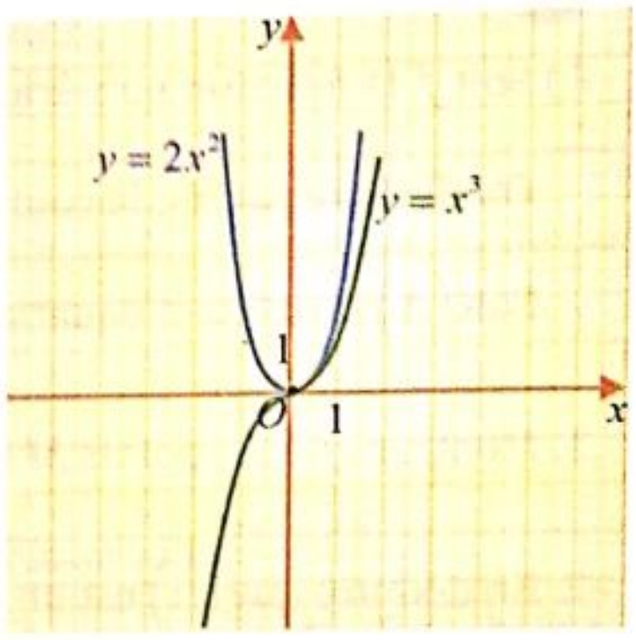
b) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = 2x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{2x^2}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = x^3\left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$$

et calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{2x^2}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{2x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$$



Scanné avec CamScanner

6 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

Remarquons qu'au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont similaires aux courbes des fonctions $x \mapsto 2x^2$ et $x \mapsto x^3$ respectivement.

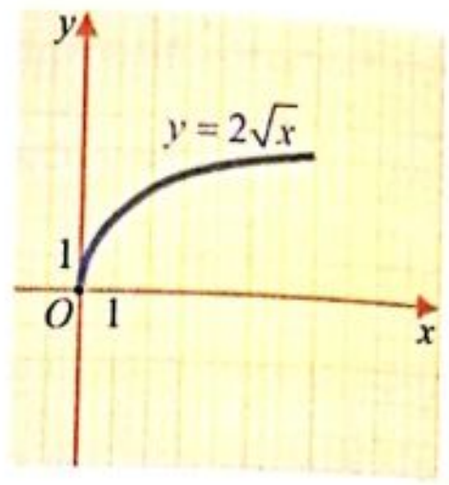
On dit alors que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent des branches paraboliques dirigées vers l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

B) On considère les fonctions numériques f et g définies sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = x + \sqrt{x}$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé.

1. Donner le tableau de variation de chacune des fonctions f et g.



2. a) Vérifier que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f(x) = \sqrt{x}\left(1 + \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}\right)$

puis en déduire qu'au voisinage de $+\infty$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est similaire à la courbe de la fonction $x \mapsto 2\sqrt{x}$.

On dit alors que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

3. a) Vérifier que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(g(x) - x\big) = +\infty$.

On dit alors que la courbe $\mathscr{C}_g$ admet une branche parabolique dirigée vers la droite (Δ) d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

b) Soit x un réel positif ; M un point de la courbe $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x et N un point de la droite (Δ) de même abscisse x. On pose : $\ell(x) = y_M - y_N$.

Exprimer $\ell(x)$ en fonction de x puis calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \ell(x)$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3 AXE DE SYMÉTRIE – CENTRE DE SYMÉTRIE

A) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit (Δ) la droite d'équation $x = 1$; $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ deux points du plan.

1. Montrer que les points M et M' sont symétriques par rapport à (Δ) si, et seulement si : $\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = y \end{cases}$.

2. En déduire que (Δ) est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$ si, et seulement si : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(2-x) = f(x)$.

3. Tracer $\mathscr{C}_f$ et (Δ) dans le même repère.

Scanné avec CamScanner

4. Soit (P) la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$).

Montrer que la droite (D) d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ est un axe de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}_f$.

B) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par : $g(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$.

On désigne par $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On considère le point $I(3;2)$; $M(x;y)$ et $M'(x';y')$ deux points du plan.

1. Montrer que les points M et M' sont symétriques par rapport à I si, et seulement si : $\begin{cases} x' = 6 - x \\ y' = 4 - y \end{cases}$.

2. En déduire que I est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_g$ si, et seulement si : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{3\})\ f(6-x) = 4 - f(x)$.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$.

4. Soit (H) l'hyperbole d'équation : $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0)$.

Montrer que le point $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ est un centre de symétrie de (H).

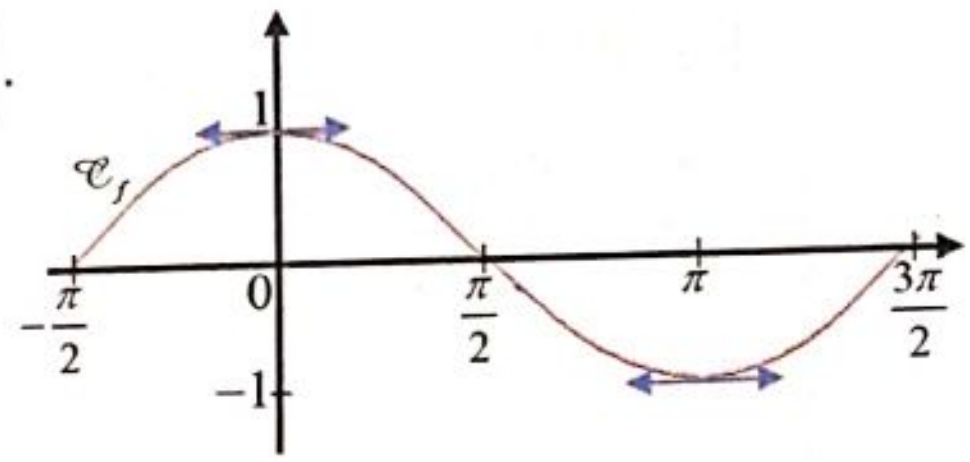
4 POINT D'INFLEXION ET CONCAVITÉ

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre présente la fonction $f : x \mapsto \cos x$ sur l'intervalle $J = \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

1. Déterminer l'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point $I\left(\dfrac{\pi}{2};0\right)$.

2. Soit g la fonction affine associée à (T) et on pose :

$$h(x) = f(x) - g(x).$$



a) Étudier les variations de la fonction h sur J puis en déduire le signe de $h(x)$ sur l'intervalle J. (Remarquer que : $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$)

b) En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente (T) en I.

c) Tracer $\mathscr{C}_f$ et (T). Remarquer que la tangente (T) traverse la courbe $\mathscr{C}_f$ en I.

On dit alors que le point I est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Remarquer encore que $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de toutes ses tangentes sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ et au-dessus de toutes ses tangentes sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

On dit alors que $\mathscr{C}_f$ est concave sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ et convexe sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

d) Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in J$ puis comparer son signe avec le signe de $h(x)$ sur J. Que remarque-t-on ?

Scanné avec CamScanner

1 BRANCHES INFINIES D'UNE COURBE (DE FONCTION)

Dans tout ce chapitre, f est une fonction numérique, D_f son ensemble de définition et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1.1. DÉFINITION

Définition

On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet une branche infinie, lorsque l'une des coordonnées d'un point de $\mathscr{C}_f$ tend vers l'infini.

Remarque

On sait que le couple de coordonnées d'un point M de la courbe $\mathscr{C}_f$ est $(x;f(x))$ avec $x \in D_f$.

Il s'ensuit donc que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche infinie, si l'une, au moins, des conditions suivantes est vérifiée :

- L'ensemble D_f contient un intervalle de la forme $]\alpha;+\infty[$.
- L'ensemble D_f contient un intervalle de la forme $]-\infty;\alpha[$.
- La fonction f admet une limite infinie en un point (à gauche ou à droite)

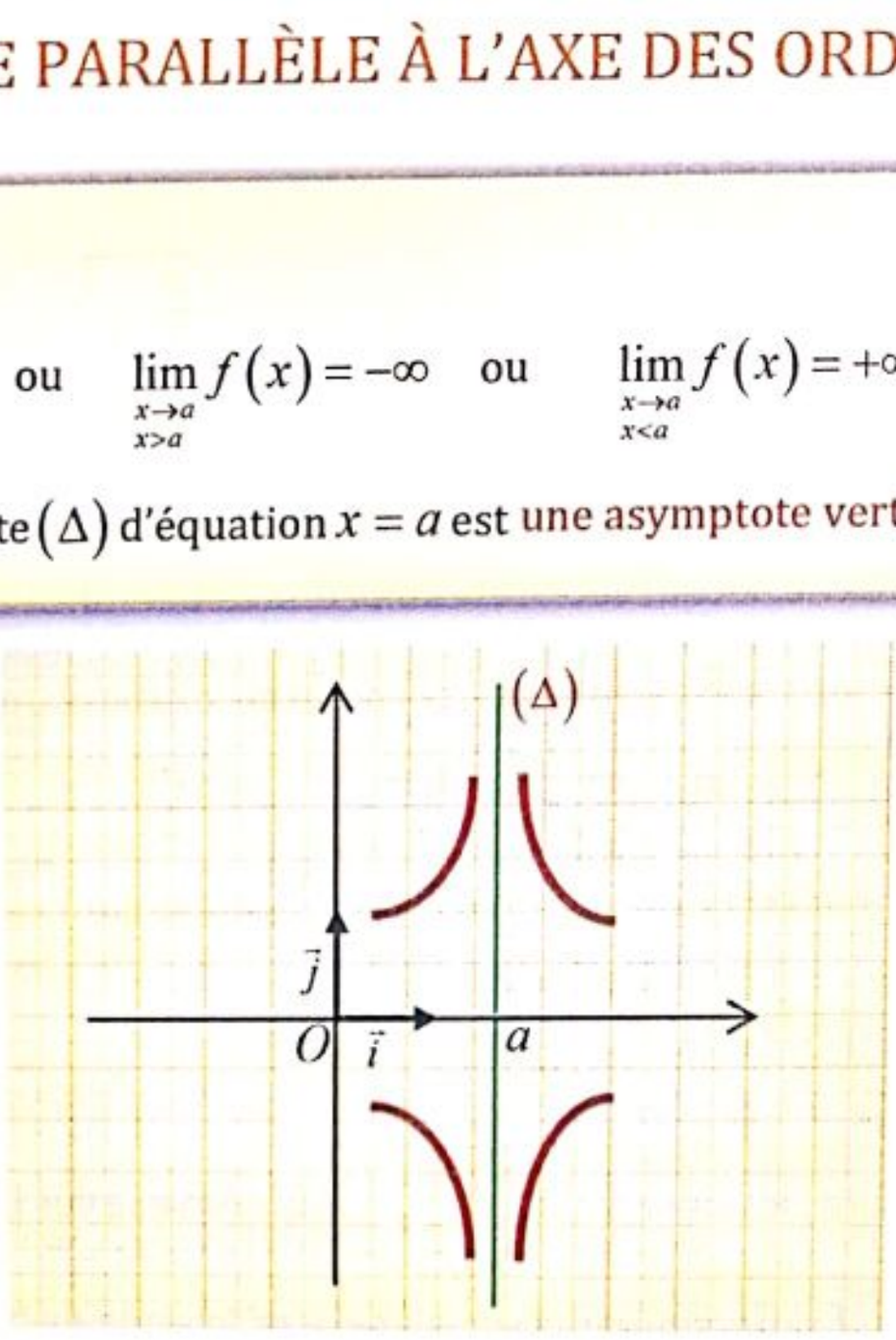
1.2. ASYMPTOTE PARALLÈLE À L'AXE DES ORDONNÉES

Définition

Soit a un nombre réel.

Si : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=-\infty$

alors on dit que la droite (Δ) d'équation $x=a$ est une asymptote verticale de la courbe $\mathscr{C}_f$.



Scanné avec CamScanner

Exemples

1) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

On a : $D_f = \mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$; donc la droite $(\Delta) : x = 0$ est une asymptote verticale de la courbe $\mathscr{C}_f$.

2) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{(x-1)(x+2)}$.

- Le ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R} - \{-2;1\}$.
- On a : $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$; donc la droite $(\Delta_1) : x = -2$ est une asymptote verticale de la courbe $\mathscr{C}_f$.
- On a : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$; donc la droite $(\Delta_2) : x = 1$ est une asymptote verticale de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1+\sin x}{\sin^2 x}$.

- L'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
- Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a : $\lim\limits_{x\to k\pi}(1+\sin x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to k\pi} \sin^2 x = 0^+$; donc $\lim\limits_{x\to k\pi} f(x) = +\infty$. Par conséquent, la droite $(\Delta_k) : x = k\pi$ est une asymptote verticale de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Applications

Pour chacun des cas suivants, déterminer les asymptotes verticales (parallèles à l'axe des ordonnées) à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f :

1) $f(x) = \dfrac{3x-7}{x-2}$; 2) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x-2}$; 3) $f(x) = \tan x$

4) $f(x) = \dfrac{2x-3}{(x-2)^2}$; 5) $f(x) = \dfrac{2\sin x - 1}{\cos x + 1}$; 6) $f(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{2x-1}}$

7) $f(x) = \dfrac{2x-3}{(x-2)^2}$; 8) $f(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\cos^2 x - 1}$; 9) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{2}\cos x - 1}$

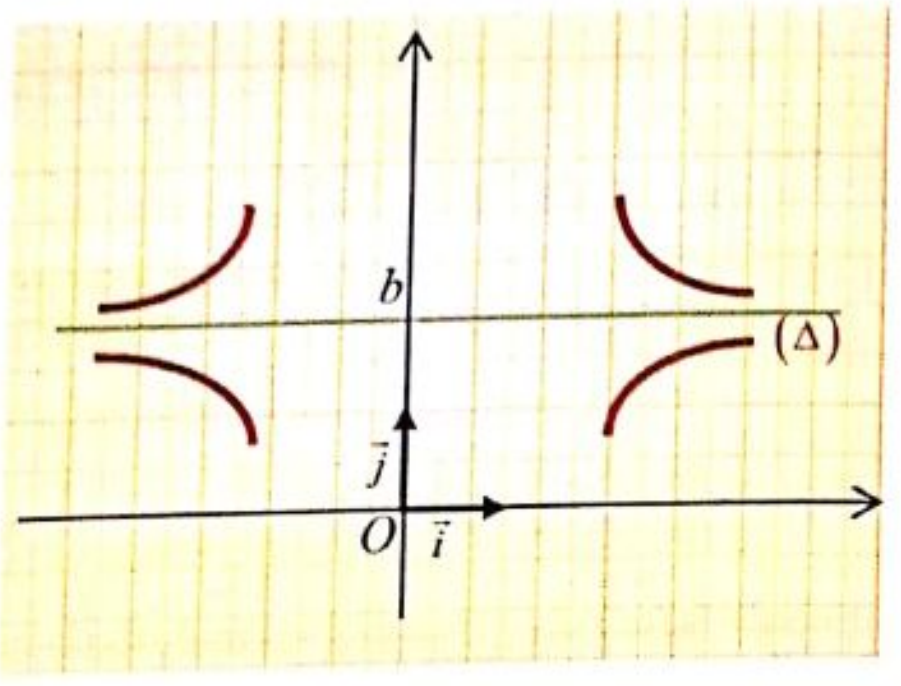
1.2. ASYMPTOTE PARALLÈLE À L'AXE DES ABSCISSES

Définition

Soit b un nombre réel.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, alors on dit que la droite (Δ) d'équation $y = b$ une asymptote horizontale de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Scanné avec CamScanner



Exemples

1) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; par conséquent, la droite $(\Delta) : y = 0$ est une asymptote horizontale de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

2) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1$. De même : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$; Il s'ensuit donc que la droite $(\Delta) : y = 1$ est une asymptote horizontale de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

3) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = \dfrac{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}$. Il en résulte donc que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1$$

Par suite :

- La droite $(\Delta_1) : y = 1$ est une asymptote horizontale de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
- La droite $(\Delta_2) : y = -1$ est une asymptote horizontale de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$

Remarque

Pour étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f, sur un intervalle I, et son asymptote d'équation $y = b$, on étudie le signe de la différence $f(x) - b$ sur l'intervalle I.

Si, par exemple, on a pour tout $x \in I$: $f(x) - b > 0$, alors la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de l'asymptote d'équation $y = b$ sur l'intervalle I.

Scanné avec CamScanner

Exemple

On considère la fonction $f : x \mapsto 2 + \dfrac{x-1}{x^2}$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$; donc la droite $(\Delta) : y = 2$ est une asymptote horizontale de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

On a maintenant pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) - 2 = \dfrac{x-1}{x^2}$

Le tableau de signe de $f(x) - 2$ est donné par :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)-2$	$-$	‖ $-$	0	$+$

On en déduit alors que la courbe $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de l'asymptote (Δ) sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;1[$ et au-dessus de l'asymptote (Δ) sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

Applications

Pour chacun des cas suivants, déterminer les asymptotes horizontales (parallèles à l'axe des abscisses) à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f :

1) $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x-1}$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-2}$; 3) $f(x) = \dfrac{-2x^3+x^2+1}{x^3-1}$

4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}$; 5) $f(x) = 3 + \dfrac{\sin x}{x}$; 6) $f(x) = \dfrac{1}{x}\sqrt{4x^2+3x-1}$

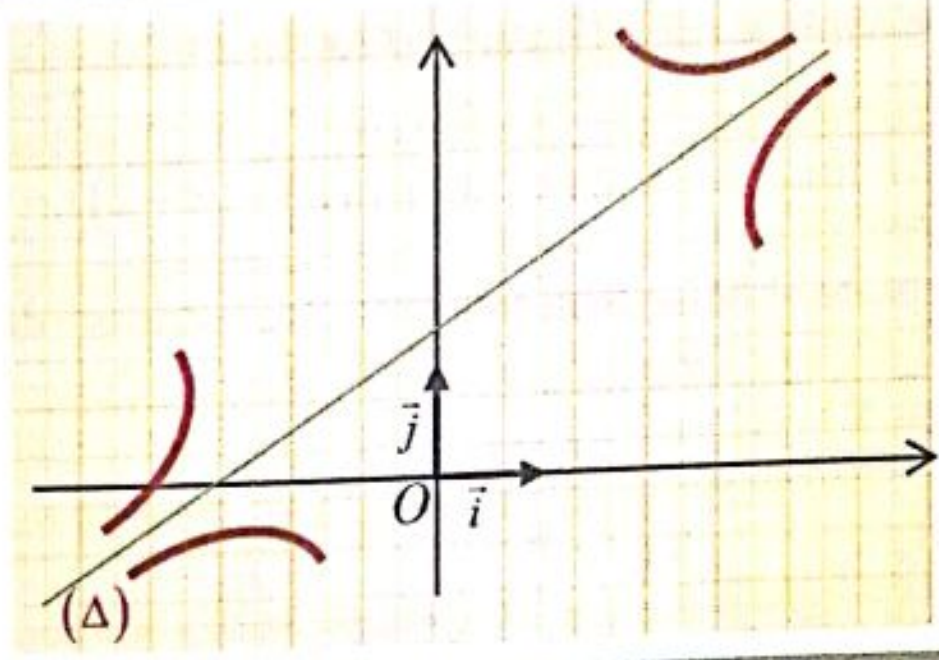
7) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$; 8) $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+3x+3}}$; 9) $f(x) = \dfrac{x+\cos x}{x-2}$

1.2. ASYMPTOTE OBLIQUE

Définition

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$, alors on dit que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$.



Scanné avec CamScanner

Exemples

1) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=2x-1+\frac{1}{x}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$; donc la droite $(D):y=2x-1$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

2) Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{x}{2}+1+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(\frac{x}{2}+1\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$; donc la droite $(D):y=\frac{1}{2}x+1$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_g$ au voisinage de $+\infty$.

Remarques

- Soit (D): $y=ax+b$ une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

  On a (D): $ax-y+b=0$ et la distance du point $M(x;f(x))$ à la droite (D) est :

$$d\left(M;(D)\right)=\frac{|ax+b-f(x)|}{\sqrt{a^2+1}}$$

  Lorsque x tend vers $+\infty$, cette distance tend vers 0, c'est-à-dire que la droite (D) est presque confondue à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

- Pour étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f, sur un intervalle I, et son asymptote oblique (D) d'équation $y=ax+b$, on étudie le signe de la différence $f(x)-(ax+b)$ sur l'intervalle I. Ainsi :
  - Si $f(x)-(ax+b)>0$, alors $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de l'asymptote (D) ;
  - Si $f(x)-(ax+b)<0$, alors $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de l'asymptote (D) ;
  - Si $f(x_0)-(ax_0+b)=0$ pour un certain point $x_0\in I$, alors $\mathscr{C}_f$ et (D) sont sécantes.

Exemple

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x)=x+2+\frac{1}{x-1}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=0$; donc la droite $(D):y=x+2$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

On a maintenant pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$: $f(x)-(x+2)=\frac{1}{x-1}$

Le signe de $f(x)-(x+2)$ est donc celui de $\frac{1}{x+1}$.

Scanné avec CamScanner

On en déduit donc que la courbe $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de l'asymptote (D) sur les intervalles $]-\infty;-1[$ et au-dessus de l'asymptote (D) sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\frac{1}{x+1}$	$-$	‖	$+$

Applications

Pour chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de l'asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$:

1) $f(x)=3x+\frac{1}{x-1}$; 2) $f(x)=2x-3+\frac{x}{x^2+1}$; 3) $f(x)=-x+\frac{2}{\sqrt{x-1}}$

4) $f(x)=x+4-\frac{1}{\sqrt{1-x}}$; 5) $f(x)=x+\frac{\sin x}{x}$; 6) $f(x)=x-1+\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$

Proposition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

Pour que la droite $(D): y=ax+b$ $(a\neq 0)$ soit une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$, il faut et il suffit qu'il existe une fonction u définie sur D_f telle que :

$$(\forall x\in D_f)\ f(x)=ax+b+u(x) \quad \text{et} \quad \left(\lim_{x\to+\infty}u(x)=0 \text{ ou } \lim_{x\to-\infty}u(x)=0\right)$$

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-\frac{1}{x^2+2}$.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=x+u(x)$ avec $u(x)=-\frac{1}{x^2+2}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}u(x)=0$, alors la droite $(D): y=x$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Dans la plupart des cas, il est difficile d'écrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=ax+b+u(x)$ avec :

$\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}u(x)=0$.

La proposition suivante donne une méthode pratique pour déterminer les valeurs des réels a et b dans tous les cas où la courbe $\mathscr{C}_f$ de f admet une asymptote oblique au voisinage de de $+\infty$ et $-\infty$.

Proposition

La droite $(D): y=ax+b$ $(a\neq 0)$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ si, et seulement si :

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)=b\right) \quad \text{ou} \quad \left(\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a \text{ et } \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-ax\right)=b\right)$$

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ par : $f(x)=\frac{-x^2+5x-1}{2x-1}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{x}{2}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{2x^2}=-\frac{1}{2}$.

Calculons maintenant $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{1}{2}x\right)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2+5x-1}{2x-1}+\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+10x-2+2x^2-x}{2(2x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x-2}{4x-2}$$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{1}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{9x}{4x}=\frac{9}{4}$.

Par suite, la droite (D): $y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{4}$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

On montre de la même façon que (D) est aussi une asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

2) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\sqrt{9x^2+x+1}$.

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(9x^2+x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}9x^2=+\infty$; donc $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2+x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-3$

et de plus : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(g(x)+3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+1}+3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x\left(-\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3\right)}$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(g(x)+3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3}=-\frac{1}{6}$

Par suite, la droite (Δ): $y=-3x-\frac{1}{6}$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_g$ au voisinage de $-\infty$.

Applications

Pour chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de l'asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$:

1) $f(x)=\frac{2x^2+x-1}{3x-1}$; 2) $f(x)=\frac{x^3+x^2}{x^2-x+1}$; 3) $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$

4) $f(x)=x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$; 5) $f(x)=x\sqrt{\frac{4x}{x-2}}$; 6) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{4x^2+x}$

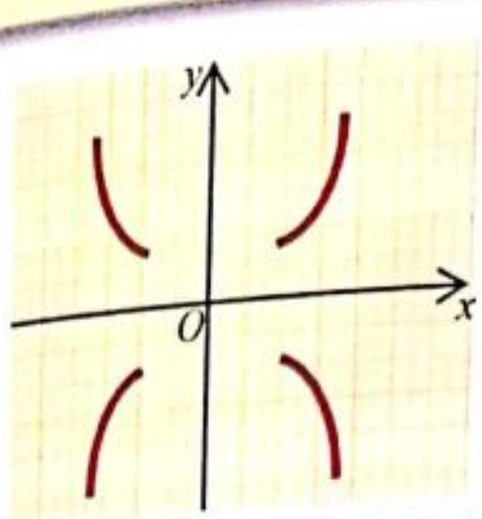
Scanné avec CamScanner

1.3. DIRECTIONS ASYMPTOTIQUES

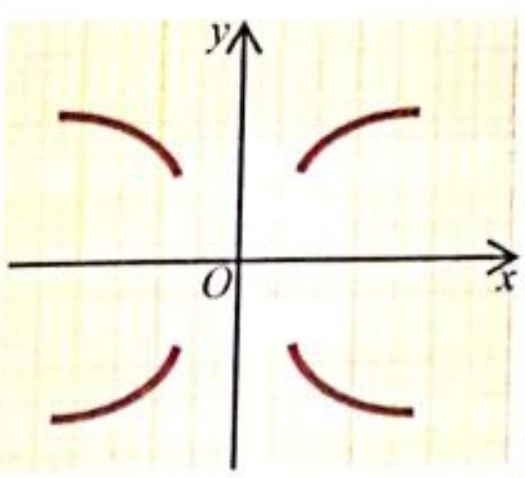
Définition

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle telle que : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

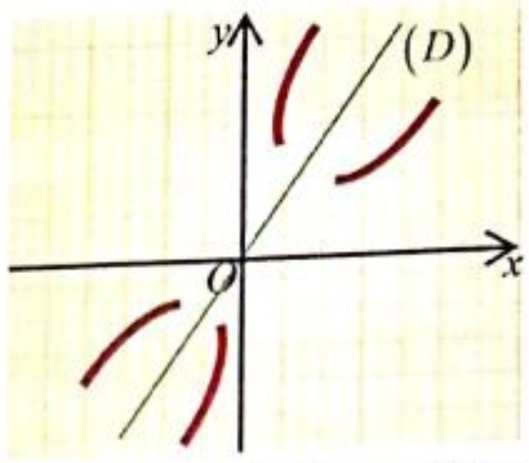
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors on dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (ou une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées).
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors on dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses (ou une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses).
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \neq 0$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - ax\right) = \pm\infty$, alors on dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction la droite $(D) : y = ax$ (ou une branche parabolique dirigée vers la droite $(D) : y = ax$).



Branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées



Branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses



Branche parabolique dirigée vers la droite $(D) : y = ax$

Exemples

1) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x + 3$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 - 2 + \dfrac{3}{x}\right) = +\infty$. Donc, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

2) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{x} + 2$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{x}\right) = 0$. Donc, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

3) Soit f la fonction numérique définie sur $]-\infty;1]$ par : $f(x) = 2x - \sqrt{1-x}$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(2 + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}}\right) = 2$.

Scanné avec CamScanner

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-x}\right)=-\infty$. Il s'ensuit donc que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction la droite $(\Delta): y=2x$ au voisinage de $-\infty$.

Applications

Pour chacun des cas suivants, déterminer les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$:

1) $f(x)=x^3+x^2-2$; 2) $f(x)=\sqrt{x^3-1}$; 3) $f(x)=3+\sqrt{2x+5}$

4) $f(x)=x-\sqrt{x-1}$; 5) $f(x)=x\sqrt{x^2+x+1}$; 6) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-2x$

7) $f(x)=x+\dfrac{\sin x}{x}$; 8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^4}{x^2-x+1}}$; 9) $f(x)=-x+\dfrac{x\sqrt{x}}{x+4}$

FORMULAIRE DES BRANCHES INFINIES

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ → La droite d'équation $x=a$ est une asymptote verticale de la courbe $\mathscr{C}_f$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$ → La droite d'équation $y=b$ est une asymptote horizontale de la courbe $\mathscr{C}_f$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ → La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ → La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ $(a\in\mathbb{R}^*)$
  - $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)=b$ → La droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$
  - $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)=\pm\infty$ → La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ → La droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$

Scanné avec CamScanner

2 ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIE D'UNE COURBE (DE FONCTION)

2.1. AXE DE SYMÉTRIE D'UNE COURBE

Proposition

Soit f une fonction numérique et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

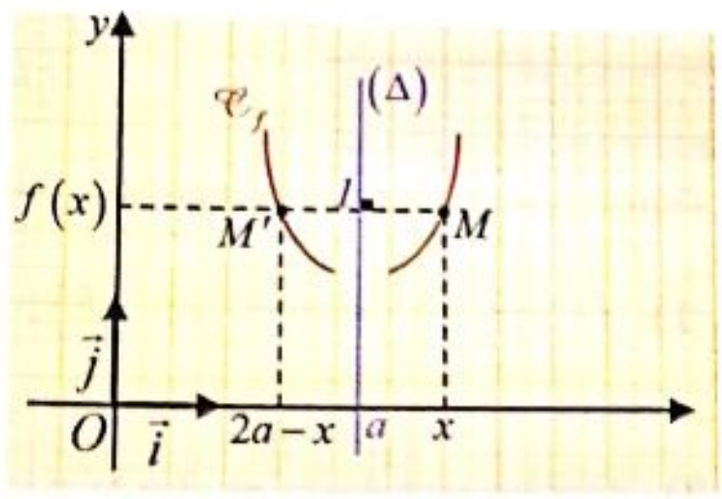
Pour que la droite (Δ) d'équation $x = a$ soit un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$, il faut et il suffit que pour tout $x \in D_f$: $(2a-x) \in D_f$ et $f(2a-x) = f(x)$

Preuve

Soit $M(x;y)$ et $M'(x';y')$ deux points du plan.

Le point $M'(x';y')$ est le symétrique du point $M(x;y)$ par rapport à la droite (Δ) si, et seulement si :

$(MM') \perp (\Delta)$ et le milieu I de $[MM']$ appartient à (Δ) ;



ce qui se traduit par : $\overrightarrow{MM'}.\vec{j} = 0$ et $\dfrac{x+x'}{2} = a$;

c'est-à-dire : $x' = 2a - x$ et $y' = y$. Par suite, la droite (Δ) d'équation $x = a$ soit un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$ si, et seulement si : $(2a-x) \in D_f$ et $f(2a-x) = f(x)$. Autrement dit, l'image de la courbe $\mathscr{C}_f$ par la symétrie axiale $S_{(\Delta)}$ est $\mathscr{C}_f$ lui-même ($\mathscr{C}_f$ est globalement invariante par $S_{(\Delta)}$).

Exemples

1) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 5}$

Montrons que la droite (Δ) d'équation $x = -3$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$:

Le ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty,-5] \cup [-1,+\infty[$. On a d'une part :

$$x \in D_f \Leftrightarrow (x \leq -5 \text{ ou } x \geq -1) \Leftrightarrow (-6-x \geq -1 \text{ ou } -6-x \leq -5) \Leftrightarrow (-6-x) \in D_f$$

D'autre part, pour tout $x \in D_f$:

$$f(-6-x) = \sqrt{(-6-x)^2 + 6(-6-x) + 5} = \sqrt{x^2 + 12x + 36 - 36 - 6x + 5} = \sqrt{x^2 + 6x + 5} = f(x)$$

Par suite, la droite (Δ) d'équation $x = -3$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

2) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-3}$

Montrons que la droite (Δ) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$:

L'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R} - \{1;3\}$. De plus, pour tout $x \in D_f$: $4 - x \neq 1$ et $4 - x \neq 3$.

Scanné avec CamScanner

Par conséquent : $4-x \in D_f$. On a maintenant pour tout $x \in D_f$:

$$f(4-x)=\frac{1}{4-x-1}-\frac{1}{4-x-3}=\frac{1}{3-x}-\frac{1}{1-x}=f(x)$$

Par suite, la droite (Δ) d'équation $x=2$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\cos x$.

Montrons que la droite (Δ_k) d'équation $x=k\pi$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$: $(k \in \mathbb{Z})$

On a : $D_f=\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(2k\pi-x)=\cos(2k\pi-x)=\cos(-x)=\cos(x)=f(x)$.

(car la fonction cos est périodique de période 2π et paire).

Par suite, la droite (Δ_k) d'équation $x=k\pi$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Applications

Dans chacun des cas suivants, montrer que la droite (Δ) est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$:

1) $f(x)=x^2+4x+5$ et $(\Delta): x=-2$; **2)** $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ et $(\Delta): x=1$

3) $f(x)=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$ et $(\Delta): x=0$; **4)** $f(x)=\sqrt{x^2-6x+5}$ et $(\Delta): x=3$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-1}$ et $(\Delta): x=-\dfrac{1}{2}$; **6)** $f(x)=\sin^2 x+\cos(2x)$ et $(\Delta): x=\dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

2.2. CENTRE DE SYMÉTRIE D'UNE COURBE

Proposition

Soit f une fonction numérique et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

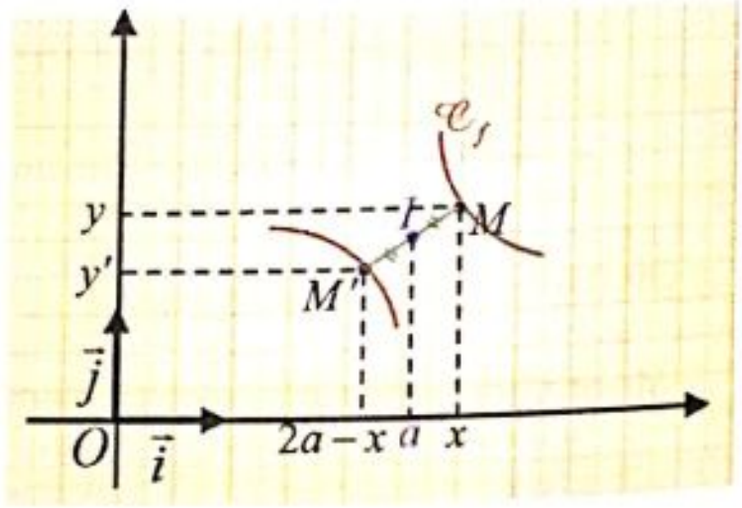
Pour que le point $\Omega(a,b)$ soit un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$, il faut et il suffit que pour tout $x \in D_f$: $(2a-x) \in D_f$ et $f(2a-x)=2b-f(x)$

Preuve

Soit $M(x;y)$ et $M'(x';y')$ deux points du plan.

Le point $M'(x';y')$ est le symétrique du point $M(x;y)$ par rapport au point Ω si, et seulement si Ω est le milieu du segment $[MM']$; ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} x'=2a-x \\ y'=2b-y \end{cases}$$



Scanné avec CamScanner

Par suite, le point $\Omega(a,b)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$ si, et seulement si : $(2a-x)\in D_f$ et $f(2a-x)=2b-f(x)$. Autrement dit, l'image de la courbe $\mathscr{C}_f$ par la symétrie centrale S_Ω est $\mathscr{C}_f$ lui-même (la courbe $\mathscr{C}_f$ est globalement invariante par S_Ω).

Exemples

1) On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{2x+3}{3x-4}$

Montrons que le point $\Omega\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$:

Le ensemble de définition de f est $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{4}{3}\right\}$. De plus, pour tout $x\in D_f$: $\left(\dfrac{8}{3}-x\right)\in D_f$.

Montrons maintenant que : $(\forall x\in D_f)\ f\left(\dfrac{8}{3}-x\right)=\dfrac{4}{3}-f(x)$.

On a : $f\left(\dfrac{8}{3}-x\right)=\dfrac{2\left(\frac{8}{3}-x\right)+3}{3\left(\frac{8}{3}-x\right)-4}=\dfrac{25-6x}{12-9x}$ et $\dfrac{4}{3}-f(x)=\dfrac{4}{3}-\dfrac{2x+3}{3x-4}=\dfrac{6x-25}{9x-12}$

Il s'ensuit donc que : $(\forall x\in D_f)\ f\left(\dfrac{8}{3}-x\right)=\dfrac{4}{3}-f(x)$.

Ainsi, le point $\Omega\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sin x-\cos x$

Montrons que le point $\Omega\left(\dfrac{\pi}{4};0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$:

On a $D_f=\mathbb{R}$. De plus, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x-\sin x=-f(x)$$

Ainsi, le point $\Omega\left(\dfrac{\pi}{4};0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Remarques

- Si f est une fonction paire alors sa courbe $\mathscr{C}_f$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- Si f est une fonction impaire alors $\mathscr{C}_f$ admet l'origine du repère comme centre de symétrie.
- Si la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet la droite d'équation $x=a$ comme axe de symétrie ou admet le point de coordonnées (a,b) comme centre de symétrie alors on peut restreindre l'étude de la fonction f sur l'ensemble $D_{étude}=D_f\cap[a,+\infty[$.

Scanné avec CamScanner

Applications

Dans chacun des cas suivants, montrer que le point Ω est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$:

1) $f(x)=\dfrac{x-1}{2x+1}$ et $\Omega\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$; 2) $f(x)=x^3-3x-2$ et $\Omega(0;-2)$

3) $f(x)=\cos x$ et $\Omega\left(\dfrac{\pi}{2};0\right)$; 4) $f(x)=\sin x$ et $\Omega(k\pi;0)$ $(k\in\mathbb{Z})$

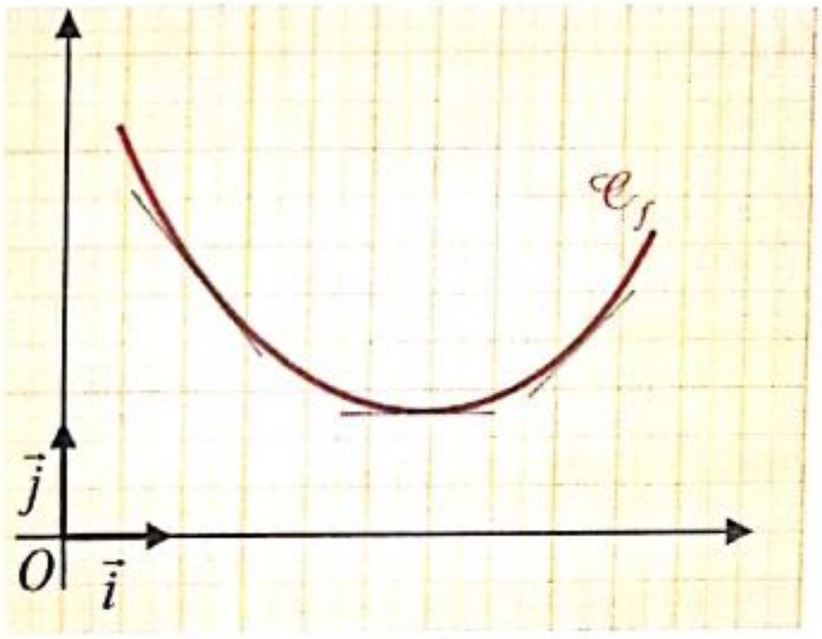
3 CONCAVITÉ D'UNE COURBE – POINT D'INFLEXION

3.1. CONVEXITÉ ET CONCAVITÉ D'UNE COURBE (DE FONCTION)

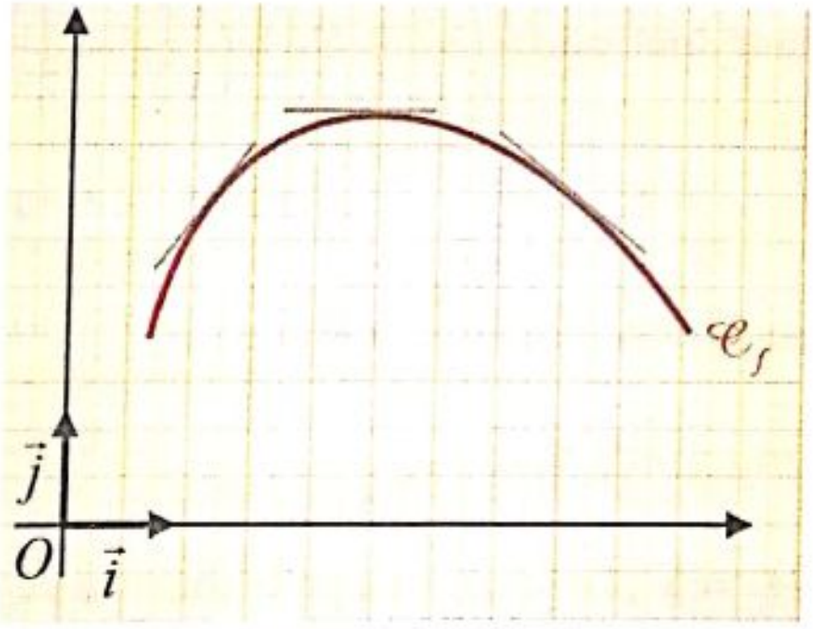
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ est convexe si elle est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes, et on dit qu'elle est concave si elle est entièrement située en-dessous de chacune de ses tangentes.



$\mathscr{C}_f$ est convexe



$\mathscr{C}_f$ est concave

Remarque

La convexité et la concavité de de la courbe $\mathscr{C}_f$ dépendent de la position relative de $\mathscr{C}_f$ et sa tangente (T) au point $M_0\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$ sur un voisinage de x_0 ; c'est-à-dire dépend de signe du nombre :

$I(x)=f(x)-y$ où $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ est l'équation de la tangente (T).

3.2. POINT D'INFLEXION D'UNE COURBE (DE FONCTION)

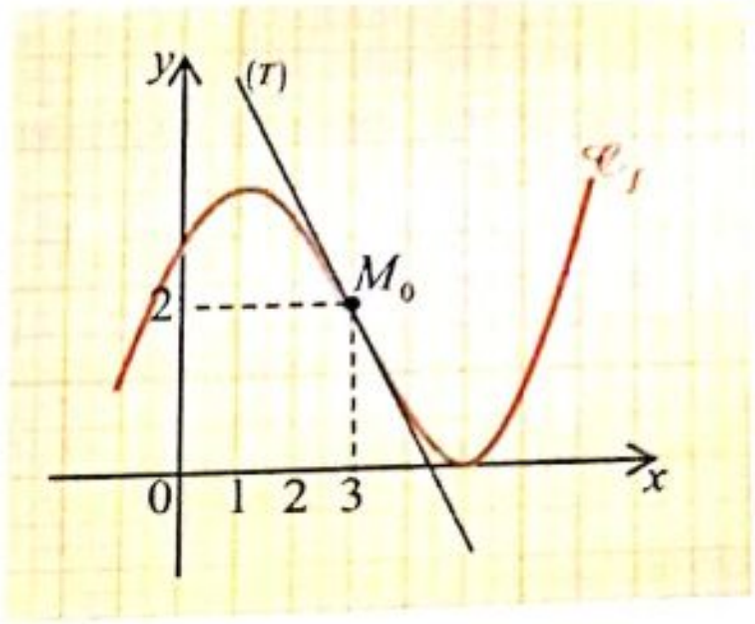
Définition

On appelle point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$, tout point où elle change de concavité.

Scanné avec CamScanner

Exemple

On considère la figure ci-contre qui représente le graphe d'une fonction f sur $\mathbb{R}$.



La courbe $\mathscr{C}_f$ est convexe sur $[3,+\infty[$ et concave sur $]-\infty,3]$.

Le point $M_0(3,2)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

La tangente T traverse la courbe $\mathscr{C}_f$ en $M_0(3,2)$.

Proposition

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- Pour que la courbe $\mathscr{C}_f$ de f soit convexe sur I, il faut et il suffit que : $(\forall x \in I),\ f''(x) \geq 0$
- Pour que la courbe $\mathscr{C}_f$ de f soit concave sur I, il faut et il suffit que : $(\forall x \in I),\ f''(x) \leq 0$
- Pour que le point $M_0(x_0, f(x_0))$ soit un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$, il faut et il suffit que la dérivée seconde f'' s'annule en x_0 et change de signe de part et d'autre de x_0.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 5$

La fonction f étant polynomiale, donc elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 \quad \text{et} \quad f''(x) = -6x + 12$$

Tableau de concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
Concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$		∪	Point d'inflexion	∩	

En résumé :

- la courbe $\mathscr{C}_f$ est convexe sur $]-\infty;2]$ et concave sur $[2;+\infty[$;
- Le point $I(2;3)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Scanné avec CamScanner

Applications

Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=x^2+5x+2$ et $I=\mathbb{R}$; 2) $f(x)=-3x^2+x+1$ et $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=x^3-3x^2+2x-1$ et $I=\mathbb{R}$; 4) $f(x)=x^4-4x^3$ et $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x+5}$ et $I=\left]-\infty;-\dfrac{5}{2}\right[$; 6) $f(x)=\dfrac{3x^2-4x}{(x-1)^2}$ et $I=]1;+\infty[$

7) $f(x)=\cos(2x)+\sin(2x)$ et $I=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$; 8) $f(x)=\cos^2 x+\sin x$ et $I=[0;\pi]$

PLAN D'ÉTUDE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Pour étudier une fonction numérique, on suit généralement les étapes suivantes :

1) Déterminer D_f ensemble de définition de la fonction f ;

2) Étudier la parité, la périodicité de la fonction f, rechercher des centres ou des axes de symétrie puis déterminer son ensemble d'étude D_E ;

3) Calculer les limites de f aux bornes des intervalles de son ensemble de définition D_f ;

4) Étudier la dérivabilité de f sur D_E ;

5) Étudier les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variation sur D_f ;

6) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$;

7) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport aux asymptotes s'ils existent ;

8) Déterminer les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ en des points particuliers ;

9) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$ en déterminant ses points d'inflexion s'ils existent en calculant la dérivée seconde ;

10) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$. Pour cela :

- Souvent choisir un repère orthonormé.
- Construire les tangentes et les asymptotes.
- Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ en tenant compte de tableau de variations, la concavité et les images de quelques points remarquables.

Scanné avec CamScanner

A ÉTUDE D'UNE FONCTION POLYNÔME

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-3x+3$.

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Déterminer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

2) Étudier les variations de la fonction f.

3) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$ en déterminant ses points d'inflexion.

4) a) Montrer que le point $I(0;3)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

b) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.

5) a) En utilisant le tableau de variations de la fonction f, montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α telle que $\alpha<-1$.

b) Vérifier que : $-2,2<\alpha<-2,1$ puis déterminer le signe de $f(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.

6) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

7) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation : $f(x)=m$.

SOLUTION

1) a) La fonction f étant polynomiale ; il s'ensuit donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-3x+3\right)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-3x+3\right)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$$

b) Étudions les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-3x+3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

Donc, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-3x+3}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

Donc, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

2) Les variations de la fonction f :

Puisque f est une fonction polynôme, alors elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\left(x^3-3x+3\right)'=3x^2-3=3\left(x^2-1\right)$$

Scanné avec CamScanner

On a donc : $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x=-1 \text{ ou } x=1)$.

Tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

3) Étudions la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$:

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f''(x)=\left(3x^2-3\right)'=6x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

- Puisque $f''(x)>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\mathscr{C}_f$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Puisque $f''(x)<0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, alors $\mathscr{C}_f$ est concave sur $\mathbb{R}_-^*$.
- Puisque f'' s'annule et change de signe en 0, alors $I(0;3)$ est un point d'inflexion pour la courbe $\mathscr{C}_f$.

4) a) Montrons que le point $I(0;3)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$:

Il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(-x)=6-f(x)$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(-x)=-x^3+3x+3=6-\left(x^3-3x+3\right)=6-f(x)$.

Par suite, le point $I(0;3)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

b) L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I est : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$.

ce qui donne : (T) : $y=-3x+3$.

5) a) D'après le tableau de variations de la fonction f, cette dernière admet un minimum au point 1 sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ qui est $f(1)=1$. On en déduit donc que : $(\forall x \in [-1;+\infty[)\ f(x) \geq 1$.

De l'autre côté l'image de l'intervalle $]-\infty;-1]$ par f est $f(]-\infty;-1])=]-\infty;5]$.

Comme $0 \in f(]-\infty;-1])$, il existe donc un réel α de l'intervalle $]-\infty;-1]$ tel que : $f(\alpha)=0$.

Puisque la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;-1]$, alors α est l'unique solution de l'équation $f(x)=0$ dans cet intervalle.

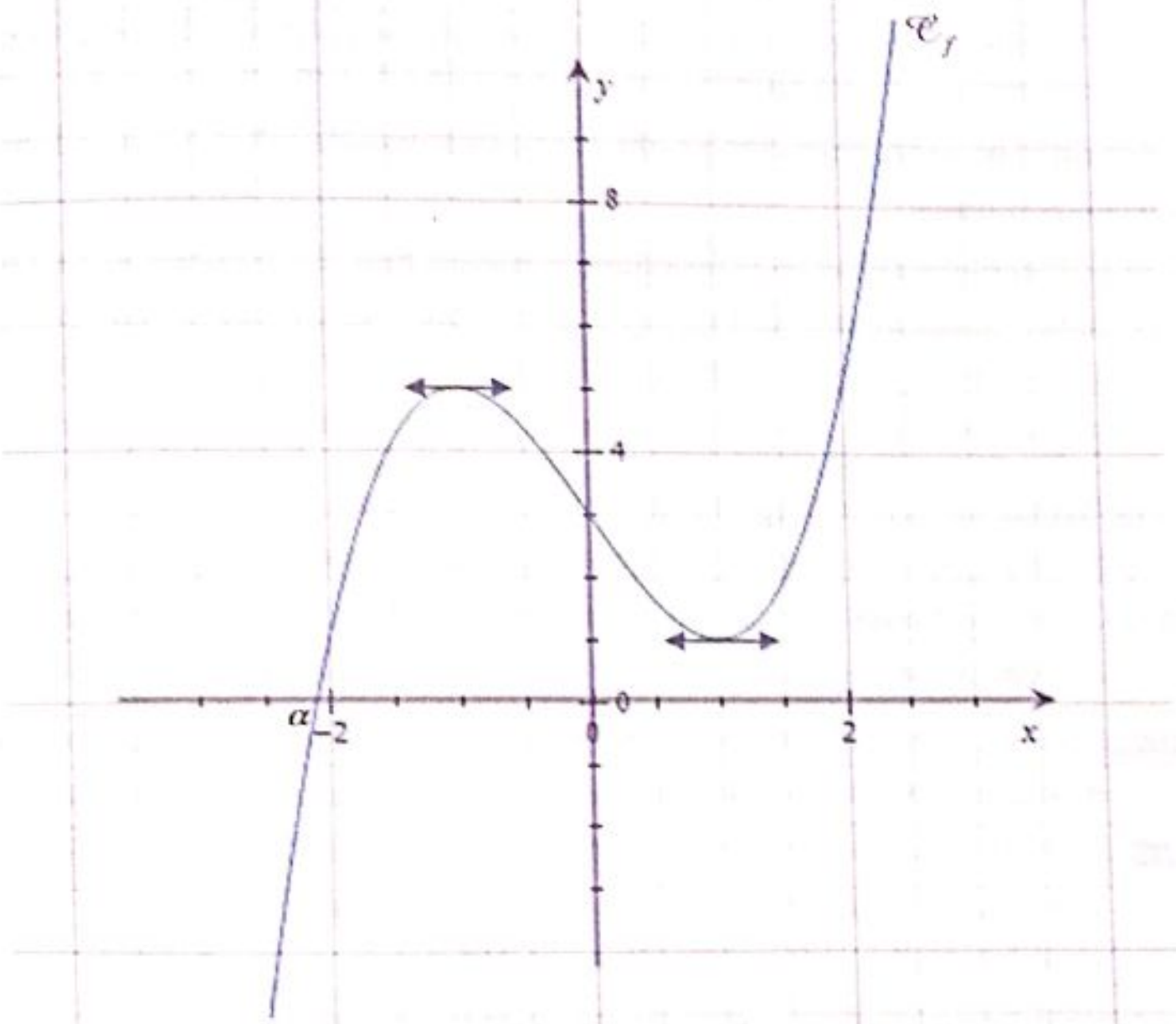
Scanné avec CamScanner

b) En utilisant la calculatrice, on obtient : $f(-2,2) \approx -1,04$ et $f(-2,1) \approx 0,03$; Il s'ensuit donc que $f(-2,2) < f(\alpha) < f(-2,1)$. Puisque f est strictement croissante, alors : $-2,2 < \alpha < -2,1$.

Signe de $f(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

6) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$:



7) Soit m un nombre réel. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ est égal au nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la droite (Δ_m) d'équation $y = m$.

Graphiquement, on trouve :

- Si $m < 1$ ou $m > 5$, l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution.
- Si $m = 1$ ou $m = 5$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.
- Si $1 < m < 5$, l'équation $f(x) = m$ admet trois solutions.

Scanné avec CamScanner

6 TECHNIQUES ET ASTUCES



- Lorsqu'on veut étudier une fonction numérique, il faut tout d'abord déterminer le domaine de définition, c'est-à-dire, l'ensemble des valeurs réelles x telles que $f(x)$ existe.

  Il faut faire donc attention à trois choses importantes :
  - Les dénominateurs doivent être non nuls.
  - L'intérieur d'un radical doit être positif.
  - L'ensemble de définition des fonctions usuelles.
- Il est parfois intéressant d'étudier la parité ou la périodicité d'une fonction, pour ne pas l'étudier sur tout son ensemble de définition, mais sur un ensemble dit domaine d'étude (qui est inclus dans le domaine de définition). Les variations sur le domaine de définition se retrouvent à partir de celles de le domaine d'étude par symétrie (centrale ou axiale) pour la parité, par translation pour la périodicité. On peut aussi utiliser simultanément ces deux propriétés.
- En ce qui concerne l'intersection avec les axes, il faut connaître les phrases de rédaction qui guident le raisonnement.

  Faire attention à ce que l'on écrit, chercher les abscisses n'est pas chercher les coordonnées ; il ne faut pas confondre ces deux notions.
- Lorsqu'on veut étudier la dérivabilité de la fonction étudiée, il faut dire pourquoi et en quels intervalles la fonction est dérivable. En cas de problème pour la dérivabilité en un point, vous êtes guidés par l'énoncé, et il faudra revenir à la définition de la dérivabilité.

  En utilisant les théorèmes du cours, vous devez pouvoir dériver n'importe quelle fonction.
- Le tableau de variation est un bon outil pour regrouper les résultats qui précédent.

  Pour dresser un tableau de variation, on peut suivre la démarche suivante :
  - <u>Première ligne :</u> On inscrit toutes les valeurs qui apparaissent dans le domaine de définition et ses extrémités, ainsi que les valeurs qui annulent la dérivée.
  - <u>Deuxième ligne :</u> On donne le signe de la dérivée, ainsi que la(les) valeur(s) qui l'annule, et on inscrit une double barre $\|$, sous les valeurs pour lesquelles elle n'est pas définie.
  - <u>Troisième ligne :</u> On montre les variations de la fonction, on en profite pour vérifier la cohérence des résultats sur les limites. On inscrit aussi une double barre $\|$, sous les valeurs pour lesquelles la fonction n'est pas définie.
- Pour étudier la convexité d'une fonction f donnée sur un intervalle donné I :
  - Si l'énoncé l'affirme ou si la fonction permet de le montrer, on peut écrire que f est deux fois dérivable sur I et on étudie alors le signe de la dérivée seconde.
  - Si la fonction n'a pas aucune raison d'être dérivable plus d'une fois sur I, on peut étudier alors le sens de variation de la dérivée première.
- Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ est le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la droite (Δ_m) d'équation $y = m$.
- Si f est croissante sur un intervalle I, alors l'implication « $f(a) \leq f(b) \Rightarrow a \leq b$ » n'est pas toujours vraie (par exemple : f constante sur I). La condition « f strictement croissante » est donc nécessaire.

Scanné avec CamScanner

B ÉTUDE D'UNE FONCTION RATIONNELLE

Étudier puis représenter la fonction numérique : $f : x \mapsto x-1+\dfrac{1}{x+1}$

SOLUTION

• L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.

• Limites aux bornes de D_f :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$$

• Branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$:

▪ On a : $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$; donc la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale de la courbe $\mathscr{C}_f$.

▪ On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-1)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+1} = 0$;

donc la droite (D) d'équation $y = x-1$ est une asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

▪ On a pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $f(x)-(x-1) = \dfrac{1}{x+1} > 0$. Donc, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de (Δ).

▪ On a pour tout $x \in]-\infty;-1[$, $f(x)-(x-1) = \dfrac{1}{x+1} < 0$. Donc, la courbe $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de (Δ).

• Variations de la fonction f sur D_f :

▪ La fonction f étant dérivable sur D_f car c'est une fonction rationnelle. De plus, on a pour tout $x \in D_f$:

$$f'(x) = \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)' = 1-\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

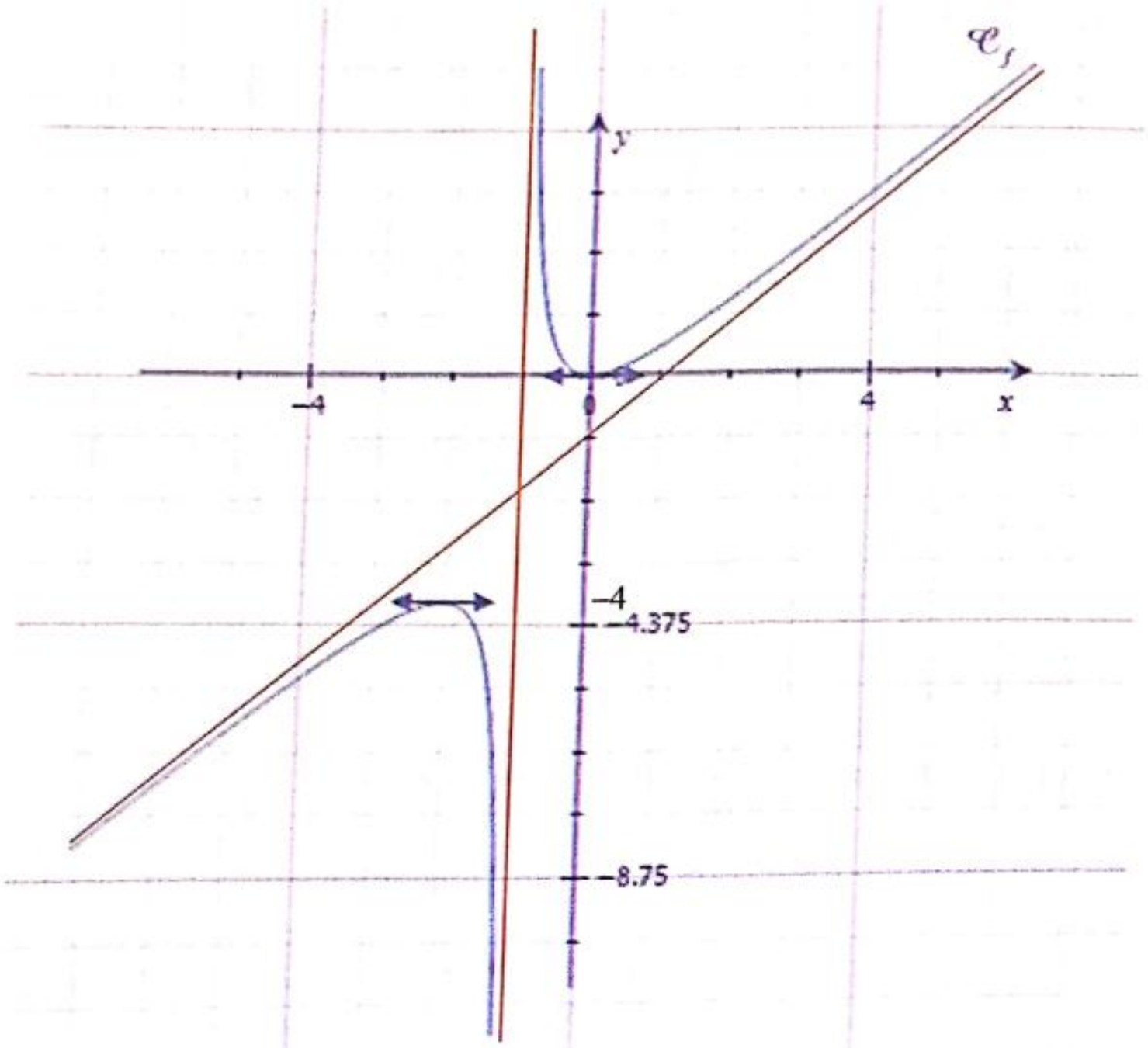
Puisque $(x+1)^2 > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x+2)$.

▪ Tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Scanné avec CamScanner

• Représentation graphique :





• Lors de l'étude d'une fonction numérique d'une variable réelle, il est souvent demandé d'étudier les branches infinies de cette fonction.

Il faut connaître les branches infinies citées dans le cours. En particulier :

si $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

• Parfois, on vous demande d'étudier la position relative d'une courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (D) d'équation $y=ax+b$. Pour cela on étudie le signe de $f(x)-(ax+b)$:

▪ Pour les abscisses x tels que $f(x)-(ax+b)>0$: $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la droite (D).

▪ Pour les abscisses x tels que $f(x)-(ax+b)<0$: $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de (D).

• Il faut bien connaître les interprétations géométriques, surtout les tangentes verticales et les demi-tangentes. À titre d'exemple, si on trouve $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$, alors $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente verticale à droite du point d'abscisse x_0 dirigée vers les ordonnées négatives.

Scanné avec CamScanner

C ÉTUDE D'UNE FONCTION IRRATIONNELLE

Etudier puis représenter la fonction numérique : $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x - 2}$

SOLUTION

• Ensemble de définition de la fonction f :

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-1] \cup [2;+\infty[.$$

Ainsi : $D_f =]-\infty;-1] \cup [2;+\infty[$

• Limites aux bornes de D_f : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

• Branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$:

• On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x - 2} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 1} = -\frac{1}{2}.$$

Donc la droite (D) d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

• On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} -\frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x} = \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x - 2} + x\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} - 1} = \frac{1}{2}.$$

Donc la droite (D) d'équation $y = -x + \dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

• Variations de la fonction f sur D_f :

• La fonction $x \mapsto x^2 - x - 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme. Donc, la fonction f est dérivable sur $D_f - \{-1;2\}$. De plus, on a pour tout $x \in D_f - \{-1;2\}$: $f'(x) = \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}$

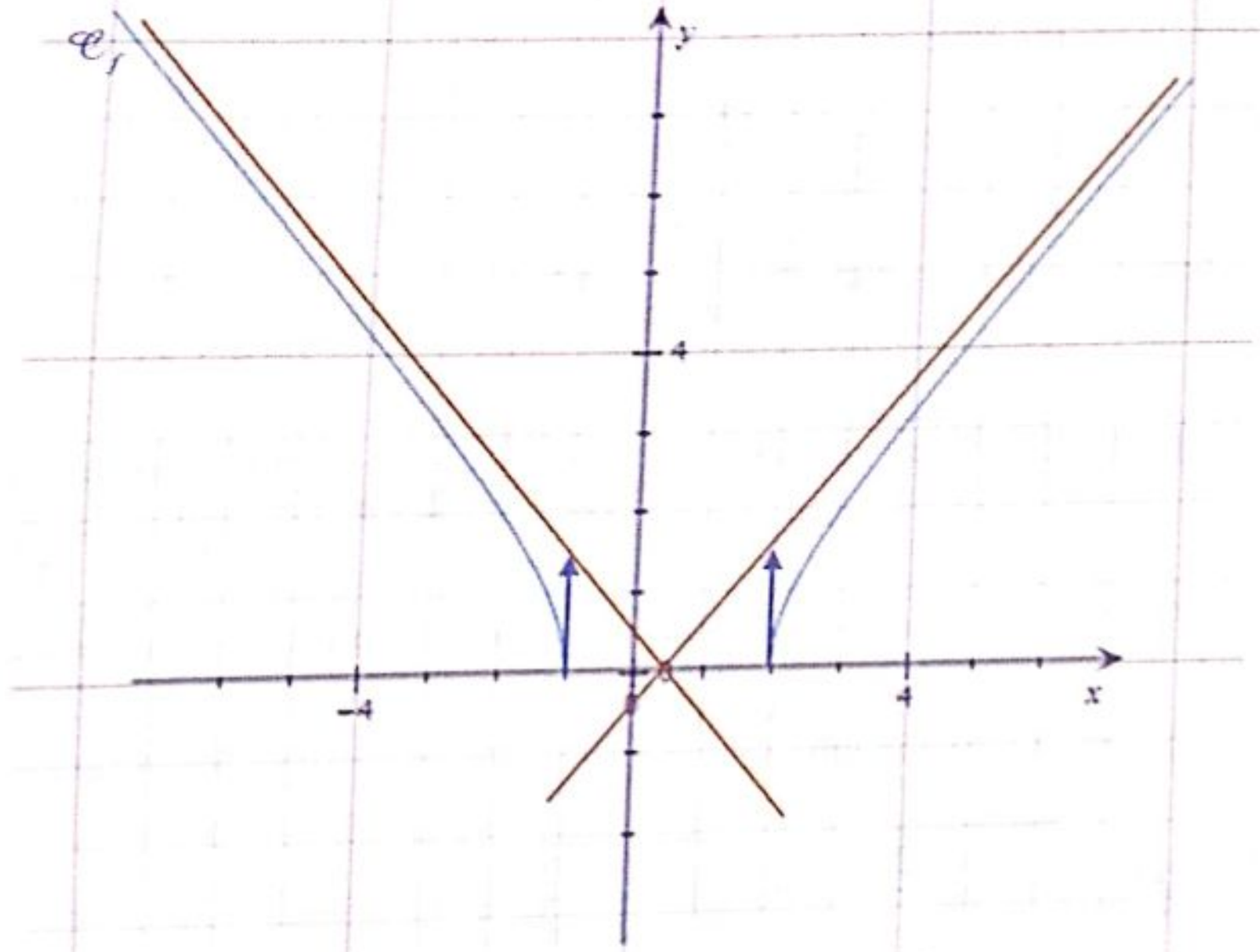
Puisque $\sqrt{x^2 - x - 2} > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est celui de $2x - 1$.

Scanné avec CamScanner

• Tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖	‖	‖	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	0	‖	0	↗	$+\infty$

• Représentation graphique :



D ÉTUDE D'UNE FONCTION TRIGONOMÉTRIQUE

Étudier puis représenter la fonction numérique : $g : x \mapsto \sin^2 x + \sin x - 2$

SOLUTION

• L'ensemble de définition : $D_g = \mathbb{R}$

• Périodicité : la fonction g est périodique de période 2π car : $(\forall x \in \mathbb{R})\ g(x+2\pi) = g(x)$

Scanné avec CamScanner

On peut alors restreindre l'étude sur l'ensemble $D_E = [-\pi, \pi] \cap D_g = [-\pi, \pi]$.

• Variations de la fonction g sur D_E :

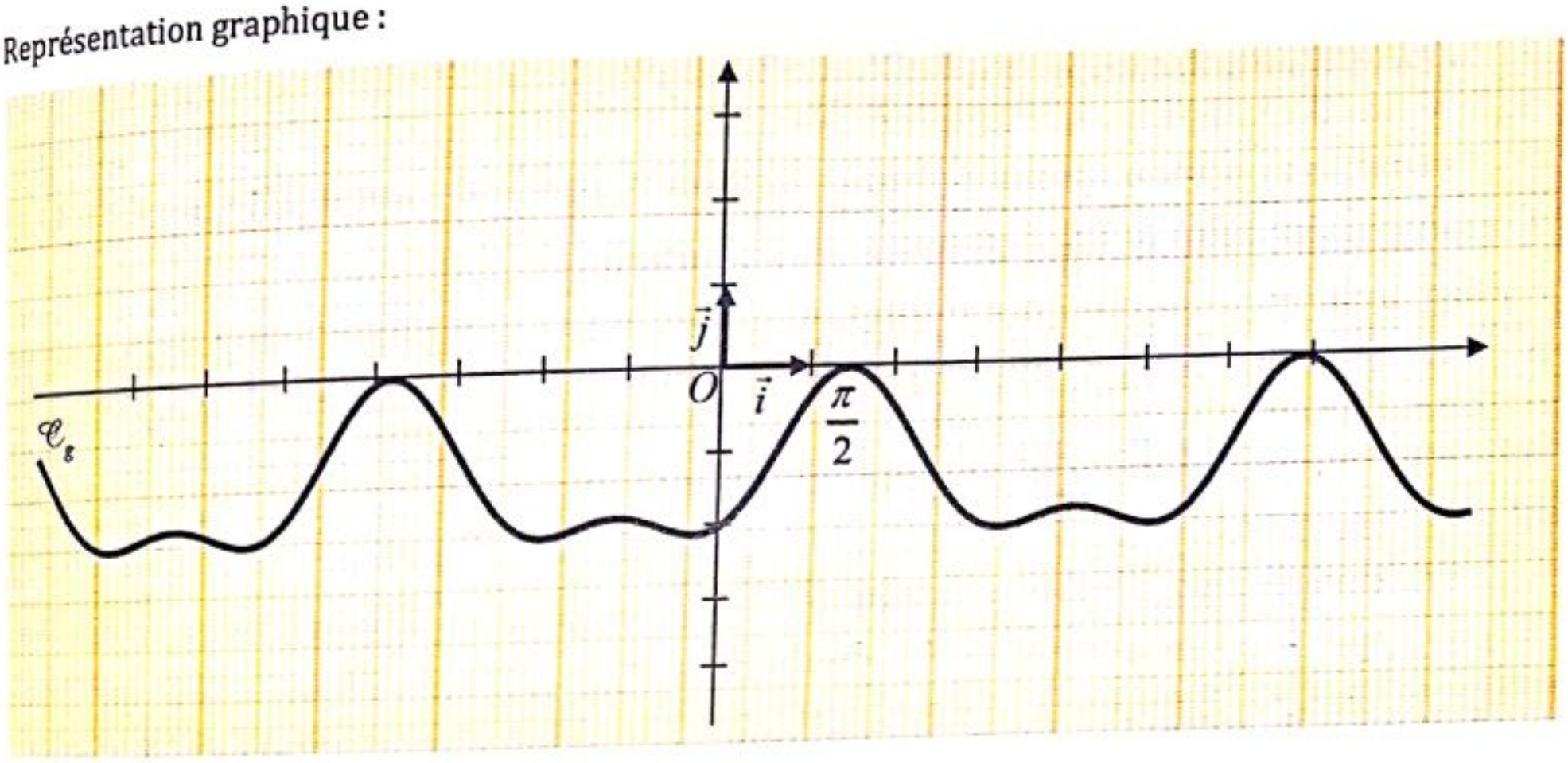
▪ La fonction g est dérivable sur D_E en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

De plus, pour tout $x \in D_E$: $g'(x) = 2\sin x \cos x + \cos x = (2\sin x + 1)\cos x$.

▪ Tableau de variations de g sur D_E :

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{-\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	-2	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	-2	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	0	↘	-2

• Représentation graphique :



• La plupart des fonctions à étudier sont des fonctions construites à partir de fonctions élémentaires. Par exemple :

- Fonction polynôme ;
- Fonction rationnelle ;
- Fonction irrationnelle ;
- Fonctions trigonométriques ;
- .....etc.



• Pour étudier les variations d'une fonction numérique et tracer sa représentation graphique, on suit le plan suivant.

Scanné avec CamScanner



- Schématiquement, l'étude d'une fonction numérique se fait « en gros » en sept étapes, l'objectif ultime étant de tracer le graphe le plus exact possible de f .

1ère étape : Déterminer le domaine de définition de f :

2ème étape : Déterminer le domaine d'étude D_E :

Par la parité (ou l'imparité) et la périodicité, on détermine une sous-partie sur laquelle il est nécessaire et suffisant d'étudier la fonction ; le reste du graphe se déduit alors par symétrie axiale(ou centrale) ou par translation.

3ème étape : Branches infinies et comportement de la courbe $\mathscr{C}_f$:

L'étude des branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$ se fait en calculant les limites aux bornes de D_E.

4ème étape : Étudier la dérivabilité sur D_E :

Lorsque les conditions d'application des théorèmes liés aux opérations sur les fonctions dérivables sont vérifiées, on utilise ces théorèmes pour justifier la dérivabilité et calculer la dérivée.
Pour les éléments de l'ensemble de définition où ces conditions ne sont pas réalisées on statue sur la dérivabilité et on détermine la valeur éventuelle du nombre dérivé :

- En utilisant la définition : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$.
- En utilisant la règle suivante : f est dérivable en x_0 si, et seulement si, $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$

5ème étape : Tableaux de variations et de valeurs particulis :

Dans le tableau de valeurs, on n'omettra pas de faire figurer les nombres dérivés qui permettront le tracé de tangente à la courbe. Les valeurs à indiquer dans ce tableau sont, au moins, celles qui correspondent :

- Aux intersections avec les axes de coordonnées,
- Aux extrema,
- Aux intersections avec les asymptotes.

6ème étape : Étude de la convexité de la courbe $\mathscr{C}_f$:

Si le calcul de la dérivée seconde de f est manipulable, et si le signe de $f''(x)$ est facile à calculer, alors on peut exploiter la convexité de la courbe $\mathscr{C}_f$ afin de préciser d'avantage la construction de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

7ème étape : Construction de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$:

Pour tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f , on commence tout d'abord par tracer les tangentes horizontales, verticales, obliques, et les tangentes attachées aux points d'inflexion.
Ensuite, on trace les asymptotes horizontales, verticales et obliques, en prenant en considération la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à ces asymptotes. On s'inspire enfin du tableau de variations et de quelques points particuliers pour finir le traçage de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES D'APPLICATION

ASYMPTOTES D'UNE COURBE DE FONCTION

EXERCICE 01

Déterminer les asymptotes verticales et horizontales de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f (si elles existent) :

1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2-1}$

3) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$; 4) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$

5) $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}}$; 6) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$

7) $f(x)=\dfrac{4x^2+5}{x^2-3}$; 8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x-1}}$

9) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$; 10) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

11) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+x-2}$; 12) $f(x)=\dfrac{x}{(x-3)^2}$

13) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2}$; 14) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\pi-x}$

EXERCICE 02

Déterminer les asymptotes verticales et horizontales de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f (si elles existent) :

1) $f(x)=\dfrac{2x^3+x^2-1}{x^3-1}$; 2) $f(x)=\dfrac{-3x^2-x+1}{(x+2)^2}$

3) $f(x)=\dfrac{1-x^3}{(x-1)(x^2+5)}$; 4) $f(x)=\dfrac{E(x)}{x}$

5) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x-1}$; 6) $f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-2}$; 8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$

9) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$; 10) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

EXERCICE 03

Dans chacun des cas suivants, montrer que la droite (D) est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$:

1) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ et $(D):y=x$

2) $f(x)=3x+2+\dfrac{4}{x-1}$ et $(D):y=3x+2$

3) $f(x)=-x+\dfrac{x}{x^2+1}$ et $(D):y=-x$

4) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ et $(D):y=x$

5) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$ et $(D):y=x-3$.

6) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ et $(D):y=x+\dfrac{1}{2}$.

7) $f(x)=2x+\dfrac{\cos x}{x}$ et $(D):y=2x$.

8) $f(x)=\left(2-\dfrac{1}{x}\right)(x+3)$ et $(D):y=2x+5$.

EXERCICE 04

Déterminer les asymptotes obliques de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f (si elles existent) :

1) $f(x)=x-2+\dfrac{3}{x+1}$; 2) $f(x)=\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{1}{x-1}$

3) $f(x)=x+\dfrac{x+2}{x^2+1}$; 4) $f(x)=\dfrac{x^2+5x-2}{x+1}$

5) $f(x)=1-x+\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$; 6) $f(x)=x-\dfrac{\sin x}{x}$

7) $f(x)=\sqrt{x^2+4x+3}$; 8) $f(x)=x+\dfrac{E(x)}{x}$

9) $f(x)=\dfrac{8x^2-4x+1}{2x+1}$; 10) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

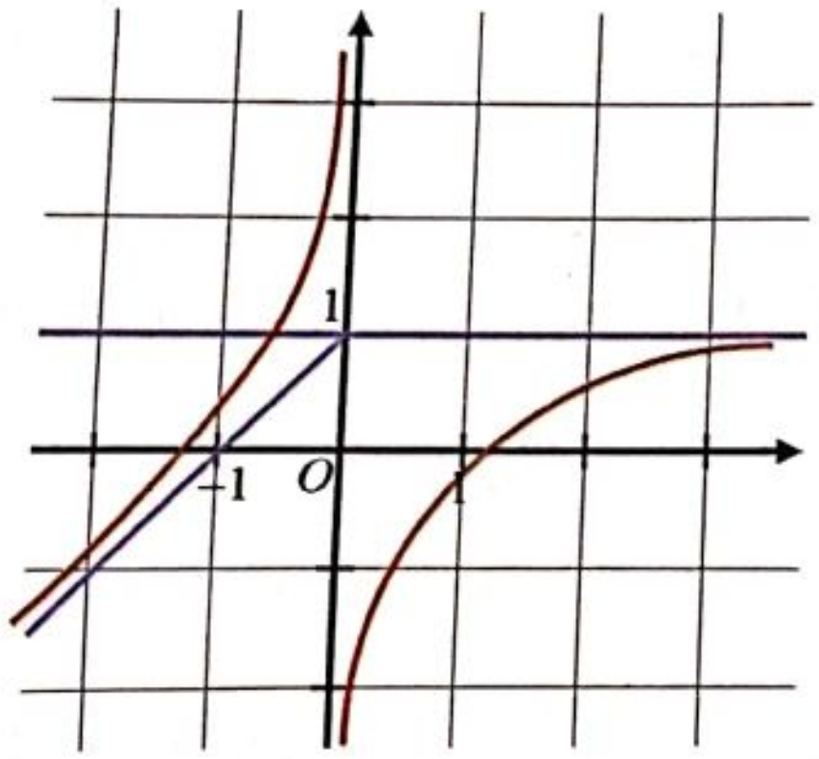
11) $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+2x+1}{x^2-1}$; 12) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3+2}$

Scanné avec CamScanner

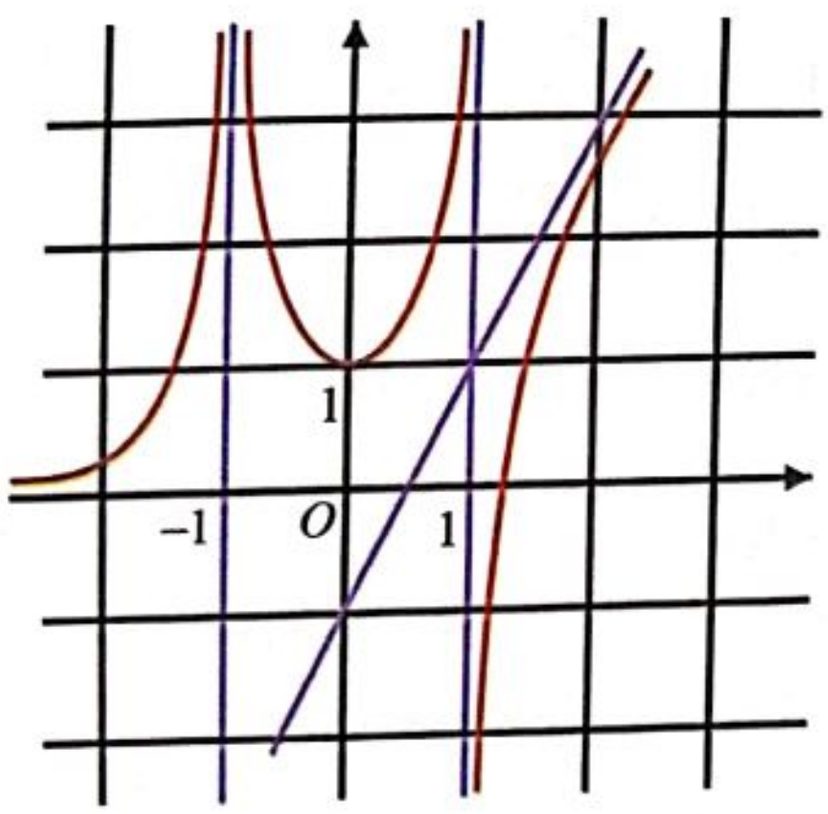
EXERCICE 05

À partir de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f, déterminer les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans chacun des cas suivants :

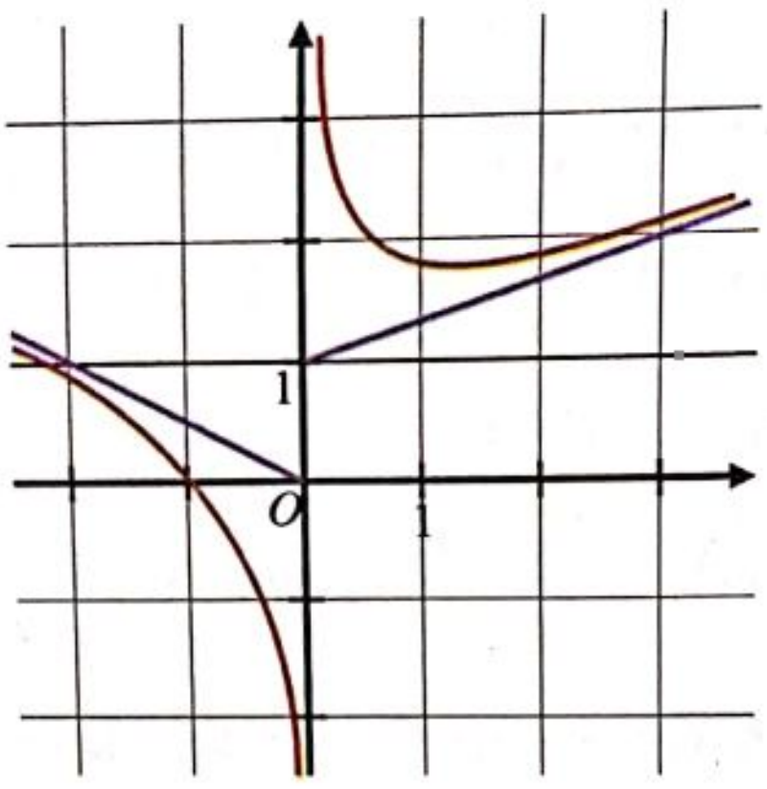
1)



2)



3)



LES BRANCHES PARABOLIQUES D'UNE COURBE

EXERCICE 06

Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses :

1) $f(x)=\sqrt{x+2}$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x-3}$

3) $f(x)=\left(2-\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x+1}$; 4) $f(x)=3-\dfrac{x+1}{\sqrt{-x}}$

5) $f(x)=\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+4}$; 6) $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x\sqrt{2-x}}$

EXERCICE 07

Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées :

1) $f(x)=\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^2+4x+7}$; 2) $f(x)=5-4x^2$

3) $f(x)=2x^3-5x+4$; 4) $f(x)=x^3\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$

5) $f(x)=\left(3-x^2\right)\sqrt{1-x}$; 6) $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x+1}}$

EXERCICE 08

Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet une branche parabolique dirigée vers un des axes du repère :

1) $f(x)=2x^3-5x^2+3x-1$; 2) $f(x)=-x^3+\sqrt{x}$

3) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$; 4) $f(x)=\sqrt{2x+1}+\dfrac{1}{x}$

5) $f(x)=\left(x^2+1\right)\sqrt{x}$; 6) $f(x)=\dfrac{E\left(x^2\right)}{\sqrt{x}}$

7) $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{x-1}$; 8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-x+3}{x+1}}$

EXERCICE 09

Dans chacun des cas suivants, montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet une branche parabolique dirigée vers la droite (D) :

Scanné avec CamScanner

1) $f(x)=2x-\sqrt{x}$ et $(D): y=2x$

2) $f(x)=3x-\dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}$ et $(D): y=3x$

3) $f(x)=1-2x+\sqrt{x+1}$ et $(D): y=-2x$

4) $f(x)=x-2+\sqrt{x-2}$ et $(D): y=x$

EXERCICE 10

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x)=\frac{6x^2-5x+3}{2x-1}$$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

3) Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$\left(\forall x\in D_f\right)\ f(x)=a+bx+\frac{c}{2x-1}$$

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 11

Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction numérique f :

1) $f(x)=3x^7-x^2+1$; 2) $f(x)=x+\dfrac{x}{x+1}$

3) $f(x)=\sqrt{2x^2+3}-2$; 4) $f(x)=-x\sqrt{x^2-1}$

5) $f(x)=2x-\sqrt{x^2+3}$; 6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-3}$

7) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{x}$; 8) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}+1}$

9) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+3x}$; 10) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$

EXERCICE 12

Soit la fonction : $f: x\mapsto\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}-x+2$.

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

3) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIE D'UNE COURBE

EXERCICE 13

Dans chacun des cas suivants, montrer que la droite (Δ) est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$:

1) $f(x)=x^2-6x+5$ et $(\Delta): x=3$.

2) $f(x)=\sqrt{x^2+8x-7}$ et $(\Delta): x=-4$.

3) $f(x)=x^4+4x^3+5x^2+2x$ et $(\Delta): x=-1$.

4) $f(x)=|x|\sqrt{x^2-1}$ et $(\Delta): x=0$.

5) $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{2x^2+4x+3}$ et $(\Delta): x=-1$.

6) $f(x)=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2-4}}$ et $(\Delta): x=\dfrac{3}{2}$.

7) $f(x)=-\sin(2x)$ et $(\Delta): x=\dfrac{\pi}{2}$.

8) $f(x)=|x+1|+|x-1|$ et $(\Delta): x=0$.

9) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}$ et $(\Delta): x=\dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 14

Dans chacun des cas suivants, montrer que le point Ω est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$:

1) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ et $\Omega(-1;1)$.

2) $f(x)=x+1-\dfrac{4}{x-2}$ et $\Omega(2;3)$.

3) $f(x)=x^3-3x-2$ et $\Omega(0;-2)$.

4) $f(x)=x^3-3x^2+4$ et $\Omega(1;2)$.

5) $f(x)=\cos x$ et $\Omega\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi;0\right)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

6) $f(x)=\sin x$ et $\Omega(k\pi;0)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

7) $f(x)=\sqrt{3}\cos(2x)+\sin(2x)$ et $\Omega\left(\dfrac{\pi}{3};0\right)$.

8) $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin(2x)+\dfrac{1}{3}\sin(3x)$ et $\Omega(\pi;0)$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 15

1) Montrer que la droite (D) est un axe de symétrie de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f puis déterminer D_E son ensemble d'étude :

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-x^2}$ et $(D): x=\dfrac{1}{2}$.

b) $f(x)=\cos^4 x-\cos^2 x$ et $(D): x=\dfrac{\pi}{2}$.

2) Montrer que le point Ω est un centre de symétrie de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f puis déterminer D_E son ensemble d'étude :

a) $f(x)=x^3-3x^2+2x-1$ et $\Omega(1;-1)$.

b) $f(x)=\dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$ et $\Omega(0;3)$.

EXERCICE 16

Pour chacun des cas suivants, montrer que le nombre réel T est une période de la fonction f et étudier sa parité puis déterminer D_E son ensemble d'étude :

1) $f(x)=\cos(3x)$ et $T=\dfrac{2\pi}{3}$.

2) $f(x)=\tan(3x)$ et $T=\dfrac{\pi}{3}$.

3) $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{\sin(2x)}$ et $T=\pi$.

4) $f(x)=\cos(4x)-\sin^2(2x)$ et $T=\dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 17

Soit g la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin(2x)}$.

1) Déterminer D_g l'ensemble de définition de g.

2) Montrer que la fonction g est périodique.

3) Montrer que le point $\Omega\left(\dfrac{\pi}{4};0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_g$ et que la droite $(\Delta): x=-\dfrac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_g$.

ÉTUDE DE LA CONCAVITÉ D'UNE COURBE

EXERCICE 18

Dans chacun des cas suivants, étudier la concavité de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et déterminer ses points d'inflexion (en cas d'existence) :

1) $f(x)=3x^2-2x+1$; 2) $f(x)=-2x^2-5x+2$

3) $f(x)=x^3-3x^2+1$; 4) $f(x)=-x^3+3x+4$

5) $f(x)=x^4-x^3$; 6) $f(x)=3x^5+5x^4-1$

7) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$; 8) $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-1}$

9) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-3)^2}$; 10) $f(x)=\dfrac{x^3+3x}{3x^2+1}$

11) $f(x)=x+\sqrt{2x+3}$; 12) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

13) $f(x)=\dfrac{1-2x}{x^2-x-2}$; 14) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$

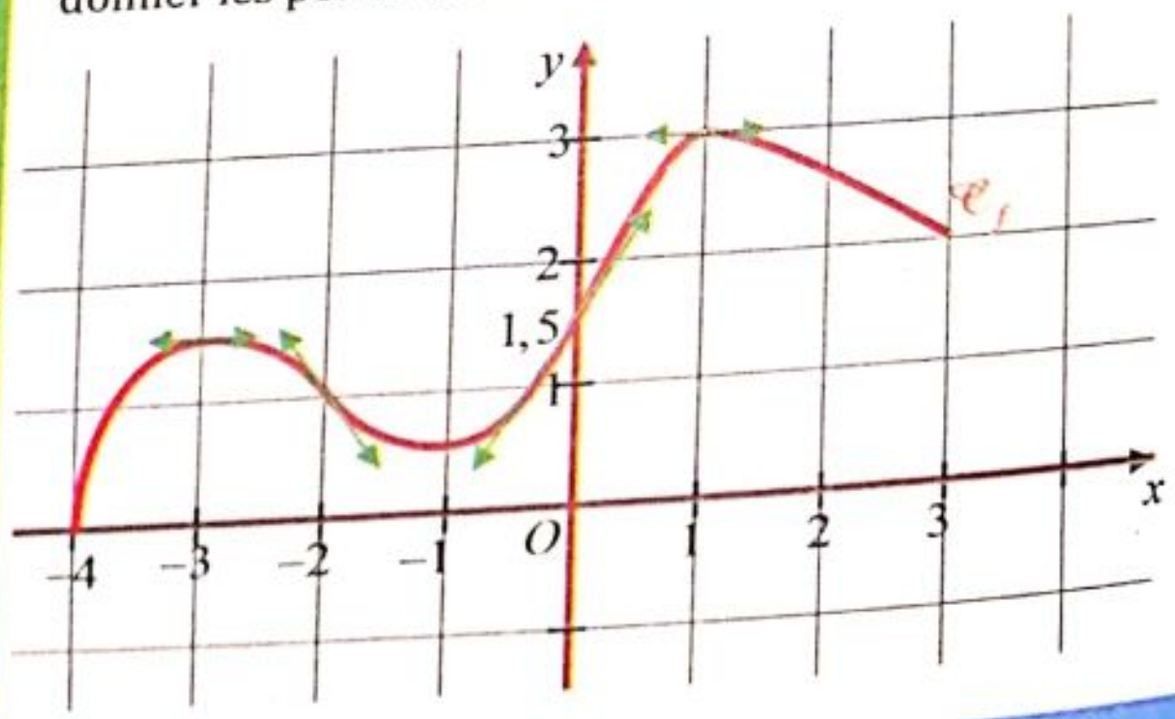
15) $f(x)=\sin x-\cos x$; 16) $f(x)=\cos(2x)$

17) $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$; 18) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\cos(2x)}$

EXERCICE 19

Dans la figure en-dessous, $\mathscr{C}_f$ est le graphe d'une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $I=]-4;3[$.

Déterminer le signe de $f''(x)$ pour tout $x\in I$ puis donner les points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.



Scanné avec CamScanner

ÉTUDE DE FONCTIONS NUMÉRIQUES

EXERCICE 20

Dans chacun des cas suivants, étudier la fonction polynomiale f puis tracer sa courbe représentative :

1) $f(x)=x^2-3x-4$; 2) $f(x)=-x^2+4x$

3) $f(x)=x^3-3x^2$; 4) $f(x)=x^4+x^2-2$

5) $f(x)=-x^3+6x^2-9x+4$; 6) $f(x)=x^3-x$

7) $f(x)=x^3-2x^2+1$; 8) $f(x)=x^4-8x^2$

9) $f(x)=-x^5+5x^4+2$; 10) $f(x)=x^2(x+1)^2$

11) $f(x)=(x+1)^2(x-2)$; 12) $f(x)=4x^3-x^4$

13) $f(x)=(1-x^3)(1-x^2)$; 14) $f(x)=x(2x+1)^3$

15) $f(x)=(x-1)(x-2)(x+3)$

EXERCICE 21

Dans chacun des cas suivants, étudier la fonction rationnelle f puis tracer sa courbe représentative :

1) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}$

3) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x}$; 4) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$

5) $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$; 6) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^4}$

7) $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$; 8) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

9) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}$; 10) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x+1)(x-2)}$

11) $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-1}$; 12) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^3-1}$

13) $f(x)=\dfrac{3x^2-4x}{2x^2-4x+2}$; 14) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}$

15) $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}$; 16) $f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$

EXERCICE 22

Dans chacun des cas suivants, étudier la fonction f puis tracer sa courbe représentative :

1) $f(x)=x-1+\dfrac{2}{x}$; 2) $f(x)=2x-1+\dfrac{1}{x-2}$

3) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-4}{x-2}$; 4) $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

5) $f(x)=\dfrac{x^3}{(2x-1)^2}$; 6) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-2)^2+1}$

7) $f(x)=x-3-\dfrac{1}{|x-2|}$; 8) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

9) $f(x)=|x+2|+\dfrac{4x}{x^2-4}$; 10) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-x}}$

11) $f(x)=x+2\sqrt{-x}$; 12) $f(x)=x\sqrt{x^2-1}$

13) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$; 14) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

EXERCICE 23

Dans chacun des cas suivants, étudier la fonction f puis tracer sa courbe représentative dans $[-2\pi;2\pi]$:

1) $f(x)=\cos x-\cos(2x)-1$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{1+\tan x}$

3) $f(x)=\cos x-\sin x$; 4) $f(x)=\sin x.\cos^2 x$

5) $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin(2x)$; 6) $f(x)=\sin x.\tan x$

7) $f(x)=\cos^2 x-\cos x.\sin x$; 8) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$

9) $f(x)=\sin^2 x-3\sin x$; 10) $f(x)=\dfrac{\tan x}{1-2\sin x}$

EXERCICE 24

Soit la fonction : $f: x\mapsto -\dfrac{3}{2}x^4+4x^3+3x^2-12x$.

1) Étudier la fonction f et tracer son graphe.

2) Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation : $-\dfrac{3}{2}x^4+3x^2-m=4x(3-x^2)$

Scanné avec CamScanner

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 25

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$

par : $f(x)=\dfrac{-x^2+2x+1}{x+1}$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i}\ ;\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$.

b) En déduire que la droite (Δ): $y=ax+b$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ puis déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et (Δ).

3) Étudier les variations de la fonction f.

4) Soit I le point d'intersection des deux asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Montrer que I est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

5) Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.

6) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

7) Construire (T) et $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 26

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$

par : $f(x)=x+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)>0$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au point d'abscisse $x_0=0$.

4) Déterminer la droite (D) asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ puis étudier la position relative de (D) et $\mathscr{C}_f$.

5) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$ en déterminant ses points d'inflexion.

6) a) Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

b) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i}\ ;\vec{j})$.

7) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation : $f(x)=mx$.

EXERCICE 27

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$

par : $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i}\ ;\vec{j})$.

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) a) Montrer que le point $I(2;0)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.

4) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$ en déterminant ses points d'inflexion.

5) Construire (T) et $\mathscr{C}_f$.

Scanné avec CamScanner

6) a) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation : $f(x)=m$.

b) Quel est le nombre de solutions de l'équation :

$$x\sqrt{x}-6x+9\sqrt{x}-5=0$$

EXERCICE 28

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+10x+5}{(x+1)^2}$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}+\dfrac{d}{(x+1)^2}$

b) En déduire que la droite (Δ): $y=ax+b$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ puis déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et (Δ).

3) Étudier les variations de la fonction f.

4) Construire (T) et $\mathscr{C}_f$.

5) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation :

$$x^3+(3-m)x^2+(10-2m)x+5-m=0$$

EXERCICE 29

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$$

1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de f.

b) Vérifier que la droite $(\Delta): x=\dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.

2) Déterminer le limites de f aux bornes de D.

3) Étudier les variations de la fonction f.

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et ses asymptotes obliques.

6) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

7) Construire (T) et $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 30

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de f.

b) Vérifier que la fonction f est paire.

2) Étudier la dérivabilité à droite de la fonction f au point $a=1$ et interpréter le résultat obtenu.

3) a) Étudier les variations de la fonction f sur $[1;+\infty[$.

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion I d'abscisse positive.

4) Étudier la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ aux voisinage de $+\infty$ puis construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation :

$$\sqrt{x^4-x^2}-m=0$$

EXERCICE 31

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\frac{(x+1)^3}{x^2+2x}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer D l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que le point $\Omega(-1;0)$ est un centre de

Scanné avec CamScanner

symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} f(x)$$

4) Déterminer la droite $(D): y = x+1$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ puis étudier la position relative de (D) et $\mathscr{C}_f$.

5) Étudier les variations de la fonction f sur les intervalles $]0;+\infty[$ et $[-1;0[$.

6) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 = -1$.

7) Construire (T) et $\mathscr{C}_f$.

8) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation :

$$x^2\left(|x|+3-m\right)+(3-2m)|x|+1=0$$

EXERCICE 32

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=x-1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer D l'ensemble de définition de f puis Déterminer le limites de f aux bornes de D.

2) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et son asymptote oblique.

4) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x)=\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x^3}$$

b) Étudier les variations de la fonction f.

5) Montrer que le point I d'abscisse 3 est un point d'inflexion pour la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

et en déduire les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

7) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

8) Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

9) Soit g la fonction numérique définie par :

$$g(x)=\left|x-\frac{1}{x}\right|.\left|1-\frac{1}{x}\right|$$

a) Étudier la dérivabilité de la fonction g en 1 et -1 puis interpréter les résultats obtenus.

b) En utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$, construire la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g.

EXERCICE 33

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer D l'ensemble de définition de f puis Déterminer le limites de f aux bornes de D.

2) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) a) Montrer que pour tout $x \in D$:

$$f'(x)=\left(\frac{2x+\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-1\right)$$

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $(\Delta): y = x$.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

On donne : $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{4}$ et $f(4)=\frac{5}{2}$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 34

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}} \;;\; x>0 \\ f(x)=\sqrt{x^2+1}-1 \;;\; x\le 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Étudier la dérivabilité de la fonction f au point $x_0=0$ et interpréter les résultats obtenus.

2) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

4) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 35

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de f.

b) Vérifier que la fonction f est paire.

2) Étudier la dérivabilité à droite de la fonction f au point $a=1$ et interpréter le résultat obtenu.

3) a) Montrer que pour tout $x\in D-\{-1;1\}$:

$$f'(x)=\frac{2-x^2}{x^3\sqrt{x^2-1}}$$

b) Dresser le tableau de variations de f.

4) Étudier la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ aux voisinage de $+\infty$ puis construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Soit g l'application définie de $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ dans $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$ par : $g(x)=f(x)$

Montrer que l'application g est bijective et que pour tout $x\in\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$: $g^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x^2}}$

EXERCICE 36

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de f.

b) Déterminer le limites de f aux bornes de D puis interpréter les résultats obtenus.

c) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite (D) d'équation : $y=1$.

2) Étudier les variations de la fonction f.

3) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0=-2$.

4) Construire (T) et $\mathscr{C}_f$.

5) Soit g la fonction numérique définie par :

$$g(x)=\frac{x^2+|x|-2}{x^2-|x|-2}$$

a) Construire la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$(x\in\mathbb{R})\;,\; g(x)\ge 1$$

EXERCICE 37

Partie A :

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\dfrac{1}{4}(x^3-3x-18)$

1) Étudier les variations de la fonction g.

2) a) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_g$ admet un unique point d'inflexion A qu'on déterminera. .

Scanné avec CamScanner

b) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point A.

3) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_g$.

4) Construire (T) et la courbe $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie B :

On considère la fonction numérique g définie par :

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{x^3+9}{x^2-1}\right)$$

1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de f.

b) Déterminer les limites de f aux bornes de D.

2) a) Montrer que pour tout $x \in D$:

$$f'(x)=\frac{4}{3}\times\frac{xg(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

b) Dresser le tableau de variations de f.

3) a) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et son asymptote oblique (Δ).

4) Construire $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé.

5) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation :

$$x^3-3mx^2+3m+9=0$$

6) À partir de la courbe $\mathscr{C}_f$, construire la courbe représentative de la fonction $h:x\mapsto|f(x)|$.

EXERCICE 38

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}$

1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de f.

b) Montrer que 2π est une période de la fonction f.

2) a) Montrer que $\Omega\left(\frac{\pi}{4};0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$ et que la droite $(\Delta):x=-\frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) En déduire qu'on peut restreindre l'étude de la fonction f sur $D_E=\left[-\frac{\pi}{4};0\right[\cup\left]0;\frac{\pi}{4}\right]$.

3) Étudier les variations de la fonction f sur D_E.

4) Construire $\mathscr{C}_f$ sur $D_f\cap\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

EXERCICE 39

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\sin^2 x-2\cos x-1$$

1) Montrer que la fonction f est paire.

2) Étudier les variations de la fonction f sur $I=[0;\pi]$.

3) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur I et déterminer les points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

4) a) Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses sur l'intervalle I.

b) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[-2\pi;2\pi]$.

EXERCICE 40

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)-\cos x$$

1) Montrer que 2π est une période de la fonction f.

2) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=2(1-\sin x)\left(\frac{1}{2}+\sin x\right)$$

3) Étudier les variations de f sur $I=[-\pi;\pi]$.

4) Résoudre dans $J=\left[-\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{3}\right]$ l'inéquation suivante : $f(x)\le 0$.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle J.

6) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation :

$$x\in J\ ,\ m+\cos x(1-\sin x)=0$$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 41

1) Étudier les variations de la fonction numérique :

$$f : x \mapsto \frac{1}{4x} - x$$

2) Soit g la fonction numérique définie par :

$$g(x) = \frac{1-\cos^2 x}{4\cos x}$$

a) Déterminer D_g ensemble de définition de g.

b) Vérifier que : $(\forall x \in D_E)\ g(x) = f(\cos x)$

c) Montrer qu'on peut restreindre l'étude de la fonction g sur l'ensemble :

$$D_E = \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$$

d) Donner les variations de la fonction g sur les deux intervalles de D_E puis calculer les limites de g a droite et à gauche du point $\frac{\pi}{2}$.

c) Dresser le tableau de variations de g sur D_E.

3) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ sur D_E.

3) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation :

$$x \in [0;\pi],\quad 4\cos^2 x + 4m\cos x - 1 = 0$$

EXERCICE 42

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{\tan^2 x}{1-\tan^2 x}$$

1) Déterminer D ensemble de définition de f.

2) Étudier la parité et la périodicité de la fonction f puis en déduire un ensemble d'étude D_E.

3) Déterminer les limites de f aux bornes de D_E.

4) Étudier les variations de f sur D_E.

5) a) Résoudre algébriquement dans l'ensemble $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation : $1-\tan^2 x < 0$.

b) En utilisant la fonction f, résoudre graphiquement dans l'ensemble $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation : $1-\tan^2 x < 0$.

EXERCICE 43

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x + 1 + \frac{2\sqrt{2}\,x}{\sqrt{1+x^2}}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}\right)^3 - 1$$

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) a) Montrer que $\Omega(0;1)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au point Ω.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

6) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = mx + 1$

EXERCICE 44

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x\left(3-2\sqrt{x}\right) & ;\ x \geq 0 \\ f(x) = \dfrac{-x^3}{(x-1)^2} & ;\ x < 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Scanné avec CamScanner

1) Déterminer D ensemble de définition de f.

2) a) Déterminer les limites de f aux bornes de D.

b) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) Étudier la dérivabilité de la fonction f au point 0 puis interpréter les résultats obtenus.

4) Étudier les variations de f.

5) a) Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

b) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) Soit g une fonction numérique telle que :

- Pour tout $x \geq 1$: $g(x) = f(x)$;
- $\Omega(1;1)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

a) Déterminer l'expression de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b) Construire la courbe $\mathscr{C}_g$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 45

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x} \ ; \ x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2} \ ; \ x > 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer D ensemble de définition de f.

2) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \ ; \ \lim_{x\to+\infty} f(x) \ ; \ \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

3) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

5) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) Montrer que $A(1;0)$ est un point d'inflexion pour la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) Calculer $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ puis construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

7) En déduire graphiquement, l'ensemble solution du système : $\begin{cases} x > 0 \\ x - 3 \leq f(x) \leq 0 \end{cases}$

EXERCICE 46

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}x + \dfrac{\pi}{6}\right) \ ; \ x < 1 \\ f(x) = 1 - x + \dfrac{1}{x} \ ; \ x \geq 1 \end{cases}$$

1) Déterminer D ensemble de définition de f.

2) Calculer la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Étudier la dérivabilité de la fonction f au point $x_0 = 1$ puis interpréter les résultats obtenus.

4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-5;+\infty[$.

5) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique u voisinage de $+\infty$.

6) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion dont les abscisses appartiennent à $[-5;1]$.

7) Construire la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[-5;+\infty[$.

8) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation :

$$x \geq -5 \ ; \ f(x) = m$$

EXERCICE 47

Soit f_m la fonction numérique définie par :

$$f(x) = mx + \sqrt{|x^2 - x|} \quad (\text{avec } m \in \mathbb{R})$$

et soit $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Scanné avec CamScanner

1) Déterminer D_m ensemble de définition de f_m.

2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$.

3) Étudier la dérivabilité de f_m aux points 0 et 1.

4) Dans cette question, on prend : $m=0$.

a) Vérifier que la droite $(\Delta): x=\dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_0$.

b) Étudier les variations de la fonction f_0.

c) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_0$.

d) Construire la courbe $\mathscr{C}_0$.

EXERCICE 48

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1-\tan^2(2x)} \;;\; 0\le x\le\dfrac{\pi}{4} \\ f(x)=1-x+\sqrt{\dfrac{x}{1-x}} \;;\; x<0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer D ensemble de définition de f.

2) a) Déterminer les limites de f aux bornes de D.

b) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) Étudier la dérivabilité de la fonction f au point 0 puis interpréter les résultats obtenus.

4) Étudier les variations de f.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 49

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=|x-1|+\sqrt{x^2-2x}$$

et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer D ensemble de définition de f.

2) Vérifier que la droite $(\Delta): x=1$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

3) Calculer les limites :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-2)\right]$$

Que peut-on conclure ?

4) a) Étudier la dérivabilité à droite de la fonction f au point $x_0=2$ puis interpréter le résultat obtenu.

b) Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation :

$$|\cos x-1|+\sqrt{\cos^2 x-2\cos x}=m$$

EXERCICE 50

Étudier puis représenter graphiquement les fonctions numériques suivantes :

$$f_1(x)=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \;;\; f_2(x)=x+1-\sqrt{x^2-2x}$$

$$f_3(x)=\sqrt{\frac{x}{1+x^2}} \;;\; f_4(x)=\frac{x}{\sqrt{x+2}-1}$$

$$f_5(x)=\sqrt{x^2-|x|+1} \;;\; f_6(x)=x+1-\sqrt{x^2-x-2}$$

$$f_7(x)=\sqrt{2x+1}-\frac{x}{\sqrt{2x+1}} \;;\; f_8(x)=\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x+1}$$

$$\begin{cases} f_9(x)=\dfrac{x^2}{2-x} \;;\; x\in[0;1] \\ f_9(x)=x-\sqrt{x^2-x} \;;\; x\in\,]-\infty;0[\cup]1;+\infty[\end{cases}$$

$$f_{10}(x)=\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-2x}} \;;\; f_{11}(x)=\frac{x(1-|x|)}{\sqrt{|x^2-1|+1}}$$

$$\begin{cases} f_{12}(x)=x\sqrt{\dfrac{x}{x-2}} \;;\; x>2 \\ f_{12}(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}+1 \;;\; x\le 2 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

RÉFÉRENCES

BIBLIOGRAPHIE

En arabe :

- المفيد في الرياضيات، السنة الأولى من سلك البكالوريا (مسلك العلوم الرياضية)
  دار الثقافة للنشر والتوزيع (طبعة 2015).
- سلسلة ديما ديما (تمارين وحلول)، السنة الأولى من سلك البكالوريا (مسلك العلوم الرياضية)
  دار الثقافة للنشر والتوزيع (طبعة 2015).

En français :

- Mathématiques tout-en-un MPSI (édition Dunod,17 juin 2015) ,
  Auteurs : Claude Deschamps, André Warusfel.
- Tout-en-un Mathématiques PCSI – TSI (édition Bréal, 16 août 2013),
  Auteurs : Daniel Guinin et E. Ladame.
- Dictionnaire des mathématiques (édition 21 février 2013),
  Auteurs : Alain Bouvier et Michel George.
- Michèle Nouvet collection Radial ; Analyse ; 1ère S (édition 2005) ,
- Maths Repères Tle S spécifique (édition 2012),
- Maths Repères 1ère S (édition 2011),
  Auteurs : Agnès Choquer et Boris Hanouch
- Math'X Tle S spécifique (édition 2016),
  Auteurs : Marie-Hélène Le Yaouanq.
- Hyperbole 1ère S (édition 2015),
  Auteurs : de Michel Bachimont et Jean-Luc Bousseyroux.
- Maths - Visa pour la prépa 2016-2017 - MPSI-PCSI-PTSI-BCPST-ECS (édition 2016)
  Auteur : Guillaume Connan.

WEBOGRAPHIE

- www.fr.wikipedia.org (Janvier 2016)
- www.ep2m.org (Juin 2017)
- www.xmaths.free.fr (Janvier 2016)
- www.apmep.fr (Décembre 2015)
- www.mp.cpgedupuydelome.fr (Décembre 2015)
- www.lavau.pagesperso-orange.fr (Octobre 2015)
- www.abdellah.bechata.free.fr (2009)
- www.pagesperso-orange.fr/gilles.costantini (2010)

Scanné avec CamScanner

TABLE DES MATIÈRES

Leçon	Chapitre	Page
	Comment j'utilise ce livre	4
	Programme d'analyse mathématiques de la 1ème année du baccalauréat Sciences mathématiques	6
1	Généralités sur les fonctions numériques	10
2	Les suites numériques	72
3	Trigonométrie	116
4	Limite d'une fonction numérique	142
5	Dérivation	200
6	Étude des fonctions numériques	247
	Références	290

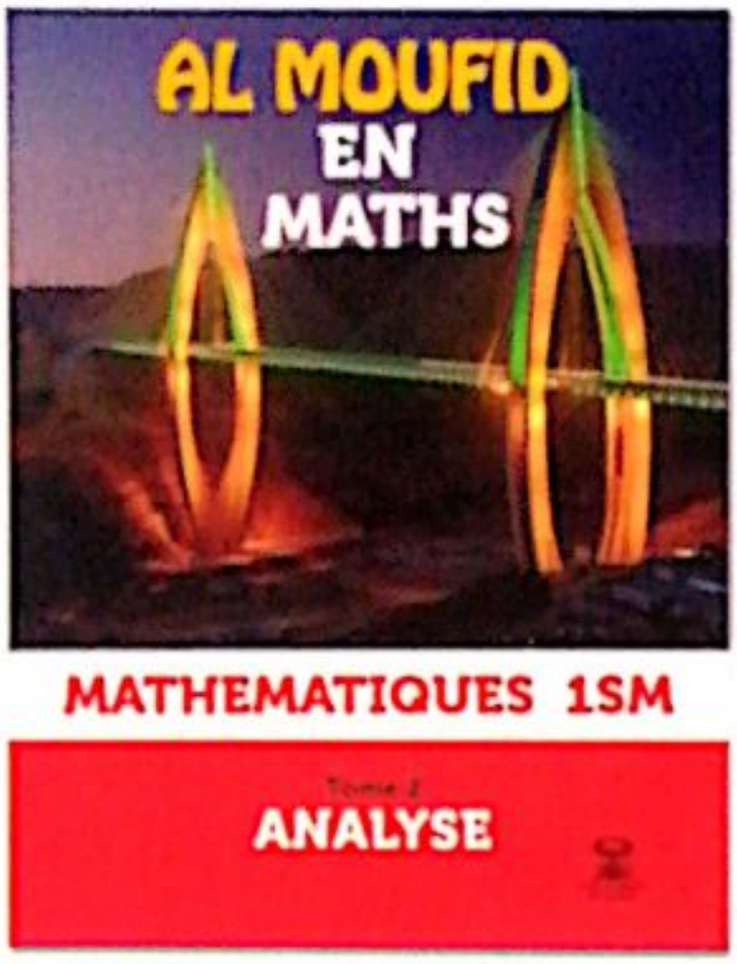
Scanné avec CamScanner

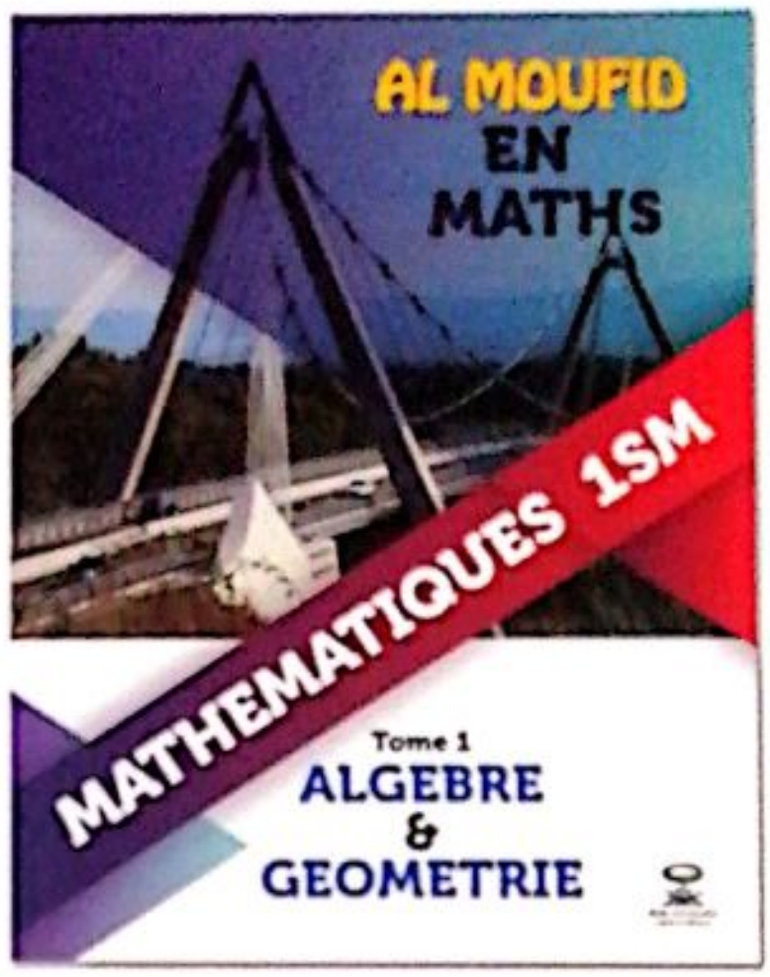
Scanné avec CamScanner

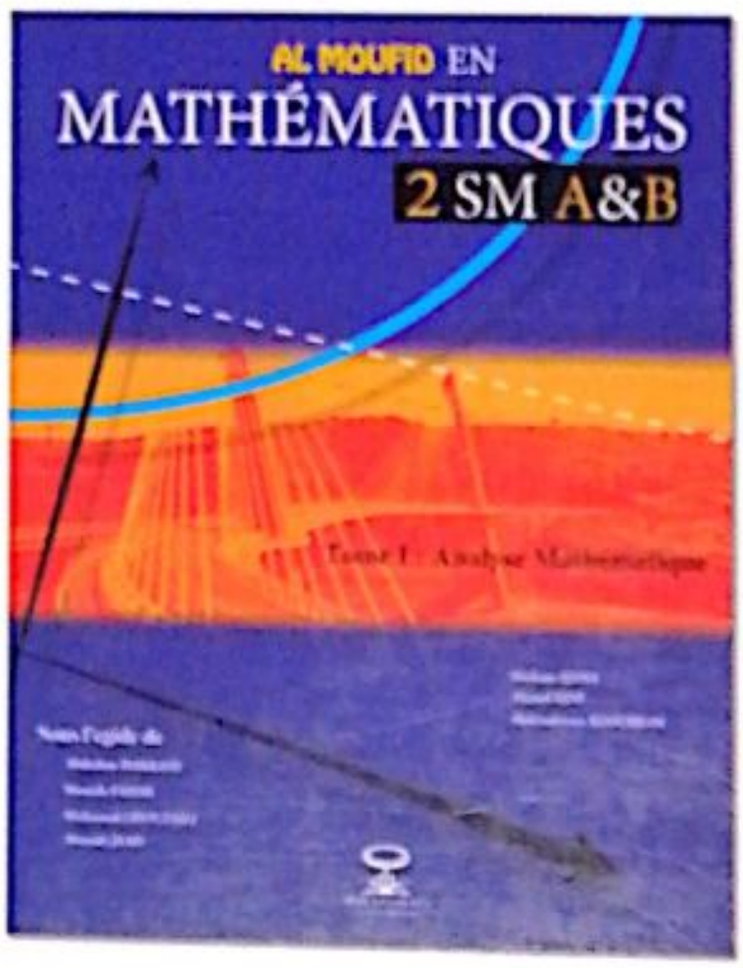
Dépol Légal : 2017MO5279
ISBN : 978-9954-613-55-9

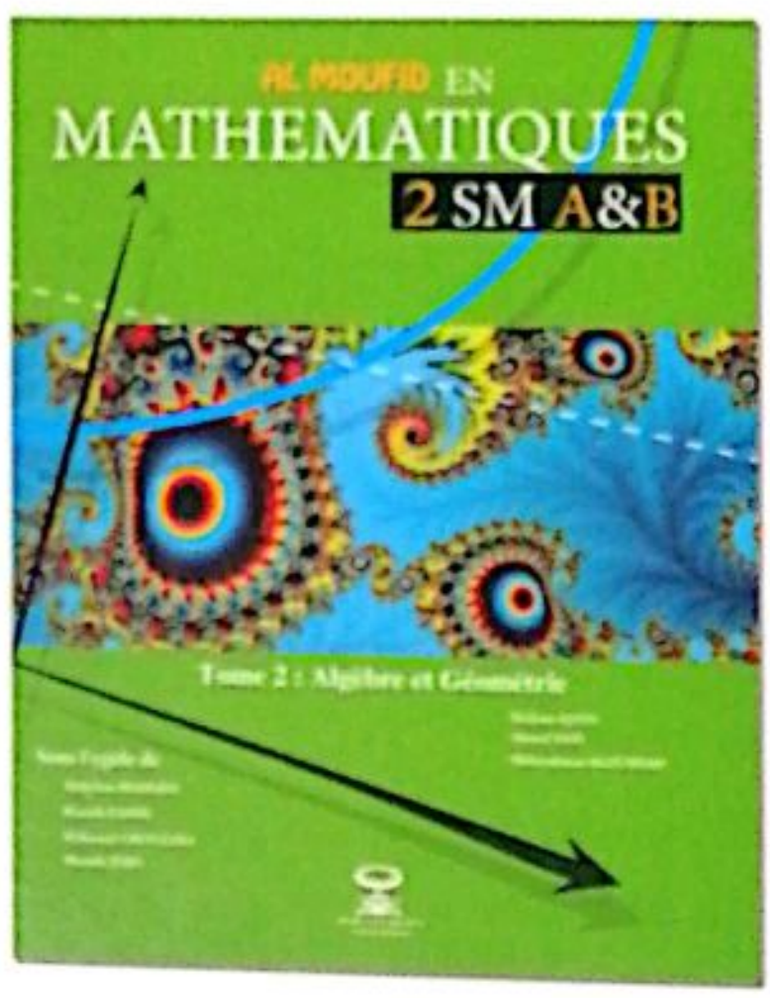
Scanné avec CamScanner

AL MOUFID EN MATHS









DAR ATTAKAFA
Edition Diffusion
32 / 34 Bd Victor Hugo - Casablanca
05 22 30 23 75 / 30 25 14 - Fax : 05 22 30 65 11
www.darattakafa.com

Prix de vente public
95,00 Dh

9 110002 210459
ESPACE ZERKTOUNI

DANGER
PHOTOCOPILLAGE
TUE LE LIVRE

Scanné avec CamScanner