

SA₂/1- Corrigé des activités sur les nombres complexes

ACTIVITE 1:

Ecrivons sous forme algébrique les nombres complexes :

On trouve : $\checkmark$
 $z_1 = 7 - i$; $z_2 = 2 - \sqrt{3} + i(2 + \sqrt{3})$; $z_3 = 3 + 4i$;
 $z_4 = 16 - 10i$; $z_5 = 3 - 4i$; $z_6 = i$; $z_7 = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$;
 $z_8 = \frac{65}{34} - \frac{39}{34}i$; $z_9 = \frac{16}{65} + \frac{37}{65}i$; $z_{10} = -8i$;
 $z_{11} = -7 + 24i$; $z_{12} = -7 + 24i$; $z_{13} = 24 + 11i$;
 $z_{14} = -12 + 47i$; $z_1 = 7 - i$

ACTIVITE 2 :

Donnons les conjugués des nombres complexes suivants :

$\overline{z_A} = 3 + 8i$; $\overline{z_B} = -2 + 6i$; $\overline{z_C} = \frac{1}{3 + i}$
 $\overline{z_D} = \frac{3(2 + 4i)}{-i}$; $\overline{z_E} = (2 - 4i)(1 + i)(8 - 2i)$;
 $\overline{z_F} = \frac{4(4 + i)(3 + i)}{(2 - i)(3 + 4i)}$; $\overline{z_I} = 2 + \sqrt{2}$; $\overline{z_J} = -i(1 - \sqrt{3})$

ACTIVITE 3 :

Pour cet exercice il faut connaître ses formules.

Pour tout nombre entier naturel n ,

$i^{4n} = 1$; $i^{4n+1} = i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$
 $i^{25} = i^{4 \times 6 + 1} = i$; $i^{26} = i \times i = -1$; $i^{27} = -i$; $i^{28} = 1$ donc
 $A = 0$

$B = i^{2045} = i^{4 \times 511 + 1} = i$

On effectue la division par 4 puis la formule

ACTIVITE 4 :

Calculons les modules des nombres complexes :

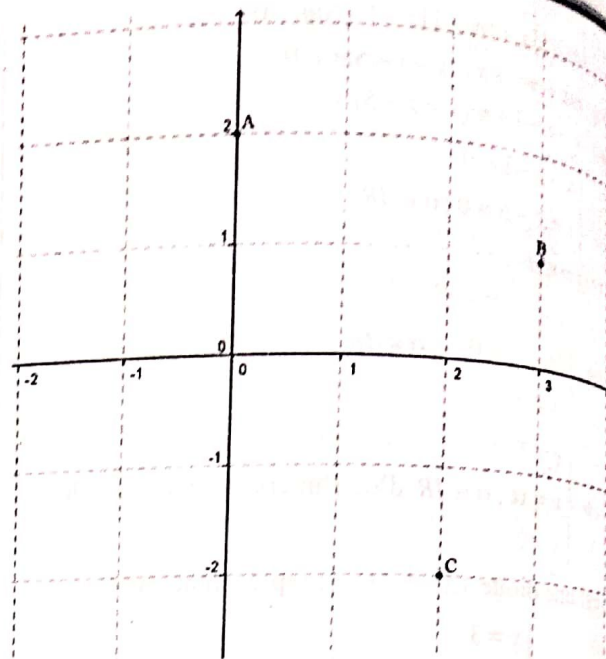
$|z_1| = 2$; $|z_2| = 2$; $|z_3| = 1$; $|z_4| = 1$; $|z_5| = 2\sqrt{5}$;
 $|z_6| = \sqrt{16}$; $|z_7| = 5\sqrt{2}$; $|z_8| = \sqrt{10}$; $|z_9| = 6$; $|z_{10}| = 8$;
 $|z_{11}| = \frac{\sqrt{543}}{41}$; $|z_{12}| = 1$.

ACTIVITE 5 :

1°) Mettons sous formes algébriques les nombres complexes :

$z_1 = 2i$; $z_2 = 3 + i$; $z_3 = 2 - 2i$

2°) Plaçons les points : A(2i) ; B(3 + i) et C(2 - 2i)



ACTIVITE 6 :

I/

1°) Forme trigonométrique et exponentielle des nombres complexes :

Forme trigonométrique :

$z_1 = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$

$z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

$z_3 = 4 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$

Forme exponentielle :

$z_1 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_3 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2°) Déduisons-en une forme exponentielle du nombre complexe Z

$Z = \frac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6}$

$|Z| = \frac{|z_1|^3 \times |z_3|^4}{|z_2|^6} = 12\sqrt{3}$

$\arg Z = \arg z_1^3 + \arg z_3^4 - \arg z_2^6 + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$\arg Z = 3 \arg z_1 + 4 \arg z_3 - 6 \arg z_2 + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$\arg Z = \frac{5\pi}{2} - \frac{4\pi}{4} - \frac{6\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$

$\arg Z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ donc $Z = 12\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

3°) Calculons la forme algébrique de Z.

$$Z = 12\sqrt{3} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right); \text{ on trouve } \underline{Z = -12\sqrt{3}i}$$

II/ 1°) a- Ecrivons u , u et w sous forme exponentielle.

$$u = 2\sqrt{3} - 2i$$

On a : $|u| = 4$. Soit α un argument de u . α est une solution du

$$\text{système : } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}; \text{ on peut prendre : } \alpha = -\frac{\pi}{6}$$

Donc $u = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$ est la forme exponentielle de u .

$$v = -1 + i$$

On a : $|v| = \sqrt{2}$ et soit θ un argument de v

$$\text{alors on a : } \begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}; \text{ on peut prendre } \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Donc $v = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ est la forme exponentielle de v

$$w = u \cdot v$$

On a : $|w| = |u| \times |v|$

$$= 4\sqrt{2}. \text{ Soit } \beta \text{ un argument de } w$$

$$\text{On a : } \beta = \alpha + \theta = \frac{7\pi}{12}$$

Donc $w = 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ est la forme exponentielle de w .

b- Ecrivons w sous forme algébrique.

$$\text{On trouve : } \underline{w = 2(1 - \sqrt{3}) + 2i(1 + \sqrt{3})}$$

Déterminons les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

$$\text{On a : } \frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \text{ donc : } w = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

$$w = 4\sqrt{2} \left(-\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12} \right)$$

$$\text{On a : } \begin{cases} w = 4\sqrt{2} \left(-\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12} \right) \\ w = 2(1 - \sqrt{3}) + 2i(1 + \sqrt{3}) \end{cases} \text{ donc :}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases} \text{ soit : } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ et}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

2°) Ecrivons u^{2015} et v^{2015}

$$\text{On trouve : } u^{2015} = 4^{2014} (2\sqrt{3} + 2i) \text{ et } v^{2015} = 2^{1007} (-1 - i)$$

ACTIVITE 10 :

1°) a- X et Y en fonction de x et y

$$\begin{aligned} Z &= \frac{x + iy - 4 + 3i}{x + iy - 3 + 2i} \\ &= \frac{[(x-4) + i(y+3)][(x-3) - i(y+2)]}{(x-3)^2 + (y+2)^2} \text{ avec } (x; y) \neq (3; -2) \\ &= \frac{(x-4)(x-3) + (y+3)(y+2)}{(x-3)^2 + (y+2)^2} + i \frac{(y+3)(x-3) - (x-4)(y+2)}{(x-3)^2 + (y+2)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 - 7x + y^2 + 5y + 18}{(x-3)^2 + (y+2)^2} + i \frac{y + x - 1}{(x-3)^2 + (y+2)^2} \text{ d'où}$$

$$X = \frac{x^2 - 7x + y^2 + 5y + 18}{(x-3)^2 + (y+2)^2} \text{ et } Y = \frac{y + x - 1}{(x-3)^2 + (y+2)^2}$$

b- Ensemble E des points $M(z)$ tel que $Z \in i\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ (x; y) \neq (3; -2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + y^2 + 5y + 18 = 0 \\ (x; y) \neq (3; -2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \\ (x; y) \neq (3; -2) \end{cases} \end{aligned}$$

D'où E est le cercle de centre de coordonnées $\left(\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ et de

rayon $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ privé du point de coordonnée $(3; -2)$

c- Justifions que si $Z \in \mathbb{R}$, alors $Z = \frac{x-4}{x-3}$

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 1 \\ (x; y) \neq (3; -2) \end{cases}$$

$$y = -x + 1 \text{ alors } z = x + i(-x + 1) \text{ donc } Z = \frac{x - ix + i - 4 + 3i}{x - ix + i - 3 + 2i}$$

$$Z = \frac{(x-4) - i(x-4)}{(x-3) - i(x-3)}$$

$$Z = \frac{(x-4)(1-i)}{(x-3)(1-i)} = \frac{x-4}{x-3} \text{ d'où } Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Z = \frac{x-4}{x-3}$$

d- Démontrons que si $|Z-1| = 1$ alors l'ensemble des points

$M(z)$ est le cercle de centre $\Omega(3; -2)$ et de rayon $\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} |Z-1| = 1 &\Leftrightarrow \left| \frac{z-4+3i}{z-3+2i} - 1 \right| = 1 \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{z-4+3i - z+3-2i}{z-3+2i} \right| = 1 \end{aligned}$$

$$= 1 \Leftrightarrow \left| \frac{-1+i}{z-3+2i} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow |-1+i| = |z-3+2i| \text{ avec } z \neq 3-2i$$

$$\Leftrightarrow |z-(3-2i)| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \Omega M = \sqrt{2} \text{ d'où le résultat.}$$

Déterminons l'ensemble (D)

$$(D) \Leftrightarrow |\bar{z}+i| = |z+2+i|$$

$$\Leftrightarrow |z-i| = |z-(-2-i)|$$

$$\Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Leftrightarrow AM = BM \text{ d'où (D) est la}$$

médiatrice du segment [AB].

b- Déterminons l'ensemble (C)

$$(C) : |z-5i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow |1+i| \times \left| z - \frac{5i}{1+i} \right| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \left| z - \frac{5i(1-i)}{2} \right| = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \left| z - \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i \right) \right| = \sqrt{5} \Leftrightarrow DM = \sqrt{5} \text{ avec}$$

$$D\left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i\right) \text{ d'où (C) est le cercle de centre D et de rayon } \sqrt{5}$$

c- Déterminons (D) \cap (C)

Soit I le milieu de [AB], on a : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = -1$ donc

$$I(-1; 0)$$

Soit M(x; y; z) un point de la médiatrice. On a : $\overline{MI} \cdot \overline{AB} = 0$

$$\overline{MI} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow (x+1)(-2) + y(-2) = 0$$

$$\overline{MI} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow -2x - 2 - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -x - 1 \text{ donc (D) : } y = -x - 1 \quad (1)$$

$$(C) : \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = (\sqrt{5})^2 \quad (2)$$

$$(1) \text{ dans } (2) \text{ donne } \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(-x - 1 - \frac{5}{2}\right)^2 = 5$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(-x - 1 - \frac{5}{2}\right)^2 = 5 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(-x - \frac{7}{2}\right)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + \frac{25}{4} + x^2 + 7x + \frac{49}{4} = 5$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x + \frac{27}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 27 = 0$$

le discriminant de cette équation est $\Delta = -416 < 0$

L'équation $4x^2 + 4x + 27 = 0$ n'admet pas de solution d'où

$$(D) \cap (C) = \emptyset.$$

ACTIVITE 15 :

1°) Ecrivons α et β sous forme exponentielle

$$\alpha = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ et } \beta = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

2°) a- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0$

En calculant Δ ou Δ' on trouve $z' = 1 - e^{i\theta}$ et $z'' = 1 + e^{i\theta}$

Choix de z_1 et z_2

On a : $z' = 1 - \cos\theta - i\sin\theta$ et $z'' = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$

puisque $\theta \in]0; \pi[$ alors $\sin\theta > 0$ donc $z_1 = z'$ et $z_2 = z''$

$$\text{d'où } \underline{z_1 = 1 - e^{i\theta}} \text{ et } \underline{z_2 = 1 + e^{i\theta}}$$

b- Ecrivons z_1 et z_2 sous forme trigonométrique

$$z_1 = 1 - e^{i\theta}$$

$$= e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{-i\frac{\theta}{2}} - \left(e^{i\frac{\theta}{2}} \right)^2$$

$$= -e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \right)$$

$$= 2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)} = 2 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)}$$

Or $\theta \in]0; \pi[$ donc $\sin \frac{\theta}{2} > 0$ par suite

$$\underline{z_1 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \right) \right]}$$

$$z_2 = 1 + e^{i\theta}$$

$$= e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}} \right)$$

$$z_2 = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \cos \frac{\theta}{2} > 0, \theta \in]0; \pi[\text{ donc}$$

$$\underline{z_2 = 2 \cos \frac{\theta}{2} \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right]}$$

NB : On peut aussi utiliser la méthode qui consiste à déterminer le module et un argument de

$z_1 = 1 - \cos\theta - i\sin\theta$ et de $z_2 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$

3°) Déterminons θ pour que l'on ait $z_1 = \alpha$ et $z_2 = \beta$

$$\text{On peut poser alors : } \begin{cases} 1 - e^{i\theta} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \\ 1 + e^{i\theta} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ et aboutir à :}$$

$$e^{i\theta} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ et puisque}$$

$$\theta \in]0; \pi[\text{ alors } k = 0 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{3}$$

ACTIVITE 16 :

1°) Forme algébrique des racines carrées de z

$$z = -1 + i$$

Soit $\delta = x + iy$ une racine carrée de z avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$\delta^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{2} \quad (a) \\ x^2 - y^2 = -1 \quad (b) \\ 2xy = 1 > 0 \end{cases}$$

$$(a) + (b) \Rightarrow 2x^2 = \sqrt{2} - 1 \\ \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

$$(a) - (b) \Rightarrow 2y^2 = \sqrt{2} + 1 \\ \Rightarrow y = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \text{ ou } y = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$$

$xy > 0$ donc les racines carrées de z sous forme algébriques

$$\text{sont : } \delta' = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \text{ et}$$

$$\delta'' = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$$

2°) Calculons sous forme trigonométrique les racines carrées de z

Soit $\delta = \rho e^{i\theta}$ une racine carrée de z avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

$$\delta^2 = z \Leftrightarrow \rho^2 e^{i2\theta} = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = \sqrt{2} \\ 2\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \{0; 1\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[4]{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases} ; k \in \{0; 1\}$$

$$\text{Pour } k=0 \text{ on a : } \begin{cases} \rho = \sqrt[4]{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{8} \end{cases}$$

$$\text{Pour } k=1 \text{ on a : } \begin{cases} \rho = \sqrt[4]{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{11\pi}{8} \end{cases} \text{ alors la forme}$$

trigonométrique des racines carrées de z sont :

$$\delta_0 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right) \text{ et}$$

$$\delta_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{8} + i \sin \frac{11\pi}{8} \right)$$

3°) Dédoublons-en les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et

$$\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right).$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 0 \text{ et } \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 0 \text{ donc :}$$

$$\delta_0 = \delta' \Leftrightarrow \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{2} \cos \frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ \sqrt[4]{2} \sin \frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \cos^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ \sqrt{2} \sin^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ \sin^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \\ \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \\ \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \\ \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \\ \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \\ \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \\ \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

ACTIVITE 17 :

1°) calculons α^2

$$\alpha^2 = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}} \right)^2 \\ = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} \right)^2 - 2i\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} - \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} \right)^2 \text{ on}$$

$$\text{trouve : } \alpha^2 = -2\sqrt{3} - 2i.$$

b- Donnons le module et un argument de α^2 .

$$\text{On a : } \alpha^2 = -2\sqrt{3} - 2i$$

$$= 4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

$$= 4 \left[-\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right] = 4 \left[\cos \left(\frac{7\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{6} \right) \right]$$

Donc le module de α^2 est 4 et un argument de α^2 est $\frac{7\pi}{6}$.

c- Dédoublons le module et un argument de α .

$$\text{De ce qui précède on peut écrire } \alpha^2 = 4e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

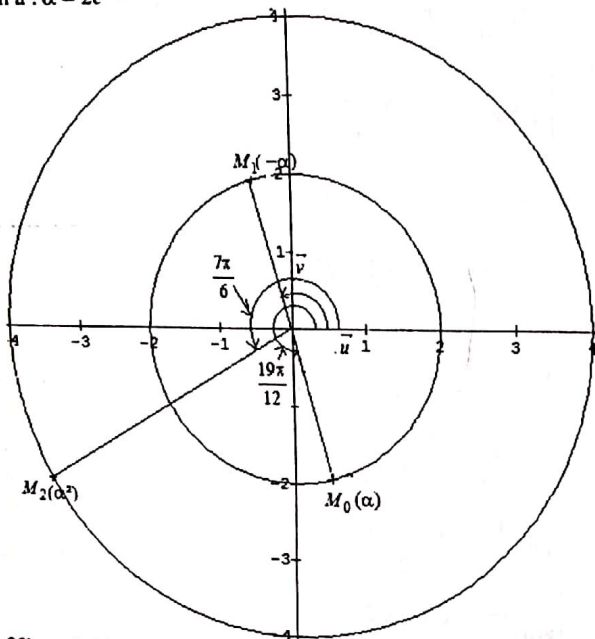
$$\alpha^2 = 4e^{i\frac{7\pi}{6}} \Leftrightarrow \alpha = 2e^{i\frac{7\pi}{12}} \text{ ou } \alpha = -2e^{i\frac{7\pi}{12}} = 2e^{i(\pi + \frac{7\pi}{12})} = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}$$

Comme $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ et $\operatorname{Im}(\alpha) < 0$ alors $\alpha = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}$ donc un

module de α est 2 et un argument de α est $\frac{19\pi}{12}$.

2°) Représentons $M_0(\alpha)$, $M_1(-\alpha)$ et $M_2(\alpha^2)$.

$$\text{On a : } \alpha = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}$$



3°) a- Dédus de tout ce qui précède les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$ puis $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

$$\text{On a : } \alpha = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}} \text{ et } \alpha = 2\left(\cos \frac{19\pi}{12} + i\sin \frac{19\pi}{12}\right)$$

$$\alpha = 2\left(-\cos \frac{7\pi}{12} - i\sin \frac{7\pi}{12}\right) \text{ donc par identification on a :}$$

$$\begin{cases} -2\cos \frac{7\pi}{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \\ -2\sin \frac{7\pi}{12} = -\sqrt{2+\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\cos \frac{7\pi}{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \\ -2\sin \frac{7\pi}{12} = -\sqrt{2+\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos \frac{7\pi}{12} = -\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2} \\ 2\sin \frac{7\pi}{12} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ d'où}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

• Calcul de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

$$\text{On a : } \cos \frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \text{ et } \sin \frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \text{ alors}$$

$$\cos \frac{7\pi}{12} = -\sin \frac{\pi}{12} \text{ et } \sin \frac{7\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12}$$

$$\text{Donc } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ et } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

b- Calcule α^{2014} sous forme algébrique.

$$\begin{aligned} \alpha^{2014} &= (\alpha^2)^{1007} = \left(4e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)^{1007} \\ &= 4^{1007} e^{i\frac{7049\pi}{6}} \\ &= 4^{1007} e^{i\frac{5\pi}{6}} \\ &= 4^{1007} \left(-\cos \frac{\pi}{6} + i\sin \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \alpha^2 = 4^{1007} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

ACTIVITE 18 :

1°) Résolvons l'équation (E)

$$(E): [z^2 - 4(1+i)z + 10i][2z - (1+i)\bar{z} - 2 - 4i] = 0$$

$$(E) \Leftrightarrow z^2 - 4(1+i)z + 10i = 0 \text{ ou } 2z - (1+i)\bar{z} - 2 - 4i = 0$$

$$\text{Résolvons } z^2 - 4(1+i)z + 10i = 0$$

$$\text{Son discriminant est : } \Delta = -8i = [2(1-i)]^2$$

$$\text{et ces solutions sont : } z_1 = \frac{4(1+i) - 2(1-i)}{2} = 1+3i \text{ et}$$

$$z_2 = \frac{4(1+i) + 2(1-i)}{2} = 3+i.$$

$$\text{Résolvons } 2z - (1+i)\bar{z} - 2 - 4i = 0 \text{ (E')}$$

$$\text{Posons } z = x+iy; (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{On a : (E') } \Leftrightarrow 2(x+iy) - (1+i)(x-iy) - 2 - 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y - 2 + i(3y - x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ -x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2y = 6 \Leftrightarrow y = 3$$

$$\text{On a : } \begin{cases} y = 3 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{Donc (E') } \Leftrightarrow z = 5+3i.$$

Il en résulte que les solutions de (E) sont : $1+3i$; $3+i$ et $5+3i$.

2°) a- Déterminons les complexes z_A , z_B et z_C

On a : z_A , z_B et z_C solutions de (E) et

$\operatorname{Re}(z_B) < \operatorname{Re}(z_A) < \operatorname{Re}(z_C)$ donc

$z_A = 3+i$, $z_B = 1+3i$ et $z_C = 5+3i$.

b- Donnons la nature du triangle ABC.

Calculons $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$

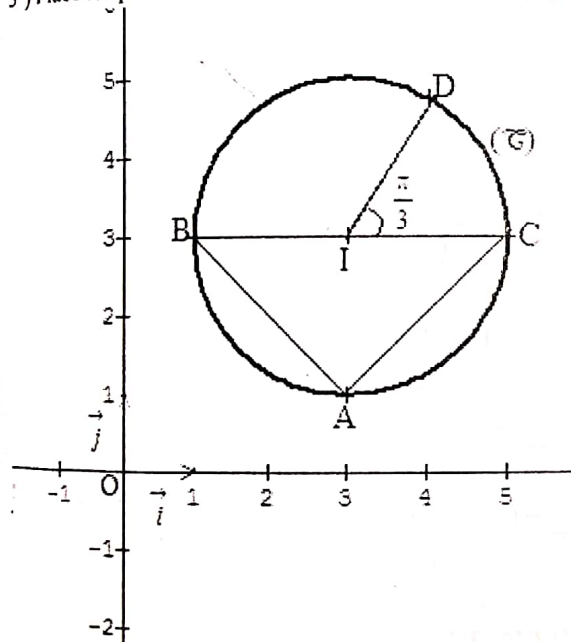
$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1+3i-3-i}{5+3i-3-i}$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-1+i}{1+i} = i$$

On a : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = +i$ d'où ABC est un triangle isocèle et

rectangle en A.

3°) Place les points A, B, C I et D et construisons (C)



4°) Démontrons que le point $M(z) \in (C) \Leftrightarrow |z-3(1+i)|=2$

On a : A, B et C appartiennent au cercle (C) et ABC un triangle isocèle et rectangle en A donc (C) est de diamètre [BC] son centre I est le milieu de [BC] ainsi

$$z_I = \frac{z_B + z_C}{2} + 3+3i.$$

Donc on a : $M(z) \in (C) \Leftrightarrow IM = \frac{BC}{2}$

$$\Leftrightarrow |z - z_I| = \frac{|z_C - z_B|}{2}$$

$$\Leftrightarrow |z - 3-3i| = \frac{|4|}{2}$$

$$\Leftrightarrow |z - 3(1+i)| = 2$$

D'où $M(z) \in (C) \Leftrightarrow |z - 3(1+i)| = 2$.

ACTIVITE 20 :

1°) Résolution dans C de l'équation :

$$2z^2 - 2(1+i)z + \frac{1}{2} + i = 0$$

Le discriminant réduit de cette équation est

$$\Delta' = (1+i)^2 - (2)\left(\frac{1}{2} + i\right)$$

$$\Delta' = -1 = i^2$$

Par suite on trouve les solutions de l'équations qui sont :

$$z' = \frac{1}{2} \text{ et } z'' = \frac{1}{2} + i \text{ d'où}$$

$$S_C = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + i \right\}$$

2°) a- Démontrons que l'équation (E_θ) admet une racine réel.

$$\text{Posons } P(z) = 2z^2 - (1+2\cos\theta+2i)z + \cos\theta + i = 0$$

$$(E_\theta) \Leftrightarrow P(z) = 0$$

Soit x , avec $x \in \mathbb{R}$ cette solution réelle on a : $P(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x^2 - (1+2\cos\theta)x + \cos\theta = 0 & (1) \\ 1-2x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ et vérifie que la valeur } \frac{1}{2} \text{ trouvée vérifie (1)}$$

$$\text{donc } \frac{1}{2} \text{ est la solution réelle de } (E_\theta).$$

b- Calculons l'autre racine en fonction de θ

(E_θ) étant une équation du second degré donc si z_1 et z_2

sont solution de (E_θ) alors $z_1 + z_2 = \frac{(1+2\cos\theta+2i)}{2}$

Posons $z_1 = \frac{1}{2}$ alors on obtient $z_2 = \cos\theta + i$

3°) a- Déterminons l'ensemble E des points

$M(\cos\theta + i)$ lorsque θ varie dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Soit $M(x; y)$ un point du plan complexe.

$$M \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = 1 \\ 0 \leq \cos\theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \text{ alors } E = [I; J] \text{ avec } I(0; 1) \text{ et } J(1; 1)$$

b- Calculons AM en fonction de θ

$$AM = |z_M - z_A| \text{ on trouve } AM = \sqrt{\left(\cos \theta - \frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

*Calculons θ pour que AM soit minimale
 AM est minimale $\Leftrightarrow AM^2$ est minimale

$$\text{Or } \forall \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \left(\cos \theta - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow AM^2 \geq 1$$

$$\text{En posant } \left(\cos \theta - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 1 \text{ on trouve } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ et on conclut}$$

que AM est minimale pour $\theta = \frac{\pi}{3}$

ACTIVITE 21 :

1°) Démontrons que : $|z_1 - z_2| = |1 - \overline{z_1} \cdot z_2| \Leftrightarrow |z_1| = 1$ ou

$$|z_2| = 1$$

$$\text{On a : } |z_1 - z_2| = \sqrt{(z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2})}$$

$$|1 - \overline{z_1} \cdot z_2| = \sqrt{(1 - \overline{z_1} \cdot z_2)(1 - \overline{z_1} \cdot z_2)}$$

$$|z_1 - z_2| = |1 - \overline{z_1} \cdot z_2| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2})} = \sqrt{(1 - \overline{z_1} \cdot z_2)(1 - \overline{z_1} \cdot z_2)}$$

$$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = (1 - \overline{z_1} \cdot z_2)(1 - \overline{z_1} \cdot z_2)$$

$$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = (1 - \overline{z_1} \cdot z_2)(1 - \overline{z_1} \cdot z_2)$$

$$\Leftrightarrow z_1 \overline{z_1} - z_1 \overline{z_2} - \overline{z_1} z_2 + \overline{z_1} \overline{z_2} = 1 - \overline{z_1} \cdot z_2 - \overline{z_1} \cdot z_2 + \overline{z_1} \cdot z_2$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 - 1 - |z_1|^2 \times |z_2|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 (1 - |z_2|^2) + (|z_2|^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - |z_2|^2)(|z_1|^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow |z_2|^2 = 1 \text{ ou } |z_1|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow |z_2| = 1 \text{ ou } |z_1| = 1$$

$$\text{D'où } |z_1 - z_2| = |1 - \overline{z_1} \cdot z_2| \Leftrightarrow |z_2| = 1 \text{ ou } |z_1| = 1$$

2°) Démontrons que $u \in \mathbb{R}$ et $v \in i\mathbb{R}$

$$u = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$$

$$\text{on a : } \overline{u} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{1 + z_1 z_2}}$$

$$= \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{1 + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}}$$

$$\text{Or } |z_1| = 1 \Leftrightarrow \overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$$

$$|z_2| = 1 \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{1}{z_2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{1}{z_2} \text{ donc } \overline{u} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1} \times \frac{1}{z_2}}$$

$$\overline{u} = \frac{\frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}}{\frac{z_1 z_2 + 1}{z_1 z_2}}$$

$$\overline{u} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2 + 1} = u$$

$$\overline{u} = u \text{ d'où } u \in \mathbb{R}$$

$$v = \frac{z_1 - z_2}{1 + z_1 z_2}$$

$$\text{On a : } \overline{v} = \frac{\overline{z_1 - z_2}}{\overline{1 + z_1 z_2}}$$

$$\overline{v} = \frac{\overline{z_1} - \overline{z_2}}{1 + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}}$$

$$\overline{v} = \frac{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1} \times \frac{1}{z_2}}$$

$$\overline{v} = \frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2 + 1}$$

$$\overline{v} = \frac{-(z_1 - z_2)}{z_1 z_2 + 1} = -v$$

$$\overline{v} = -v \text{ d'où } v \in i\mathbb{R}$$

ACTIVITE 22 :

1°) Mettons sous forme trigonométrique les nombres complexes u et v .

On trouve : $u = -1 - i$ et sa forme trigonométrique est :

$$u = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

On trouve : $v = 1 - i$ et sa forme trigonométrique est :

$$v = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$$

2°) Dédisons la nature du triangle ABC.

$$\text{On a : } \frac{a-b}{b-c} = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}} \Leftrightarrow \frac{b-a}{b-c} = -\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b-a}{b-c} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Alors $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = \frac{\pi}{4}$ (1)

On a : $\frac{a-b}{a-c} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) = -\frac{\pi}{4}$ soit

$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{4}$ (2)

De (1) et (2) on a : $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ (a)

et comme ABC est un triangle donc

$\text{mes}\hat{C} = 180^\circ - \text{mes}\hat{B} - \text{mes}\hat{A} = 90^\circ$ (b)

de (a) et (b) on conclure que ABC est un triangle isocèle et rectangle en C.

3°) Déterminons le quotient $Z = \frac{e-d}{f-d}$

DEF est isocèle rectangle en F direct donc

$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Or $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}}) = \arg\left(\frac{f-d}{e-d}\right) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$= -\arg\left(\frac{e-d}{f-d}\right) + 2k\pi$

Donc $\arg Z = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Ainsi DEF est alors isocèle et rectangle en F et on a :

DF = EF et d'après la propriété de Pythagore : on a :

$DE = DF\sqrt{2}$.

Donc $|Z| = \frac{DE}{DF} = \frac{DF\sqrt{2}}{DF} = \sqrt{2}$

D'où $Z = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Donnons la forme algébrique de $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Z\right)^{2306}$.

On trouve $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Z\right)^{2306} = -i$

ACTIVITE 23 :

1°) a- Soit $z_0 = \alpha i$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$

$f(\alpha i) = 0$ en faisant les calculs on trouve $\alpha = -2 \Rightarrow$

$z_0 = -2i$

b- Résolvons alors l'équation $f(z) = 0$

En écrivant que $f(z) = (z+2i)(z^2 + az + b)$ avec $(a; b) \in \mathbb{C}^2$ et en identifiant on obtiendra $a = -2\sqrt{3}$ et $b = 4$. Et alors

les solutions de $f(z) = 0$ seront $z_0 = -2i$; $z_1 = \sqrt{3} - i$ et donc $z_2 = \overline{z_1}$ (vu que l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4$ est à coefficients réels)

2°) a- $\omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$ (évident)

b- OMM_2M_1 est un losange $\Leftrightarrow OM = OM_1$ et $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_1M_2}$

On a : $OM = |z|$ et $OM_1 = |\omega z| = |z|$ par ailleurs $Z_{\overrightarrow{OM}} = z$ et

$Z_{\overrightarrow{M_2M_1}} = \omega z - \omega^2 z = \left(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)z$

$= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)z$

$= \left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)z = z$ donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_1M_2}$ par suite

OMM_1M_2 est un losange

ACTIVITE 24 :

1°) Prouvons que $ie^{i\frac{\pi}{6}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$

$ie^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{6}}$

$= e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}$

$= e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$ 'où le résultat

2°) Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$z^2 - 2\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)z + (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}} = 0$ le discriminant réduit Δ' de

cette équation est : $\Delta' = e^{i\frac{\pi}{6}} - (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}}$

$\Delta' = e^{i\frac{\pi}{6}}(1-1+i) = ie^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $\Delta' = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$ ainsi

$z^2 - 2\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)z + (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}} = 0 \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou

$z'' = e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$ d'où les solutions de cette équation sont :

$e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$

3°) A $\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$; B $\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)$ et C $\left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$

a- Justifions que le quadrilatère OACB est un losange

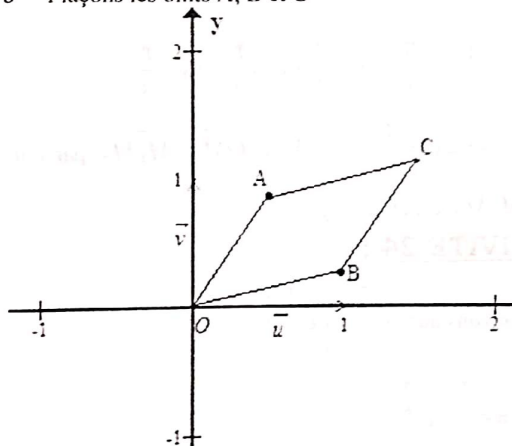
$$OA = |z_A - 0| = \left| e^{i\frac{\pi}{3}} \right| = 1$$

$$AC = |z_C - z_A| = \left| e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{3}} \right| = 1$$

$$BC = |z_C - z_B| = \left| e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}} \right| = 1$$

$$OB = |z_B - 0| = \left| e^{i\frac{\pi}{12}} \right| = 1$$

- a- On a : $OA = AB = BC = OB$ d'où le quadrilatère OACB est un losange
b- Plaçons les points A, B et C



- c- Calculons l'aire du losange OACB

Soit A cette aire :

$$\begin{aligned} A &= \frac{AB \times OC}{2} \text{ u.a} \\ &= \frac{|z_B - z_A| \times |z_C - z_O|}{2} \\ &= \frac{|(z_B - z_A)(z_C - z_O)|}{2} \\ &= \frac{\left| e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{3}} \right|}{2} \\ &= \frac{\left| \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right|}{2} \\ &= \frac{\left| \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right|}{2} \\ &= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}}{2} \text{ d'où } A = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ u.a} \end{aligned}$$

ACTIVITE 25 :

1°) a- $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

- b- Voir figure ci de la question 2°) c-

2°) a- *Vérifions que $b\bar{b} = 1$

$$b\bar{b} = \left(\frac{a-1}{1-\bar{a}} \right) \times \left(\frac{\bar{a}-1}{1-a} \right)$$

$$b\bar{b} = \frac{(a-1)(\bar{a}-1)}{(1-\bar{a})(1-a)} = \frac{(a-1)(\bar{a}-1)}{(\bar{a}-1)(a-1)} = 1$$

* Déduisons-en que $B \in (C)$

$$b\bar{b} = 1 \Leftrightarrow |b|^2 = 1 \Rightarrow OB = 1 \text{ donc } B \text{ appartient au cercle } (C).$$

b- Prouvons que $\frac{b-1}{a-1}$ est un réel.

$$\overline{\left(\frac{b-1}{a-1} \right)} = \frac{\bar{b}-1}{\bar{a}-1}$$

$$\overline{\left(\frac{b-1}{a-1} \right)} = \frac{1-\bar{b}}{1-\bar{a}}$$

$$\overline{\left(\frac{b-1}{a-1} \right)} = \frac{1-b}{b(\bar{a}-1)}$$

$$\overline{\left(\frac{b-1}{a-1} \right)} = \frac{1-b}{\frac{a-1}{1-\bar{a}}(\bar{a}-1)} = \frac{b-1}{a-1} ; \frac{b-1}{a-1} \text{ est un réel.}$$

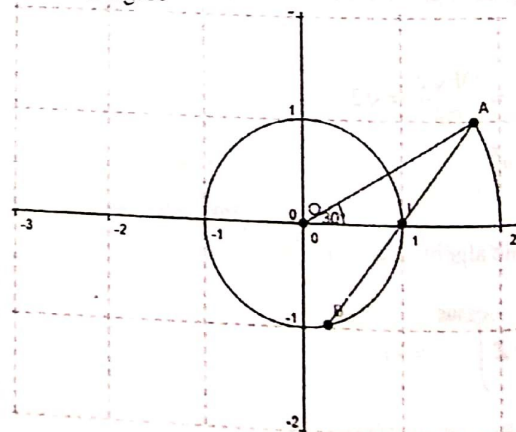
*Déduisons-en que A, B et I sont alignés

$$\frac{b-1}{a-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z_B - 1}{z_A - 1} \in \mathbb{R}. \text{ alors il existe un réel } \alpha \text{ tel que}$$

$\overrightarrow{IA} = \alpha \overrightarrow{IB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaires et par suite les points A, I et B sont alignés.

c- Contusions B

Voir figure



3°) Démontre que $\cos \theta = \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin \theta = \frac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$

$$h = e^{i\theta} = \frac{a-1}{1-\bar{a}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1+i}{1-\sqrt{3}+i}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}} + i \frac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}} \text{ alors } \cos \theta = \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}} \text{ et}$$

$$\sin \theta = \frac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$$

ACTIVITE 28 :

1°) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Soit z_0 l'une des solutions de (E) dont le point image

appartient à la droite d'équation $x = 0$.

On a : $z_0 = ib$, $b \in \mathbb{R}$

z_0 est une solution de (E) alors :

$$(ib)^3 - (2+i)(ib)^2 + (1-6i)(ib) - 8 - i = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b^2 + 6b - 8 = 0 \\ -b^3 + b^2 + b - 1 = 0 \end{cases} \oplus$$

Résolvons $\oplus$:

Son discriminant est : $\Delta = 100$ et les solutions de $\oplus$ sont :

$$b_1 = -4 \text{ et } b_2 = 1$$

$$b_2 = 1 \text{ dans } \otimes \Rightarrow -(1)^3 + (1)^2 + (1) - 1 = 0$$

$$b_1 = -4 \text{ dans } \otimes \Rightarrow -(-4)^3 + (-4)^2 + (-4) - 1 \neq 0$$

Donc $z_0 = i$

En faisant une division euclidienne ou méthode d'identification, on trouve :

$$(E) \Leftrightarrow (z-i)(z^2 - 2z + 1 - 8i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = i \text{ ou } z^2 - 2z + 1 - 8i = 0 \text{ (E')}$$

Résolvons (E')

$$\text{Son discriminant est : } \Delta = 4 - 4 + 32i = [4(1+i)]^2$$

$$(E') \Leftrightarrow z = -1 - 2i \text{ ou } z = 3 + 2i$$

D'où l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ est :

$$S = \{i; -1 - 2i; 3 + 2i\}.$$

2°) on a : A(i) ; B(-1-2i) et C(3+2i)

a- Démontrons que ABC est un triangle isocèle.

$$\text{Calculons } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$

$$\text{On trouve } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3+i}{-1-3i}$$

$$\text{On a : } \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = \frac{|3+i|}{|-1-3i|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1$$

$$\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \text{ donc ABC est un triangle isocèle en A.}$$

b- Prouvons que A est l'orthocentre du triangle HBC.

H est l'orthocentre du triangle ABC alors (AH) $\perp$ (BC) et (BH) $\perp$ (AC).

Puisque HBC est un triangle donc (AH) est la hauteur issue du

point H et (AC) est la hauteur issue du point C.

Comme $\{A\} = (AH) \cap (AC)$ d'où A est l'orthocentre du triangle HBC.

3°) a- Déterminons $(a; b; c) / O = \text{bar} \{ (A, a), (B, b), (C, c) \}$

$$O = \text{bar} \{ (A, a), (B, b), (C, c) \} \Leftrightarrow$$

$$a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \vec{0};$$

$$\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OC} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -b + 3c = 0 \\ a - 2b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3c \\ a = 4c \\ c \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4c\overrightarrow{OA} + 3c\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow c(4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\text{Or } 4 + 3 + 1 \neq 0 \text{ donc } O = \text{bar}\{(A; 4), (B; 3), (C; 1)\}$$

Avec $a = 4$; $b = 3$ et $c = 1$.

b- Démontrons que $8MO^2 + 4OA^2 + 3OB^2 + OC^2 = 2k^2$

$$M \in (C_k) \Leftrightarrow 4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 2k^2$$

$$\Leftrightarrow 4(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + 3(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 = 2k^2$$

$$\Leftrightarrow 8MO^2 + 4OA^2 + 3OB^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{MO} \underbrace{(4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})}_{\vec{0}} = 2k^2$$

$$\text{D'où } M \in (C_k) \Leftrightarrow 8MO^2 + 4OA^2 + 3OB^2 + OC^2 = 2k^2$$

c- Détermine (C_k)

$$\text{on a : } OA^2 = |z_A|^2 = 1; OB^2 = |z_B|^2 = 5 \text{ et}$$

$$OC^2 = |z_C|^2 = 13$$

$$\text{Donc } M \in (C_k) \Leftrightarrow 8MO^2 + 32 = 2k^2$$

$$\Leftrightarrow MO^2 = \frac{k^2 - 16}{4}$$

k	$-\infty$	-4	4	$+\infty$
$k^2 - 16$	+	0	0	+

• Si $k \in \{-4; 4\}$, $MO^2 = 0$; $M = O$ donc $(C_k) = \{O\}$ pour $k \in \{-4; 4\}$.

• Si $k \in]-4; 4[$, $MO^2 = \frac{k^2 - 16}{4} < 0$ (absurde) donc $(C_k) = \emptyset$ pour $k \in]-4; 4[$.

• Si $k \in]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[$, $MO^2 = \frac{k^2 - 16}{4} > 0$

$$MO^2 = \frac{k^2 - 16}{4} \Leftrightarrow MO = \frac{\sqrt{k^2 - 16}}{2} \text{ donc } (C_k) \text{ est un cercle}$$

de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{k^2 - 16}}{2}$ pour

$$k \in]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[.$$

ACTIVITE 34 :

1°) Déterminons les valeurs de a et b pour que $2i$ soit une solution de l'équation $P(z) = 0$.

$$\text{On a : } P(2i) = 0$$

$$P(2i) = (2i)^3 - (5+i)(2i)^2 + (a+ib)(2i) - 8 - 16i \text{ on trouve :}$$

$$P(2i) = 12 - 2b + i(2a - 20)$$

$$P(2i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 2b = 0 \\ 2a - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 6 \end{cases}$$

2°) Résolvons l'équation :

$$z^3 - (5+i)z^2 + (10+6i)z - 8 - 16i = 0$$

Cette équation équivaut à $P(z) = 0$ pour $a = 10$ et $b = 6$

P est un polynôme complexe de degré 3 et $P(2i) = 0$ donc il existe un polynôme complexe Q de degré 2 tel que

$$P(z) = (z - 2i)Q(z)$$

En utilisant une méthode appropriée tu trouves :

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 + (-5+i)z + 8 - 4i)$$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z^2 + (-5+i)z + 8 - 4i = 0 \text{ (E)}$$

Le discriminant de (E) est : $\Delta = -8 + 6i$

Soit $\delta = x + iy$; x et $y \in \mathbb{R}$ une racine carrée de Δ

$$\text{On a : } \delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ 2y^2 = 18 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ou } x = 1 \\ y = -3 \text{ ou } y = 3 \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

$xy > 0$ donc $\delta = 1 + 3i$ ou $\delta = -1 - 3i$

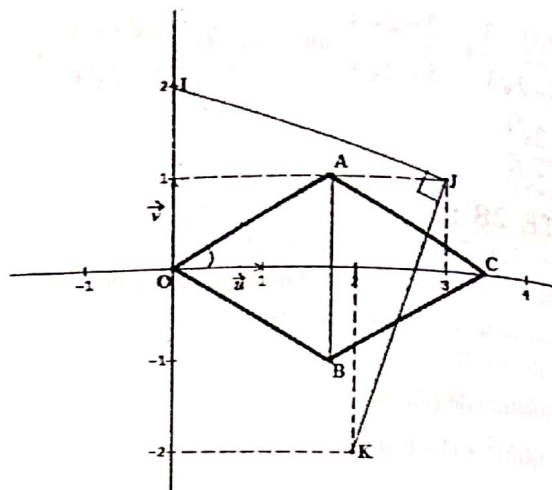
Prenons $\delta = 1 + 3i$

Ainsi (E) $\Leftrightarrow z = 2 - 2i$ ou $z = 3 + i$

D'où les solutions de l'équation

$z^3 - (5+i)z^2 + (10+6i)z - 8 - 16i = 0$ dans $\mathbb{C}$ sont : $2i$; $2 - 2i$ et $3 + i$.

$$3^\circ) \text{ a- Plaçons } I(2i), J(3+i), K(2-2i) \text{ et } A\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$$



b-Démontrons que $(IJ) \perp (JK)$

$$\text{calculons } \frac{z_I - z_J}{z_K - z_J}$$

$$\text{on trouve : } \frac{z_I - z_J}{z_K - z_J} = -i \text{ or } -i \in i\mathbb{R} \text{ donc } (IJ) \perp (JK).$$

4°) a- Calculons OA , OB et AB .

$$OA = |z_A| = 2$$

$$OB = |z_B| = |z_A| = 2$$

$$AB = |z_B - z_A| = |2\sqrt{3}| = 2\sqrt{2}$$

Nature du triangle AOB .

$OA = OB$ et $OB \neq AB$ donc AOB est un triangle isocèle en O.

b- Calculons l'affixe du point C pour que $AOBC$ soit un losange.

AOB étant un triangle isocèle en O, $AOBC$ est un losange $\Leftrightarrow$

$AOBC$ est un parallélogramme $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CB}$

$AOBC$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow 0 - z_A = z_B - z_C$$

$$\Leftrightarrow z_C = z_B + z_A$$

$$\Leftrightarrow z_C = z_A + z_A = 2 \operatorname{Re}(z_A) \text{ soit } z_C = 2\sqrt{3}.$$

5°) Déterminons l'expression complexe de S.

S étant une similitude plane directe donc S est sous la forme :

$$z' = az + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}.$$

$$\text{On a : } S(B) = C \text{ et } S(O) = O$$

$$S(O) = O \Leftrightarrow b = 0$$

$$S(B) = C \Rightarrow z_C = az_B$$

$$\Rightarrow a = \frac{z_C}{z_B} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + i)$$

$$\text{D'où } S : z' = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + i)z$$

Les éléments caractéristiques de S

$$\text{On a : } \left| \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + i) \right| = \sqrt{3} \text{ et } \arg \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + i) \right] = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ } k \in \mathbb{Z}$$

Donc S est de centre O, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

ACTIVITE 44 :

1°) Détermine a et b pour que X ait pour module $\sqrt{2}$ et pour un argument $\frac{3\pi}{4}$.

On a : $X = \frac{a+ib}{2-5i}$ et $X = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -1+i$

$$X = \frac{a+ib}{2-5i} = \frac{(a+ib)(2+5i)}{29}$$

$$= \frac{2a-5b}{29} + \frac{i(5a+2b)}{29}$$

$$X = -1+i \Rightarrow \begin{cases} 2a-5b = -29 \\ 5a+2b = 29 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 29a = 29 \times 3 \Rightarrow a = 3$$

On a : $\begin{cases} a=3 \\ 5a+2b=29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=7 \end{cases}$

Donc $X = \frac{3+7i}{2-5i}$ où $a=3$ et $b=7$.

2°) prouvons que la somme S est un réel et la calculée.

On a : $S = \left(\frac{3+7i}{2-5i} \right)^{4k} + \left(\frac{3+7i}{2-5i} \right)^{4k+4}$; $k \in \mathbb{N}$ or

$$X = \left(\frac{3+7i}{2-5i} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Donc on a : $S = X^{4k} + X^{4k+4}$

$$= \left[\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} \right]^{4k} + \left[\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} \right]^{4k+4}$$

$$= (\sqrt{2})^{4k} e^{i3\pi k} + (\sqrt{2})^{4(k+1)} e^{i3\pi(k+1)}$$

$$= 2^{2k} \cos 3\pi k + 2^{2(k+1)} (-\cos 3\pi k)$$

$$= (1-4) \cos 3\pi k = -3 \cos 3\pi k$$

$S = -3 \cos 3\pi k$ avec $k \in \mathbb{N}$ d'où $S \in \mathbb{R}$.

Et on a : $S = \begin{cases} -3 \text{ si } k \text{ est un entier naturel pair.} \\ -3 \text{ si } k \text{ est un entier naturel impair.} \end{cases}$

Signe de S

$S < 0$ si k est un entier naturel pair

$S > 0$ si k est un entier naturel impair.

3°) a- Calcule $[(2-5i)(-1+i)]^4$

On a : $X = \frac{3+7i}{2-5i} = -1+i$ alors $(2-5i)(-1+i) = 3+7i$

Donc $[(2-5i)(-1+i)]^4 = (3+7i)^4$ on trouve :

$$[(2-5i)(-1+i)]^4 = -164 - 3360i.$$

b- Déduisons-en la résolution de l'équation (E)

on a : (E) : $z^4 + 164 + 3360i = 0$

(E) $\Leftrightarrow z^4 - (-164 - 3360i) = 0$

$$\Leftrightarrow z^4 - (3+7i)^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow [z^2 - (3+7i)^2][z^2 + (3+7i)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow [z - (3+7i)][z + (3+7i)][z - i(3+7i)][z + i(3+7i)] = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 3+7i \text{ ou } z = -3-7i \text{ ou } z = -7+3i \text{ ou } z = 7-3i$$

D'où $S_C = \{-3-7i; -7+3i; 7-3i; 3+7i\}$

ACTIVITE 45 :

$\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$; $u = e^{i\alpha}$; $z = u^7 + \bar{u}^5$

1°) Justifions que $z = (2 \cos 6\alpha) e^{i\alpha}$.

On a : $z = u^7 + \bar{u}^5$

$$= e^{i7\alpha} + e^{-i5\alpha}$$

$$= e^{i7\alpha} + \frac{1}{e^{i5\alpha}}$$

$$= \frac{e^{i12\alpha} + 1}{e^{i5\alpha}}$$

$$= \frac{e^{i12\alpha} + e^{i6\alpha} \times e^{-i6\alpha}}{e^{i5\alpha}}$$

$$= \frac{e^{i6\alpha} (e^{i6\alpha} + e^{-i6\alpha})}{e^{i5\alpha}} = (e^{i6\alpha} + e^{-i6\alpha}) e^{i\alpha}$$

Or $e^{i6\alpha} + e^{-i6\alpha} = 2 \cos 6\alpha$ d'où $z = (2 \cos 6\alpha) e^{i\alpha}$

2°) a- Résolvons dans $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$, l'inéquation $\cos 6\alpha > 0$.

$$\cos 6\alpha > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 6\alpha \\ X \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 6\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\cos 6\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha \in \left] -\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12} \right[$$

Or $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ alors :

$$\cos 6\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{12} \right[\text{ donc } S_{\left[0; \frac{\pi}{2} \right]} = \left[0; \frac{\pi}{12} \right[.$$

b- Déterminons suivant les valeurs de α , le module et un argument de z .

On a : $z = (2 \cos 6\alpha) e^{i\alpha}$

> Pour $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{12} \right[$

on a : $2 \cos 6\alpha > 0$; alors

$|z| = 2 \cos 6\alpha$ et un argument de z est α .

> Pour $\alpha \in \left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{2} \right]$,

on a : $2 \cos 6\alpha < 0$; alors $z = (-2 \cos 6\alpha) e^{i(\pi+\alpha)}$

donc $|z| = -2 \cos 6\alpha$ et un argument de z est $\pi + \alpha$.

➤ Pour $\alpha = \frac{\pi}{12}$

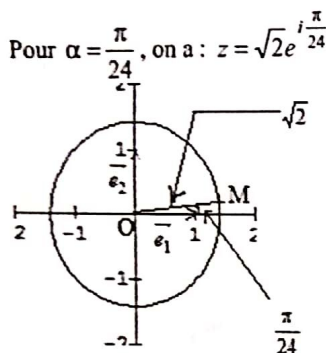
on a : $z = 0$ alors $|z| = 0$ et z n'admet pas d'argument.

➤ Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$

on a : $z = -2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i(\pi+\frac{\pi}{2})}$

d'où $|z| = 2$ et un argument de z est $\frac{3\pi}{2}$.

3°) Représentons le point M image de z pour $\alpha = \frac{\pi}{24}$.



ACTIVITE 46 :

(E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^2 + 2z \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} = 0$ où $\theta \in [-\pi; \pi]$.

1°) Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation (E)

Soit Δ le discriminant associé à (E)

$$\begin{aligned} \text{On a : } \Delta &= \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}\right)^2 - 4 \left(1 \left(\sin^2 \frac{\theta}{2}\right)\right) \\ &= 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1\right) = \left(2i \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2 \text{ donc} \end{aligned}$$

$$(E) \Leftrightarrow z = \frac{-2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - 2i \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2} \text{ ou}$$

$$z = \frac{-2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2}$$

$$(E) \Leftrightarrow z = -\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - i \sin^2 \frac{\theta}{2} \text{ ou}$$

$$z = -\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + i \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$(E) \Leftrightarrow z = \sin \frac{\theta}{2} \left(-\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2}\right) \text{ ou } z = \sin \frac{\theta}{2} \left(-\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}\right)$$

$$(E) \Leftrightarrow z = \sin \frac{\theta}{2} \left[\cos\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right)\right] \text{ ou}$$

$$z = \sin \frac{\theta}{2} \left[\cos\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right)\right]$$

Donc : l'ensemble solution S dans $\mathbb{C}$ est :

$$S = \left\{ \left(\sin \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right)} ; \left(\sin \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right)} \right\} \text{ avec } \theta \in [-\pi; \pi]$$

2°) Précisons selon les valeurs de θ , le module et un argument de chacune des solutions de (E).

$$\bullet \quad z = \sin \frac{\theta}{2} \left[\cos\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right)\right]$$

On a : $\theta \in [-\pi; \pi]$ alors $\frac{\theta}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

- Pour $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, on a $\sin \frac{\theta}{2} < 0$ alors

$|z| = -\sin \frac{\theta}{2}$ et un argument de z est :

$$\pi + \pi + \frac{\theta}{2} = 2\pi + \frac{\theta}{2}$$

- Pour $\frac{\theta}{2} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\sin \frac{\theta}{2} > 0$ alors

$|z| = \sin \frac{\theta}{2}$ et un argument de z est : $\pi + \frac{\theta}{2}$.

- Pour $\frac{\theta}{2} \in \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$, $z = -i$ alors

$|z| = 1$ et un argument de z est : $-\frac{\pi}{2}$.

- Pour $\frac{\theta}{2} = 0$; on a : $z = 0$ alors

$|z| = 0$ et pas d'argument.

$$\bullet \quad z = \sin \frac{\theta}{2} \left[\cos\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right)\right]$$

- Pour $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, on a $\sin \frac{\theta}{2} < 0$ alors

$|z| = -\sin \frac{\theta}{2}$ et un argument de z est :

$$\pi + \pi - \frac{\theta}{2} = 2\pi - \frac{\theta}{2}$$

- Pour $\frac{\theta}{2} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\sin \frac{\theta}{2} > 0$ alors

$|z| = \sin \frac{\theta}{2}$ et un argument de z est : $\pi - \frac{\theta}{2}$.

- Pour $\frac{\theta}{2} \in \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$, $z = i$ alors

$|z| = 1$ et un argument de z est : $\frac{\pi}{2}$.

- Pour $\frac{\theta}{2} = 0$; on a : $z = 0$ alors

$|z| = 0$ et pas d'argument.

DES NOMBRES COMPLEXES TRANSFORMATIONS DU PLAN.

ACTIVITE 10 :

$$Z = \frac{iz+3}{z+2}$$

1°) Déterminons X et Y en fonction de x et y .
Pour $(x; y) \neq (-2; 0)$ on trouve que :

$$Z = \frac{3x-2y+6}{(x+2)^2+y^2} + i \frac{x^2+y^2+2x-3y}{(x+2)^2+y^2}$$

$$\text{Donc : } X = \frac{3x-2y+6}{(x+2)^2+y^2} \text{ et } Y = \frac{x^2+y^2+2x-3y}{(x+2)^2+y^2}$$

2°) Déterminons et construisons (C) et (D)

$$\bullet M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow Y = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) \neq (-2; 0) \\ x^2+y^2+2x-3y=0 \end{cases}$$

$$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) \neq (-2; 0) \\ (x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} \end{cases}$$

D'où (C) est un cercle de centre $\Omega\left(-1; \frac{3}{2}\right)$ et de rayon

$$R = \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ u.l. privé du point A.}$$

$$\bullet M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow Z \in i\mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow Y = 0$$

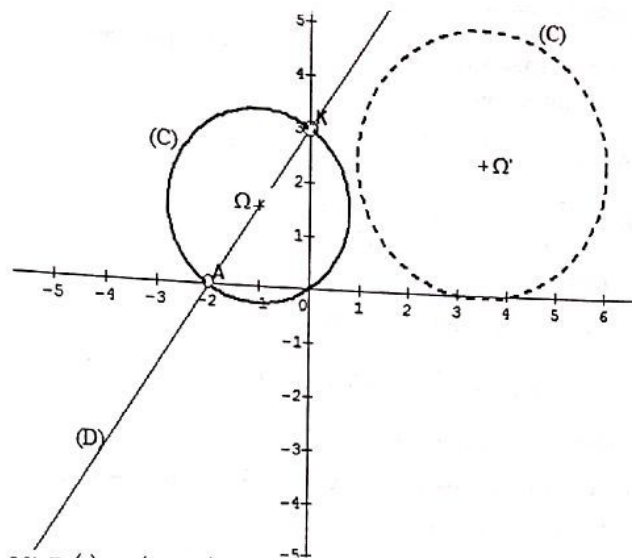
$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z \neq 0 \\ \text{Re}(Z) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} iz+3 \neq 0 \\ z \neq -2 \\ X = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) \neq (0; 3) \\ (x; y) \neq (-2; 0) \\ 3x-2y+6=0 \end{cases}$$

D'où (D) est la droite d'équation $3x-2y+6=0$ privé des points A $(-2; 0)$ et K $(0; 3)$.

Construction de (C) et (D).



$$3^\circ) B(i), C(2+2i) \text{ et } D(1-i)$$

a- Donne l'expression complexe de S

S est une similitude plane directe $\Leftrightarrow S: z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

On a : $S(B) = C$ et $S(C) = D$

$$\begin{aligned} \begin{cases} S(B) = C \\ S(C) = D \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} z_C = az_B + b \\ z_D = az_C + b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a(z_C - z_B) = z_D - z_C \\ &\Leftrightarrow a = \frac{z_D - z_C}{z_C - z_B} \end{aligned}$$

On trouve : $a = -1 - i$

En utilisant: $a = -1 - i$ et $\begin{cases} z_C = az_B + b \\ z_D = az_C + b \end{cases}$ on trouve $b = 1 + 3i$

D'où $S: z' = (-1 - i)z + 1 + 3i$.

b- Précisons les éléments géométriques de S.

$$(-1 - i) \in \mathbb{C} \text{ et } |-1 - i| = \sqrt{2}$$

$$\text{Soit } \theta = \arg(-1 - i) \text{ on trouve } \theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Soit } \omega = \frac{b}{1-a} \text{ on trouve } \omega = 1 + i$$

Ainsi S a pour centre I $(1; 1)$, de rapport $k = \sqrt{2}$ et d'angle $\frac{5\pi}{4}$.

c- Construisons l'image de (C) par S.

Soit $(C') = S(C)$ avec $C_{(\Omega; R)}$ et $C'_{(\Omega'; R')}$

$$\text{On a : } R' = kR \text{ et } \Omega' = S(\Omega)$$

$$R' = kR \Rightarrow R' = \frac{\sqrt{26}}{2} \text{ u.l.}$$

$$\Omega' = S(\Omega) \Rightarrow z_{\Omega'} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2}i$$

Voir le cercle en pointillé sur la figure

ACTIVITE 13 :

I-
1°) z est écrit sous forme algébrique, x est sa partie réelle et y sa partie imaginaire

2°) Son module est $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3°) $\cos \alpha = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$; $\sin \alpha = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$

4°) Soit $O(0)$,

$z' - z_O = e^{i\theta}(z - z_O)$ donc on trouve : $z' = ze^{i\theta}$

II- (E) : $\frac{1}{2}z^2 + 4z\sqrt{3} + 32 = 0$

1°) Résolvons l'équation (E)

Soit Δ' son discriminant réduit, $\Delta' = (2\sqrt{3})^2 - 16 = -4 = (2i)^2$

Les solutions de (E) sont :

$$z_1 = \frac{-2\sqrt{3} - 2i}{\frac{1}{2}} \text{ et } z_2 = \frac{-2\sqrt{3} + 2i}{\frac{1}{2}} \text{ on obtient :}$$

$$z_1 = -4\sqrt{3} - 4i \text{ et } z_2 = -4\sqrt{3} + 4i$$

2°) $a = -4\sqrt{3} - 4i$, $b = -4\sqrt{3} + 4i$

Calculons OA ; OB et AB.

$$OA = |a| = 8, OB = |b| = 8 ; AB = |8i| = 8.$$

Déduisons-en la nature du triangle OAB.

On a : $OA = OB = AB$ donc OAB est un triangle équilatéral.

3°) Déterminons l'affixe du point D.

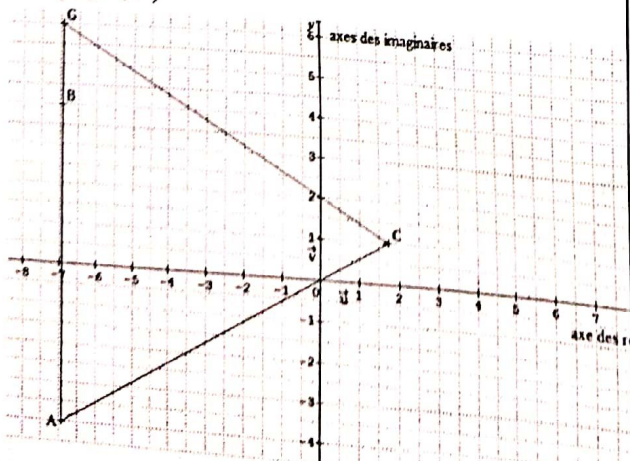
$$\text{On a : } z_D = z_C e^{i\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} + i) \\ = \frac{1}{2}i(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i) \text{ et on a : } z_D = 2i$$

4°) $G = \overline{\operatorname{bar}}\{(O; 1), (D; -1), (B; -1)\}$

a- Prouvons que $g = -4\sqrt{3} + 6i$

$$g = \frac{1.z_O - 1.z_D - 1.z_B}{-1} = z_D + z_B \text{ d'où } g = -4\sqrt{3} + 6i$$

b- Plaçons les points A, B, C et G dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$



5°) Déterminons une mesure en radian de $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC})$

$$\text{On vérifie que : } \frac{c-g}{a-g} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{et } \operatorname{mes}(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC}) = \arg\left(\frac{c-g}{a-g}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Déduisons-en la nature du triangle GAC

$$\text{On a : } \begin{cases} |c-g| = |a-g| \\ \arg\left(\frac{c-g}{a-g}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} \text{ alors}$$

$$\begin{cases} GA = GC \\ \operatorname{mes}(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC}) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \text{ d'où GAC est un triangle équilatéral}$$

direct.

ACTIVITE 15 :

1°) a- Vérifie que $\alpha + 2i$ est une solution de (E)

$$z^2 - (2\alpha + i)z + \alpha^2 + i\alpha + 2 = 0$$

Posons $z_0 = \alpha + 2i$

$$(\alpha + 2i)^2 - (2\alpha + i)(\alpha + 2i) + \alpha^2 + i\alpha + 2 =$$

$$\alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha^2 + 4i\alpha - 4i\alpha - 4 + 4 = 0$$

D'où $\alpha + 2i$ est solution de (E).

b- Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation (E)

$$\Delta = (2\alpha + i)^2 - 4(\alpha^2 + i\alpha + 2) \Leftrightarrow \Delta = -9 = (3i)^2$$

On trouve $z_1 = \alpha + 2i$ et $z_2 = \alpha - i$

D'où l'ensemble solution S dans $\mathbb{C}$ est :

$$S = \{\alpha - i ; \alpha + 2i\}$$

c) Déterminons α pour que OIK soit un triangle isocèle et rectangle en O

$$\frac{z_K - z_O}{z_J - z_O} = i \text{ ou } \frac{z_K - z_O}{z_J - z_O} = -i$$

$$\frac{\alpha + 2i}{\alpha - i} = i \text{ ou } \frac{\alpha + 2i}{\alpha - i} = -i$$

$$\alpha = \frac{3-i}{2} \text{ ou } \alpha = \frac{-3-i}{2}$$

2°) a- Déterminons l'écriture complexe et les éléments caractéristiques de s

$$s : z' = az + b, \text{ où } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

$$\begin{cases} s(J) = K \\ s(K) = O \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_K = az_J + b \\ z_O = az_K + b \end{cases} \text{ on trouve :}$$

$$a = \frac{-1-i}{2} \text{ et } b = -\frac{3}{2}$$

$$\text{D'où } s : z' = \left(\frac{-1-i}{2}\right)z - \frac{3}{2}$$

$$\left| \frac{-1-i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Soit z_Ω , l'affixe du centre Ω de s .

$$z_\Omega = \frac{-3}{1+i} = \frac{-3(3-i)}{10} \Leftrightarrow z_\Omega = -\frac{9}{10} + \frac{3}{10}i$$

Soit θ un argument de $\left(\frac{-1-i}{2} \right)$, on a :

$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} ; \theta = \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

d'où s est la similitude plane directe de centre Ω d'affixe

$$z_\Omega = -\frac{9}{10} + \frac{3}{10}i, \text{ d'angle } \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ et de rapport } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b- Déterminons une équation cartésienne de l'ouverture circulaire pour la projection des films.

Soit (C) le cercle circonscrit au triangle OJK rectangle en O.

Le milieu O' de $[JK]$ est le centre de (C) et $r = \frac{JK}{2}$ est le rayon de (C).

L'ouverture circulaire est donc (C') de centre $O' = s(O)$ et de

rayon $r' = k \times r$

$$z_{O'} = -\frac{3}{2} \text{ et } r = \frac{3}{2}. \text{ On trouve : } z_{O'} = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}i \text{ et } r' = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$(C') : \left(x + \frac{3}{4} \right)^2 + \left(y - \frac{3}{4} \right)^2 = \frac{9}{8}$$

ACTIVITE 16 :

1°) Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation (E)

$$(E) : z^4 + (8-4i)z^2 + 12 + 16i = 0$$

Posons $X = z^2$

$$(E) \text{ devient alors : } X^2 + (8-4i)X + 12 + 16i = 0 \quad (E')$$

Le discriminant de (E') est

$$\Delta = (8-4i)^2 - 4(12+16i)$$

$$\Delta = -128i = 64(-2i) = [8(1-i)]^2$$

Les solutions de l'équation (E') sont donc :

$$X_1 = \frac{-8-4i-8+8i}{2} = -8+6i \text{ et}$$

$$X_2 = \frac{-8+4i+8-8i}{2} = -2i$$

• Résolution de $z^2 = -8+6i$

Posons $z = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z^2 = -8+6i$

$$z^2 = -8+6i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \quad (1) \\ x^2 - y^2 = -8 \quad (2) \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \quad (1) + (2) \\ 2y^2 = 18 \quad (1) - (2) \\ xy > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ou } x = 1 \\ y = -3 \text{ ou } y = 3 \\ xy > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ et } y = -3 \\ \text{ou} \\ x = 1 \text{ et } y = 3 \end{cases}$$

Les solutions de $z^2 = -8+6i$ sont donc $z_1 = -1-3i$;

$$z_2 = 1+3i$$

• Résolution de $z^2 = -2i$

$$z^2 = -2i \Leftrightarrow z^2 = (1-i)^2$$

$$\Leftrightarrow z = 1-i \text{ ou } -z = 1-i$$

$$\Leftrightarrow z = 1-i \text{ ou } z = -1+i$$

Les solutions de $z^2 = -2i$ sont donc $z_3 = 1-i$ et

$$z_4 = -1+i$$

Alors l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S = \{-1-3i; 1+3i; 1-i; -1+i\}$$

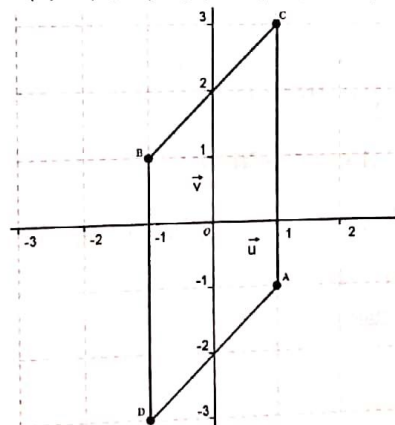
2°) a- Déterminons les complexes z_A ; z_B ; z_C et z_D

$\text{Im}(z_D) < \text{Im}(z_A) < \text{Im}(z_B) < \text{Im}(z_C)$ donc

$$z_D = -1-3i ; z_A = 1-i ; z_B = -1+i \text{ et } z_C = 1+3i$$

b- Plaçons les points A ; B ; C et D

$$A(1; -1) ; B(-1; 1) ; C(1; 3) \text{ et } D(-1; -3)$$



c- Donnons le nom du quadrilatère ACBD

$$z_{AC} = z_C - z_A = 4i$$

$$z_{DB} = z_B - z_D = 4i$$

$\vec{AC} = \vec{DB} \Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{DB}$ d'où ACBD est un parallélogramme.

3°) a- Écriture complexe de S
S est similitude plane directe donc elle est de la forme :

$$z' = az + b, \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

$$S(A) = A \Leftrightarrow az_A + b = z_A \quad (L_1)$$

$$S(C) = B \Leftrightarrow az_C + b = z_B \quad (L_2)$$

$$(L_1) - (L_2) \Rightarrow a(z_A - z_C) = z_A - z_B$$

$$\Rightarrow a = \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2-2i}{-4i} \Rightarrow a = \frac{1}{2}(1+i)$$

$$(L_2) \Rightarrow az_C + b = z_B \Leftrightarrow b = z_B - az_C$$

$$\Leftrightarrow b = (-1+i) - \frac{1}{2}(1+i)(1+3i)$$

$$\Leftrightarrow b = -i$$

D'où l'écriture complexe de S est : $z' = \frac{1}{2}(1+i)z - i$

b- Éléments caractéristiques de S

$$\bullet S(A) = A \Leftrightarrow A(1-i) \text{ est le centre de la similitude } S$$

$$\bullet \text{ Le rapport } k = \frac{1}{2}|1+i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\bullet \text{ L'angle } \theta \text{ est tel que } \theta = \arg\left(\frac{1}{2}(1+i)\right)$$

$$\text{On a : } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

4°) a- Déterminons l'image des points C et D par S

$S(C) = B$ donc l'image du point C par S est B (-1+i)

Soit $D' = S(D)$

$$D' = S(D) \Leftrightarrow z_{D'} = \frac{1}{2}(1+i)z_D - i$$

$$= \frac{1}{2}(1+i)(-1-3i) - i$$

$$= \frac{1}{2}(2-4i) - i = 1-3i \text{ donc l'image du}$$

point D par S est $D'(1-3i)$

b- Equation cartésienne de (D)

soit (D) : $y = \alpha x + \beta$

$$B \in (D) \text{ et } D' \in (D) \text{ donc } \alpha = \frac{y_{D'} - y_B}{x_{D'} - x_B}$$

$$= \frac{-3-1}{1+1} = -2$$

$$B \in (D) \Leftrightarrow \beta = 1 + 2(-1) = -1$$

D'où (D) : $y = -2x - 1$ ou (D) : $2x + y + 1 = 0$.

ACTIVITE 18 :

1°) Déterminons les nombres complexes a et b.

$a + b = 5 - 4i$; $ab = 3 - 9i$ et $|a| > |b|$. Les nombres complexes a et b sont solutions de l'équation :

$$z^2 - (5-4i)z + 3-9i = 0 \quad (1), \Delta = -3-4i$$

Soit $\delta = \alpha + i\beta$; $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ une racine carrée de Δ ,

alors $\delta^2 = \Delta$.

$$\text{Alors } \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -3 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 \\ \alpha\beta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -1 \\ \beta = 2 \text{ ou } \beta = -2 \\ \alpha\beta < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \text{ et } \beta = -2 \\ \alpha = -1 \text{ et } \beta = 2 \end{cases}$$

Donc une racine carrée de Δ est $\delta = 1 - 2i$

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (1) sont :

$$z_1 = \frac{5-4i + (1-2i)}{2} = 3-3i ;$$

$$z_2 = \frac{5-4i - (1-2i)}{2} = 2-i$$

Comme $|z_1| = 3\sqrt{2}$, $|z_2| = \sqrt{5}$ et $|z_1| > |z_2|$, alors on a :

$$a = 3-3i \text{ et } b = 2-i$$

$|a| = |3-3i| = 3\sqrt{2}$; on peut donc écrire :

$$a = 3\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 3\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

D'où la forme trigonométrique de

$$a = 3\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$2^\circ) A(a) ; B\left(\frac{a^2}{18}\right), C(b) \text{ et } D(b^2)$$

Donc $A(3-3i)$; $B(-i)$; $C(2-i)$ et $D(3-4i)$

a- Coordonnées de

$$G = \text{bar}\{(A;1), (B;-1), (C;1), (D;1)\}$$

$$\text{On a : } z_G = \frac{z_A - z_B + z_C + z_D}{2} = \frac{8-7i}{2} \text{ donc}$$

$$G\left(4; \frac{-7}{2}\right).$$

b- Recherche de l'ensemble des points M tels que

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 + MD^2 = k$$

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 + MD^2 =$$

$$= (\overline{MG} + \overline{GA})^2 - (\overline{MG} + \overline{GB})^2 + (\overline{MG} + \overline{GC})^2 + (\overline{MG} + \overline{GD})^2$$

$$= 2MG^2 + 2\overline{MG}(\overline{GA} - \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD}) + GA^2 - GB^2 + GC^2 + GD^2$$

Or $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$, car

$$G = \text{bar}\{(A;1), (B;-1), (C;1), (D;1)\}$$

$$GA^2 = \frac{5}{4}; GB^2 = \frac{89}{4}; GC^2 = \frac{41}{4}; GD^2 = \frac{5}{4}$$

$$\text{Donc } MA^2 - MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2MG^2 - \frac{19}{2}$$

$$\text{La relation } MA^2 - MB^2 + MC^2 + MD^2 = k \Leftrightarrow$$

$$2MG^2 - \frac{19}{2} = k \text{ soit } MG^2 = \frac{2k+19}{4}$$

- Si $k < -\frac{19}{2}$, l'ensemble cherché est vide.
- Si $k = -\frac{19}{2}$, $MG = 0$, l'ensemble cherché est le singleton $\{G\}$.
- $k > -\frac{19}{2}$, on a : $MG = \frac{1}{2}\sqrt{2k+19}$, l'ensemble cherché est le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{2k+19}$.

3°) Nature et éléments caractéristiques de S.

L'application complexe associée à S est de la forme

$z' = az + b$ avec $a = 3 - 3i$ et $b = 2 - i$ donc S est une

similitude plane directe.

D'après 1°) la forme trigonométrique de a est :

$$a = 3\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \text{ donc le rapport de S est}$$

$$3\sqrt{2} \text{ et une mesure de l'angle de S est } -\frac{\pi}{4}.$$

Le centre de S a pour affixe $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ soit

$$z_\Omega = -\frac{7}{13} - \frac{4}{13}i.$$

En conclusion, S est une similitude plane directe de

centre $\Omega\left(-\frac{7}{13}; -\frac{4}{13}\right)$, de rapport $3\sqrt{2}$ et dont une

mesure de l'angle est $-\frac{\pi}{4}$.

ACTIVITE 21 :

Dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^3 - m(1+i)z^2 + im^2z = 0$ où

$m \in \mathbb{C}^*$

1°) a- Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

L'équation (E) devient $z[z^2 - m(1+i)z + im^2] = 0$ d'où

$$(z=0 \text{ ou } z^2 - m(1+i)z + im^2 = 0)$$

$$\text{Résolvons } z^2 - m(1+i)z + im^2 = 0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = -2im^2 = [m(1-i)]^2$$

Les solutions de cette équation du second degré sont :

$$z_1 = \frac{m(1+i) - m(1-i)}{2} = mi \text{ et}$$

$$z_2 = \frac{m(1+i) + m(1-i)}{2} = m$$

Les solutions de l'équation (E) sont : $z=0$ ou $z=m$ ou $z=mi$. donc $S_C = \{0; m; mi\}$.

b- Nature du triangle OAB.

B étant l'image de A par R, rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de

centre O, alors A a pour affixe m et B a pour affixe mi .

$$R(A)=B \Leftrightarrow \begin{cases} OA=OB \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

Comme $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$, alors le triangle OAB est

rectangle en O ; de plus $OA=OB$, donc le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.

2°) a- Valeur de m pour que $1+i$ soit solution de (E).

Si $1+i$ est solution de (E) alors on a :

$$\begin{cases} 1+i=m \\ \text{ou} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} m=1+i \\ \text{ou} \end{cases} \begin{cases} 1+i=im \\ m=1-i \end{cases}$$

Donc, le complexe $1+i$ est solution de (E) pour les valeurs de m égales à $1+i$ ou $1-i$.

b- Résolution de (E) pour chacune des valeurs trouvées.

1^{er} cas : $m=1+i$

Dans le cas, (E) a pour solutions $z=0$ ou $z=1+i$ ou

$$z=-1+i$$

2^{ème} cas : $m=1-i$

Dans ce cas, (E) a pour solutions $z=0$ ou $z=1-i$ ou

$$z=1+i.$$

3°) a- Détermination du centre et du rayon du cercle (C).

(C) d'équation : $x^2 + y^2 - x = 0$ équivaut à

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}, \text{ donc le cercle (C) a pour centre le}$$

$$\text{point } \Omega\left(\frac{1}{2}; 0\right) \text{ et pour rayon } \frac{1}{2}.$$

b- Détermination de l'image de (C) par R.

Soit $M \in (C)$ et $M'=R(M)$ d'affixes respectives z et z' .

$R(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z = iz$ comme $z_\Omega = \frac{1}{2}$ affixe de

Ω alors $z'_\Omega = \frac{1}{2}i$.

Donc l'image du cercle (C) par la rotation R est le cercle (C') de centre $\Omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

ACTIVITE 27 :

$$(E): z^n = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}, n \in \mathbb{N}^*$$

1°) Déterminons les solutions z_k de (E).

$$\text{On a : } \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2} = 9\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\text{Donc } (E) \Leftrightarrow (E): z^n = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Ainsi les solutions de (E) sont les racines $n^{\text{ième}}$ du complexe

$$e^{i\frac{2\pi}{3}}; z_k \text{ étant ces solutions, on a : } z_k = \sqrt[n]{9\sqrt{3}}e^{i\left(\frac{2\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

avec $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.

2°) Pour $n=5$.

Représentons dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points images des solutions z_k de (E).

D'après 1°) on a :

$$z_k = \sqrt[5]{9\sqrt{3}}e^{i\left(\frac{2\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}\right)} \text{ avec } k \in \{0; 1; \dots; 4\}$$

$$\sqrt[5]{9\sqrt{3}} = \sqrt[5]{\sqrt{3}^5} = \sqrt{3}$$

$$\text{Donc } z_k = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{2\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}\right)}; k \in \{0; 1; \dots; 4\}$$

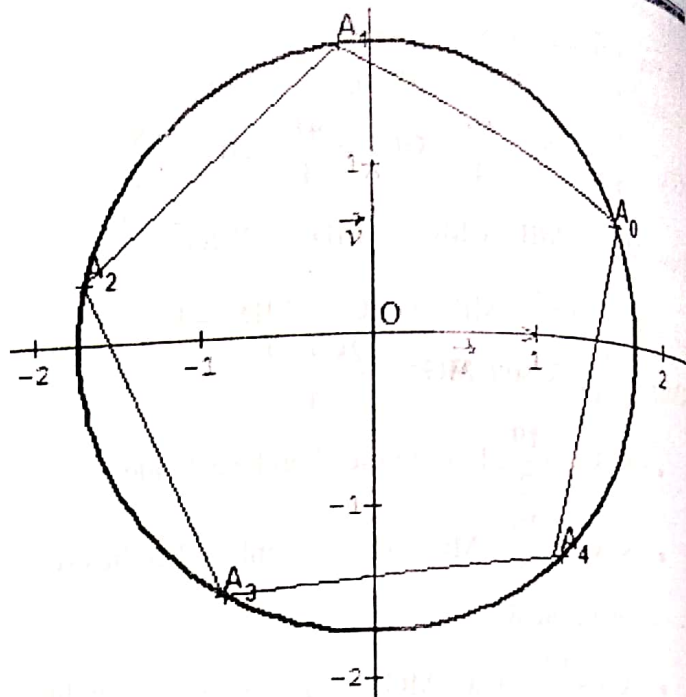
Les points images sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

$$\text{Soit } A_0(z_0) \text{ avec } z_0 = \sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{15}}$$

Construction :

$$OA_0 = \sqrt{3}, \text{ Mes}(\vec{u}; \overrightarrow{OA_0}) = \frac{2\pi}{15} \text{ rad} = 24^\circ$$

Le point $A_1(z_1)$ est tel que $\text{Mes}(\overrightarrow{OA_0}; \overrightarrow{OA_1}) = \frac{2\pi}{5}$ et ainsi de suite pour les points $A_2(z_2)$, $A_3(z_3)$, $A_4(z_4)$.



Autre méthode :

$$z_0 = \sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{15}}, z_1 = \sqrt{3}e^{i\frac{8\pi}{15}}; z_2 = \sqrt{3}e^{i\frac{14\pi}{15}}; z_3 = \sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{15}};$$

$$z_4 = \sqrt{3}e^{i\frac{26\pi}{15}}$$

$$3^\circ) \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

a- Soit $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, exprimons α en fonction de j .

$$\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \alpha = \sqrt{3}j$$

Autre :

$$\alpha = -j - 2i$$

b- Prouvons que α est une solution de

$$z^5 = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}$$

$$\alpha^5 = (\sqrt{3}j)^5 = 9\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5$$

$$= 9\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]^5$$

$$\alpha^5 = 9\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]^5 \text{ or } -\frac{10\pi}{3} = -4\pi + \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Donc } \alpha^5 = 9\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\alpha^5 = 9\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\alpha^5 = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2} \text{ d'où } \alpha \text{ est solution de l'équation}$$

$$z^5 = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}$$

$$4^{\circ}) T: P \rightarrow P$$

$$M(z) \mapsto M'(z')$$

$$z' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right) z + \frac{5+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

a- Ecrivons la forme algébrique du nombre complexe $w = (1-i)(2+\sqrt{3}+3i)$.

$$w = 5 + \sqrt{3} + (1-\sqrt{3})i$$

b- Nature de T et ses éléments caractéristiques.

• Nature

T est sous la forme : $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ donc T est une similitude plane directe.

• Eléments caractéristiques

$$\text{On a : } \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right| = \sqrt{3} ; \arg \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right) = \arg \alpha$$

$$\text{Soit } \omega = \frac{b}{1-a} = \frac{\frac{1}{2}[5+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i]}{\frac{2+\sqrt{3}+3i}{2}} = \frac{(1-i)(2+\sqrt{3}+3i)}{2+\sqrt{3}+3i} = 1-i$$

Donc T a pour centre $\Omega(1-i)$, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

ACTIVITE 29 :

$$(E): z^2 - [1+i(\sin \theta + \tan \theta)]z + (-\tan \theta + i)\sin \theta = 0$$

$$\text{Avec } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$$

1°) Prouvons que : $b = i \sin \theta$ est une solution de (E), puis calcule l'autre racine noté a .

On a :

$$(i \sin \theta)^2 - [1+i(\sin \theta + \tan \theta)](i \sin \theta) + (-\tan \theta + i)\sin \theta = A$$

$$A = -\sin^2 \theta - i \sin \theta + \sin^2 \theta + \sin \theta \tan \theta + i \sin \theta - \sin \theta \tan \theta = 0$$

D'où $b = i \sin \theta$ est une solution de (E)

$$\text{Par suite } (E) \Leftrightarrow (z - i \sin \theta)(z - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - (a + i \sin \theta)z + ai \sin \theta = 0$$

$$\text{Or } (E): z^2 - [1+i(\sin \theta + \tan \theta)]z + (-\tan \theta + i)\sin \theta = 0$$

$$\text{alors on a : } a i \sin \theta = i \sin \theta - \sin \theta \tan \theta$$

$$= i \sin \theta + i^2 \sin \theta \tan \theta$$

$$\text{Donc } a = 1 + i \tan \theta$$

2°) Déterminons le module et l'argument de a

$$\text{On a : } a = 1 + i \tan \theta$$

$$a = 1 + i \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$a = \frac{1}{\cos \theta} (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\text{Or } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right], \text{ alors } \cos \theta < 0$$

$$\text{D'où } |a| = -\frac{1}{\cos \theta} \text{ et } \arg a = \theta + \pi$$

$$3^{\circ}) F: P \rightarrow P$$

$$z \mapsto z' = az + b$$

a- Reconnaissons F et déterminons ses éléments géométriques.

$$\text{On a : } z' = -\frac{1}{\cos \theta} [\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta)]z + i \sin \theta$$

$$\text{Pour } \theta = \pi$$

$$z' = -\frac{1}{\cos \pi} [\cos(\pi + \pi) + i \sin(\pi + \pi)]z + i \sin \pi = z$$

Alors F est l'application identique dans P.

$$\text{Pour } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right] \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right];$$

F est une similitude plane directe de rapport $-\frac{1}{\cos \theta}$, d'angle de mesure $\pi + \theta$ et de centre Ω d'affixe $z_0 = -\cos \theta$.

b-

$$\text{Posons } \pi + \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow \theta = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right] \Rightarrow k = 1 \text{ et } \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{alors } z_0 = -\cos \frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } -\frac{1}{\cos \frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}$$

$$\text{Donc } z_{A_0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et le rapport } r \text{ de } F \text{ est : } r = \sqrt{2}$$

10. CORRECTION DES ACTIVITES SUR LES PROBABILITES

ACTIVITE 1 :

1°) a- $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$

donc $p(A \cap B) = 0,12$

b- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
 $= 0,4 + 0,3 - 0,12 = 0,58$

$p(A \cup B) = 0,58$

2°) a- $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ donc

$p(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$

Alors $p(A) = 0,2$

b- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
 $= 0,2 + 0,5 - 0,1 = 0,6$

Donc $p(A \cup B) = 0,6$

ACTIVITE 2 :

Dans un tel exercice l'effectif de la classe ne se vérifie pas par la somme de

28+16 ou de 28+16+8

L'effectif 40 ne se vérifie pas tout simplement par ce qu'il y a des élèves qui

étudient les deux langues à la fois.

Calculons les probabilités

Anglais : 28

Allemand : 16

ang+all : 8

soit Ω l'univers associé à cette épreuve $\text{card}\Omega = 40$;

$\text{card}A = 28$; $\text{card}B = 16$; $\text{card}(A \cap B) = 8$.

$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{28}{40}$ donc $p(A) = \frac{7}{10}$

$p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{16}{40} = \frac{4}{10}$ donc $p(B) = \frac{4}{10}$

$p(A \cap B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}\Omega} = \frac{8}{40} = \frac{2}{10}$ donc

$p(A \cap B) = \frac{2}{10}$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ on trouve

$p(A \cup B) = \frac{9}{10}$

$p(\bar{A} \cup B) = p(\bar{A}) + p(B) - p(\bar{A} \cap B)$

$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$

$\bar{A} \cap B$ est l'évènement « l'élève choisit apprendre uniquement l'allemand »

$\text{card}(\bar{A} \cap B) = 16 - 8 = 8$ donc

$p(\bar{A} \cap B) = \frac{\text{card}(\bar{A} \cap B)}{\text{card}\Omega} = \frac{8}{40} = \frac{2}{10}$

$p(\bar{A} \cup B) = \frac{3}{10} + \frac{4}{10} - \frac{2}{10} = \frac{5}{10}$ d'où $p(\bar{A} \cup B) = \frac{1}{2}$

ACTIVITE 3 :

$p(A) = \frac{4}{5} \Rightarrow p(\bar{A}) = 1 - p(A) = \frac{1}{5}$

$p(B) = \frac{3}{4} \Rightarrow p(\bar{B}) = 1 - p(B) = \frac{1}{4}$

1°) $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4}$ donc

$p(A \cap B) = \frac{3}{5}$

2°) $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \times p(\bar{B}) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

Donc $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{20}$

3°) $p(A \cap \bar{B}) = p(A) \times p(\bar{B}) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$

$p(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{5}$

4°) $p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) \times p(B) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{4}$

Donc $p(\bar{A} \cap B) = \frac{3}{20}$

5°) soit p_1 cette probabilité

$p_1 = p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{3}{20} = \frac{7}{20}$

$p_1 = \frac{7}{20}$

6°) Soit p_2 cette probabilité $\Rightarrow p_2 = p(A \cup B)$ ou

$p_2 = p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) + p(A \cap B)$ avec

$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ alors on trouve $p_2 = \frac{19}{20}$

7°) soit p_3 cette probabilité

$p_3 = p(\bar{A} \cap \bar{B})$ ou encore $p_3 = 1 - p_2$ on trouve

$p_3 = \frac{1}{20}$

8°) soit p_4 cette probabilité

$p_4 = p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) + p(A \cap B)$

On trouve $p_4 = \frac{19}{20}$

ACTIVITE 5 :

Les choix possibles de trois boules différentes soit par les boules qui les constituent soit par l'ordre de sortie des boules. Le nombre de ces cas possibles est donc le nombre d'arrangement de trois éléments pris parmi neuf.

Soit $A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$

1°) Le nombre de cas favorables est 1 car il y a une seule façon d'obtenir le nombre 123 la probabilité est alors

$$\frac{1}{504}$$

2°) Le nombre de cas favorables est 4 car les nombres divisibles par 125 sont : 125 ; 375 ; 625 ; 875 alors la probabilités recherchée est :

$$\frac{4}{504}$$

ACTIVITE 6 :

Tirer deux boules d'une urne contenant 3 boules en remettant et reprendre à nouveau le tirage donne le nombre de cas possibles :

Soit Ω l'univers des possibles. $\text{card}\Omega = 3^2 = 9$

Le nombre de cas favorable est 5, ces cas sont :

(1,3);(3,1);(2,3);(3,2);(3,3)

La probabilité recherchée est donc : $\frac{5}{9}$

NB : Tu pourras faire un tableau ou tu regrouperas tous les résultats possibles. A partir du tableau tu pourras aisément décompter les cas favorable

ACTIVITE 7 :

Les trois numéros sont impairs si les 2 numéros du sac A sont impairs et le numéro du sac B est impair.

Dans le sac A il y a 5 numéros impairs à savoir 1, 3, 5, 7, et 9

Il y a C_5^2 façons de choisir 2 numéros parmi les 5.

Il y a C_9^2

façons de choisir 2 numéros dans le sac parmi les neuf.

La probabilité de choisir 2 numéros impairs dans le sac A

$$\text{est : } \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{20}{72}$$

Dans le sac B il ya 9 numéros et C_9^1 façons de choisir un numéro parmi 9.

Il ya 5 numéros impairs et C_5^1

façons de choisir un numéro impair parmi 5.

La probabilité de choisir un numéro impair dans le sac B

$$\text{est : } \frac{C_5^1}{C_9^1}$$

1°) La probabilité de tirer 2 numéros impairs du sac A et un numéro impair du sac B est :

$$p = \frac{C_5^2}{C_9^2} \times \frac{C_5^1}{C_9^1} = \frac{20}{72} \times \frac{5}{9} = \frac{100}{648}$$

Donc la probabilité pour que les 3 numéros tirés soient tous impairs est : $p = \frac{100}{648}$

2°) Pour que 2 numéros soient pairs et un numéro soit impair.

Il faut que soit l'on tire 2 numéros pairs du sac A et un numéro impair du sac B ou soit l'on tire du sac A 1 numéro pair et un numéro impair et du sac B un numéro pair.

Considérons les évènements suivants :

E « on tire deux numéros pairs et un numéro impair ».

F « on tire deux numéros pairs de A et 1 numéro impair de B »

G « on tire un numéro pair et un numéro impair de A et 1numéro pair de B »

On a : $p(E) = p(F) + p(G)$

F : il y a C_4^2 façons de tirer 2 numéros pairs de A et C_9^1 façons de tirer 2 numéros de A. La probabilité de tirer 2 numéros pairs de A est $\frac{C_4^2}{C_9^2}$

Il y a C_9^1 façons possibles de tirer 1 numéro de B et C_5^1 de tirer 1 numéro impair de B.

La probabilité de tirer 1 numéro impair de B est $\frac{C_5^1}{C_9^1} = \frac{5}{9}$

$$\text{On a } p(F) = \frac{C_4^2}{C_9^2} \times \frac{5}{9} = \frac{60}{648}$$

G : il y a C_9^2 façons possible de tirer 2 numéros de A et $C_5^1 \times C_4^1$ façons de tirer 1 numéro impair et 1 numéro pair de A. La probabilité de tirer 1 numéro pair et 1

numéro impair de A est : $\frac{C_5^1 \times C_4^1}{C_9^2}$

Il y a C_9^1 façons possibles de tirer un numéro de B et C_4^1 façons de tirer 1 numéro pair de B. La probabilité de tirer

1 numéro pair de B est : $\frac{C_4^1}{C_9^1} = \frac{4}{9}$

$$\text{On a : } p(G) = \frac{C_5^1 \times C_4^1}{C_9^2} \times \frac{4}{9} = \frac{160}{648}$$

$$p(E) = p(F) + p(G) = \frac{60}{648} + \frac{160}{648} = \frac{220}{648}$$

La probabilité pour que 2 numéros soient pairs et un impair est $\frac{220}{648}$

ACTIVITE 8 :

Comme on ne tient pas compte de l'ordre de sortie, il y a

C_8^5 cas possibles.

1°) Parmi les lettres tirées il y a la lettre a .

Comme il y a une seule lettre a parmi les 8 lettres, il y a C_1^1 façon de la tirer et les 4 autres lettres sont tirées parmi les 7 lettres restantes soit C_7^4 façons de les obtenir. Le nombre de cas favorable à l'évènement avoir tiré la lettre a est : $C_1^1 \times C_7^4$ et la probabilité recherchée est

$$\text{donc : } p_1 = \frac{C_1^1 \times C_7^4}{C_8^5} = \frac{35}{56} \Rightarrow p_1 = \frac{5}{8}$$

2° Les 8 lettres différentes comprennent 4 voyelles et 4 consonnes. Il y a C_4^2 façons de tirer 2 voyelles parmi les 4 et les 3 autres lettres sont des consonnes à tirer parmi les 4

consonnes il y a C_4^3 façons de les tirer.

Le nombre de cas favorables à l'évènement « avoir tiré 2 voyelles et 2 seulement est $C_4^2 \times C_4^3$

$$\text{La probabilité est : } p_2 = \frac{C_4^2 \times C_4^3}{C_8^5} \Rightarrow p_2 = \frac{3}{7}$$

3° 4 consonnes seulement figurent dans le mot caroline. En tirant 5 lettres on est certain de tirer au moins une voyelle.

La probabilité est donc égale à 1

ACTIVITE 9 :

Résumons les deux lancers dans un tableau récapitulatif (tableau à double entrée)

	1	2	3	4	5	6
1	(1.1)	(1.2) *	(1.3)	(1.4) *	(1.5)	(1.6) *
2	(2.1) *	(2.2)	(2.3) *	(2.4)	(2.5) *	(2.6)
3	(3.1)	(3.2) *	(3.3)	(3.4) *	(3.5) *	(2.6)
4	(4.1) *	(4.2)	(4.3) *	(4.4)	(4.5) *	(4.6)
5	(5.1)	(5.2) *	(5.3)	(5.4) *	(5.5)	(5.6) *
6	(6.1) *	(6.2)	(6.3) *	(6.4)	(6.5) *	(6.6)

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve
 $\text{card}\Omega = 36$

Soit A l'évènement « la somme des numéros obtenu est égal à 6 »

$$A = \{(5.1); (4.2); (3.3); (2.4); (1.5)\}$$

$$\text{card}A = 5 \Rightarrow p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{5}{36}$$

B « la somme des numéros obtenus est impair »
(correspondant aux astérisques du tableau)

$$\text{card}B = 18 \Rightarrow p(B) = \frac{18}{36} \Rightarrow p(B) = \frac{1}{2}$$

C « la somme des numéros obtenus est pair » $C = \bar{B} \Rightarrow$

$$P(C) = 1 - p(B) \Rightarrow p(C) = \frac{1}{2}$$

D « la somme des numéros obtenus est supérieur à 8 »

$$D = \{(6.3); (5.4); (6.4); (4.5); (5.5); (6.5); (3.6); (4.6); (5.6); (6.6)\}$$

$$\text{card}D = 10 \Rightarrow p(D) = \frac{10}{36} \text{ soit } p(D) = \frac{5}{18}$$

E « la somme des numéros obtenus est inférieur à 4 »

$$E = \{(1.1); (1.2); (2.1)\}$$

$$\text{card}E = 3 \Rightarrow p(E) = \frac{3}{36} \Rightarrow p(E) = \frac{1}{12}$$

ACTIVITE 13 :

1° Soit l'évènement A : « les deux personnes prises au hasard sont nées un même jour de la semaine » ; alors $\text{card}A = 7$. Or le nombre de cas possibles est

$$\text{card}\Omega_1 = 7^2 = 49.$$

$$\text{Donc } P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega_1} = \frac{1}{7} \approx 0,142$$

2° Soit l'évènement B : « toutes les 4 personnes du groupe sont nées à des jours différents de la semaine » ;

alors $\text{card}B = A_7^4 = 840$ or le nombre des cas possibles

$$\text{est } \text{card}\Omega_2 = 7^4 = 2401$$

$$\text{donc } p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega_2} = \frac{120}{343} \approx 0,349$$

l'évènement contraire de B noté $\bar{B}$ est : « au moins deux d'entre elles sont nées le même jour de la semaine ».

$$\text{Ainsi donc } p(\bar{B}) = 1 - p(B) \approx 0,650.$$

Comme $p(\bar{B}) > \frac{1}{2}$, alors on a fait un pari gagnant en

affirmant que deux d'entre elles sont nées le même jour de la semaine.

3° Soit l'évènement C : « une des n personnes, au moins est née un lundi »

Alors l'évènement contraire de C est $\bar{C}$: « aucune des n

personnes n'est née un lundi ». Ainsi $p(\bar{C}) = \left(\frac{6}{7}\right)^n$ donc

$$p(C) = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

L'affirmation « au moins l'une des personnes du groupe est née un lundi » est un pari gagnant si $p(C) \geq \frac{1}{2}$.

$$\text{Ainsi on a : } 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^n \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{6}{7}\right)^n \leq \frac{1}{2}$$

$$1 - \left(\frac{6}{7}\right)^n \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \ln \frac{6}{7} \leq \ln \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln 2}{\ln \frac{6}{7}} \text{ car } \ln \frac{6}{7} < 0$$

D'où $n \geq 4,5$. Comme n est un entier naturel, on a : $n \geq 5$.

Donc il faut au moins 5 personnes dans le groupe pour que cette affirmation soit un pari gagnant.

ACTIVITE 14 :

1°) Déterminons la probabilité pour que les 2 boules tirées soient noires

Soit p cette probabilité

$$p = \frac{5}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{8}$$

2°) Calculons la probabilité pour que l'événement A soit réalisé.

$$P(A) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{5} + \frac{5}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{19}{40}$$

3°) Soit p' cette probabilité

Déterminons d'abord la probabilité que les boules soient de couleur différente et que la boule noire provienne de

l'urne U_1 $p(NB) = \frac{5}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{4}$

$$p' = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{19}{40}} = \frac{1}{4} \times \frac{40}{19} \text{ soit } p' = \frac{4}{19}$$

ACTIVITE 15 :

1°) soit P_1 la probabilité

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve
card $\Omega = 36$

$$P_1 = \frac{7}{36}$$

2°) Soit P_2 la probabilité

$$P_2 = \overline{P_1} = 1 - P_1$$

$$P_2 = \frac{29}{36}$$

$$P_3 = \frac{11}{36}$$

ACTIVITE 19 :

1°) $P(R) = \frac{85}{100} = \frac{17}{20}$ et $P(D) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

2°) a- $P(R \cup D) = P(R) + P(D) + P(R \cap D)$

Or $P(R \cap D) = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$

Donc $P(R \cap D) = \frac{85}{100} + \frac{20}{100} - \frac{12}{100}$ soit

$$P(R \cap D) = \frac{93}{100}$$

b- $P(R - D) = P(R) - P(R \cap D)$

$$P(R - D) = \frac{85}{100} - \frac{12}{100} = \frac{73}{100}$$

c- $P(D - R) = \frac{20}{100} - \frac{12}{100} = \frac{8}{100}$

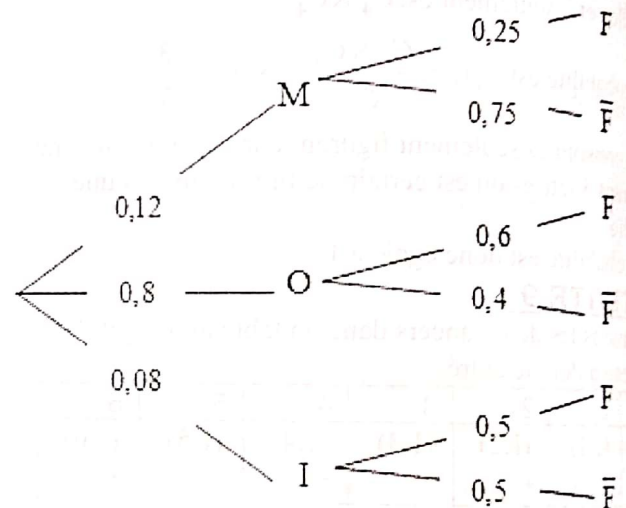
ACTIVITE 20 :

On a : $p(I) = 8\% = 0,08$; $p(O) = 80\% = 0,8$;

$p_1(F) = 50\% = 0,5$; $p_M(F) = 25\% = 0,25$;

$p_O(F) = 60\% = 0,6$

1°) Arbre de pondéré



2°) Calcul de probabilité

a- D'interroger un agent de maintenance.

$$p(M) = 1 - p(\overline{M})$$

$$= 1 - p(I \cup O)$$

$$p(M) = 1 - p(I) - p(O) \Rightarrow \underline{p(M) = 0,12}$$

b- D'interroger une femme agent de maintenance.

$$p(F \cap M) = p_M(F) \times p(\overline{M})$$

$$= 0,25 \times 0,12 \text{ donc } \underline{p(F \cap M) = 0,03}$$

c- D'interroger une femme

On a : $p(F) = p(F \cap M) + p(F \cap O) + p(F \cap I)$ or

$$p(F \cap O) = p_O(F) \times p(O) = 0,6 \times 0,8 = 0,48$$

$$p(F \cap I) = p_1(F) \times p(I) = 0,5 \times 0,08 = 0,04$$

Donc : $p(F) = 0,03 + 0,48 + 0,04$ soit $\underline{p(F) = 0,55}$

3°) A : « l'alarme se déclenche »

B : « une panne se produise »

a- Démontrons que $p(B \cap A) = 0,037$

On a : $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$ alors

$$p(B \cap A) = p(B) - p(B \cap \overline{A})$$

On a : $\begin{cases} p(B) = 0,04 \\ p(B \cap \bar{A}) = 0,003 \end{cases}$ donc $p(B \cap A) = 0,04 - 0,003$ d'où
 $p(B \cap A) = 0,037$.

b- Calcul de $p(A)$
 $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$
 $= 0,037 + 0,002 \Rightarrow \underline{p(A) = 0,039}$

c- Calcul de $p_A(B)$
 $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$
 $p_A(B) = \frac{0,037}{0,039}$ soit $\underline{p_A(B) = 0,9487}$.

ACTIVITE 22 :

Partie A :

1°) a- Dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par un virus.

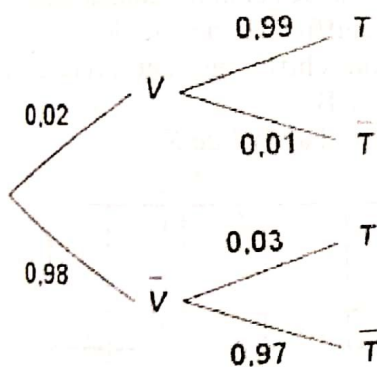
Donc $\underline{p(V) = 0,02}$.

La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99.

Donc $\underline{p_V(T) = 0,99}$

La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97.

Donc $\underline{p_{\bar{V}}(\bar{T}) = 0,97}$ d'où l'arbre pondéré :



b- Dédudons-en la probabilité de l'événement $V \cap T$.

On a : $p(V \cap T) = p(V) \times p_V(T)$ d'où $p(V \cap T) = 0,02 \times 0,99$
 soit $\underline{p(V \cap T) = 0,0198}$.

2°) Démontrons que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.

On cherche donc : $p(T)$

La forme des probabilités totales donne :

$$p(T) = p(V \cap T) + p(\bar{V} \cap T)$$

Soit $p(T) = 0,0198 + 0,98 \times 0,03 = 0,0492$

3°) a- Justifions par un calcul la phrase :
 « si le test est positif, il n'y a qu'environ 40% de
 "chances" que la personne soit contaminée »

On cherche à calculer $p_T(V)$

D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a :

$$p_T(V) = \frac{p(V \cap T)}{p(T)}$$

$$= \frac{0,0198}{0,0492} \approx 0,4 \text{ donc } \underline{p_T(V) \approx 0,4}$$

Il y a environ 40% de "chances" que la personne soit contaminée si le test est positif.

b- Déterminons la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

On cherche $p_{\bar{T}}(\bar{V})$

$$p_{\bar{T}}(\bar{V}) = \frac{p(\bar{V} \cap \bar{T})}{p(\bar{T})} = \frac{0,98 \times 0,97}{1 - 0,0492} \approx 0,999$$

Soit $\underline{p_{\bar{T}}(\bar{V}) \approx 0,999}$.

La probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif est donc d'environ 0,999.

Partie B :

1°) Justifions que X suit une loi binomiale dont nous donnerons les paramètres.

L'expérience consiste à choisir 10 personnes au hasard, les tirages sont indépendants, il n'y a que deux issues possibles pour chaque personne. Donc X suit une loi binomiale de paramètres : $n = 10$ et $p = 0,02$

2°) Calculons la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

On a : $p(X \geq 2) = 1 - p(X = 1) - p(X = 0)$

D'où $p(X \geq 2) = 1 - C_{10}^1 \times (0,02)^1 \times (0,98)^9 - (0,98)^{10}$

Soit $\underline{p(X \geq 2) \approx 0,016}$.

La probabilité qu'il ait au moins deux personnes contaminées parmi 10 est donc d'environ 0,016.

ACTIVITE 23 :

1°)

Total des pièces = 10

$$p(A) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$$

2°)

a- $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

$$p(X = 0) = \frac{C_4^0 \times C_6^3}{C_{10}^3}; p(X = 1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3};$$

$$p(X = 2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{C_{10}^3}; p(X = 3) = \frac{C_4^3 \times C_6^0}{C_{10}^3} \text{ et on trouve}$$

$$p(X = 0) = \frac{20}{120}, p(X = 1) = \frac{60}{120}; p(X = 2) = \frac{36}{120} \text{ et}$$

$$p(X = 3) = \frac{4}{120}$$

Correction des activités sur les probabilités

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$

b- $E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i p_i$

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i p_i = 0 \times \frac{20}{120} + 1 \times \frac{60}{120} + 2 \times \frac{36}{120} + 3 \times \frac{4}{120}$$

$$E(X) = \frac{6}{8}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^4 (x_i)^2 p_i - [E(X)]^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0,56} \approx 0,75$$

3°)

On a ici une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre

$$n=5 \text{ et } p=\frac{1}{30}$$

Soit Y cette variable aléatoire

$$p(Y=3) = C_5^3 \left(\frac{1}{30}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{30}\right)^2$$

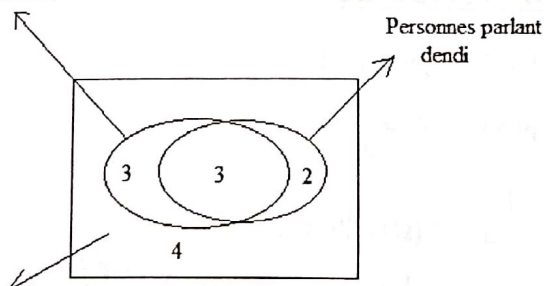
$$p(Y=3) \approx 3,46 \cdot 10^{-4}$$

ACTIVITE 24:

l'univers Ω est l'ensemble des parties de 3 éléments d'un ensemble de 12, d'où $\text{card}\Omega = C_{12}^3 = 220$. Comme on choisit au hasard 3 personnes, tous les groupes de 3 personnes sont équiprobables.

Personnes parlant

goun



Personnes parlant
uniquement fon

1°) a- Soit l'événement A : « les trois personnes choisies parlent au moins une autre que le fon ».

alors $\text{card}A = C_8^3 = 56$, donc $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{14}{55}$

b- soit l'événement B : « les trois personnes choisies ne parlent que le fon ».

alors $\text{card}B = C_4^3 = 4$ donc $p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{1}{55}$

2°) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes parlant dendi et goun.

L'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est :

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$$

a- La loi de probabilité de X.

$$p(X=0) = \frac{C_9^3}{\text{card}\Omega} = \frac{21}{55}; \quad p(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_9^2}{\text{card}\Omega} = \frac{27}{55}$$

$$p(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_9^1}{\text{card}\Omega} = \frac{27}{220}; \quad p(X=3) = \frac{C_3^3}{\text{card}\Omega} = \frac{1}{220}$$

Soit sous forme de tableau :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{21}{55}$	$\frac{27}{55}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$

b- Soit l'événement D : « il y a au moins deux personnes parlant dendi et goun »

$$p(D) = p(X \geq 2) = \frac{7}{55}$$

ACTIVITE 25 :

Soit Ω_1 L'univers des possibles de l'urne A $\text{card}\Omega_1 = 6$

Ω_2 L'univers des possibilités de l'urne B $\text{card}\Omega_2 = 4$

Soit Ω l'univers des possibilités de l'expérience.

$$\text{card}\Omega = \text{card}\Omega_1 \times \text{card}\Omega_2 = 24$$

Tiré un jeton de l'urne A et un autre de l'urne B les résultats possibles formeront des couples dont la valeur est le nombre ayant pour chiffre des dizaines le chiffre porté par le jeton A ; et pour chiffre des unités celui porté par le jeton extrait de l'urne B.

1°) Déterminons la loi de probabilité de X

Utilisons le tableau suivant :

Chiffre des unités \ Chiffre des dizaines	0	0	0	5
1	10	10	10	15
1	10	10	10	15
2	20	20	20	25
3	30	30	30	35
3	30	30	30	35
3	30	30	30	35

Les valeurs prises par X sont :

$$X(\Omega) = \{10; 15; 20; 30; 35\}$$

En comptant tous les éléments du tableau on retrouve 24 l'univers des possibles.

(10 se présente 6 fois dans le tableau sur 24)

$$p(X=10) = \frac{6}{24}; \quad p(X=15) = \frac{2}{24}; \quad p(X=20) = \frac{3}{24};$$

$$p(X=25) = \frac{1}{24}; \quad p(X=30) = \frac{9}{24}; \quad p(X=35) = \frac{3}{24}$$

La loi de probabilité est donnée par le tableau suivant

x_i	10	15	20	25	30	35
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{3}{24}$

2°) Représentons la fonction de répartition
Soit F cette fonction de répartition

Si $x < 10$, $F(x) = 0$

Si $x \in [10; 15[$, $F(x) = \frac{6}{24}$

Si $x \in [15; 20[$, $F(x) = \frac{8}{24}$

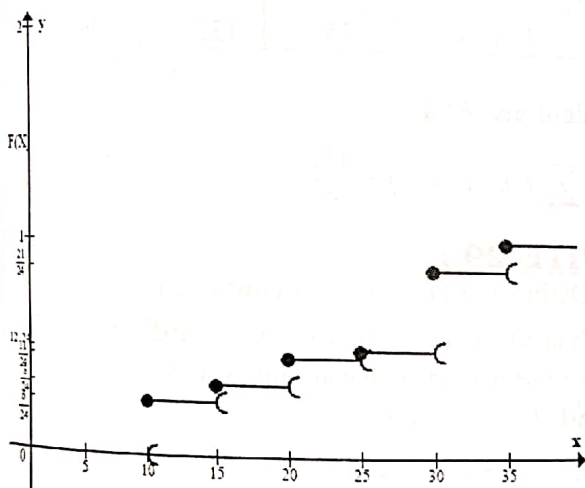
Si $x \in [20; 25[$, $F(x) = \frac{11}{24}$

Si $x \in [25; 30[$, $F(x) = \frac{12}{24}$

Si $x \in [30; 35[$, $F(x) = \frac{21}{24}$

Si $x \geq 35$, $F(x) = 1$

La représentation graphique de F est la suivante :



3°) Calculons l'espérance mathématique

$$E(X) = \sum p(X = x_i) \times x_i$$

$$= 10 \times \frac{6}{24} + 15 \times \frac{2}{24} + 20 \times \frac{3}{24} + 25 \times \frac{1}{24} + 30 \times \frac{9}{24} + 35 \times \frac{3}{24}$$

$$= \frac{550}{24} \text{ d'où } E(X) = \frac{275}{12}$$

ACTIVITE 26 :

	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

1°) calculons la probabilité de gagner.
Soit Ω_1 l'univers associé à cette épreuve
 $\text{card} \Omega_1 = 6 \times 6 = 36$

On gagne lorsqu'on fait un double c'est dire voir apparaitre sur la face supérieure des dés de chiffre identique.
Les face identiques forme la diagonale du carré dans le tableau.
Ce sont : (1;1) (2;2) , (3;3) (4;4) , (5;5) , (6;6)

Soit P cette probabilité, $P = \frac{6}{36}$ soit : $P = \frac{1}{6}$

2°) a- Déterminons les valeurs prise par X au cours des trois lancers.

(L'issus du jeu est de gagner 500f ou de perdre 100f)
Soit Ω_2 l'univers associé à cette épreuve.

1^{ère} possibilité : $(-100 - 100 - 100 = -300)$

2^{ème} possibilité : $(-100 - 100 + 500 = 300)$

3^{ème} possibilité : $(-100 + 500 + 500 = 900)$

4^{ème} possibilité : $(+500 + 500 + 500 = 1500)$

Alors l'ensemble des valeurs prise par X est :

$$X(\Omega_2) = \{300; 300; 900; 1500\}$$

b- Etablissons la loi de probabilité de X

La probabilité d'avoir 0 succès est :

$$P(X = -300) = C_3^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-0} = \frac{125}{216}$$

La probabilité d'avoir 1 succès est :

$$P(X = 300) = C_3^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$$

La probabilité d'avoir 2 succès est :

$$P(X = 900) = C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}$$

La probabilité d'avoir 3 succès est :

$$P(X = 1500) = C_3^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{3-3} = \frac{1}{216}$$

La loi de probabilité de X est résumé dans le tableau suivant :

x_i	-300	300	900	1500
$P(X = x_i)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

3°) a- Calculons q_n

$$q_n = C_n^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-0} \Rightarrow q_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

b- p_n la probabilité de faire au moins un double au cours des n lancers.

$$p_n = 1 - q_n \Rightarrow p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

c- Valeur minimale de n pour que $p_n \geq 0,8$

$$p_n \geq 0,8 \Rightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,8$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,8 - 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,2$$

$$\Rightarrow n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0,2)$$

$$\Rightarrow -0,19n \leq -1,61$$

$$\Rightarrow 0,19n \geq 1,61$$

$$\Rightarrow n \geq 8,47 \text{ d'où } \underline{n=9}$$

ACTIVITE 28 :

1°) Déterminons la probabilité pour que ce numéro apparaisse :

a- Aucune fois

Chaque roue est composée de 5 numéros. Soit Ω l'univers des possibles. $\text{card}\Omega = 5 \times 5 \times 5 = 125$

Soit p la probabilité pour qu'un numéro choisi apparaisse :

$$p = \frac{1}{5}$$

$\bar{p}$ la probabilité pour que le numéro n'apparaisse pas :

$$\bar{p} = 1 - p = \frac{4}{5}$$

Soit p_1 la probabilité pour que le numéro n'apparaisse aucune fois.

$$p_1 = \bar{p} \times \bar{p} \times \bar{p} = \frac{64}{125}$$

b- Une fois

Soit p_2 cette probabilité

$$p_2 = (p \times \bar{p} \times \bar{p}) + (\bar{p} \times p \times \bar{p}) + (\bar{p} \times \bar{p} \times p)$$

$$p_2 = \frac{48}{125}$$

c- Deux fois

Soit p_3 cette probabilité

$$p_3 = (p \times p \times \bar{p}) + (p \times \bar{p} \times p) + (\bar{p} \times p \times p)$$

$$p_3 = \frac{12}{125}$$

d- Trois fois

Soit p_4 cette probabilité

$$p_4 = p \times p \times p$$

$$p_4 = \frac{1}{125}$$

Autre méthode :

Comme les trois roues sont en marche, cette épreuve s'identifie à l'épreuve de Bernoulli on a :

$$p_1 = C_3^0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$$

$$p_2 = C_3^1 \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{125}$$

$$p_3 = C_3^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{12}{125}$$

$$p_4 = C_3^3 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^0 = \frac{1}{125}$$

2°) a- Les valeurs prises par X

$$X(\Omega) = \{-200; 200; 1000; 2000\}$$

b- Déterminons la loi de probabilité de X

$$P(X = -200) = p_1 = \frac{64}{125}$$

$$P(X = 200) = p_2 = \frac{48}{125}$$

$$P(X = 1000) = p_3 = \frac{12}{125}$$

$$P(X = 2000) = p_4 = \frac{1}{125}$$

On résume la loi de probabilité de X dans le tableau suivant :

x_i	-200	200	1000	2000
$P(X = x_i)$	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

c- Calculons $E(X)$

$$E(X) = \sum x_i p(X = x_i) = \frac{432}{5}$$

ACTIVITE 29 :

a- Définissons la loi de probabilité de X

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve $\text{card}\Omega = C_{12}^5 = 792$

Les valeurs prises par la variable aléatoire sont :

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_5^0 \times C_7^5}{792} = \frac{21}{792}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_5^1 \times C_7^4}{792} = \frac{175}{792}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_5^2 \times C_7^3}{792} = \frac{350}{792}$$

$$P(X = 3) = \frac{C_5^3 \times C_7^2}{792} = \frac{210}{792}$$

$$P(X = 4) = \frac{C_5^4 \times C_7^1}{792} = \frac{35}{792}$$

$$P(X = 5) = \frac{C_5^5 \times C_7^0}{792} = \frac{1}{792}$$

La loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{21}{792}$	$\frac{175}{792}$	$\frac{350}{792}$	$\frac{210}{792}$	$\frac{35}{792}$	$\frac{1}{792}$

b- Calculons l'espérance mathématique $E(X)$

$$E(X) = \sum x_i P(X = x_i) = 208$$

c- Au cours de trois représentation successives il n'y a pas de mâles se produise une fois seulement est ici une épreuve de Bernoulli ou $n = 3$ et $k = 1$

$$p = C_3^1 \times \left(\frac{21}{792}\right)^1 \times \left(1 - \frac{21}{792}\right)^{3-1} \text{ donc}$$

$$p = 3 \times \left(\frac{21}{792}\right) \times \left(\frac{771}{792}\right)^2$$

ACTIVITE 30 :

1°) Calculons la probabilité d'atteindre la zone 4
Comme la somme de toutes les probabilités des événements élémentaires est 1, on a :

$$p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) = 1 \Rightarrow$$

$$p(\{4\}) = 1 - [p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\})]$$

$$p(\{4\}) = \frac{1}{12}$$

2°) Etablissons la loi de probabilité de X
Utilisons un tableau donnant des couples de points possibles
 T_1 : tire 1 et T_2 : tire 2

$T_2 \backslash T_1$	1	2	3	4
1	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)
4	(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4 ; 3)	(4 ; 4)

Soit Ω l'univers des possible
card $\Omega = 16$

Le tableau ci-dessus, nous donne les valeurs prises par la variable aléatoire.

$$X(\Omega) = \{2; 4; 6; 8; 10; 11; 13; 15; 20\}$$

Si l'on note X_1 égal au numéro de la zone au premier tir et

X_2 égal au numéro de la zone au second tir.

$$* P(X = 2) = p(X_1 = 1) \times p(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$* P(X = 4) = p(X_1 = 1) \times p(X_2 = 2) + p(X_1 = 2) \times p(X_2 = 1)$$

$$P(X = 4) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$* P(X = 6) = p(X_1 = 1) \times p(X_2 = 3) + p(X_1 = 3) \times p(X_2 = 1) + p(X_1 = 2) \times p(X_2 = 2)$$

$$P(X = 6) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{48}$$

$$* P(X = 8) = p(X_1 = 1) \times p(X_2 = 3) + p(X_1 = 3) \times p(X_2 = 2)$$

$$P(X = 8) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}$$

$$* P(X = 10) = p(X_1 = 3) \times p(X_2 = 3)$$

$$P(X = 10) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$* P(X = 11) = p(X_1 = 1) \times p(X_2 = 4) + p(X_1 = 4) \times p(X_2 = 1)$$

$$P(X = 11) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{12} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}$$

$$* P(X = 13) = p(X_1 = 2) \times p(X_2 = 4) + p(X_1 = 4) \times p(X_2 = 2)$$

$$P(X = 13) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{12} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}$$

$$* P(X = 15) = p(X_1 = 3) \times p(X_2 = 4) + p(X_1 = 4) \times p(X_2 = 3)$$

$$P(X = 15) = \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{12} \times \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{36}$$

$$* P(X = 20) = p(X_1 = 4) \times p(X_2 = 4)$$

$$P(X = 20) = \left(\frac{1}{12} \times \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{144}$$

La loi de probabilité de X est :

x_i	2	4	6	8	10	11	13	15	16
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{48}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{144}$

b- Calculons $E(X)$ et $V(X)$

$$E(X) = \frac{35}{6} \text{ et } V(X) = \frac{971}{72}$$

3°) La probabilité pour un tireur qui effectue trois tirs successifs d'obtenir au moins quatre points.

Soit Y la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus.

$$p = P(Y \geq 4)$$

$$= 1 - P(Y < 4)$$

$$= 1 - [p(X_1 = 1) \times p(X_2 = 1) \times p(X_3 = 1)] \Rightarrow p = \frac{7}{8}$$

ACTIVITE 31 :

1°) Indiquons le tableau des gains

Dressons d'abord un tableau des couples qui ont pour première composante une réponse A et pour seconde composante une réponse B

	1	2	3	4	5
1	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(1 ; 5)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)

Soit card $\Omega = 3 \times 5 = 15$

Tableau de gain

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	6000	0
2	3000	3000	3000	9000	3000
3	0	0	0	6000	0

2°) Donnons la loi de probabilité de X
 $X(\Omega) = \{0; 3000; 6000; 9000\}$

$$P(X=0) = \frac{8}{15} ; P(X=3000) = \frac{4}{15} ; P(X=6000) = \frac{2}{15}$$

$$; P(X=9000) = \frac{1}{15}$$

Loi de probabilité de X

x_i	0	3000	6000	9000
$P(X=x_i)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

3°) Calculons l'espérance mathématique

On trouve : $E(X) = 2200$

4°) $E(X) > 1500$, donc il peut jouer si sa mise est de 1500.

ACTIVITE 32 :

1°) a- Calculons $p(E_1)$, $p(E_2)$ et $p(E_3)$

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve,

card $\Omega = C_{10}^2 = 45$

$$p(E_1) = \frac{C_3^2 + C_3^2 + C_2^2}{45} \Rightarrow p(E_1) = \frac{14}{45}$$

$$p(E_2) = 1 - p(E_1) = \frac{31}{45}$$

$$p(E_3) = \frac{C_4^2 + C_2^2}{45} \Rightarrow p(E_3) = \frac{7}{45}$$

b- Calculons la probabilité de l'événement E_3 sachant que l'événement E_1 est réalisé

$$p_{E_1}(E_3) = \frac{p(E_1 \cap E_3)}{p(E_1)}$$

$E_1 \cap E_3$ est l'événement "le nombre de tirages de deux boules de même couleur et même numéro et trouve

$$p(E_1 \cap E_3) = \frac{4}{45} \text{ d'où}$$

$$p_{E_1}(E_3) = \frac{2}{7}$$

c- Voyons si E_1 et E_3 sont indépendants

$$p(E_1) \times p(E_3) = \frac{14}{45} \times \frac{7}{45} \text{ et } p(E_1 \cap E_3) = \frac{4}{45}$$

On a : $p(E_1) \times p(E_3) \neq p(E_1 \cap E_3)$ donc E_1 et E_3 ne sont pas indépendants.

2°) a- Déterminons la loi de probabilité de X

$X(\Omega) = \{10; 15; 20\}$ est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X

$$p(X=10) = \frac{C_6^2}{45} = \frac{15}{45}$$

$$p(X=15) = \frac{C_6^1 \times C_4^1}{45} = \frac{24}{45}$$

$$p(X=20) = \frac{C_4^2}{45} = \frac{6}{45}$$

La distribution de la variable aléatoire de X est définie par le tableau suivant

x_i	10	15	20
$p(X=x_i)$	$\frac{15}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{6}{45}$

b- Calculons l'écart type de X

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{9300}{45} - (14)^2 = \frac{32}{3}$$

$$\sigma(X) = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

c- Définissons et représentons la fonction de répartition X

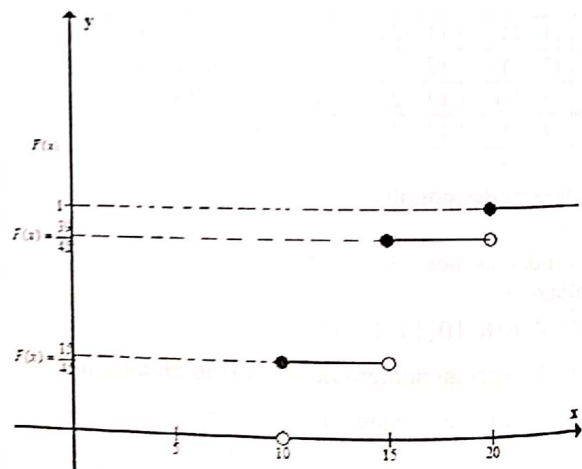
Soit F cette fonction

Si $x < 10$, $F(x) = 0$

Si $x \in [10; 15[$, $F(x) = \frac{15}{45}$

Si $x \in [15; 20[$, $F(x) = \frac{39}{45}$

Si $x \geq 20$, $F(x) = 1$



ACTIVITE 33 :

1°) a- Calculons la probabilité pour qu'exactement 2 des 5 sacs contrôlés contiennent des produits non déclarés. Soit Ω l'univers associé à cette épreuve :

card $\Omega = C_{60}^5 = 5461512$

Soit p la probabilité recherchée

$$p = \frac{C_{10}^2 \times C_{50}^3}{C_{60}^5} \approx 0,2$$

b- Démonstration

Calculons d'abord la probabilité pour que les sacs contrôlés contiennent des produits déclarés

$p_1 = \frac{C_{50}^5}{C_{60}^5} \approx 0,4$ alors la probabilité recherchée est $p' = 1 - p_1 \approx 0,6$ d'où le résultat ou calculer :

$$p' = \frac{C_{10}^1 \times C_{50}^4 + C_{10}^2 \times C_{50}^3 + C_{10}^3 \times C_{50}^2 + C_{10}^4 \times C_{50}^1 + C_{10}^5 \times C_{50}^0}{C_{60}^5}$$

2°) Déterminons la loi de probabilité de X
 $X(\Omega) = \{0; 10000; 20000; 30000\}$

Dans cette épreuve le succès est de saisir les sacs contenant des produits non déclarés.

$X = 0$ équivaut à zéro succès

$X = 10000$ équivaut à un succès

$X = 20000$ équivaut à 2 succès

$X = 30000$ équivaut à 3 succès c'est que le camionneur

a été pris à tous les postes de contrôle.

Le contrôle étant répété 3 fois c'est donc une épreuve de Bernoulli à probabilité de succès 0,6.

$$P(X=0) = C_3^0 (0,6)^0 (1-0,6)^3 = 0,064$$

$$P(X=10000) = C_3^1 (0,6)^1 (0,4)^2 = 0,288$$

$$P(X=20000) = C_3^2 (0,6)^2 (0,4)^1 = 0,432$$

$$P(X=30000) = C_3^3 (0,6)^3 (0,4)^0 = 0,216$$

La loi de probabilité de X

x_i	0	10000	20000	30000
$P(X=x_i)$	0,064	0,288	0,432	0,216

b- Démontrons que $E(X) = 18000$

$$E(X) = (0 \times 0,064) + (10000 \times 0,288) + (20000 \times 0,432) + (30000 \times 0,216)$$

$$E(X) = 18000$$

ACTIVITE 34 :

Le joueur tire successivement sur 4 boîtes, de dimensions de plus en plus réduites : $B_1; B_2; B_3; B_4$, dans cet ordre. On note

p_i la probabilité de toucher la boîte numérotée i , pour $i = 1; 2; 3; 4$.

Un joueur A se présente avec $p_1 = \frac{4}{5}, p_2 = \frac{3}{5}, p_3 = \frac{2}{5},$

$$p_4 = \frac{1}{5}.$$

1°) Les éventualités du jeu du joueur A sont :

w_1 : « A rate B_1 »

w_2 : « A atteint B_1 , mais rate B_2 »

w_3 : « A atteint B_1 , puis B_2 et mais rate B_3 »

w_4 : « A atteint B_1 , puis B_2 , puis B_3 mais rate B_4 »

w_5 : « A atteint B_1 , puis B_2 , puis B_3 et B_4 »

La probabilité de chacune de ces éventualités est :

$$p(w_1) = 1 - p_1 = \frac{1}{5}; p(w_2) = p_1 \times (1 - p_2) = \frac{8}{25}$$

$$p(w_3) = p_1 \times p_2 \times (1 - p_3) = \frac{36}{125};$$

$$p(w_4) = p_1 \times p_2 \times p_3 \times (1 - p_4) = \frac{96}{625};$$

$$p(w_5) = p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4 = \frac{24}{625}.$$

2°) X la variable aléatoire " le gain obtenu en fin de partie "

On sait que le joueur gagne 1000F, s'il tire sur une boîte et l'atteint, et perd 1000F s'il tire sur une boîte et la rate. D'où l'ensemble des valeurs prises par X est :

$$X(\Omega) = \{-1000; 0; 1000; 2000; 4000\}.$$

a- Loi de probabilité de X .

$$p(X = -1000) = p(w_1) = \frac{1}{5}; p(X = 0) = p(w_2) = \frac{8}{25};$$

$$p(X = 1000) = p(w_3) = \frac{36}{125}; p(X = 2000) = p(w_4) = \frac{96}{625};$$

$$p(X = 4000) = p(w_5) = \frac{24}{625}$$

Le tableau récapitulatif de la loi de X est :

x_i	-1000	0	1000	2000	4000
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{24}{625}$

Espérance mathématique de X .

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i p(X = x_i)$$

$$= \frac{1}{625} (-1000 \times 125 + 0 \times 200 + 1000 \times 180 + 2000 \times 96 + 4000 \times 24)$$

$$E(X) = \frac{343000}{625} = 548,8 \text{ soit } E(X) = 548,8$$

3°) calcul de probabilité pour que A verse au moins 500F
 Soit B l'événement : « le joueur A verse au moins 500F à un fonds de solidarité »

$$p(B) = p(X \geq 1000)$$

$$p(B) = 1 - p(X < 1000)$$

$$= 1 - p(X = 0) - p(X = -1000)$$

$$= 1 - \frac{8}{25} - \frac{1}{5} = \frac{12}{25} \text{ donc } p(B) = \frac{12}{25}.$$

ACTIVITE 35 :

1°) Prouvons que la probabilité d'obtenir deux boules blanches

$$\text{est } \frac{6}{n(n-1)}$$

Soit Ω , l'univers associé à cette épreuve,

$$\text{card } \Omega = C_n^2 = \frac{A_n^2}{2!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

soit P cette probabilité

$$P = \frac{C_3^2}{n(n-1)} = \frac{6}{n(n-1)}$$

2°) a- Déterminons la loi de probabilité X en fonction de n
 $X(\Omega) = \{-100; 0; 300\}$

$$P(X = -100) = \frac{6}{n(n-1)}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_3^1 \times C_{(n-3)}^1}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{6n-18}{n(n-1)}$$

$$P(X = 300) = \frac{C_{(n-3)}^2}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{n^2 - 7n + 12}{n(n-1)}$$

Loi de probabilité

x_i	-100	0	300
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{n(n-1)}$	$\frac{6n-18}{n(n-1)}$	$\frac{n^2 - 7n + 12}{n(n-1)}$

b- Calculons $E(X)$

on trouve : $E(X) = \frac{100(3n^2 - 21n + 30)}{n(n-1)}$

c- Déterminons le nombre de boule de l'urne si $E(X) = 0$

$$E(X) = 0 \Leftrightarrow 3n^2 - 21n + 30 = 0 \text{ avec } n \geq 5$$

$3n^2 - 21n + 30 = 0 \Leftrightarrow n_1 = 6$ ou $n_2 = 5$ comme $n \geq 5$
 donc le nombre de boules que doit contenir l'urne pour que
 $E(X) = 0$ est $6 + 3 = 9$ boules

3°) $n = 6$ donc $\text{card } \Omega = C_9^2 = 36$

Soit P' cette la probabilité

$$P' = 1 - \left[C_{10}^0 \left(\frac{2}{5} \right)^0 \left(\frac{3}{5} \right)^{10} \right] \approx 0,99$$

ACTIVITE 36 :

1°) a- $P = \frac{29}{330}$

b- $P' = \frac{239}{825}$

2°) a-

x_i	0	200	500	1000
$P(X = x_i)$	$\frac{40}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{18}{100}$	$\frac{12}{100}$

b- $E(X) = 270$

c- Pour que le jeu soit équitable, l'organisateur doit faire payer 270 f

ACTIVITE 37 :

1)

1°) La probabilité qu'un parakois ait un sang du groupe O est 0,46

2°) a- Soit P_1 la probabilité qu'un seul parmi les quatre ait un sang du groupe O.

$$P_1 = C_4^1 \cdot (0,46)^1 (1 - 0,46)^3 = 0,29$$

b- Soit P_2 la probabilité de trouver les quatre groupes sanguins chez ces donneurs

$$P_2 = p(A) \times p(B) \times p(AB) \times p(O) \times 4!$$

$$P_2 = 0,31 \times 0,18 \times 0,05 \times 0,46 \times 24 \text{ donc } \underline{P_2 = 0,03}$$

11)

$$\begin{aligned} 1^\circ) P &= p(O \cap Rh_-) \\ &= p_O(Rh_-) \times p(O) \\ &= 0,09 \times 0,46 = 0,0414 \end{aligned}$$

2°) a- X est une variable aléatoire qui suit la loi binomial de paramètres n et $p = 0,0414$

$$p(X = k) = C_n^k (0,0414)^k (0,9586)^{n-k} \text{ avec } k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$$

b- $E(X) = n \times p = n \times 0,0414$

c- $n = 5000$; $E(X) = 5000 \times 0,0414 = 207$

Donc le nombre moyen des donneurs universels parmi 5000 est 207.

ACTIVITE 38 :

1)

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve. $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$
 on lance le dé parfait 3 fois de suite donc on ait en présence

d'une loi Binomiale de paramètre $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$

$$p(X = 0) = C_3^0 \left(\frac{1}{6} \right)^0 \left(1 - \frac{1}{6} \right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$p(X = 1) = C_3^1 \left(\frac{1}{6} \right)^1 \left(\frac{5}{6} \right)^2 = \frac{75}{216}$$

$$p(X = 2) = C_3^2 \left(\frac{1}{6} \right)^2 \left(\frac{5}{6} \right)^1 = \frac{15}{216}$$

$$p(X = 3) = C_3^3 \left(\frac{1}{6} \right)^3 = \frac{1}{216} \text{ alors la loi de probabilité de } X$$

est résumé dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

2°) a- $p(B) = \frac{1}{2} C_3^2 \left(\frac{1}{3} \right)^2 \left(\frac{2}{3} \right)^1 = \frac{1}{9}$

b- $p(C) = \frac{1}{2} C_3^2 \left(\frac{1}{6} \right)^2 \left(\frac{5}{6} \right)^1 = \frac{5}{144}$

c- $p(A) = p(B) + p(C) = \frac{7}{48}$

ACTIVITE 39 :

1°) tirage simultané de deux jetons

a- $p(A) = \frac{C_2^2 + C_1^2}{C_3^2} = \frac{2}{5}$ et $p(B) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$

b- Loi de probabilité de X

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve, $\text{card}\Omega = C_5^2 = 10$
et $X(\Omega) = \{-2; 0; 2\}$

x_i	-2	0	2
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$E(X) = \frac{2}{5}$$

2° Tirage successif et sans remise de 2 jetons

Soit $\vec{n}(1; a; 0)$ un vecteur normal à (P) et $\vec{n}'(1; b; 0)$ un vecteur normal à (P')

$$(P) \parallel (P') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \text{tirer deux boules de}$$

$$\text{même numéro alors } p(C) = \frac{A_2^2 + A_3^2}{A_5^2} = \frac{2}{5}$$

$$(P) \perp (P') \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}' \Leftrightarrow ab = -1 \Leftrightarrow \text{tirer deux jetons de numéros différents}$$

$$\Rightarrow p(D) = \frac{A_3^1 \times A_2^1 \times 2}{A_5^2} = \frac{3}{5}$$

ACTIVITE 45 :

On note les événements suivants :

A : « un électeur a choisi Ado »

B : « un électeur a choisi Bala »

K : « un électeur a choisi Kadri »

Z : « un habitant de ZATA a voté »

On donne les probabilités suivantes :

$$p(A/Z) = \frac{3}{8} ; p(B/Z) = \frac{1}{2} ; p(K/Z) = \frac{1}{8}.$$

$$p(Z) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

1° La probabilité pour que 5 habitants de ZATA aient

$$\text{voté est égale à } p_1 = \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \frac{243}{3125} = 0,077$$

2° La probabilité pour qu'un habitant de ZATA choisisse Bala est égale à $p_2 = p(B \cap Z) = p(B/Z) \times p(Z)$

$$\text{donc } p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \text{ d'où } p_2 = \frac{3}{10} = 0,3$$

3° Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voix obtenues par Bala parmi les 5 habitants. La loi de probabilité de X est une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0,30$

$$\forall k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}, p(X=k) = C_5^k (0,3)^k (0,7)^{5-k}.$$

k	0	1	2	3	4	5
$p(X=k)$	0,1680	0,3602	0,3087	0,1323	0,0284	0,0024

Comme X suit une loi binomiale, alors $E(X) = np = 5 \times 0,3 = 1,5$ et

$$V(X) = n(1-p) = 5 \times 0,3 \times 0,7 = 1,05. \text{ Donc } E(X) = 1,5 \text{ et } V(X) = 1,05$$

4° Calculons la probabilité pour qu'un habitant de ZATA choisisse Kadri.

Soit p_3 cette probabilité on a :

$$p_3 = p(Z \cap K) = p(K/Z) \times p(Z) = \frac{1}{8} \times \frac{3}{5} \text{ donc}$$

$$p_3 = \frac{3}{40} = 0,075.$$

5° On note p_n la probabilité pour que parmi n habitants votant, aucun ne choisisse Kadri.

$$P_n = \left(\frac{37}{40}\right)^n$$

6° La probabilité pour que Kadri obtienne au moins une

$$\text{voix est } P'_n = 1 - P_n \text{ donc } P'_n = 1 - \left(\frac{37}{40}\right)^n$$

Le nombre minimum d'habitants qui doivent voter pour que Kadri obtienne au moins une voix avec une

$$\text{probabilité } \geq \frac{15}{16} \text{ vérifie : } P'_n \geq \frac{15}{16}.$$

$$P'_n \geq \frac{15}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{37}{40}\right)^n \leq \frac{1}{16} \text{ donc } n \geq \frac{\ln 16}{\ln 40 - \ln 37} \text{ ou}$$

$n \geq 35,56$. Le nombre minimum d'habitants est de 36.

ACTIVITE 46:

1°)

Soit Ω l'univers de cette preuve

$$\text{on a : } \text{card}\Omega = A_{10}^2 = 90 ; \text{card}A = A_4^2 = 12$$

$$\text{donc } p(A) = \frac{2}{15}$$

En appelant (x; y) le couple des entiers naturels tirés :

$$B = \{(x; y) \text{ tels que : } x > 2y, x, y \in \{1; 2; \dots; 10\}\}$$

on a par comptage : $\text{card}B = 20$

$$\text{Donc } p(B) = \frac{2}{9}$$

NB : On peut aussi retrouver $\text{card}B$ en utilisant le quadrillage et la droite d'équation $x = 2y$

2°)

Appelons C: événement «B est réalisé 2 fois exactement ».

En appelant D l'événement « B est réalisé au moins une fois »

$$p(C) = C_2^2 \left(\frac{2}{9}\right)^2 \left(\frac{7}{9}\right)^5 \text{ donc } p(C) \approx 0,295$$

$\bar{D}$ devient l'événement « B n'est aucune fois aucune fois réalisé »

$$p(\bar{D}) = C_7^0 \left(\frac{2}{9}\right)^0 \left(\frac{7}{9}\right)^7 \text{ donc } p(D) = 1 - p(\bar{D}) \text{ et}$$

on trouve $p(D) \approx 0,827$

ACTIVITE 48 :

La probabilité d'avoir une fille étant le double de celle d'avoir

un garçon, alors on a : $p(F) = \frac{2}{3}$ et $p(G) = \frac{1}{3}$

1°) Cas particulier $n = 4$

D'où $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$

a- Loi de probabilité de X.

L'ensemble des valeurs prises par X, noté

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

Les naissances étant indépendantes des uns des autres, la loi le probabilité de X est une loi binomiale de paramètre $n = 4$

$$p = p(F) = \frac{2}{3} \quad \forall k \in \{0; 1; 2; 3; 4\},$$

$$p(X = k) = C_4^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{4-k}$$

Donnons cette loi dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4
$p(X = k)$	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

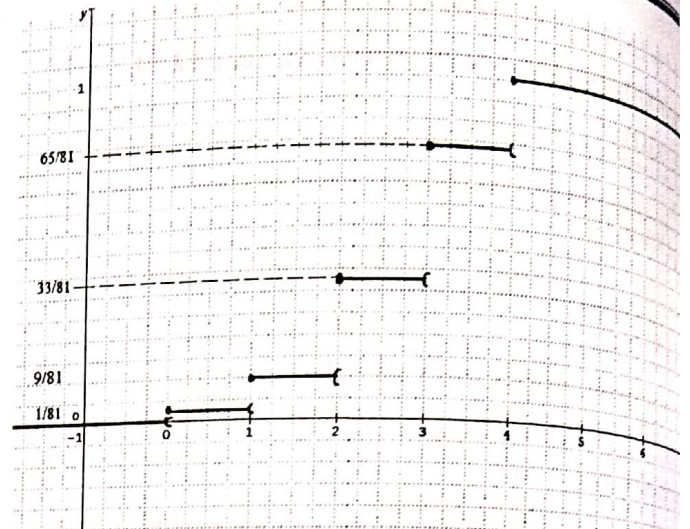
b- Fonction de répartition

La fonction de répartition F de X est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = p(X \leq x)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{81}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{9}{81}, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{33}{81}, & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{65}{81}, & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1, & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Tracé de F.



c- Calculons $E(X)$ et $V(X)$

Comme X suit une loi binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = \frac{2}{3}$,

alors on a : $E(X) = np$ soit $E(X) = \frac{8}{3}$ et $V(X) = np(1-p)$

$$\text{soit } V(X) = \frac{8}{9}$$

2°) Soit p_n la probabilité de ne pas avoir de garçons. Alors

$$p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$p_n < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow n \ln \frac{2}{3} < \ln \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{-2 \ln 10}{\ln \frac{2}{3}} \text{ car } \ln \frac{2}{3} < 0$$

D'où $n > 11,5$, comme n est un entier naturel, on a : $n \geq 12$.

ACTIVITE 49 :

A/ L'univers Ω est l'ensemble des arrangements des 18 chevaux trois à trois. D'où $\text{card} \Omega = A_{18}^3 = 4896$. Il s'agit d'une équiprobabilité.

a- Soit A : « Amadou gagne le tiercé dans l'ordre »

$$\text{card} A = 1 \text{ donc } p(A) = \frac{1}{4896}$$

b- Soit l'événement B : « Amadou gagne le tiercé dans le désordre »

$$\text{card} B = 3! - 1 = 5 \text{ donc } p(B) = \frac{5}{4896}$$

B/ Soit les événements suivants :

O : « gagner le tiercé dans l'ordre »

H : « le parieur est un homme »

F : « le parieur est une femme »

Le nombre des hommes étant le double de celui des femmes,

on déduit que : $p(F) = \frac{1}{3}$ et $p(H) = \frac{2}{3}$.

On sait que 6% des femmes gagnent le tiercé dans l'ordre et 12% des hommes le gagnent dans le désordre. Ce qui se traduit par :

$$p_F(O) = 0,06 \text{ et } p_H(O) = 0,12.$$

1°) a- Soit l'événement C : « un membre du club gagne le tiercé dans l'ordre »

$$p(C) = p(O \cap F) + p(O \cap H)$$

$$= p_F(O) \times p(F) + p_H(O) \times p(H) \text{ et on trouve :}$$

$$p(C) = \frac{1}{10}$$

b- Soit l'événement D « un gagnant dans l'ordre de ce club soit un homme »

$$p(D) = p_C(H) = \frac{p(H \cap C)}{p(C)} = \frac{p(O \cap H)}{p(C)} = \frac{p_H(O) \times p(H)}{p(C)}$$

$$D'où p(D) = \frac{0,12 \times \frac{2}{3}}{0,1} = 0,8 \text{ c'est-à-dire } p(D) = \frac{4}{5}.$$

2°) Soit l'événement E : « il y a exactement deux hommes parmi ces 6 parieurs »

$$p(E) = C_6^2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^4 \text{ donc } p(E) = 0,01536.$$

ACTIVITE 50 :

On considère un dé tétraédrique pipé, dont les faces sont numérotés de 1 à 4 telles que : $p(i) = c i^2$.

1°) Calcul de c.

$$\sum_{i=1}^4 p_i = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 30c \text{ or } \sum_{i=1}^4 p_i = 1$$

$$d'où c = \frac{1}{30}.$$

$$\text{Ainsi donc } p(1) = \frac{1}{30} ; p(2) = \frac{2}{15} ; p(3) = \frac{3}{10} \text{ et}$$

$$p(4) = \frac{8}{15}.$$

2°) Loi de X-espérance et variance de X.

X la variable aléatoire « somme des numéros visibles »

L'ensemble des valeurs prises par X, égal à

$$X(\Omega) = \{6 ; 7 ; 8 ; 9\}.$$

Loi de probabilité de X.

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	6	7	8	9
$p(X=x_i)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{30}$

Calcul de $E(X)$.

L'espérance mathématique de X, est définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i p(X=x_i) = \frac{96 + 63 + 32 + 9}{30} = \frac{20}{3}. \text{ Donc}$$

$$E(X) = \frac{20}{3}.$$

Calcul de $V(X)$.

La variance de X est définie par : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$,

$$\text{or } E(X^2) = \sum_{i=1}^4 x_i^2 p(X=x_i) = \frac{576 + 441 + 256 + 81}{30} = \frac{677}{15}$$

$$D'où V(X) = \frac{677}{15} - \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{31}{45} \text{ donc } V(X) = \frac{31}{45}$$

3°) Soit A l'événement « X est paire au moins deux fois au cours de 5 lancers. Or la probabilité p pour que X soit paire en

$$\text{un seul lancer est } p = p(X=6) + p(X=8) = \frac{2}{3}.$$

D'où :

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \left[C_5^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 \right] = 1 - \frac{11}{243} = \frac{232}{243}$$

ACTIVITE 51:

1°) Calcul des aires des parties A, B et C.

Notons S_A, S_B, S_C , les aires respectives des parties A,

B, C. On a : $S_A = \pi R^2$; $S_B = 3\pi R^2$ et $S_C = 5\pi R^2$

2°) a- Probabilités d'atteindre les parties B et C en fonction de p.

Soit p_B et p_C les probabilités d'atteindre les parties B et C respectivement. Comme les probabilités p, p_B et p_C sont proportionnelles à S_A, S_B et S_C respectivement ?

$$\text{alors : } \frac{p}{S_A} = \frac{p_B}{S_B} = \frac{p_C}{S_C} \text{ donc } p_B = 3p \text{ et } p_C = 5p.$$

b- Valeur de p.

la probabilité d'atteindre une partie de la cible étant 0,75,

$$n \text{ a alors } p + p_B + p_C = 0,75 \text{ d'où } p = \frac{1}{12}. \text{ Ainsi } p_B = \frac{1}{4}$$

$$\text{et } p_C = \frac{5}{12} \text{ et la probabilité pour qu'un joueur lançant}$$

une fléchette anque la cible est $q = \frac{1}{4}$.

3°) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus par un joueur lançant deux fléchettes.

L'ensemble des valeurs prises par X, noté

$$X(\Omega) = \{0 ; 25 ; 50 ; 75 ; 100 ; 125 ; 150 ; 200\}$$

a- La loi de probabilité de X.

$$p(X=0) = q^2 = \frac{1}{16} ; p(X=25) = 2qp_C = \frac{5}{24} ;$$

$$p(X=50) = p_C^2 + 2qp_B = \frac{43}{144} ; p(X=75) = 2p_B p_C = \frac{5}{24}.$$

$$p(X=100) = p_B^2 + 2qp = \frac{5}{48}; p(X=125) = 2p \times p_C = \frac{5}{72}$$

$$p(X=150) = 2p \times p_B = \frac{1}{24}; p(X=200) = p^2 = \frac{1}{144}$$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	25	50	75	100	125	150	200
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{43}{144}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{144}$

b- Espérance mathématique de X .

$$E(X) = \sum_{i=1}^8 x_i p(X=x_i) = \frac{25(30+86+90+60+50+36+8)}{144} \text{ donc } E(X) = 62,5$$

ACTIVITE 52:

1°) a- Prouvons que $c = \frac{1}{18}$

On a : $|z_0|^2 = 4$, $|z_1|^2 = 8$, $|z_2|^2 = 2$ et $|z_3|^2 = 4$. Or les quatre réels p_k définissent sur l'univers des quatre faces

du dé une probabilité si on a : $\sum_{k=0}^3 p_k = 1$

$$\sum_{k=0}^3 p_k = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^3 c|z_k|^2 = 1 \Leftrightarrow 18c = 1 \text{ d'où le résultat.}$$

b- Déterminons p_k pour $k \in \{0; 1; 2; 3\}$.

$$p_0 = \frac{2}{9}; p_1 = \frac{4}{9}; p_2 = \frac{1}{9} \text{ et } p_3 = \frac{2}{9}.$$

2°) a- Déterminons la valeurs prises par X . Soit Ω l'univers associé à cette épreuve.

$$\text{Et comme } z_0 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}; z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}; z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} \text{ et } z_3 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\text{On a : } X(\Omega) = \left\{ \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$$

b- Donnons la loi de probabilité de X .

x_i	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

c- Calculons l'espérance mathématique de X .

$$\text{on a : } E(X) = \frac{2 \times 2\pi + 2 \times \pi + 4 \times 5\pi + 1 \times 7\pi}{9} = \frac{11\pi}{9}$$

3°) a- Vérifions que z_0 est une racine de $f(z)$

$$\text{On trouve : } f(z_0) = f(-2i) = 0$$

b- Déduisons deux nombres complexes α et β tels

$$\text{que : } f(z) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

comme z_0 est une racine de $f(z)$, le polynôme est factorisable par $z - z_0$ et on trouve par exemple par

$$\text{division euclidienne : } f(z) = (z+2i)[z^2 + (1+3i)z - 4]$$

d'où $\alpha = 1+3i$ et $\beta = -4$.

c- Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$

$$\text{on trouve } z+2i=0 \text{ (1) ou } z^2 + (1+3i)z - 4=0 \text{ (2)}$$

(1) donne $z = -2i$ et pour résoudre (2) on calcule le discriminant $\Delta = 8+6i$ dont il faut déterminer une racine carrée $\delta = a+ib$ en résolvant l'équation : $\delta^2 = \Delta$ qui se ramène au système :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = 6 \end{cases} \text{ on trouve } \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 1 \\ ab = 3 \end{cases} \text{ on pourra prendre}$$

$\delta = 3+i$ et obtenir les deux solutions de (2) comme :

$$\frac{-1-3i+3+i}{2} = 1-i \text{ et } \frac{-1-3i-3-i}{2} = -2-2i$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation : $f(z)=0$ est : $\{-2i; 1-i; -2-2i\}$.

ACTIVITE 53 :

1°) On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes. L'ensemble des éventualités est l'ensemble des cartes à 3 éléments de l'ensemble des cartes.

$$\text{Donc } \text{card}\Omega = C_{32}^3 = 4960$$

A: « Les trois cartes sont des as »

$$\text{card}A = C_4^3 = 4$$

$$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{1}{1240}$$

B: « Il y a au moins 2 couleurs parmi ces 3 cartes ».

On a : $\bar{B}$ est l'événement «les 3 cartes sont de même couleur»

$$\text{card}\bar{B} = 4 \times C_8^3 = 224$$

$$p(\bar{B}) = \frac{\text{card}\bar{B}}{\text{card}\Omega} = \frac{7}{155}$$

$$p(B) = 1 - p(\bar{B}) = \frac{148}{155}$$

C: « Il y a pas d'as parmi les 3 cartes ».

$$\text{card}C = C_{28}^3 = 3276$$

$$p(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = 0,66$$

2°) On tire successivement avec remise 3 cartes du jeu
a- Soit Ω l'ensemble des éventualités.

On a $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

b- La loi de la probabilité de X.

On a: $\text{card}\Omega = 32 \times 32 \times 32$

$$p(X=0) = \frac{\text{card}(X=0)}{\text{card}\Omega} = \frac{24 \times 24 \times 24}{32 \times 32 \times 32} = \frac{27}{64}$$

$$p(X=1) = \frac{\text{card}(X=1)}{\text{card}\Omega} = \frac{3 \times 8 \times 24 \times 24}{32 \times 32 \times 32} = \frac{27}{64}$$

$$p(X=2) = \frac{\text{card}(X=2)}{\text{card}\Omega} = \frac{3 \times 8 \times 8 \times 24}{32 \times 32 \times 32} = \frac{9}{64}$$

$$p(X=3) = \frac{\text{card}(X=3)}{\text{card}\Omega} = \frac{8 \times 8 \times 8}{32 \times 32 \times 32} = \frac{1}{64}$$

c- Espérance mathématique de X :

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = p(x=1) + 2p(x=2) + 3p(x=3)$$

$$\frac{27}{64} + 2 \times \frac{9}{64} + 3 \times \frac{1}{64} = \frac{3}{4}$$

Donc $E(X) = 0,75$

ACTIVITE 54 :

I- Rappelons la probabilité des événements :

$$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} ; p(A/B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}B}$$

$p(A) = p(A \cap \bar{B}) + p(A \cap B)$ car $A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$ et $(A \cap \bar{B})$ et $(A \cap B)$ sont deux événements incompatibles.

II-

1°) prouvons les égalités :

1^{er} jour la ville est délestée alors $p(D_1) = 1$

Si la ville est délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{2}{9}$ alors on a :

$$p(D_{n+1}/D_n) = \frac{2}{9}$$

Si elle n'est pas délestée un jour, la probabilité qu'elle

soit délestée le jour suivant est $p(D_{n+1}/\bar{D}_n) = \frac{5}{6}$.

2°) Exprimons p_{n+1} en fonction de $p(D_{n+1} \cap D_n)$ et

$$p(D_{n+1} \cap \bar{D}_n)$$

$p_{n+1} = p(D_{n+1})$ et on a :

$$p(D_{n+1}) = p(D_{n+1} \cap D_n) + p(D_{n+1} \cap \bar{D}_n) \text{ or } p_{n+1} = p(D_{n+1})$$

donc $p_{n+1} = p(D_{n+1} \cap D_n) + p(D_{n+1} \cap \bar{D}_n)$

3°) Déduisons que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{n+1} = -\frac{11}{18} p_n + \frac{5}{6}$$

$$p_{n+1} = p(D_{n+1} \cap D_n) + p(D_{n+1} \cap \bar{D}_n)$$

$$= p(D_n) \times p(D_{n+1}/D_n) + p(\bar{D}_n) \times p(D_{n+1}/\bar{D}_n)$$

$$= \frac{2}{9} p_n + (1-p_n) \times \frac{5}{6} \text{ et on obtient :}$$

$$p_{n+1} = -\frac{11}{18} p_n + \frac{5}{6}$$

$$4^\circ) U_n = 6p_n - \frac{90}{29}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

a- Démontrons que (U_n) est une suite géométrique.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 6\left(p_n - \frac{15}{29}\right)$ donc

$$U_{n+1} = 6\left(p_{n+1} - \frac{15}{29}\right)$$

En remplaçant p_{n+1} par son expression on a :

$$U_{n+1} = 6\left(-\frac{11}{18} p_n + \frac{5}{6} - \frac{15}{29}\right)$$

$$= 6\left(-\frac{11}{18} p_n + \frac{55}{6 \times 29}\right)$$

$$= 6 \times \frac{-11}{18} \left(p_n - \frac{55}{11} \times \frac{18}{6 \times 29}\right)$$

$$= -\frac{11}{18} \left(6p_n - \frac{90}{29}\right) = -\frac{11}{18} U_n \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ alors la}$$

suite (U_n) est géométrique de raison $q = -\frac{11}{18}$ et de

premier terme $U_1 = 6p_1 - \frac{90}{29} = 6 - \frac{90}{29}$ soit $U_1 = \frac{84}{29}$

b- Exprimons U_n puis p_n en fonction de n

$$U_n = U_1 \times q^{n-1} \text{ d'où } U_n = \frac{84}{29} \times \left(-\frac{11}{18}\right)^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$p_n = \frac{1}{6} \left(U_n + \frac{90}{29}\right) \text{ alors } p_n = \frac{1}{6} \left[\frac{84}{29} \times \left(-\frac{11}{18}\right)^{n-1} + \frac{90}{29}\right] \text{ avec}$$

$n \in \mathbb{N}^*$

c- Soit q_{20} la probabilité que la ville soit sans délestage le 20^{ème} jour.

$q_{20} = 1 - p_{20}$ donc $q_{20} \approx 6,483 \times 10^{-3}$ près par défaut.

ACTIVITE 55 :

Correction :

1°) a- Démontrons que les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et

p_6 vérifient le système :

• D'après l'énoncé on a : $p_2 = 4p_1$ (a)

• On a : p_1, p_3, p_5 forment dans cet ordre, les trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison

$\frac{1}{2}$ donc :

$$p_3 = \frac{1}{2} p_1 \text{ et } p_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 p_1 = \frac{1}{4} p_1 \text{ (b)}$$

- On a : p_2, p_4, p_6 forment dans cet ordre les trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ donc

$$p_4 = \frac{1}{4}p_2 \text{ et } p_6 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 p_2 \text{ puisque } p_2 = 4p_1$$

$$\text{donc } p_4 = p_1 \text{ et } p_6 = \frac{1}{4}p_1 \text{ (c)}$$

- Les faces numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6 du dé D_1 forment l'univers donc :

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 \text{ (d)}$$

De (a), (b), (c) et (d) les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 vérifient le système :

$$p_2 = 4p_1 ; p_4 = p_1 ; p_3 = \frac{1}{2}p_1 ; p_5 = p_6 = \frac{1}{4}p_1 \text{ et}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1.$$

b- Calculons p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 .

$$\text{On a : } \begin{cases} p_2 = 4p_1 \\ p_4 = p_1 \\ p_3 = \frac{1}{2}p_1 \end{cases}$$

$$p_5 = p_6 = \frac{1}{4}p_1$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

$$\Rightarrow p_1 + 4p_1 + \frac{1}{2}p_1 + p_1 + \frac{1}{4}p_1 + \frac{1}{4}p_1 = 1$$

$$\Rightarrow 7p_1 = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{7}$$

$$\text{Donc : } p_1 = \frac{1}{7} ; p_2 = \frac{4}{7} ; p_3 = \frac{1}{14} ; p_4 = \frac{1}{7} ; p_5 = \frac{1}{28} \text{ et}$$

$$p_6 = \frac{1}{28}.$$

2°) Donnons l'univers image de X.

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve.

Tableau des valeurs est :

$D_2 \backslash D_1$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

On a donc :

$$X(\Omega) = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}$$

b- Calculons les probabilités des événements :
Désignons par $p'_1, p'_2, p'_3, p'_4, p'_5$ et p'_6 les probabilités d'apparitions des faces numérotées respectives 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6 du dé D_2 .

$$\text{On a : } p'_1 = p'_2 = p'_3 = p'_4 = p'_5 = p'_6 = \frac{1}{6}.$$

$$p\{(X=2)\} = p_1 \times p'_1 = \frac{1}{42}$$

$$p\{(X=3)\} = p_1 \times p'_2 + p_2 \times p'_1 = \frac{5}{42}$$

$$p\{(X=4)\} = p_3 \times p'_1 + p_2 \times p'_2 + p_1 \times p'_3 = \frac{11}{84}$$

$$p\{(X=5)\} = p_4 \times p'_1 + p_3 \times p'_2 + p_2 \times p'_3 + p_1 \times p'_4 = \frac{13}{84}$$

ACTIVITE 56 :

1°) a- Déterminons la loi de probabilité de X.

Tableau des valeurs

$a \backslash b$	2	2	4	4
2	-4	-4	-12	-12
2	-4	-4	-12	-12
3	1	1	-7	-7
3	1	1	-7	-7
3	1	1	-7	-7
3	1	1	-7	-7

Les valeurs de X sont : -12 ; -7 ; -4 et 1.

Loi de probabilité de X est :

x_i	-12	-7	-4	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

b- Dédouons-en la probabilité pour que (E) admette pour solution générale une fonction non sinusoïdale.

(E) admet une solution générale non sinusoïdale si et seulement si $a^2 - 4b \geq 0$ soit $X \geq 0$ d'où la probabilité

$$\text{demandée est : } P(X=1) = \frac{1}{3}.$$

2°) Déterminons le plus petit entier n tel que :

$$P(Y \geq 1) \geq 0,999$$

$$\text{On : } P(Y \geq 1) \geq 0,999$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^n \text{ d'où}$$

$$P(Y \geq 1) \geq 0,999 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geq 0,999$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0,001$$

$$\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq \ln(0,001)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$n \geq 17,036 \text{ donc } n = 18.$$

3°) a- Vérifions que $f(x) = e^{-x} \ln x$ est solution de (E').
 $f(x) = e^{-x} \ln x$. On a alors :

$$f'(x) = -e^{-x} \ln x + \frac{e^{-x}}{x} \text{ et } f''(x) = e^{-x} \ln x - \frac{1}{x^2} e^{-x} - \frac{e^{-x}}{x}$$

On obtient alors :

$$f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{x^2} e^{-x}$$

$$f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = \left(\frac{x-1}{x^2} \right) e^{-x} \text{ d'où } f \text{ est solution de}$$

(E').

b- Résolvons $(E_{(3;2)})$.

L'équation caractéristique associée à $(E_{(3;2)})$ est :

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

Le discriminant est $\Delta = 1$ et les solutions sont :

$$r_1 = \frac{-3-1}{2} = -2 \text{ et } r_2 = \frac{-3+1}{2} = -1.$$

Les solutions de $(E_{(3;2)})$ sont les fonctions y_{AB} de la forme

$$y_{AB} = Ae^{-x} + Be^{-2x} \text{ avec } (A; B) \in \mathbb{R}^2.$$

c- Prouvons que g est solution de (E') si et seulement si

$g - f$ est solution de $(E_{(3;2)})$.

g est solution de (E') équivaut à

$$g''(x) + 3g'(x) + 2g(x) = \frac{x-1}{x^2} e^{-x} \text{ ou à}$$

$$g''(x) + 3g'(x) + 2g(x) = f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) \text{ ou à}$$

$$(g-f)''(x) + 3(g-f)' + 2(g-f) = 0 \text{ ou à } g-f \text{ est solution de } (E_{(3;2)}).$$

d- Dédudons-en les solutions de (E')

D'après 3b- et 3c- g est solutions de (E') équivaut à :

$$(g-f)(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x} \text{ où } (A; B) \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit donc que les solutions de (E') sont les fonctions

$$g \text{ définies sur } \mathbb{R}_+^* \text{ par : } g(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x} + e^{-x} \ln x \text{ où } (A; B) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Correction des activités sur limites et continuités

ACTIVITE 1 :

Trouvons l'ensemble de définition des fonctions

$$* D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / |x^2 + x + 1| + 2 \neq 0 \right\}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$* D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} / |2x+1| + |-x+1| \neq 0 \right\}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$* D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} / |x+1| - 1 \geq 0 \right\}$$

$$D_h =]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$$

$$* D_i = \left\{ x \in \mathbb{R} / (-x-3)^2 + 2 \geq 0 \right\}$$

$$D_i = \mathbb{R}$$

$$* D_j = \left\{ x \in \mathbb{R} / |2x^2 + x + 1| - 2 \neq 0 \right\}$$

$$D_j = \mathbb{R} - \left\{ -1; \frac{1}{2} \right\}$$

$$* D_k = \left\{ x \in \mathbb{R} / |2x+1| - |-x+1| \neq 0 \right\}$$

$$D_k = \mathbb{R} - \{-2; 0\}$$

$$* D_l = \{x \in \mathbb{R} / x-3 > 0\}$$

$$D_l =]3; +\infty[$$

$$* D_m = \{x \in \mathbb{R} / x-2 \geq 0 \text{ et } x-3 > 0\}$$

$$D_m =]3; +\infty[$$

$$* D_n = \left\{ x \in \mathbb{R} / x-5 \neq 0 \text{ et } \frac{2x-3}{x-5} \geq 0 \right\}$$

$$D_n =]-\infty; \frac{3}{2}] \cup]5; +\infty[$$

$$* D_p = \left\{ x \in \mathbb{R} / 2x^2 + x + 1 \geq 0 \text{ et } \sqrt{2x^2 + x + 1} - 3 \neq 0 \right\}$$

$$D_p = \mathbb{R} - \left\{ \frac{-1-\sqrt{65}}{4}; \frac{-1+\sqrt{65}}{4} \right\}$$

$$D_q = \{x \in]-\infty; 0[/ x+1 \neq 0\} \cup \{x \in]0; +\infty[/ x+1 \neq 0 \text{ et } \frac{x+2}{x+1} \geq 0\}$$

$$D_q =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

$$* D_r = \{x \in]-\infty; 0[/ 1+x^2 \neq 0\} \cup \{x \in [0; +\infty[/ 1+x^2 > 0\}$$

$$D_r = \mathbb{R}$$

$$* D_v = \left\{ x \in \mathbb{R} / x + \sqrt{x^2 + 1} \neq 0 \text{ et } 1+x^2 \geq 0 \right\}$$

$$D_v = \mathbb{R}$$

ACTIVITE 2 :

Calcul les limites

$$l_1 = \frac{1}{2}; l_2 = 0; l_3 = -\infty; l_4 = 2; l_5 = +\infty; l_6 = +\infty;$$

$$l_7 = +\infty; l_8 = -\infty; l_9 = -\infty; l_{10} = 1; l_{11} = -\infty; l_{12} = 0;$$

$$l_{13} = +\infty \text{ (passer par un encadrement)}; l_{14} = \frac{2}{3}; l_{15} = 2;$$

$$l_{16} = 0; l_{17} = -\infty \text{ en } 1^-; l_{17} = +\infty \text{ en } 1^+ \text{ à droite}; l_{18} = 3;$$

$$l_{19} = \frac{2}{3}; l_{20} = \frac{1}{6}; l_{21} = \frac{3}{2}; l_{22} = \frac{7}{6}; l_{23} = -\frac{1}{4};$$

$$l_{24} = \frac{7}{12}; l_{26} = 2\sqrt{2}; l_{27} = -\infty; l_{28} = \frac{2}{3}.$$

ACTIVITE 3 :

1°) Déterminons le domaine D de h

$$h(x) = \frac{\sqrt{3x+10} - x}{\sqrt{2x^2 - 2x - 4} - x - 1}$$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / 3x+10 \geq 0; 2x^2 - 2x - 4 \geq 0 \text{ et } \sqrt{2x^2 - 2x - 4} - x - 1 \neq 0 \right\}$$

$$* 3x+10 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -10 \Leftrightarrow x \geq -\frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{10}{3}; +\infty[\text{ (a) } \right]$$

$$* \text{ Posons } 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \text{ son discriminant } \Delta = 9 > 0$$

$$\text{donc on a : } x_1 = -1 \text{ et } x_2 = 2 \text{ par suite } 2x^2 - 2x - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[\text{ (b) } \right]$$

$$* \text{ Posons } \sqrt{2x^2 - 2x - 4} - x - 1 = 0$$

$$\sqrt{2x^2 - 2x - 4} - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 2x - 4} = x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x^2 - 2x - 4 = (x+1)^2 \end{cases}$$

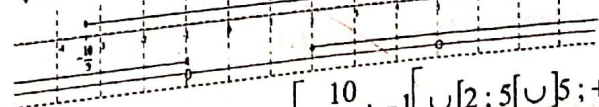
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1; +\infty[\\ x^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4(-5) = 36 > 0 \text{ donc on trouve } x_1' = -1 \text{ et } x_2' = 5$$

Ainsi

$$\sqrt{2x^2 - 2x - 4} - x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-1; 5\} \text{ (c) }$$



$$(a) \cap (b) \cap (c) \Rightarrow x \in \left[-\frac{10}{3}; -1 \right] \cup [2; 5[\cup]5; +\infty[$$

d'où

$$D = \left[-\frac{10}{3}; 1\right[\cup [2; 5[\cup]5; +\infty[$$

2°) Calculons $\lim_{x \rightarrow 5} h$

$$\text{On trouve : } \lim_{x \rightarrow 5} h = -\frac{7}{5}$$

3°) $3 \in D$ et $\lim_{x \rightarrow 5} h = -\frac{7}{5}$; $-\frac{7}{5} \in \mathbb{R}$ donc on peut prolonger par continuité h en 5

$$\text{Soit } g \text{ ce prolongement : } g(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in D \\ -\frac{7}{5} & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

ACTIVITE 5 :

1°)

Soit D_f le domaine de définition de f

$$D_f = \left\{ x \in]1; +\infty[/ x^2 - 1 \geq 0 \right\} \cup \left\{ x \in]-\infty; 1[/ x^3 + 3x - 2 \geq 0 \right\}$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, x^2 - 1 > 0 \text{ alors}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

Calcul de limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 - \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + 1}{x + 1 + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 2}{x + 1 + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

2°) Justifions que f est continue sur $\mathbb{R}$

-Les fonctions $x \mapsto x + 1$ et $x \mapsto x^2 - 1$ sont continue sur $]1; +\infty[$ et de plus $\forall x \in]1; +\infty[, x^2 - 1 > 0$ alors la

fonction $x \mapsto x + 1 - \sqrt{x^2 - 1}$ est continue sur $]1; +\infty[$

-La fonction $x \mapsto x^3 + 3x - 2$ est continue sur $]-\infty; 1[$ il en résulte donc que f est continue sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$

Etudions la continuité de f en 1

$$1 \in D_f$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 + 3x - 2 = 2 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 - \sqrt{x^2 - 1} = 2$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ donc f est continue en

1.

De tout ce qui précède f est continue sur $\mathbb{R}$

3°) a- Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1; 1[$

$]1; 1[\subset [1; +\infty[$ donc $\forall x \in]1; 1[, f(x) = x^3 + 3x - 2$
 f est dérivable sur $]1; 1[$ et $\forall x \in]1; 1[$,

$$f'(x) = 3x^2 + 3.$$

$$f'(x) > 0, \forall x \in]1; 1[$$

f est donc continue et strictement croissante sur $]1; 1[$

$$\text{alors } f(]1; 1[) = \left] \lim_{x \rightarrow 1^-} f; \lim_{x \rightarrow 1^+} f \right[=]-5; 2[\text{ or } 0 \in]-5; 2[\text{ donc l'équation}$$

$f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]1; 1[$

b- Vérifions que $0,5 < \alpha < 0,75$

$$]0,5; 0,75[\subset]-5; 2[\text{ et } \begin{cases} f(0,5) = -0,375 \\ f(0,75) \approx 0,672 \end{cases}$$

$$f(0,5) \times f(0,75) < 0 \text{ d'où } 0,5 < \alpha < 0,75$$

c- Etudions le signe de $f(x)$

f est continue et strictement croissante sur $]1; 1[$ donc continue et strictement croissante sur $]1; \alpha]$ et sur $[\alpha; 1[$

$$\forall x \in]1; \alpha], x \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq 0 \text{ car } f(\alpha) = 0$$

$$\forall x \in [\alpha; 1[, x \geq \alpha \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$\text{Alors : } \begin{cases} \forall x \in]1; \alpha[, f(x) < 0 \\ \forall x \in [\alpha; 1[, f(x) > 0 \\ f(\alpha) = 0 \end{cases}$$

ACTIVITE 6 :

$$II/ g(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$$

1°) Déterminons l'ensemble de définition D de g

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x + 1 \geq 0 \text{ et } x - 3 \neq 0\}$$

$$x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \Leftrightarrow x \in [-1; +\infty[$$

$$\text{Posons } x - 3 = 0$$

$$x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ d'où } D = [-1; 3[\cup]3; +\infty[$$

2°) Calculons les limites de g aux bornes de D

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4} \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = 0 \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = 0 \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1}+2 = +\infty \end{cases}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

3°) Déterminons m

$3 \notin D$ et $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \frac{1}{4}$ donc g est prolongeable par

continuité en 3. Si h est le prolongement de g par continuité

$$\text{en 3 on a : } \begin{cases} h(x) = g(x) & \text{si } x \in D \\ h(3) = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{d'où } m = \frac{1}{4}$$

Partie B :

$$f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{|x|}}$$

1°) Justifions que f est continue sur $\mathbb{R}$

La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$

donc la fonction $x \mapsto 1+\sqrt{|x|}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues. La fonction $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$, de plus $\forall x \in \mathbb{R}, 1+\sqrt{|x|} \neq 0$. Ainsi la

fonction $x \mapsto \frac{x}{1+\sqrt{|x|}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de

fonctions continues, par suite f est continue sur $\mathbb{R}$.

2°) Ecrivons $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+\sqrt{-x}} & \text{si } x \in]-\infty; 0] \\ \frac{x}{1+\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

3°) a- Démontrons que $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

Pour tout $(a; b) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $a < b$ on a :

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \frac{a}{1+\sqrt{a}} - \frac{b}{1+\sqrt{b}} \\ &= \frac{a+a\sqrt{b}-b-b\sqrt{a}}{(1+\sqrt{a})(1+\sqrt{b})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \frac{a-b+\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(1+\sqrt{a})(1+\sqrt{b})} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab})}{(1+\sqrt{a})(1+\sqrt{b})} \end{aligned}$$

Pour tout $(a; b) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $a < b$ on a :

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab})}{(1+\sqrt{a})(1+\sqrt{b})} > 0 \text{ de plus } a < b \Leftrightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b} < 0 \text{ donc}$$

$f(a) - f(b) < 0$ soit $f(a) < f(b)$

D'où $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.

b- Dédudons le sens de variation de f

Etant donné que $\forall (a; b) \in \mathbb{R}_+^2, a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ alors f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

c- Déterminons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1+\sqrt{-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1-\sqrt{-x})}{1+x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1-\sqrt{-x})}{x\left(\frac{1}{x}+1\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-\sqrt{-x}}{\frac{1}{x}+1} = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1-\sqrt{-x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}+1 = 1 \end{cases}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1-\sqrt{x})}{1-x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1-\sqrt{x})}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\sqrt{x}}{\frac{1}{x}-1} = +\infty \text{ car : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-\sqrt{x}) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}-1 = -1 \end{cases}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$

4°) a- Déterminons $f(I)$

$f(I) = f([0; +\infty[) = [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$ car f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

$f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ donc $f(I) = [0; +\infty[$

b- Prouvons que k est une bijection

k est la restriction de f à l'intervalle I or f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $f([0; +\infty[)$ d'où k est une bijection

$$5^\circ) l(x) = f(x) - \frac{1}{2}$$

a- Démontrons que l'équation $l(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0,8; 1,1]$

l est continue et dérivable sur $[0,8; 1,1]$ comme somme de fonctions dérivables.

$\forall x \in [0,8; 1,1], l'(x) = f'(x)$. f étant strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) > 0$, on déduit donc que $\forall x \in [0; +\infty[, l'(x) > 0$ alors l est continue et strictement croissante sur $[0,8; 1,1]$ et $l([0,8; 1,1]) = [l(0,8); l(1,1)]$

$$= [-0,077; 0,036] ; 0 \in [-0,077; 0,036]$$

donc l'équation $l(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0,8; 1,1]$

b- Déduisons que α est solution de l'équation

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

$$l(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{1}{2} \text{ d'où } \alpha \text{ est solution de l'équation}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

ACTIVITE 8 :

1°) a- Etudions les variations de u

$$u(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 6x(x-1)$$

$$u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[, u'(x) > 0$$

$$\forall x \in]0; 1[, u'(x) < 0$$

u est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $[1; +\infty[$ et u est strictement décroissante sur $[0; 1]$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} u = +\infty$$

$$u(0) = 2 \text{ et } u(1) = 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$u(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

b- Démontrons que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $-\frac{3}{4} < \alpha < -\frac{2}{3}$.

u est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et $0 \in u(]-\infty; 0])$ donc l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]-\infty; 0]$

D'après les variations de u ; $0 \notin u([0; +\infty[)$ d'où α est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $u(x) = 0$.

$$u\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{17}{32} \text{ et } u\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{27} \text{ on a :}$$

$$u\left(-\frac{3}{4}\right) \times u\left(-\frac{2}{3}\right) < 0 \text{ d'où } -\frac{3}{4} < \alpha < -\frac{2}{3}$$

c- Signe de $u(x)$

d'après les variations de u et b) on a :

$$\forall x \in]-\infty; \alpha[, u(x) < 0$$

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[, u(x) > 0 \text{ et } u(\alpha) = 0$$

2°) a- Déterminons l'ensemble de définition D de f et les limites de f aux bornes de D .

$$f(x) = \frac{x^3 - x - 1}{x - 1}$$

$$D = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\text{b- Justifions que } \forall x \in D, f'(x) = \frac{u(x)}{(x-1)^2}$$

f est dérivable en tout point de D comme fonction rationnelle.

$$\forall x \in D, f'(x) = \frac{(3x^2 - 1)(x - 1) - x^3 + x + 1}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^3 - 3x^2 - x + 1 - x^3 + x + 1}{(x - 1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{(x - 1)^2} \text{ or } u(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$$

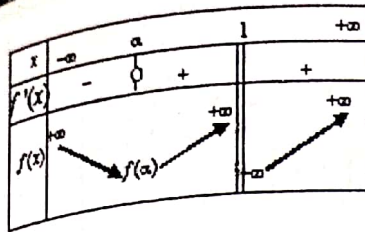
$$= \frac{u(x)}{(x - 1)^2} \text{ d'où le résultat}$$

c- étudions le sens de variation de f et dressons son tableau de variation.

D'après 1°)c- et 2-b on a : $\forall x \in]-\infty; \alpha[, f'(x) < 0$

$$\forall x \in]\alpha; 1[\cup]1; +\infty[, f'(x) > 0 \text{ et } f'(\alpha) = 0$$

f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha]$; f est strictement croissante sur $[\alpha; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.



3°) a- Justifions que $f(\alpha) = \frac{1}{2} \left(3\alpha + 1 - \frac{3}{\alpha - 1} \right)$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - \alpha - 1}{\alpha - 1}$$

$$u(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 = \frac{1}{2}(3\alpha^2 - 2)$$

$$f(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}(3\alpha^2 - 2) - \alpha - 1}{\alpha - 1}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{3\alpha^2 - 2\alpha - 4}{\alpha - 1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{(\alpha - 1)(3\alpha + 1) - 3}{\alpha - 1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(3\alpha + 1 - \frac{3}{\alpha - 1} \right)$$

b- Encadrons $f(\alpha)$, puis étudions le signe de $f(\alpha)$

$$-\frac{3}{4} < \alpha < -\frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{5}{4} < 3\alpha + 1 < -1 \text{ (a) et}$$

$$-\frac{7}{4} < \alpha - 1 < -\frac{5}{3}$$

$$\text{on a : } -\frac{3}{5} < \frac{1}{\alpha - 1} < -\frac{4}{7} \Rightarrow \frac{12}{7} < \frac{-3}{\alpha - 1} < \frac{9}{5} \text{ (b)}$$

$$\text{(a) et (b) } \Rightarrow \frac{13}{28} < 3\alpha + 1 - \frac{3}{\alpha - 1} < \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{13}{56} < f(\alpha) < \frac{2}{5} \text{ et par suite } f(\alpha) > 0$$

c- Justifions que (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse x_0 puis déduis le signe de $f(x)$.

• D'après les variations de f ,

$$0 \notin f\left(-\infty; 1\right) = [f(\alpha); +\infty[\text{ car } f(\alpha) > 0$$

• f est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et $0 \in f\left(]1; +\infty\right) = \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $]1; +\infty[$ par suite (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse $x_0 > 1$ et on a : d'après les variations de f

$$\forall x \in]-\infty; 1[\cup]x_0; +\infty[; f(x) > 0$$

$$\forall x \in]1; x_0[; f(x) < 0 \text{ et } f(x_0) = 0$$

4°) a- Démontrons que g admet une application réciproque g^{-1}

f est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et $f\left(]1; +\infty\right) = \mathbb{R}$ donc g est bijective par suite elle admet une bijection réciproque g^{-1} .

b- Déterminons $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(1)$

$$x_0 \in]1; +\infty[\text{ et } f(x_0) = 0 \text{ donc } g^{-1}(0) = x_0$$

$$g^{-1}(1) = a \text{ avec } a \in]1; +\infty[\text{ donc on a :}$$

$$g(a) = 1 \Leftrightarrow \frac{a^3 - a - 1}{a - 1} = 1$$

$$\Leftrightarrow a^3 - a - 1 = a - 1$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } a = -\sqrt{2} \text{ ou}$$

$$a = \sqrt{2}. \sqrt{2} \in]1; +\infty[\text{ donc } g^{-1}(1) = \sqrt{2}$$

c- Soit $M(x; y) \in (\Delta) \cap (C)$

$$M(x; y) \in (\Delta) \cap (C) \Leftrightarrow f(x) = m; x \in]1; +\infty[$$

D'après 4°) a- l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique dans $]1; +\infty[$; donc (Δ) coupe (C) une seule fois dans $]1; +\infty[$.

3. Correction des activités sur la dérivabilité et étude de fonctions

ACTIVITE 3:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (1 + \sin 3x + 2 \cos 2x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left[x \tan \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right] = 0$$

Soit $X = x - \frac{\pi}{3}$; On a : $x = X + \frac{\pi}{3}$

Quand $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$; $X \rightarrow 0$

$$I = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1 + \sin \left[3 \left(X + \frac{\pi}{3} \right) \right] + 2 \cos \left[2 \left(X + \frac{\pi}{3} \right) \right]}{\left(X + \frac{\pi}{3} \right) \tan X}$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1 + \sin(3X + \pi) + 2 \cos \left(2X + \frac{2\pi}{3} \right)}{\left(X + \frac{\pi}{3} \right) \tan X}$$

On a : $\sin(3X + \pi) = -\sin 3X$

$$\begin{aligned} 2 \cos \left(2X + \frac{2\pi}{3} \right) &= 2 \left[\cos 2X \cos \frac{2\pi}{3} - \sin 2X \sin \frac{2\pi}{3} \right] \\ &= 2 \left[-\frac{1}{2} \cos 2X - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2X \right] \\ &= -\cos 2X - \sqrt{3} \sin 2X \end{aligned}$$

Donc on a :

$$I = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 3X - \cos 2X - \sqrt{3} \sin 2X}{\left(X + \frac{\pi}{3} \right) \tan X}$$

Pour X voisin de 0 ; $2X$ voisin de 0 et $3X$ voisin de 0.
Au voisinage de 0 :

$$\sin 3X = 3X - \frac{9}{2}(3X)^3 + X^3 \epsilon(X)$$

$$\sin 3X = 3X - \frac{9}{2}X^3 + X^3 \epsilon(X) \text{ avec } \lim_{X \rightarrow 0} \epsilon(X) = 0$$

Au voisinage de 0 :

$$\cos 2X = 1 - \frac{1}{2}(2X)^2 + X^3 \epsilon(X)$$

$$= 1 - 2X^2 + X^3 \epsilon(X) \text{ avec } \lim_{X \rightarrow 0} \epsilon(X) = 0$$

Au voisinage de 0 :

$$\sin 2X = 2X - \frac{1}{6}(2X)^3 + X^3 \epsilon(X)$$

$$= 2X - \frac{4}{3}X^3 + X^3 \epsilon(X) \text{ avec } \lim_{X \rightarrow 0} \epsilon(X) = 0$$

Au voisinage de 0 :

$$\tan X = X + \frac{1}{3}X^3 + X^3 \epsilon(X) \text{ avec } \lim_{X \rightarrow 0} \epsilon(X) = 0$$

Initiateur : Sylvain AHOANGBO (+299) 97 47 15 27/ 94 26 28 54

On a alors :

$$\begin{aligned} I &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1 - 3X + \frac{9}{2}X^3 - 1 + 2X^2 - 2\sqrt{3}X - \frac{4\sqrt{3}}{3}X^3}{\left(X + \frac{\pi}{3} \right) \left(X + \frac{1}{3}X^3 \right)} \\ &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{X(-3 - 2\sqrt{3}) + 2X^2 + X^3 \left(\frac{9}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{3} \right)}{X^2 + \frac{1}{3}X^4 + \frac{\pi}{3}X + \frac{\pi}{9}X^3} \\ &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{-3 - 2\sqrt{3} + 2X + X^2 \left(\frac{9}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{3} \right)}{X + \frac{1}{3}X^3 + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{9}X^2} \\ &= \frac{-3 - 2\sqrt{3}}{\frac{\pi}{3}} \text{ d'où } I = \frac{-9 - 6\sqrt{3}}{\pi} \end{aligned}$$

ACTIVITE 5 :

Après une lecture minutieuse du graphe on a :

1°) a- $D = \mathbb{R}$

b- $E = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

2°) Ecrivons les systèmes d'équations définissant les demi-tangentes

En -2 on a : $\begin{cases} x = -2 \\ y \geq 3 \end{cases}$ et en 2 on a : $\begin{cases} x = 2 \\ y \geq -1 \end{cases}$

3°) a- Donnons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f = 1$$

b- les branches infinies de la courbe (C)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à

(C) en $+\infty$

En $-\infty$ (C) admet une asymptote passant par des points

$\left(\frac{1}{2}; 0 \right)$ et $B(0; 1)$

Posons (AB) : $y = ax + b$; $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -2$ et

$B \in (AB) \Rightarrow b = 1$ donc (AB) : $y = -2x + 1$ par suite la droite d'équation $y = -2x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$

4°) Dressons le tableau de variations de f

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	0	-	+
$f(x)$	$+\infty$	3	$2\sqrt{2} + 1$	-1	1

5°) Donnons $f([0; 2])$

$f([0;2]) = [f(2); f(0)]$ car f est strictement décroissante sur $[0;2]$

D'où $f([0;2]) = [-1;3]$

6°) Démontrons que l'équation $f(x) = 1$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α / $0 < \alpha < 2$

Sur le graphique la droite d'équation $y = 1$ coupe la courbe de f en seul point. Alors l'équation $f(x) = 1$ admet dans $\mathbb{R}$ une seule solution α . De plus $f([0;2]) = [-1;3]$; $1 \in [-1;3]$ d'où $0 < \alpha < 2$

ACTIVITE 14 :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + x$$

1°) a- Justifions que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$

Soit D_f ce domaine

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / |x^2 - 2x| \geq 0\}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, |x^2 - 2x| \geq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}$

Ecrivons f sans le symbole de valeur absolue

Posons $x^2 - 2x = 0$

$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$ et le tableau de signe de

$x^2 - 2x$ est :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$x^2 - 2x$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\text{Alors } \begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + x, & \text{si } x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[\\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x} + x, & \text{si } x \in]0; 2[\\ f(0) = 0 \\ f(2) = 2 \end{cases}$$

b- Etudions la dérivabilité de f en 0 et en 2.

En 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} + x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)}{x\sqrt{x^2 - 2x}} + 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 2x}} + 1 = -\infty \text{ alors } f \text{ n'est pas dérivable à gauche en } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{-x^2 + 2x} + x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x + 2}{\sqrt{-x^2 + 2x}} + 1 = +\infty \text{ alors } f \text{ n'est pas dérivable à droite en } 0$$

Conclusion : f n'est pas dérivable en 0

En 2 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{-x^2 + 2x} + x - 2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x}{\sqrt{-x^2 + 2x}} + 1 = -\infty \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} + x - 2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x}} + 1 = +\infty \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 2

Conclusion : f n'est pas dérivable en 2

Interprétation graphique

La courbe (C_f) admet en son point d'abscisse 0 une demi

tangente définie par : $\begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

La courbe (C_f) admet en son point d'abscisse 2 une demi

tangente définie par : $\begin{cases} x = 2 \\ y \geq 2 \end{cases}$

2°) Etudions les branches infinies de (C_f)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x} + x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x \left(-\sqrt{1 - \frac{2}{x}} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{-\sqrt{1 - \frac{2}{x}} - 1} = 1 \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ alors la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à

(C_f) au voisinage de $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} + x = +\infty$; calculons donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} + x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1 = 2. \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x + x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{2}{x} + 1}} = -1 \text{ alors la droite}$$

d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3°) a- Déterminons l'ensemble de dérivabilité D' de f
 f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$; $]0; 2[$ et $]2; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivable or d'après la question 1°) b- f n'est pas dérivable en 0 et en 2 alors

$$D' =]-\infty; 0[\cup]0; 2[\cup]2; +\infty[$$

Calculons la dérivée $f'(x)$

On trouve :

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + x - 1}}{\sqrt{x^2 - 2x}}; \text{ si } x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[\\ \frac{\sqrt{-x^2 + 2x - x + 1}}{\sqrt{-x^2 + 2x}}; \text{ si } x \in]0; 2[\end{cases}$$

b- Démontrons que les équivalences suivantes :

i) $\sqrt{x^2 - 2x - 1 + x} < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 1 + x} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x} < 1 - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ x^2 - 2x < (1 - x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[\\ x \in]-\infty; 1[\\ x^2 - 2x < 1 - 2x + x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[\\ x \in]-\infty; 1[\\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\text{ d'où le résultat}$$

ii) $\sqrt{-x^2 + 2x + 1 - x} < 0 \Leftrightarrow \left[\frac{2 + \sqrt{2}}{2}; 2 \right]$

$$\sqrt{-x^2 + 2x + 1 - x} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 2x} < x - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ -x^2 + 2x < x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; 2] \\ x \in [1; +\infty[\\ 2x^2 - 4x + 1 > 0 \end{cases}$$

Réolvons $2x^2 - 4x + 1 > 0$

Posons $2x^2 - 4x + 1 = 0$; $\Delta = 8$

Donc $2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ ou

$$x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

Alors $2x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow$

$$x \in \left] -\infty; \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right[\cup \left] \frac{2 + \sqrt{2}}{2}; +\infty \right[$$

Ainsi :

$$\sqrt{-x^2 + 2x + 1 - x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; 2] \\ x \in [1; +\infty[\\ x \in \left] -\infty; \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right[\cup \left] \frac{2 + \sqrt{2}}{2}; +\infty \right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] \frac{2 + \sqrt{2}}{2}; 2 \right[$$

D'où $\sqrt{-x^2 + 2x + 1 - x} < 0 \Leftrightarrow \left] \frac{2 + \sqrt{2}}{2}; 2 \right[$

c- Dédouons-en le signe de $f'(x)$

Sur $]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$ le signe de $f'(x)$ est celui de $\sqrt{x^2 - 2x - 1 + x}$

Sur $]0; 2[$ le signe de $f'(x)$ est celui de $\sqrt{-x^2 + 2x + 1 - x}$

On obtient donc le tableau de signe de $f'(x)$ suivant :

x	$-\infty$	0	$\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	0	-	+

d- Etablissons le tableau de variation de f

$$\forall x \in \left] 0; \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right[\cup]2; +\infty[; f'(x) > 0$$

$$\forall x \in \left] -\infty; 0[\cup \left] \frac{2 + \sqrt{2}}{2}; 2 \right[; f'(x) < 0 \text{ et } f\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

alors f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right]$ et sur $[2; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $\left[\frac{2 + \sqrt{2}}{2}; 2 \right]$

$$f\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \sqrt{2}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	0	-	+
$f(x)$	1	0	$1+\sqrt{2}$	2	$+\infty$

$$4^{\circ}) \varphi: \left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; 2 \right] \rightarrow f \left(\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; 2 \right] \right)$$

$$x \mapsto \varphi(x) = f(x)$$

a- Démontrons que φ admet une bijection réciproque

$$\varphi^{-1}$$

$$\forall x \in \left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; 2 \right], \varphi(x) = f(x) \text{ or } f \text{ est continue et}$$

strictement décroissante sur $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; 2 \right]$ et

$$f \left(\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; 2 \right] \right) = [2; 1+\sqrt{2}] \text{ d'où}$$

$$\varphi: \left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; 2 \right] \rightarrow f \left(\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; 2 \right] \right)$$

$x \mapsto \varphi(x) = f(x)$ est une bijection par suite φ

admet une bijection réciproque φ^{-1} .

b- Démontrons que $A(2; 1) \in (\Gamma)$

On a : $f(1) = 2$ alors le point $A(2; 1) \in (\Gamma)$

c- Déduisons-en l'équation de la tangente (Δ) à la courbe (Γ) en 2

$$(\Delta): y = (\varphi^{-1})'(2)(x-2) + \varphi^{-1}(2)$$

$$(\varphi^{-1})'(2) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(2))}$$

$$(\varphi^{-1})'(2) = \frac{1}{\varphi'(1)} = 1 \text{ alors } (\Delta): y = x - 1$$

d- Ensemble de dérivabilité de φ^{-1}

$$K = \left[2; 1+\sqrt{2} \right] \setminus \left\{ f(x) / f'(x) = 0; \forall x \in \left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; 2 \right] \right\}$$

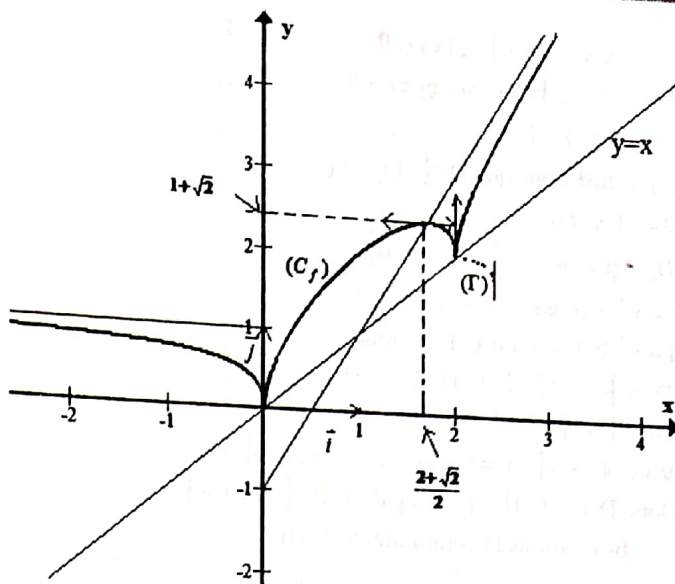
f' n'est pas définie en 2

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \text{ alors}$$

$$K = \left[2; 1+\sqrt{2} \right] \setminus \left\{ f \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2} \right); f(2) \right\}$$

$$K =]2; 1+\sqrt{2}[$$

5°) Représentation de la courbe (C_f) et la courbe (Γ) .



ACTIVITE 16 :

1°) Etudions les variations de la fonction numérique g définie sur $]1; +\infty[$ par : $g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1$.

* g est continue et dérivable sur $]1; +\infty[$ comme fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) = 6x^2 - 4x.$$

*Signe de $g'(x)$.

On trouve que $\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) > 0$

*Sens de variation de g .

g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$

*Limites

On trouve : $\lim_{1^+} g = -1$ et $\lim_{+\infty} g = +\infty$

*Tableau de variation de g

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	-1	$+\infty$

b- Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1; +\infty[$ et vérifions que $1,28 < \alpha < 1,3$

g est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et $g(]1; +\infty[) =]-1; +\infty[$ or $0 \in]-1; +\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1; +\infty[$

De plus : $1,28 \in]1; +\infty[$ et $1,3 \in]1; +\infty[$

On a : $g(1,28) \approx -0,0825$ et $g(1,3) \approx 0,014$

Donc $g(1,28) \times g(1,3) < 0$ d'où $1,28 < \alpha < 1,3$.

c- Déterminons le signe de g sur $]1; +\infty[$

g est strictement sur $]1; +\infty[$ et $g(\alpha) = 0$ donc :

$x < \alpha \Rightarrow g(x) < 0$ et $x > \alpha \Rightarrow g(x) > 0$

$$\text{Soit } \begin{cases} \forall x \in]1; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases}$$

2°) a- Justifions que $D = [-1; +\infty[$

$D = D_1 \cup D_2$ avec

$$D_1 = \{x \in]-\infty; 1] \mid 1-x^2 \geq 0\}$$

$$1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

$$1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1] \text{ donc :}$$

$$D_1 =]-\infty; 1] \cap [-1; 1] = [-1; 1].$$

$$D_2 = \{x \in]1; +\infty[\mid x \neq 0\}$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, x \neq 0 \text{ alors } D_2 =]1; +\infty[$$

$$\text{Donc } D = [-1; 1] \cup]1; +\infty[\text{ d'où } D = [-1; +\infty[.$$

b- Etudions la continuité de f en 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)\sqrt{1-x^2} = 0 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x^2 - 2x + \frac{1}{x}\right) = 1 - 2 + 1 = 0$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f = \lim_{x \rightarrow 1^+} f = f(1)$ donc f est continue en 1.

3°) a- Etudions la dérivabilité de f en -1 et en 1.

En -1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(1-x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en -1.

En 1.

$$\begin{aligned} -\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -\sqrt{1-x^2} = 0; 0 \in \mathbb{R} \text{ donc } f \text{ est} \\ &\text{dérivable à gauche en 1 et } f'_g(1) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + \frac{1}{x}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2 - x - 1)}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x - 1}{x} = -1; -1 \in \mathbb{R} \text{ donc } f \text{ est} \end{aligned}$$

dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = -1$.

On a : $f'_g(1) \neq f'_d(1)$ donc f n'est pas dérivable en 1.

Interprétation géométrique :

- (Γ) admet en son point d'abscisse -1 une demi-tangente définie par : $(T) : \begin{cases} x = -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$.
- (Γ) admet en son point d'abscisse 1 deux demi-tangentes, l'une à gauche en 1 noté T_g et l'autre à droite en 1 noté T_d définies par :

$$T_g : \begin{cases} x \leq 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ et } T_d : \begin{cases} x \geq 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

b- Déterminons l'ensemble de dérivabilité de f .

Soit E cet ensemble :

$$\text{On a : } E =]-1; 1[\cup]1; +\infty[.$$

4°) a- Démontrons que :

- Pour tout $x \in]1; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 2 - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{2x^3 - 2x^2 - 1}{x^2} \text{ or } g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\text{D'où pour tout } x \in]1; +\infty[, \text{ on a : } f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

- Pour tout $x \in]-1; 1[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sqrt{1-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \times (1-x) \\ &= \frac{-(1-x^2) - x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{x^2 + x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$\text{D'où pour tout } x \in]-1; 1[, \text{ on a : } f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

b- Etudions le signe de $f'(x)$ sur $] -1; 1[$.

$$\forall x \in]-1; 1[, \sqrt{1-x^2} > 0 \text{ donc le signe de } f'(x) \text{ est celui de } 2x^2 - x - 1.$$

$$\text{Posons } 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\text{On a : } \Delta = 9$$

$$\text{alors } 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 1$$

$$\text{donc } \begin{cases} \forall x \in]-1; -\frac{1}{2}[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]-\frac{1}{2}; 1[, f'(x) < 0 \\ f'(-\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$5°) \text{ Justifions que : } f(\alpha) = \frac{3}{2\alpha} - \alpha \text{ et } -0,15 < f(\alpha) < -0,11.$$

$$\text{On a : } f(\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + 1}{\alpha}$$

$$\text{Or } g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^3 - 2\alpha^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 = \alpha^2 + \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } f(\alpha) = \frac{\alpha^2 - 2\alpha^2 + 1 + \frac{1}{2}}{\alpha}$$

$$= \frac{-\alpha^2 + \frac{3}{2}}{\alpha} = -\alpha + \frac{3}{2\alpha} \text{ d'où } f(\alpha) = \frac{3}{2\alpha} - \alpha$$

$$1,28 < \alpha < 1,3 \Leftrightarrow 2,56 < 2\alpha < 2,6$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2,6} < \frac{3}{2\alpha} < \frac{3}{2,56}$$

$$\Leftrightarrow -1,3 + \frac{3}{2,6} < -\alpha + \frac{3}{2\alpha} < -1,28 + \frac{3}{2,56}$$

$$\Leftrightarrow -0,1461 < f(\alpha) < -0,1081 \text{ d'où}$$

$$-0,15 < f(\alpha) < -0,11.$$

6°) Dressons le tableau de variations de f sur $[-1; +\infty[$

Signe de $f'(x)$ sur $]1; +\infty[$.

$$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}; x^2 > 0 \text{ sur }]1; +\infty[\text{ donc le}$$

signe de f' est celui de $g(x)$

$$\text{D'après 1°) c- on déduit : } \begin{cases} f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]1; \alpha[\\ f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]\alpha; +\infty[\\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \end{cases}$$

De l'étude de signe de f' sur $[-1; +\infty[$ on a :

f est strictement croissante sur $[-1; -\frac{1}{2}]$ et sur $[\alpha; +\infty[$

f est strictement décroissante sur $[-\frac{1}{2}; \alpha]$

Tableau de variation de f .

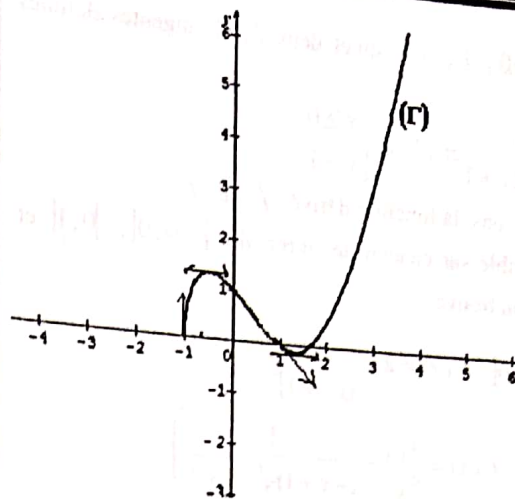
x	-1	$-\frac{1}{2}$	1	α	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-		+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

7°) Etudions les branches infinies puis donne l'allure de (Γ) dans le repère orthonormé $(O; I, J)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty. \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty \text{ donc } (\Gamma) \text{ admet une}$$

branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.



ACTIVITE 17 :

1°) a- ensemble E

$$E = \{x \in]-\infty; 0]/x^2 + 1 \neq 0\} \cup \{x \in]0; +\infty[/ x - 1 \neq 0\}$$

$$E =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

b-limites aux de E

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty; \lim_{x \rightarrow 1} f = -\infty$$

c-Ecrivons f sans valeur absolue

$$\begin{cases} f(x) = 2x + \frac{1}{x^2 + 1}, & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ f(x) = \frac{1}{5} \left(4x + 13 - \frac{8}{\sqrt{-x+1}} \right), & \text{si } x \in]0; 1[\\ f(x) = \frac{1}{5} \left(4x + 13 - \frac{8}{\sqrt{x-1}} \right), & \text{si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

d- Continuité et dérivabilité de f en 0.

Continuité :

$$0 \in E$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$$

$$<$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{5} \left(4x + 13 - \frac{8}{\sqrt{|x-1|}} \right) = \frac{1}{5} (5) = 1$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \text{ donc } f \text{ est continue en}$$

0.

Dérivabilité :

$$\text{On trouve } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$$

Conclusion : f est dérivable à gauche en 0 et à droite en 0 mais n'est pas dérivable en car

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

Interprétation graphique :

Au point $M(0;1)$, (C) admet deux demi-tangentes définies par :

$$(T_g): \begin{cases} x \leq 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \text{ et } (T_d): \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

2°) a- Définissons la fonction dérivée f' de f
 f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$, $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$ et on trouve :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = 2 - \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \\ \forall x \in]0; 1[, f'(x) = \frac{4}{5} \left(1 - \frac{1}{(-x+1)\sqrt{-x+1}} \right) \\ \forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{4}{5} \left(1 + \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} \right) \end{cases}$$

b- Sens de variation de f et tableau de variation de f
 Signe de f'

On obtient : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]0; 1[, f'(x) < 0 \end{cases}$

On déduit donc que f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0; 1[$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$	$+\infty$

c- Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions réelles x_1 , x_2 et x_3 .

* f est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et $f(]-\infty; 0[) =]-\infty; 1[$; $0 \in]-\infty; 1[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_1 dans $]-\infty; 0[$

* f est continue et strictement décroissante sur $]0; 1[$ et $f(]0; 1[) =]-\infty; 1[$; $0 \in]-\infty; 1[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_2 dans $]0; 1[$

* f est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et $f(]1; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$; $0 \in]-\infty; +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_3 dans $]1; +\infty[$.

Il en résulte de tout ce qui précède que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions réelles x_1 , x_2 et x_3 .

d- Vérifions les inégalités

■ $]-0,5; 0[\subset]-\infty; 0[$ et $\begin{cases} f(-0,5) \approx -0,2 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{cases}$ donc $-0,5 < x_1 < 0$

■ $\frac{3}{4} \in]0; 1[$ et $f\left(\frac{3}{4}\right) = 0$ donc $x_2 = \frac{3}{4}$

■ $]1; 1,5[\subset]1; +\infty[$ et $f(]1; 1,5[) =]-\infty; 1,53[$ donc $1 < x_3 < 1,5$

e- Déduisons le signe de $f(x)$ pour tout $x \in E$

On trouve :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; 1[\cup]1; x_3[, f(x) < 0 \\ \forall x \in]x_1; x_2[\cup]x_3; +\infty[, f(x) > 0 \\ \forall x \in \{x_1; x_2; x_3\}, f(x) = 0 \end{cases}$$

3°) a- Etudions les branches infinies de (C)

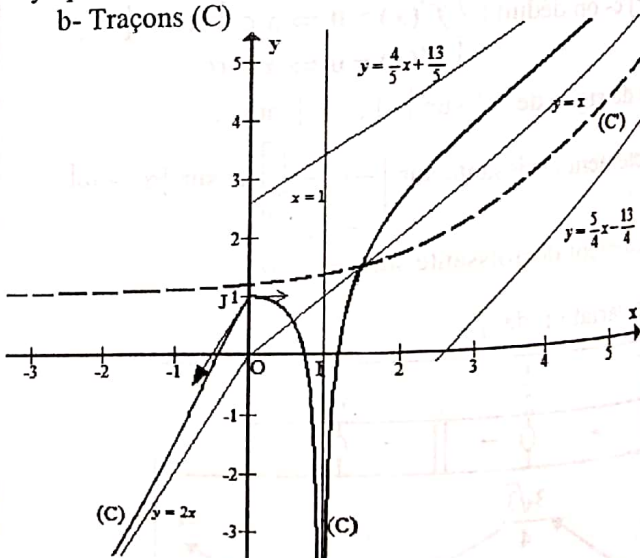
$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = 0$ donc la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{4}{5}x + \frac{13}{5} \right) \right] = 0$ donc la droite d'équation

$y = \frac{4}{5}x + \frac{13}{5}$ est asymptote à (C) en $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à (C).

b- Traçons (C)



4°) a- Démontrons que g admet une bijection réciproque g^{-1}
 g est la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$ donc g est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et $f(]1; +\infty[) = \mathbb{R}$ donc g est une bijection de $]1; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ par suite g admet une bijection réciproque g^{-1} définie sur $J = \mathbb{R}$

b- Calculons $(g^{-1})'(0)$ en fonction de x_3

$$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(0))}$$

$$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(x_3)} \text{ car } g(x_3) = 0$$

$$g(x_3) = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = \frac{8}{x_3 + 13} \text{ dans l'expression de}$$

$g' = f'$ on obtient :

$$g'(x_3) = \frac{1}{5} \left(\frac{12x_3 + 5}{2(x_3 - 1)} \right) \text{ alors } (g^{-1})'(0) = \frac{10(x_3 - 1)}{12x_3 + 5}$$

c- Vérifions que le point $A\left(\frac{13}{5}; 2\right) \in (C')$

$$f(2) = \frac{1}{5} \left(4(2) + 13 - \frac{8}{\sqrt{2-1}} \right)$$

$$f(2) = \frac{1}{5}(13) = \frac{13}{5} \text{ d'où } A\left(\frac{13}{5}; 2\right) \in (C')$$

Equation cartésienne de la tangente (T) à (C') au point A.

$$(T): y = (g^{-1})'\left(\frac{13}{5}\right) \left(x - \frac{13}{5}\right) + (g^{-1})\left(\frac{13}{5}\right)$$

$$(g^{-1})'\left(\frac{13}{5}\right) = \frac{1}{g'(2)} \text{ et } g'(2) = \frac{8}{5} \text{ donc } (g^{-1})'\left(\frac{13}{5}\right) = \frac{5}{8}$$

$$\text{alors } (T): y = \frac{5}{8}x - \frac{3}{8}$$

c-Construisons (C')
Voir courbe en pointillé.

ACTIVITE 20:

1°)

t est définie, continue et dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], t'(x) = 2 \cos x \sin x \text{ ou } t'(x) = \sin 2x$$

$$\text{Posons } t'(x) = 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = 0 \text{ car } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \cos x > 0 \text{ et } \sin x > 0 \text{ donc } t'(x) > 0$$

Alors t est continue et strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$t\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[t(0); t\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$t\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\sin^2 0; \sin^2 \frac{\pi}{2}\right]$$

$= [0; 1]$ d'où t est une bijection

2°) a- Déterminons l'ensemble de dérivabilité D de t^{-1} .

t est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$

alors t^{-1} est dérivable sur $t\left(\left]0; \frac{\pi}{2}\right]\right) =]0; 1[$ soit $D =]0; 1[$

b- Calculons $(t^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$

$$(t^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{t'\left(t^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$$

$$\text{Posons } t^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha \text{ avec } \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$t^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha \Leftrightarrow t(\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ car } \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$(t^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{t'\left[\frac{\pi}{4}\right]}$$

$$\text{on trouve : } (t^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

c- Démontrons que $\forall x \in D, (t^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

$$(t^{-1})'(x) = \frac{1}{t'\left[t^{-1}(x)\right]}$$

$$t^{-1}(x) = y \text{ avec } \begin{cases} x \in [0; 1] \\ y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$t^{-1}(x) = y \Leftrightarrow t(y) = x \Leftrightarrow \sin^2 y = x \Leftrightarrow \sin y = \sqrt{x}$$

$$\text{Or } \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x}$$

$$\text{Donc } (t^{-1})'(x) = \frac{1}{t'[y]}$$

$$(t^{-1})'(x) = \frac{1}{2 \cos y \sin y} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \text{ d'où } \forall x \in D,$$

$$(t^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

*Retrouvons la valeur de $(t^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$

$$(t^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}} ; (t^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

4. CORRECTION DES ACTIVITES SUR LES PRIMITIVES

ACTIVITE 7:

$$f:]-\infty; \frac{1}{3}[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (1-3x)^5 + 2 \cos \pi x + |(2x-1)x^2|$$

1°) Justifions que f admet des primitives sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$

Soient :

$$u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (1-3x)^5$$

$$v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2 \cos \pi x$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto |(2x-1)x^2|$$

u est une fonction polynôme donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$ (1)

v est la composée de deux fonctions continue sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$ (2)

h est une fonctions polynôme par intervalle donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$ (3)

De (1), (2) et (3) on a f continue sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$ et par conséquent f admet des primitives sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$.

2°) Déterminons la primitive F de f sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$ qui prend la valeur 1 en 0.

$$f(x) = (1-3x)^5 + 2 \cos \pi x + |(2x-1)x^2|$$

$$= (1-3x)^5 + 2 \cos \pi x + x^2 |2x-1|$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	-	0	+
$ 2x-1 $	$1-2x$	0	$2x-1$

$$\forall x \in]-\infty; \frac{1}{3}[; |2x-1| = 1-2x$$

$$f(x) = (1-3x)^5 + 2 \cos \pi x + x^2 (1-2x)$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)(-3)(1-3x)^5 + (2) \cos \pi x + x^2 - 2x^3$$

$$\text{Soit } F:]-\infty; \frac{1}{3}[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -\frac{1}{3} \frac{(1-3x)^6}{6} + \frac{2}{\pi} \sin \pi x + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^4$$

F est une primitive de f

G est une primitive de $f \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} / G(x) = F(x) + c$

$G(0) = F(0) + c$ or $G(0) = 1$ donc on a :

$$1 = F(0) + c \Leftrightarrow c = 1 + \frac{1}{18} \Leftrightarrow c = \frac{19}{18}$$

Donc on a :

$$G:]-\infty; \frac{1}{3}[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -\frac{(1-3x)^6}{18} + \frac{2}{\pi} \sin \pi x + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{19}{18}$$

5. CORRECTION DES ACTIVITES SUR LES FONCTIONS LOGARITHME NEPERIEN.

ACTIVITE 1 :

➤ Trouvons l'ensemble de définition des fonctions :

* $D_{f_1} = \{x \in \mathbb{R} / 3x - 1 > 0\}$ et on trouve

$$D_{f_1} = \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$$

* $D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 \neq 0\}$ et on trouve

$$D_{f_2} = \mathbb{R} - \{1; 2\}$$

* $D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x + 1 > 0\}$

$$D_{f_3} = \mathbb{R}$$

* $D_{f_4} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } 1 + x > 0\}$

$$D_{f_4} =]-1; 0[\cup]0; +\infty[$$

* $D_{f_5} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 > 0\}$

$$D_{f_5} = \mathbb{R}$$

* $D_{f_6} = \left\{x \in \mathbb{R} / 2x + 1 \neq 0 \text{ et } \frac{x}{2x+1} > 0\right\}$

$$D_{f_6} =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]0; +\infty[$$

* $D_{f_7} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

* $D_{f_8} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } 2 - 3x \neq 0\}$

$$D_{f_8} = \left] 0; \frac{2}{3} \right[\cup \left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$$

* $D_{f_9} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

$$D_{f_9} =]0; +\infty[$$

* $D_{f_{10}} = \left\{x \in \mathbb{R} / 2x + 1 \neq 0 \text{ et } \frac{x+3}{2x+1} > 0\right\}$

$$D_{f_{10}} =]-\infty; -3[\cup \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$$

* $D_{f_{11}} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln x \geq 0\}$

$$D_{f_{11}} = [1; +\infty[$$

* $D_{f_{12}} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

$$D_{f_{12}} =]0; +\infty[$$

* $D_{f_{13}} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln x > 0\}$

$$D_{f_{13}} =]1; +\infty[$$

* $D_{f_{14}} = \{x \in \mathbb{R} / 1 + x^2 > 0 \text{ et } x \neq 0\}$

$$D_{f_{14}} = \mathbb{R}^*$$

* $D_{f_{15}} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } x^2 - x + 1 > 0\}$

$$D_{f_{15}} = \mathbb{R}^*$$

* $D_{f_{16}} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

$$D_{f_{16}} =]0; +\infty[$$

* $D_{f_{17}} = \{x \in \mathbb{R} / -x > 0 \text{ et } x + 1 \neq 0\}$

$$D_{f_{17}} =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$$

* $D_{f_{18}} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

$$D_{f_{18}} =]0; +\infty[$$

➤ Déterminons leurs dérivées

$$\forall x \in D_{f_1}, f'_1(x) = \frac{3}{3x-1}$$

$$\forall x \in D_{f_2}, f'_2(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$$

$$\forall x \in D_{f_3}, f'_3(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$$

$$\forall x \in D_{f_4}, f'_4(x) = \frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$$

$$\forall x \in D_{f_5}, f'_5(x) = \frac{2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$\forall x \in D_{f_6}, f'_6(x) = \frac{1}{x(2x+1)}$$

$$\forall x \in D_{f_7}, f'_7(x) = \frac{2x \ln x + 2x + 3}{x}$$

$$\forall x \in D_{f_8}, f'_8(x) = \frac{2-3x+3x \ln x}{x(2-3x)^2}$$

$$\forall x \in D_{f_9}, f'_9(x) = 2 \frac{\ln x}{x}$$

$$\forall x \in D_{f_{10}}, f'_{10}(x) = \frac{-5}{(2x+1)(x+3)}$$

$$\forall x \in D_{f_{11}} - \{1\}, f'_{11}(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

$$\forall x \in D_{f_{12}}, f'_{12}(x) = \frac{1}{2x}$$

$$\forall x \in D_{f_{13}}, f'_{13}(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$$\forall x \in D_{f_{14}}, f'_{14}(x) = \frac{4x^3 + x^2 + 1}{x^2(1+x^2)}$$

$$\forall x \in D_{f_{15}}, f'_{15}(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2(x^2 - x + 1)}$$

$$\forall x \in D_{f_{16}}, f'_{16}(x) = -(\ln x)^2 - 2(\ln x) + 2x$$

$$\forall x \in D_{f_{17}}, f'_{17}(x) = \frac{-x-1+\ln(-x)}{(x+1)^2}$$

$$\forall x \in D_{f_8}, f'_8(x) = \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$$

ACTIVITE 2

Calculons les limites

$$\begin{aligned} N^{\circ}1 &= \ln 2 ; N^{\circ}2 = -3 ; N^{\circ}3 = +\infty ; N^{\circ}4 = +\infty ; \\ N^{\circ}5 &= -\infty ; N^{\circ}6 = 0 ; N^{\circ}7 = 0 ; N^{\circ}8 = +\infty ; \\ N^{\circ}9 &= +\infty ; N^{\circ}10 = 2 ; N^{\circ}11 = 0 ; N^{\circ}12 = 0 ; \\ N^{\circ}13 &= 0 ; N^{\circ}14 = -1 ; N^{\circ}15 = +\infty ; N^{\circ}16 = 0 ; N^{\circ}17 = 2 ; \\ N^{\circ}18 &= 1 ; N^{\circ}19 = 2 ; N^{\circ}20 = 1 ; \\ N^{\circ}21 &= 0 ; N^{\circ}22 = -\infty ; N^{\circ}23 = 0 ; N^{\circ}24 = -\ln 3 \\ N^{\circ}25 &= -\infty ; N^{\circ}26 = +\infty ; N^{\circ}27 = -\infty ; \\ N^{\circ}28 &= 0 ; N^{\circ}29 = 2 ; N^{\circ}30 = 0 \end{aligned}$$

ACTIVITE 12 :

Partie A :

$$g(x) = x^3 - x + 1 - 2 \ln x$$

1°) a- Démontrons que $\forall x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = \frac{P(x)}{x}$ où P est

un polynôme de degré 3 à déterminer.

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x}$$

$$g'(x) = \frac{3x^3 - x - 2}{x}$$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{P(x)}{x}$ avec $P(x) = 3x^3 - x - 2$

b- Vérifions que $P(1) = 0$ puis factorise P et détermine le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x .

$$\text{On a : } P(1) = 3(1)^3 - (1) - 2$$

$$P(1) = 3 - 3 = 0 \text{ donc } \underline{P(1) = 0}$$

Factorisons $P(x)$

$$\text{On trouve : } P(x) = (x - 1)(3x^2 + 3x + 2)$$

Signe de $P(x)$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } 3x^2 + 3x + 2 = 0$$

Le discriminant de $3x^2 + 3x + 2$ est $\Delta = -15$; $-15 < 0$ et $3 > 0$ alors le signe de $P(x)$ sur $]0; +\infty[$ est celui de $x - 1$ car $3x^2 + 3x + 2 > 0$

$$\text{Donc on a : } \begin{cases} \forall x \in]0; 1[, P(x) < 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, P(x) > 0 \\ P(1) = 0 \end{cases}$$

c- Etudions le sens de variation de g .

Sur $]0; +\infty[$, le signe de $g'(x)$ est celui de $P(x)$ car $x > 0$

$$\text{donc on a : } \begin{cases} \forall x \in]0; 1[, g'(x) < 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, g'(x) > 0 \\ g'(1) = 0 \end{cases}$$

D'où g est strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

2°) Déduisons-en le signe de $g(x)$.

g est strictement décroissante sur $]0; 1]$ donc :

$$x \leq 1 \Rightarrow g(x) \geq g(1)$$

$$\Rightarrow g(x) \geq 1$$

g est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

$$x \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq g(1)$$

$$\Rightarrow g(x) \geq 1$$

Ainsi donc $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) \geq 1$

d'où $g(x) > 0, \forall x \in]0; +\infty[$.

Partie B :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x + \ln x}{x^2}$$

3°) a- Déterminons $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 + \frac{x + \ln x}{x^2}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \ln x) \times \frac{1}{x^2} = -\infty$$

$$\text{Donc : } \underline{\underline{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty}}$$

b- Démontrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} = 0.$$

Déduisons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} = 0$ donc

$$\underline{\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}}$$

c- Justifie que les droites (D) et (Δ) d'équations respectives

$x = 0$ et $y = x + 1$ sont asymptotes à la courbe (C).

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ donc (D) : $x = 0$ est asymptote à (C)

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} = 0$ donc

(Δ) : $y = x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

4°) $\forall x \in]0; +\infty[, h(x) = x + \ln x$

a- Déterminons l'image de $]0; +\infty[$ par h
 h est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $h'(x) > 0$ alors h est strictement croissante

sur $]0; +\infty[$ donc $h(]0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right[$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ donc

$h(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$.

b- Dédoublons que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$ et démontrons que $0,56 < \alpha < 0,57$.

h est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $h(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$ donc $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$.

De plus $0,56 \in]0; +\infty[$ et $0,57 \in]0; +\infty[$;

$h(0,56) \approx -0,0198$ et $h(0,57) \approx 0,0079$

On a : $h(0,56) \times h(0,57) < 0$ donc $0,56 < \alpha < 0,57$.

c- Déterminons la position de (C) par rapport à (Δ) .

$$\forall x \in]0; +\infty[, \left[\frac{f(x) - (x+1)}{x^2} \right] = \frac{h(x)}{x^2}$$

Sur $]0; +\infty[$, le signe de $\left[\frac{f(x) - (x+1)}{x^2} \right]$ est celui de $h(x)$ car $x^2 > 0$.

h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $h(\alpha) = 0$ alors

$\forall x \in]0; \alpha[, h(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, h(x) > 0$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, \left[\frac{f(x) - (x+1)}{x^2} \right] < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, \left[\frac{f(x) - (x+1)}{x^2} \right] > 0 \\ \forall x \in \{\alpha\}, \left[\frac{f(x) - (x+1)}{x^2} \right] = 0 \end{cases}$$

D'où :

- sur $]0; \alpha[, (C)$ est en dessous de (Δ) .
- sur $] \alpha; +\infty[, (C)$ est au dessus de (Δ) .
- sur $x = \alpha$, (C) et (Δ) sont confondues.

5°) Etudie le sens de variation de f .

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$ on trouve

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ car $x^3 > 0$, $\forall x \in]0; +\infty[$.

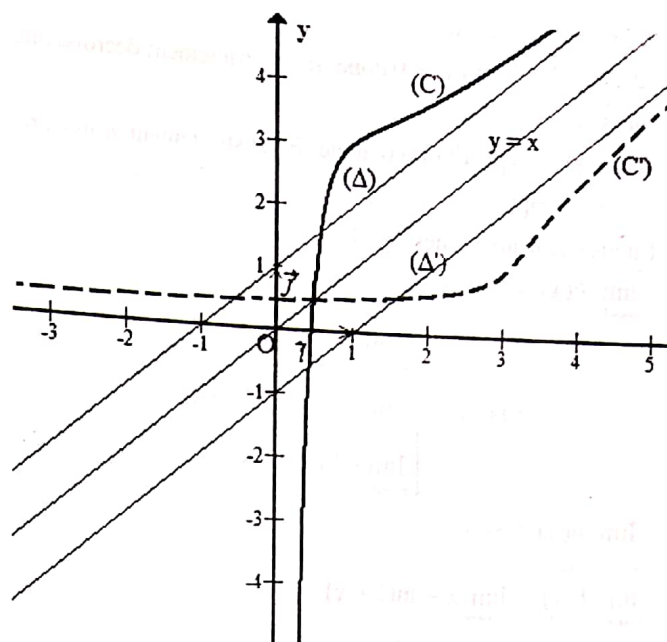
Or $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$ (Partie A) donc $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

6°) Dédoublons de la question 5°) l'existence d'une valeur unique β telle que : $f(\beta) = 0$.

f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $f(]0; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$; $0 \in]-\infty; +\infty[$ donc il existe une valeur unique β dans $]0; +\infty[$ telle que : $f(\beta) = 0$

7°) Construisons (C) et (Δ) dans un repère orthonormé

$$(O; \vec{i}, \vec{j}).$$



8°) Démonstre que f admet une bijection réciproque f^{-1} puis construis la courbe (C') de f^{-1} dans le repère que (C).

f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $f(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$ donc f est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ par conséquent elle admet une bijection réciproque de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$.

Sa courbe (C') est symétrique par rapport à la droite d'équation : $y = x$ voir courbe en pointillée.

ACTIVITE15 :

Partie A :

1°) Etudions les variations de h .

$$h(x) = x - \ln(1+x)$$

Soit D_h l'ensemble de définition de h

$$D_h = \left\{ x \in]-1; +\infty[\mid 1+x > 0 \right\}$$

$$1+x > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

$$\Leftrightarrow x \in]-1; +\infty[$$

$$\forall x \in]-1; +\infty[, 1+x > 0 \text{ donc } D_h =]-1; +\infty[$$

La fonction polynôme $u_1 : x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $] -1; +\infty[$ et la fonction polynôme

$u_2 : x \mapsto x+1$ est dérivable et strictement positive sur $] -1; +\infty[$ or $h = u_1 - \ln u_2$ sur $] -1; +\infty[$ donc h est dérivable sur $] -1; +\infty[$,

$$\forall x \in]-1; +\infty[, h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \text{ on a donc } h'(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$\forall x \in]-1; 0[, h'(x) < 0$ donc h est strictement décroissante sur $]-1; 0[$.

$\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Limites de h aux bornes de D_h

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x - \ln(1+x)$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} 1+x = 0^+ \text{ donc} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(1+x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1+x}{x} \times \frac{\ln(1+x)}{1+x} \right) = +\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} h = +\infty$$

Tableau de variation de h

x	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$+$
$h(x)$	$+\infty$	$h(0)$	$+\infty$

$$h(0) = 0$$

2°) Démontrons que $\forall x \in]-1; +\infty[, h(x) \geq 0$ h admet sur $]-1; +\infty[$ un minimum en 0 qui est $h(0)$ or $h(0) = 0$ d'où $\forall x \in]-1; +\infty[-\{0\}, h(x) > 0$ et $\forall x \in \{0\}, h(x) = 0$. Par conséquent $\forall x \in]-1; +\infty[, h(x) \geq 0$.

Partie B :

$$\forall x \in]-\infty; -1], g(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x}$$

$$\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[, g(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right) \ln(1+x)$$

3°) Démontrons que g admet en 0 un prolongement par continuité p .

Soit D_g le domaine de définition de g

$$D_g = \mathbb{R}^*$$

On a : $0 \notin D_g$ (a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \ln(1+x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{x} \right) \ln(1+x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = (x+1) \times \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \end{cases}$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ et $1 \in \mathbb{R}$ (b)

Alors de (a) et (b) g admet un prolongement p par continuité en 0 et on a :

$$\begin{cases} p(x) = g(x), \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \\ p(0) = 1 \end{cases}$$

4°) a- Etudions la continuité de g en -1 .

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x} = g(-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \ln(1+x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} \times (1+x) \ln(1+x) = 0 \text{ car :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (1+x) = 0^+ \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = g(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

d'où g est continue en -1 .

b- Etudions la dérivabilité de g en -1 .

Pour $x < -1$ on trouve : $\frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \frac{x + 4}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 4}{x} = -3$$

$-3 \in \mathbb{R}$ donc g est dérivable à gauche en -1

$$\text{et } g'_g(-1) = -3$$

$$\text{Pour } x > -1 \text{ on trouve : } \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} \times \ln(1+x) = +\infty \text{ donc } g \text{ n'est}$$

pas dérivable à droite en -1 par suite g n'est pas dérivable en -1

Interprétation géométrique :

$g'(-1) = -3$ donc $(\mathcal{C})$ admet à gauche au point

$M_0(-1; 0)$ une demi-tangente définie par : $\begin{cases} y = -3x \\ x \leq -1 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = +\infty \text{ donc } (\mathcal{C}) \text{ admet à droite au point}$$

$M_0(-1; 0)$ une demi-tangente définie par : $\begin{cases} x = -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Partie C :

$$\begin{cases} f(x) = g(x), x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

5°) a- Démontrons que $\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$$

La fonction f est dérivable sur chacun des intervalles

$] -1; 0[$ et $] 0; +\infty[$

$\forall x \in]-1; 0[\cup] 0; +\infty[$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{1+x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \text{ or } h(x) = x - \ln(1+x) \text{ d'où}$$

$$\forall x \in]-1; 0[\cup] 0; +\infty[, f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$$

Déduisons-en le sens de variation de f sur $] -1; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$

$\forall x \in]-1; 0[\cup] 0; +\infty[, h(x) > 0$ donc

$\forall x \in]-1; 0[\cup] 0; +\infty[, f'(x) > 0$ d'où f est strictement croissante sur $] -1; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$

b- Calculons $f'(x)$ pour $x \in]-\infty; -1[$ et déduisons-en le signe de f' sur $] -\infty; -1[$

f est dérivable sur $] -\infty; -1[$ et $\forall x \in]-\infty; -1[$,

$$f'(x) = \frac{x(2x+5) - x^2 - 5x - 4}{x^2} \text{ donc } \forall x \in]-\infty; -1[$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - 4$

Posons $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 2$ or

$-2 \in]-\infty; -1[$ et $-2 \notin]-\infty; -1[$ donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$x = -2$

$\forall x \in]-\infty; -2[, f'(x) > 0$

$\forall x \in]-2; -1[, f'(x) < 0$

c- Calculons limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x) = +\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$$

d- Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(-2)$	0	1	$+\infty$

$$f(-2) = \frac{4 - 10 + 4}{-2} = 1$$

6°) a- Démontrons que $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2} \times \ln(1+x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2} \times \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses en $+\infty$.

b- Démontrons que la droite $(D): y = x + 5$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+5)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x + 4}{x} - (x+5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+5)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ d'où la droite } (D)$$

d'équation $y = x + 5$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

7°) a- Précisons les points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe (OI)

Posons $f(x) = 0$ avec $x \in D_f$

$$\text{*Si } x \in]-\infty; -1], f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 5x + 4}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \text{ ou } x = -1$$

Or $-4 \in]-\infty; -1]$ et $-1 \in]-\infty; -1]$

$$\text{*Si } x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[, f(x) = 0$$

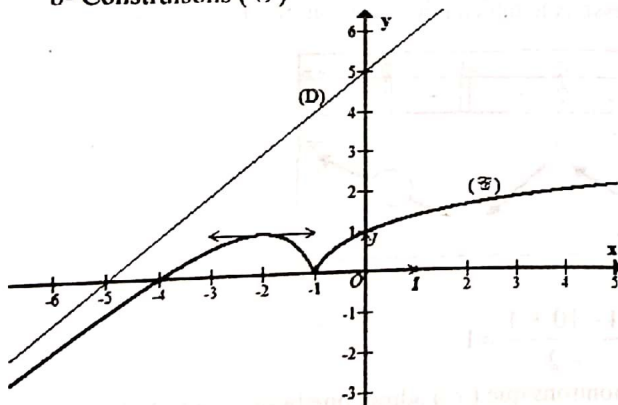
$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} = 0 \text{ ou } \ln(1+x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 0 \text{ or } 0 \notin]-1; 0[\cup]0; +\infty[\text{ et }$$

$-1 \notin]-1; 0[\cup]0; +\infty[$. En conclusion $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses aux points $T_1(-4; 0)$ et $T_2(-1; 0)$.

b- Construisons $(\mathcal{C})$



ACTIVITE 16 :

$$f(x) = -2x + \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

1°) Déterminons l'ensemble de définition D de f .

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0 \text{ et } x+1 \neq 0 \right\} \text{ donc}$$

$$D = \mathbb{R} - \{-1; 1\}.$$

2°) Prouvons que f est impaire.

Soit $x \in D$

$$x \in D \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ et } x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow -x \neq 1 \text{ et } -x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow -x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

$$x \in D \Leftrightarrow -x \in D$$

$$f(-x) = 2x + \ln \left| \frac{-x+1}{-x-1} \right|$$

$$= 2x + \ln \left| \frac{-(x-1)}{-(x+1)} \right|$$

$$= 2x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

$$f(-x) = 2x - \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

$$f(-x) = - \left(-2x + \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right) = -f(x)$$

$\forall x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$ donc f est impaire.

3°) Etudions les variations de f

Limites aux bornes de D

On obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

Dérivée

f est dérivable en tout point de D et $\forall x \in D$,

$$f'(x) = -2 + \frac{x-1-x-1}{\frac{(x-1)^2}{x+1}}$$

$$f'(x) = -2 + \left(\frac{-2}{(x-1)^2} \right) \times \frac{x-1}{x+1} \text{ et on trouve } \forall x \in D,$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2}{(x-1)(x+1)}$$

Sens de variation de f

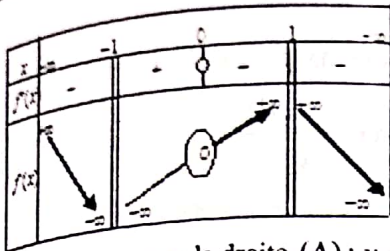
Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$-2x^2$	-	-	-	-	-
$(x-1)(x+1)$	+	-	-	+	+
$f'(x)$	-	+	-	+	-

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$.

$\forall x \in]-1; 0[\cup]0; 1[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-1; 1[$.

Tableau de variation de f



4°) Démontrons que la droite $(\Delta): y = -2x$ est asymptote à la courbe (C)

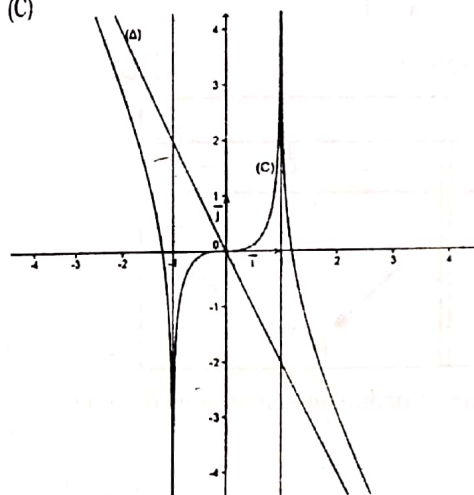
$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) + 2x] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = 0 \text{ donc la droite } (\Delta)$$

d'équation $y = -2x$ est asymptote à la courbe (C) de f au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$

5°) Traçons (Δ) et (C)

$\lim_{x \rightarrow -1} f = -\infty$ alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à (C)

$\lim_{x \rightarrow 1} f = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à (C)



ACTIVITE 20:

1°) Déterminons le domaine de définition D de f

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / x - 3 \neq 0 \right\}$$

$$D =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$$

2°) Vérifions que $\forall x \in D, f'(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|$

f est dérivable en tout point de D et $\forall x \in D$, d'où

$$f'(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|, \forall x \in D$$

3°) a- Calculons $f''(x)$

f' est dérivable en tout point de D et $\forall x \in D$,

$$f''(x) = \frac{x-7}{(x-3)^2}$$

b- Dédisons-en le sens de variation de f'

$\forall x \in D, (x-3)^2 > 0$ donc le signe de $f''(x)$ est celui de $x-7$ ainsi :

$\forall x \in]-\infty; 3[\cup]3; 7[, f''(x) < 0$

$\forall x \in]7; +\infty[, f''(x) > 0$

$f''(x) = 0$ si $x = 7$ alors f' strictement décroissante sur $]-\infty; 3[$ et sur $]3; 7[$ et strictement croissante sur $]7; +\infty[$

c- Calculons les limites de f' en $-\infty$ et à gauche en 3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-3} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln|x-3| = +\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f' = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|$$

$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{x-3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \ln|x-3| = -\infty \end{cases}$$

4°) a- Prouvons que f' s'annule sur $]-\infty; 3[$ pour une seule valeur α

f' est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 3[$ et

$$f'(-\infty; 3[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f'; \lim_{x \rightarrow 3^-} f' \right[=]-\infty; +\infty[\text{ or } 0 \in]-\infty; +\infty[\text{ donc}$$

f' s'annule sur $]-\infty; 3[$ pour une seule valeur α

b- Donnons un encadrement de α d'amplitude 0,1

On trouve :

$$f'(0,7) \approx 0,0938 \text{ et } f'(0,8) \approx -0,0297 \text{ d'où}$$

$$0,7 < \alpha < 0,8$$

5°) Etudions le signe de f' sur $]-\infty; 3[$ et $]3; +\infty[$

$f'(\alpha) = 0$ et on a : f' continue et ne s'annule pas sur chacun des intervalles $]-\infty; \alpha[$, $]\alpha; 3[$ et $]3; +\infty[$ donc

f' garde un signe constant sur ces intervalles.

* $0,7 \in]-\infty; \alpha[$ et $f'(0,7) > 0$ donc $\forall x \in]-\infty; \alpha[$,

$$f'(x) > 0$$

* $0,8 \in]\alpha; 3[$ et $f'(0,8) < 0$ donc $\forall x \in]\alpha; 3[$, $f'(x) < 0$

* $4 \in]3; +\infty[$ et $f'(4) = 5 > 0$ donc $\forall x \in]3; +\infty[$,

$$f'(x) > 0. \text{ En résumé :}$$

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; \alpha[\cup]3; +\infty[\\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]\alpha; 3[\\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \end{cases}$$

6°) Dressons le tableau de variation de f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty; \lim_{x \rightarrow \alpha} f = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3} f = -\infty$$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	α	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$				

7°) Etudions les branches infinies à (C)

* $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 3$ est asymptote à (C).

* $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc (C) admet au voisinage de $-\infty$, une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc (C) admet au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

8°) Calculons les coordonnées des points d'intersection de (C) et de l'axes des abscisses

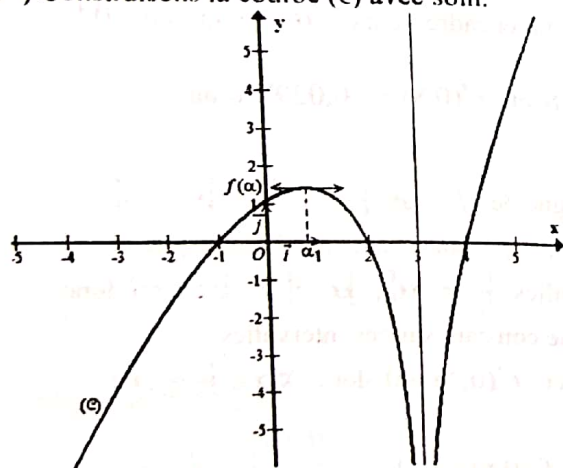
Posons $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)\ln|x-3| = 0 \text{ pour } x \neq 3$$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \text{ ou } \ln|x-3|=0$$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$ ou $x = 4$ d'où ces points sont ceux de coordonnées : $(-1; 0)$, $(2; 0)$ et $(4; 0)$

9°) Construisons la courbe (C) avec soin.



ACTIVITE 23 :

1°) a- Etudions les variations de g

$$g(x) = \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$$

Soit D_g l'ensemble de définition de g

$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0 \right\}$$

$$x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\text{Donc } D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

* g est dérivable en tout point de D_g et

$$\forall x \in D_g, \text{ on trouve : } g'(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

* Le signe de $g'(x)$ est celui de $x-2$ donc :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1[\cup]1; 2[$$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]2; +\infty[$ alors g est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; 2[$ et strictement croissante sur $]2; +\infty[$

* Limite aux bornes de D_g

On trouve :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - (x-1)\ln(x-1)}{x-1} = +\infty$$

* Tableau de variation g :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$g(2)$	$+\infty$

b- Calculons $g(0)$ et déduisons-en le signe de $g(x)$

$$g(0) = 0$$

* g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$ et

$$g(0) = 0 ; 0 \in]-\infty; 1[\text{ donc :}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, x < 0 \Rightarrow g(x) > 0$$

$$\forall x \in]0; 1[, x > 0 \Rightarrow g(x) < 0$$

* Sur $]1; +\infty[$, g admet un minimum en 2 qui est $g(2)$. Or

$$g(2) = 2 > 0 \text{ donc } \forall x \in]1; +\infty[, g(x) > 0$$

$$\text{En résumé : } \begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]0; 1[, g(x) < 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

2°) a- Etudions les variations de f

$$f(x) = x \ln|x-1|$$

- Soit D_f l'ensemble de définition de f

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0 \right\}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

est dérivable en tout point de D_f et $\forall x \in D_f$,

$$f'(x) = \ln|x-1| + \frac{x}{x-1}$$

$f'(x) = g(x)$ le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$. D'après 1°) b- on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]0; 1[, f'(x) < 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

Alors f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $]1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0; 1[$

Limite aux bornes de D_f

$$\text{On trouve : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

Tableau de variation de f

$$f(0) = 0$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$

b- Etudions les branches infinies de (C)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty, \text{ calculons } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln|x-1| = +\infty \text{ donc la courbe (C) admet}$$

une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

c- Démontrons que (C) admet un point d'inflexion.

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, f''(x) = g'(x)$$

$$g'(2) = 0 \text{ et } \forall x \in]-\infty; 1[\cup]1; 2[, g'(x) < 0 \text{ et}$$

$\forall x \in]2; +\infty[, g'(x) > 0$ alors la dérivée seconde f'' de f s'annule en 2 en changeant de signe par suite le point A (2; f(2)) soit A (2; 0) est un point d'inflexion de (C).

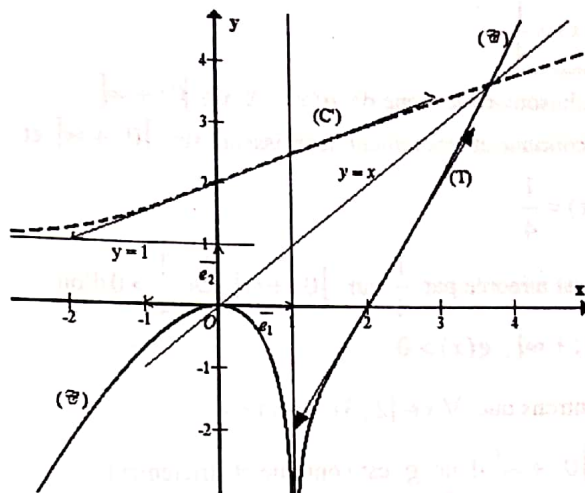
d- Donnons une équation de la tangente (T) à (C) en A.

$$(T) : y = f'(2)(x-2) + f(2) \text{ soit}$$

$$(T) : y = 2(x-2).$$

c- Traçons (T) et (C)

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x=1$ est asymptote à (C)



3°) a- Justifions que h est bijective.

f est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et

$f(]1; +\infty[) = \mathbb{R}$ d'où h est bijective.

b- Calculons $h(1+e)$ puis déduisons-en $(h^{-1})'(1+e)$

$$h(1+e) = f(1+e) = 1+e \text{ donc } h(1+e) = 1+e$$

$$h(1+e) = 1+e \Leftrightarrow h^{-1}(1+e) = 1+e \text{ donc}$$

$$(h^{-1})'(1+e) = \frac{1}{h'(h^{-1}(1+e))} \text{ on trouve } h^{-1}(1+e) = \frac{e}{1+2e}$$

c- Traçons (C')

voir courbe en pointillé.

ACTIVITE 25 :

I-

1°) a- Etudions le sens variations de g

$$g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$$

* Soit D_g le domaine de définition de g

$$D_g =]0; +\infty[$$

* g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, \text{ on trouve : } g'(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$$

$$* \forall x \in]0; +\infty[, -4 < 0 \text{ et } x(x+2)^2 > 0 \text{ donc } g'(x) < 0$$

$$, \forall x \in]0; +\infty[$$

Alors g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

b- Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4} \text{ et on obtient}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{4}$$

c- Dédudons-en le signe de $g(x)$, $\forall x \in]0; +\infty[$
 g étant continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{4}$$

Alors g est minorée par $\frac{1}{4}$ sur $]0; +\infty[$. Or $\frac{1}{4} > 0$ d'où

$$\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$$

2°) Démontrons que $\forall x \in [2; 3], g(x) < \frac{1}{2}$

$[2; 3] \subset]0; +\infty[$ donc g est continue et strictement décroissante sur $[2; 3]$.

$$\forall x \in [2; 3], 2 \leq x \leq 3 \Rightarrow g(3) \leq g(x) \leq g(2)$$

$$g(3) \approx 0,3608$$

$$g(2) \approx 0,4431 < \frac{1}{2} \text{ d'où } \forall x \in [2; 3], g(x) < \frac{1}{2}$$

3°) a- Déterminons $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

$$\begin{aligned} \text{Pour } x = \frac{1}{t}, x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) &= \frac{1}{t} \ln\left(\frac{\frac{1}{t}+2}{\frac{1}{t}}\right) \\ &= \frac{1}{t} \ln(2t+1) \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{x}. \text{ Si } x \rightarrow 0^+, t \rightarrow +\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln(2t+1)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t+1}{t} \times \frac{\ln(2t+1)}{2t+1} = 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 0$$

b- Démontrons que f est continue en 0.

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, \text{ si } x > 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$D_f = [0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

on a ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ d'où

f est continue en 0

(f est définie uniquement à droite en 0)

4°) *Etudions la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = +\infty \text{ par suite}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty \text{ d'où } f \text{ n'est pas dérivable en 0.}$$

*Interprétation géométrique

La courbe (C) de f admet à droite au point d'abscisse 0 une

demi tangente définie par le système :
$$\begin{cases} x = 0 \\ y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

5°) Etudions le sens de variation de f

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x-x-2}{x^2} \times x + \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x+2} + \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$$

$f'(x) = g(x)$ or $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$ donc
 $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

6°) a- Démontrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \times \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} \end{aligned}$$

Posons $h = \frac{2}{x}$, $x \rightarrow +\infty$, $h \rightarrow 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \times \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 \times \frac{\ln(1+h)}{h} = 2 \text{ d'où}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2$$

b-Déduisons-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right) = +\infty \text{ d'où}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

c- Démontrons que la droite $(\Delta): y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$ est

asymptote à (C) en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - 2 = 0 \text{ d'où la}$$

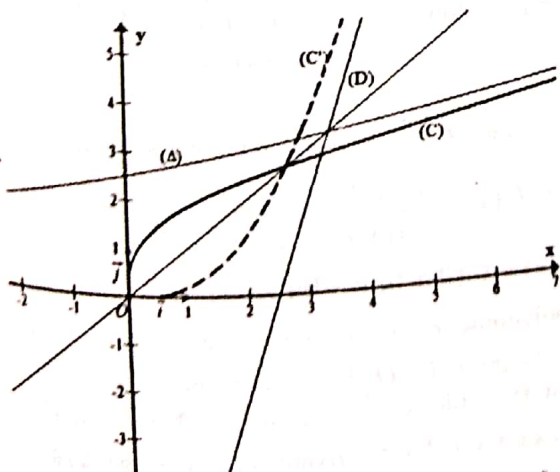
droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$ est asymptote à la courbe

(C) de f en $+\infty$

7°) Traçons dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la droite (Δ) , (C) et $(D) y = x$

Dressons le tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$+\infty$



8°) a- Démontrons f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $\mathbb{K}$

f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $\mathbb{K}$

$$f([0; +\infty[) = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

b- Traçons (C') courbe de f^{-1}

(Voir courbe en pointillé)

c- Démontrons que $A(1 + \ln 4; 2) \in (C')$

$$f(2) = 2 \ln 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$f(2) = \ln 4 + 1 \text{ d'où } A(1 + \ln 4; 2) \in (C')$$

d- Calculons $(f^{-1})'(1 + \ln 4)$

$$(f^{-1})'(1 + \ln 4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1 + \ln 4))}$$

$$(f^{-1})'(1 + \ln 4) = \frac{1}{f'(2)} \text{ et on trouve}$$

$$(f^{-1})'(1 + \ln 4) = \frac{4}{-1 + 4 \ln 2}$$

II-

9°) a- Démontrons que $\forall x \in [2; 3], h'(x) < 0$

$$\forall x \in [2; 3], h(x) = f(x) - x$$

h est dérivable sur $[2; 3]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[2; 3]$.

$$\forall x \in [2; 3], h'(x) = g(x) - 1$$

$$\text{Or } \forall x \in [2; 3], g(x) < \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) - 1 < -\frac{1}{2} \text{ par suite}$$

$$\forall x \in [2; 3], h'(x) < 0$$

b- Déduisons-en le sens de variation de h

D'après 9°) a- h est strictement décroissante sur $[2; 3]$.

c- Démontrons que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique dans I

h est continue et strictement décroissante sur $[2; 3]$ et

$$h([2; 3]) = [h(3); h(2)]$$

$$h(2) = 0,3863 > 0 \text{ et } h(3) = -0,2175 < 0. \text{ Donc}$$

$0 \in h([2; 3])$ par suite l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[2; 3]$

10°) a- Démontrons que $\forall x \in [2; 3], 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$

$$\forall x \in [2; 3], f''(x) = g'(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2} \text{ donc } f' \text{ est}$$

continue et strictement décroissante sur $[2; 3]$ donc :

$$x \in [2; 3] \Leftrightarrow f'(3) \leq f'(x) \leq f'(2)$$

$$f'(3) = 0,3608 \text{ et } f'(2) = 0,4431$$

alors $x \in [2; 3]$, $\Leftrightarrow 0 < f'(3) \leq f'(x) \leq f'(2) < \frac{1}{2}$ d'où

$$\forall x \in [2; 3], 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$$

b- Dédudons-en que $\forall x \in I, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

f est dérivable sur $[2; 3]$ et $\forall x \in [2; 3]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

$\alpha \in [2; 3]$ donc d'après la conséquence de l'inégalité des accroissements finis appliqué à f sur $[2; 3]$ on a :

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|; f(\alpha) = \alpha$$

(d'après 9° c-) d'où $\forall x \in I, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

11°) Démontrons que $(f^{-1})'(\alpha) = \frac{2\alpha(\alpha+2)}{2\alpha^2 - \alpha - 2}$

$$(f^{-1})'(\alpha) = \frac{1}{f'[f^{-1}(\alpha)]}$$

$$= \frac{1}{f'(\alpha)}$$

$$f'(\alpha) = \ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) - \frac{2}{\alpha+2} + \frac{1}{4}$$

or $f(\alpha) = \alpha \Rightarrow \ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) = \frac{3\alpha-2}{4\alpha}$ donc

$$f'(\alpha) = \frac{3\alpha-2}{4\alpha} - \frac{2}{\alpha+2} + \frac{1}{4}$$

$$f'(\alpha) = \frac{(3\alpha-2)(\alpha+2) - 8\alpha + \alpha(\alpha+2)}{4\alpha(\alpha+2)}$$

$$f'(\alpha) = \frac{4\alpha^2 - 2\alpha - 4}{4\alpha(\alpha+2)} = \frac{2\alpha^2 - \alpha - 2}{2\alpha(\alpha+2)} \text{ d'où}$$

$$(f^{-1})'(\alpha) = \frac{2\alpha(\alpha+2)}{2\alpha^2 - \alpha - 2}$$

ACTIVITE 26 :

$$f(x) = x + 1 + \ln\left(\frac{|x|}{x+2}\right)$$

1°) A- Justifions que l'ensemble de définition de f est $D =]-2; 0[\cup]0; +\infty[$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0 \text{ et } \frac{|x|}{x+2} > 0 \right\}$$

$$x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$\frac{|x|}{x+2} > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } x+2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } x > -2$$

$$\Leftrightarrow x \in]-2; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{-2\} \cap]-2; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$=]-2; 0[\cup]0; +\infty[\text{ d'où } D =]-2; 0[\cup]0; +\infty[$$

b- Calculons les limites de f aux bornes de D

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f = \lim_{x \rightarrow -2^+} x + 1 + \ln\left(\frac{|x|}{x+2}\right) = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} x + 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x|}{x+2} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 + \ln\left(\frac{|x|}{x+2}\right) = -\infty \text{ car :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x+2} = 0^+ \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + \ln\left(\frac{|x|}{x+2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+2} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$$

2°) a- Justifions que f est dérivable en tout nombre réel x

de D et on a : $f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x(x+2)}$

$$\forall x \in D, f(x) = x + 1 + \ln|x| - \ln(x+2)$$

La fonction polynôme $t_1 : x \mapsto x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier en tout point de D . La fonction polynôme $t_2 : x \mapsto x$ est dérivable et non nulle sur D . La fonction polynôme $t_3 : x \mapsto x + 2$ est dérivable et strictement positive sur D or $f = t_1 + \ln|t_2| + \ln t_3$ sur D donc f est dérivable en tout nombre réel x de D

$$\forall x \in D, f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$$

$$f'(x) = \frac{x(x+2) + x + 2 - x}{x(x+2)} \text{ d'où } \forall x \in D,$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x(x+2)}$$

b- Dédudons-en le sens de variation de f

$\forall x \in D$, posons $x^2 + 2x + 2 = 0$ le discriminant de cette équation est : $\Delta = -4 < 0$ donc $\forall x \in D$ $x^2 + 2x + 2 > 0$ et le signe de f' est celui de $x(x+2)$

donc $\forall x \in]-2; 0[$, $f'(x) < 0$ et $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement décroissante sur $]-2; 0[$ et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

c- Dressons le tableau de variation de f .

x	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

d- Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une est -1 et l'autre α et $0,5 < \alpha < 0,6$

* f est continue et strictement décroissante sur $]-2; 0[$ et $f(]-2; 0[) = \mathbb{R}$, or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]-2; 0[$. De plus $-1 \in]-2; 0[$ et $f(-1) = 0$

* f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $f(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$, or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$

* $]0,5; 0,6[\subset]0; +\infty[$ et $\begin{cases} f(0,5) \approx -0,1094 < 0 \\ f(0,6) \approx 0,1337 > 0 \end{cases}$ donc $0,5 < \alpha < 0,6$

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une est -1 et l'autre α vérifiant $0,5 < \alpha < 0,6$.

e- Déterminons une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) en -1 .

$$(T): y = f'(-1)(x+1) + f(-1) \text{ et on trouve}$$

$$(T): y = -x - 1$$

3°) a- Etudions le sens de variation de g

Soit D_g le domaine de définition de g

$$D_g =]-2; 0[$$

g est dérivable sur $]-2; 0[$ et $\forall x \in]-2; 0[$, on trouve :

$$g'(x) = \frac{2(x+1)^2}{x(x+2)}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$\forall x \in]-2; 0[$, $x(x+2) < 0$ et $2(x+1)^2 > 0$ donc

$\forall x \in]-2; 0[$, $g'(x) < 0$ alors g est strictement décroissante sur $]-2; 0[$.

b- Calculons $g(-1)$ et déduisons-en le sens de variation de g

$$* g(-1) = 0$$

* La fonction g étant continue et strictement décroissante sur $]-2; 0[$ et $g(-1) = 0$,

$$\forall x \in]-2; -1[, x < -1 \Rightarrow g(x) > g(-1) \Rightarrow g(x) > 0$$

$$\forall x \in]-1; 0[, x > -1 \Rightarrow g(x) < g(-1) \Rightarrow g(x) < 0$$

Conclusion :

$$\begin{cases} \forall x \in]-2; -1[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]-1; 0[, g(x) < 0 \\ \forall x \in \{-1\}, g(x) = 0 \end{cases}$$

c- Précisons la position relative de la courbe (C) et de la tangente (T) sur $]-2; 0[$.

Il suffit d'étudier le signe de $f(x) - (-x-1)$ sur $]-2; 0[$.

$$\forall x \in]-2; 0[, f(x) - (x-1) = x+1 + \ln\left(\frac{-x}{x+2}\right) + x+1$$

$$= 2x+2 + \ln\left(\frac{-x}{x+2}\right) = g(x)$$

$\forall x \in]-2; -1[, f(x) - (-x-1) > 0$ donc (C) est au dessus de (T) sur $]-2; -1[$

$\forall x \in]-1; 0[, f(x) - (-x-1) < 0$ donc (C) est en dessous de (T) sur $]-1; 0[$

Pour $x = -1$, $f(x) - (-x-1) = 0$ donc (C) et (T) se coupent.

4°) a- Etudions les branches in finies de (C)

- $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote à (C).

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C).

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) = 1 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) = 1 \text{ donc la droite}$$

d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

b- Etudions la position relative de (C) et la droite $(\Delta): y = x + 1$ sur $]0; +\infty[$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) - (x+1) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

Posons $f(x) - (x+1) = 0$ avec $x \in]0; +\infty[$

$$f(x) - (x+1) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+2} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = x + 2$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2 \text{ (absurde)}$$

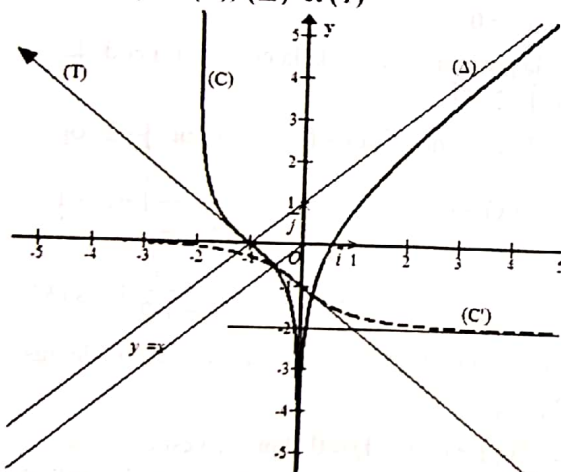
Donc $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) - (x+1) \neq 0$

Posons $t(x) = f(x) - (x+1)$

t est continue et non nulle sur $]0; +\infty[$, donc elle garde un signe constant sur $]0; +\infty[$ or $1 \in]0; +\infty[$ et

$t(1) = -\ln 3 < 0$ donc $\forall x \in]0; +\infty[, t(x) < 0$ alors (C) est en dessous de (Δ) sur $]0; +\infty[$.

c- Traçons (C), (Δ) et (T)



5°) a- Déterminons J

La fonction f étant continue et strictement décroissante sur

$$]-2; 0[\text{ alors } f(]-2; 0[) =]\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)[$$

$$= \mathbb{R} \text{ d'où } J = \mathbb{R}$$

b- Démontrons que h est une bijection.

f est continue et strictement décroissante sur $]-2; 0[$ et $f(]-2; 0[) = J$ d'où h est bijection est bijection.

c- Démontrons que h^{-1} est dérivable sur J

f est dérivable sur $]-2; 0[$ et $\forall x \in]-2; 0[, f'(x) \neq 0$ donc h^{-1} est dérivable sur $f(]-2; 0[) = J$ d'où h^{-1} est dérivable sur J

d- Dressons le tableau de variation de h^{-1}

h étant continue et strictement décroissante sur $]-2; 0[$, alors h^{-1} est continue et strictement décroissante sur $f(]-2; 0[) = J$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h^{-1}(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} h^{-1}(x) = 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$h^{-1}(x)$	0	-2

Déduisons-en que (C) admet deux asymptotes dont on précisera les équations.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h^{-1}(x) = -2$ alors la droite d'équation $y = -2$ est asymptote à (C') en $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h^{-1}(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C') en $-\infty$

Traçons (C')

Voir figure (Courbe en pointillé)

ACTIVITE 27 :

Partie A :

$$g(x) = -x + 1 + x \ln x$$

1°) Etudions les variations de g

Soit D_g le domaine de définition de g

$$D_g =]0; +\infty[$$

*Dérivée

g est dérivable sur $]0; +\infty[$, comme somme de fonctions de $]0; +\infty[$ dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[, \ln x$ trouve $g'(x) = \ln x$

*Sens de variation

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$\forall x \in]0; 1[, g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0; 1[$

$\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$

*Limite aux bornes de $]0; +\infty[$

On obtient : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

*Tableau de variation de g

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$	1	$g(1)$	$+\infty$

$g(1)=0$
 2°) Déduisons-en le signe de g
 $g'(1)=0$; $\forall x \in]0; 1[$, $g'(x) < 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[$,
 $g'(x) > 0$ donc g admet sur $]0; +\infty[$ un minimum en qui
 est $g(1)$. Or $g(1)=0$ donc $]0; +\infty[-\{1\}$, $g(x) > 0$ et
 $\forall x \in \{1\}$, $g(x)=0$

Partie B :
 3°) Déterminons l'ensemble de définition de f

Soit E l'ensemble de définition de f

$$E = \left\{ x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[/ x > 0 \text{ et } \ln x \neq 0 \right\} \cup \{0; 1\}$$

$$x > 0 \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[$$

$$\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[-\{1\}$$

$$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, x > 0 \text{ et } \ln x \neq 0 \text{ donc}$$

$$E =]0; 1[\cup]1; +\infty[\cup \{0; 1\} \text{ donc } \underline{\underline{E =]0; +\infty[}}$$

4°) Etudions la continuité et la dérivabilité de f en 0.

Continuité de f en 0

$$0 \in E$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\ln x}$$

$$= 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x-1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{ donc } f \text{ est continue à droite en } 0$$

Dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x-1}{\ln x} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x \ln x} = +\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x-1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^- \end{cases} \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable à droite en } 0$$

5°) Démontrons que : $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{X - \ln(X+1)}{X \ln(X+1)}$

$$X = x - 1$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{\frac{x-1}{\ln x} - 1}{x - 1} \\ &= \frac{x-1 - \ln x}{(x-1) \ln x} \end{aligned}$$

$$X = x - 1 \Rightarrow x = X + 1 \text{ d'où}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{X - \ln(X+1)}{X \ln(X+1)}$$

b- Déterminons le développement limité au voisinage de 0
 à l'ordre 3 de la fonction $X \mapsto \ln(X+1)$

Soit $W : X \mapsto \ln(X+1)$

W est définie et trois fois dérivable sur $] -1; +\infty[$ et
 $0 \in] -1; +\infty[$ alors il existe un intervalle I contenant 0 et
 une fonction ε définie sur I tels que :

$$W(X) = W(0) + \frac{W'(0)}{1!} X + \frac{W''(0)}{2!} X^2 + \frac{W'''(0)}{3!} X^3 + X^3 \varepsilon(X)$$

$$\text{Avec } \lim_{X \rightarrow 0} \varepsilon(X) = 0$$

$$\forall X \in]0; +\infty[, W'(X) = \frac{1}{X+1}, W''(X) = \frac{-1}{(X+1)^2},$$

$$W'''(X) = \frac{2}{(X+1)^3}; W(0) = 0, W'(0) = 1, W''(0) = -1,$$

$$W'''(0) = 2 \text{ d'où } W(X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + X^3 \varepsilon(X) \text{ avec}$$

$$\lim_{X \rightarrow 0} \varepsilon(X) = 0$$

c- Etudions la continuité et la dérivabilité de f en 1.

Continuité de f en 1.

$$1 \in E$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{\ln x}{x-1}} = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1; f(1) = 1 \text{ on a :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{ d'où } f \text{ est continue en } 1.$$

Dérivabilité de f en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{X - \ln(X+1)}{X \ln(X+1)}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{X - \left(X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + X^3 \varepsilon(X) \right)}{X \left(X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + X^3 \varepsilon(X) \right)} \end{aligned}$$

on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} - \frac{X}{3} - X \varepsilon(X)}{1 - \frac{X}{2} + \frac{X^2}{3} + X^2 \varepsilon(X)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1}{2} \text{ car } \begin{cases} \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{2} - \frac{X}{3} - X\varepsilon(X) = \frac{1}{2} \\ \lim_{X \rightarrow 0} 1 - \frac{X}{2} + \frac{X^2}{3} + X^2\varepsilon(X) = 1 \end{cases}$$

or $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable en 1

6°) a- Démontrons que $f'(x) = \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$,

$$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

f est dérivable en tout point de l'intervalle $]0; 1[\cup]1; +\infty[$

et $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{x \ln x - x + 1}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x \ln x - x + 1}{x(\ln x)^2} \text{ or } g(x) = -x + 1 + x \ln x \text{ d'où}$$

$$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$$

b- Etudions les variations de f .

- $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, x(\ln x)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, g(x) > 0$ donc

$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, f'(x) > 0$ d'où f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

- Limites aux bornes de E

$$\lim_{0^+} f = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} - \frac{1}{\ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln x} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \end{cases}$$

- Tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	-	
$f(x)$	0				$+\infty$

7°) a- Etudions les branches infinies à (C_f)

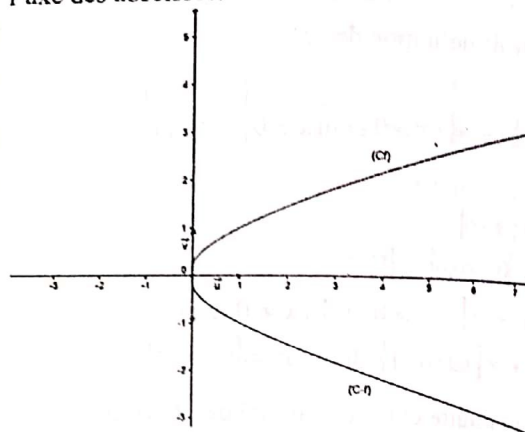
$$\lim_{+\infty} f = +\infty. \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x \ln x}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x \ln x} = 0$ donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

b- traçons la courbe de f et celle de $-f$

La courbe de $-f$ est symétrique à celle de f par rapport à l'axe des abscisses.



ACTIVITE 28 :

1°) a- Déterminons l'ensemble de définition D de f

$$\begin{cases} f(x) = (x-2)^2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right), \text{ si } x \neq 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

$$D = \left\{ x \in]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[/ x-2 \neq 0 \text{ et } \frac{x-1}{x-2} > 0 \right\} \cup \{2\}$$

$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ et } x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$\frac{x-1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$$

Donc $D =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[\cup \{2\}$ d'où

$$D =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$$

b- Calculons les limites de f aux bornes de D .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)^2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x-2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2) \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x-2}\right)}{\frac{1}{x-2}} \end{aligned}$$

En posant $X = \frac{1}{x-2}$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x-2}\right)}{\frac{1}{x-2}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2) = -\infty \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Même démarche et on trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2)^2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = -\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} (x-2)^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-2} = 0 \text{ avec } \frac{x-1}{x-2} > 0 \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

$$\text{Posons } X = \frac{1}{x-2} \text{ et on a : } x-2 = \frac{1}{X}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\ln(1+X)}{X^2}\right) \\ &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1+X}{X^2} \frac{\ln(1+X)}{1+X} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \end{aligned}$$

c- Justifions que f est continue sur chaque intervalles de D

- La fonction $x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$ est continue sur $] -\infty ; 1[$ et sur $] 2 ; +\infty[$ comme fonction rationnelle. De plus $\forall x \in D$, $\frac{x-1}{x-2} > 0$ donc la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ est continue sur chacun des intervalles $] -\infty ; 1[$ et $] 2 ; +\infty[$

- La fonction $x \mapsto (x-2)^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $] -\infty ; 1[$ et sur $] 2 ; +\infty[$ donc la fonction

$x \mapsto (x-2)^2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ est continue sur $] -\infty ; 1[$ et sur $] 2 ; +\infty[$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0$$

De tout ce qui précède f est continue sur $] -\infty ; 1[$ et sur $] 2 ; +\infty[$

d- Etudions la dérivabilité de f à droite en 2

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} [(x-2) \ln(x-1) - (x-2) \ln(x-2)] = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2} \ln(x-1) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = 0 \text{ et } 0 \in \mathbb{R} \text{ donc } f \text{ est dérivable à droite}$$

en 0 et le nombre dérivé à droite en 0 est $f'_d(0) = 0$

Interprétons graphiquement le résultat :

La courbe de f admet au point de coordonnée $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ une

demi-tangente à droite en 2 définie par : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y = 0 \end{cases}$

2°) a- Etudions les variations de g

$$g(x) = 2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) - \frac{1}{x-1}$$

$$* D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} / x-2 \neq 0 \text{ et } \frac{x-1}{x-2} > 0 \right\}$$

$$D_g =] -\infty ; 1[\cup] 2 ; +\infty[$$

* g est dérivable sur $] -\infty ; 1[$ et sur $] 2 ; +\infty[$ et $\forall x \in D_g$

$$g'(x) = \frac{-x}{(x-2)(x-1)^2}$$

* Le signe de $g'(x)$ est celui de $\frac{-x}{x-2}$

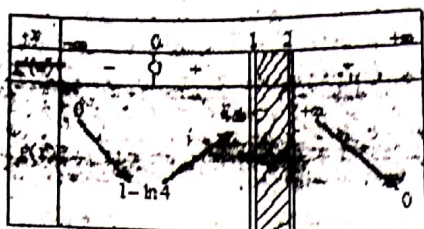
x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$-x$	+	0	-	-	-
$x-2$	-	-	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+	-	-

$$\begin{cases} \forall x \in] -\infty ; 0[\cup] 2 ; +\infty[; g'(x) < 0 \\ \forall x \in] 0 ; 1[; g'(x) > 0 \\ g'(0) = 0 \end{cases}$$

Il en résulte que g est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et sur $] 2 ; +\infty[$ et strictement croissante sur $] 0 ; 1[$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} g = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g = 0 ; \lim_{x \rightarrow 1^-} g = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} g = +\infty$$

* Tableau de variation de g



b-Démontrons que l'équation $g(x) = 0$

* g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et $g(]-\infty; 0]) = [1 - \ln 4; 0[$ or $0 \notin [1 - \ln 4; 0[$ d'où l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]-\infty; 0]$.

* g est continue et strictement croissante sur $[0; 1[$ et $g([0; 1]) = [1 - \ln 4; +\infty[$ or $0 \in [1 - \ln 4; +\infty[$ d'où l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0; 1[$

* g est continue et strictement décroissante sur $]2; +\infty[$ et $g(]2; +\infty[) =]0; +\infty[$

Or $0 \notin]0; +\infty[$ d'où l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]2; +\infty[$

De plus $0,6 \in]0; 1[$ et $0,61 \in]0; 1[$ et

$$\begin{cases} g(0,6) = -0,0055 < 0 \\ g(0,61) = 0,022 > 0 \end{cases} \text{ donc } 0,6 < \alpha < 0,61$$

De tout ce qui précède, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0,6 < \alpha < 0,61$

c- Déduisons-en le signe de $g(x)$

Des 2°) a- et b on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in [\alpha; 1[\cup]2; +\infty[, g(x) > 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases}$$

3°) a- Justifions que f est dérivable sur chaque intervalle de D et $\forall x \in D - \{2\}$, $f'(x) = (x-2)g(x)$

f est dérivable à droite en 2 et de plus la fonction

$x \mapsto (x-2)^2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et sur

$]2; +\infty[$ d'où f est dérivable sur chaque intervalle de D $\forall x \in D - \{2\}$.

$$f'(x) = 2(x-2) \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + (x-2)^2 \left[\frac{-1}{(x-2)(x-1)} \right]$$

$$= 2(x-2) \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) - \frac{x-2}{x-1}$$

$$= (x-2) \left[2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) - \frac{1}{x-2} \right] \text{ d'où } \forall x \in D - \{2\}$$

$$f'(x) = (x-2)g(x)$$

b- Etudions le sens de variation de f et dressons son tableau de variation

Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$	α	1	2	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+
$f'(x)$	-	-	-	0	+

$$f'(\alpha) = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; \alpha[\cup]2; +\infty[$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [\alpha; 1[$$

On déduit de l'étude de signe de $f'(x)$ que f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$ et sur $[2; +\infty[$ et strictement décroissante sur $[\alpha; 1[$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	α	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

c- Démontrons que $f(\alpha) = \frac{(2-\alpha)^2}{2(\alpha-1)}$

$$f(\alpha) = (\alpha-2)^2 \ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\right)$$

or $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\right) = \frac{1}{2(\alpha-1)}$ donc

$$f(\alpha) = (\alpha-2)^2 \times \frac{1}{2(\alpha-1)} = \frac{(\alpha-2)^2}{2(\alpha-1)}$$

Encadrons $f(\alpha)$ par deux nombres décimaux d'ordre 2 :

$$0,6 < \alpha < 0,61 \Rightarrow 1,9321 < (\alpha-2)^2 < 1,96$$

$$0,6 < \alpha < 0,61 \Rightarrow -1,2821 < \frac{1}{2(\alpha-1)} < -1,25 \text{ donc}$$

$$-2,47 < f(\alpha) < -2,45$$

4°) a- Donnons le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $h \mapsto \ln(1+h)$

$$\forall h \in]-1; 1[, \ln(1+h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + h^3 \varepsilon(h) \text{ avec}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

b- Démontrons que la droite $(D): y = x - \frac{5}{2}$ est asymptote à (C) .

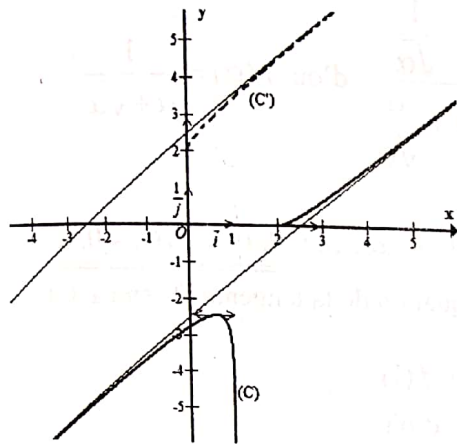
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[f(x) - \left(x - \frac{5}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x-2)^2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) - x + \frac{5}{2}$$

En posant $h = \frac{1}{x-2}$ on a : $x \rightarrow \pm\infty \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[f(x) - \left(x - \frac{5}{2} \right) \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + h^3\epsilon(h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} + \frac{1}{2} = 0$$

alors la droite

(D): $y = x - \frac{5}{2}$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$
c- Construisons (C)



5° a- Justifions que k est bijective

$$k: [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto k(x) = f(x)$$

k étant la restriction de f à l'intervalle $[2; +\infty[$ donc k est continue et strictement croissante sur $[2; +\infty[$ et

$$k([2; +\infty[) = [f(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$$

$$= [0; +\infty[= \mathbb{R}_+ \text{ donc } k \text{ est une bijection}$$

b- Etudions la dérivabilité de k^{-1}

f est dérivable sur $[2; +\infty[$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ donc

k^{-1} est dérivable sur

$$E = \mathbb{R}_+ - \{f(2)\} \text{ soit sur }]0; +\infty[$$

c- Justifions que le point $A(\ln 2; 3) \in (C')$

$$f(3) = (3-2)^2 \ln \left(\frac{3-1}{3-2} \right) = \ln 2$$

d'où $A(\ln 2; 3) \in (C')$

d- Construisons (C')

Voir figure (courbe en pointillée)

ACTIVITE 31 :

Partie A :

1° a-

$$g(x) = 1 - x(\ln x)^2, \text{ si } x > 0$$

$$g(0) = 1$$

$$D_g = [0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x(\ln x)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \left(\frac{1}{x^2} \ln x \right)^2 = 1 \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$$

d'où g est continue à droite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -\infty$$

Interprétation géométrique :

La courbe de g admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses en $+\infty$

2°) Etudions la dérivabilité de g en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -(\ln x)^2 = -\infty \text{ donc } g \text{ n'est pas}$$

dérivable à droite en 0 et sa courbe admet une demi-tangente à

$$\text{droite au point d'abscisse 0 définie par : } \begin{cases} x = 0 \\ y \leq 1 \end{cases}$$

3°) a- g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$g'(x) = -(\ln x)^2 - 2 \frac{\ln x}{x} \times x \text{ ce qui implique que}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = (-\ln x)(2 + \ln x)$$

b- Etudions le signe de $g'(x)$

x	0	e^{-2}	1	$+\infty$
$-\ln x$	+	+	0	-
$2 + \ln x$	-	0	+	+
$g'(x)$	-	0	+	-

$$\forall x \in]0; e^{-2}[\cup]1; +\infty[, g'(x) < 0$$

$$\forall x \in]e^{-2}; 1[, g'(x) > 0$$

$$\forall x \in \{e^{-2}; 1\}, g'(x) = 0$$

Tableau de variation de g

x	0	e^{-2}	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	-
$g(x)$	1	$g(e^{-2})$	1	$-\infty$

$$g(e^{-2}) = 1 - 4e^{-2} \text{ et } g(1) = 1$$

4°) Démontrons que sur $[0; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$

admet une solution unique α et que $2 < \alpha < 2,1$

* Sur $[0; 1[$, g admet un minimum en e^{-2} qui est $g(e^{-2})$ or $g(e^{-2}) > 0$ donc $g(x) \neq 0$ sur $[0; 1[$.

* g est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ et $g([1; +\infty[) =]-\infty; 1]$ or $0 \in]-\infty; 1]$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[1; +\infty[$

*De plus $]2; 2,1[\subset]1; +\infty[$ et $\begin{cases} g(2) = 0,039 > 0 \\ g(2,1) = -0,156 < 0 \end{cases}$ donc

$$2 < \alpha < 2,1$$

De tout ce qui précède, sur $]0; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $2 < \alpha < 2,1$

b- Dédisons-en le signe de $g(x)$

$$\text{on a : } \begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases}$$

c- Prouvons $\ln \alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$

on a : $1 - \alpha(\ln \alpha)^2 = 0$ avec $2 < \alpha < 2,1$

$$1 - \alpha(\ln \alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow (\ln \alpha)^2 = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \ln \alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Partie B :

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + x \ln x}$$

5°)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Les asymptotes :

.La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C_f)

.La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

6°) a-

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 + \ln x) - (1 + \ln x)\ln x}{(1 + x \ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 + x \ln x - x(\ln x)^2 - x \ln x}{x(1 + x \ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - x(\ln x)^2}{(1 + x \ln x)^2} = \frac{g(x)}{(1 + x \ln x)^2}$$

b- Sens de variation de f

Sur $]0; +\infty[$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ donc :

$$\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) < 0 \end{cases} \text{ alors } f \text{ est strictement} \\ f'(\alpha) = 0$$

croissante sur $]0; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

Tableau de variation de f

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

c- Vérifions que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}$

$$f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{1 + \alpha \ln \alpha} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}} \text{ d'où } f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}$$

Encadrons $f(\alpha)$

A Partir de $2 < \alpha < 2,1$, on trouve : $0,41 < f(\alpha) < 0,42$

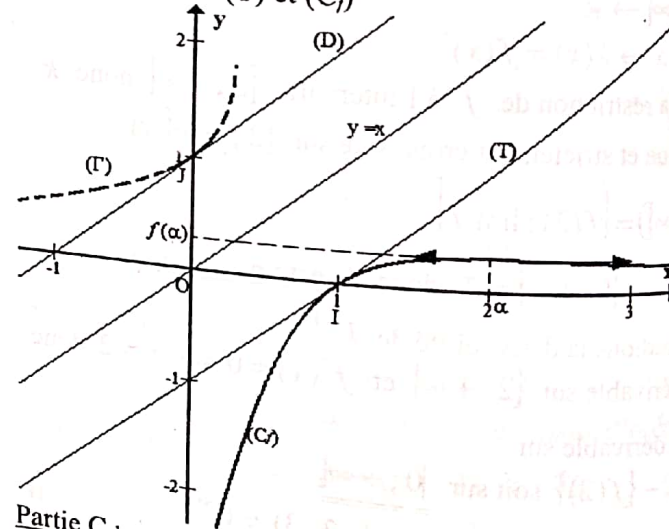
7°) Déterminons une équation de la tangente (T) en I à (C_f)

$$(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$f'(1) = 1 \text{ et } f(1) = 0 \text{ d'où}$$

$$(T) : y = x - 1$$

8°) Construisons (T) et (C_f)



Partie C :

h est la restriction de f à l'intervalle $]0; \alpha]$ donc h est continue et strictement croissante sur $]0; \alpha]$ alors h est une bijection de $]0; \alpha]$ sur $f(]0; \alpha]) =]-\infty; \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}]$ par

suite h admet une bijection réciproque h^{-1} de domaine de définition $]-\infty; \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}]$

10°) a- f est dérivable sur $]0; \alpha]$ et $\forall x \in]0; \alpha]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$ par suite h^{-1} est dérivable sur

$$f(0; \alpha) = \left] -\infty; \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}} \right[\text{ or } 0 \notin \left] -\infty; \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}} \right[\text{ d'où}$$

$$h^{-1} \text{ n'est pas dérivable en } \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}$$

b-

$$J(0; 1)$$

$$(D): y = (h^{-1})'(0)(x-0) + h^{-1}(0)$$

$$\begin{aligned} (h^{-1})'(0) &= \frac{1}{h'[h^{-1}(0)]} \\ &= \frac{1}{h'(1)} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

On a : $(h^{-1})'(0) = f'(1)$ (T) et (D) ont même coefficient directeur d'où (D) // (T)

$$11^{\circ}) \text{ a- } \lim_{0^+} f = -\infty \text{ donc } \lim_{-\infty} h^{-1} = 0 \text{ donc la droite}$$

d'équation $y = 0$ est asymptote à (Γ) en $-\infty$

b- Traçons (D) et (Γ)

(Γ) = courbe en pointillée

ACTIVITE 32

$$I/ f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$$

1^o) Calculons les limites aux bornes de l'ensemble de définitions de la fonction f

Soit D_f le domaine de définition de la fonction f ,

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2^o) Déterminons $f'(x)$ et son signe

La fonction $x \mapsto (x-1)^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme puissance

d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ donc le produit $x \mapsto 3(x-1)^3$

est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus la fonction $x \mapsto 3x^2+1$ est

dérivable sur $\mathbb{R}$ et $3x^2+1 \neq 0$ pour tout réel ; par quotient

$x \mapsto f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Calculons $f'(x)$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) &= 3 \frac{3(x-1)^2(3x^2+1) - (x-1)^3(6x)}{(3x^2+1)^2} \\ &= 3(x-1)^2 \left[\frac{3(3x^2+1) - (x-1)(6x)}{(3x^2+1)^2} \right] \\ &= 3(x-1)^2 \left[\frac{9x^2+3-6x^2+6x}{(3x^2+1)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3(x-1)^2(x+1)^2}{(3x^2+1)^2}$$

Signe de $f'(x)$

Son signe est celui de $3(x-1)^2(x+1)^2$

$$\text{Posons } 3(x-1)^2(x+1)^2 = 0$$

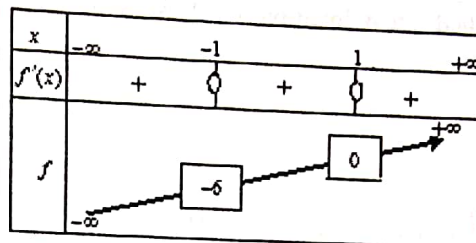
$$3(x-1)^2(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-1$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $3(x-1)^2(x+1)^2 > 0$ alors on déduit

que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, f'(x) > 0$ et $\forall x \in \{-1; 1\} f'(x) = 0$

Tableau de variation

$$f(-1) = -6 \text{ et } f(1) = 0$$



3^o) Prouvons que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution et une seule $\alpha \in \mathbb{R}$ puis déduisons que : $3 < \alpha < 4$

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et

$1 \in f(\mathbb{R})$. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$

Prouvons que $3 < \alpha < 4$

La restriction de f à $[3; 4]$ est une bijection continue et

$$f(3) < 1 < f(4) \text{ donc } \alpha \in]3; 4[$$

$$II/ g(x) = \frac{3(\ln|x|-1)^3}{3(\ln^2|x|+1)}$$

4^o) a- Prouvons que g est définie sur $\mathbb{R}^*$

$$g(x) \text{ existe si et seulement si : } \begin{cases} x \neq 0 \\ 3\ln^2|x|+1 \neq 0 \end{cases}$$

Or $3\ln^2|x|+1 \neq 0$ pour tout réel $x \neq 0$ d'où $D_g = \mathbb{R}^*$

b- Démontrons que g est la composée de la fonction f et d'une autre h .

$$g(x) = \frac{3(\ln|x|-1)^3}{3(\ln^2|x|+1)}$$

$$g(x) = f(\ln|x|) \text{ en posant } h(x) = \ln|x| \text{ on a : } g(x) = (f \circ h)(x)$$

; $x \neq 0$

c- Etudions la parité de g

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a : $-x \in \mathbb{R}^*$ et :

$$\begin{aligned} g(-x) &= f(h(-x)) \\ &= f(\ln|(-x)|) = f(\ln|x|) = g(x) \text{ d'où } g \text{ est paire.} \end{aligned}$$

d- $D_E =]0; +\infty[$; étudions les limites de k aux bornes de

D_E

Pour $x > 0$, $h(x) = \ln x$ or $k(x) = f(h(x))$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ par composée :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = -\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; par composée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$$

Etude de branche infinie :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe (C_k) de k

$$k(x) = \frac{3(\ln x - 1)^3}{3(\ln^2 x + 1)}$$

$$\text{Pour } x > 0 ; \frac{k(x)}{x} = \frac{3(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 3\ln x - 1)}{x(3\ln^2 x + 1)}$$

$$= \frac{3\ln x}{x} \times \frac{\left(1 - \frac{3}{\ln x} + \frac{3}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln^3 x}\right)}{\left(3 - \frac{1}{\ln^2 x}\right)}$$

Et on a donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k(x)}{x} = 0$ alors (C_k) admet une branche

parabolique de direction celle de l'axe des abscisses aux voisinage de $+\infty$

5°) a- calculons $k'(x)$ et étudions le sens de variation de k .

k est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme composé de fonctions dérivable sur $]0; +\infty[$ et en utilisant la forme de la dérivation d'une forme composée on obtient :

$$k'(x) = h'(x) \times f'(h(x))$$

$$k'(x) = \frac{1}{x} f'(h(x)) ; k'(x) \text{ garde signe positif sur }]0; +\infty[\text{ mais}$$

$k'(x)$ s'annule en x vérifiant $\ln x - 1 = 0$ ou $\ln x + 1 = 0$ alors

on a : $x = e$ ou $x = \frac{1}{e}$.

k est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variation de k

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
$k'(x)$		+	+	+
k	$-\infty$	-6	0	$+\infty$

$$k\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{3(-1-1)^3}{3+1} = -6 \text{ et } k(e) = \frac{3(1-1)^3}{3+1} = 0$$

b- Déterminons le point d'intersection de la courbe de k avec l'axe des abscisses et précisons le signe de k posons $k(x) = 0$

$$k(x) = 0 \Leftrightarrow 3(\ln x - 1)^3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e \text{ et } e \in]0; +\infty[\text{ donc } (C_k) \text{ coupe l'axe des abscisses en } A(e; 0)$$

Signe de $k(x)$

Si $x \in]0; e[$, $k(x) < 0$

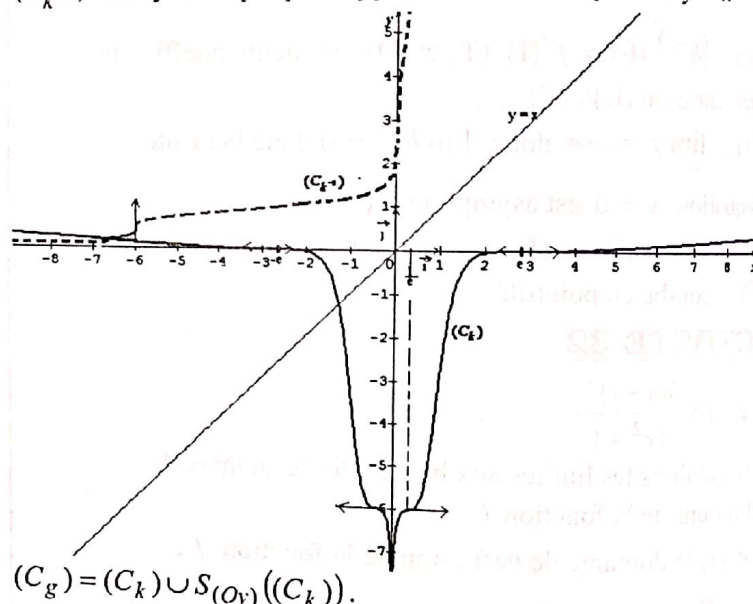
Si $x \in]e; +\infty[$, $k(x) > 0$ et si $x = e$, $k(x) = 0$

6°) a- Démontrons que k réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

k est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ par composée de deux fonctions continue et strictement croissant et $k(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$ d'où k réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ donc $J = \mathbb{R}$.

b- Construisons (C_k) ; $(C_{k^{-1}})$ et (C_g)

$(C_{k^{-1}})$ est symétrique par rapport la droite d'équation $y = x$



6. CORRECTION DES ACTIVITES SUR LES FONCTIONS EXPONENTIELLE NEPERIENNE

ACTIVITE 1 :

Domaine de définition et dérivée de f

$$1-) D_{f_1} = \left\{ x \in \mathbb{R} / e^x - 1 > 0 \right\}$$

$$* D_{f_1} =]0; +\infty[$$

$$* \forall x \in D_{f_1}, f_1'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$2-) D_{f_2} = \left\{ x \in \mathbb{R} / e^{2x} - 3e^x + 2 \neq 0 \right\}$$

$$* D_{f_2} =]-\infty; 0[\cup]0; \ln 2[\cup]\ln 2; +\infty[$$

$$* \forall x \in D_{f_2}, f_2'(x) = \frac{(2e^x - 3)e^x}{(e^{2x} - 3e^x + 2)^2}$$

$$3-) D_{f_3} = \left\{ x \in \mathbb{R} / e^{2x} - e^x + 3 > 0 \right\}$$

$$* D_{f_3} = \mathbb{R}$$

$$* \forall x \in D_{f_3}, f_3'(x) = \frac{(2e^x - 1)e^x}{e^{2x} - e^x + 3}$$

$$4-) D_{f_4} = \left\{ x \in \mathbb{R} / e^{x^2+2x-1} \neq 0 \right\}$$

$$* D_{f_4} = \mathbb{R}$$

$$* \forall x \in D_{f_4}, f_4'(x) = (2x + 2)e^{x^2+2x-1}$$

$$5-) D_{f_5} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \right\}$$

$$* D_{f_5} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$* \forall x \in D_{f_5}, f_5'(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}}$$

$$6-) D_{f_6} = \left\{ x \in \mathbb{R} / e^x + e^{-x} \neq 0 \right\}$$

$$D_{f_6} = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in D_{f_6}, f_6'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$7-) D_{f_7} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x > 0 \right\}$$

$$D_{f_7} =]0; +\infty[$$

$$\forall x \in D_{f_7}, f_7'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$8-) D_{f_8} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x - 1 \neq 0 \right\}$$

$$\forall x \in D_{f_8}, f_8'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$9-) D_{f_9} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \right\}$$

$$D_{f_9} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$\forall x \in D_{f_9}, f_9'(x) = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}$$

ACTIVITE 14 :

$$f(x) = -1 + \frac{x-1}{x+1} e^x$$

1°) a- Déterminons le domaine de définition D de f .

$$D = \{ x \in \mathbb{R} / x+1 \neq 0 \}$$

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ donc } D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

b- Calculons les limites de f aux bornes de D.

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^-} e^x = e^{-1} \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty.$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^+} e^x = e^{-1} \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty.$$

$$2°) \text{ a- Prouvons que pour tout } x \in D, f'(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2} e^x.$$

f est dérivable en tout point de D et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ on a :

$$f'(x) = 0 + \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} e^x + \frac{x-1}{x+1} e^x$$

$$= \left[\frac{2}{(x+1)^2} + \frac{x-1}{x+1} \right] e^x$$

$$f'(x) = \frac{2+x^2-1}{(x+1)^2} e^x \text{ d'où } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f'(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2} e^x.$$

b- Donnons le tableau de variation de f .

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \frac{x^2+1}{(x+1)^2} > 0$ et $e^x > 0$ alors $f'(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$.

Tableau de variation de f .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
f	0	$+\infty$	$+\infty$

3°) a- Prouvons que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-1; +\infty[$ une unique solution α et que $1,5 < \alpha < 1,6$.

f est continue et strictement croissante sur $]-1; +\infty[$ et $f(]-1; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$ (d'après le tableau de variation) or

$0 \in]-\infty; +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]1; +\infty[$ une unique solution α .
De plus, on a : $f(1,5) \approx -0,1037$ et $f(1,6) \approx 0,143 \Rightarrow f(1,5) \times f(1,6) < 0$ donc $1,5 < \alpha < 1,6$.

b- Vérifions que : $e^\alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$ et que $f(-\alpha) = 0$.

On a : $f(\alpha) = 0$

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} e^\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow e^\alpha = \frac{1}{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \text{ d'où } e^\alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}.$$

$$f(-\alpha) = -1 + \frac{-\alpha-1}{-\alpha+1} e^{-\alpha}$$

$$= -1 + \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \times \frac{1}{e^\alpha}$$

$$= -1 + \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \times \frac{\alpha-1}{\alpha+1} = -1 + 1 \text{ d'où } f(-\alpha) = 0.$$

4°) a- Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interprétons graphiquement le résultat.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} + \frac{x-1}{x} \times \frac{e^x}{x}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ par conséquent (C) admet une branche

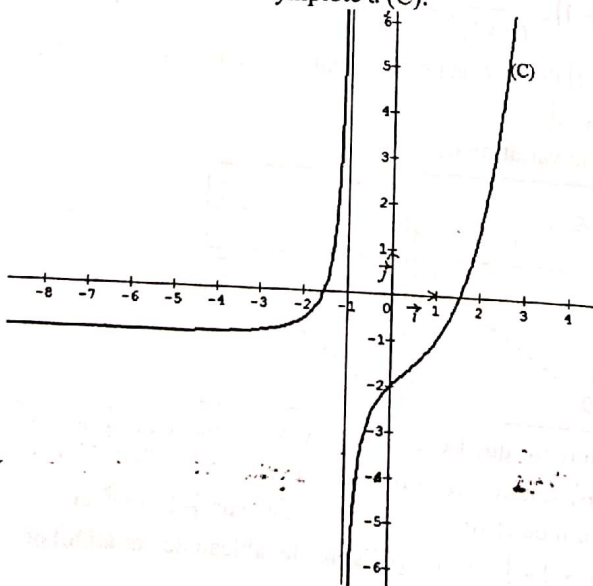
parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

b- Traçons la courbe (C).

on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est

asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

On a : $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à (C).



ACTIVITE 17 :

1°) a-Justifions que g est définie sur $\mathbb{R}$

Soit D_g le domaine de définition de g

$$D_g = \{x \in]-\infty; 0] / 1-x^2 \in \mathbb{R}\} \cup \{x \in]0; +\infty[/ x > 0\} \text{ on trouve } D_g = \mathbb{R}$$

b- *Etudions la continuité de g en 0

$$g(0) = 0e^{1-0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{1-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x + x \ln x) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$ donc g est continue en 0.

*Dérivabilité de g en 0.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1-x^2} = e$ donc g est dérivable à gauche en 0 et $g'_g(0) = e$ (1)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1 + \ln x) = -\infty$ donc g n'est pas dérivable à droite en 0 (2)

De (1) et (2) g n'est pas dérivable en 0.

*Equation des demi-tangentes en 0

$$(T_g): \begin{cases} y = xe \\ x \leq 0 \end{cases} \text{ et } (T_d): \begin{cases} x = 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

2°) a- Calculons $g'(x)$, $\forall x \in E$
 $E = \mathbb{R}^*$

$$\begin{cases} g'(x) = (1-2x^2)e^{1-x^2}, & \text{si } x \in]-\infty; 0[\\ g'(x) = \ln x & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

b- Singe de $g'(x)$

on trouve :

$$\forall x \in \left] -\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right[\cup]0; 1[, g'(x) < 0$$

$$\forall x \in \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right[\cup]1; +\infty[, g'(x) > 0$$

$$\text{Pour } x \in \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \right\}, g'(x) = 0$$

*Sens de variation de g sur $\mathbb{R}$

g est strictement décroissante sur $\left] -\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$ et sur $[0; 1]$

g est strictement croissante sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right]$ et sur $[1; +\infty[$.

c- Calculons les limites de g aux bornes de D_g

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1-x^2} (1-x^2) e^{1-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(-1 + \ln x) = +\infty$$

3° a- Etudions les branches infinies à (C_g)

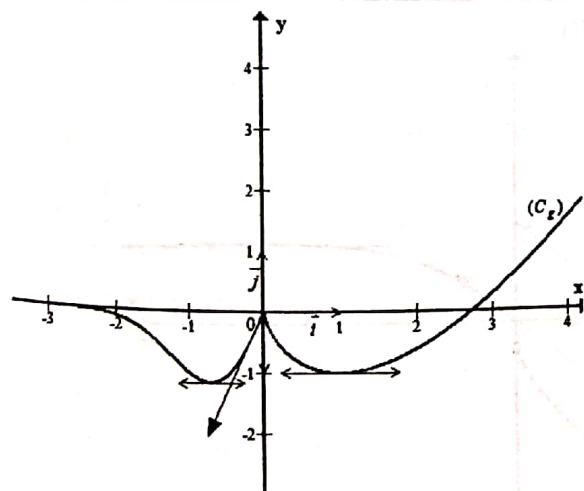
$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ donc la droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à (C_g) au voisinage de $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et on trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$ d'où (C_g) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

b- Construisons (C_g) et les demi tangentes

Tableau de variation de g

x	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	-
g	0	$1-\ln 2$	0	$+\infty$



ACTIVITE 18 :

Partie A :

1° a- Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(x^2 + 1) = -\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(x^2 + 1) = -\infty \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

b- Calculons $g'(x)$

$$D_g = [0; +\infty[$$

g est dérivable sur $[0; +\infty[$

$$\forall x \in [0; +\infty[, g'(x) = \frac{2x(1-x)(1+x)}{(x^2 + 1)^2}$$

Tableau de variation de g

Le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $1-x$ car

$$\forall x \in [0; +\infty[, 2x \geq 0; 1+x > 0 \text{ et } (x^2 + 1)^2 > 0$$

$$1-x=0 \Leftrightarrow x=1$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g	0	$1-\ln 2$	$-\infty$

2° Prouvons que sur $[1; +\infty[$ l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique et que $1,9 < \beta < 2$

g est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ et $g([1; +\infty[) =]-\infty; 1-\ln 2]$ or $0 \in]-\infty; 1-\ln 2]$ d'où l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique β sur $[1; +\infty[$

$$\text{De plus } g(1,9) \approx 0,03 \text{ et } g(2) \approx -0,09$$

$$g(1,9) \times g(2) < 0 \text{ alors on a : } 1,9 < \beta < 2$$

3° Signe de g sur $[0; +\infty[$

$$\begin{cases} g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; \beta[\\ g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]\beta; +\infty[\\ g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; \beta\} \end{cases}$$

Partie B :

4° Etudions la continuité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = x e^{\frac{1}{x}} = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x \times \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{ d'où } f \text{ est continue en } 0.$$

*Dérivabilité de f en 0

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$; $0 \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} = 1$; $1 \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ par suite f n'est pas dérivable en 0.

5°) Justifions que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (Γ) en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\frac{1}{x}} - x - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1 = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$ d'où la droite d'équation

$y = x + 1$ est asymptote à (Γ) en $-\infty$.

6°) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Interprétation graphique :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (Γ) au voisinage de $+\infty$

7°)

f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(x^2 + 1) = g(x)$$

$$8^\circ) \text{ Etablissons que } f(\beta) = \frac{2\beta}{\beta^2 + 1}$$

$$f(\beta) = \frac{\ln(\beta^2 + 1)}{\beta}$$

$$g(\beta) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\beta^2}{\beta^2 + 1} - \ln(\beta^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(\beta^2 + 1) = \frac{2\beta^2}{\beta^2 + 1} \text{ d'où}$$

$$f(\beta) = \frac{2\beta^2}{\beta^2 + 1} = \frac{2\beta^2}{\beta(\beta^2 + 1)} = \frac{2\beta}{\beta^2 + 1}$$

Déduisons-en un encadrement de $f(\beta)$

$$1,9 < \beta < 2 \Leftrightarrow 3,8 < 2\beta < 4 \text{ et}$$

$$1,9 < \beta < 2 \Leftrightarrow 4,61 < \beta^2 + 1 < 5$$

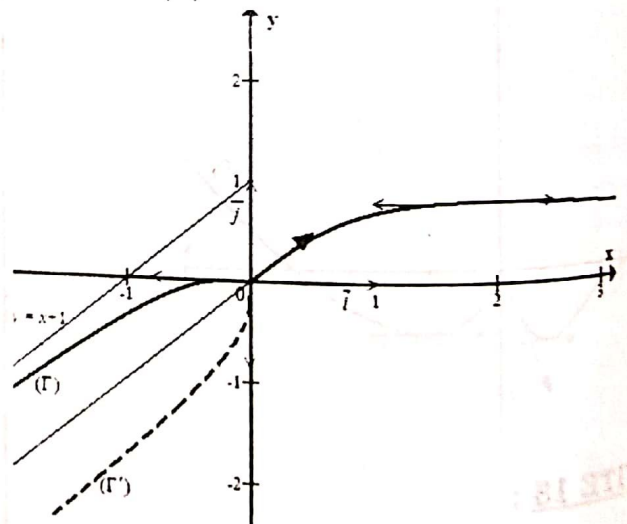
$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{\beta^2 + 1} < \frac{1}{4,61} \text{ donc}$$

$$0,76 < \frac{2\beta}{\beta^2 + 1} < 0,868 \text{ d'où } \underline{0,76 < f(\beta) < 0,87}$$

9°) Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	β	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
f	$-\infty$		0,85	0

Courbe de (Γ)



Partie C :

10°) Justifions que h est bijection de $]-\infty; 0[$ sur J .
 f est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 0[$
 $f(]-\infty; 0[) =]-\infty; 0[$ d'où h est une bijection de $]-\infty; 0[$ sur $J =]-\infty; 0[$

11°) Représentons (Γ')

(Γ') et (Γ) sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y=x$)
 Voir courbe en pointillée

ACTIVITE 19 :

Partie A :

1°) a- Déterminons E

$$u(x) = x + 1 - x \ln(-x)$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} / -x > 0\}$$

$$-x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ d'où } E =]-\infty; 0[$$

b- Calculons $u'(x)$

u est dérivable sur E comme composée, produit et somme de fonctions dérivables sur E.

$$\forall x \in E, u'(x) = -\ln(-x)$$

c- Signe de $u'(x)$

$$\text{on trouve : } \begin{cases} u'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\\ u'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 0[\\ u'(-1) = 0 \end{cases}$$

2°) Achéons l'étude des variations de u

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[1 + \frac{1}{x} - \ln(-x) \right] = +\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 - x \ln(-x) = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} u(x) = 1$$

Tableau de variation de u

x	$-\infty$	-1	0
$u'(x)$	$-$	0	$+$
u	$+\infty$	0	1

b- Dédudisons-en le signe de $u(x)$

De ce qui précède u admet 0 pour minimum sur $]-\infty; 0[$ d'où $\forall x \in]-\infty; 0[, u(x) \geq 0$

3°) a- Calculons $v'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$

v est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[,$

$$v'(x) = -\frac{x+1}{x}$$

b- Sens de variation de v

$\forall x \in]0; +\infty[, \frac{x+1}{x} > 0$ donc $v'(x) < 0$ d'où v est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

c- *Calculons $v(1)$

$$v(1) = 0$$

*Signe de $v(x)$

v est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et $v(1) = 0$ alors

$$\begin{cases} \forall x \in]0; 1[, v(x) > 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, v(x) < 0 \\ v(1) = 0 \end{cases}$$

Partie B :

4°) a- Etudions la continuité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{1}{2} x^2 \ln(-x) + \frac{3}{4} x^2 + x \right] = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2} x^2 \ln(-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x} \ln x} \text{ posons } X = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X \ln X}$$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} -(-X \ln X) e^{-X \ln X} \times \frac{1}{\ln X} = 0$$

On a donc : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ d'où f est continue en 0.

b- Etudions la dérivabilité de f en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[-\frac{1}{2} x \ln(-x) + \frac{3}{4} x + 1 \right] = 1 ; 1 \in \mathbb{R}$$

donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} X^2 e^{-X \ln X}$$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} (-X \ln X)^2 e^{-X \ln X} \times \frac{1}{\ln^2 X}$$

$$= 0 ; 0 \in \mathbb{R}$$

d'où f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ alors f n'est pas dérivable en 0

c- Interprétation géométrique des résultats

(C) admet en son point d'abscisse 0 deux demi-tangentes l'une à gauche (T_g) et l'autre à droite (T_d)

définies par :

$$(T_g) : \begin{cases} y = x \\ x \leq 0 \end{cases} \text{ et } (T_d) : \begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

5°) a- Précisons le domaine de dérivabilité de f

Soit E ce domaine, $E = \mathbb{R}^*$

-Calculons $f'(x)$

$$\begin{cases} f'(x) = u(x) & , \text{ si } x < 0 \\ f'(x) = \frac{e^x}{x^3} v(x) & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

b- Etudions le signe de $f'(x)$

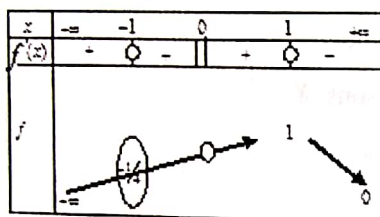
On trouve :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; 1[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, f'(x) < 0 \\ \text{Pour } x \in \{-1; 1\}, f'(x) = 0 \end{cases}$$

c- Achevons l'étude des variations de f

on trouve : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Tableau de variation de f



$$f(-1) = -\frac{1}{4}$$

6°) a- Etudions les branches infinies de (C)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et on trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ d'où (C)

admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ d'où la droite d'équation $y = 0$ est

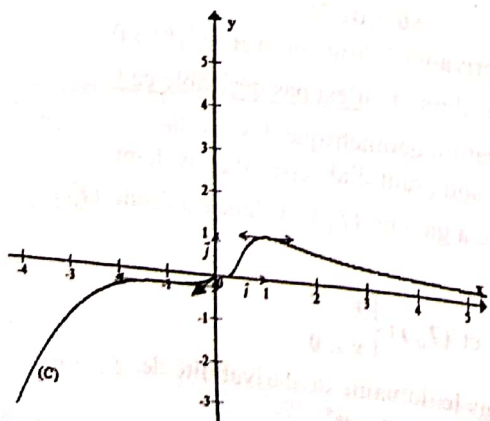
asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$

b- Démontrons que 1 est un point d'inflexion de (C)

$f'(x)$ s'annule en -1 sans changer de signe d'où 1

d'abscisse -1 est un point d'inflexion de (C) .

c- Construisons (C)



ACTIVITE 20 :

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)e^x & , \text{ si } x < 1 \\ x-1 + \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

1°) Prouvons que f est continue en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x-1 + \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = 0 + \ln 1 = 0 = f(1)$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ donc f est continue en 1 .

2°) a- Vérifions que pour tout $x > 1$,

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1 + \frac{\ln x}{x-1} - \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{x-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } x > 1, \text{ on a : } \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \frac{x-1 + \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)}{x-1} \\ &= 1 + \frac{\ln(2x) - \ln(x+1)}{x-1} \\ &= 1 + \frac{\ln 2 + \ln x - \ln(x+1)}{x-1} \\ &= 1 + \frac{\ln x}{x-1} - \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{x-1} \end{aligned}$$

le résultat.

b- Démontrons que f est dérivable en 1 et que $f'_d(1) = \frac{3}{2}$

$$\text{Pour } x > 1, \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1 + \frac{\ln x}{x-1} - \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{x-1}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\text{En posant } \frac{x+1}{2} = X \text{ on a : } x = 2X-1 ; x \rightarrow 1^+, X \rightarrow 1$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{x-1} &= \lim_{X \rightarrow 1^+} \frac{\ln X}{2X-2} \\ &= \lim_{X \rightarrow 1^+} \frac{1}{2} \times \frac{\ln X}{X-1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} ; \frac{3}{2} \in \mathbb{R} \text{ d'où } f \text{ est dérivable à droite en } 1 \text{ et } f'_d(1) = \frac{3}{2}.$$

Remarque :

$$\text{Pour } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{x-1} \text{ on peut poser : } v(x) = \ln(x+1) \text{ et constater que : } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{v(x) - v(1)}{x-1} = v'(1).$$

c- Etudions la dérivabilité de f en 1 puis interprétons.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)e^x}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -e^x = -e; -e \in \mathbb{R} \text{ donc } f \text{ est dérivable à gauche en } 1 \text{ et } f'_g(1) = -e$$

On a : $f'_g(1) \neq f'_d(1)$ d'où f' n'est pas dérivable en 1.

Interprétation graphique :

(C) admet en son point d'abscisse 1 deux demi tangentes l'une à gauche en 1 T_g et l'autre à droite en 1 T_d définies par :

$$T_g : \begin{cases} x \leq 1 \\ y = -ex + e \end{cases} \text{ et } T_d : \begin{cases} x \geq 1 \\ y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \end{cases}$$

3°) Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

On trouve : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

4°) a- Etudions le sens de variations de f .

La fonction $x \mapsto (1-x)e^x$ est dérivable sur $]-\infty; 1[$ comme produit de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in]-\infty; 1[, f'(x) = -xe^x$$

Sur $]1; +\infty[$, $\frac{2x}{x+1} > 0$ et $x+1 \neq 0$ donc la fonction

$$x \mapsto x-1 + \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) \text{ est dérivable sur }]1; +\infty[\text{ comme}$$

composé et somme de fonctions dérivables et

$$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x(x+1)}$$

Signe de $f'(x)$

- Sur $]-\infty; 1[$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-x$ car $e^x > 0$.

$$\text{Donc } \begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]0; 1[, f'(x) < 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

- Sur $]1; +\infty[$ le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 + x + 1$.

On a le discriminant de $x^2 + x + 1$ est $\Delta = -3$; $-3 < 0$ et $1 > 0$ donc $\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) > 0$

En résumé on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]0; 1[, f'(x) < 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $]1; +\infty[$ et f est strictement décroissante sur $[0; 1]$.

b- Dressons le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	0	1	0	$+\infty$

5°) $\varphi(x) = f(x) - x + 1 - \ln 2$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1 + \ln 2)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) - \ln 2 \right]$$

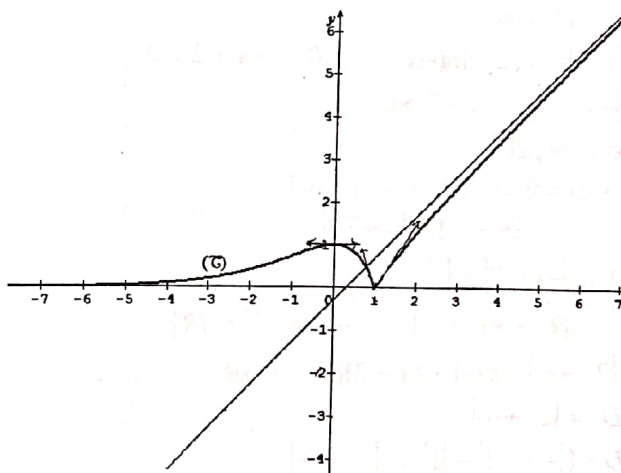
$$= \ln 2 - \ln 2 = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$$

Signification :

La droite d'équation $y = x - 1 + \ln 2$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

7°) Traçons (C)

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C).



ACTIVITE 22 :

1°) a- Etudions les variations de v sur $]-\infty; 2[$

$$v(x) = \ln(-x+2) - \frac{x-3}{x-2}$$

v est continue et dérivable sur $]-\infty; 2[$ comme somme de fonctions continue et dérivable sur $]-\infty; 2[$.

$$\forall x \in]-\infty; 2[, v'(x) = \frac{x-3}{(x-2)^2}$$

$\forall x \in]-\infty; 2[, v'(x) < 0$ alors v est strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^-} v = -\infty$$

Tableau de variation de v

x	
$v(x)$	-
v	

b-Démontrons que l'équation $v(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $-1,6 < \alpha < -1,5$

v est continue et strictement décroissante sur $] -\infty; 2[$ et $v(-\infty; 2] =] -\infty; +\infty[$. Or $0 \in] -\infty; +\infty[$ d'où l'équation $v(x) = 0$ admet une solution unique α dans $] -\infty; 2[$. De plus $-1,6 \in] -\infty; 2[$ et $-1,5 \in] -\infty; 2[$
 $v(-1,6) = 0,03$; $v(-1,5) \approx -0,033$ et
 $v(-1,6) \times v(-1,5) < 0$ d'où $-1,6 < \alpha < -1,5$

c- Dédons-en le signe de $v(x)$ sur $] -\infty; 2[$

D'après 1°) a- et b- on a :
$$\begin{cases} \forall x \in] -\infty; \alpha[, v(x) > 0 \\ \forall x \in] \alpha; 2[, v(x) < 0 \\ v(\alpha) = 0 \end{cases}$$

2°) Justifions que $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$D = D_1 \cup D_2$ avec

$$D_1 = \{x \in] -\infty; 2[/ \ln(-x+2) \neq 0 \text{ et } -x+2 > 0\}$$

$$\forall x \in] -\infty; 2[, -x+2 > 0$$

Soit $x \in] -\infty; 2[$

$$\ln(-x+2) = 0 \Leftrightarrow \ln(-x+2) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \in] -\infty; 2[$$

donc $D_1 =] -\infty; 2[\setminus \{1\}$

$$D_2 = \{x \in [2; +\infty[/ x-1 + (x-2)e^{-x+2} \in \mathbb{R}\}$$

$$\forall x \in [2; +\infty[, x-1 + (x-2)e^{-x+2} \in \mathbb{R}$$

donc $D_2 = [2; +\infty[$

d'où $D = (]-\infty; 2[\setminus \{1\}) \cup [2; +\infty[$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

b- Etudions la continuité et la dérivabilité de f en 0

Continuité de f en 2

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{\ln(-x+2)} + 1 = 1 \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(-x+2) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-3) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 2 - 1 + (2-2)e^{-2+2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \text{ d'où } f \text{ est continue en 1.}$$

Dérivabilité de f en 2

$$* \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{(x-2)\ln(-x+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-3) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2)\ln(-x+2) = 0^+ \end{cases}$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 2 (i)

$$* \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (1 + e^{-x+2}) = 2 \text{ donc } f \text{ est}$$

dérivable à droite en 2 et $f'_d(2) = 2$ (ii)

De (i) et (ii) f n'est pas dérivable en 2

Interprétation géométrique des résultats

f n'est pas dérivable à gauche en 2 mais dérivable à droite en 2. Alors (C) admet en son point d'abscisse 2 deux demi-tangentes, l'une à gauche (T_g) et l'autre à droite (T_d)

$$\text{définies par : } (T_g): \begin{cases} x = 2 \\ y \geq 2 \end{cases} \text{ et } (T_d): \begin{cases} x \geq 2 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

3°) a- Calculons les limites de f aux bornes de D

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x-3}{\ln(-x+2)} + 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\frac{x-3}{-x+2}}{\frac{\ln(-x+2)}{-x+2}} + 1 \right] = -\infty \text{ car} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3}{-x+2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x+2)}{-x+2} = 0^+ \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{x-3}{\ln(-x+2)} + 1 \right] = -\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{x-3}{\ln(-x+2)} + 1 \right] = +\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x-1 + (x-2)e^{-x+2}] = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)e^{-x+2} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b-Achevons l'étude de la variation de f

$$\forall x \in] -\infty; 2[\setminus \{1\}, f'(x) = \frac{v(x)}{[\ln(-x+2)]^2}$$

$$\forall x \in [2; +\infty[, f'(x) = 1 + (3-x)e^{-x+2}$$

Signe de $f''(x)$

$$\text{On obtient : } \begin{cases} \forall x \in] -\infty; \alpha[\cup [2; +\infty[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in] \alpha; 2[\setminus \{1\}, f'(x) < 0 \\ f'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

D'où f est strictement croissante sur $] -\infty ; \alpha]$ et sur $[2 ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $[\alpha ; 1[$ et sur $]1 ; 2]$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	α	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	1	$+\infty$	$+\infty$

4°) a- Démontrons que $f(\alpha) = \alpha - 1$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha - 3}{\ln(-\alpha + 2)} + 1$$

$$v(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln(-\alpha + 2) = \frac{\alpha - 3}{\alpha - 2} \text{ donc}$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha - 3}{\frac{\alpha - 3}{\alpha - 2}} + 1 = \frac{(\alpha - 3)(\alpha - 2)}{\alpha - 3} + 1 = \alpha - 1$$

Calculons la valeur approchée de $f(\alpha)$

$$-1,6 < \alpha < -1,5 \Leftrightarrow -2,6 < f(\alpha) < -2,5 \text{ d'où}$$

$$f(\alpha) \approx \frac{-2,6 - 2,5}{2} \Rightarrow f(\alpha) \approx -2,55$$

b- Démontrons que $(\Delta): y = x - 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2)e^{-x+2} = 0 \text{ d'où } (\Delta): y = x - 1$$

est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

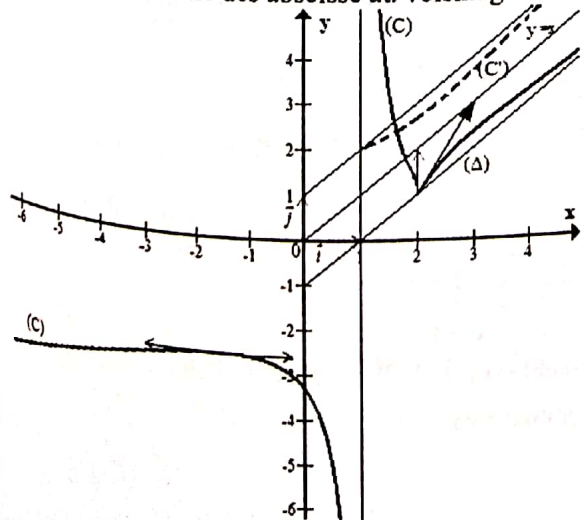
c- Construisons (C)

Les autres branches infinies à (C)

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à (C)

On trouve :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ donc } (C) \text{ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisse au voisinage de } -\infty.$$



5°) a- Démontrons que la fonction g admet une bijection réciproque g^{-1}

f est continue et strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$ et $f([2 ; +\infty[) = [1 ; +\infty[$ d'où g est une bijection de $[2 ; +\infty[$ sur $[1 ; +\infty[$ par suite g admet une bijection réciproque g^{-1} .

b- Construisons (C') courbe de g^{-1} voir courbe en pointillé de la figure

ACTIVITE 23:

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{-x-1} & , \text{ si } x \leq -1 \\ f(x) = -1 + \sin(\pi x) & , \text{ si } -1 < x < 1 \\ f(x) = \ln x - \exp(1-x) & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

1°) Déterminons le domaine de définition de D_f de f

$$D_f = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \text{ avec}$$

$$D_1 = \{x \in]-\infty ; -1] / -x-1 \geq 0\}$$

$$-x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -1] \text{ donc}$$

$$D_1 =]-\infty ; -1]$$

$$D_2 = \{x \in]-1 ; 1[/ -1 + \sin(\pi x) \text{ existe}\}$$

$$D_2 =]-1 ; 1[$$

$$D_3 = \{x \in [1 ; +\infty[/ x > 0\}$$

$$\forall x \in [1 ; +\infty[, x > 0 \text{ donc } D_3 = [1 ; +\infty[$$

$$\text{D'où } D_f = \mathbb{R}$$

2°) Etudions la continuité de f en -1 et en 1

En -1

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x + \sqrt{-x-1} = -1 = f(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} -1 + \sin(\pi x) = -1$$

On a : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ donc f est continue

en -1

En 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} -1 + \sin(\pi x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x - e^{(1-x)}) = -1 = f(1)$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ donc f est continue en 1

3°) a- Etudions la dérivabilité de f en -1

$$* \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1 + \sqrt{-x-1}}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} 1 - \frac{1}{\sqrt{-x-1}} = -\infty \text{ alors } f \text{ n'est}$$

pas dérivable à gauche en -1 .

$$* \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1 + \sin(\pi x) + 1}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(\pi x)}{x + 1}$$

Posons $X = x + 1$

$X = x + 1 \Leftrightarrow x = X - 1$ et si $x \rightarrow -1$, $X \rightarrow 0$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin \pi(X - 1)}{X}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-\sin \pi X}{X} = -\pi ; -\pi \in \mathbb{R}$$

alors f est dérivable à droite en -1 et le nombre dérivé à

droite de f en -1 est $f'_d(-1) = -\pi$

Au total f n'est pas dérivable en -1

Interprétations des résultats :

(G) admet en point d'abscisse -1 deux demi-tangentes définies par :

$$\text{A gauche en } -1 (T_g) : \begin{cases} x = -1 \\ y \geq -1 \end{cases}$$

$$\text{A droite en } -1 (T_d) : \begin{cases} x \geq -1 \\ y = -\pi(x + 1) - 1 \end{cases} \text{ soit}$$

$$(T_d) : \begin{cases} x \geq -1 \\ y = -\pi x - \pi - 1 \end{cases}$$

b-Etudions la dérivabilité de f en 1 .

$$* \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1 + \sin(\pi x) + 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1}$$

Soit $v = x - 1$

$v = x - 1 \Leftrightarrow x = v + 1$ et si $x \rightarrow 1$, $v \rightarrow 0$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi(v + 1)}{v}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sin \pi v}{v} = -\pi ; -\pi \in \mathbb{R} \text{ alors}$$

f est dérivable à gauche en 1 et le nombre dérivé à gauche de f en 1 est $f'_g(1) = -\pi$

$$* \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - e^{1-x} + 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} - \frac{e^{1-x} - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x - 1} + \frac{e^{1-x} - 1}{1 - x} = 2 \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} 1 - x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \end{cases}$$

Or $2 \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable à droite en 1 et le nombre dérivé à droite de f en 1 est $f'_d(1) = 2$

Conclusion : on a : $f'_g(1) \neq f'_d(1)$ d'où f n'est pas dérivable en 1

Interprétation :

(G) admet en son point d'abscisse 1 deux demi-tangentes définies par :

$$\text{A gauche en } 1 \text{ on a } (T) : \begin{cases} x \leq 1 \\ y = -\pi x + \pi - 1 \end{cases}$$

$$\text{A droite en } 1 \text{ on a } (T') : \begin{cases} x \geq 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

4°) Calculons les limites aux bornes de D_f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{-x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x - x \sqrt{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \sqrt{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} \right) = -\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - e^{1-x} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

5°) Dressons le tableau de variation de f

• Dérivée de f

f est dérivable sur $] -\infty ; -1[$ et $\forall x \in] -\infty ; -1[$,

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{-x - 1} - 1}{2\sqrt{-x - 1}}$$

f est dérivable sur $] -1 ; 1[$ et $\forall x \in] -1 ; 1[$,

$$f'(x) = \pi \cos(\pi x)$$

f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $\forall x \in]1; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} + e^{1-x}$$

• Signe de la dérivée

Sur $] -\infty; -1[$, le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur qui est $u: x \mapsto 2\sqrt{-x-1} - 1$

Posons $u(x) = 0, \forall x \in] -\infty; -1[$

$$u(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-x-1} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{-x-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x-1 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$$

La fonction $u: x \mapsto 2\sqrt{-x-1} - 1$ est continue et ne s'annule

par sur $] -\infty; -\frac{5}{4}[$ et sur $] -\frac{5}{4}; -1[$

On a : $-2 \in] -\infty; -\frac{5}{4}[$ et $u(-2) = 2\sqrt{2-1} - 1 = 1$ or $1 > 0$

alors $\forall x \in] -\infty; -\frac{5}{4}[$, $f'(x) > 0$

On a : $-1 \in] -\frac{5}{4}; -1[$ et $u(-1) = -1$; $-1 < 0$ alors

$\forall x \in] -\frac{5}{4}; -1[$, $f'(x) < 0$.

Sur $] -1; 1[$, le signe de $f'(x)$ est celui de $\cos \pi x$
 $x \in] -1; 1[\Leftrightarrow -\pi < \pi x < \pi$

On a : $\begin{cases} \cos \pi x < 0, \text{ si } \pi x \in] -\pi; -\frac{\pi}{2}[\cup] \frac{\pi}{2}; \pi[\\ \cos \pi x > 0, \text{ si } \pi x \in] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\\ \cos \pi x = 0, \text{ si } \pi x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\} \end{cases}$

On déduit : $\begin{cases} f'(x) < 0, \Leftrightarrow x \in] -1; -\frac{1}{2}[\cup] \frac{1}{2}; 1[\\ f'(x) > 0, \Leftrightarrow x \in] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[\\ f'(x) = 0, \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\} \end{cases}$

Sur $]1; +\infty[$ on a : $\frac{1}{x} > 0$ et $e^{1-x} > 0$ donc

$$f'(x) > 0, \forall x \in]1; +\infty[$$

En résumé on a :

$$\begin{cases} f'(x) < 0, \Leftrightarrow x \in] -\frac{5}{4}; -1[\cup] -1; -\frac{1}{2}[\cup] \frac{1}{2}; 1[\\ f'(x) > 0, \Leftrightarrow x \in] -\infty; -\frac{5}{4}[\cup] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[\cup]1; +\infty[\\ f'(x) = 0, \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{5}{4}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\} \end{cases}$$

• Sens de variation de f

f est strictement décroissante sur $] -\frac{5}{4}; -\frac{1}{2}[$ et sur $] \frac{1}{2}; 1[$

f est strictement croissante sur $] -\infty; -\frac{5}{4}[$, sur $] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$

et sur $]1; +\infty[$

• Tableau de variation f

x	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

$$6^\circ) h: \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right] \rightarrow f\left(\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right] \right)$$

$$x \mapsto h(x) = f(x)$$

a- Démontrons que h admet une bijection réciproque

$$h^{-1}$$

h est la restriction de f à l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$ donc h est

continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$ et

$$f\left(\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right] \right) = \left[f\left(-\frac{1}{2} \right); f\left(\frac{1}{2} \right) \right] = [-2; 0]$$

alors h est bijective par suite elle admet une bijection réciproque h^{-1}

b- Déterminons le domaine V de dérivabilité de h^{-1}

$$h^{-1}: [-2; 0] \rightarrow \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right] \text{ et } V = [-2; 0] \setminus$$

$$\left\{ f(x) / f'(x) = 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right] \right\}$$

$$\text{Pour tout } x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right], f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

donc

$$V = [-2; 0] \setminus \left\{ f\left(-\frac{1}{2}\right); f\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \text{ soit } \underline{V =]-2; 0[}$$

c- Calculons $(h^{-1})'(x)$, $\forall x \in]-2; 0[$

$$\forall x \in]-2; 0[, (h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'[h^{-1}(x)]}$$

$$\text{Posons } h^{-1}(x) = y \text{ avec } \begin{cases} x \in [-2; 0] \\ y \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

$$h^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = h(y)$$

$$\Leftrightarrow x = -1 + \sin(\pi y)$$

$$\Leftrightarrow \sin(\pi y) = x + 1$$

$$h'(y) = \pi \cos(\pi y) \text{ or } \cos(\pi y) = \sqrt{1 - \sin^2(\pi y)} \text{ car } \cos(\pi y) > 0$$

$$\text{Donc } \forall x \in]-2; 0[, (h^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{-x^2 - 2x}}$$

7°) a- Calculons $k'(x)$

La fonction $k: x \mapsto x \ln x$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivable et on a : $\underline{k'(x) = 1 + \ln x}$

b- Déduisons-en une primitive K sur $]1; +\infty[$ de la fonction f

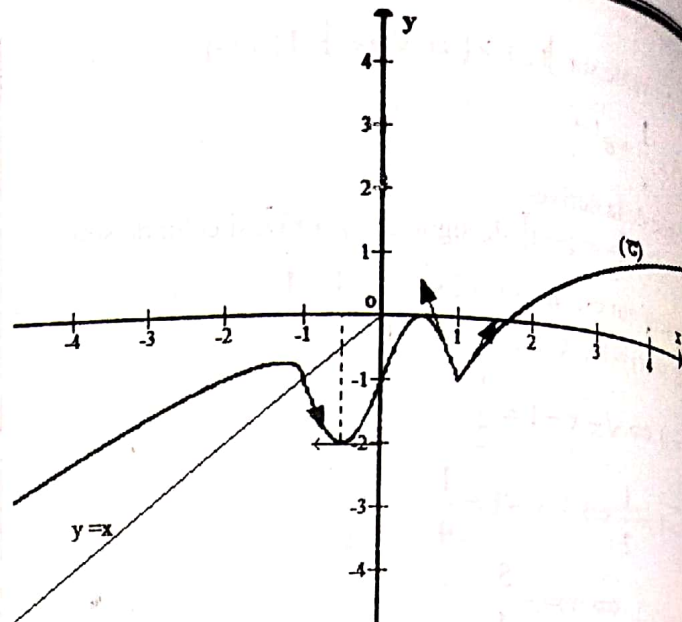
on a de ce qui précède : $\ln x = k'(x) - 1$ or la fonction f est continue sur $]1; +\infty[$ alors $F(x) = k(x) - x + e^{1-x}$ d'où $\forall x \in]1; +\infty[, F(x) = -x + x \ln x + \exp(1-x)$

8°) Etudions les branches infinies de $(\mathcal{C})$

On trouve $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = +\infty$ et on conclure que $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$

On trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ et on conclure que $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axes des abscisses au voisinage de $+\infty$

9°) construction de la courbe $(\mathcal{C})$



ACTIVITE 24:

1°) a- Etudions les variations des fonctions u et v

Variation de u

$$u(x) = e^x - x - 1$$

$$\bullet D_u = \{x \in \mathbb{R} / e^x - x - 1 \in \mathbb{R}\}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x - x - 1 \in \mathbb{R} \text{ donc } D_u = \mathbb{R}$$

$\bullet u$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables :

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = e^x - 1$$

$\bullet$ Posons $e^x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0]$ on déduit donc :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[, u'(x) < 0 \\ \forall x \in]0; +\infty[, u'(x) > 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

$\bullet$ Alors u est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} u = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u = +\infty$$

$\bullet$ Tableau de variation de u

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$	$-$	0	$+$
$u(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Variation de v

$$v(x) = -x + 1 + \ln x$$

$$D_v = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$$

$$x > 0 \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[\text{ d'où } D_v =]0; +\infty[$$

v est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x \in]0; +\infty[, v'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x}$$

$$\text{Posons } (-x+1)x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 0 \text{ donc}$$

$$\begin{cases} \forall x \in]0; 1[, v'(x) > 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, v'(x) < 0 \\ v'(0) = 0 \end{cases}$$

Alors v est strictement croissante sur $]0; 1[$ et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

$$\lim_{0^+} v = -\infty \text{ et } \lim_{+\infty} v = -\infty$$

Tableau de variation de v

x	0	1	$+\infty$
$v'(x)$		0	-
$v(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

b- Dédisons que $\forall x \in]0; +\infty[, e^x \geq x+1$,

$$\ln x \leq x-1 \text{ et } e^x - \ln x \geq 2$$

Des variations de $u \forall x \in \mathbb{R}, u(x) \geq 0$ donc

$$\forall x \in]0; +\infty[, u(x) \geq 0$$

$$\text{on a : } e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x+1$$

$$\text{d'où } \forall x \in]0; +\infty[, e^x \geq x+1 \text{ (a)}$$

des variation de $v, \forall x \in]0; +\infty[, v(x) \leq 0$ on a donc :

$$-x+1+\ln x \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq x-1$$

$$\text{d'où } \forall x \in]0; +\infty[, \ln x \leq x-1$$

$$\ln x \leq x-1 \Leftrightarrow -\ln x \geq 1-x \text{ (b)}$$

$$\text{De (a) et (b) } \forall x \in]0; +\infty[, e^x - \ln x \geq 2$$

2°) a- Justifions que $D =]0; +\infty[$

$$D = \{x \in]0; +\infty[/ x > 0 \text{ et } e^x - \ln x \neq 0\} \cup \{0\}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, e^x - \ln x \geq 2 \text{ donc } e^x - \ln x \neq 0 \text{ et}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, x > 0$$

$$\text{Donc } D =]0; +\infty[\cup \{0\} \text{ d'où } D =]0; +\infty[$$

b- Etudions la continuité et la dérivabilité de f en 0

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x - \ln x} = 0 \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{ donc } f \text{ est continue à droite en 0}$$

Dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - \ln x} = 0, 0 \in \mathbb{R} \text{ donc } f$$

est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

3°) Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - \ln x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x \left(1 - \frac{\ln x}{e^x}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{\ln x}{e^x}\right)} = 0$$

Interprétation graphique

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est

asymptote à (Γ) au voisinage de $+\infty$

4°) a- sens de variation de g sur $]0; +\infty[$ et dressons le tableau de variation de g

$$g(x) = e^x - \ln x - xe^x + 1$$

g est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = -\frac{1}{x} - xe^x$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, -\frac{1}{x} < 0 \text{ et } -xe^x < 0 \text{ donc } g'(x) < 0$$

alors g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation de g

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
g	$+\infty$	$-\infty$

b- démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $1,23 \leq \alpha \leq 1,24$

g est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et

$g(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$, $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$

Admet une solution unique α

$g(1,23) \approx 0,0061$ et $g(1,24) \approx -0,0445$ on a :

$g(1,23) \times g(1,24) < 0$ donc $1,23 \leq \alpha \leq 1,24$

c- Signe de $g(x)$

des variation de g on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases}$$

5°) Etudions les variations de f

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de quotient de fonctions dérivables

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x - \ln x - \left(e^x - \frac{1}{x}\right)}{(e^x - \ln x)^2} \\ &= \frac{e^x - \ln x - e^x + \frac{1}{x}}{(e^x - \ln x)^2} \\ &= \frac{g(x)}{(e^x - \ln x)^2} \end{aligned}$$

$\forall x \in]0; +\infty[, (e^x - \ln x)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend de $g(x)$

On déduit donc :

$$\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) < 0 \\ f'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Donc f est strictement croissante sur $]0; \alpha]$ et strictement décroissante sur $]\alpha; +\infty[$

Tableau de variation de f

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
f	0	$f(\alpha)$	0

6°) a- Démontrons que $f(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha e^\alpha - 1}$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^\alpha - \ln \alpha} \text{ or}$$

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha - \ln \alpha - \alpha e^\alpha + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln \alpha = e^\alpha - \alpha e^\alpha + 1 \text{ donc}$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^\alpha - e^\alpha + \alpha e^\alpha - 1}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha e^\alpha - 1} \text{ d'où } f(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha e^\alpha - 1}$$

b- Encadrement de $f(\alpha)$

$$1,23 \leq \alpha \leq 1,24 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 3,421 \leq e^\alpha \leq 3,455 \quad (2)$$

$$\text{De (1) et (2)} \quad 4,2078 \leq \alpha e^\alpha \leq 4,2842$$

$$\Leftrightarrow 3,2078 \leq \alpha e^\alpha - 1 \leq 3,2842$$

$$\Leftrightarrow 0,304 \leq \frac{1}{\alpha e^\alpha - 1} \leq 0,312 \quad (3)$$

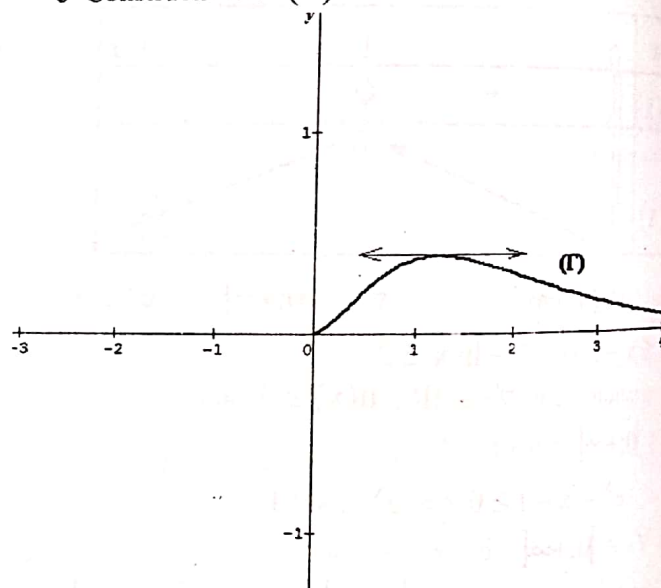
$$(1) \text{ et } (3) \Rightarrow 0,374 \leq f(\alpha) \leq 0,386 \text{ d'où}$$

$$0,37 \leq f(\alpha) \leq 0,39$$

$$\frac{0,37 + 0,39}{2} = 0,38 \text{ d'où } 0,38 \text{ est une valeur approchée}$$

$f(\alpha)$

c- Construction de (Γ)



ACTIVITE 12 :

ACTIVITÉ 12 :
1°) Justifions l'existence du nombre réel $I = \int_a^b h(x) dx$ où

$$a = -\ln(1 + \sqrt{3}), \quad b = -\ln(\sqrt{3} - 1) \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2 - e^{2x}}}$$

$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} / 2 - e^{2x} > 0 \right\}$$

$$2 - e^{2x} > 0 \Leftrightarrow x < \frac{\ln 2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-\infty; \frac{\ln 2}{2} \right[\text{ donc } D_g = \left[-\infty; \frac{\ln 2}{2} \right[$$

La fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur $\left[-\infty; \frac{\ln 2}{2}\right]$, la

fonction $x \mapsto 2 - e^{2x}$ est continue sur $\left] -\infty; \frac{\ln 2}{2} \right[$ et

$\forall x \in \left] -\infty; \frac{\ln 2}{2} \right[, 2 - e^{2x} > 0$ donc la fonction :

$$x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}} \text{ est continue sur } \left] -\infty; \frac{\ln 2}{2} \right[\text{ par conséquent}$$

$$h: x \mapsto \frac{e^x}{1-e^{2x}} \text{ est continue sur } \left] -\infty; \frac{\ln 2}{2} \right[$$

$$a = -\ln(1 + \sqrt{3}) = \ln\left(\frac{1}{1 + \sqrt{3}}\right)$$

$$a = \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \in \left]-\infty; \frac{\ln 2}{2}\right[$$

$$b = -\ln(\sqrt{3} - 1) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3} - 1}\right)$$

$$b = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \in \left]-\infty; \frac{\ln 2}{2}\right[$$

De tout ce qui précède I existe.

2°) a- Calculons $u\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $u\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$u\left(\frac{\pi}{3}\right) = \ln\left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ d'où } u\left(\frac{\pi}{3}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$$

$$u\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \ln\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ d'où } u\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

b- Justifions que $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2} \left(\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right)\end{aligned}$$

$$= \cos x + \sin x \text{ d'où le résultat}$$

c- Démontrons que u est bijective.

$$u(x) = \ln(\cos x + \sin x)$$

$$D_u = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{3\pi}{4} \\ x < \frac{3\pi}{4}}} u(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{3\pi}{4} \\ x < \frac{3\pi}{4}}} \ln\left(\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = -\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} u(x) = u\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2}$$

u est continue et dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ comme composé de fonctions dérivables

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right[, u'(x) = \frac{-\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{donc}$$

$$u'(x) = \frac{-\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Signe de u

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right[, x - \frac{\pi}{4} \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[$$

donc $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right], \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$

D'où $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$, $u'(x) < 0$ et $u'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

u est donc continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

et $u\left(\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]\right) = \left]-\infty; \frac{\ln 2}{2}\right]$ d'où u est bijective

d) Déterminons l'ensemble de dérivabilité E de u^{-1} .
 u est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ et $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ donc

u^{-1} est dérivable sur $E = u\left(\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]\right)$ d'où :

$$E = \left]-\infty; \frac{\ln 2}{2}\right[$$

3°) Justifions que $\forall x \in E, (u^{-1})'(x) = -h(x)$

$$\forall x \in E, (u^{-1})'(x) = \frac{1}{u'(u^{-1}(x))}$$

Posons : $u^{-1}(x) = y$ avec $\begin{cases} x \in \left]-\infty; \frac{\ln 2}{2}\right[\\ y \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \end{cases}$

$$u^{-1}(x) = y \Leftrightarrow u(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{2} \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right)\right) = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = e^x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{e^x}{\sqrt{2}}$$

$$u'(y) = \frac{-\sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right)} \text{ on sait que :}$$

$$\sin^2\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \cos^2\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$$

On a donc : $\sin^2\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{e^{2x}}{2}$
 $= \frac{2 - e^{2x}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2 - e^{2x}}}{\sqrt{2}} \text{ car } \sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

Alors $u'(y) = \frac{-\frac{\sqrt{2 - e^{2x}}}{\sqrt{2}}}{\frac{e^x}{\sqrt{2}}} = -\frac{\sqrt{2 - e^{2x}}}{e^x}$ d'où

$$\forall x \in E, (u^{-1})'(x) = -\frac{e^x}{\sqrt{2 - e^{2x}}} = -h(x) \text{ soit}$$

$$(u^{-1})'(x) = -h(x)$$

*Calculons I

Initi...

$$I = \int_a^b h(x) dx$$

$$= \int_a^b (u^{-1})'(x) dx$$

$$= [-u^{-1}(x)]_a^b = -u^{-1}(b) + u^{-1}(a)$$

$$u\left(\frac{2\pi}{3}\right) = a \Leftrightarrow u^{-1}(a) = \frac{2\pi}{3}$$

$$u\left(\frac{\pi}{3}\right) = b \Leftrightarrow u^{-1}(b) = \frac{\pi}{3} \text{ donc } I = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \text{ d'où } I = \frac{\pi}{3}$$

ACTIVITE 15:

A/ $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 9x + 5}{2x^2 + 2}$

1°) Démontrons qu'il existe des réels a, b et c tels que : pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 + 1}$.

Faisons une division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 5x^2 + 9x + 5 & 2x^2 + 2 \\ -x^3 - x & \\ \hline 5x^2 + 8x + 5 & \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ -5x^2 - 5 & \\ \hline 8x & \end{array}$$

Donc $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{8x}{2x^2 + 2}$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{4x}{x^2 + 1} \text{ d'où } a = \frac{1}{2}, b = \frac{5}{2} \text{ et}$$

$$c = 4.$$

2°) a- Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 5x^2 + 9x + 5}{2x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b- Démontrons que la droite $(\mathcal{D}) : y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ est

asymptote à $(\mathcal{C})$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x} = 0$

donc la droite $(\mathcal{D}) : y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

c- Etudions la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right) = \frac{4x}{x^2 + 1}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$ donc le signe de $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)$ est

celui de $4x$.

$4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ alors on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in]-\infty; 0[, f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right) < 0 \\ \forall x \in]0; +\infty[, f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right) > 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in]-\infty; 0[, f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right) < 0 \\ \forall x \in]0; +\infty[, f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right) > 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Pour } x = 0, f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right) = 0$$

D'où $(\mathcal{C})$ est en dessous de $(\mathcal{D})$ sur $]-\infty; 0[$ et $(\mathcal{C})$ est au dessus de $(\mathcal{D})$ sur $]0; +\infty[$ et pour $x = 0$ $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$ sont confondus.

3°) Etudions les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

f étant une fonction rationnelle elle est continue et dérivable en tout point de son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 10x + 9)(2x^2 + 2) - 4x(x^3 + 5x^2 + 9x + 5)}{(2x^2 + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 12x^2 + 18}{(2x^2 + 2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x^2 - 3)^2}{(2x^2 + 2)^2}$$

$$2(x^2 - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}$$

On a : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$, $f'(x) > 0$ et

$$f'(-\sqrt{3}) = f'(\sqrt{3}) = 0$$

Alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{5 - 3\sqrt{3}}{2} \text{ et } f(\sqrt{3}) = \frac{5 + 3\sqrt{3}}{2}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{5-3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$

4°) a- Déterminons les coordonnées des points de la courbe $(\mathcal{C})$ où la tangente est parallèle à la droite :

Soit x_0 les abscisses des points de la tangente à $(\mathcal{C})$ où la tangente est parallèle à $(\mathcal{D})$.

$$\text{On a : } \begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ f'(x_0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ f'(x_0) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ \frac{2x_0^4 - 12x_0^2 + 18}{(2x_0^2 + 2)^2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ 4x_0^4 - 24x_0^2 + 36 = 4x_0^4 + 8x_0^2 + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_0 = -1 \text{ ou } x_0 = 1$$

$$f(-1) = 0 \text{ et } f(1) = 5$$

D'où les points recherchés sont : $A(-1; 0)$ et $B(1; 5)$

b- Déterminons une équation de ces tangentes

$$\text{on trouve : } (T_A) : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ et } (T_B) : y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

c- Démontrons que le point $I\left(0; \frac{5}{2}\right)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (2 \times 0 - x) \in \mathbb{R}$$

$$f(2 \times 0 - x) = f(-x) = \frac{-x^3 + 5x^2 - 9x + 5}{2x^2 + 2} \text{ et}$$

$$f(-x) + f(x) = \frac{10x^2 + 10}{2x^2 + 2}$$

$$= \frac{10(x^2 + 1)}{2(x^2 + 1)} = 5 = 2 \times \frac{5}{2} \text{ d'où le point } I\left(0; \frac{5}{2}\right)$$

est centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C})$.

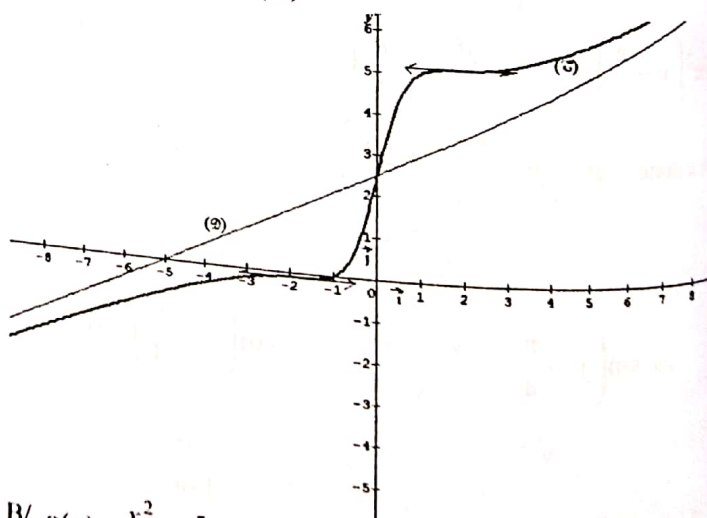
5°) a- Démontrons que -1 est la seule racine de $f(x)$.

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$ d'où il existe un unique réel α tel que :

$f(\alpha) = 0$; $-1 \in \mathbb{R}$ et $f(-1) = 0$ d'où -1 est la seule racine de $f(x)$.

b- Traçons $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$



$$B/ \quad g(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{5}{2}x + 2 \ln(x^2 + 1)$$

6°) Démontrons que g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2} + 2 \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2} + \frac{4x}{x^2 + 1} = f(x) \text{ et par ailleurs } g(0) = 0$$

d'où g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en zéro.

7°) a- Déduis-en le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f(x)$$

Or f est croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(-1) = 0$

$$x \in]-\infty; -1[\Rightarrow x < -1 \Rightarrow f(x) < 0$$

$$x \in]-1; +\infty[\Rightarrow x > -1 \Rightarrow f(x) > 0$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \forall x \in]-\infty; -1[, g'(x) < 0 \\ \forall x \in]-1; +\infty[, g'(x) > 0 \\ g(-1) = 0 \end{cases}$$

Alors g est strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$ et strictement croissante sur $[-1; +\infty[$

b- Calcule de limite de g

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g = +\infty$$

8°) a-

$$A(\alpha) = \int_0^\alpha \left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \right) \right) dx \text{ et on trouve :}$$

$$A(\alpha) = 2 \ln(\alpha^2 + 1) \text{ cm}^2$$

b- Valeurs de $\alpha / A(\alpha) \leq 1$

$$A(\alpha) \leq 1 \Leftrightarrow 2 \ln(\alpha^2 + 1) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(\alpha^2 + 1) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \in \mathbb{R} \\ \alpha^2 + 1 \leq \sqrt{e} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \in \left[-\sqrt{\sqrt{e}-1}; \sqrt{\sqrt{e}-1} \right]$$

ACTIVITE 17 :

$$\forall f(x) = x(1 + e^{2-x})$$

$$1^\circ) h(x) = 1 + (1-x)e^{2-x}$$

a-

$$D_h = \mathbb{R}$$

h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$h'(x) = -e^{2-x} + (x-1)e^{2-x} = (x-2)e^{2-x}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
h			

$$h(2) = 1 - e^0 = 0$$

b-

$$h(x) > 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \text{ et } h(2) = 0$$

2°) a-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

b-

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + e^{2-x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

(C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (Oy)

c-

$f(x) - x = xe^{2-x} = \frac{x}{e^x} \times e^2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$ alors la droite d'équation $y = x$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

d-

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - x$	-	0	+

- $x \in]-\infty; 0[$, (C) en dessous de (Δ).
- $x \in]0; +\infty[$, (C) est au dessus de (Δ).
- (C) et (Δ) se coupent en l'origine O.

3°) a-

$$f'(x) = 1 + e^{2-x} + x(-e^{2-x}) = 1 + (1-x)e^{2-x} = h(x)$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f			

b-

f continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f bijective de $\mathbb{R}$ sur lui même

c-

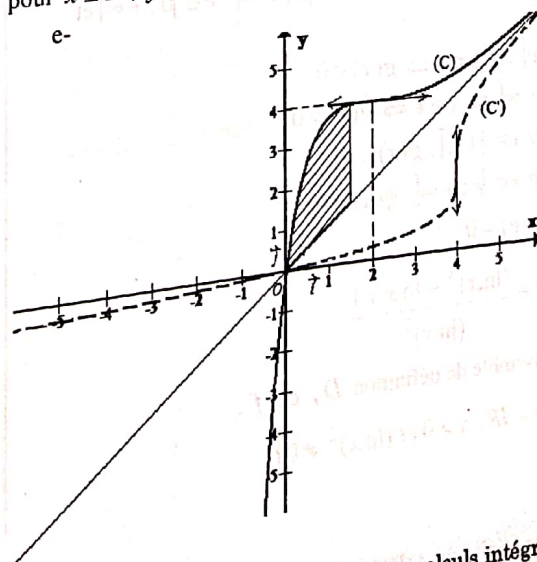
$f(2) = 4$ donc $f^{-1}(4) = 2$ et $f'(2) = 0$ donc f^{-1} n'est pas dérivable en 4.

$$d- (T): y = 4$$

pour $x \leq 2$, $f(x) \leq 4$

pour $x \geq 2$, $f(x) \geq 4$

e-



f- construisons (C') (voir courbe en pointillé)

II/
4°)

$\forall x \in [0; \lambda], f(x) \geq x$ alors:

$$a(\lambda) = \int_0^\lambda (f(x) - x) dx \text{ u.a.}$$

$$= 4 \int_0^\lambda x e^{2-x} dx \times cm^2$$

Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{2-x}$

On a: $u'(x) = 1$ et prenons $v(x) = -e^{2-x}$

$$\text{Donc } a(\lambda) = \left(\left[-x e^{2-x} \right]_0^\lambda + \int_0^\lambda e^{2-x} dx \right) \times 4 cm^2$$

$$a(\lambda) = \left[-x e^{2-x} - e^{2-x} \right]_0^\lambda \times 4 cm^2 \text{ et on trouve}$$

$$a(\lambda) = (4e^2 - 4\lambda e^{2-\lambda} - 4e^{2-\lambda}) cm^2$$

5°)

$$a = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} a(\lambda) = 4e^2 cm^2$$

ACTIVITE 18:

A/ $g(x) = (\ln x)^3 + \ln x - 2$

1°) Etudions le sens de variation de g .

Soit D_g le domaine de définition de g .

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\} =]0; +\infty[$$

g est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{3 \ln^2 x + 1}{x}$$

$\forall x \in]0; +\infty[, 3 \ln^2 x + 1 > 0$ et $x > 0$ donc $g'(x) > 0$

alors g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Calculons $g(e)$

$$g(e) = (\ln e)^3 + \ln(e) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0 \text{ donc } \underline{g(e) = 0}$$

2°) Déduisons-en le signe de $g(x)$.

g est strictement croissante sur $]0; +\infty[, e \in]0; +\infty[$ et

$$g(e) = 0$$

$$x \in]0; e[\Rightarrow x < e \Rightarrow g(x) < 0$$

$$x \in]e; +\infty[\Rightarrow x > e \Rightarrow g(x) > 0$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \forall x \in]0; e[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]e; +\infty[, g(x) > 0 \\ g(e) = 0 \end{cases}$$

$$B/ f(x) = \frac{(\ln x)^3 - \ln x + 1}{(\ln x)^2}$$

3°) a- Ensemble de définition D_f de f .

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } (\ln x)^2 \neq 0\}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ (\ln x)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]0; +\infty[\\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$\text{Donc } D_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

b- Etudions les limites de f aux bornes de D_f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^3 - \ln x + 1}{(\ln x)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x - \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\ln x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln^2 x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ d'où}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)^3 - \ln x + 1}{(\ln x)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} ((\ln x)^3 - \ln x + 1) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^2 = 0^+ \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{(\ln x)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{(\ln x)^2} \right) = 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

4°) a- Etudions la dérivabilité de f sur D_f

Les fonctions $x \mapsto (\ln x)^3 - \ln x + 1$ et $x \mapsto (\ln x)^2$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$ en particulier sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ et de plus $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, (\ln x)^2 \neq 0$ d'où la fonction

$$f: x \mapsto \frac{(\ln x)^3 - \ln x + 1}{(\ln x)^2} \text{ est dérivable en tout point de } D_f$$

$$\text{Vérifions que } \forall x \in D_f, f'(x) = \frac{g(x) \ln x}{x(\ln x)^2}$$

$$\forall x \in D_f,$$

$$f'(x) = \frac{\left(3 \frac{\ln^2 x}{x} - \frac{1}{x} \right) \ln^2 x - 2 \frac{\ln x}{x} (\ln^3 x - \ln x + 1)}{(\ln x)^4}$$

$$= \frac{3 \ln^4 x - \ln^2 x - 2 \ln^4 x + 2 \ln^2 x - 2 \ln x}{x(\ln x)^4}$$

$$= \frac{(\ln x)^4 + (\ln x)^2 - 2 \ln x}{x(\ln x)^4}$$

$$f'(x) = \frac{((\ln x)^3 + \ln x - 2) \ln x}{x(\ln x)^4} \text{ or } g(x) = (\ln x)^3 + \ln x - 2$$

$$\text{d'où } \forall x \in D_f, f'(x) = \frac{g(x) \ln x}{x(\ln x)^4}$$

b- Etudions le sens de variation de f

$\forall x \in D_f, x(\ln x)^4 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x) \ln x$ alors on déduit le tableau de signe suivant :

x	0	1	e	$+\infty$
$g(x)$	-	-	0	+
$\ln x$	-	0	+	+
$f'(x)$	+	-	0	+

$$\begin{cases} \forall x \in]0; 1[\cup]e; +\infty[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]1; e[, f'(x) < 0 \\ f'(e) = 0 \end{cases}$$

Alors f est strictement croissante sur $]0; 1[$ et sur $]e; +\infty[$ et f est strictement décroissante sur $]1; e[$

Dressons le tableau de variation de f

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$

5°) Etudions la position relative de (C_f) et (C_h)

Pour $x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$,

$$f(x) - \ln x = \frac{-\ln x + 1}{(\ln x)^2}$$

$$-\ln x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq e \end{cases} \Leftrightarrow x \in [e; +\infty[$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \forall x \in [e; +\infty[, f(x) - \ln x < 0 \\ \forall x \in]0; 1[\cup]1; e[, f(x) - \ln x > 0 \\ \text{pour } x = e, f(x) - \ln x = 0 \end{cases}$$

Alors :

- (C_f) est au dessus de (C_h) sur $]0; 1[\cup]1; e[$
- (C_f) est en dessous de (C_h) sur $]e; +\infty[$
- (C_f) et (C_h) sont confondu pour $x = e$

Traçons (C_f) et (C_h)

Branche infinie :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ alors la droite d'équation } x = 0 \text{ est}$$

asymptote à (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \text{ alors la droite d'équation } x = 1 \text{ est}$$

asymptote à (C_f)

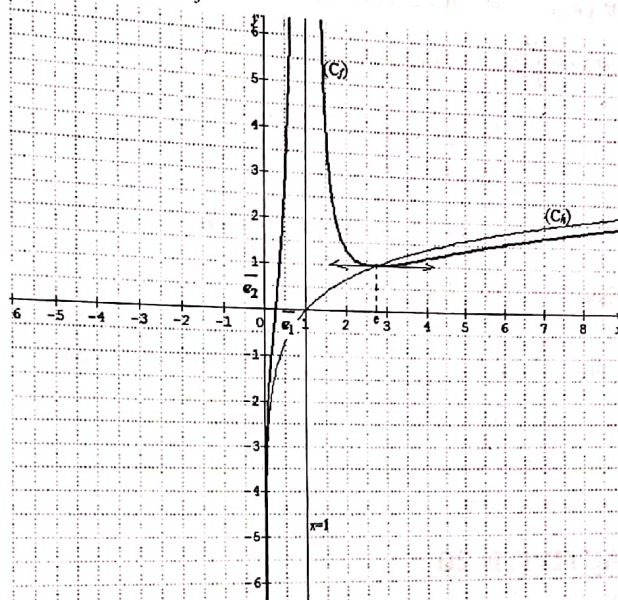
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x + \left(-\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln^2 x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln^2 x} \right) = 0 \text{ alors la}$$

courbe $(C_h): y = \ln x$ est asymptote à (C_f) aux

voisinage de $+\infty$

Courbe de (C_f)



C/ $1 < a < b$

6°) a- Etablissons une formule d'intégration par partie pour

$$\text{l'intégrale : } \int_a^b \frac{1}{\ln x} dx$$

$$\text{Posons } u(x) = \frac{1}{\ln x} \text{ et } v'(x) = 1$$

$$\text{On a : } u'(x) = \frac{-1}{x(\ln x)^2} \text{ et prenons } v(x) = x$$

$$\text{Alors } \int_a^b \frac{1}{\ln x} dx = \left[\frac{x}{\ln x} \right]_a^b + \int_a^b \frac{1}{(\ln x)^2} dx \text{ d'où}$$

$$\int_a^b \frac{1}{\ln x} dx = \frac{b}{\ln b} - \frac{a}{\ln a} + \int_a^b \frac{1}{(\ln x)^2} dx$$

$$\text{b- Déduisons-en que : } \int_a^b \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} dx = \frac{b}{\ln b} - \frac{a}{\ln a}$$

$$\text{De } \int_a^b \frac{1}{\ln x} dx = \frac{b}{\ln b} - \frac{a}{\ln a} + \int_a^b \frac{1}{(\ln x)^2} dx \text{ on a :}$$

$$\int_a^b \frac{1}{\ln x} dx - \int_a^b \frac{1}{(\ln x)^2} dx = \frac{b}{\ln b} - \frac{a}{\ln a} \text{ alors :}$$

$$\int_a^b \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2} \right) dx = \frac{b}{\ln b} - \frac{a}{\ln a} \text{ soit}$$

$$\int_a^b \left(\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \right) dx = \frac{b}{\ln b} - \frac{a}{\ln a}$$

7°) Calculons $A(\lambda)$

$\forall x \in [e; +\infty[, \ln x \geq f(x)$ alors

$$A(\lambda) = \int_e^\lambda (\ln x - f(x)) dx \text{ u.a}$$

$$= \left(\int_e^\lambda \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} dx \right) \text{ u.a}$$

$$= \frac{\lambda}{\ln \lambda} - \frac{e}{\ln e} \text{ d'où } A(\lambda) = \frac{\lambda}{\ln \lambda} - e$$

Calculons $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\ln \lambda}{\lambda}} = +\infty \text{ car } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\ln \lambda}{\lambda} = 0^+ \text{ d'où}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = +\infty$$

ACTIVITE 20 :

$u : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{2x}{x^2-1}$$

1°) a- L'ensemble de définition de u

Soit D_u l'ensemble de définition de u ;

$$D_u = \{x \in [0; +\infty[/ x+1 \neq 0 \text{ et } x-1 \neq 0\}$$

Posons $x+1=0$ et $x-1=0$

On a: $x=-1$ et $x=1$ alors $D_u = [0; 1[\cup]1; +\infty[$

b- calculons $u(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$

$$u(0) = \ln|1| - \frac{-2(0)}{0^2-1} \text{ donc } \underline{u(0)=0}$$

$$\text{Pour } x > 1, u(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - \frac{2x}{x^2-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = 0 \text{ puis}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$$

2°) Etudions le sens de variation de u puis dressons son tableau de variations.

u est dérivable en tout point de D_u et on a:

$$u'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x-1} \right)'}{\frac{x+1}{x-1}} - \left(\frac{2x}{x^2-1} \right)'$$

$$= \frac{-2}{x^2-1} - 2 \left[\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} \right] \text{ donc } u'(x) = \frac{4}{(x^2-1)^2}$$

$x \in D_u$

$u'(x) > 0$ sur D_u alors u est strictement croissante sur $[0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$

tableau de variation de u

x	0	1	$+\infty$
$u'(x)$	+		+
u	0		0

3°) Dédudions : $\begin{cases} \forall x \in [0; 1[, u(x) \geq 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, u(x) < 0 \end{cases}$

la fonction u est strictement croissante sur $[0; 1[$ et $u(0)=0$ si $0 \leq x < 1$ alors $u(0) \leq u(x)$

d'où $u(x) \geq 0$ sur $[0; 1[$

la fonction u est strictement croissante sur $]1; +\infty[$

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$ donc $u(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$.

B/ $g : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 1$$

4°) Déterminons D_g puis étudions la limite de g et 1.

$$D_g = \{x \in [0; +\infty[/ x+1 \neq 0 \text{ et } x-1 \neq 0\}$$

Donc $D_g = [0; 1[\cup]1; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

5°) a- Vérifions que : $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$. Prouve que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)}{2} \ln \left(1 + \frac{2}{x-1} \right) = 1$$

$$1 + \frac{2}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$$

Posons $t = \frac{2}{x-1}$; si $x \rightarrow +\infty$ alors $t \rightarrow 0$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)}{2} \ln \left(1 + \frac{2}{x-1} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

b- Dédudions-en que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$. Interprète géométriquement ce résultat.

sur $]1; +\infty[$, $g(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 1$

or $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

$g(x) = x \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) - 1$

$g(x) = 2 \frac{x}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) - 1$

Or $\frac{x}{2} = \left(\frac{x-1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$

Donc $g(x) = \left[2\left(\frac{x-1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)\right] + \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) - 1$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = 1$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2 - 1 = 1$

Interprétation graphique :

la courbe (C_g) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y=1$

c- Dressons le tableau de variation de g

calculons de $g'(x)$ d'abord

sur $[0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$ la fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ est dérivable

et est strictement positive

donc la fonction $x \mapsto \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ est dérivable sur $[0; 1[$ et sur

$]1; +\infty[$ par produit, la fonction $x \mapsto x \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ est

dérivable sur $[0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$

d'où g est dérivable sur $[0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$

$g'(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \frac{-2x}{x^2-1}$ donc $g'(x) = u(x)$

or $u'(x) > 0$ sur $[0; 1[$ et $u'(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$ alors g est strictement croissante sur $[0; 1[$ et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

tableau de variation de g

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	-	
g	-1	$+\infty$	1

on a $g(0) = -1$

d- Démontrons qu'il existe un réel α unique appartenant à $]0; 1[$ tel que $g(\alpha) = 0$

Donne un encadrement d'ordre 1 de α .

g est continue et strictement croissante sur $]0; 1[$ et

$g(0; 1) =]-1; +\infty[$ or $0 \in]-1; +\infty[$

ainsi l'équation $g(x) = 0$ admet une solution

unique $\alpha \in]0; 1[$

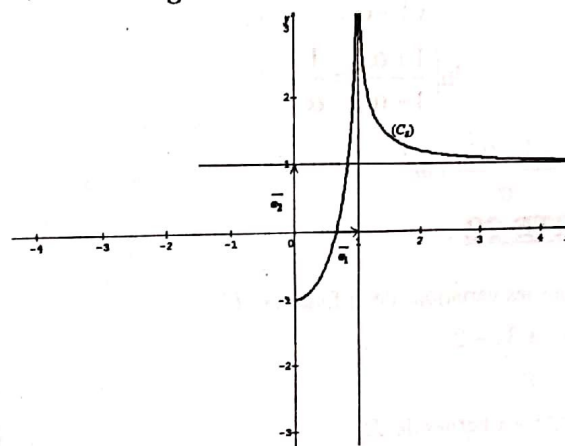
Encadrement de α

on a :

x	0	0,5	0,6	0,7
$g(x)$	-1	-0,45	-0,17	0,21

Donc $0,6 < \alpha < 0,7$

6°) Courbe de g .



C) $f : [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = (x^2 - 1) \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$

7°) dérivabilité de f sur $[0; 1[$

sur $]1; 1[$, $x \mapsto \frac{x+1}{1-x}$ est dérivable et strictement positive

donc $x \mapsto \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$ est dérivable sur cet intervalle

ce qui entraîne que : $x \mapsto (x^2 - 1) \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$ est

dérivable sur cette intervalle

d'où f est dérivable sur $[0; 1[$.

$f(x) = \frac{(x^2 - 1)}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $\forall x \in [0; 1[$

Et on a : $f'(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{(x^2 - 1)}{2} \times \frac{-2}{1-x^2}$

$= x \ln \frac{1+x}{1-x} - 1 = g(x)$

D'où $f'(x) = g(x)$ sur $[0; 1[$

8°) Déterminons l'aire A du domaine plan limité par la courbe (C_g) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

$$A = - \int_0^{\alpha} g(x) dx \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= \int_0^{\alpha} g(x) dx$$

$$= [f(x)]_0^{\alpha} \times 4 \text{ cm}^2$$

$$A = [f(0) - f(\alpha)] \times 4 \text{ cm}^2 = -4f(\alpha) \cdot \text{cm}^2$$

$$A = +4(1 - \alpha^2) \ln\left(\frac{\alpha+1}{1-\alpha}\right) \text{ cm}^2$$

or $g(\alpha) = 0$ donc $\alpha \ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) - 1 = 0$

$$\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}$$

D'où $A = \frac{4(1-\alpha^2)}{\alpha} \text{ cm}^2$.

ACTIVITE 22 :

Partie A :

1°) Etudions les variations de la fonction U

$$U(x) = x^3 + 3x - 2$$

- $D_u = \mathbb{R}$

- Limite aux bornes de D_u

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 3x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3x - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = +\infty$$

- Dérivée et sens de variation de U

U est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme

$$\forall x \in \mathbb{R}, U'(x) = 3x^2 + 3$$

$\forall x \in \mathbb{R}, U'(x) > 0$ alors U est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- Tableau de variation de U

x	$-\infty$	$+\infty$
$U'(x)$		+
$U(x)$		$+\infty$

2°) Montrons que l'équation $U(x) = 0$ admet une solution unique β telle que : $\frac{1}{2} < \beta < 1$

U est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
 $0 \in \mathbb{R}$ d'où l'équation $U(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in \mathbb{R}$

$$\left] \frac{1}{2}; 1 \right[\subset \mathbb{R}; \quad U\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} \quad \text{et} \quad U(1) = 2 \quad \text{on a}$$

$$U\left(\frac{1}{2}\right) \times U(1) < 0 \text{ d'où } \frac{1}{2} < \beta < 1$$

3°) Déduisons le signe de $U(x)$ suivant x .

Des variations de U on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \beta[, U(x) < 0 \\ \forall x \in]\beta; +\infty[, U(x) > 0 \\ U(\beta) = 0 \end{cases}$$

Partie B :

4°) Justifions que f est définie sur $\mathbb{R}$.

$$D_f = \left\{ x \in]-\infty; 1[\mid (x-1)e^{-x} \neq 0 \right\} \cup \left\{ x \in]1; +\infty[\mid x^3 + 1 \neq 0 \text{ et } \frac{x-1}{x^3+1} \geq 0 \right\}$$

$\forall x \in]-\infty; 1[$, $(x-1)e^x$ existe et $\forall x \in]1; +\infty[$, $x-1 > 0$ et

$$x^3 + 1 > 0 \text{ donc } \forall x \in]1; +\infty[, \frac{x-1}{x^3+1} > 0 \text{ par suite :}$$

$$D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

Soit $D_f = \mathbb{R}$

5°) a- Etudions la continuité de f en 1

$$f(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)e^x = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x \sqrt{\frac{x-1}{x^3+1}} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1} x-1 = 0$$

On a ainsi : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, alors f est

continue en 1

b- Etudions la dérivabilité de f en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)e^x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} e^x = e, \text{ alors } f \text{ est}$$

dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = e$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \left(\sqrt{\frac{x-1}{x^3+1}} \right)}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{(x^3 + 1)\sqrt{\frac{x-1}{x^3 + 1}}} = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x-1}{x^3 + 1}} = 0^+ \text{ puisque que } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty, \text{ alors}$$

f n'est pas dérivable à droite de 1.

Interprétation : Au point A (1 ; 0) la courbe (C_f) admet deux demi tangentes d'équations :

$$(T_g): \begin{cases} x \leq 1 \\ y = e(x - 1) \end{cases} \text{ et } (T_d): \begin{cases} x = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

6°) a- Exprime $h'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et $f(x)$.

h est dérivable sur $]1; +\infty[$

$\forall x \in]1; +\infty[, h'(x) = 2f'(x) \times f(x)$ Calculons $h(x)$ et $h'(x)$ et déduisons que pour tout $x > 1$

$$f'(x) = \frac{xU(x)}{(x^3 + 1)^2} \times \frac{1}{2f(x)}$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, h(x) = \frac{x^2(x-1)}{x^3 + 1} \text{ soit}$$

$$h(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^3 + 1}$$

$$\forall x \in]1; +\infty[,$$

$$h'(x) = \frac{(3x^2 - 2)(x^3 + 1) - 3x^2(x^3 - x^2)}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{x(x^3 + 3x - 1)}{(x^3 + 1)^2} = \frac{xU(x)}{(x^3 + 1)^2} \text{ d'où } h'(x) = \frac{xU(x)}{(x^3 + 1)^2}$$

$$\text{Déduisons que pour tout } x > 1, f'(x) = \frac{xU(x)}{(x^3 + 1)^2} \times \frac{1}{2f(x)}$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, h'(x) = 2f'(x) \times f(x) \Rightarrow$$

$$f'(x) = h'(x) \times \frac{1}{2f(x)}, \text{ D'où } \forall x \in]1; +\infty[,$$

$$f'(x) = \frac{xU(x)}{(x^3 + 1)^2} \times \frac{1}{2f(x)}$$

7°) Etudions les variations de f

• Limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x = 0 \text{ car :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{x-1}{x^3 + 1}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3 - x^2}{x^3 + 1}} = 1 \text{ car :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2}{x^3 + 1} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

• Dérivée et signe de la dérivée

f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $] -\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$

$$\forall x \in] -\infty; 1[; f'(x) = xe^x$$

$$\forall x \in]1; +\infty[; f'(x) = \frac{xU(x)}{(x^3 + 1)^2} \times \frac{1}{2f(x)}$$

Sur $] -\infty; 1[$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc :

$\forall x \in] -\infty; 0[; f'(x) < 0$ et $\forall x \in]0; 1[; f'(x) > 0$; sur

$]1; +\infty[; f'(x) > 0$ en résumé on a :

$$\begin{cases} \forall x \in] -\infty; 0[; f'(x) < 0 \\ \forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[; f'(x) > 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[; f'(x) > 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

• Sens de variation

Alors f est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$ et

strictement croissante sur $[0; 1]$ et sur $]1; +\infty[$

• Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	0	-1	0	1

8°) Etudions les branches infinies

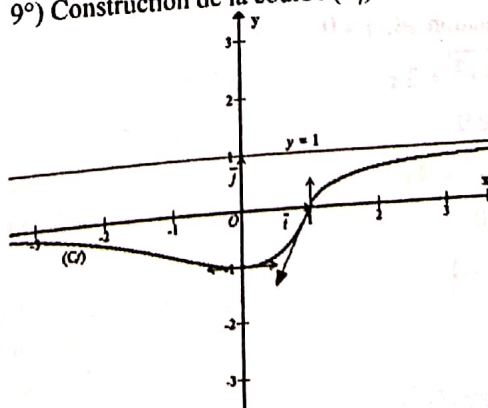
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, alors la droite (D_1) d'équation $y = 0$

est asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, alors la droite (D_2) d'équation $y = 1$ est

asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

9°) Construction de la courbe (C_f)



Partie C:

10°) a- Détermine a et b pour que F soit une primitive sur $]-\infty; 1]$ de la fonction f .

F est une primitive de $f \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty; 1]$,

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow$$

$\forall x \in]-\infty; 1]$, $e^x(ax + a + b) = (x - 1)e^x$ en procédant par identification on trouve $a = 1$ et $b = -2$

donc $\forall x \in]-\infty; 1]$, $F(x) = (x - 2)e^x$

b- Calculons $A(\alpha)$ en cm^2

$$A(\alpha) = -[F(x)]_{\alpha}^0 u.a = (2 + (\alpha - 2)e^{\alpha})u.a \text{ d'où}$$

$$A(\alpha) = 4(2 + (\alpha - 2)e^{\alpha})cm^2$$

c-

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} A(\alpha) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha e^{\alpha} - 2e^{\alpha} + 2) \times 4 = 8 cm^2 \text{ car :}$$

$$\begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \alpha e^{\alpha} = 0 \\ \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} e^{\alpha} = 0 \end{cases} \text{ d'où } \underline{\underline{\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} A(\alpha) = 8 cm^2}}$$

11°) a- Justifions que H est une primitive de la fonction : $x \mapsto (x^2 - 2x + 1)e^{2x}$.

H est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, H'(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)e^{2x} + 2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}\right)e^{2x} \\ = (x^2 - 2x + 1)e^{2x} \text{ alors } H \text{ est une primitive sur } \mathbb{R}$$

de la fonction $x \mapsto (x^2 - 2x + 1)e^{2x}$

b) Calculons le volume du solide

$$V = \left(\int_0^1 \pi(f(x))^2 dx \right) u.v$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4} \right) e^{2x} \right]_0^1 \times 8 cm^3$$

$$\text{d'où } \underline{\underline{V = 2(e^2 - 5)\pi cm^3}}$$

ACTIVITE 23:

Partie A:

$$u(x) = 2x - \sqrt{1 + x^2}$$

1°) Résolvons l'équation $u(x) = 0$

$$u(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 + x^2} = 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ 1 + x^2 = 4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ l'ensemble des solutions de l'équation}$$

$$u(x) = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \text{ est } S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

2°) Déterminons le signe de $u(x)$

La fonction $x \mapsto u(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ donc } u \text{ garde un signe constant sur}$$

$$\text{chacun des intervalles } \left] -\infty; \frac{\sqrt{3}}{3} \right[\text{ et sur } \left] \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty \right[$$

$$\text{Or } 0 \in \left] -\infty; \frac{\sqrt{3}}{3} \right[\text{ et } u(0) = -1 < 0$$

$$1 \in \left] \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty \right[\text{ et } u(1) = 2 - \sqrt{2} > 0 \text{ d'où}$$

$$\begin{cases} \forall x \in \left] -\infty; \frac{\sqrt{3}}{3} \right[& u(x) < 0 \\ \forall x \in \left] \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty \right[& u(x) > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{matrix} \forall x \in \left] -\infty; \frac{\sqrt{3}}{3} \right[\\ \forall x \in \left] \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty \right[\end{matrix} \right\} u(x) > 0$$

$$u\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$$

Partie B:

$$g(x) = x - 2\sqrt{1 + x^2}$$

3°) a- Justifions que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1 + x^2$ sont dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$ donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée, produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

b- Calculons la dérivée $g'(x)$ de la fonction g .

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 1 - \frac{4x}{2\sqrt{1 + x^2}}$$

$$= 1 - \frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + x^2} - 2x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\text{d'où } \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{-u(x)}{\sqrt{1 + x^2}}$$

c- Déduisons-en le signe de $g'(x)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1 + x^2} > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $-u(x)$

$$\text{d'où : } \begin{cases} \forall x \in \left] -\infty; \frac{\sqrt{3}}{3} \right[, g'(x) > 0 \\ \forall x \in \left] \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty \right[, g'(x) < 0 \\ g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

4°) Déterminons les limites de g aux bornes de D

$$D = \{x \in \mathbb{R} / 1+x^2 \geq 0\}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0$ d'où $D = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 2\sqrt{1+x^2} = -\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -2\sqrt{1+x^2} = -\infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 - \frac{2\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 - 2\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right] = -\infty \text{ car} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right) = -1 \end{cases}$$

*Dressons le tableau de variation de g

$$\text{On a : } g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$\sqrt{3}$	$-\infty$

5°) a- Déterminons les équations des asymptotes à la courbe (C)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2\sqrt{1+x^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + 2\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) - 3x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1+x^2} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1+x^2} + x} = 0 \text{ d'où la droite} \end{aligned}$$

d'équation $y = 3x$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 2\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2\sqrt{1+x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{2x + 2\sqrt{1+x^2}} = 0 \text{ d'où la droite} \end{aligned}$$

d'équation $y = -x$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

b- Etudions la position de (C) par rapport à ses asymptotes.

$$\bullet \forall x \in]-\infty; 0[, g(x) - 3x = -2x - 2\sqrt{1+x^2}$$

$$\bullet \forall x \in]-\infty; 0[, g(x) - 3x = -2(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, 1+x^2 > x^2$$

$$1+x^2 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} > |x|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} > -x \text{ donc } \forall x \in]-\infty; 0[,$$

$\sqrt{1+x^2} + x > 0$ alors $-2(\sqrt{1+x^2} + x) < 0$ d'où (C) est en dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$

$$\bullet \forall x \in]0; +\infty[, g(x) + x = 2x - 2\sqrt{1+x^2} = 2(x - \sqrt{1+x^2})$$

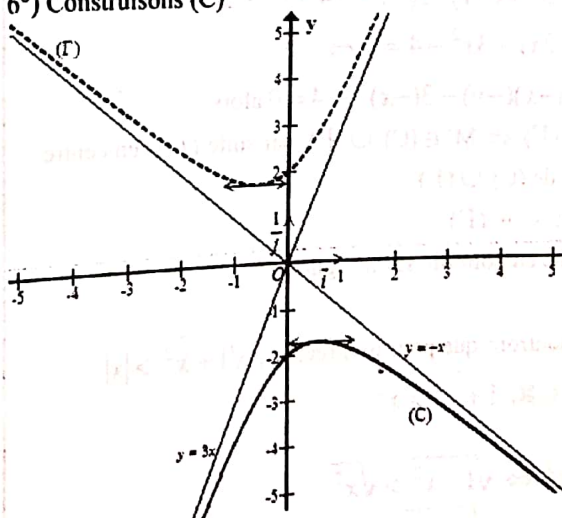
$$\forall x \in]0; +\infty[, \sqrt{1+x^2} > |x|$$

$$\text{et } \forall x \in]0; +\infty[\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} > x$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{1+x^2} < 0 \text{ donc}$$

$\forall x \in]0; +\infty[, g(x) + x < 0$ d'où (C) est en dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$

6°) Construisons (C)



Partie C :

7°) Déterminons la fonction h

Soit $x \in \mathbb{R}$, On a : $h(-x) = -g(x)$ donc

$h(x) = -g(-x) = x + 2\sqrt{1+x^2}$ d'où h est la fonction

définie par :

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x + 2\sqrt{1+x^2}$$

8°) Prouvons que $(C) \cup (\Gamma)$ est la courbe d'équation :

$$y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0$$

Soit $M(x; y)$ un point du plan,

$$M(x; y) \in (C) \cup (\Gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (C) \\ \text{ou} \\ M \in (\Gamma) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = g(x) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = h(x) \end{cases}$$

$$M(x; y) \in (C) \cup (\Gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x - 2\sqrt{1+x^2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x + 2\sqrt{1+x^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y - x = -2\sqrt{1+x^2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y - x = 2\sqrt{1+x^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y^2 - 2xy + x^2 = 4 + 4x^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y^2 - 2xy + x^2 = 4 + 4x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{donc}$$

$$M(x; y) \in (C) \cup (\Gamma) \Leftrightarrow y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0$$

d'où $(C) \cup (\Gamma)$ est la courbe d'équation :

$$y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0$$

9°) Dédudons-en que O est un centre de symétrie de la courbe $(C) \cup (\Gamma)$

Soit $M(x; y)$ et $M'(-x; -y)$

M' est symétrique de M par rapport à O

$$M \in (C) \cup (\Gamma) \Leftrightarrow y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0$$

$$\text{Or } (-y)^2 - 2(-x)(-y) - 3(-x)^2 - 4 = y^2 - 2xy - 3x^2 - 4$$

$$\text{donc } y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-y)^2 - 2(-x)(-y) - 3(-x)^2 - 4 = 0 \text{ alors}$$

$M \in (C) \cup (\Gamma) \Leftrightarrow M' \in (C) \cup (\Gamma)$ par suite O est un centre de symétrie de $(C) \cup (\Gamma)$

10°) Construisons (Γ)

(Γ) = courbe en pointillé sur la figure.

Partie D :

11°) a) Démontrons que pour tout réel x , $\sqrt{1+x^2} > |x|$

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > x^2$$

$$1+x^2 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} > |x| \text{ d'où } \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{1+x^2} > |x|$$

b- Dédudons-en l'ensemble de définition de f

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1+x^2 \geq 0 \text{ et } x + \sqrt{1+x^2} > 0\}$$

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0 \text{ et } \sqrt{1+x^2} > |x|$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \sqrt{1+x^2} > |x| &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+x^2} > x \text{ ou } \sqrt{1+x^2} > -x \\ x \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{1+x^2} > 0 \text{ ou } x + \sqrt{1+x^2} > 0 \\ x \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} > 0 \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0$ et $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ d'où $D_f = \mathbb{R}$

12°) Calculons $f'(x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée produit et somme de fonctions dérivable.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{(x + \sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad f'(x) = \frac{2+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2\sqrt{1+x^2}$$

Dédudons-en une primitive sur $\mathbb{R}$ de g

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x - 2\sqrt{1+x^2}$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 2\sqrt{1+x^2}$ est f donc une

primitive sur $\mathbb{R}$ de g est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - f(x)$.

D'où une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est : la fonction :

$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x\sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

13°) Calculons en centimètre carré l'aire de l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan qui vérifie : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ g(x) \leq y \leq -x \end{cases}$

Soit A cette aire

$$A = \left(\int_0^1 (-x - g(x)) dx \right) u.a \text{ or } u.a = 4 \text{ cm}^2$$

$$\int_0^1 (-x - g(x)) dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]_0^1$$

$$= -1 + \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \text{ d'où}$$

$$A = 4 \left[\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 \right] \text{ cm}^2$$

ACTIVITE 28 :

$$f(x) = \frac{(2x-1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}$$

1°)

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x - 1 \neq 0\}$$

Posons $e^x - 1 = 0$

$$e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0 \text{ donc } D_f = \mathbb{R}.$$

Posons $f(x) = ax + b + \frac{c}{e^x - 1}$ avec $x \neq 0$

On a : $f(x) = \frac{ax(e^x - 1) + b(e^x - 1) + c}{e^x - 1}$

$$f(x) = \frac{(ax+b)e^x - ax + c - b}{e^x - 1}; x \neq 0 \text{ d'autre part :}$$

$$f(x) = \frac{(2x-1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}; x \neq 0$$

par identification : $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=b+2=1 \end{cases}$ ainsi $a=2; b=-1$ et $c=1$.

$c=1$.

2°) Limites aux bornes de D_f

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1 \text{ ainsi}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - 1) = 0^- \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x - 1} = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 2x - 1 = -1 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

De même $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

3°) a- calculons $f'(x)$.

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

f est dérivable en tout point de D_f et on a :

$$f'(x) = 2 - \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{2((e^x - 1)^2 - e^x)}{(e^x - 1)^2} \text{ soit}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}; x \neq 0$$

b- Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$

posons $e^x = t$ et $2(e^x)^2 - 5(e^x) + 2 = 0$

donc $2t^2 - 5t + 2 = 0$

$$\Delta = 9; \sqrt{\Delta} = 3 \text{ alors :}$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5-3}{4} \text{ ou } t = \frac{5+3}{4}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = 2$$

$$e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2 \text{ et } e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

D'où l'ensemble solution dans $\mathbb{R}$ de cette équation est :

$$S = \{-\ln 2; \ln 2\}$$

c- Dédudisons en le sens de variation de f et dresse le tableau de variations de f .

Le signe de $f'(x)$ est celui de $2e^{2x} - 5e^x + 2$

$$2e^{2x} - 5e^x + 2 = 2\left(e^x - \frac{1}{2}\right)(e^x - 2) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$$

On obtient ainsi le tableau de signe suivant de $f'(x)$.

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$2e^{2x} - 1$	-	0	+	+	+
$e^x - 2$	-	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+

f est alors strictement croissantes sur les intervalles

$]-\infty; -\ln 2]$ et $[\ln 2; +\infty[$ et strictement décroissante sur $[-\ln 2; 0[$ et sur $]0; \ln 2]$

$$f(\ln 2) = 2 \ln 2 \text{ et } f(-\ln 2) = -2 \ln 2 - 3$$

tableau de variations :

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$-2 \ln 2 - 3$	$-\infty$	$2 \ln 2$	$+\infty$

4°)

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

$$[f(x) - (2x - 1)] = \frac{1}{e^x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0 \text{ donc la droite}$$

d'équation : $y = 2x - 1$ est asymptote de (C) en $+\infty$

$$f(x) - (2x - 2) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1} - 2x + 2$$

$$= \frac{e^x}{e^x - 1} \text{ or } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - 2)] = 0 \text{ et par suite}$$

la droite d'équation : $y = 2x - 2$ est asymptote de (C) en $-\infty$

L'autre asymptote :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote de (C)

5°)

D_f est symétrique par rapport à 0 et on a :

$$x_\Omega = \frac{x + (-x)}{2} = 0 \text{ et } y_\Omega = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1} \text{ et } f(-x) = -2x - 1 + \frac{1}{e^{-x} - 1}$$

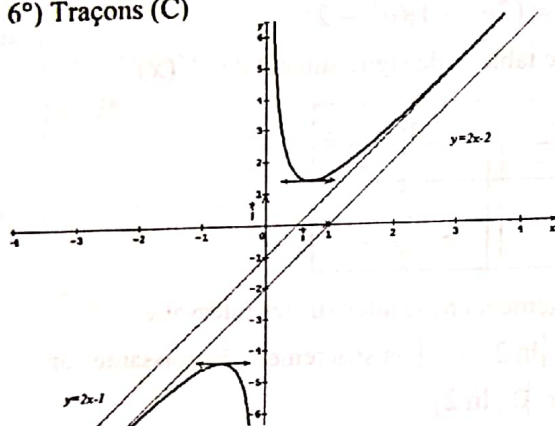
$$f(x) + f(-x) = -2 + \frac{1}{e^{-x} - 1} + \frac{1}{e^x - 1}$$

$$f(x) + f(-x) = -2 + \frac{e^x}{1 - e^x} + \frac{1}{e^x - 1} = -3 ; x \neq 0$$

$$\text{Donc } y_\Omega = -\frac{3}{2} \text{ et par suite } \Omega\left(0, -\frac{3}{2}\right)$$

$$\Omega\left(0, -\frac{3}{2}\right) \text{ est centre de symétrie pour (C).}$$

6°) Traçons (C)



7°) a-

$$f(x) = 2x + \alpha + \frac{\beta e^x}{e^x - 1} \text{ avec } x \neq 0$$

$$\text{On a : } f(x) = \frac{2x(e^x - 1) - \alpha(e^x - 1) + \beta e^x}{e^x - 1}$$

$$f(x) = \frac{(2x + \alpha + \beta)e^x - 2x - \alpha}{e^x - 1} ; x \neq 0 \text{ or}$$

$$f(x) = \frac{(2x - 1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}$$

$$\text{par identification: } \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha = -2 \end{cases} \text{ donc } \alpha = -2 \text{ et } \beta = 1$$

$$f(x) = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

b- k est un réel supérieur ou égal à 2.

$$f(x) - (2x - 1) = -1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$A(k) = \int_{\ln 2}^{\ln k} \left(-1 + \frac{e^x}{e^x - 1}\right) dx \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= \left[-x + \ln(e^x - 1)\right]_{\ln 2}^{\ln k} \times 4 \text{ cm}^2$$

$$A(k) = \left[\ln \left(\frac{e^x - 1}{e^x} \right) \right]_{\ln 2}^{\ln k} \times 4 \text{ cm}^2$$

$$A(k) = \left(\ln \left(\frac{k-1}{k} \right) - \ln \frac{1}{2} \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

$$A(k) = \left(\ln \left(\frac{k-1}{k} \right) + \ln 2 \right) \times 4 \text{ cm}^2 \text{ d'où}$$

$$A(k) = 4 \ln \left[2 \left(\frac{k-1}{k} \right) \right] \text{ cm}^2$$

$$c- \lim_{k \rightarrow +\infty} A(k) = 4 \ln 2 \text{ cm}^2$$

ACTIVITE 29 :

A°)

$$\begin{cases} g(x) = x - \sqrt{x^2 - x} & , \text{ si } x \leq 0 \\ g(x) = x^2 \ln x & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

1°) Etudions la continuité de g en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x - \sqrt{x^2 - x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0$$

$$g(0) = 0 - \sqrt{0^2 - 0} = 0$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$ donc g est continue en 0

2°) Etudions la dérivabilité de g en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - \sqrt{x^2 - x}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = +\infty$ donc g n'est pas dérivable à gauche en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 0$ d'où g est dérivable à droite en 0 et

$$g'_d(x) = 0$$

Au total g n'est pas dérivable en 0.

Signification graphique des résultats

* $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = +\infty$ d'où la courbe (C_g) admet à gauche

au point $O(0; 0)$ une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées, définie par : $\begin{cases} x = 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$

* $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 0$ donc (C_g) admet à droite au point

$O(0; 0)$ une demi-tangente d'équation $\begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

3°) Etudions les variations de g

$D_g = \mathbb{R}$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - x}$ est dérivable sur $] -\infty; 0[$ comme composée et somme de fonction dérivables.

La fonction $x \mapsto x^2 \ln x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.

De plus g n'est pas dérivable en 0

Au total g est dérivable sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in] -\infty; 0[, g'(x) = 1 - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = 2x \ln x + x \text{ d'où}$$

$$\begin{cases} \forall x \in] -\infty; 0[, g'(x) = 1 - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} \\ \forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = x(1 + 2 \ln x) \end{cases}$$

Signe de $g'(x)$

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = x(1 + 2 \ln x)$$

$x > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $1 + 2 \ln x$

$$\begin{aligned} \forall x \in]0; +\infty[, 1 + 2 \ln x = 0 &\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + 2 \ln x < 0 &\Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x \in]0; \frac{1}{\sqrt{e}}[\end{aligned}$$

$$\text{D'où } \forall x \in]0; +\infty[: \begin{cases} g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0; \frac{1}{\sqrt{e}}[\\ g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty[\\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{2\sqrt{x^2-x} - 2x + 1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $u(x) = 2\sqrt{x^2-x} - 2x + 1$

$\forall x \in]0; +\infty[, u(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x} = 2x - 1$ ce qui est absurde car $\forall x \in] -\infty; 0[, 2x - 1 < 0$ donc $u(x)$ ne s'annule pas sur $] -\infty; 0[$ or u est continue sur $] -\infty; 0[$

alors u garde un signe constante sur $] -\infty; 0[$ de plus

$$-1 \in] -\infty; 0[\text{ et } u(-1) = 2\sqrt{2} - 1 > 0 \text{ donc}$$

$$\forall x \in] -\infty; 0[, u(x) > 0$$

Au total, on a :

$$\begin{cases} g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0; \frac{1}{\sqrt{e}}[\\ g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty[\\ g'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 0 \end{cases}$$

Sens de variation de g

g est strictement décroissante sur $]0; \frac{1}{\sqrt{e}}[$ et strictement

croissante sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$ et $]\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty[$

Limites de g aux bornes de D_g

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \sqrt{x^2 - x} = -\infty$$

Tableau de variation de D_g

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	+
$g(x)$	$-\infty$	0	$-\frac{1}{2e}$	$+\infty$

4°) a- Prouvons que la droite (D) est asymptote à (C_g) au voisinage de $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[g(x) - \left(2x - \frac{1}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{x^2 - x} - x + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[g(x) - \left(2x - \frac{1}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} - x \right) - \sqrt{x^2 - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[g(x) - \left(2x - \frac{1}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{4} - x + x^2 - x^2 + x}{\left(\frac{1}{2} - x \right) + \sqrt{x^2 - x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[g(x) - \left(2x - \frac{1}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{4}}{x \left(\frac{1}{2x} - 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[g(x) - \left(2x - \frac{1}{2} \right) \right] = 0, \text{ d'où la droite } (D) \text{ d'équation :}$$

$y = 2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (C_g) au voisinage de $-\infty$.

b- Position relative de (C_g) et (D) .

$$\forall x \in]-\infty; 0[, g(x) - \left(2x - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} - x \right) - \sqrt{x^2 - x}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, \frac{1}{2} - x - \sqrt{x^2 - x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2 - x} = x - \frac{1}{2} \text{ or } \forall x \in]-\infty; 0[, \frac{1}{2} - x < 0 \text{ donc la}$$

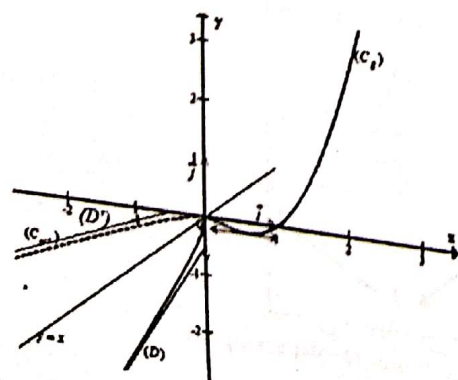
fonction $v : x \mapsto \frac{1}{2} - x - \sqrt{x^2 - x}$ ne s'annule pas sur

$]-\infty; 0[$ et est continue, de plus $v(-1) = \frac{3}{2} - \sqrt{2} > 0$ alors

$\forall x \in]-\infty; 0[, g(x) - \left(2x - \frac{1}{2} \right) > 0$ d'où (C_g) est au dessus de (D) .

5° Courbe de (C_g)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$ donc (C_g) admet une branche parabolique de direction l'axe $(O; \vec{j})$



B°)

$$\varphi :]-\infty; 0] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \varphi(x) = g(x)$$

6°) Justifions que φ est une bijection de $]-\infty; 0]$ sur J .
 g est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ donc g réalise une bijection de $]-\infty; 0]$ sur $g(]-\infty; 0])$ or $g(]-\infty; 0]) =]-\infty; 0]$ d'où φ est une bijection de $]-\infty; 0]$ sur $]-\infty; 0] = J$.

$$7°) \text{ Prouvons que } \forall x \in J, \varphi^{-1}(x) = \frac{x^2}{2x-1}$$

Soit $x \in]-\infty; 0]$ et $y \in]-\infty; 0]$ tel que $y = g(x)$

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = x - \sqrt{x^2 - x}$$

$$\Leftrightarrow y - x = -\sqrt{x^2 - x}$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2xy + x^2 = x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow (2y-1)x = y^2$$

$$y = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2y-1} \text{ car } y \in]-\infty; 0], 2y-1 \neq 0$$

d'où φ^{-1} est définie par : $\forall x \in]-\infty; 0], \varphi^{-1}(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

8°) Précisons le tableau de variation, l'asymptote à $(C_{\varphi^{-1}})$ de et autres propriétés utiles de φ^{-1} .

*Tableau de variation de φ^{-1}

x	$\varphi^{-1}(x)$
$-\infty$	$-\infty$
0	0

*Précisons l'asymptote à $(C_{\varphi^{-1}})$ de la droite La droite

$(D) : y = 2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (C_{φ}) au voisinage de $-\infty$

donc son symétrique (D') par rapport à la droite d'équation

$y = x$ est asymptote à $(C_{\varphi^{-1}})$ au voisinage de $-\infty$ or

$$x = 2y - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \text{ d'où } (D') : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

*Autres propriétés :

-Les courbes $(C_{\varphi^{-1}})$ et (C_{φ}) sont symétriques par rapport à la droite d'équation : $y = x$.

\$(C_\varphi)\$ admet à gauche au point \$O(0;0)\$ une demi-tangente d'équation \$\begin{cases} x=0 \\ y \leq 0 \end{cases}\$ donc \$(C_{\varphi^{-1}})\$ admet à gauche au point

\$O(0;0)\$ une demi-tangente d'équation : \$\begin{cases} y=0 \\ x \leq 0 \end{cases}\$

Traçons \$(C_{\varphi^{-1}})\$

Voir courbe(en pointillé) de la question A°) 5-

9°)a- Démontrons que, \$\forall x \in J\$, \$\varphi^{-1}(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{2x-1}\$

Par la division euclidienne de \$x^2\$ par \$2x-1\$, on a :

$$\begin{array}{r} x^2 \quad 2x-1 \\ -x^2 + \frac{1}{2}x \\ \hline \frac{1}{2}x \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \\ \hline \frac{1}{4} \end{array}$$

d'où \$\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{2x-1}\$ d'où \$\alpha = \frac{1}{2}\$, \$\beta = \frac{1}{4}\$ et \$\gamma = \frac{1}{4}\$.

b- Donne une primitive de \$\varphi^{-1}\$

Une primitive sur \$]-\infty; 0]\$ de \$\varphi^{-1}\$ est la fonction \$\Phi\$ définie par :

$$\forall x \in]-\infty; 0], \Phi(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\ln|2x-1| \text{ or}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0], |2x-1| = 1-2x \text{ d'où } \forall x \in]-\infty; 0], \text{ on}$$

$$a: \Phi(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\ln(1-2x)$$

10°) a- Calculons \$A_1\$

$$A_1 = \left(\int_{-1-\sqrt{2}}^{-1} (\varphi^{-1}(x) + 1) dx \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \left(\int_{-1-\sqrt{2}}^{-1} (\varphi^{-1}(x) + 1) dx \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

$$A_1 = [x + \Phi(x)]_{-1-\sqrt{2}}^{-1} \times 4 \text{ cm}^2 \text{ on trouve}$$

$$A_1 = \left(-2 + 3\sqrt{2} + \frac{1}{2}(\ln 3 - 2\ln(1+\sqrt{2})) \right) \text{ cm}^2$$

b- Calculons \$A_2\$

$$A_2 = \left(\int_{-1}^0 \varphi^{-1}(x) - x \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \left[-\frac{1}{2}x^2 + \Phi(x) \right]_{-1}^0 \times 4 \text{ cm}^2 \text{ et trouve :}$$

$$A_2 = \left(2 - \frac{1}{2}\ln 3 \right) \text{ cm}^2$$

c- Déduisons-en \$A_3\$ et \$A\$

Soit \$A_3\$ l'aire de \$E_1 \cup E_2\$

$$A_3 = A_1 + A_2 = \left[3\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2}) \right] \text{ cm}^2$$

ACTIVITE 34 :

Partie I :

1°) a- Etudions les variations de \$u\$

$$u(x) = x - \ln x$$

$$D_u =]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = 1 \end{cases}$$

\$u\$ est continue et dérivable sur \$]0; +\infty[\$ et pour tout \$x\$

élément de \$]0; +\infty[\$, on a : \$u'(x) = 1 - \frac{1}{x}\$ soit \$u'(x) = \frac{x-1}{x}\$

Le signe de \$u'(x)\$ est celui de \$x-1\$ car \$\forall x \in]0; +\infty[\$, \$x > 0\$

Posons \$x-1=0\$

\$x-1 \Leftrightarrow x=1\$ on obtient le tableau suivant du signe de \$u'(x)\$

\$x\$	0	1	\$+\infty\$
\$u'(x)\$		-	+

Alors \$u\$ est strictement décroissante sur \$]0; 1]\$ et strictement croissante sur \$[1; +\infty[\$

Tableau de variation de \$u\$

$$u(1) = 1$$

\$x\$	0	1	\$+\infty\$
\$u'(x)\$		-	+
\$u\$	\$+\infty\$	1	\$+\infty\$

b- Déduisons-en que \$\forall x \in]0; +\infty[\$, \$x - \ln x \neq 0\$

\$u\$ admet sur \$]0; +\infty[\$ un minimum en 1 qui est \$u(1)=1\$;
\$1 > 0\$ alors \$\forall x \in]0; +\infty[\$, \$u(x) \neq 0\$ donc \$\forall x \in]0; +\infty[\$, \$x - \ln x \neq 0\$.

2°) a- Démontrons que \$D = [-1; +\infty[\$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}}, \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x} + 1, \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On a : \$D = D_1 \cup D_2\$ avec

$$D_1 = \left\{ x \in]-\infty; 0] / 1-x^2 \geq 0 \text{ et } 1+\sqrt{1-x^2} \neq 0 \right\}$$

$$1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

$$\text{donc } 1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$$

$$1+\sqrt{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = -1 \text{ (absurde) alors}$$

$$D_1 = (-\infty; 0] \cap [-1; 1] = [-1; 0]$$

$$D_2 = \left\{ x \in]0; +\infty[/ x > 0 \text{ et } x - \ln x \neq 0 \right\}$$

Or d'après 1°) a- $\forall x \in]0; +\infty[, x - \ln x \neq 0$ donc

$$D_2 =]0; +\infty[$$

$$D = D_1 \cup D_2 \Rightarrow D = [-1; +\infty[$$

b- Démontrons que f est continue sur D

f est continue sur chacun des intervalles $[-1; 0[$ et

$]0; +\infty[$ (a)

Etudions la continuité de f en 0

$$f(0) = \frac{0}{1+\sqrt{1-0^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x - \ln x} + 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln x \left(\frac{x}{\ln x} - 1 \right)} + 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\left(\frac{x}{\ln x} - 1 \right)} + 1 = -1 + 1 = 0$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0

(b)

(a) et (b) $\Rightarrow f$ est continue sur D

c- Etudions la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \text{ donc } f$$

est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln x}{x - \ln x} + 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln x + x - \ln x}{x - \ln x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(x - \ln x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x - \ln x)} = 0 \text{ car}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x - \ln x = +\infty ; 0 \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable à droite en

0 et $f'_d(0) = 0$

On a $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0

interprétation géométrique des résultats obtenus.

(C) admet au point d'abscisse 0 deux demi tangentes :

D'une part à gauche en 0 définie par : $\begin{cases} x \leq 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$ et d'autre part

à droite en 0 définie par : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y = 0 \end{cases}$

d- Etudions la dérivabilité de f en -1

$$f(-1) = \frac{-1}{1+\sqrt{1-(-1)^2}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + 1}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1 + \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1 + \sqrt{1 - x^2}}{(x + 1)(1 + \sqrt{1 - x^2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(1 + \sqrt{1 - x^2})} + \frac{\sqrt{1 - x^2}}{(x + 1)(1 + \sqrt{1 - x^2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(1 + \sqrt{1 - x^2})} + \frac{1 - x^2}{(x + 1)(1 + \sqrt{1 - x^2})\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{1}{(1 + \sqrt{1 - x^2})} + \frac{1 - x}{(1 + \sqrt{1 - x^2})\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2}} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en -1

et (C) admet au point d'abscisse une demi tangente définie

$$\text{par : } \begin{cases} x = -1 \\ y \geq -1 \end{cases}$$

3°) Etudions les variations de f .

$$D = [-1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x - \ln x} + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{\ln x} - 1\right)} + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\ln x}{x}} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{\ln x} - 1\right)} = 0 \text{ et par suite } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

f est dérivable sur chacun des intervalles $] -1; 0[$ et $]0; +\infty[$ et

$$\forall x \in] -1; 0[, f'(x) = \frac{(x)(1 + \sqrt{1 - x^2}) - (1 + \sqrt{1 - x^2})'(x)}{(1 + \sqrt{1 - x^2})^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1 + \sqrt{1 - x^2}) - \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}(x)}{(1 + \sqrt{1 - x^2})^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1 + \sqrt{1 - x^2}) + \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}}{(1 + \sqrt{1 - x^2})^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1 + \sqrt{1 - x^2})\sqrt{1 - x^2} + x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{(1 + \sqrt{1 - x^2})^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - x^2} + 1 - x^2 + x^2}{(1 + \sqrt{1 - x^2})^2 \sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{(1 + \sqrt{1 - x^2})^2 \sqrt{1 - x^2}}$$

$$\text{d'où } \forall x \in] -1; 0[, f'(x) = \frac{1}{(1 + \sqrt{1 - x^2})\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{\ln'(x)(x - \ln x) - (x - \ln x)' \ln x}{(x - \ln x)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}(x - \ln x) - \left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln x}{(x - \ln x)^2}$$

$$= \frac{1 - \frac{\ln x}{x} - \ln x + \frac{\ln x}{x}}{(x - \ln x)^2} \text{ d'où } \forall x \in]0; +\infty[,$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$$

Sur $] -1; 0[, (1 + \sqrt{1 - x^2})\sqrt{1 - x^2} > 0$ et $1 > 0$ donc

$$f'(x) > 0, \forall x \in] -1; 0[$$

Sur $]0; +\infty[,$ le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - \ln x$ car

$$(x - \ln x)^2 > 0$$

Posons $1 - \ln x < 0$

$$1 - \ln x \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]0; +\infty[\\ \ln x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]0; +\infty[\\ x \geq e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in [e; +\infty[$$

Alors $f'(x) < 0, \forall x \in [e; +\infty[; f'(x) > 0, \forall x \in]0; e[$ et $f'(e) = 0$ en résumé

$$\begin{cases} \forall x \in]-1; 0[\cup]e; +\infty[& f'(x) > 0 \\ \forall x \in [e; +\infty[& f'(x) < 0 \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e \end{cases}$$

Alors f est strictement croissante sur $[-1; e]$ et f est strictement décroissante sur $[e; +\infty[$

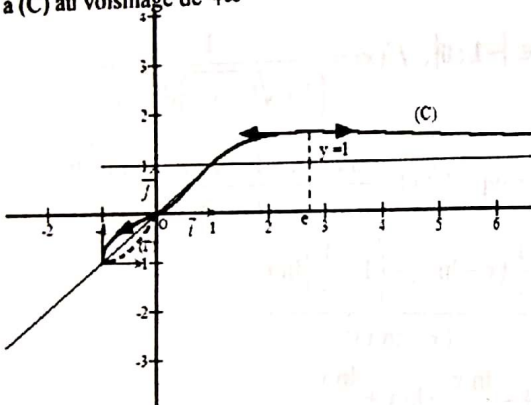
Tableau de variation de f

$$f(e) = \frac{\ln e}{e - \ln e} + 1 = \frac{1}{e-1} + 1 = \frac{e}{e-1}$$

x	-1	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-
f	-1	0	$\frac{e}{e-1}$	

b- Construisons (C)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $y=1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$



Partie II:

4°) a- Démontrons que g est bijective

f est continue et strictement croissante sur I et

$f(I) = J = [-1; 0]$ d'où g est une bijection.

b- Tableau de variation de g^{-1}

$g^{-1}: [-1; 0] \rightarrow [-1; 0]$ et g^{-1} a le même sens de variation que g . On a :

x	-1	0
$f'(x)$	+	+
f	-1	0

Construction de (Γ) (voir figure)

c- Déterminons $g^{-1}(x)$, $\forall x \in J$

Soit $x \in J$ et $y \in I$ posons $g^{-1}(x) = y$

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{1 + \sqrt{1 - y^2}} = x$$

$$\Leftrightarrow y = x(1 + \sqrt{1 - y^2})$$

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow y = x + x\sqrt{1 - y^2}$$

$$\Leftrightarrow y - x = x\sqrt{1 - y^2}$$

$$\Leftrightarrow (y - x)^2 = x^2(1 - y^2)$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2xy + x^2 = x^2 - x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 + x^2y^2 = 2xy$$

$$\Leftrightarrow y^2(1 + x^2) = 2xy$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{2xy}{1 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2x}{1 + x^2} \text{ avec } y \neq 0 \text{ d'où}$$

$$g^{-1}: [-1; 0] \rightarrow [-1; 0]$$

$$x \mapsto \frac{2x}{1 + x^2}$$

d- Déterminons $\int_{-1}^0 g^{-1}(x) dx$

$$\int_{-1}^0 g^{-1}(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{2x}{1 + x^2} dx$$

$$= [\ln(1 + x^2)]_{-1}^0$$

$$= 0 - \ln 2 \text{ d'où } \int_{-1}^0 g^{-1}(x) dx = -\ln 2$$

5°) a- Calculons A

$$A = \int_{-1}^0 (x - g^{-1}(x)) dx \text{ u.a}$$

$$A = \int_{-1}^0 x dx - \int_{-1}^0 g^{-1}(x) dx \text{ u.a}$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0 + \ln 2 \text{ d'où } A = \left(-\frac{1}{2} + \ln 2 \right) \text{ u.a}$$

b- Dédudons l'aire du domaine plan compris entre (C) et (Γ)

Soit $\mathcal{A}$ cette aire :

$$\mathcal{A} = 2A \text{ d'où } \mathcal{A} = (-2 + 2\ln 2) \text{ u.a}$$

ACTIVITE 37:

On pose pour tout réel t de $[1; +\infty[$, $g(t) = \frac{e^{-t}}{t}$

La fonction g est continue sur $[1; +\infty[$ donc la fonction G

définie par : $G(x) = \int_1^x g(t) dt$ est l'unique primitive de g qui

s'annule en 1.

On peut remarquer que, pour tout réel x de $[1; +\infty[$,

$$F(x) = G(x^2).$$

Donc F est la composée de la fonction "carré" et de la fonction G .

La restriction de la fonction "carré" à $[1; +\infty[$ est dérivable sur $[1; +\infty[$ et est à valeurs dans $[1; +\infty[$; la fonction G est dérivable sur $[1; +\infty[$ donc par composée la fonction F est dérivable sur $[1; +\infty[$.

Calcul de la dérivée de F

$$F'(x) = 2xG'(x^2) = 2xg(x^2) = 2x \times \frac{e^{-x^2}}{x^2} \text{ d'où}$$

$$F'(x) = 2 \frac{e^{-x^2}}{x}$$

ACTIVITE 38 :

1°) a- Calculons $I + J$

Notons que : $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Les fonctions

f et g sont définies sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi$$

($k \in \mathbb{Z}$)

D'après la propriété de linéarité de l'intégrale :

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{donc } I + J = \frac{\pi}{2}$$

b- Calculons $J - I$

$$J - I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$\text{Soit } u(x) = \sin x + \cos x \quad J - I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u'(x)}{u(x)} dx.$$

$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $u(x) > 0$, donc une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ est $\ln u(x)$.

$$\text{Donc : } J - I = \left[\ln(u(x))\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln\left(u\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \ln(u(0))$$

$$= \ln 1 - \ln 1 = 0 \text{ d'où } J - I = 0$$

c- Dédisons I et J

$$I \text{ et } J \text{ sont solutions du système } \begin{cases} I + J = \frac{\pi}{2} \\ -I + J = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = J \\ 2I = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } I = J = \frac{\pi}{4}.$$

2°) a- Calculons $f'(x)$ et déduisons la somme $K + L$

Pour tout réel $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$:

$$f'(x) = \frac{\cos x (\sin x + \cos x) - \sin x (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$\text{d'où } f'(x) = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

Dédisons $K + L$

Compte tenu de l'égalité $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, et d'après la propriété de linéarité de l'intégrale :

$$K + L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) dx = [f(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = 1$$

Donc $K + L = 1$

b- Calculons K et L

D'après la propriété de linéarité de l'intégrale,

$$K - L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx$$

$$\text{Or } \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$$

$$(f(x))^2 - (g(x))^2 = (f(x) - g(x))(f(x) + g(x))$$

$$= f(x) - g(x)$$

$$\text{D'où } K - L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x)) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx$$

$$= I - J = 0 \text{ d'où } K - L = 0$$

$$K \text{ et } L \text{ sont alors solutions du système } \begin{cases} K + L = 1 \\ K - L = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} K = \frac{1}{2} \\ L = \frac{1}{2} \end{cases}$$

c- Dédisons M

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \text{ donc}$$

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \frac{((\sin x + \cos x)^2 - \sin^2 x - \cos^2 x)}{(\sin x + \cos x)^2} dx$$

$$\Rightarrow 2M = \int_0^{\pi} 1 dx - K - L$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} 1 dx = K + L + 2M \text{ d'où } \frac{\pi}{2} = 1 + 2M \text{ puis}$$

$$M = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

ACTIVITE 39:

1°) Justifions que F est définie sur I

La fonction $x \mapsto 1 - x^2$ est continue sur I et $\forall x \in I$,

$1 - x^2 > 0$ donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ est continue sur

I par suite f est continue sur l'intervalle I . 0 est un réel

de I alors la fonction $F: x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est définie sur I .

2°) Etudions le sens variation de F

F est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en 0, alors

F est dérivable sur I et $\forall x \in I$ $F'(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\forall x \in I$, $F'(x) > 0$ et F est strictement croissante sur I .

3°) Démontrons que F est impaire

$\forall x \in I$ on a : $(-x) \in I$ et $f(-x) = f(x)$ donc f est paire.

$\forall x \in I$ on a : $(-x) \in I$ et

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt$$

$$= -\int_{-x}^0 f(t) dt ; f \text{ étant paire alors}$$

$$\int_{-x}^0 f(t) dt = \int_0^x f(t) dt \text{ d'où}$$

$$F(-x) = -\int_0^x f(t) dt \text{ et par suite } F \text{ est impaire.}$$

4°) a- Prouvons que G est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

$$G(x) = F(\sin x), x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

La fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et F est dérivable sur I donc d'après le théorème sur la dérivation

d'une fonction composée, G est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, G'(x) = \sin' x \times F'(\sin x)$$

$$= \cos x \times \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

$$G'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = 1 \text{ puisque } \cos x > 0, \text{ pour}$$

$$x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

b- D'après la question 4°)a-, G est une primitive de

$x \mapsto 1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, donc de la forme $G(x) = x + c$, où c

est une constante. Or $G(0) = F(\sin 0) = F(0) = 0$ d'où $c = 0$.

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, G(x) = x.$$

5°) Calculons l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

$$I = \int_0^1 f(x) dx = F\left(\frac{1}{2}\right) = F\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) = G\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

D'après la question 4.b) $I = \frac{\pi}{6}$.

ACTIVITE 40:

1°) a- Justifions que G est définie sur $\mathbb{R}$ et que G est impaire

$$\text{Soit } f: x \mapsto \frac{2}{\sqrt{1 + 4x^2}}$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc G est définie sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $-x \in \mathbb{R}$

$$\text{Et } G(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt$$

$$= -\int_{-x}^0 f(t) dt$$

$$G(-x) = -\int_0^x f(t) dt \text{ (car } f \text{ est paire)}$$

$$= -G(x) \text{ d'où } G \text{ est impaire}$$

b- Etudions le sens de variation de G et déduisons-en son signe

G est la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui s'annule en 0 donc G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = f(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$,

$G'(x) > 0$ alors G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$G(0) = 0$ donc $\forall x \in]-\infty; 0[$, $G(x) < 0$

$$\forall x \in]0; +\infty[, G(x) > 0$$

2°) a- Prouvons que $\forall t > 0$ on a : $\frac{1}{2t+1} \leq \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$

$$\forall t > 0, 1 + 4t^2 \leq (1 + 2t)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + 4t^2} \leq (1 + 2t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + 2t} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}} \text{ d'où le résultat}$$

b- *Calculons $\int_0^x \frac{1}{1 + 2t} dt$ et déduisons $\lim_{x \rightarrow +\infty} G$

on obtient : $\int_0^x \frac{1}{1+2t} dt = \frac{1}{2} \ln(2x+1)$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+2t} \leq \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}} \Rightarrow \ln(2x+1) \leq G(x)$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x+1) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} G = +\infty$

*Dressons le tableau de variation de G
 G étant impaire donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} G = -\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$G(x)$		+
$G(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3°) a- Démontrons que G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
 G est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $G(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
donc G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b- Démontrons que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{1+4[F(x)]^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) \neq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{G'[F(x)]} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+4[F(x)]^2}}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1+4[F(x)]^2} \end{aligned}$$

c- Dédudons-en que F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et
 $\forall x \in \mathbb{R}, F'' - F = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}, 1+4[F(x)]^2 > 0$, donc F' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par suite F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, F''(x) = \frac{1}{2} \frac{4F'(x) \times F(x)}{\sqrt{1+4[F(x)]^2}}$$

$$= 2 \frac{F'(x) \cdot F(x)}{\sqrt{1+4[F(x)]^2}}$$

$$= F(x) \text{ d'où } \forall x \in \mathbb{R}, F'' - F = 0$$

* Calculons $F(0)$ et $F'(0)$

$$F(0) = 0 \text{ et } F'(0) = \frac{1}{2}$$

*Dédudons F

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle

$$F'' - F = 0 \text{ est : } r^2 - 1 = 0$$

$$r^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \text{ ou } r = -1$$

Donc $F(x) = Ae^x + Be^{-x}, (A; B) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} F(0) = 0 \Leftrightarrow A + B = 0 \\ F'(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A - B = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

D'où $F(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})$

d- Déterminons $G(x)$

Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ posons $F(x) = y$

$$F(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{4} e^{-x} (e^{2x} - 1) = y$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 1 - 4e^x y = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 4ye^x - 1 = 0$$

$$\Delta' = 4y^2 + 1 > 0 \text{ donc } e^x = 2y - \sqrt{4y^2 + 1} \text{ ou}$$

$$e^x = 2y + \sqrt{4y^2 + 1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2y - \sqrt{4y^2 + 1} < 0 \text{ d'où}$$

$$e^x = 2y + \sqrt{4y^2 + 1}$$

$$\Rightarrow x = \ln(2y + \sqrt{4y^2 + 1}) \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R},$$

$$G(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$$

ACTIVITE 41 :

Partie A :

1°) Démontrons que l'ensemble de définition de f est

$$D_f =]-1; +\infty[$$

$$D_f = \{x \in]-1; 0] / x+1 > 0\} \cup$$

$$\{x \in]0; +\infty[/ x \neq 0\}$$

$$\forall x \in]-1; 0] \text{ on a : } x+1 > 0 \text{ de plus } \forall x \in]0; +\infty[,$$

$$x \neq 0 \text{ d'où } D_f =]-1; +\infty[$$

2°) a- Démontrons les égalités suivantes :

$$* \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} + \ln(x+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0 \text{ et } x+1 > 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty \text{ de}$$

$$\text{plus } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} x \times \frac{1}{x+1} = -\infty \text{ d'où}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \right) e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1 \text{ de plus}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

b- Dédudons-en de la question précédente les droite asymptotes de $(\mathcal{C}_f)$.

• $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ d'où la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, d'où la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

3°) a- Prouvons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 0$

Posons $X = -\frac{1}{x}$ on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} X = -\infty$ alors

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow -\infty} X^2 e^X = 0 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

b- Etudions la continuité de f en 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \right) e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x + 1) \times \left(\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \right) \\ &= 1 \times 0 = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x+1} + \ln(x+1) = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

de plus $f(0) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ d'où f est continue en 0

c- Etudions $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^3} \right) e^{-\frac{1}{x}}$$

Posons $h = \frac{1}{x}$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} h = +\infty$ donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{h \rightarrow +\infty} (h + h^2 + h^3) e^{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +\infty} h e^{-h} + h^2 e^{-h} + h^3 e^{-h} \\ &= 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 \end{aligned}$$

d- Etudions $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$$

Dérivabilité de f en 0

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$; $2 \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 2$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$; $0 \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

On a : $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ d'où f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation des résultats

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $O(0;0)$ deux demi-tangentes définies respectives par : $(T_d) : \begin{cases} y=0 \\ x \geq 0 \end{cases}$;

$$(T_g) : \begin{cases} y=2x \\ x \leq 0 \end{cases}$$

4°) Démontrons que :

a- $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \left(\frac{1-x}{x^4} \right) e^{-\frac{1}{x}}$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables.

$$\forall x \in]0; +\infty[$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+1)x^2 - 2x(x^2 + x + 1)}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} + \\ &\quad \frac{x^2 + x + 1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + x^2 + x + 1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} \text{ d'où } \forall x \in]0; +\infty[$$

$$f'(x) = \left(\frac{1-x}{x^4} \right) e^{-\frac{1}{x}}$$

b- $\forall x \in]-1; 0[$, $f'(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$

f est dérivable sur $]-1; 0[$ comme composée et somme de fonctions dérivables.

$$\forall x \in]-1; 0[; f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{1+x+1}{(x+1)^2} \text{ d'où}$$

$$\forall x \in]-1; 0[, f'(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

5°) Dressons le tableau de variation de f

• Signe de $f'(x)$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} \text{ or } \forall x \in]0; +\infty[,$$

$$\frac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} > 0 \text{ donc :}$$

$$\begin{cases} f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[\\ f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; 1[\\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in]-1; 0[, f'(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

Or $\forall x \in]-1; 0[, (x+1)^2 > 0$ et $x+2 > 0$ donc

$$\forall x \in]-1; 0[, f'(x) > 0$$

Au total :

$$\begin{cases} f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[\\ f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 0[\cup]0; 1[\\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

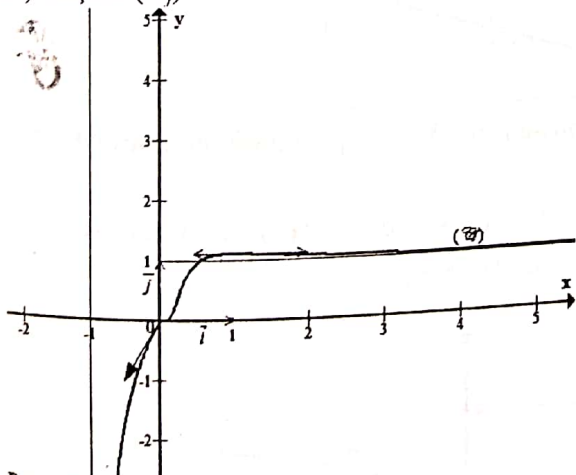
• Sens de variation de f

f est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$ et f est strictement croissante sur l'intervalle $] -1; 1[$

• Tableau de variation de f

x	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+	-
$f(x)$	$-\infty$		$\frac{2}{e}$	1

6°) Traçons ($\mathbb{R}$)



Partie B :

Soit $\alpha \in]-1; 0[$

7°) a- Justifions que $\forall x \in]-1; 0[, \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

On a : $\forall x \in]-1; 0[, 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$ d'où

$$\forall x \in]-1; 0[, \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

b- Démontrons que

$$\int_{\alpha}^0 \ln(x+1) dx = -\alpha \ln(\alpha+1) + \alpha - \ln(\alpha+1)$$

Posons $u(x) = \ln(x+1)$ et $v'(x) = 1$

$$u(x) = \ln(x+1) \Leftrightarrow u'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$v'(x) = 1$ alors on peut prendre : $v(x) = x+1$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \int_{\alpha}^0 \ln(x+1) dx &= [(x+1) \ln(x+1)]_{\alpha}^0 - \int_{\alpha}^0 dx \\ &= [(x+1) \ln(x+1) - x]_{\alpha}^0 \text{ d'où on} \end{aligned}$$

trouve :

$$\int_{\alpha}^0 \ln(x+1) dx = -\alpha \ln(\alpha+1) + \alpha - \ln(\alpha+1)$$

8°) a- Déduisons-en l'aire $A(\alpha)$

$$A(\alpha) = \left(\int_{\alpha}^0 -f(x) dx \right) u.a$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^0 f(x) dx &= \int_{\alpha}^0 \left(\frac{x}{x+1} + \ln(x+1) \right) dx \\ &= \int_{\alpha}^0 \frac{x}{x+1} dx + \int_{\alpha}^0 \ln(x+1) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \int_{\alpha}^0 \frac{x}{x+1} dx &= \int_{\alpha}^0 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= [x - \ln(x+1)]_{\alpha}^0 \\ &= -\alpha + \ln(\alpha+1) \text{ donc d'après la question} \end{aligned}$$

précédente, on a :

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= -\alpha + \ln(\alpha+1) - \alpha \ln(\alpha+1) + \alpha - \ln(\alpha+1) \\ &= -\alpha \ln(\alpha+1) u.a \end{aligned}$$

b- Calculons $\lim_{\alpha \rightarrow -1^+} A(\alpha)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1^+} A(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow -1^+} -\alpha \ln(\alpha+1) = +\infty$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1^+} A(\alpha) = +\infty$$

ACTIVITE 48 :

1°) a- Démontrons que $D = \mathbb{R}$

$$D = \left\{ x \in]-\infty; 0] / 1 - e^{2x} \geq 0 \right\} \cup \left\{ x \in]0; +\infty[/ 1 + \frac{2}{x} > 0 \right\}$$

Or $\forall x \in]-\infty; 0[, 1 - e^{2x} \geq 0$ et $\forall x \in]0; +\infty[,$

$$1 + \frac{2}{x} > 0 \text{ donc } D =]-\infty; 0] \cup]0; +\infty[$$

$$D = \mathbb{R}$$

b- Déterminons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 - e^{2x}} \right) = -1$$

c- Démontrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

Posons $X = \frac{2}{x}$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) \right] = \lim_{X \rightarrow 0} 2 \frac{\ln(1+X)}{X}$
 $= 2$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

2°) a- Démontrons que f est continue sur $\mathbb{R}$

*La fonction $x \mapsto -\sqrt{1-e^{2x}}$ est continue sur $]-\infty; 0]$ donc f est continue sur $]-\infty; 0](a)$

*La fonction $x \mapsto x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$ est continue sur $] -\infty; -2[$ et sur $]0; +\infty[$ donc f est continue sur $]0; +\infty[$ (b)

$$*\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} [x \ln(1+2) - x \ln x] = f(0) = 0 \text{ (c)}$$

De (a), (b) et (c) on déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b- Etudions la dérivabilité de f en 0.

$$\text{Pour } x < 0, \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{-\sqrt{1 - e^{2x}}}{x}$$

$$= \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1 + e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$$

Mais $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} = +\infty$ donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$$

Pour $x > 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$$

Par suite f n'est donc pas dérivable en 0.

Déduisons-en que (c) admet en 0 une tangente dont on donnera une équation

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty \text{ et } f$$

est continue en 0 donc (c) admet en 0 une tangente d'équation $x = 0$

3°) Etudions le sens de variation de f sur $]-\infty; 0[$
 f est dérivable sur $]-\infty; 0[$

f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et $\forall x \in] -\infty; 0[$,

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

$\forall x \in]-\infty; 0[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$

4°) a- Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$

* f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x+2}$$

* f' est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$f''(x) = \frac{-\frac{2}{x^2}}{\frac{x+2}{x}} + \frac{2}{(x+2)^2} \text{ d'où } f''(x) = \frac{-4}{x(x+2)}$$

b-Déterminons le sens de variation de f'

$\forall x \in]0; +\infty[$, $f''(x) < 0$ donc f' est strictement

décroissante sur $]0 ; +\infty[$

c- Dressons le tableau de variation de f'

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
f	$+\infty$	0

Déduisons-en le signe de $f'(x)$ pour tout $x > 0$

$$f'([0; +\infty[) =]0; +\infty[\text{ donc } \forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$$

5°) a- Dressons le tableau des variations de f

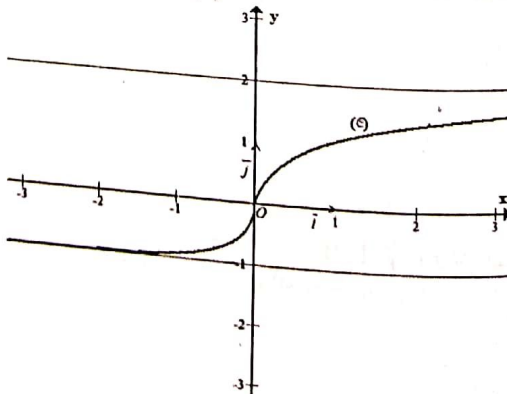
$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) > 0$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
f					

b- Dédudons-en sur $]0; +\infty[$, la position relative de (c) et de (Δ)

$\forall x \in]0; +\infty[, 0 < f(x) < 2$ donc $f(x) - 2 < 0$ d'où (C) est au dessus de (Δ) sur $]0; +\infty[$

6°) Construisons (c)



7°) a- Calculons $A(\alpha)$

f est continue sur $\left[\alpha; \frac{2}{e-1}\right]$ et $\forall x \in \left[\alpha; \frac{2}{e-1}\right]$,

$f(x) < 2$ donc

$$A(\alpha) = \left(\int_{\alpha}^{\frac{2}{e-1}} [2 - f(x)] dx \right) u.a$$

$$\int_{\alpha}^{\frac{2}{e-1}} [2 - f(x)] dx = 2 \int_{\alpha}^{\frac{2}{e-1}} dx - \int_{\alpha}^{\frac{2}{e-1}} x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) dx$$

$$= 2 \left(\frac{2}{e-1} - \alpha \right) - \left[\left(\frac{1}{2} x^2 - 2 \right) \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) \right]_{\alpha}^{\frac{2}{e-1}} - \int_{\alpha}^{\frac{2}{e-1}} \left(1 - \frac{2}{x} \right) dx$$

$$= 2 \left(\frac{2}{e-1} - \alpha \right) - \left[\left(\frac{1}{2} x^2 - 2 \right) \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) + x - 2 \ln x \right]_{\alpha}^{\frac{2}{e-1}} \text{ donc}$$

$$A(\alpha) = \left[\frac{2(e^2 - e + 1)}{(e-1)^2} + 2 \ln 2 - 2 \ln(e-1) \right. \\ \left. - \alpha + \frac{1}{2} \alpha^2 \ln(\alpha + 2) - \frac{1}{2} \alpha^2 \ln \alpha - 2 \ln(\alpha + 2) \right] \times 4 \text{ cm}^2$$

b- Calculons $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} A(\alpha)$.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha^2 \ln \alpha = 0 ; \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \alpha^2 \ln(\alpha + 2) = 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} A(\alpha) = \left[\frac{2(e^2 - e + 1)}{(e-1)^2} - 2 \ln(e-1) \right] \times 4 \text{ cm}^2$$

Interprétation géométrique :

Le résultat obtenu représente l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C) et les droites d'équations $y=2$,

$$x=0 \text{ et } x = \frac{2}{e-1}.$$

12. CORRECTION DES ACTIVITES SUR LA STATISTIQUE

ACTIVITE 1 :

1°) Etablissons que : $r^2 = a \times a'$.

(D₁) droite de régression de Y en X ayant pour équation :

$$y = ax + b, \text{ on a : } a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x}$$

(D₂) droite de régression de X en Y ayant pour équation :

$$x = a'y + b', \text{ on a : } a' = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(Y)} \text{ et } b' = \bar{x} - a'\bar{y}$$

$$\text{On en déduit que : } a \times a' = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} \times \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(Y)}$$

$$= \frac{[\text{cov}(X, Y)]^2}{V(X) \times V(Y)}$$

$$= \left[\frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \right]^2 = r^2$$

$$\text{D'où } r^2 = a \times a'$$

2°) a- Calculons le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

(D₁) droite de régression de Y en X ayant pour équation réduite : $y = 2,4x$, on a : $a = 2,4$ et $b = 0$

(D₂) droite de régression de X en Y ayant pour équation

$$\text{réduite : } x = \frac{3,5}{9}x + \frac{24}{9}, \text{ on a : } a' = \frac{3,5}{9} \text{ et } b' = \frac{24}{9}$$

D'après la question précédente, le coefficient de

$$\text{corrélation vérifie : } r^2 = a \times a' = 2,4 \times \frac{3,5}{9} = \frac{14}{15}$$

$$\text{Puisque : } r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}, \text{ que } \sigma(X) \text{ et } \sigma(Y) \text{ sont}$$

positifs par définition et que $\text{cov}(X, Y)$ est positif par

$$\text{hypothèse, alors } r \text{ est positif. Donc } r = \sqrt{\frac{14}{15}}$$

b- Calcul de $\bar{x}$ et $\bar{y}$

$$\text{On a : } \begin{cases} -a\bar{x} + \bar{y} = b & (1) \\ \bar{x} - a'\bar{y} = b' & (2) \end{cases}$$

Je garde l'équation (1), je multiplie l'équation (2) par a

$$\text{pour éliminer } \bar{x} : \begin{cases} -a\bar{x} + \bar{y} = b \\ a\bar{x} - aa'\bar{y} = ab' \end{cases}$$

j'additionne membre à membre : $(1 - aa')\bar{y} = b + ab'$

$$\text{c'est à dire : } \bar{y} = \frac{b + ab'}{1 - r^2}$$

Pour trouver $\bar{x}$, j'utilise l'équation la plus simple ; ici c'est la (2) : $\bar{x} = b' + a'\bar{y}$ c'est-à-dire

$$\bar{x} = b' + a' \frac{b + ab'}{1 - r^2} = \frac{b' - r^2 b' + a' b + a' ab'}{1 - r^2} \Rightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{b' + a' b}{1 - r^2}$$

Application numérique : comme $\frac{1}{1 - r^2} = 15$ on a :

$$\bar{y} = 15 \times 2,4 \times \frac{24}{9} \text{ et } \bar{x} = 15 \times \frac{24}{9}$$

$$\text{Donc } \bar{y} = 96 \text{ et } \bar{x} = 40.$$

ACTIVITE 6 :

Notons n_{ij} le nombre de ménages habitant x_j pièces et ayant y_i enfants.

n_j le nombre de ménages habitant x_j pièces.

n_i le nombre de ménages ayant y_i enfants.

N l'effectif total de la population ($N = 100$)

1°) a- Calcul de la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type σ_x de la série x.

La moyenne $\bar{x}$ est donnée par $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^4 n_j x_j$ d'où

$$\bar{x} = \frac{281}{100} = 2,81$$

La variance σ_x^2 est donnée par $\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^4 n_j x_j^2 - \bar{x}^2$

$$\text{d'où } \sigma_x^2 = \frac{875}{100} - \left(\frac{281}{100} \right)^2 = \frac{8539}{10.000} \text{ donc}$$

$$\sigma_x = \sqrt{0,8539} \approx 0,924.$$

b- Calcule de la moyenne $\bar{y}$ et l'écart type σ_y .

La moyenne $\bar{y}$ est donnée par : $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^4 n_i y_i$ d'où

$$\bar{y} = \frac{192}{100} = 1,92$$

La variance σ_y^2 est donnée par : $\sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^4 n_i y_i^2 - \bar{y}^2$

$$\text{d'où } \sigma_y^2 = \frac{496}{100} - \left(\frac{192}{100} \right)^2 = \frac{12736}{10.000} \text{ donc}$$

$$\sigma_y = \sqrt{1,2736} \approx 1,129$$

2°) Calcul du coefficient de corrélation linéaire.
Le coefficient de corrélation linéaire r est donnée par :

$$r = \frac{\text{cov}(x; y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$\text{Or } \text{cov}(x; y) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^4 \sum_{i=0}^4 n_{ij} x_j y_i - \bar{x} \bar{y} \text{ d'où}$$

$$\text{cov}(x; y) = \frac{604}{100} - \frac{281}{100} \times \frac{192}{100} = \frac{6448}{10.000}$$

$$\text{Ainsi } r = \frac{6448}{\sqrt{0,8539} \times \sqrt{1,2736}} \text{ donc } r \approx 0,62$$

L'existence d'une liaison entre les séries x et y .

$|r| = 0,62$ ce coefficient est faible car $|r| < 0,7$

Donc l'ajustement linéaire entre les séries x et y n'est pas valide.

ACTIVITE 8 :

1°) a- Le tableau ainsi obtenu est appelé tableau linéaire.

b-

x_i = âge en année des femmes et y_j = le poids en kg des bébés

$x_i \backslash y_j$	16	18	20	22	26	Total
2,6	0	0	0	0	1	1
2,8	1	1	0	3	0	5
3	0	2	0	2	2	6
3,2	0	0	3	1	0	4
3,4	0	2	0	0	0	2
3,6	0	0	1	0	1	2
Total	1	5	4	6	4	20

c- Dressons le tableau des effectifs des séries marginales de x et de y

Effectifs des séries marginales de x

Âges (x_i) en année	16	18	20	22	26	Total
Effectifs n_i	1	5	4	6	4	20

Effectifs des séries marginales de y .

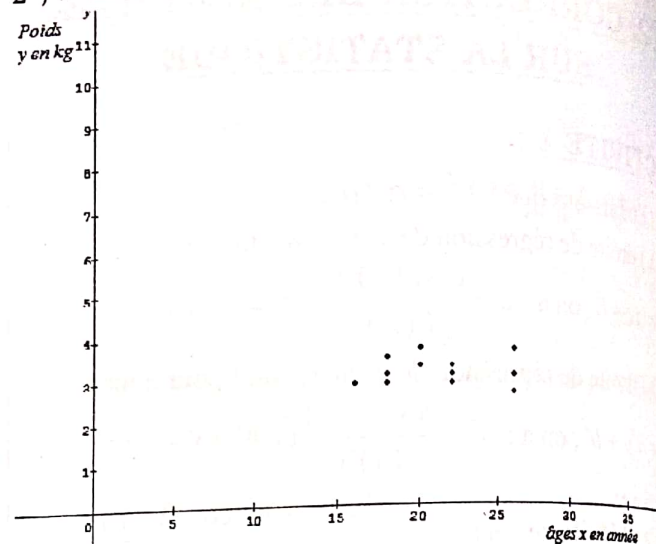
Poids (y_j) en kg	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6	Total
Effectifs n_j	1	5	6	4	2	2	20

d- Calculons les coordonnées du point moyen G de la série

$$G(\bar{x}; \bar{y}) \text{ avec } \bar{x} = \frac{1}{N} \sum n_i x_i = 21,1 \text{ et}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum n_j y_j = 3,07 \text{ donc } G(21,1; 3,07)$$

2°) a- Dressons le nuage de points



b- L'aspect des points ne justifie pas un ajustement linéaire car les points sont dispersés : on dit qu'il y a absence de liaison

c- Calculons le coefficient de corrélation linéaire

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma(x) \times \sigma(y)} \text{ avec}$$

$$\text{cov}(x; y) = \frac{1}{N} \sum n_{ij} x_i y_j - \bar{x} \bar{y} = -0,077$$

$$\sigma(y) = \sqrt{V(y)} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum n_j y_j^2 - \bar{y}^2} = 0,27 \text{ alors}$$

$$r = -0,094$$

Interprétation graphique :

$|r| = 0,094$ avoisine à 0 : il y a donc indépendance linéaire statistique entre l'âge des femmes et le poids de leurs bébés.

3°) a- Détermine une équation de la droite de régression de y en x .

Soit (D) cette droite. On a : (D) : $y = ax + b$ avec

$$a = \frac{\text{cov}(x, y)}{v(x)} \approx -0,0085 \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x} \approx 3,25 \text{ d'où}$$

$$(D) : y = -0,0085x + 3,25$$

b- On peut pas fait une bonne estimation du poids d'un bébé accouché par une femme de 27 ans car il y a indépendance linéaire statistique entre l'âge des femmes et le poids de leurs bébés.

4°)

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve,

$$\text{card } \Omega = C_{20}^2 = 190$$

Soit A l'événement « les enfants choisis pèse 3kg) on a :

$$\text{card}A = C_{14} = 91$$

$$\text{Alors } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{91}{190}$$

ACTIVITE 10 :

1°) a- Déterminons des entiers naturels α et β .

$$\text{On sait que : } \bar{x} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i \text{ et } \sigma_x^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$\text{Comme } \bar{x} = 100 \text{ et } \sigma_x^2 = \frac{20\sqrt{46}}{3}, \text{ on obtient alors le}$$

$$\text{système suivant : } \begin{cases} \alpha + \beta = 190 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 20500 \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} \alpha + \beta = 190 \\ \alpha\beta = 7800 \end{cases} (S)$$

α et β sont solutions de l'équation :

$$X^2 - 190X + 7800 = 0.$$

Les solutions de cette équation sont : $X_1 = 60$ et

$$X_2 = 130.$$

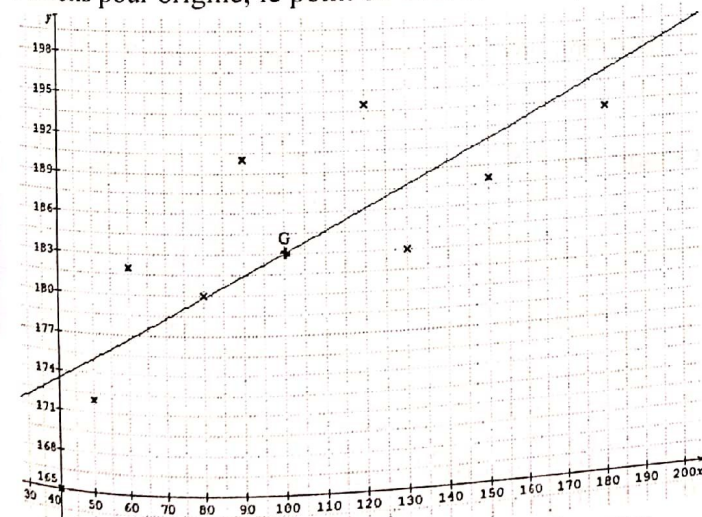
Le système (S) admet deux couples solutions :

(60; 130) ou (130; 60).

Les x_i sont rangés dans l'ordre croissant, on a : $\alpha = 60$ et $\beta = 130$.

b- Construction du nuage de points

Prenons pour origine, le point de coordonnées (40; 165)



2°) Détermination de la droite de régression de x en y.

Cette droite a pour équation : $x = a'y + b'$

$$\text{Avec } a' = \frac{\text{cov}(x; y)}{V(y)} \text{ et } b' = \bar{x} - a'\bar{y}$$

$$\text{Or } \bar{x} = 100 ; \bar{y} = 183 ; V(y) = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 y_i^2 - \bar{y}^2 = 83,33 \text{ et}$$

$$\text{cov}(x; y) = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i y_i - \bar{x}\bar{y} = 325,55 \text{ d'où}$$

$a' = 3,906$ et $b' = -614,90$ donc la droite de régression de x en y a pour équation : $x = 3,906y - 614,9$

3°) Calcul du coefficient de corrélation r

$$r \text{ est défini par : } r = \frac{\text{cov}(x; y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$\text{Ainsi } r = \frac{325,55}{\sqrt{83,33} \times \frac{20\sqrt{46}}{3}} \approx 0,789 \text{ donc } \underline{\underline{r \approx 0,80.}}$$

ACTIVITE 11 :

On considère le tableau ci-dessous indiquant les résultats d'une étude sur le nombre d'années x en exercice des ouvriers d'une entreprise et de leur salaire y en milliers de francs.

Notons x_i les modalités de x et n_i l'effectif de x_i avec $1 \leq i \leq 6$. Et notons y_j les modalités de y et n_j l'effectif de y_j avec $1 \leq j \leq 4$. Soit N l'effectif total.

$y \backslash x$	2	6	10	14	18	22	n_j
75	a	5	0	0	0	0	a-5
125	0	7	1	0	2	0	10
175	2	0	9	8	15	4	38
225	0	1	0	3	b	1	b-5
n_i	a-2	13	10	11	b-17	5	N=a+b-58

$$1^\circ) \text{ Déterminons a et b pour que } \bar{x} = \frac{596}{59} \text{ et } \bar{y} = \frac{8450}{59}$$

$$\text{On sait que : } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 n_i x_i}{N} \text{ et } \bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^4 n_j y_j}{N}$$

Alors

$$\bar{x} = \frac{2(a+2) + (6 \times 13) + (10 \times 10) + (14 \times 11) + 18(b+17) + (22 \times 5)}{a+b+58}$$

$$\text{et } \bar{y} = \frac{75(a+5) + (10 \times 125) + (175 \times 38) + 225(b+5)}{a+b+58}$$

$$\text{or } \bar{x} = \frac{596}{59} \text{ et } \bar{y} = \frac{8450}{59}$$

$$\text{d'où } \bar{x} = \frac{2(a+2) + (6 \times 13) + (10 \times 10) + (14 \times 11) + 18(b+17) + (22 \times 5)}{a+b+58} = \frac{596}{59}$$

$$\text{et } \bar{y} = \frac{75(a+5) + (10 \times 125) + (175 \times 38) + 225(b+5)}{a+b+58} = \frac{8450}{59}$$

on obtient ainsi la système suivant :

$$\begin{cases} 239a - 233b = 4900 \\ 161a - 193b = 2580 \end{cases} \text{ d'où } a = 40 \text{ et } b = 20.$$

2°) On suppose que $a = 40$ et $b = 20$ dans la suite. Et en associant à chaque valeur x_i la moyenne m_i de la série conditionnelle $Y/X = x_i$; on a obtenu le tableau suivant :

x	2	6	10	14	18	22
m	80	113	170	189	199	185

a- Calculons le coefficient de corrélation linéaire. Déterminons d'abord les moyennes $\bar{x}$ et $\bar{m}$, les variance $V(X)$ et $V(M)$, les écarts-types σ_x et σ_m , la covariance de X et M.

$$\text{On a : } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{N}, \bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^6 m_i}{N}, V(X) = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i^2}{N} - \bar{x}^2,$$

$$V(M) = \frac{\sum_{i=1}^6 m_i^2}{N} - \bar{m}^2, \sigma_x = \sqrt{V(X)}, \sigma_m = \sqrt{V(M)} \text{ et}$$

$$\text{cov}(X, M) = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i m_i}{N} - \bar{x} \bar{m}.$$

$$\text{D'où } \bar{x} = 12, \bar{m} = 156, V(X) \approx 46,66, V(M) \approx 1933,33,$$

$$\sigma_x \approx 6,83, \sigma_m \approx 43,96 \text{ et } \text{cov}(X, M) = 267,33.$$

Calculons maintenant le coefficient de corrélation linéaire r .

$$\text{On sait que } r = \frac{\text{cov}(X, M)}{\sigma_x \sigma_m} \text{ d'où } r \approx 0,89$$

Puisque r est proche de 1, il y a alors une forte corrélation entre X et M.

b- La droite de régression de m en x , notée D, a pour

$$\text{équation : } m = ax + b \text{ avec } a = \frac{\text{cov}(X, M)}{V(X)} \text{ et}$$

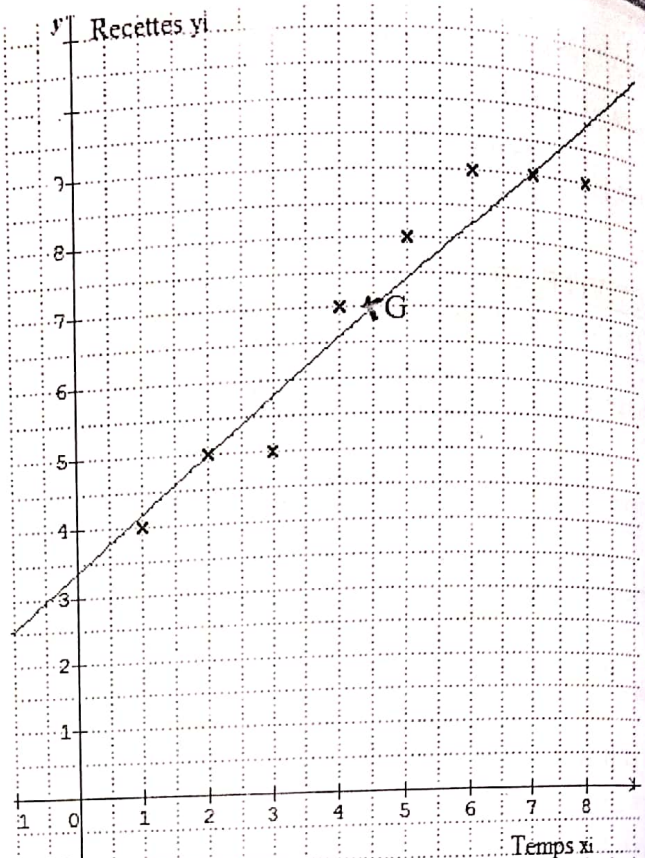
$$b = \bar{m} - a\bar{x} \text{ d'où (D) : } m = 5,73x + 87,25$$

c- Si $x = 30$ alors $m \approx 259,128$, d'où le salaire moyen d'un ouvrier ayant 30 ans d'ancienneté est sensiblement égal à 259130 F.

ACTIVITE 14 :

1°) a- Nuage de points des recettes en fonction du temps

Le point moyen G du nuage est $G\left(\frac{9}{2}; 7\right)$



b- Equation de la droite d'ajustement des recettes par rapport au temps

On pose (D) : $y = ax + b$

On trouve :

$$V(x) = 5,25 \text{ cov}(x, y) = 4,25, a = \frac{17}{21} \approx 0,81 \text{ et}$$

$$b = \frac{47}{14} \approx 3,357 \text{ d'où (D) : } y = \frac{17}{21}x + \frac{47}{14}.$$

2°) Déterminons les réels α et β tels que $\bar{z} = 7$ et $V(z) = 3$

$$\text{Comme } \bar{z} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 z_i \text{ et } V(z) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 z_i^2 - \bar{z}^2, \text{ alors on}$$

$$\text{trouve : } \bar{z} = \frac{\alpha + \beta + 41}{8} = 7 \text{ et}$$

$$V(z) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 299}{8} - \bar{z}^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 93}{8}$$

$$\text{Ainsi } \bar{z} = 7 \Rightarrow \alpha + \beta = 15 \text{ et } V(z) = 3 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 117$$

$$\text{Or } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 225 - 2\alpha\beta = 117 \text{ d'où}$$

$\alpha\beta = 54$. Les réels α et β sont solutions de l'équations $T^2 - 15T + 54 = 0$; on trouve $T = 6$ ou $T = 9$. Ainsi $\alpha = 6$ et $\beta = 9$ ou $\alpha = 9$ et $\beta = 6$. Comme $\alpha < \beta$, alors les réels sont : $\alpha = 6$ et $\beta = 9$.

11. CORRIGE DES ACTIVITES SUR LES SUITES NUMERIQUES

ACTIVITE 1 :

1°) Prouvons par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$2^{2n} + 2$ est un entier divisible par 3

• Si $n=0$, $2^{2n} + 2 = 2^0 + 2 = 3$ qui est bien divisible par 3.

L'affirmation de l'énoncé est vraie quand $n=0$.

• Soit $n \geq 0$. Supposons que $2^{2n} + 2$ est un entier divisible par 3, et démontrons que $2^{2(n+1)} + 2$ est un entier divisible par 3.

On a :

$$\begin{aligned} 2^{2(n+1)} + 2 &= 2^{2n+2} + 2 \\ &= 4 \cdot 2^{2n} + 2 \\ &= 3 \cdot 2^{2n} + 1 \cdot 2^{2n} + 2 \\ &= 2^{2n} + 2 + 3 \cdot 2^{2n} \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, il existe un entier naturel k tel

que : $2^{2n} + 2 = 3k$. Alors,

$$\begin{aligned} 2^{2(n+1)} + 2 &= 2^{2n} + 2 + 3 \cdot 2^{2n} \\ &= 3k + 3 \cdot 2^{2n} = 3(2^{2n} + k) \end{aligned}$$

Comme $2^{2n} + k$ est un entier, on en déduit que $2^{2(n+1)} + 2$ est un entier divisible par 3. D'où pour tout entier naturel n ,

$2^{2n} + 2$ est un entier divisible par 3.

2°) Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 6$,

$$2^n \geq 6n + 7$$

* Si $n=6$, $2^n = 2^6 = 64$ et $6n + 7 = 6 \times 6 + 7 = 43$ $64 > 43$. Comme $43 < 64$, l'inégalité de l'énoncé est vraie quand $n=6$.

* Soit $n \geq 6$. Supposons que $2^n \geq 6n + 7$ et démontrons que $2^{n+1} \geq 6(n+1) + 7$.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\ &\geq 2(6n + 7) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= 12n + 14 = 6(n+1) + 7 + 6n + 1 \\ &\geq 6(n+1) + 7 \text{ d'où pour tout entier naturel } n \geq 6, \end{aligned}$$

$$2^n \geq 6n + 7$$

3°) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$U_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

• Si $n=0$, $4 - \frac{1}{2^{0-1}} = 4 - 2 = 2 = U_0$. L'égalité de l'énoncé est vraie quand $n=0$.

• Soit $n \geq 0$. Supposons que : $U_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$ et démontrons que $U_{n+1} = 4 - \frac{1}{2^{(n+1)-1}}$

$$U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + 2$$

$$= \frac{1}{2} \left(4 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) + 2 \text{ (par hypothèse de récurrence)}$$

$$= 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} + 2 = 4 - \frac{1}{2^{(n+1)-1}}$$

D'où pour tout entier naturel n , $U_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$

ACTIVITE 2 :

$$1^\circ) U_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ et } U_2 = \sqrt{2}$$

2°) a-

$$* \text{ Pour } n=0, U_0 = 0 \in [0; \sqrt{3}]$$

* Soit $n \geq 0$. Supposons que $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$ et démontrons que

$$0 \leq U_{n+1} \leq \sqrt{3}.$$

$$0 \leq U_n \leq \sqrt{3} \Rightarrow -3 \leq -U_n^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow 3 \leq 6 - U_n^2 \leq 6$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{6 - U_n^2} \leq \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{6}} \leq \frac{3}{\sqrt{6 - U_n^2}} \leq \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{3}{\sqrt{6}} \leq U_{n+1} \leq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq \sqrt{3} \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$$

b-Prouvons que la suite (U_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3}{\sqrt{6 - U_n^2}} - U_n$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3 - U_n \sqrt{6 - U_n^2}}{\sqrt{6 - U_n^2}}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{9 - U_n^2 (6 - U_n^2)}{\sqrt{6 - U_n^2} (3 + U_n \sqrt{6 - U_n^2})}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n^4 - 6U_n^2 + 9}{\sqrt{6 - U_n^2} (3 + U_n \sqrt{6 - U_n^2})}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n^2 - 3)^2}{\sqrt{6 - U_n^2} (3 + U_n \sqrt{6 - U_n^2})}$$

Pour tout entier naturel n , $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$ et on a :

$$\sqrt{6 - U_n^2} (3 + U_n \sqrt{6 - U_n^2}) > 0 \text{ et } (U_n^2 - 3)^2 \geq 0 \text{ donc}$$

$U_{n+1} - U_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ par suite la suite (U_n) est croissante

c- Dédudons que (U_n) est convergente

(U_n) est croissante et est majorée par $\sqrt{3}$ d'où (U_n) est une suite convergente

3°) a- Démontrons que (V_n) est une suite arithmétique de raison 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on trouve : } V_{n+1} = \frac{3}{3 - U_n^2} \text{ et}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{3}{3 - U_n^2} - \frac{U_n^2}{3 - U_n^2}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{3 - U_n^2}{3 - U_n^2}$$

$V_{n+1} - V_n = 1$ d'où (V_n) est une suite arithmétique de raison 1.

b- Exprimons V_n en fonction de n .

$$V_0 = 0 \text{ et on trouve } \underline{V_n = n}$$

Dédudons U_n en fonction de n

$$\text{Pour tout entier naturel } n, V_n = \frac{U_n^2}{3 - U_n^2} \text{ et on déduit que}$$

$$U_n^2 = \frac{3n}{1+n} \Leftrightarrow U_n = \sqrt{\frac{3n}{1+n}} \text{ car } U_n > 0 \text{ d'où}$$

$$U_n = \sqrt{\frac{3n}{1+n}}$$

4°) a- Démontrons que la suite (T_n) est géométrique de raison

$$\frac{1}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} = W_{n+1} - 2(n+1) + 4$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{2} W_n + V_n - 2(n+1) + 4$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{2} W_n - n + 2$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{2} (W_n - 2n + 4)$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{2} T_n \text{ d'où } (T_n) \text{ est une suite géométrique de}$$

$$\text{raison } q = \frac{1}{2}$$

b- Dédudons W_n en fonction de n .

$$T_0 = W_0 + 4 = 7 \text{ et } T_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{On sait que : } T_n = W_n + 2n - 4 \Rightarrow W_n = T_n + 2n - 4 \text{ d'où}$$

$$W_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 4$$

c- Calculons S_1 et S_2

$$S_1 = 14 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$T_n = W_n - 2n + 4 \text{ et on a :}$$

$$T_0 = W_0 - 0(1) + 4$$

$$T_1 = W_1 - 2(1) + 4$$

$$\vdots$$

$$T_{n-1} = W_{n-1} - 2(n-1) + 4$$

$$14 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = S_2 - 2 \left(\frac{n}{2}\right) (0 + n - 1) \text{ et on obtient :}$$

$$S_2 = 14 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + n^2 - 5n$$

ACTIVITE 7 :

1°) Exprimons V_{n+1} en fonction de $\ln U_n$ puis en fonction de V_n .

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\} \text{ on a : } V_{n+1} = \frac{1 + \ln U_{n+1}}{2}$$

Or $\forall n \geq 2$ on a : $(U_{n+1})^2 e = U_n$; $U_n > 0$ et $U_{n+1} > 0$ donc

$$2 \ln U_{n+1} + \ln e = \ln U_n \text{ soit } \ln U_{n+1} = \frac{-1 + \ln U_n}{2}$$

$$\text{Ainsi } V_{n+1} = \frac{1 + \frac{-1 + \ln U_n}{2}}{2} = \frac{1 + \ln U_n}{4}$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\} ; V_{n+1} = \frac{1 + \ln U_n}{4}$$

2°) Dédudons-en la nature de la suite (V_n) .

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}, \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\frac{1 + \ln U_n}{4}}{\frac{1 + \ln U_{n-1}}{4}} = \frac{1}{2} = \text{cste}$$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1^{er}

$$\text{terme } V_2 = \frac{1 + \ln U_2}{2} = 2$$

3°) Exprimons V_n et U_n en fonction de n .

(V_n) étant une suite géométrique de premier terme $V_2 = 2$ et

de raison $\frac{1}{2}$ donc on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}, V_n = V_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$V_n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}, V_n = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Correction des activités sur suites numériques

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}, \text{ on a : } V_n = \frac{1 + \ln U_n}{2}$$

$$V_n = \frac{1 + \ln U_n}{2} \Leftrightarrow \ln U_n = -1 + 2V_n \\ \Leftrightarrow U_n = e^{-1+2V_n}$$

$$\text{Soit } U_n = \frac{1}{e} \cdot 16^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \text{ ou } U_n = \frac{1}{e} e^{16 \times 2^{-n}}.$$

4°) a- Vérifions la convergences des suites (U_n) et (V_n) .

$$\text{On a : } V_n = 8^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$0 < \frac{1}{2} < 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$$

D'où (V_n) est convergente.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 \text{ et } U_n = e^{-1+2V_n} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ d'où } (U_n) \text{ est convergente.}$$

b- Calculons en fonction de n S .

$$S = V_2 + V_3 + \dots + V_n$$

$$= V_2 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\frac{1}{2}} \text{ soit}$$

$$S = 4 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right]$$

5°) Calculons P_n en fonction de n .

$$\text{On a : } P_n = U_2 \times U_3 \times \dots \times U_n$$

$$\text{Or } U_n = e^{-1+2V_n}$$

$$\text{Ainsi on a : } P_n = e^{-1+2V_2} \times e^{-1+2V_3} \times \dots \times e^{-1+2V_n} \\ = e^{-1(n-1)+2S}$$

$$\text{On trouve : } P_n = e \cdot e^{8 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] - n}$$

ACTIVITE 8 :

Soit la suite réelle $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = \int_{n-1}^n (\ln 3)^{-x} dx.$$

1°) Une primitive de la fonction f définie par :

$f(x) = (\ln 3)^{-x}$ est la fonction F tel que :

$$F(x) = \frac{-1}{\ln(\ln 3)} (\ln 3)^{-x}. \text{ D'où } \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$U_n = F(n) - F(n-1) = \frac{-1}{\ln(\ln 3)} \left[(\ln 3)^{-n} - (\ln 3)^{-(n-1)} \right]$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{(\ln 3)^{-n}}{\ln(\ln 3)} (-1 + \ln 3).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$U_{n+1} = \frac{(\ln 3)^{-(n+1)}}{\ln(\ln 3)} (-1 + \ln 3) = \frac{(\ln 3)^{-n}}{\ln(\ln 3)} (-1 + \ln 3) \times \frac{1}{\ln 3}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = \frac{1}{\ln 3} U_n$ donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{\ln 3}$ et de premier terme :

$$U_1 = \frac{1 - (\ln 3)^{-1}}{\ln(\ln 3)}.$$

2°) Convergente de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Comme $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison

$q = \frac{1}{\ln 3}$ et $|q| < 1$ car $\ln 3 > 1$, alors la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

3°) Somme des termes d'une suite géométrique :

a- Calcule de S_n

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n, n \geq 1$$

S_n est la somme de n premiers termes d'une suite

géométrique de raison $q = \frac{1}{\ln 3}$ et de premier terme

$$U_1 = \frac{1 - (\ln 3)^{-1}}{\ln(\ln 3)}$$

$$\text{D'où } S_n = U_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1 - (\ln 3)^{-1}}{\ln(\ln 3)} \times \frac{1 - (\ln 3)^{-n}}{1 - (\ln 3)^{-1}} \text{ donc}$$

$$S_n = \frac{1 - (\ln 3)^{-1}}{\ln(\ln 3)}$$

b- Convergente de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(\ln 3)} \left[1 - (\ln 3)^{-1} \right] = \frac{1}{\ln(\ln 3)} \text{ car}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 3)^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\ln 3)^n} = 0$$

Donc la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{\ln(\ln 3)}$.

ACTIVITE 11 :

1°) Démontrons que (u_n) est une suite arithmétique que nous caractérisons

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln(1,032)^n + \ln P_0$$

$$u_n = n \ln(1,032) + \ln P_0$$

$$\text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1,032)^{n+1} + \ln P_0$$

$$= (n+1) \ln 1,032 + \ln P_0$$

et $\forall n \in \mathbb{N},$

$$u_{n+1} - u_n = (n+1) \ln 1,032 + \ln P_0 - (n \ln 1,032 + \ln P_0) \\ = n \ln 1,032 + \ln 1,032 + \ln P_0 - n \ln 1,032 - \ln P_0$$

$= \ln 1,032$ d'où (u_n) est une suite arithmétique de

raison $r = \ln 1,032$ et de premier terme $u_0 = \ln P_0$

2°) Exprimons P_n en fonction de n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = e^{u_n} \\ = e^{\ln P_0 + n \ln 1,032} \text{ donc}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = e^{\ln P_0 + n \ln 1,032}$$

Déduisons-en que (P_n) est une suite géométrique

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = e^{u_{n+1}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{P_{n+1}}{P_n} = e^{u_{n+1} - u_n}$$

$$= e^{\ln 1,032} = 1,032$$

$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = 1,032 \times P_n$ d'où (P_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,032$ et de premier terme

$$P_0 = e^{u_0} = P_0$$

3°) a- Détermine la période T au bout de laquelle la population double.

(P_n) étant une suite géométrique de raison $q = 1,032$ et de premier terme $P_0 = e^{u_0} = P_0$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = P_0 (1,032)^n$$

La population se double si $P_n = 2P_0$

$$P_n = 2P_0 \Rightarrow P_0 (1,032)^n = 2P_0$$

$$\Leftrightarrow (1,032)^n = 2$$

$$P_n = 2P_0 \Leftrightarrow n \ln(1,032) = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln(1,032)} \approx 22 \text{ donc}$$

$$T = 1960 + 22 = 1982$$

D'où la population béninoise doublera en 1982

b- La population béninoise en 2014 et en 1960

du 1^{er} Août 1960 au 1^{er} Août 1992 on a : $n = 32$

du 1^{er} Août 1960 au 1^{er} Août 2014 on a : $n = 54$

On a en 2014 : $P_{54} = P_{32} \times (1,032)^{54-32}$

$$= P_{32} \times (1,032)^{22}$$

$$= 4.845.359 \times (1,032)^{22} \approx 9.689.007,689 \text{ on en déduit}$$

donc que la population béninoise au 1^{er} Août 2014 serait 9 689 008 habitants.

On a en 1992 : $P_{32} = P_0 \times (1,032)^{32} \Leftrightarrow$

$$P_0 = \frac{P_{32}}{(1,032)^{32}} = \frac{4.845.359}{(1,032)^{32}} \approx 1.768.380,21$$

D'où la population béninoise au 1^{er} Août 1960 était de 1 768 381 habitants.

ACTIVITE 12 :

Partie A :

1°) Etudions les variations de la fonction g

$$g(x) = \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{1}{x} - 2 \ln x \right)$$

$$* D_g =]0; +\infty[$$

*limites aux bornes de D_g

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \ln x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

*Continuité et dérivabilité

g est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont.

*Dérivée de g

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{1}{\ln 2} \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \right)$$

*Signe de $g'(x)$

$$\forall x \in]0; +\infty[, \frac{1}{\ln 2} > 0, -\frac{1}{x^2} < 0 \text{ et } -\frac{2}{x} < 0 \text{ donc}$$

$$g'(x) < 0, \forall x \in]0; +\infty[$$

*Sens de variation de g

g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

*Tableau de variation de g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
g	$+\infty$	$-\infty$

2°) -Démontrons que l'équation $g(x) = 0$, admet une solution unique α .

g étant continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et

$g(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$, or $0 \in \mathbb{R}$ donc $\exists \alpha \in]0; +\infty[$ tel que

$g(\alpha) = 0$ d'où l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0; +\infty[$.

-Valeur approchée de α

$$g(1) = \frac{1}{\ln 2} > 0$$

$$g(2) = \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{1}{2} - 2 \ln 2 \right) < 0 \text{ donc } 1 < \alpha < 2$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) \approx -0,2081 < 0 \text{ on a donc } 1 < \alpha < 1,5 \text{ on peut prendre}$$

$$\alpha = \frac{1+1,5}{2} = 1,25$$

3°) Déduisons-en le signe de $g(x)$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$$

$\alpha \in]0; +\infty[$ donc g est continue et strictement décroissante sur chacun des intervalles $]0; \alpha[$ et $]\alpha; +\infty[$

$$\forall x \in]0; \alpha[, x < \alpha \Leftrightarrow g(x) > 0$$

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[, x > \alpha \Leftrightarrow g(x) < 0$$

En conclusion :

$$\begin{cases} g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; \alpha[\\ g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]\alpha; +\infty[\\ g(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Partie B :

4°) Calculons $f'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$

$$f(x) = \frac{2}{\ln 2}x + (1-2x)\frac{\ln x}{\ln 2}$$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{2}{\ln 2} - 2\frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{(1-2x)}{x \ln 2}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 2x \ln 2 + 1 - 2x}{x \ln 2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - 2x \ln 2}{x \ln 2}$$

$$f'(x) = \frac{x\left(\frac{1}{x} - 2 \ln x\right)}{x \ln 2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{1}{x} - 2 \ln x \right) \text{ donc } \forall x \in]0; +\infty[.$$

$$f'(x) = g(x)$$

5°) a- Etudions les variations de f

*Sens de variation de f

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ ainsi on a :

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; \alpha[\\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]\alpha; +\infty[\\ f'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Alors f est strictement croissante sur $]0; \alpha[$ et strictement décroissante sur $]\alpha; +\infty[$

-Limite aux bornes de $]0; +\infty[$

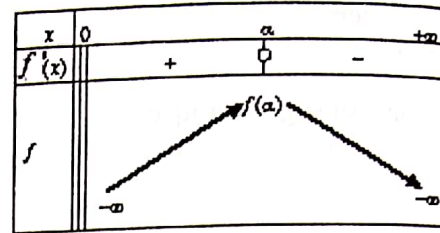
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\ln 2}x + (1-2x)\frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty \text{ car :}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\ln 2}x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-2x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{2}{\ln 2} + \left(\frac{1}{x} - 2 \right) \frac{\ln x}{\ln 2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

-Tableau de variation de f



b- Prouvons que $f(\alpha) = \frac{4\alpha^2 - 2\alpha + 1}{2\alpha \ln 2}$

On sait que $f'(\alpha) = 0$ donc $\frac{1 - 2\alpha \ln \alpha}{\alpha \ln 2} = 0$

$$\frac{1 - 2\alpha \ln \alpha}{\alpha \ln 2} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\alpha \ln \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln \alpha = \frac{1}{2\alpha}$$

Or $f(\alpha) = \frac{2}{\ln 2}\alpha + (1-2\alpha)\frac{\ln \alpha}{\ln 2}$ donc on a :

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha + \ln \alpha - 2\alpha \ln \alpha}{\ln 2}$$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha + \frac{1}{2\alpha} - \frac{2\alpha}{2\alpha}}{\ln 2}$$

$$f(\alpha) = \frac{4\alpha^2 - 2\alpha + 1}{2\alpha \ln 2}$$

6°) a- Déterminons l'équation réduite de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

$$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$f'(1) = \frac{1}{\ln 2}, f(1) = \frac{2}{\ln 2} \text{ d'où}$$

$$(T) : y = \frac{1}{\ln 2}x + \frac{1}{\ln 2}$$

b- Etudions les branches infinies de (C) puis construisons (C)

à la courbe (C)

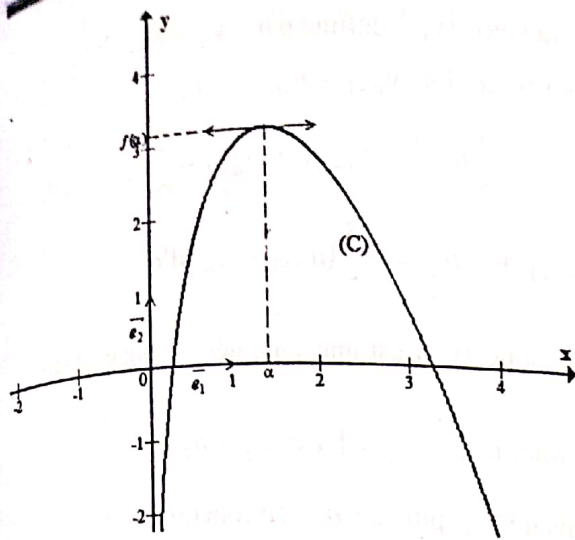
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote

ou de branche parabolique. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{\ln 2} + \left(\frac{1}{x} - 2 \right) \frac{\ln x}{\ln 2} \right] = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ alors la courbe admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

-Construisons (C)



Partie C :

7°) Justifions que la fonction : $x \mapsto (\ln x)^2$ est une primitive de $x \mapsto 2 \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$

La fonction $x \mapsto (\ln x)^2$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et a pour dérivée la fonction $x \mapsto 2 \frac{\ln x}{x}$ donc la fonction $x \mapsto (\ln x)^2$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 2 \frac{\ln x}{x}$

*Calculons I_0

$$I_0 = \int_{a_0}^{a_1} \left(2 \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$I_0 = [(\ln x)^2 - \ln x]_{a_0}^{a_1} \text{ or } a_0 = e^{\frac{1}{2}} \text{ et } a_1 = e$$

$$I_0 = \frac{1}{4}$$

8°) Démontrons que (I_n) est une suite arithmétique

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = [(\ln x)^2 - \ln x]_{e^{\frac{n+1}{2}}}^{e^{\frac{n+2}{2}}}$$

$$I_n = \left(\frac{n+2}{2} \right)^2 - \left(\frac{n+2}{2} \right) - \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + \frac{n+1}{2}$$

$$I_n = \frac{n^2 + 4n + 4 - 2n - 4 - n^2 - 2n - 1 + 2n + 2}{4}$$

$$I_n = \frac{2n+1}{4} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{2n+3}{4}$$

$$\text{On a : } I_{n+1} - I_n = \frac{2n+3-2n-1}{4} = \frac{1}{2}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n = \frac{1}{2}$ alors (I_n) est une suite

arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$ et de premier terme I_0

9°) Calculons la somme $S_n = I_0 + I_1 + \dots + I_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = I_0 + I_1 + \dots + I_n$$

$$S_n = (n+1) \left(\frac{I_0 + I_n}{2} \right)$$

$$S_n = \frac{(n+1) \left(\frac{1}{4} + \frac{2n+1}{4} \right)}{2}$$

$$S_n = \frac{(n+1)(n+1)}{4} \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$S_n = \frac{n^2 + 2n + 1}{4}$$

ACTIVITE 13 :

1°) Résolvons l'équation différentielle (E')

Les solutions de (E') sont les fonctions u définies sur $\mathbb{R}$

par : $u(x) = ke^{-\frac{x}{n}}$ avec $k \in \mathbb{R}$

2°) Déterminons le réel a pour que la fonction

$h : x \mapsto axe^{-\frac{x}{n}}$ soit solution de (E)

h solution de (E)

$$\Leftrightarrow h' + \frac{1}{n}h = e^{-\frac{x}{n}}$$

$$\Leftrightarrow ae^{-\frac{x}{n}} - \frac{a}{n}xe^{-\frac{x}{n}} + \frac{a}{n}xe^{-\frac{x}{n}} = e^{-\frac{x}{n}}$$

$$\Leftrightarrow ae^{-\frac{x}{n}} = e^{-\frac{x}{n}} \text{ d'où } \underline{a=1}$$

3°) Prouvons qu'une fonction u dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $(u-h)$ est une solution de (E') .

u dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de $(E) \Leftrightarrow u' + \frac{1}{n}u = e^{-\frac{x}{n}}$ or

$$h' + \frac{1}{n}h = e^{-\frac{x}{n}} \text{ donc}$$

$$u' + \frac{1}{n}u = h' + \frac{1}{n}h \Leftrightarrow (u-h)' + \frac{1}{n}(u-h) = 0$$

$\Leftrightarrow$ la fonction $u-h$ est solution de

(E') d'où le résultat

4°) a- Déduisons-en toutes les solutions de (E) .

Soit u une solution de (E)

On sait d'après la question 2 que $u-h$ est solution de (E') donc on a :

$$(u-h)(x) = ae^{-\frac{x}{n}} \text{ alors } u(x) = ae^{-\frac{x}{n}} + h(x) \text{ par suite}$$

$$u(x) = (k+x)e^{-\frac{x}{n}} \text{ il en résulte que les solutions de } (E) \text{ sont}$$

les fonctions u définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = (k+x)e^{-\frac{x}{n}}$ avec $k \in \mathbb{R}$

b- Déterminons la solution de (E) qui vérifie $u(0) = 0$
 $u(0) = 0 \Rightarrow k = 0$ d'où la solution cherchée est définie par :

$$u(x) = xe^{-\frac{x}{n}}$$

$$5^\circ) u_n = \int_0^1 xe^{-\frac{x}{n}} dx$$

a- Prouvons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = -(n^2 + n)e^{-\frac{1}{n}} + n^2$$

$$u_n = \int_0^1 xe^{-\frac{x}{n}} dx \text{ posons } f(x) = x \text{ et } g'(x) = e^{-\frac{x}{n}} \text{ on a}$$

donc : $f'(x) = 1$ et $g(x) = -ne^{-\frac{x}{n}}$ on en déduit que :

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^1 xe^{-\frac{x}{n}} dx = \left[-nxe^{-\frac{x}{n}} \right]_0^1 - \int_0^1 -ne^{-\frac{x}{n}} dx \\ &= -ne^{-\frac{1}{n}} + n \left[-ne^{-\frac{x}{n}} \right]_0^1 \\ &= -ne^{-\frac{1}{n}} - n^2 e^{-\frac{1}{n}} + n^2 \text{ d'où} \end{aligned}$$

$$u(x) = -(n^2 + n)e^{-\frac{1}{n}} + n^2$$

b- Démontrons que $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \leq -\frac{x}{n} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{n}} \leq e^{-\frac{x}{n}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow xe^{-\frac{1}{n}} \leq xe^{-\frac{x}{n}} \leq x$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{n}} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \leq \int_0^1 xe^{-\frac{x}{n}} dx \leq \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{2} \text{ d'où le résultat}$$

c- Déduisons-en la convergence de la suite (u_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ d'où la suite } (u_n) \text{ est}$$

convergente et convergente vers $\frac{1}{2}$

ACTIVITE 14 :

I/ la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n \end{cases} \quad (1)$$

1°) Nature de la suite (v_n) définie par : $v_n = u_{n+1} - u_n$
 Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \left(\frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n \right) - u_{n+1} \text{ car } u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n \\ &= -\frac{3}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n = -\frac{3}{5}(u_{n+1} - u_n) \text{ d'où} \end{aligned}$$

$v_{n+1} = -\frac{3}{5}v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{5}$ et de premier terme $v_0 = 1$ car $v_0 = u_1 - u_0$.

2°) Expressions de v_n , puis de u_n , en fonction de n .

Comme (v_n) est une suite géométrique, de raison $-\frac{3}{5}$ et de 1^{er} terme $v_0 = 1$, alors le terme général est égal à

$$v_n = \left(-\frac{3}{5} \right)^n$$

Calcul de u_n en fonction de n .

Comme $v_n = u_{n+1} - u_n$, alors on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} v_i &= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_n - u_{n-1}) \\ &= -u_0 + u_n \text{ d'où } u_n = u_0 + \sum_{i=0}^{n-1} v_i \text{ or} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} v_i = v_0 \times \frac{1 - \left(-\frac{3}{5} \right)^n}{1 - \left(-\frac{3}{5} \right)} = \frac{5}{8} \left[1 - \left(-\frac{3}{5} \right)^n \right] \text{ car } (v_n) \text{ est une}$$

suite géométrique.

$$\text{Ainsi, } u_n = u_0 + \sum_{i=0}^{n-1} v_i = 1 + \frac{5}{8} \left[1 - \left(-\frac{3}{5} \right)^n \right] \text{ donc, pour tout}$$

$$\text{entier naturel } n, u_n = \frac{13}{8} - \frac{5}{8} \left(-\frac{3}{5} \right)^n.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{5} \right)^n = 0$ car $|q| = \frac{3}{5} < 1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{13}{8}.$$

II/ (w_n) définie par : $w_0 > 0$, $w_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+2} = \sqrt[5]{(w_{n+1})^2 (w_n)^3}.$$

1°) Démontrons que la suite (t_n) vérifie la relation (1)

$$\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, t_{n+2} = \ln(w_{n+2}) \text{ or } w_{n+2} = (w_{n+1})^{\frac{2}{5}} (w_n)^{\frac{3}{5}}$$

$$\text{d'où } t_{n+2} = \ln(w_{n+1})^{\frac{2}{5}} + \ln(w_n)^{\frac{3}{5}} \text{ soit}$$

$t_{n+2} = \frac{2}{5} \ln(w_{n+1}) + \frac{3}{5} \ln(w_n)$ c'est-à-dire :

$t_{n+2} = \frac{2}{5} t_{n+1} + \frac{3}{5} t_n$ Ainsi, (t_n) vérifie bien la relation (1)

du paragraphe 1, donc (t_n) est de même nature que (u_n) .

2°) Détermine des limites de (t_n) et (w_n) en $+\infty$

D'après le paragraphe 1, 2°, $t_n = t_0 + \sum_{i=0}^{n-1} v_i$ or

$$\sum_{i=0}^{n-1} v_i = v_0 \times \frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^n}{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)} = \frac{5}{8} \left(\ln \frac{w_1}{w_0} \right) \left[1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^n \right] \text{ car}$$

(v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{5}$ et de premier terme v_0 :

$$v_0 = t_1 - t_0 = \ln w_1 - \ln w_0 = \ln \frac{w_1}{w_0}. \text{ Donc pour tout}$$

$$n \in \mathbb{N}, t_n = \ln w_0 + \frac{5}{8} \ln \frac{w_1}{w_0} \left[1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^n \right] \text{ or}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^n = 0.$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \ln w_0 + \frac{5}{8} \ln \frac{w_1}{w_0} \text{ donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \frac{5}{8} \ln w_1 + \frac{3}{8} \ln w_0.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $t_n = \ln w_n$ d'où $w_n = e^{t_n}$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = e^{\frac{5}{8} \ln \frac{w_1}{w_0} + \frac{3}{8} \ln w_0} \text{ soit}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = w_1^{\frac{5}{8}} \times w_0^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{w_1^5 w_0^3}.$$

ACTIVITE 15:

1°) a- Calculons z_1, z_2, z_3 et z_4 et vérifions que z_4 est un nombre réel.

$$\text{On a : } \begin{cases} z_0 = 2 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc :

$$z_1 = \frac{1+i}{2} z_0 = \frac{1+i}{2} (2) = 1+i$$

$$z_2 = \frac{1+i}{2} z_1 = \frac{1+i}{2} (1+i) = i.$$

$$z_3 = \frac{1+i}{2} z_2 = \frac{1+i}{2} (i) = \frac{-1+i}{2}$$

$$z_4 = \frac{1+i}{2} z_3 = \frac{1+i}{2} \left(\frac{-1+i}{2} \right) = \frac{1}{4} (1+i)(-1+i)$$

Vérifions que $z_4 \in \mathbb{R}$.

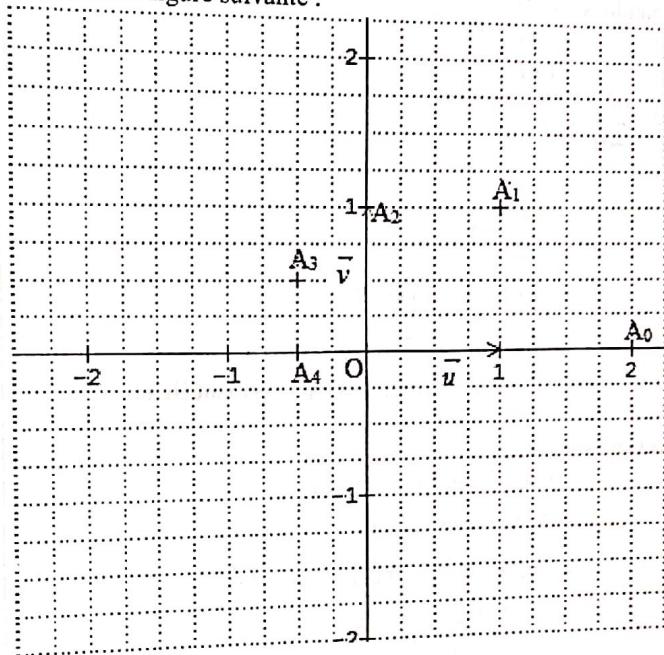
$$\text{On a : } z_4 = \frac{1}{4} (1+i)(-1+i)$$

$$z_4 = \frac{1}{4} (i^2 - 1^2) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \in \mathbb{R} \text{ d'où } z_4 \in \mathbb{R}.$$

b- Plaçons les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

On a : $A_0(2), A_1(1+i), A_2(i), A_3\left(\frac{-1+i}{2}\right)$ et $A_4\left(-\frac{1}{2}\right)$ donc

on obtient la figure suivante :



2°) a- Justifions que la suite (u_n) est une suite géométrique.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = |z_n|$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = |z_{n+1}|$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left| \frac{1+i}{2} z_n \right|}{|z_n|}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left| \frac{1+i}{2} \right|}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{constant donc } (u_n) \text{ est une suite}$$

géométrique de premier terme $u_0 = |z_0| = 2$ et de raison

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b- Donnons l'expression de son terme général u_n en fonction de n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n \text{ soit } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n.$$

3°) Déterminons le rang n_0 à partir duquel tous les points A_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 0,1.

Il suffit que $\forall n \in \mathbb{N}$, on ait $|z_{n_0}| = 0,1$ soit $u_{n_0} = 0,1$.

$$u_{n_0} = 0,1 \Leftrightarrow 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n_0} = 0,1$$

$$\Leftrightarrow n_0 = \frac{\ln\left(\frac{0,1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} ; n_0 \approx 9$$

Donc à partir du 9^e rang, les points A_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 0,1.

4°) Déterminons la nature exacte du triangle $OA_n A_{n+1}$.

Calculons : $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - 0}$

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - 0} = \frac{\frac{1+i}{2} z_n - z_n}{\frac{1+i}{2} z_n} = \frac{\frac{1+i-2}{2} z_n}{\frac{1+i}{2} z_n}$$

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - 0} = \frac{1+i-2}{2} \times \frac{2}{1+i}$$

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - 0} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{2} = i$$

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - 0} = i \text{ donc le triangle } OA_n A_{n+1} \text{ est isocèle et}$$

rectangle en A_{n+1} .

5°) a- Exprimons l_n en fonction de n .

$$l_n = A_0 A_1 + A_0 A_1 + \dots + A_{n-1} A_n$$

$$= (|z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + \dots + |z_n - z_{n-1}|) u.l$$

$$= \left(\left| \frac{1+i}{2} z_0 - z_0 \right| + \left| \frac{1+i}{2} z_1 - z_1 \right| + \dots + \left| \frac{1+i}{2} z_{n-1} - z_{n-1} \right| \right) \times 5cm$$

$$= \left(\left| \frac{-1+i}{2} \right| \times |z_0| + \left| \frac{-1+i}{2} \right| \times |z_1| + \dots + \left| \frac{-1+i}{2} \right| \times |z_{n-1}| \right) \times 5cm$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} [u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}] \times 5cm$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[2 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \right] \times 5cm \text{ on trouve}$$

$$l_n = (10 + 20\sqrt{2}) \left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \right], \forall n \in \mathbb{N}$$

b- Etudions la convergence de la suite (l_n) .

On a : $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n = 0$ par suite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = (10 + 20\sqrt{2}) cm.$$

ACTIVITE 16:

I/ Détermination de la solution de (E).

(E) l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$.

L'équation caractéristique de (E) : $r^2 + 2r + 1 = 0$ soit

$$(r+1)^2 = 0 \text{ donc } r = -1$$

Les solutions générales de (E) sont de la forme :

$$y = (Ax + B)e^{-x} ; \text{ Avec } (A; B) \in \mathbb{R}^2.$$

Si g est solution de (E) telle que : $g(0) = 1$ et $g(1) = \frac{2}{e}$;

alors on a : $g(x) = (Ax + B)e^{-x}$ avec $g(0) = B = 1$ et

$$g(1) = \frac{A+B}{e} = \frac{2}{e} \text{ d'où } B = 1 \text{ et } A = 1 \text{ donc la solution } g \text{ de}$$

(E) vérifiant $g(0) = 1$ et $g(1) = \frac{2}{e}$ est définie par :

$$g(x) = (x+1)e^{-x}$$

II/ 1°) h définie par : $h(x) = (1+x)e^{-x}$ et $\forall x \in]-1; +\infty[$,

$$\frac{h(x)}{\sqrt{1+x}} = \frac{(1+x)e^{-x}}{\sqrt{1+x}} = e^{-x} \sqrt{1+x}$$

Donc la fonction f est définie sur $[-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} \sqrt{1+x}, & \text{si } x \in]-1; +\infty[\\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

a- Continuité de f

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est continue sur $]-1; +\infty[$, d'où f est continue sur $]-1; +\infty[$. De plus

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [e^{-x} \sqrt{1+x}] = 0 = f(-1), \text{ donc } f \text{ est}$$

continue à droite en 0. Conclusion f est continue sur $[-1; +\infty[$.

b- Dérivabilité de f en -1 .

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{e^{-x}}{\sqrt{1+x}} \right] = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1+x} = 0^+ \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable à droite en } -1$$

c- Limite de f en $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(1+x)e^{-x}}{\sqrt{1+x}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{-x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \right] \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \times \frac{\sqrt{x}}{e^x} \right] = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = 0$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

d- Sens de variation de f .

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est dérivable sur $] -1; +\infty[$ d'où f est dérivable sur $] -1; +\infty[$.

$$\forall x \in] -1; +\infty[, f'(x) = \frac{-1-2x}{2\sqrt{1+x}} e^{-x}$$

$f'(x)$ a le même signe que : $-1-2x$.

$$\forall x \in] -1; -\frac{1}{2}[, f'(x) > 0 ; \forall x \in] -\frac{1}{2}; +\infty[,$$

$$f'(x) < 0 \text{ et } f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

Alors f est strictement croissante sur $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$ et

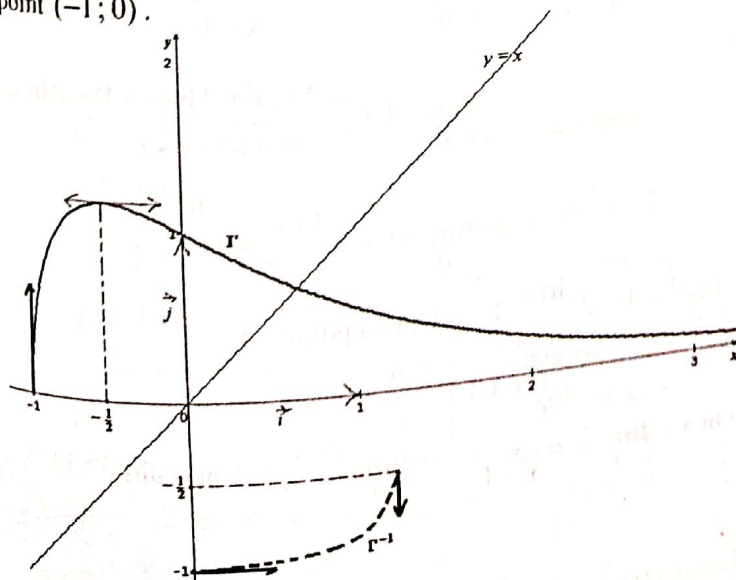
strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$

Tableau de variation de f .

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f	0	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	0

2°) Représentation graphique de f

La courbe Γ de f admet une asymptote d'équation $y=0$ en $+\infty$ et une demi-tangente verticale de même sens que $\vec{j}$ au point $(-1; 0)$.



3°) f_1 la restriction de f à l'intervalle $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$

a- Démontre que f_1 est une bijection de $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$ sur un intervalle J que tu préciseras.

f_1 étant la restriction de f à l'intervalle $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$ donc f_1 est continue et strictement croissante sur $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$ alors f_1

est une bijection $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$ sur

$$J = f_1\left(\left[-1; -\frac{1}{2}\right]\right) = \left[0; \sqrt{\frac{e}{2}}\right]$$

Calcule $f_1^{-1}\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right)$.

$$\text{Comme } f_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{e}{2}} \text{ alors } f_1^{-1}\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) = -\frac{1}{2}$$

b- Etudions la continuité et la dérivabilité de f_1^{-1} au point $x=0$.

Etudions d'abord la dérivabilité de f_1^{-1} en 0.

$$f(-1) = 0 \text{ donc } f_1^{-1}(0) = -1 \text{ et posons que : } f_1^{-1}(x) = y$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1^{-1}(x) - f_1^{-1}(0)}{x} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{y+1}{f(y)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{f(y)}$$

$$\text{Or } \lim_{y \rightarrow -1} \frac{f(y)}{y+1} = +\infty \text{ d'après II/1°) b-d'où } \lim_{y \rightarrow -1} \frac{1}{f(y)} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1^{-1}(x) - f_1^{-1}(0)}{x} = 0 ; f_1^{-1} \text{ est alors dérivable en } 0.$$

Comme toute fonction dérivable en un point est continue en ce point, alors f_1^{-1} est continue au point 0.

c- Représentation graphique de f_1^{-1} .

Voir le repère précédent, pour la courbe de f_1^{-1} .

$$4°) \text{ a- Prouvons que : } 0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} e$$

$$\text{Pour tout } x \text{ de } \left[-1; -\frac{1}{2}\right], \text{ on a : } \frac{1}{2} \leq -x \leq 1 \Rightarrow$$

$$\sqrt{e} \leq e^{-x} \leq e \quad (1).$$

De plus $x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq 1+x \leq \frac{1}{2}$ d'où

$$0 \leq \sqrt{1+x} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

Or $f(x) = e^{-x} \sqrt{1+x}$. Alors en multipliant, membre à membre, les inégalités (1) et (2) on obtient : $0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} e$

Remarque : On pourra aussi utiliser les variations de f .

b- Dédus-en que : $0 \leq \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \leq \frac{e\sqrt{2}}{4}$

$\forall x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$, on a : $0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} e$, d'où

$$0 \leq \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \leq \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} e dx \text{ soit } 0 \leq \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \leq \frac{e\sqrt{2}}{4}$$

c- Calcul d'aire.

L'aire S en cm^2 du domaine du plan limité par les droites

$x=0$; $x=\sqrt{\frac{e}{2}}$ et la courbe Γ^{-1} est :

$$S = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \times 16 \text{ cm}^2 \text{ par symétrie. Or,}$$

$$0 \leq \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \leq \frac{e\sqrt{2}}{4} \text{ d'où}$$

$$0 \leq \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \times 16 \leq \frac{e\sqrt{2}}{4} \times 16 \text{ soit } 0 \leq S \leq 4e\sqrt{2} \text{ donc}$$

$$0 \leq S \leq 15,39 \text{ cm}^2.$$

III/ (u_n) la suite définie par : $u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.

1°) Démontrons que : $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$

Comme f est décroissante sur $[0; +\infty[$; alors pour tout x tel que $n \leq x \leq n+1$ on a : $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx$$

$$\text{Donc } f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$

2°) Nature de la suite (u_n)

$$\begin{cases} f(n+1) \leq u_n \leq f(n) \\ f(n+2) \leq u_{n+1} \leq f(n+1) \end{cases} \text{ d'où}$$

$$f(n+2) - f(n+1) \leq u_{n+1} - u_n \leq 0 \text{ donc } u_{n+1} - u_n \leq 0 ;$$

d'où la suite (u_n) est décroissante.

De plus $\forall x \in [n; n+1]$, $f(x) \geq 0$, d'où $u_n \geq 0$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0). Donc la suite (u_n) est convergente.

ACTIVITE 17 :

Partie A :

$$f(x) = |x-1| - 2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1°) Prouvons que l'ensemble de définition de f est :

$$D_f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x+1 \neq 0 \text{ et } \frac{x}{x+1} > 0 \right\}$$

$$\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ \frac{x}{x+1} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x(x+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[\\ x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[\end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$$

$$\text{D'où } D_f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$$

2°) Calculons les limites de f aux bornes de D_f .

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln = 0$ alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x-1| = +\infty \text{ on trouve aussi :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

On a : $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln = +\infty$ or $\lim_{x \rightarrow -1^-} |x-1| = 2$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln = -\infty$ or $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x-1| = 1$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

3°) Continuité de f en 1

On a : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \ln 2 = f(1)$ donc f est continue en 1.

Dérivabilité de f en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x+1 - 2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - 2 \ln 2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} -1 + \frac{-2 \ln x + 2 \ln(x+1) - 2 \ln 2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} -1 - 2 \frac{\ln x}{x-1} + 2 \frac{\ln(x+1)}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-1 - 2 \frac{\ln x}{x-1} \right) = -3 \text{ et en posant } X = \frac{x+1}{2}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 \frac{\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)}{x-1} = \lim_{X \rightarrow 1} \frac{\ln X}{X-1} = 1 \text{ par suite :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -2 ; f \text{ est donc dérivable à gauche en } 1$$

$$\text{et } f'_g(1) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 + \frac{-2 \ln x + 2 \ln(x+1) - 2 \ln 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 - 2 \frac{\ln x}{x - 1} + 2 \frac{\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)}{x - 1} = 0$$

Donc f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = 0$

Puisque : $f'_g(1) \neq f'_d(1)$ alors f n'est pas dérivable en 1.

Conclusion graphique :

(C) admet en son point d'abscisse 1 deux demi tangente l'une à gauche (T_g) et l'autre à droite (T_d) définies par :

$$(T_g) : \begin{cases} x \leq 0 \\ y = -2x + 2 + 2 \ln 2 \end{cases} \quad \text{et } (T_d) : \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 2 \ln 2 \end{cases}$$

4°) Etudions les variations de f .

Sur $D_f \setminus \{1\}$, la fonction f est dérivable et on a pour tout

$$x \in]-\infty; -1[\cup]0; 1[:$$

$$f'(x) = -1 - \frac{2}{x(x+1)} ;$$

par ailleurs sur $]1; +\infty[$, on a : $f'(x) = 1 - \frac{2}{x(x+1)}$.

Il est aisé de constater que sur $] -\infty; -1[\cup]0; 1[$, on a :

$$f'(x) < 0 \text{ et que sur }]1; +\infty[, \text{ on a : } f'(x) > 0 \text{ puisque dans}$$

$$\text{ce dernier cas : } f'(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x(x+1)} = \frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)}$$

f est alors strictement décroissante sur $] -\infty; -1[$ et sur $]0; 1[$ puis strictement croissante sur $]1; +\infty[$

Tableau de variation de f .

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$		$+$
f	$+\infty$		$+\infty$	$2 \ln 2$	$+\infty$

5°) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 et que $x_0 \in]-2; -1[$

- Avec un minimum strictement positif sur $]0; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]0; +\infty[$.

- f est continue et strictement décroissante sur $] -\infty; -1[$ et $f(-\infty; -1) = \mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$ ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet bien une unique solution x_0 et comme $f(-2) = 3 - 2 \ln 2 > 0$ on doit en avoir $-2 < x_0 < -1$.

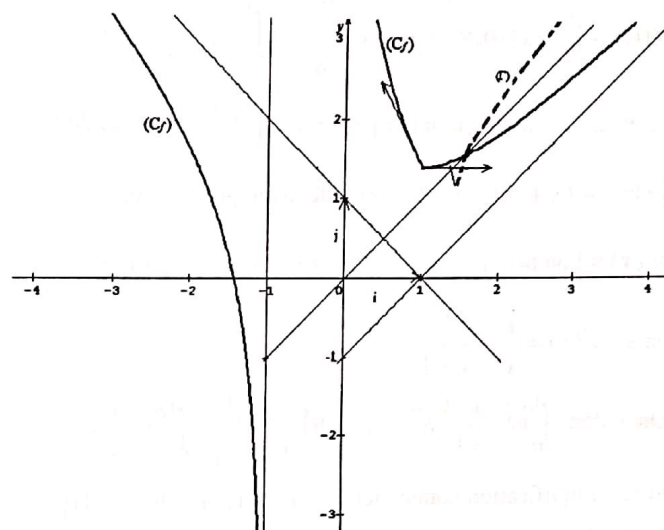
6°) 6°) Démontrons que les droites d'équations $y = x - 1$ et $y = 1 - x$ sont asymptotes à la courbe (C_f) .

On a obtenu précédemment que : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$ ce qui veut dire que limite de $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - |x - 1|] = 0$, résultat qui

traduit que les droites d'équation : $y = 1 - x$ et $y = x - 1$ sont respectivement asymptote à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

7°) Représentation graphique

Les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$ sont asymptotes à (C_f) des calculs des limites.



8°)

g est la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$ or f continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et

$$f([1; +\infty[) = [2 \ln 2; +\infty[\text{ d'où } g \text{ est une bijection de } [1; +\infty[\text{ sur } K = [2 \ln 2; +\infty[$$

9°) Construisons (Γ)

Voir courbe en pointillé ; elle est symétrique à la droite d'équation $y = x$.

10°) Prouvons que (C_f) et (Γ) se coupent en un point A de la droite d'équation $y = x$. Calcule les coordonnées de A.

Soit A un point s'il existe d'abscisse a de (C_f) et de la droite d'équation $y = x$. On aura : $a = f(a)$

$a = f(a) \Leftrightarrow f^{-1}(a) = a$ ce qui signifie que A appartient aussi à (Γ) . Il reste à prouver l'existence de A et à déterminer ses coordonnées.

$$\text{Or } f(x) = x \Leftrightarrow x - 1 - 2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = x \text{ sur l'intervalle}$$

$$[1; +\infty[\text{ soit } \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ d'où}$$

$x = \frac{1}{\sqrt{e}-1}$. Le A existe bel et bien et a pour coordonnées

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}-1}; \frac{1}{\sqrt{e}-1} \right)$$

Partie B :

Soit α un réel appartenant à $]0; 1]$

11°) Calculons l'aire $A(\alpha)$ de l'ensemble des points $M(x; y)$

$$\text{tels que : } \begin{cases} \alpha \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

En unité d'aire, on a :

$$A(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx = \left[x - \frac{1}{2}x^2 \right]_\alpha^1 - 2 \int_\alpha^1 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx.$$

Le calcul par intégration par parties de $\int_\alpha^1 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$ donne

$$[x \ln x - (x+1) \ln(x+1)]_\alpha^1 \text{ en effet avec par exemple}$$

$$u'(x) = 1 \text{ on peut prendre } u(x) = x+1 \text{ et } v(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$\text{on a : } v'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{On a donc } \int_\alpha^1 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx = \left[(x+1) \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \right]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 \left(1 + \frac{1}{x} - 1\right) dx$$

après simplification donne bien $[x \ln x - (x+1) \ln(x+1)]_\alpha^1$ et on trouve :

$$A(\alpha) = \left(\frac{1}{2} + 4 \ln 2 - \alpha + \frac{1}{2} \alpha^2 + 2\alpha \ln \alpha - 2(\alpha+1) \ln(\alpha+1) \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

12°) Calculons la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 à droite.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} A(\alpha) = (2 + 8 \ln 2) \text{ cm}^2.$$

Partie C :

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = n - 1 - 2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = f(n)$$

13°) Prouvons que (u_n) est une suite monotone.

La suite étant la restriction à $\mathbb{N}^*$ d'une fonction strictement croissante sur $]1; +\infty[$ est aussi strictement croissante.

14°) Limite de la suite (u_n)

Comme la fonction f a pour limite en $+\infty$, $+\infty$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$15) \text{ Soit } S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

$$\text{a- Démontrons que : } S_n = \frac{n(n-1)}{2} + 2 \ln(n+1)$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left[k - 1 - 2 \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n k - n - 2 \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - n - 2 \ln \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - 2 \ln \frac{1}{n+1} = \frac{n(n-1)}{2} + 2 \ln(n+1) \end{aligned}$$

b- Quelle est la limite de S_n .

c- On trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

ACTIVITE 18:

A/

1°) a-Démontrons que pour tout réel x on a : $\sqrt{x^2+3} > |x|$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } 0 \leq x^2 < x^2 + 3$$

$$x^2 < x^2 + 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + 3}$$

$$\Leftrightarrow |x| < \sqrt{x^2 + 3} \text{ d'où}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } \sqrt{x^2 + 3} > |x|$$

b- Dédudisons-en le signe de $\sqrt{x^2+3}+x$ et celui de $\sqrt{x^2+3}-x$ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+3}-|x| > 0$$

$$\text{Si } x \leq 0, |x| = -x \text{ et si } x \geq 0, |x| = x$$

$$\text{Ainsi } \sqrt{x^2+3}-|x| > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+3}+x > 0 \text{ si } x \leq 0$$

$$\text{et } \sqrt{x^2+3}-|x| > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+3}-x > 0 \text{ si } x \geq 0$$

$$\text{d'où } \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+3}+x > 0 \text{ et } \sqrt{x^2+3}-x > 0$$

$$\text{B/ } f(x) = \sqrt{x^2+3}-|x-1|$$

2°) a- Prouvons que f est continue en 1.

Ecrivons d'abord f sans le symbole de valeur absolue.

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ et } f(1) = \sqrt{1^2+3}-|1-1|=2$$

$$\text{On a : } \begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+3}+x-1, \text{ si } x \in]-\infty; 1[\\ f(x) = \sqrt{x^2+3}-x+1, \text{ si } x \in]1; +\infty[\\ f(1) = 2 \end{cases}$$

$$f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x^2+3}+x-1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2+3}-x+1 = 2$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ alors f est continue en 1.

b- Etudions la dérivabilité de f en 1 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + x - 3}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[\sqrt{x^2 + 3} + (x - 3)][\sqrt{x^2 + 3} - (x - 3)]}{(x - 1)[\sqrt{x^2 + 3} - (x - 3)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(x - 1)}{(x - 1)[\sqrt{x^2 + 3} - (x - 3)]} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6}{\sqrt{x^2 + 3} - (x - 3)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$\frac{3}{2} \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - x - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3 - x^2 - 2x - 1}{(x - 1)[\sqrt{x^2 + 3} + x + 1]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x - 1)}{(x - 1)[\sqrt{x^2 + 3} + x + 1]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{\sqrt{x^2 + 3} + x + 1} = -\frac{1}{2} \text{ et } -\frac{1}{2} \in \mathbb{R} \text{ donc} \end{aligned}$$

est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = -\frac{1}{2}$

On a : $f'_g(1) \neq f'_d(1)$ d'où f n'est pas dérivable en 1.

Interprétation graphique :

($\mathcal{C}$) admet en son point d'abscisse 1 deux demi-tangente l'une à gauche (T_g) et l'autre à droite (T_d) définies par :

$$(T_g) : \begin{cases} x \leq 0 \\ y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases} \text{ et } (T_d) : \begin{cases} x \geq 0 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases}$$

c- Etudions le sens de variation de f

la fonction $x \mapsto x^2 + 3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme donc en particulier sur $]-\infty; 1[$ et $\forall x \in]-\infty; 1[$,

$x^2 + 3 > 0$ donc la fonction : $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3} + x - 1$ est dérivable sur $]-\infty; 1[$ comme somme de fonctions dérivables et

$$\forall x \in]-\infty; 1[, f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} + 1 = \frac{\sqrt{x^2 + 3} + x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3} - x + 1$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et $\forall x \in]1; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} - 1 = \frac{-(\sqrt{x^2 + 3} - x)}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

Sur $]-\infty; 1[$ le signe de f' celui de $\sqrt{x^2 + 3} + x$ et sur $]1; +\infty[$ le signe de f' est celui de $-(\sqrt{x^2 + 3} - x)$

D'après A/ $\sqrt{x^2 + 3} + x > 0$ et $\sqrt{x^2 + 3} - x > 0$ alors on déduit :
 $\forall x \in]-\infty; 1[; f'(x) > 0$
 $\forall x \in]1; +\infty[; f'(x) < 0$

Alors f est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$ et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

d- Complétons l'étude des variations de f

limite aux bornes de $\mathbb{R}$.

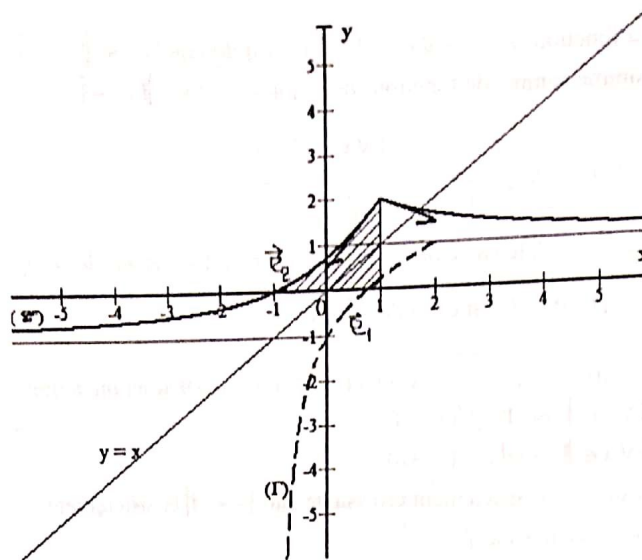
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3} + x - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 + 3} - (x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - 1 + \frac{1}{x}} = -1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3} - x + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 + 3} + x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} + 1 - \frac{1}{x}} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \end{aligned}$$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-1	2	1

e- Etudions les branches infinie à ($\mathcal{C}$)
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ donc les droites d'équations :
 $y = -1$ et $y = 1$ sont les asymptote à ($\mathcal{C}$) aux voisinages respectifs de $-\infty$ et $+\infty$.
 Construction de ($\mathcal{C}$)



3°) $g:]-\infty; 1] \rightarrow]-1; 2]$

$x \mapsto g(x) = f(x)$

a- Démontrons que g admet une application réciproque g^{-1}

g est la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 1]$ or f est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 1]$ et

$f(]-\infty; 1]) = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(1) \right] =]-1; 2]$ donc g est une bijection

par suite g admet une application réciproque g^{-1}

b- Définissons explicitement g^{-1}

$g^{-1}:]-1; 2] \rightarrow]-\infty; 1]$

Posons $g(x) = y$ avec $x \in]-\infty; 1]$ et $y \in]-1; 2]$

$g(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} + x - 1 = y$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} = (y+1) - x$

$\Leftrightarrow x^2 + 3 = (y+1)^2 - 2x(y+1) + x^2$

$\Leftrightarrow 2x(y+1) = (y+1)^2 - 3$

$\Leftrightarrow x = \frac{(y+1)^2 - 3}{2(y+1)}$

D'où $g^{-1}:]-1; 2] \rightarrow]-\infty; 1]$

$x \mapsto \frac{(x+1)^2 - 3}{2(x+1)}$

c- Construisons (Γ)

Voir courbe en pointillé (elle est symétrique à $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite d'équation $y = x$)

d- Déterminons la fonction G primitive de g^{-1} et telle que $G(0) = 0$

Par division euclidienne, $\forall x \in]-1; 2]$,

$g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{x+1}$

g^{-1} est continue sur $]-1; 2]$ alors G existe

$G(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\ln|x+1| + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

$G(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

D'où $\forall x \in]-1; 2]; G(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\ln|x+1|$

e- Calculons A

L'aire du domaine plan recherché est égale à l'aire du domaine plan délimité par la courbe (Γ) l'axe des ordonnées et les droites d'équations $y = -1$ et $y = 1$

On a : $A = \int_0^2 (1 - g^{-1}(x)) dx$ u.a

$= [x - G(x)]_0^2$ u.a

$= 2 - G(2) - (0 - G(0))$

$= 2 - \left(1 + 1 - \frac{3}{2}\ln 3\right) = \frac{3}{2}\ln 3$ u.a

D'où $A = \frac{3}{2}\ln 3$ u.a

$C/I = [1; 2]; \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

4°) a- Démontrons que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans I

$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

$\Leftrightarrow k(x) = 0$ avec $k(x) = f(x) - x$

k est dérivable sur $[1; 2]$ comme somme de fonctions dérivables

et $\forall x \in [1; 2], k'(x) = f'(x) - 1$

sur $[1; 2], f'(x) < 0$ et $-1 < 0$ donc $k'(x) < 0, \forall x \in [1; 2]$

donc k est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[1; 2]$ et $k([1; 2]) = [k(2); k(1)]$

$k(2) \approx -0,3542$ et $k(1) = 1$; $0 \in [k(2); k(1)]$ donc l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans I .

b- Démontrons que pour tout x de I on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$\forall x \in [1; 2], f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} - 1$

f' est dérivable sur $[1; 2]$ et $f''(x) = \frac{3}{(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}}$

$\forall x \in [1; 2]; f''(x) > 0$ donc f' est strictement croissante sur $[1; 2]$

$x \in I \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$

$\Rightarrow f'(1) \leq f'(x) \leq f'(2)$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{2}{\sqrt{7}} - 1$

$\Rightarrow -f'(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

~ Dédudons-en que pour tout x de I on a :

$$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

f est dérivable sur $[1; 2]$ et $\forall x \in I$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
 $x \in I$ et $\alpha \in I$ alors d'après le théorème des inégalités des accroissements finis, on a : $|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$ et comme

$$f(\alpha) = \alpha \text{ d'où pour tout } x \text{ de } I \text{ on a : } |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|.$$

5°) a- Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$

$$U_0 = 1 \text{ et } 1 \in [1; 2]$$

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \in [1; 2]$ et démontrons que

$$U_{n+1} \in [1; 2]$$

$$U_{n+1} = f(U_n) \text{ et } U_n \in [1; 2]$$

$$U_n \in [1; 2] \Leftrightarrow 1 \leq u_n \leq 2 \Leftrightarrow f(2) \leq f(u_n) \leq f(1) \text{ car } f \text{ est décroissante sur } [1; 2]$$

$$f(2) \leq f(u_n) \leq f(1) \Leftrightarrow 1 < f(2) \leq u_{n+1} \leq 2 \Leftrightarrow u_{n+1} \in I$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$.

$$\text{b- Démontrons que : } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|.$$

En utilisant les résultats des questions 5°) a- et 4°) c- on a :

$$|f(U_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha| \text{ or } U_{n+1} = f(U_n) \text{ ce qui donne}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|.$$

$$\text{c- Etablissons que : } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$$

L'application du résultat précédent donne :

$$|U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_0 - \alpha|;$$

$$|U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_1 - \alpha|; \dots;$$

$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha|$ en multipliant membre à membre ces n inégalités, on obtient après simplifications :

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |U_0 - \alpha|$$

$$\text{On a : } 1 \leq \alpha \leq 2$$

$$1 \leq \alpha \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq -\alpha \leq -1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq U_0 - \alpha \leq 0 \Leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}.$$

d- Dédudons-en que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et précisons sa limite

$$\text{d'après la question précédente : } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ donc la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers α
 et on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$.

ACTIVITE 19 :

$$\begin{cases} f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{2x}, & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{1}{1+e^x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Partie A :

$$g(x) = x + (1-x) \ln(1-x), \text{ si } x \in]-\infty; 0[$$

1°) Etudions les variations de g

$$- D_g =]0; +\infty[$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[1 + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \ln(1-x) \right] = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \ln(1-x) = +\infty$$

- g est continue et dérivable sur $]-\infty; 0[$ comme composé, produit et somme de fonctions qui le sont.

$$- \forall x \in]-\infty; 0[, g'(x) = 1 - \ln(1-x) - \frac{1-x}{(1-x)} \text{ alors}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, \underline{g'(x) = -\ln(1-x)}$$

- signe de $g'(x)$

$$\text{Soit } x \in]-\infty; 0[$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln(1-x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-x) < 0$$

$$\Leftrightarrow 1-x < 1$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ donc } g'(x) < 0 \text{ si } x \in]0; +\infty[$$

- g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$

- Tableau de variation de g

x	$-\infty$	0
$g'(x)$		-
g	$+\infty$	0

2°) Dédudons-en que $g(x) > 0, \forall x < 0$

g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et

$$g(]-\infty; 0[) =]0; +\infty[\text{ d'où } g(x) \in]0; +\infty[\text{ donc}$$

$$g'(x) > 0, \forall x \in]-\infty; 0[$$

Partie B :

3°) Justifions que l'ensemble de définition de f est $D = \mathbb{R}$

$$D = D_1 \cup D_2 \text{ avec}$$

$$D_1 = \{x \in]-\infty; 0[\mid 1-x > 0 \text{ et } x \neq 0\}$$

$$\begin{cases} x \in]-\infty; 0[\\ 1-x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; 0[\\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow D_1 =]-\infty; 0[$$

$$D_2 = \{x \in [0; +\infty[\mid 1+e^x \neq 0\}$$

$$\forall x \in [0; +\infty[, 1+e^x \neq 0 \text{ donc}$$

$$D_2 = [0; +\infty[\text{ alors } D =]-\infty; 0[\cup [0; +\infty[\text{ d'où } D = \mathbb{R}$$

4°) Etudions la continuité de f en 0.

$$f(0) = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \times \frac{\ln(1-x)}{-x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Par hypothèse } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \text{ donc } \underline{f \text{ est continue en 0}}$$

5°) a- Donnons le développement limité d'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ au voisinage de 0

$$\text{Soit } u(x) = \ln(1-x)$$

$$u \text{ est trois fois dérivable sur }]-\infty; 1[$$

$$u(0) = 0$$

$$u'(x) = \frac{-1}{1-x} \Rightarrow u'(0) = -1$$

$$u''(x) = \frac{-1}{(1-x)^2} \Rightarrow u''(0) = -2$$

$$u'''(x) = \frac{-2}{(1-x)^3} \Rightarrow u'''(0) = -2$$

$$u(x) = u(0) + \frac{x}{1!} u'(0) + \frac{x^2}{2!} u''(0) + \frac{x^3}{3!} u'''(0) + x^3 \varepsilon(x)$$

$$\text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\text{Donc : } \ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + x^3 \varepsilon(x) \text{ avec}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

b- Etudions la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - x^3 \varepsilon(x)\right) - \frac{1}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4} + \frac{x}{6} - \frac{x \varepsilon(x)}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{4} \text{ donc } f \text{ est dérivable à gauche en 0}$$

$$\text{et } f'_g(0) = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{2}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{2x(1 + e^x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(1 + e^x)} \times \frac{e^x - 1}{x} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(1 + e^x)} = -\frac{1}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{4} \text{ donc } f \text{ est dérivable à droite en 0}$$

$$\text{et } f'_d(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f'_g(0) \neq f'_d(0) \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable en 0}$$

c- Donnons les relations définissant les demi-tangentes

$$\text{On a : } (T_g) : \begin{cases} y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \\ x \leq 0 \end{cases} \text{ et } (T_d) : \begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$6^\circ) \text{ Démontrons que } \forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2(1-x)}$$

puis déduisons-en le signe de $f'(x)$

f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ comme composée et quotient de fonction qui le sont.

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = -\frac{\left[-\frac{2x}{1-x} - 2\ln(1-x)\right]}{4x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x + (1-x)\ln(1-x)}{2x^2(1-x)} \text{ d'où}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2(1-x)}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) > 0 \text{ car } g(x) > 0, x^2 > 0 \text{ et } 1-x > 0$$

b- Calculons $f'(x)$, $\forall x \in]0; +\infty[$ puis déduisons-en le signe de $f'(x)$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables.

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) < 0$$

c. Donnons le sens de variation de f

$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $] -\infty; 0[$

$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

7°) a- Calculons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{\ln(1-x)}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\ln(1-x)}{1-x} \right] \times \frac{x-1}{2x} = 0 \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{2x} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1+e^x = +\infty \text{ donc}$$

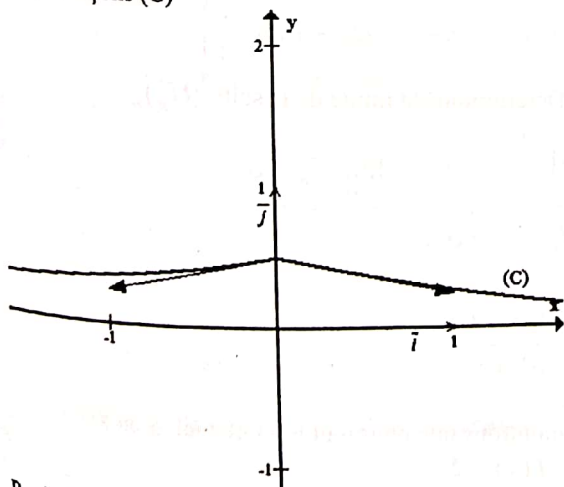
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

b- Etudions les branches infinies de (C)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation

$y=0$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$

c- Traçons (C)



Partie C :

8°) Soit $h: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) - x$$

a- Etudions le sens de variations de h

h est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivable.

$\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) = f'(x) - 1$ comme $f'(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$ alors $h'(x) < 0, \forall x \in]0; +\infty[$ donc h est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

b- Calculons $h(0)$ et la limite de h en $+\infty$

$$h(0) = f(0) - 0 = 0 \text{ donc } h(0) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$$

c- Déduisons-en que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$

h est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et

$$h([0; +\infty[) = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right] \text{ or } 0 \in \left] -\infty; \frac{1}{2} \right] \text{ d'où l'équation}$$

$h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$

Or $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = x$ On conclut que l'équation

$f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in]0; +\infty[$

Vérifions que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$

$$\left] \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right[\subset]0; +\infty[\text{ et } \begin{cases} h\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0,187 \\ h\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0,122 \end{cases}$$

Donc on a : $h\left(\frac{1}{4}\right) \cdot h\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ d'où $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$

9°) Posons $I = \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right]$

a- Démontrons que $\forall x \in I, f(x) \in I$

f est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ en particulier sur $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right]$

$\forall x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right]$ on a : $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,377 \text{ et } f\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0,437 \text{ donc}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$$

d'où $\forall x \in I, f(x) \in I$

b- Calculons $f''(x), \forall x \in [0; +\infty[$

On sait que $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$

f' est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $\forall x \in [0; +\infty[$

$$f''(x) = \frac{(e^x - 1)e^x}{(1+e^x)^3}$$

Déduisons-en le sens de variation de f' sur I

f'' a le signe de $e^x - 1$

$$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ donc } f''(x) > 0,$$

$\forall x \in [0; +\infty[$ et $f''(0) = 0$ alors f' est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ en particulier sur I .

c- Déduisons-en que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

f' est continue et strictement croissante sur I

$$\forall x \in I, \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) \leq f'(x) \leq f'\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow |f'(x)| \leq \left|f'\left(\frac{1}{4}\right)\right| \leq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{4} \text{ d'où } \forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$$

d- Déduisons-en que $\forall x \in I, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$

f est dérivable sur I et $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{4}, \alpha \in I$ alors

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha| \text{ or } f(\alpha) = \alpha \text{ d'où } \forall x \in I,$$

$$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$$

$$10^\circ) \begin{cases} U_0 = \frac{1}{4} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}; \forall n \in \mathbb{N}$$

a- Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$

$$U_0 = \frac{1}{4} \in I$$

Pour $n \geq 0$, supposons que $U_n \in I$ et démontrons que $U_{n+1} \in I$

$$U_n \in I \Leftrightarrow f(U_n) \in I \text{ (d'après } 9^\circ) \text{ a-)}$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} \in I \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$$

$$\text{b- Démontrons } \forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$$

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$ donc d'après $9^\circ)$ d- on a :

$$|f(U_n) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha| \text{ or } f(U_n) = U_{n+1} \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$$

$$\text{c- Déduisons-en que } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

Procédons par itération

On a :

$$|U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_0 - \alpha|$$

$$|U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_1 - \alpha|$$

$$\vdots$$

$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_{n-1} - \alpha|$ en multipliant membre à membre les inégalités et en simplifiant on obtient :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

$$\text{or } \frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq U_0 - \alpha \leq 0$$

$$\Rightarrow |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{4}$$

$$|U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

$$\text{On conclut que } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

d- Déterminons la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$$

ACTIVITE 20 :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

Partie A :

1°) a- Démontrons que pour tout nombre réel x on a :

$$f(-x) + f(x) = 2$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } (-x) \in \mathbb{R}$$

$$f(-x) + f(x) = \frac{3e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$f(-x) + f(x) = \frac{3 - e^x + 3e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$f(-x) + f(x) = \frac{2e^x + 2}{e^x + 1} = 2 \text{ d'où } \forall x \in \mathbb{R},$$

$$f(-x) + f(x) = 2$$

On en déduit que le point A (0 ; 1) est centre de symétrie à la courbe (Γ)

b- Etudions les variations de f

Soit D_f le domaine de définition de f

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x + 1 \neq 0 \text{ donc } D_f = \mathbb{R}$$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Signe de $f'(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Limites aux bornes de D_f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	-1	3

Asymptotes à (Γ)

Les droites d'équations $y = -1$ et $y = 3$ sont asymptotes à

(Γ) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

2°) a- Déterminons une équation de la tangente (T) à (Γ) en

son point d'abscisse 0

$$(T): y = f'(0)x + f(0) \text{ or } f'(0) = 1 \text{ et } f(0) = 1 \text{ donc}$$

$$(T): y = x + 1$$

$$b- \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) - (x + 1)$$

$$i) \text{ Démontrons que } \forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = f'(x) - 1$$

$$\varphi'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} - 1$$

$$\varphi'(x) = \frac{4e^x - e^{2x} - 2e^x - 1}{(e^x + 1)^2}$$

$$\varphi'(x) = \frac{-(e^{2x} - 2e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} = -\frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} \text{ d'où}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

ii) Dédudions-en le sens de variation de la fonction φ .
 $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) < 0$ et $\varphi'(0) = 0$ donc φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

iii) Calculons $\varphi(0)$ et déduisons-en le signe de $\varphi(x)$

$$\varphi(0) = f(0) - 1 \text{ donc } \varphi(0) = 0$$

Signe de $\varphi(x)$

φ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $\varphi(0) = 0$ on a :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, x < 0 \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, x > 0 \Leftrightarrow \varphi(x) < 0$$

$$\text{au total : } \begin{cases} \varphi(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\\ \varphi(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[\\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

c- Dédudions-en la position de la courbe (Γ) par rapport

à la droite (T)

$$\text{on a : } \varphi(x) = f(x) - y$$

$-\varphi(x) > 0$ si $x \in]-\infty; 0[$ d'où (Γ) est au dessus de (T) sur

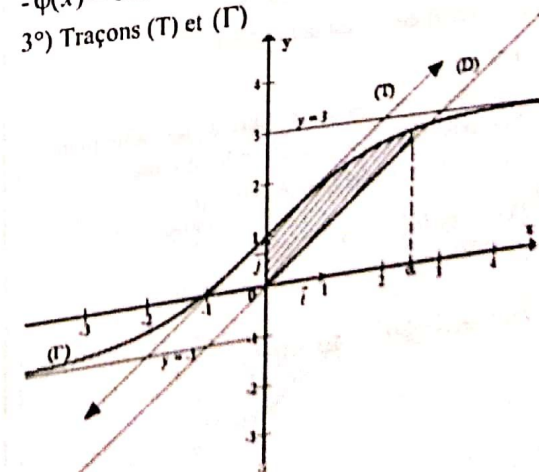
$$]-\infty; 0[$$

$-\varphi(x) < 0$ si $x \in]0; +\infty[$ d'où (Γ) est en dessous de (T)

sur $]0; +\infty[$

$-\varphi(x) = 0$ si $x = 0$ donc (Γ) et (T) se coupe pour $x = 0$

3°) Traçons (T) et (Γ)



Partie B :

Correction des activités sur suites numériques

4°) a- Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x \Leftrightarrow \varphi(x) = -1$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) - (x+1) = -1$$

$$\varphi(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) = x+1-1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x \text{ d'où } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x \Leftrightarrow$$

$$\varphi(x) = -1$$

b- Dédudons-en que la droite (D) : $y = x$ coupe la courbe (Γ) en seul point dont l'abscisse $\alpha \in]2; 3[$

Posons $u(x) = f(x) - x$ et démontrons que l'équation

$u(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]2; 3[$

On constate que $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \varphi'(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) < 0$

on a alors u continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et

$$u(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} u; \lim_{x \rightarrow +\infty} u \right[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} u = +\infty; \text{ donc } u(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

or $0 \in \mathbb{R}$ (1)

$$u(2) \approx 0,523 \text{ et } u(3) \approx -0,189; u(2) \times u(3) < 0 \text{ (2)}$$

De (1) et (2) l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique

α dans $]2; 3[$, on peut donc conclure que la droite (D) : $y = x$ coupe la courbe (Γ) en seul point dont l'abscisse $\alpha \in]2; 3[$

5°) a- Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1} - 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{4e^x}{e^x + 1} - 1 = \frac{4e^x - e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$\frac{4e^x}{e^x + 1} - 1 = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = f(x) \text{ d'où } \forall x \in \mathbb{R},$$

$$f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1} - 1$$

Dédudons une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est la fonction

$$G(x) = 4 \ln(e^x + 1) - x$$

b- Exprimons en fonction de α l'aire du domaine plan limité par la courbe (Γ), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$ Soit A cette aire

$$A = \left(\int_0^\alpha (f(x) - x) dx \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

On trouve :

$$A = \left[16 \ln(e^\alpha + 1) - 2\alpha^2 - 4\alpha - 16 \ln 2 \right] \text{ cm}^2$$

Partie C :

6°) a- Démontrons que $\forall x \in I$,

$$f'(x) = 4 \left(\frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{(e^x + 1)^2} \right)$$

$$I =]2; 3[$$

Soit $x \in I$

$$4 \left(\frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{(e^x + 1)^2} \right) = 4 \frac{e^x + 1 - 1}{(e^x + 1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} = f'(x) \text{ donc } \forall x \in I,$$

$$f'(x) = 4 \left(\frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{(e^x + 1)^2} \right)$$

b- Dédudons-en que $\forall x \in I$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$$x \in I \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow e^2 \leq e^x \leq e^3$$

$$\Leftrightarrow e^2 + 1 \leq e^x + 1 \leq e^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^3 + 1} \leq \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{e^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(e^3 + 1)^2} \leq \frac{1}{(e^x + 1)^2} \leq \frac{1}{(e^2 + 1)^2} \text{ enfin, on a :}$$

$$4 \left(\frac{1}{e^3 + 1} - \frac{1}{(e^2 + 1)^2} \right) \leq f'(x) \leq 4 \left(\frac{1}{e^2 + 1} - \frac{1}{(e^3 + 1)^2} \right) \text{ en}$$

conclusion on obtient : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ car

$$4 \left(\frac{1}{e^2 + 1} - \frac{1}{(e^3 + 1)^2} \right) \leq \frac{1}{2}$$

c- Dédudons-en que $\forall x \in I$, on a :

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

Pour tout $x \in I$, $\alpha \in I$ et en appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis appliqué à f sur un

intervalle de borne x et α on a : $|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$

$\forall x \in I$

$$7^\circ) (U_n) : \begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

a- Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$ et

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$$

* $U_0 = 3 \in I$

Soit $n \geq 0$. Supposons que $U_n \in I$ et démontrons que

$$U_{n+1} \in I$$

$U_n \in I \Leftrightarrow 2 \leq U_n \leq 3$ comme f est continue et strictement croissante sur I on a :

$2 \leq U_n \leq 3 \Leftrightarrow f(2) \leq f(U_n) \leq f(3)$ or $2 \leq f(2)$ et $f(3) \leq 3$ donc $2 \leq U_{n+1} \leq 3$ par suite $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$

$U_n \in I$ et $\alpha \in I$ et $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ donc d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis on a :

$$|f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha| \text{ or } f(U_n) = U_{n+1} \text{ et}$$

$$f(\alpha) = \alpha \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$$

b- Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |3 - \alpha|$

Procédons par récurrence.

Pour $n=0$ on a : $|U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^0} |3 - \alpha|$ or $U_0 = 3$ donc on

$$a : |3 - \alpha| \leq |3 - \alpha|$$

Soit $n \geq 0$. Supposons que on a : $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |3 - \alpha|$ et

$$\text{démontrons que } |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |3 - \alpha|$$

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |3 - \alpha| \Leftrightarrow \frac{1}{2} |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |3 - \alpha| \text{ or}$$

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha| \text{ d'où } |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |3 - \alpha| \text{ donc } \forall n \in$$

$$\mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |3 - \alpha|$$

Déterminons un entier naturel tel que U_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3}

Il suffit de prendre $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$

$$\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \leq 0,001 \text{ en utilisant la calculatrice on}$$

trouve $p=10$ on a : U_{10} est la valeur approchée cherchée.

ACTIVITE 22 :

$$f(x) = \frac{x}{1 + \ln x}; x \in \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$$

A°)

1°) Calculons :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

2°) Calculons $f'(x)$ et dressons le tableau de variation de f

f est dérivable sur $\left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$ comme quotient de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[, f'(x) = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}$$

$f'(x)$ a le signe de $\ln x$

$$\text{On a : } \begin{cases} f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{e}; 1 \right[\\ f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[\\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

Tableau de variation de f

x	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	$+\infty$	1	$+\infty$

3°) a- Démontrons que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion I d'abscisse e

$$f' \text{ est dérivable sur } \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[\text{ et } f''(x) = \frac{1 + \ln x}{x(1 + \ln x)^2}$$

$f''(x)$ a le même signe que $1 - \ln x$

x	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
$f''(x)$		+	-

f'' s'annule en e et change de signe donc le point I d'abscisse e est un point d'inflexion

b- Ecrivons une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point I

$$(T) : y = f'(e)(x - e) + f(e) \text{ et on trouve :}$$

$$(T) : y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}e$$

4°) Etudions la position relative de (C_f) et de la droite (D)

$$: y = x$$

$$f(x) - x = \frac{-x \ln x}{1 + \ln x}$$

$$-f(x) - x > 0 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{e}; 1 \right[\text{ donc la courbe } (C_f) \text{ est au}$$

$$\text{dessus de la droite } (D) \text{ sur } \left] \frac{1}{e}; 1 \right[$$

$$-f(x) - x < 0 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[\text{ donc la courbe } (C_f) \text{ est en}$$

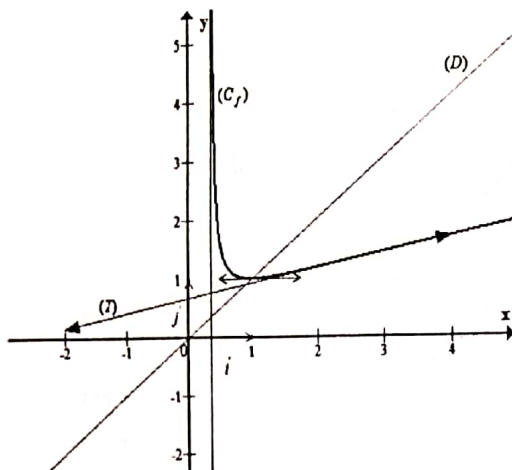
dessous de la droite (D) sur $]1; +\infty[$.

-Pour $x=1$, la courbe (C_f) et la droite (D) se coupent

5°) Traçons (T) , (D) et (C_f) .

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = \frac{1}{e}$ est asymptote à (C_f)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ donc (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe $(O; \vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.



B°)

6°) a- Démontrons que $f(K) \subset K$

$$K = [1; e]$$

f est continue et strictement croissante sur $[1; e]$

$$f([1; e]) = [f(1); f(e)]$$

$$f([1; e]) = \left[1; \frac{e}{2}\right] \subset K \text{ d'où } f(K) \subset K$$

b- Démontrons que $\forall x \in K, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}, f''(x) > 0$,

$\forall x \in K$ donc f' est continue et strictement croissante sur K

$$\text{On a : } x \in K \Leftrightarrow f'(1) \leq f'(x) \leq f'(e) \text{ d'où } 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$$

c- Démontrons que, $\forall x \in K$, on a : $|f(x) - 1| \leq \frac{1}{4}|x - 1|$

$$\text{On a : } \forall x \in K, |f'(x)| \leq \frac{1}{4}, x \in K \text{ et } 1 \in K$$

En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis à f sur l'intervalle de borne x et 1 on a :

$$|f(x) - f(1)| \leq \frac{1}{4}|x - 1| \text{ or } f(1) = 1 \text{ d'où } \forall x \in K,$$

$$|f(x) - 1| \leq \frac{1}{4}|x - 1|$$

$$7^\circ) (U_n) : \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a- Démontrons par récurrence que $U_n \in K$

$$- U_0 = 2 \in K$$

- Soit $n \geq 0$ supposons que $U_n \in K$ et démontrons que

$$U_{n+1} \in K$$

On sait que $\forall x \in K, f(x) \in K$ donc

$$U_n \in K \Leftrightarrow f(U_n) \in K$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} \in K \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}, U_n \in K$$

b- Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4}|U_n - 1|$

d'après 6°) a- on a : $U_n \in K, 1 \in K$ donc

$$|f(U_n) - f(1)| \leq \frac{1}{4}|U_n - 1| \text{ or } f(U_n) = U_{n+1} \text{ et } f(1) = 1$$

$$\text{d'où } |U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4}|U_n - 1|, \forall n \in \mathbb{N}$$

c- Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - 1| \leq \frac{1}{4^n}$

Procédons par récurrence.

$$|U_1 - 1| = 1 \text{ et } \frac{1}{4^0} = 1 \text{ donc } |U_0 - 1| \leq \frac{1}{4^0}$$

Soit $n \geq 0$. Supposons $|U_n - 1| \leq \frac{1}{4^n}$ et démontrons que

$$|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4^{n+1}}$$

$$|U_n - 1| \leq \frac{1}{4^n} \Leftrightarrow \frac{1}{4}|U_n - 1| \leq \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow |U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4}|U_n - 1| \leq \frac{1}{4^{n+1}} \text{ donc}$$

$$|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4^{n+1}} \text{ par suite } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - 1| \leq \frac{1}{4^n}$$

*Dédudons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$$

ACTIVITE 25:

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x), \text{ si } x \in]0; 1[\\ f(x) = \frac{x-1}{e^x - x - 1}, \text{ si } x \in [1; +\infty[\end{cases}$$

De courbe (C) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité 5 cm.

Partie A :

1°) a- Démontrons que f est continue en 0

On a : $f(0) = 0$ et
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x + (1-x) \ln(1-x) = 0$
 Démontrons que f est continue en 1.
 On a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{e^x - x - 1} = f(1) = 0$ et
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x \ln x + (1-x) \ln(1-x)) = 0$
 Donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

b- Démontrons que, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x + (1-x) \ln(1-x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x + \frac{(1-x) \ln(1-x)}{x} = -\infty$$

Démontrons que, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \ln x + (1-x) \ln(1-x)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \ln x}{x-1} - \ln(1-x) = +\infty$$

Démontrons que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \frac{1}{e-2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(e^x - x - 1)} = \frac{1}{e-2}$$

Interprétation graphique de ces résultats.

- f n'est pas dérivable à droite au point d'abscisse 0 et

sa courbe y admet une demi-tangente définie par : $\begin{cases} x=0 \\ y \leq 0 \end{cases}$.

- f n'est pas dérivable à gauche au point d'abscisse 1 mais dérivable à droite au point d'abscisse 1 et sa courbe y admet deux demi tangentes à gauche (T_g) et à droite (T_d)

au point d'abscisse 1 définies par : (T_g) : $\begin{cases} x=1 \\ y \leq 0 \end{cases}$ et

$$(T_d) : \begin{cases} x \geq 0 \\ y = \frac{1}{e-2}x \end{cases}$$

c- Démontrons que ($\mathcal{C}$) admet une asymptote horizontale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{e^x - x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{e^x - 1 - \frac{1}{x}} = 0 \text{ donc la droite}$$

d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à ($\mathcal{C}$) au voisinage de $+\infty$.

2°) Soit g la fonction définie sur $]0; 1[$ par :
 $g(x) = \ln x - \ln(1-x)$.

a- Résolution de l'équation $g(x) = 0$.

Soit $x \in]0; 1[$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln(1-x)$$

$$\Leftrightarrow x = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

b- Dédution, suivant les valeurs de x , du signe de $g(x)$.

$$g(x) > 0 \text{ si } x > \frac{1}{2} \quad \text{et } g(x) < 0 \text{ si } x < \frac{1}{2}$$

c- Prouvons que pour tout $x \in]0; 1[$, $f'(x) = g(x)$.

g est dérivable sur $]0; 1[$ et on a :

$$f'(x) = \ln x + 1 + \ln(1-x) - \frac{1-x}{1-x}$$

$$= \ln x - \ln(1-x) = g(x) \text{ d'où } \forall x \in]0; 1[,$$

$$f'(x) = g(x)$$

3°) h la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$h(x) = (2-x)e^x - 2.$$

a- Démontrons que h est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

h est dérivable sur $[1; +\infty[$ et on a :

$$h'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$$

Or, pour tout $x \in [1; +\infty[$, $1-x < 0$ donc $h'(x) < 0$. Par conséquent, h est strictement décroissant sur $[1; +\infty[$.

b- Solution unique $\alpha \in \left] \frac{3}{2}; 2 \right[$ de l'équation $h(x) = 0$.

h est une fonction continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$; en particulier, elle l'est sur $\left] \frac{3}{2}; 2 \right[$.

$$\text{De plus, } h(2) = -2 < 0 \text{ et } h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{e\sqrt{e}}{2} - 2 > 0. \text{ Il}$$

s'ensuit que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution

$$\text{unique } \alpha \in \left] \frac{3}{2}; 2 \right[.$$

c- Dédution, suivant les valeurs de x , du signe de $h(x)$.

$$h(x) > 0 \text{ si } x \in [1; \alpha[, \text{ et } h(x) < 0 \text{ si } x \in [\alpha; +\infty[.$$

d- Montrons que pour tout $x > 1$, $f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x - 1)^2}$

$$f'(x) = \frac{(e^x - x - 1) - (e^x - 1) - (x - 1)}{(e^x - x - 1)^2}$$

$$= \frac{(2-x)e^x - 2}{(e^x - x - 1)^2} \text{ ainsi } f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x - 1)^2}$$

4°) a- Démontrons que $f(\alpha) = -1 + \frac{2}{\alpha}$

On a : $h(\alpha) = 0$, donc $(2-\alpha)e^\alpha - 2 = 0$; c'est-à-dire

$$e^\alpha = \frac{2}{2-\alpha}$$

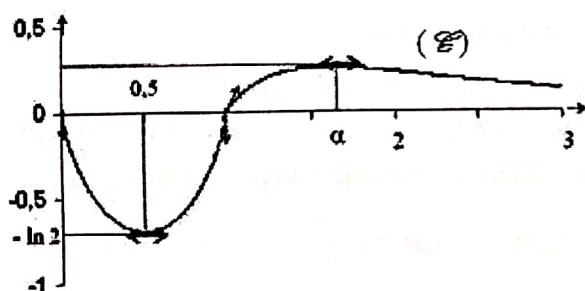
Par conséquent,

$$f(\alpha) = \frac{\alpha-1}{\frac{2}{2-\alpha} - \alpha - 1} = \frac{2-\alpha}{\alpha} = -1 + \frac{2}{\alpha}$$

Tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$

x	0	$\frac{1}{2}$	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+	0
f	0	$-\ln 2$	0	$-1 + \frac{2}{\alpha}$	0

b. Traçage de $(\mathcal{E})$ sur l'intervalle $[0; 3]$;



Partie B

$\alpha \in \left] \frac{3}{2}; 2 \right[$, le réel déterminé dans la question 3°) b- de la partie A

5°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} dt$.

a- Démontrons que : $0 \leq I_1(\alpha) \leq \frac{(2-\alpha)(\alpha-1)}{\alpha}$.

$$\text{On a } I_n(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} dt = \int_1^\alpha f(t) dt \text{ Or}$$

$t \in [1; \alpha]$ et f est croissante sur l'intervalle $[1; \alpha]$, par conséquent, $1 \leq t \leq \alpha$.

$$\text{Il s'ensuit que, } 0 \leq \int_1^\alpha f(t) dt \leq \int_1^\alpha \left(-1 + \frac{2}{\alpha} \right) dt$$

$$\text{On en conclut que } 0 \leq I_1(\alpha) \leq \frac{(2-\alpha)(\alpha-1)}{\alpha}.$$

b- Etude du sens de variation de : $t \mapsto e^t - t - 1$ sur $[1; +\infty[$

Sa fonction dérivée est : $t \mapsto e^t - 1$. Or si $t \geq 1$, $e^t - 1 > 0$. Ainsi, cette fonction est strictement croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

Déduction de : pour tout $t \geq 1$, $e^t - t - 1 \geq e - 2$.

Soit $u(t) = e^t - t - 1$

Puisque tout $t \geq 1$, la fonction : u est croissante donc pour tout

$t \geq 1$, $u(t) \geq u(1)$ soit $e^t - t - 1 \geq e - 2$

c- Prouvons alors que :

$$0 \leq I_n(\alpha) \leq \frac{(\alpha-1)^{n+1}}{(n+1)(e-2)}.$$

Pour tout $t \geq 1$, $(t-1) \geq 0$ donc $(t-1)^n \geq 0$. De plus, $e^t - t - 1 > 0$.

Ainsi, $\frac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} \geq 0$. Or $\alpha \geq 1$, donc $I_n(\alpha) \geq 0$ (a).

Et, d'après la question précédente, pour $t \geq 1$,

$$e^t - t - 1 \geq e - 2 \text{ par conséquent, } \frac{1}{e^t - t - 1} \leq \frac{1}{e - 2}.$$

$$\text{Ainsi, } \frac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} \leq \frac{(t-1)^n}{e - 2}.$$

Il s'ensuit que :

$$\int_1^\alpha \frac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} dt \leq \int_1^\alpha \frac{(t-1)^n}{e - 2} dt = \frac{(\alpha-1)^{n+1}}{(n+1)(e-2)} \quad (b)$$

De (a) et (b) on en conclut que

$$0 \leq I_n(\alpha) \leq \frac{(\alpha-1)^{n+1}}{(n+1)(e-2)}.$$

c- démontrons que la suite $(I_n(\alpha))$ est convergente.

La suite $(I_n(\alpha))$ est minorée. Ainsi, pour démontrer qu'elle est convergente, il reste à montrer qu'elle est décroissante.

$$\begin{aligned} \text{Or } I_{n+1}(\alpha) - I_n(\alpha) &= \int_1^\alpha \frac{(t-1)^{n+1}}{e^t - t - 1} dt - \int_1^\alpha \frac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} dt \\ &= \int_1^\alpha \frac{(t-1)^{n+1} - (t-1)^n}{e^t - t - 1} dt \end{aligned}$$

$$I_{n+1}(\alpha) - I_n(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{(t-1)^n (t-2)}{e^t - t - 1} dt$$

Or, $t > 1$ donc $(t-1)^n > 0$. Et, $t < \alpha$ avec $\alpha < 2$, donc $(t-2) < 0$ $(t-2) < 0$

De plus, $e^t - t - 1 \geq 0$.

Il s'ensuit que : $\int_1^\alpha \frac{(t-1)^n (t-2)}{e^t - t - 1} dt < 0$ donc la suite $(I_n(\alpha))$ est décroissante.

$(I_n(\alpha))$ minorée et décroissante alors $(I_n(\alpha))$ est convergente.

Précision de la limite de la suite $(I_n(\alpha))$:

D'après la question c. précédente,

$$0 \leq I_n(\alpha) \leq \frac{(\alpha-1)^{n+1}}{(n+1)(e-2)}$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\alpha) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-1)^{n+1}}{(n+1)(e-2)} = 0$$

Il s'ensuit que la limite de la suite $(I_n(\alpha))$ est égale à 0.

6°)

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a + b = 1$

a.

a- démontrons que pour tout $x \in]0; 1[$,

$$a \ln \frac{1}{a} + b \ln \frac{1}{b} \leq \ln 2$$

Pour $x \in]0; 1[$, $x \ln x + (1-x) \ln(1-x) \geq -\ln 2$ car

$f(x) \geq \ln 2$. Or, $a + b = 1$, donc $b = 1 - a$.

Ainsi, $a \ln a + b \ln b \geq -\ln 2$. Par conséquent,

$$-a \ln a - b \ln b \leq \ln 2$$

Il s'ensuit que : $a \ln \frac{1}{a} + b \ln \frac{1}{b} \leq \ln 2$.

b- Valeurs de a et b , la dernière inégalité est-elle une égalité ?

$$a \ln \frac{1}{a} + b \ln \frac{1}{b} = \ln 2 \text{ si } a \ln a + (1-a) \ln b = -\ln 2 \text{ c'est à}$$

dire si $f(a) = -\ln 2$ donc si $a = \frac{1}{2}$; par conséquent, les

valeurs de a et de b pour que la dernière inégalité soit une

égalité sont $a = b = \frac{1}{2}$

ACTIVITE 26:

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{e^x}$$

1°) a- Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis

interprète graphiquement.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 + 1)e^{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + e^{-x} = 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 3x^2 + 1)e^{-x}$$

$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x} \right) e^{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2) e^{-x} = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Interprétation graphique :

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc (C) admet une branche

parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

b- Prouvons que la courbe (C) de f admet trois tangentes horizontales dont l'une est au point d'abscisse 1.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \frac{(6x^2 - 6x)e^x - e^x(2x^3 - 3x^2 + 1)}{e^{2x}} \text{ après}$$

simplification on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = e^{-x}(-2x^3 + 9x^2 - 6x - 1)$$

Réolvons l'équation $f'(x) = 0$; il est claire que $x = 1$ est une solution de l'équation ; déterminons les autres solutions.

En utilisant une méthode appropriée on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = e^{-x}(x-1)(-2x^2 + 7x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } -2x^2 + 7x + 1 = 0 \text{ car } e^{-x} \neq 0$$

Réolvons $-2x^2 + 7x + 1 = 0$; son discriminant $\Delta = 57$ et ses solutions sont :

$$x_1 = \frac{7 - \sqrt{57}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{7 + \sqrt{57}}{4}$$

$$\text{Alors on a : } f'(1) = 0 \text{ ou } f'\left(\frac{7 - \sqrt{57}}{4}\right) = 0 \text{ ou}$$

$$f'\left(\frac{7 + \sqrt{57}}{4}\right) = 0 \text{ donc la courbe (C) de } f \text{ admet trois}$$

tangentes horizontales en 1 ; en $\frac{7 - \sqrt{57}}{4}$ et en $\frac{7 + \sqrt{57}}{4}$.

2°) a- Dressons le tableau de variation de f .

Signe de f' .

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ donc le signe de f' est celui de

$$(x-1)(-2x^2 + 7x + 1)$$

On a :

x	$-\infty$	x_1	1	x_2	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+	+
$-2x^2 + 7x + 1$	-	0	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-	0	-

alors

$$\forall x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]x_1; 1[\cup]x_2; +\infty[, f'(x) < 0$$

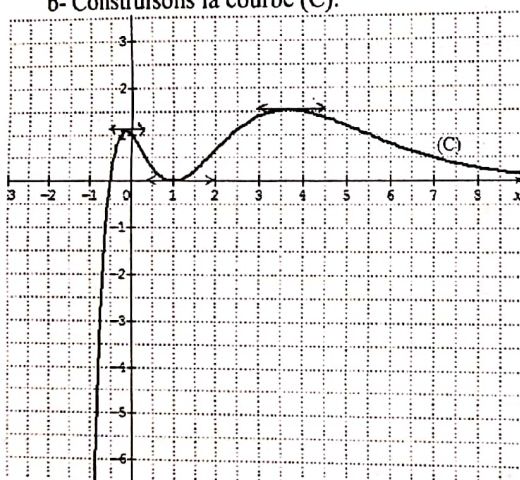
$$\forall x \in \{x_1; 1; x_2\}, f'(x) = 0$$

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty; x_1]$ et sur $[1; x_2]$
et strictement décroissante sur $[x_1; 1]$ et sur $[x_2; +\infty[$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	x_1	1	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	○	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(x_1)$	0	$f(x_2)$	0

b- Construisons la courbe (C).



3°) Pour tout entier naturel n , on a : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

a- Justifions que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (I_n) .

Pour tout entier naturel n , la fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0; 1]$ donc I_n existe par conséquent (I_n) est bien une suite numérique.

b- Démontrons que la suite (I_n) est positive et décroissante et concluons ?

$$\forall x \in [0; 1], x^n e^{-x} \geq 0 \text{ alors } \int_0^1 x^n e^{-x} dx \geq 0 \text{ donc } I_n \geq 0 \quad (1)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx \text{ et } I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} (x-1) dx$$

$$(x-1) \leq 0, \forall x \in [0; 1] \text{ alors } \int_0^1 x^n e^{-x} (x-1) dx \leq 0 \text{ donc}$$

$$I_{n+1} - I_n \leq 0 \text{ d'où } (I_n) \text{ est décroissante (2).}$$

De (1) et (2), (I_n) est positive et décroissante.

Concluons :

(I_n) est minorée par 0 et décroissante donc (I_n) est convergente.

c- Encadrons I_n et calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \\ \Rightarrow e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^n}{e} \leq x^n e^{-x} \leq x^n \text{ en intégrant on a :}$$

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

4°) a- Calculons I_0 .

$$I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = -[e^{-x}]_0^1 = 1 - e^{-1}.$$

b- Démontrons en utilisant une intégration par parties, que

$$\text{pour tout } n : I_{n+1} = \frac{-1}{e} + (n+1)I_n.$$

$$\text{Posons } u'(x) = x^n \text{ et } v(x) = e^{-x}$$

$$\text{On a : } u(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \text{ et } v'(x) = -e^{-x}$$

$$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-x} \right]_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{n+1} e^{-1} + \frac{1}{n+1} I_{n+1} \text{ donc } (n+1)I_n = \frac{1}{e} + I_{n+1} \text{ d'où}$$

$$I_{n+1} = \frac{-1}{e} + (n+1)I_n.$$

c- Calculons l'aire sous la courbe (C) délimitée par l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x=0$ et $x=1$.

Soit A cette aire.

$$\text{On a : } A = \int_0^1 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 2x^3 e^{-x} dx - 3 \int_0^1 x^2 e^{-x} dx + \int_0^1 e^{-x} dx \\ = (2I_3 - 3I_2 + I_0) u.a.$$

9. CORRIGE DES ACTIVITES SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

ACTIVITE 7 :

Partie A :

1°) a- Déterminons les nombre réels a et b pour que la fonction $v: x \mapsto ax + b$, soit solution de (E)
 v solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$,

$$v''(x) + 4v'(x) + 4v(x) = -4x$$

$$\Leftrightarrow 0 + 4a + 4ax + b = -4x \text{ par identification on a :}$$

$$\begin{cases} 4a + 4b = 0 \\ 4a = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ d'où } v(x) = -x + 1$$

b- Démontrons que f est solution de (E) si et seulement si $f - v$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'' + 4y' + 4y = 0$

$$f - v \text{ est solution de (E')} \Leftrightarrow$$

$$(f - v)'' + 4(f - v)' + 4(f - v) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},$$

$$f''(x) - v''(x) + 4f'(x) - 4v'(x) + 4f(x) - 4v(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = v''(x) + 4v'(x) + 4v(x)$$

$$\Leftrightarrow f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = -4x \Leftrightarrow f \text{ est solution de (E)}$$

D'où f est solution de (E) si et seulement si $f - v$ est solution de l'équation différentielle (E')

c- Résolvons l'équation (E') puis détermine la fonction f .

l'équation caractéristique de (E') est : $r^2 + 4r + 4 = 0$,
 $\Delta = 0$ et $r_0 = -2$ les solutions donc de (E') sont :

$$l: x \mapsto (Ax + B)e^{-2x} \text{ avec } (A; B) \in \mathbb{R}^2$$

Trouvons f .

$$f - v = l \Leftrightarrow f = l + v \text{ donc } f: x \mapsto (Ax + B)e^{-2x} - x + 1, (A; B) \in \mathbb{R}^2$$

$$f(0) = 2 \text{ et } f'(0) = -2$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow B + 1 = 2 \Leftrightarrow B = 1$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = Ae^{-2x} - 2(Ax + B)e^{-2x} - 1$$

$$f'(0) = -2 \Rightarrow A - 2B - 1 = -2 \text{ or } B = 1 \text{ donc } A = 1$$

$$\text{d'où } f: x \mapsto (x + 1)e^{-2x} - x + 1$$

Partie B :

2°) a- Etudions les variations de la fonction dérivée f' de f .

- f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-2x} - 2(x + 1)e^{-2x} - 1$$

Initiateur : Sylvain AHOUANGRO

$$f'(x) = e^{-2x}(-2x - 1) - 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -2e^{-2x}(-2x - 1) - 2e^{-2x}$$

$$f''(x) = 4xe^{-2x}$$

$$\bullet f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ on a donc :}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f''(x) < 0 \text{ et}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f''(x) > 0$$

alors f' est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 1)e^{-2x} - 1 = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2xe^{-2x} - 1 = -1$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -2xe^{-2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \end{cases}$$

- Tableau de variation de f'

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$		-	+
$f'(x)$	$+\infty$	-2	-1

b- Démontrons que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $-0,64 < \alpha < -0,63$

f' est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et $f'([-\infty; 0]) = [-2; +\infty[$; $0 \in [-2; +\infty[$ donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-\infty; 0]$.

D'après les variations de f' , $0 \notin f'([0; +\infty[)$ d'où l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$

$$f'(-0,644) \approx 0,007 > 0 \text{ et } f'(-0,63) \approx -0,0833 < 0$$

$$\text{donc } -0,64 < \alpha < -0,63$$

c- Dédudions le signe de $f'(x)$.

D'après a- et b- on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) < 0 \\ f'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

3°) a- Etudions le sens de variation de f et dressons son tableau de variation.
D'après 9-c)

f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{-2x} + 1 - x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} [(x+1) - xe^{2x} + e^{2x}] \\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-2x} + 1 - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x \\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \end{cases}$$

Tableau de variation de f .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

b- Démontrons que $f(\alpha) = \frac{-2\alpha^2}{1+2\alpha}$ et que

$$2,83 < f(\alpha) < 3,16$$

On sait que $f'(\alpha) = 0$

$$f'(\alpha) = 0 \Rightarrow e^{-2\alpha}(-2\alpha - 1) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-2\alpha} = \frac{-1}{1+2\alpha}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } f(\alpha) &= (\alpha+1) \left(\frac{-1}{1+2\alpha} \right) + 1 - \alpha \\ &= \frac{-\alpha - 1 + (1-\alpha)(1+2\alpha)}{1+2\alpha} \\ &= \frac{-\alpha - 1 + 1 + \alpha - 2\alpha^2}{1+2\alpha} \text{ d'où}\end{aligned}$$

$$f(\alpha) = \frac{-2\alpha^2}{1+2\alpha}$$

$$-0,64 < \alpha < -0,63 \Leftrightarrow -0,28 < 1+2\alpha < -0,26$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{0,26} < \frac{1}{1+2\alpha} < -\frac{1}{0,28}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{0,28} < \frac{1}{1+2\alpha} < \frac{1}{0,26} \quad (a)$$

$$-0,64 < \alpha < -0,63$$

$$\Leftrightarrow -2(-0,64)^2 < -2\alpha^2 < -2(-0,63)^2 \quad (b)$$

$$\begin{aligned}(a) \times (b) &\Rightarrow \frac{2(0,63)^2}{0,28} < \frac{-2\alpha^2}{1+2\alpha} < \frac{2(0,64)^2}{0,26} \\ &\Rightarrow 2,83 < f(\alpha) < 3,1507 \text{ d'où } 2,83 < f(\alpha) < 3,16\end{aligned}$$

c- Justifions que la droite $(D): y = 1 - x$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$, puis précisez la seconde branche infinie.

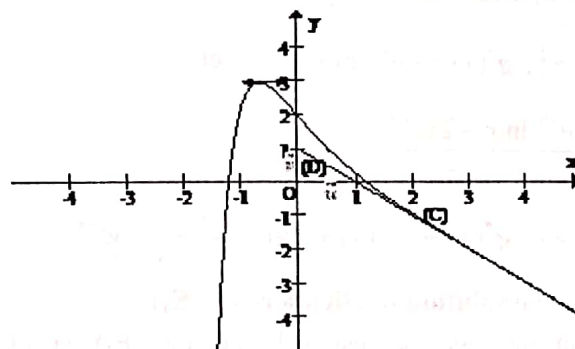
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (1-x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-2x} + e^{-2x} = 0\end{aligned}$$

d'où $(D): y = 1 - x$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} \left[1 + \frac{1}{x} + \left(\frac{1-x}{x} \right) e^{2x} \right] \\ &= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

D'où la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

d- Traçons (C) avec soin



4°) a- Calculons l'aire $A(\lambda)$

$$\begin{aligned}A(\lambda) &= \int_{-1}^{\lambda} (f(x) - y) dx \\ &= \int_{-1}^{\lambda} (x+1)e^{-2x} dx \text{ u.a.}\end{aligned}$$

Posons $u(x) = x+1$, $u'(x) = 1$

$$v'(x) = e^{-2x} \text{ et prenons } v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$A(\lambda) = \left[-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} \right]_{-1}^{\lambda} + \frac{1}{2} \int_{-1}^{\lambda} e^{-2x} dx \text{ u.a.}$$

$$\begin{aligned}A(\lambda) &= \left[-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} \right]_{-1}^{\lambda} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \right]_{-1}^{\lambda} \text{ u.a.} \\ &= \left(-\frac{1}{2}(\lambda+1)e^{-2\lambda} - \frac{1}{4}e^{-2\lambda} + \frac{1}{4}e^2 \right) \text{ u.a.}\end{aligned}$$

$$A(\lambda) = 4 \left(-\frac{\lambda}{2} e^{-2\lambda} - \frac{1}{2} e^{-2\lambda} - \frac{1}{4} e^{-2\lambda} + \frac{1}{4} e^2 \right) \text{cm}^2 \quad \text{d'où}$$

$$A(\lambda) = (e^2 - 2\lambda e^{-2\lambda} - 3e^{-2\lambda}) \text{cm}^2$$

b- Calculons la limite de $A(\lambda)$

lorsque λ tend vers $+\infty$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (e^2 - 2\lambda e^{-2\lambda} - 3e^{-2\lambda}) \text{cm}^2$$

$$= e^2 \text{cm}^2$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -2\lambda e^{-2\lambda} = 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -3e^{-2\lambda} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = e^2 \text{cm}^2$$

ACTIVITE 8 :

1°) Démontrons que g est une solution particulière de (E_1)

$$g(x) = e^{-x} \ln x$$

g est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$,

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = -e^{-x} \ln x + \frac{e^{-x}}{x} \text{ et}$$

$$g''(x) = \frac{x^2 e^{-x} \ln x - 2x e^{-x} - e^{-x}}{x^2}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, g''(x) + 3g'(x) + 2g(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right) e^{-x}$$

alors g est une solution particulière de (E_1)

2°) Démontrons que k est solution de (E_1) si et seulement si $k - g$ est solution de (E_2)

$k - g$ est solution de (E_2)

$$\Leftrightarrow (k - g)'' + 3(k - g)' + 2(k - g) = 0$$

$$\Leftrightarrow k'' - g'' + 3k' - 3g' + 2k - 2g = 0$$

$$\Leftrightarrow k'' + 3k' + 2k = g'' + 3g' + 2g$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]0; +\infty[, k''(x) + 3k'(x) + 2k(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right) e^{-x}$$

donc k est solution de (E_1) d'où k est solution de (E_1) si et seulement si $k - g$ est solution de (E_2) .

3°) Déterminons les solutions de (E_2)

$$(E_2) : y'' + 3y' + 2y = 0$$

L'équation caractéristique associée à (E_2) est :

$$r^2 + 3r + 2 = 0, \text{ on discriminant } \Delta = 1 > 0$$

donc on a : $r_1 = -2$ et $r_2 = -1$ alors les solutions de (E_2) sont les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$x \mapsto Ae^{-2x} + Be^{-x}, (A; B) \in \mathbb{R}^2$$

4°) Dédons-en l'ensemble solution de l'équation (E_1)

k est solution de $(E_1) \Leftrightarrow k - g$ est solution de (E_2)
 $\Leftrightarrow \forall x \in]0; +\infty[, \exists (A; B) \in \mathbb{R}^2 /$

$$k(x) - g(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x} \Leftrightarrow$$

$k(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x} + e^{-x} \ln x$; d'où l'ensemble des fonctions est : $x \mapsto Ae^{-2x} + Be^{-x} + e^{-x} \ln x$; $(A; B) \in \mathbb{R}^2$

ACTIVITE 18 :

1°)

u est au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$u' = y_1' - 2 \text{ et } u'' = y_1''$$

$$u'' + 2u' + 5u = y_1'' + 2(y_1' - 2) + 5(y_1 - 2t + 1)$$

$$= y_1'' + 2y_1' + 5y_1 - 4 - 10t + 5$$

$$= 10t - 1 - (10t - 1) = 0 \text{ d'où } u \text{ est solution}$$

de $(E_1) : y'' + 2y' + 5y = 0$

2°) Résolvons (E_1) puis déduisons y_1

L'équation caractéristique associée à (E_1) est :

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \text{ son discriminant est } \Delta = -16 = (4i)^2 \text{ et}$$

ces solutions sont : $r_1 = -1 - 2i$ et $r_2 = -1 + 2i$

Alors les solutions de (E_1) sont les fonctions définies sur

$\mathbb{R}$ par : $x \mapsto (A \cos 2x + B \sin 2x)e^{-x}$ avec $(A; B) \in \mathbb{R}^2$.

Déduction de y_1 .

u est une solution de (E_1) donc

$$u(t) = (A \cos 2t + B \sin 2t)e^{-t} ; t \in \mathbb{R} \text{ et } u = y_1 - 2t + 1$$

$$\text{donc } \forall t \in \mathbb{R}, y_1(t) = (A \cos 2t + B \sin 2t)e^{-t} + 2t - 1 \text{ où}$$

$$(A; B) \in \mathbb{R}^2 \text{ or } \begin{cases} y_1(0) = \sqrt{2} - 1 \\ y_1'(0) = 2 + \sqrt{2} \end{cases} \text{ donc on trouve :}$$

$$\begin{cases} A - 1 = \sqrt{2} - 1 \\ 2B - A + 2 = 2 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \sqrt{2} \\ B = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}, y_1(t) = \sqrt{2}(\cos 2t + \sin 2t)e^{-t} + 2t - 1$$

3°) Démontrons que y_2 peut s'écrire sous la forme

$$y_2 = r \cos \theta.$$

$$y_2 = e^t y_1 - 2te^t + e^t \text{ et on trouve :}$$

$$y_2 = \sqrt{2}(\cos 2t + \sin 2t)$$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2t + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2t \right)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 2t + \sin \frac{\pi}{4} \sin 2t \right) \text{ d'où } y_2 = 2 \cos \left(2t - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{Avec } r = 2 > 0 \text{ et } \theta = 2t - \frac{\pi}{4}.$$

4°) a- Démontrons que v est solution de $(E_2) : y'' + 4y = 0$

On a : $v = y - 2$ donc $y = v + 2$; v est au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $v' = y'$
 et $v'' = y''$ donc $y'' + 4y = 8 \Leftrightarrow v'' + 4(v + 2) = 8$
 $\Leftrightarrow v'' + 4v = 0$
 $\Leftrightarrow v$ est solution de

$$(E_2): y'' + 4y = 0.$$

b- Résolvons (E_2)

l'équation caractéristique associée à (E_2) est $r^2 + 4 = 0$

$r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = -2i$ ou $r = 2i$ donc les solutions de

(E_2) sont les fonction définies sur $\mathbb{R}$ par :

$t \mapsto \alpha \cos 2t + \beta \sin 2t$ avec $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Déduisons l'expression de y en fonction de t .

v est une solution de (E_2) donc $\forall t \in \mathbb{R}$,

$v(t) = \alpha \cos 2t + \beta \sin 2t$ donc

$y(t) = \alpha \cos 2t + \beta \sin 2t + 2$ avec $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} y(0) = 2 - \sqrt{2} \\ y'(0) = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2 = 2 - \sqrt{2} \\ 2\beta = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\sqrt{2} \\ \beta = \sqrt{2} \end{cases}$$

D'où $y(t) = \sqrt{2}(\sin 2t - \cos 2t) + 2$ avec $t \in \mathbb{R}$.

c- Démontrons que : $y - 2 = r \sin \theta$

on a : $y - 2 = \sqrt{2}(\sin 2t - \cos 2t)$

$$= 2 \left(\sin 2t \cos \frac{\pi}{4} - \cos 2t \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= 2 \sin \left(2t - \frac{\pi}{4} \right) \text{ d'où } y - 2 = 2 \sin \left(2t - \frac{\pi}{4} \right)$$

avec $r = 2$ et $\theta = 2t - \frac{\pi}{4}$ valeurs trouvée en 3°)

ACTIVITE 19 :

1°) Démontrons l'équivalence :

On a : f est dérivable, strictement positive sur $[0; +\infty[$ et

$g = \ln(f)$ alors sur $[0; +\infty[$, $g' = \frac{f'}{f}$

$$g' = \frac{f'}{f} \Leftrightarrow f' = g'f.$$

f vérifie $(E) \Leftrightarrow f' = -\frac{1}{20} f(3 - \ln f)$

$$\Leftrightarrow g'f = -\frac{1}{20} f(3 - g)$$

$$\Leftrightarrow g' = -\frac{1}{20} (3 - g) \text{ car } f \neq 0$$

$$\Leftrightarrow g' = \frac{1}{20} g - \frac{3}{20}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in [0; +\infty[, g'(t) = \frac{1}{20} g(t) - \frac{3}{20}.$$

2°) a- Déterminons une fonction constante h_0 solution de l'équation différentielle $(H): y' = \frac{1}{20} y - \frac{3}{20}$.

Soit $h_0(t) = a$; $a \in \mathbb{R}$ cette fonction constante h_0 est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on a :

$$\forall t \in [0; +\infty[, h'_0(t) = \frac{1}{20} h(t) - \frac{3}{20}$$

$$h'_0(t) = \frac{1}{20} h(t) - \frac{3}{20} \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{20} a - \frac{3}{20} \Leftrightarrow a = 3$$

Donc $\forall t \in [0; +\infty[, h_0(t) = 3$.

b- Vérifions que si deux fonctions h_1 et h_2 sont solutions de l'équation différentielle (H) alors la fonction $h_1 - h_2$ est solution de l'équation différentielle $(H'): y' = \frac{1}{20} y$.

h_1 et h_2 sont solutions de l'équation différentielle (H)

$$\Rightarrow \begin{cases} h'_1 = \frac{1}{20} h_1 - \frac{3}{20} \\ h'_2 = \frac{1}{20} h_2 - \frac{3}{20} \end{cases}$$

$$\Rightarrow h'_1 - h'_2 = \frac{1}{20} h_1 - \frac{1}{20} h_2 - \frac{3}{20} + \frac{3}{20}$$

$$\Rightarrow (h_1 - h_2)' = \frac{1}{20} (h_1 - h_2)$$

$$\Rightarrow h_1 - h_2 \text{ est solution de } (H'): y' = \frac{1}{20} y.$$

Déduisons la solution générale de l'équation différentielle (H)

Réolvons d'abord (H')

$$(H') \Leftrightarrow y' - \frac{1}{20} y = 0$$

donc la solution générale de (H') est la fonction : $x \mapsto K e^{\frac{x}{20}}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Etant donné que si deux fonctions étant solution de (H) alors la fonction $h_1 - h_2$ est solution de (H') alors on a :

$$\forall t \in [0; +\infty[, (h_1 - h_2)(t) = K \exp\left(\frac{t}{20}\right) \text{ donc}$$

$h_1(t) = h_2(t) + K \exp\left(\frac{t}{20}\right)$; h_2 est une solution de (H) alors on peut prendre $h_2(t) = h_0(t) = 3$ donc

$h_1(t) = 3 + K \exp\left(\frac{t}{20}\right)$, $K \in \mathbb{R}$ d'où la solution générale de

(H) est la fonction $t \mapsto 3 + K \exp\left(\frac{t}{20}\right)$, $K \in \mathbb{R}$.

c- Déduisons des questions précédentes et des hypothèses, l'expression de la fonction f .
 Des hypothèses on a :

- $g = \ln(f)$ avec $f > 0$ alors $f = e^g$ or g est une solution de (H) donc $\forall t \in [0; +\infty[$,

$$f(t) = \exp\left[3 + K \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right], K \in \mathbb{R}.$$

- $f(0) = 1$

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow \exp[3 + K \exp(0)] = 1$$

$$\Leftrightarrow \exp(3 + K) = 1$$

$$\Leftrightarrow 3 + K = 0$$

$$\Leftrightarrow K = -1 \text{ d'où } \forall t \in [0; +\infty[,$$

$$f(t) = \exp\left[3 - 3 \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right].$$

3°) a- Etudions la limite de la fonction h définie par :

$$h(x) = \exp\left[3 - 3 \exp\left(\frac{x}{20}\right)\right] \text{ en } +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[3 - 3 \exp\left(\frac{x}{20}\right)\right] = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{20} = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -3 \exp\left(\frac{x}{20}\right) = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0.$$

b- Déterminons le sens de variation de la fonction h sur $[0; +\infty[$.

h est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme composée de fonction dérivable et $\forall x \in [0; +\infty[$,

$$h'(x) = -\frac{3}{20} \exp\left(\frac{x}{20}\right) \exp\left[3 - 3 \exp\left(\frac{x}{20}\right)\right]$$

$$\text{Sur } [0; +\infty[, -\frac{3}{20} < 0, \exp\left(\frac{x}{20}\right) > 0 \text{ et}$$

$$\exp\left[3 - 3 \exp\left(\frac{x}{20}\right)\right] > 0 \text{ alors } \forall x \in [0; +\infty[, h'(x) < 0 \text{ donc } h$$

est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

c- l'années à laquelle, la taille de cet échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus.

Il suffit que $f(t) < \frac{20}{1000}$.

$$f(t) < \frac{20}{1000} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in [0; +\infty[\\ \exp\left[3 - 3 \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right] < \frac{20}{1000} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \in [0; +\infty[\\ -3 \exp\left(\frac{t}{20}\right) < -3 + \ln(0,02) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \in [0; +\infty[\\ \exp\left(\frac{t}{20}\right) > \frac{3 - \ln(0,02)}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \in [0; +\infty[\\ \exp\left(\frac{t}{20}\right) > \frac{3 - \ln(0,02)}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \in [0; +\infty[\\ \exp\left(\frac{t}{20}\right) > \frac{3 - \ln(0,02)}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \in [0; +\infty[\\ t > 20 \ln\left[\frac{3 - \ln(0,02)}{3}\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \in [0; +\infty[\\ t > 16,693 \end{cases}$$

Donc la taille de cet échantillon sera inférieure à vingt individus à partir de l'année $2000 + 17 = 2017$