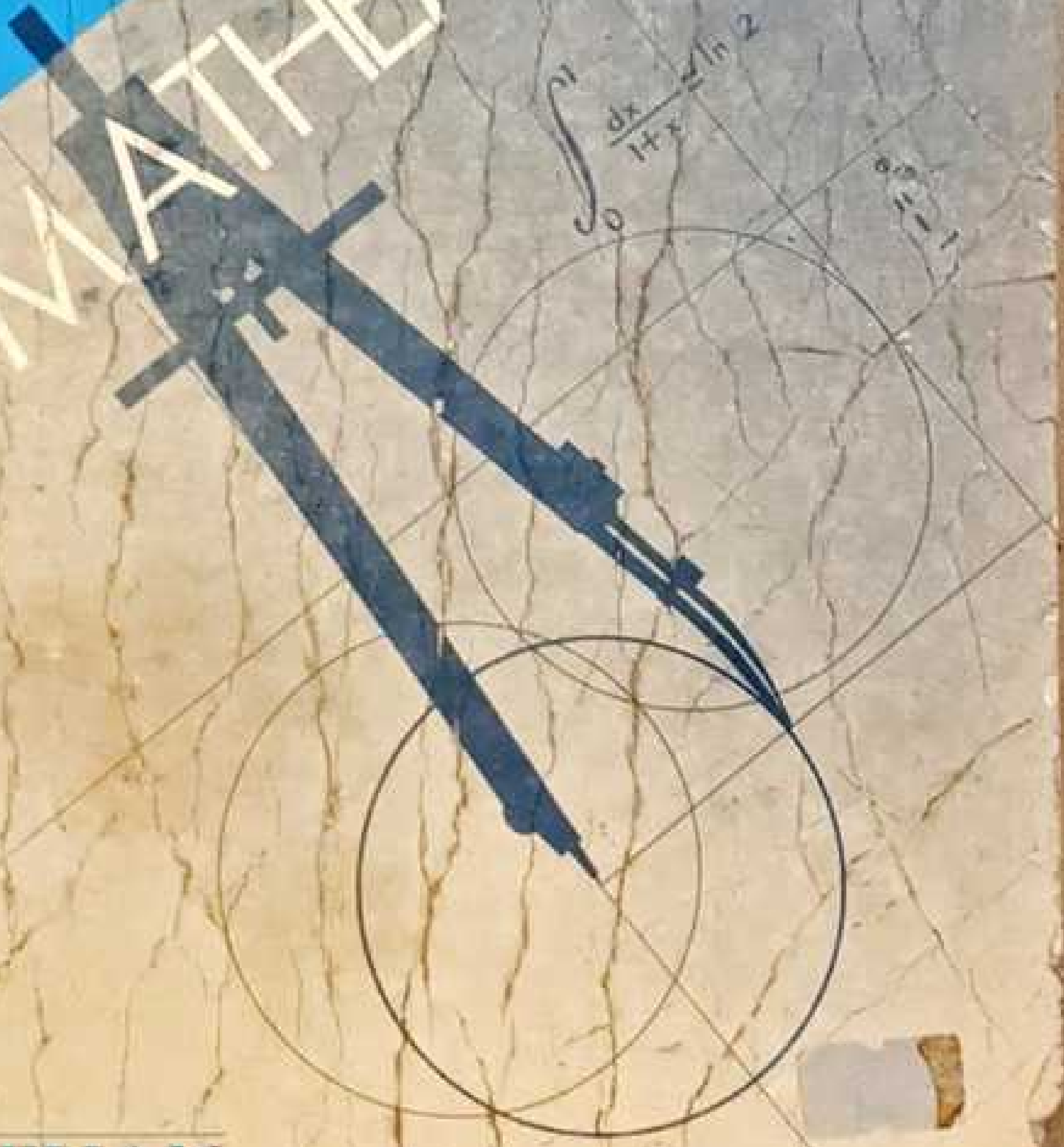
C et E

Marc Goutton / Jacques Chevrillat / Christian Lixi

# MATHEMATIQUES

TOME 1




NATHAN

COLLECTION MARC GOURION

MARC GOURION
Professeur agrégé
lycée A-Calmette - Nice

JACQUES CHEVALLET
Professeur agrégé
au lycée Louis-le-Grand - Paris

CHRISTIAN LIXI
Professeur agrégé
au lycée Henri-IV - Paris

# MATHÉMATIQUES

## Terminales C et E

### TOME I

**Analyse**

**Probabilités**

**Dénombrements**

Programmes 1986

NATHAN

# Avant-propos

*Ce nouveau programme conserve, pour l'essentiel, les objectifs du programme précédent.*

*Au début du livre figurent* **« Quelques notions fondamentales »** *que le lecteur pourra consulter à tout moment.*
*A la fin de chaque chapitre figurent les exercices ou problèmes classés par* **thèmes**, *dans l'ordre des paragraphes du chapitre. On trouvera également des exercices ou problèmes de* **révision** *portant sur tout le chapitre et les chapitres précédents.*
*Exceptionnellement nous avons mis une étoile* ⋆ *à des exercices un peu difficiles.*
*De nombreux exercices et problèmes ont été évidemment empruntés des récentes annales du* **Baccalauréat** *(compte tenu des modifications de programme).*
*Rappelons que l'écriture : cf.* § 2.5 c *se lit : confère chapitre 2, paragraphe 5, sous-paragraphe c.*

***Nouveautés***

*Les* **notions de limites** *de suites ou de fonctions ont été reprises dans le même esprit qu'en 1re S (suppression des quantificateurs, introduction de suites ou de fonctions de référence).*
*De nombreux exercices ont été traités sous forme de* **travaux pratiques** *: nous n'avons pas traité entièrement les exercices mais nous avons donné des indications afin de pouvoir guider, en classe, les élèves.*

*Par avance, nous remercions collègues et élèves qui voudront bien nous communiquer toute remarque susceptible d'améliorer cet ouvrage.*

*Les Auteurs.*

# Sommaire

# Classes de terminales C et E : Objectifs, programme et commentaire

## I. Algèbre et combinatoire

### 1. Combinatoire; probabilités

En combinatoire, l'objectif est d'entraîner les élèves à *organiser*, grâce à un *minimum* de langage ensembliste, *des données* issues de secteurs variés, et à traiter des problèmes simples de *dénombrement* relatifs à ces données.
En probabilités, l'objectif est d'entraîner les élèves à *décrire* grâce au langage élémentaire des événements *quelques expériences aléatoires* simples, et à employer les techniques de dénombrement figurant au programme pour *calculer des probabilités. On évitera toute théorie formalisée*; en particulier, la notion d'espace probabilisé est hors programme. Pour introduire la notion de probabilité, on s'appuiera sur l'observation d'une série statistique, pratiquée en Première : sur un exemple d'expérience aléatoire, on dégagera brièvement les propriétés des fréquences et on mettra en évidence la stabilité de la fréquence d'un événement donné lorsque l'expérience est répétée un grand nombre de fois; la justification théorique de ce point de vue, notamment par la loi faible des grands nombres, est hors programme.
Sur des exemples significatifs, on amènera les élèves à conduire et à rédiger des raisonnements par récurrence (passage de $n$ à $n+1$, passage de 1, 2,..., $n$ à $n+1$, ...). Mais on évitera la mise en forme de récurrences dans les cas intuitivement évidents et on s'abstiendra de toute considération théorique sur le principe de récurrence.

#### a) *Combinatoire, dénombrements*

Cardinal du produit cartésien de deux ensembles finis.

Cardinal de l'ensemble $A^p$ des $p$-listes d'éléments d'un ensemble fini A. Cas où les éléments sont distincts deux à deux : dénombrement des arrangements et des permutations, notation $n!$

Parties de cardinal donné d'un ensemble fini : dénombrement des combinaisons, notation $C_n^p$ ou $\binom{n}{p}$, relations $C_n^p = C_n^{n-p}$, $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$ et interprétation ensembliste de ces relations.
Formule du binôme (sur $\mathbb{C}$).

Les élèves doivent connaître les symboles d'appartenance ($x \in A$), d'inclusion ($A \subset B$), de réunion, d'intersection et de complémentaire ($\complement A$ ou $\bar{A}$); mais aucune étude systématique de ces opérations et relations n'est au programme.

Sont exigibles (pour des ensembles finis) :
— le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble;
— le cardinal d'une réunion de parties disjointes;
— la formule reliant card$(A \cup B)$ et card$(A \cap B)$.

#### b) *Notions sur le calcul des probabilités*

Événements, événements élémentaires; la probabilité d'un événement sera définie par addition de probabilités d'événements élémentaires. Événements disjoints, événement contraire, réunion et intersection de deux événements.

Seul est au programme le cas où l'ensemble des événements élémentaires est fini.

Les élèves doivent savoir calculer la probabilité de la réunion d'événements disjoints, d'un événement contraire, et connaître la formule reliant les probabilités de $A \cup B$ et de $A \cap B$.

Les notions de probabilité conditionnelle, de probabilité produit et de variable aléatoire ne sont pas au programme.

*Travaux pratiques*

Exemples de dénombrements attachés à des situations combinatoires.
Exemples de situations de probabilités issues d'expériences aléatoires (modèles d'urnes, jeux, ...).
Exemple d'emploi de dénombrements pour le calcul de probabilités.

## II. Analyse

Le programme d'analyse porte sur les suites et les fonctions numériques, ce qui permet d'étudier des situations discrètes et des situations continues.
— Pour les *suites*, l'objectif est double : fournir quelques outils efficaces pour l'étude du comportement global et asymptotique d'une suite donnée; explorer, sur des exemples simples, quelques méthodes d'approximations d'un nombre au moyen de suites.
— Pour les *fonctions*, l'objectif principal est d'*exploiter la dérivation et l'intégration* pour l'étude globale et locale des fonctions usuelles et des fonctions qui s'en déduisent de manière simple. *Quelques problèmes d'importance majeure fournissent un terrain pour cette étude* : étude de variations, recherche d'extremums, étude d'équations et d'inéquations, calcul de grandeurs géométriques, approximation d'une fonction au moyen de fonctions plus simples par encadrement.

Pour l'ensemble du programme d'analyse, il convient d'exploiter aussi bien les *aspects qualitatifs* (monotonie, convergence, ...) que les *aspects quantitatifs* (majorations, encadrements, vitesse de convergence, approximation à une précision donnée, ...). En plus, les *interactions entre suites et fonctions* sont à souligner : mise en valeur des analogies et des différences, passage du continu au discret (approximation de nombres attachés à des fonctions au moyen de suites) et du discret au continu (emploi des ressources du calcul différentiel pour l'étude de suites). En outre, les activités sur les suites et les fonctions ne sauraient se borner à des exercices portant sur des exemples donnés a priori; il convient aussi d'étudier des *situations* issues de l'algèbre, de la géométrie, des sciences et techniques et de la vie économique et sociale. Enfin, il revient au professeur d'organiser l'enseignement des divers points du programme concernant les suites et les fonctions : l'ordre adopté dans le texte qui suit correspond à une simple commodité de rédaction.

### 1. Suites numériques

Le programme se place dans le cadre des *suites définies pour tout entier naturel*; on remarquera brièvement que les notions et résultats s'étendent sans changement au cas des suites définies à partir d'un certain rang. L'étude des opérations sur les suites n'est pas au programme.

Pour la *convergence*, le point de vue adopté reste le même qu'en Première. Les définitions par ($\varepsilon$, N) et (A, N) et l'introduction de la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ sont hors programme.

**a) *Comportement global d'une suite***

Les premiers éléments ont été mis en place en Première (croissance, décroissance); on ajoutera la définition des suites monotones, des suites bornées et des suites périodiques.

Pour l'étude de la monotonie et l'obtention de majorations, on entraînera les élèves à exploiter la variation des fonctions, et, sur des exemples simples, le raisonnement par récurrence. Aucun énoncé général sur le comportement des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ n'est pas au programme.

**b) *Énoncés usuels sur les limites (admis)***

Comparaison :
— Si, à partir d'un certain rang, $x_n \geq u_n$ et si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim x_n = +\infty$; énoncé analogue lorsque $x_n \leq u_n$ et $\lim u_n = -\infty$.
— Si, à partir d'un certain rang, $|x_n - L| \leq u_n$, et si $\lim u_n = 0$, alors $\lim x_n = L$.
— Si, à partir d'un certain rang, $x_n \leq y_n$ et si $\lim x_n = L$ et $\lim y_n = L'$, alors $L \leq L'$.
— Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq x_n \leq v_n$, et si $\lim u_n = \lim v_n = L$, alors $\lim x_n = L$.

La signification intuitive des énoncés de ce paragraphe doit être mise en valeur. L'objectif est d'apprendre aux élèves à les mettre en œuvre sur des exemples simples. On évitera en outre de multiplier les exemples posés a priori : il convient d'exploiter les situations mentionnées dans les travaux pratiques (approximation de nombres, problèmes d'évolution...)

De manière générale, dans la plupart des situations de majorations et d'encadrements intervenant dans le programme d'analyse, les inégalités larges suffisent; les inégalités strictes doivent être réservées aux cas où elles sont indispensables.

Opérations :

— Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient.

Ces énoncés doivent couvrir d'une part le cas des limites finies, d'autres part celui des limites infinies. Toute règle relative à des cas d'indétermination est hors programme.

— Image d'une suite par une fonction : étant donné un fonction $f$ définie sur un intervalle I et une suite $(u_n)$ de points de I, si $\lim u_n = a$ (finie ou non) et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lambda$ (finie ou non), alors $\lim f(u_n) = \lambda$.

Bien entendu, cet énoncé, condensé pour faciliter la mémorisation, recouvre plusieurs cas qu'il convient de distinguer clairement et illustrer à l'aide d'exemples.

*Convergence de suites monotones* : toute suite croissante majorée converge.

On dispose d'un énoncé analogue pour les suites décroissantes.

***c) Suites de référence***

Limite et comparaison des comportements des suites $\ln(n)$; $(a^n)$ $a$ réel strictement positif; $(n^\alpha)$, $\alpha$ réel.

Cette question est à traiter en relation avec l'étude correspondante pour les fonctions. On enrichit ici le tableau des suites de référence introduites en Première, afin d'élargir le champ d'étude du comportement asymptotique des suites.

***Travaux pratiques***

Exemples d'étude du comportement de suites de la forme $u_n = f(n)$ (encadrement, monotonie, limite).

Certaines études de comportement asymptotique mettent en jeu des formes indéterminées; on se limitera à des exemples simples, et, en dehors des cas figurant explicitement au programme (comparaison des suites de référence), des indications doivent être fournies sur la méthode à suivre (emploi d'encadrements, image par une fonction,...).

Exemples d'étude du comportement de suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, et d'approximation d'un point fixe de $f$ à l'aide d'une telle suite.

Toute étude de ce type de suite devra comporter des indications sur la méthode à suivre. Dans le cas de l'approximation d'un point fixe $\alpha$ de $f$, on soulignera l'intérêt (théorique et numérique) d'une inégalité

$$|f(x) - \alpha| \leq k|x - \alpha| \text{ où } k < 1.$$

Exemples d'emploi de suites pour l'approximation d'un nombre.

Sur les exemples étudiés on mettra en évidence différentes étapes : construction d'un algorithme d'approximation au moyen d'une suite, étude de cette suite, obtention de la précision visée.

## 2. Fonctions numériques : étude locale et globale

Le programme se place dans le cadre des *fonctions définies sur un intervalle*. Pour l'essentiel, il porte sur le cas des *fonctions* bien régulières sur cet intervalle (c'est-à-dire possédant des dérivées jusqu'à un ordre suffisant), ce qui permet d'exploiter les outils du calcul différentiel. Quelques énoncés sur les *limites* figurent au programme : ils ne constituent pas un objectif en soi, mais visent uniquement à faciliter, le cas échéant, l'étude du *comportement aux bornes de l'intervalle* et notamment du comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$. Il n'y a pas lieu de multiplier les exemples posés a priori et on se gardera de tout excès de technicité. Enfin, il peut arriver qu'une situation mène à l'étude de *singularités* (points de discontinuité, points anguleux, ...) : la mise en place d'un cadre théorique est exclue, et, pour les discontinuités de la fonction ou de sa dérivée, on se bornera à des exemples où les limites à droite et à gauche (finies ou non) existent; en outre toutes les indications doivent être fournies aux élèves pour se ramener, par *restriction*, au cas des *fonctions définies sur un intervalle*.

La *continuité sur un intervalle* est introduite dans le seul but de fournir un langage efficace pour l'énoncé et l'emploi de quelques théorèmes usuels; on se bornera à l'étude de situations où les énoncés du programme suffisent pour établir simplement la continuité des fonctions mises en jeu.

Pour la *notion de limite*, le point de vue adopté reste le même qu'en Première. Les définitions par $(\varepsilon, \alpha)$, $(\varepsilon, A)$, ... sont hors programme.

***a) Langage des limites et de la continuité***

Les fonctions étudiées dans ce paragraphe sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Introduction des symboles

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ et } \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Introduction du symbole $\lim_{x \to a} f(x)$ lorsque $a$ appartient à I (cette limite est alors égale à $f(a)$), puis lorsque $a$ n'appartient pas à I.

Si $f$ admet une limite en tout point de I on dit que $f$ est continue sur I.

Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Prolongement par continuité d'une fonction définie et continue sur $]a, b]$ et admettant une limite en $a$ (ou continue sur $[a, b[$ et admettant une limite en $b$).

Toute fonction définie sur un intervalle I contenant un point $c$ et dont les restrictions pour $x \leqslant c$ et pour $x \geqslant c$ sont continues est continue sur I.

Image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone.

***b) Énoncés usuels sur les limites (admis) :***

— comparaison, compatibilité avec l'ordre.
— Somme, produit, quotient.
— Application à la recherche de la limite d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$.
— Limite d'une fonction composée : si

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{et si} \quad \lim_{y \to b} g(y) = \lambda$$

(où $a$, $b$, $\lambda$ sont finis ou non), alors

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \lambda.$$

***c) Calcul différentiel***

Dérivation d'une fonction composée.

Dérivées successives.

Il convient d'interpréter graphiquement et numériquement les notions et les énoncés de ce paragraphe, afin d'éclairer leur signification.

Pour cette brève introduction, on s'appuiera sur l'analogie avec le cas des suites, étudié en Première.

On s'appuiera sur le cas $\lim_{h \to 0} g(h)$, abordé en Première.
La continuité en un point, considérée isolément, ne doit pas faire l'objet d'une étude systématique. A propos d'exemples très simples d'étude locale (discontinuités, points anguleux), on introduira brièvement, par restriction, les notions de limite à gauche et de limite à droite, et, en particulier, de dérivée à gauche et de dérivée à droite. La notion de continuité sur d'autres parties de $\mathbb{R}$ que les intervalles est hors programme.

On observera que la conclusion de cet énoncé s'étend au cas d'une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b]$, et admettant $f(a)$ pour limite en $a$ (ou dérivable sur $[a, b[$, et admettant $f(b)$ pour limite en $b$).

Les différents énoncés sur la continuité ne constituent pas un objectif en soi; ils fournissent des jalons pour l'étude d'une fonction : intervalles de dérivabilité, limites aux bornes de tels intervalles, intervalles de continuité.

Lorsque l'intervalle considéré n'est pas un segment, les élèves doivent savoir déterminer les extrémités de l'intervalle image connaissant les limites de la fonction aux extrémités de son intervalle de définition.

Ces énoncés sont calqués sur ceux relatifs aux suites. Il n'y a pas lieu de s'attarder à leur présentation : l'objectif et d'apprendre aux élèves à les mettre en œuvre sur des exemples simples.

La démonstration de cette règle n'est pas au programme, mais on mettra en valeur l'idée fondamentale qui conduit au résultat : on néglige au cours des calculs les termes d'ordre supérieur à 1.

On utilisera les notions $f'$, $f''$, ... En liaison avec les sciences physiques, on donnera aussi les notations purement symboliques $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$ ; la notion de différentiel est hors programme. On mettra en évidence la relation entre la monotonie de la dérivée et la position de la courbe par rapport aux tangentes; mais aucune connaissance spécifique n'est exigible des élèves sur ces questions, et notamment sur la convexité et les points d'inflexion.

*Inégalité des accroissements finis* : étant donné une fonction $f$ dérivable sur un segment $[a, b]$,
— Si $m \leq f' \leq M$ et si $a < b$, alors

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a);$$

— Si $|f'| \leq M$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M\,|b-a|$.

Ces résultats sont déduits de l'énoncé admis en classe de Première sur le sens de variation des fonctions. Le théorème de Rolle et la formule $f(b) - f(a) = (b-a) \quad f'(c)$ sont en dehors du programme.

*Primitives d'une fonction continue sur un intervalle.*
Définition. Primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Deux primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées.

L'existence des primitives est admise.

***d) Fonctions usuelles***

— Fonction logarithme népérien et fonction exponentielle; notation ln et exp. Relation fonctionnelle, dérivation, comportement asymptotique. Approximation par une fonction affine, au voisinage de 0, des fonctions $h \longmapsto \exp h$ et $h \longmapsto \ln(1+h)$.

Le mode d'introduction des fonctions ln et exp n'est pas imposé. L'existence et la dérivabilité de ces fonctions peuvent être admises.
Hormis les deux exemples de l'exponentielle et de la racine $n$-ième, l'étude des fonctions réciproques n'est pas au programme.

Nombre $e$; notation $e^x$, $a^b$ ($a$ strictement positif, $b$ réel).

— Fonctions puissances $x \longmapsto x^n$ ($x$ réel et $n$ entier) et $x \longmapsto x^\alpha$ ($x$ strictement positif et $\alpha$ réel). Dérivation, comportement asymptotique. Cas où $\alpha = \frac{1}{n}$ ($n$ entier strictement positif); notation $\sqrt[n]{x}$ ($x$ positif).

En liaison avec l'enseignement d'autres disciplines on mentionnera la fonction logarithme décimal $x \longmapsto \log x$. Les élèves doivent avoir une bonne pratique des représentations graphiques des fonctions étudiées dans ce paragraphe et savoir en déduire celles des fonctions directement apparentées, telles que $t \longmapsto \cos \omega t$, $t \longmapsto t^\alpha$, $t \longmapsto a^t$.

— Fonctions circulaires sinus et cosinus, fonction tangente; notations sin, cos et tan.

Croissance comparée des fonctions de référence :
$x \longmapsto \exp x$, $\quad x \longmapsto x^\alpha$, $\quad x \longmapsto \ln x$ :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{x^\alpha} = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} x^\alpha \cdot \exp(-x) = 0;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \to 0} x^\alpha \cdot \ln x = 0.$$

Certaines situations mettent en jeu des formes indéterminées : on se bornera à des exemples simples et, en dehors des cas figurant explicitement au programme (comportement des fonctions usuelles, définition du nombre dérivé), des indications devront être données sur la nature du résultat visé et sur la méthode à suivre (emploi d'encadrements, composition de fonctions...).

***Travaux pratiques***

Étude du sens de variation d'une fonction, recherche de son signe, recherche des extremums.
Recherche d'asymptotes; exemples d'étude du comportement asymptotique d'une fonction.

Pour l'étude des comportements asymptotiques en $+\infty$ (ou en $-\infty$), on exploitera la comparaison de la fonction donnée $f$ à une fonction plus simple $g$ telle que $\lim\limits_{+\infty} (f-g) = 0$; des indications doivent être fournies sur la forme de la fonction $g$ à utiliser.

Exemples de tracé de la courbe représentative d'une fonction.
Exemples d'étude d'équations $f(x) = \lambda$ ou d'inéquations $f(x) \leqslant \lambda$.
Exemples d'emploi de majorations et d'encadrements d'une fonction par des fonctions plus simples (recherche de valeurs approchées en un point, recherche de limites, ...). Exemples d'emploi d'inégalité sur les dérivées pour l'obtention de telles majorations.

Pour tous les problèmes de majoration, d'encadrement et d'approximation des fonctions, des indications doivent être données sur la méthode à suivre. L'exploitation, sur des exemples simples tels que $e^x$, $\ln(1+x)$, $\sin x$, du théorème sur le sens de variation, appliqué aux dérivées d'ordre convenable d'une fonction auxiliaire, constitue un outil intéressant. Cependant aucun énoncé sur les majorations tayloriennes n'est au programme, et il n'y a pas de catalogue de situations classiques à mémoriser.

Exemples de recherche de solutions approchées d'une équation numérique.

On pourra sur des exemples, explorer et itérer quelques méthodes (dichotomie, tangente, interpolation linéaire, ...) mais aucune connaissance sur ces méthodes n'est exigible des élèves.

### 3. Calcul intégral

***a) Intégrale d'une fonction continue sur un segment***

Étant donné une fonction $f$ continue sur un intervalle I et un couple $(a, b)$ de points de I, le nombre $F(b) - F(a)$, où F est une primitive de $f$, est indépendant du choix de F; on l'appelle intégrale de $a$ à $b$ de $f$ et on le note $\int_a^b f(t)\,dt$.

Dans le cas d'une fonction de signe constant, interprétation graphique de l'intégrale à l'aide d'une aire.

Par suite, étant donné un point $a$ de I, la fonction $x \longrightarrow \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de $f$ sur I prenant la valeur zéro au point $a$. En dehors de ce cas, aucune connaissance n'est exigible sur la variation d'une intégrale en fonction des bornes d'intégration. Aucune théorie de la notion d'aire n'est au programme : on admettra son existence et ses propriétés élémentaires. Les élèves doivent connaître l'aire des domaines usuels : rectangle, triangle, trapèze, secteur d'un disque.

***b) Propriétés de l'intégrale***

Relation de Chasles.
Linéarité :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt.$$

Positivité : si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité.
Inégalité de la moyenne :

— si $m \leqslant f \leqslant M$ et $a \leqslant b$, alors

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant M(b-a).$$

— si $|f| \leqslant M$, alors

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant M \cdot |b-a|.$$

Valeur moyenne d'une fonction.

Il convient d'interpréter en termes d'aires certaines de ces propriétés (relation de Chasles, intégration d'inégalités, valeur moyenne d'une fonction, ...) afin d'éclairer leur signification.

La notion de valeur moyenne est à relier à l'enseignement de la physique.

***c) Techniques de calcul***

— Lecture inverse de formules de dérivation : primitives des fonctions de la forme

$$x \longmapsto g'(ax+b),\ (\exp g)\,g',\ g^\alpha g',$$

où $\alpha \neq -1$, et $\dfrac{g'}{g}$

($g$ étant à valeurs strictement positives).
— Intégration par parties.

Les élèves doivent savoir reconnaître si un exemple donné de fonction est de l'une de ces formes. Ils doivent aussi savoir exploiter une périodicité ou une symétrie pour le calcul d'intégrales, mais toute formule de changement de variable est hors programme.

*d) Équations différentielles linéaires à coefficients constants sans second membre du premier ou du second ordre*

Résolution de l'équation du premier ordre : existence et unicité de la solution vérifiant une condition initiale donnée.

Résolution de l'équation du second ordre : recherche de solutions à l'aide de l'équation caractéristique; existence et unicité (admises) de la solution vérifiant des conditions initiales données.

Pour ces questions les élèves peuvent utiliser sans justification les fonctions $t \longrightarrow e^{\lambda t}$, $\lambda$ complexe, les solutions étant finalement exprimées sous forme réelle. Cette méthode n'est pas exigible.

### *Travaux pratiques*

Exemples de calcul d'intégrales par primitivation et par intégration par parties.

Exemples d'encadrement d'une intégrale au moyen d'un encadrement de la fonction à intégrer.

On se limitera à des exemples très simples et des indications pour l'encadrement de la fonction à intégrer devront être fournies.

Exemples de calcul de valeurs approchées d'intégrales.

On pourra, sur des exemples simples, décrire et appliquer quelques méthodes usuelles (rectangles, point milieu, trapèzes) et comparer leurs performances. Mais aucune connaissance n'est exigible des élèves sur ces questions, et toutes les indications nécessaires devront être fournies.

Exemples de calcul d'aires planes à l'aide du calcul intégral, et de calcul de volumes de solides usuels à l'aide de la formule $v = \int_a^b S(z)\,dz$. Volume d'une boule, d'un prisme, d'un cylindre, d'une pyramide, d'un cône.

En liaison avec l'enseignement des autres sciences, on pourra être amené à donner des applications au calcul d'autres grandeurs géométriques, mécaniques ou physiques. Mais ces applications ne figurent pas au programme de mathématiques.

Exemples simples d'étude de phénomènes continus satisfaisant à une loi d'évolution et à une condition initiale menant à une équation différentielle linéaire à coefficients constants sans second membre du premier ou du second ordre.

On mettra en évidence certains comportements mathématiques (amortissement, oscillation...), mais aucune connaissance sur ces questions n'est exigible des élèves.

Certaines de ces situations seront choisies en relation avec l'enseignement des sciences physiques (mécanique du point, circuits électriques, ...).

# QUELQUES NOTIONS FONDAMENTALES

## I RELATION. APPLICATIONS

### Relation d'équivalence

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation d'équivalence si et seulement si $\mathcal{R}$ est *réflexive :* quel que soit $x$ de E, on a $x \mathcal{R} x$.
$\mathcal{R}$ est *symétrique :* quels que soient $x$ et $y$ de E,

$$\text{si} \quad x \mathcal{R} y, \quad \text{alors} \quad y \mathcal{R} x.$$

$\mathcal{R}$ est *transitive :* quels que soient $x$, $y$, $z$ de E,

$$\text{si} \quad x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z, \quad \text{alors} \quad x \mathcal{R} z.$$

On appelle *classe d'équivalence* de l'élément $x$ l'ensemble des éléments équivalents à $x$. L'ensemble des classes d'équivalence est une partition de E appelée *ensemble quotient* de E par $\mathcal{R}$ et se note $E/\mathcal{R}$.

### Relation d'ordre

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation d'ordre si et seulement si $\mathcal{R}$ *est réflexive, transitive, antisymétrique* (ce qui veut dire : quels que soient $x$ et $y$ de E,

$$\text{si} \quad x \mathcal{R} y \quad \text{et} \quad y \mathcal{R} x, \quad \text{alors} \quad x = y).$$

L'ordre est *total* si, quels que soient $x$ et $y$ de E, on a $x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x$.
L'ordre est *partiel* s'il existe des éléments $x$ et $y$ de E tels que l'on n'ait ni $x \mathcal{R} y$, ni $y \mathcal{R} x$.

### Injection ou application injective de E dans F

Une application $f : E \longrightarrow F$ est injective si et seulement si l'on a l'une des propriétés équivalentes :

- $(\forall x, x') \in E^2) \qquad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$.
- $(\forall (x, x') \in E^2) \qquad f(x) = f(x') \implies x = x'$.
- Tout élément de F admet au plus un antécédent dans E.

## Surjection ou application surjective de E sur F

Une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective si et seulement si l'on a l'une des propriétés équivalentes :

- $f(E) = F$.
- Tout élément de F admet **au moins** un antécédent dans E.

## Bijection ou application bijective de E sur F

Une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si et seulement si l'on a l'une des propriétés équivalentes :

- $f$ est injective et surjective.
- Tout élément de F admet un antécédent **unique** dans E.

## Composition des applications

**1.** La composition des applications est associative ce qui signifie que, quelles que soient les applications $f$, $g$, $h$ telles que :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H,$$

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

**2.** La composée de deux injections est une injection.
La composée de deux surjections est une surjection.
La composée de deux bijections est une bijection.

## Involution ou application involutive

Une application $f : E \longrightarrow E$ est une involution si et seulement si l'on a l'une des propriétés équivalentes :

- $f$ est bijective et $f = f^{-1}$.
- $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

## Restriction d'une application. Prolongement

Soit une application $f : E \longrightarrow F$ et $A \subset E$. La restriction de $f$ à la partie A est l'application $g : A \longmapsto F$ telle que :

$$(\forall x \in A) \quad g(x) = f(x).$$

On dit aussi que $f$ est un prolongement de $g$ à E.

## II STRUCTURES

### Groupe

$(G, \star)$ est un groupe si et seulement si :

- G est muni d'une loi de composition *interne* $\star$ (application de $G \times G$ dans G);
- la loi $\star$ est *associative* (quels que soient $a$, $b$, $c$ de G : $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$);
- elle admet un *élément neutre* (il existe $e$ de G tel que, quel que soit $a$ de G, $a \star e = e \star a = a$);
- tout élément $a$ de G admet un *symétrique* $a'$ dans G pour la loi $\star$ $(a \star a' = a' \star a = e)$.

### Groupe commutatif

Le groupe $(G, \star)$ est commutatif si et seulement si la loi $\star$ est commutative (quels que soient $a$ et $b$ de G : $a \star b = b \star a$).

### Sous-groupe

Soit un groupe $(G, \star)$. Une partie H de G est un sous-groupe de G pour la loi $\star$ si et seulement si $(H, \star)$ est un groupe.

### Corps commutatif

$(K, +, \times)$ est un corps commutatif si et seulement si :

- $(K, +)$ est un *groupe commutatif.*
- K est muni d'une loi *interne* $\times$, *associative, commutative, distributive* par rapport à la loi $+$ (quels que soient $a$, $b$, $c$ de K : $a(b+c) = ab + ac$ et $(b+c)a = ba + ca$), admettant un *élément neutre* et tout élément non nul de K admet un *symétrique* pour la loi $\times$.

### Sous-corps commutatif

Soit $(K, +, \times)$ un corps commutatif. Une partie L de K est un sous-corps commutatif de $(K, +, \times)$ si et seulement si $(L, +, \times)$ est un corps commutatif.

### Homomorphisme. Isomorphisme

Soit $(E, \star)$ et $(F, \circ)$ deux ensembles munis respectivement des lois de composition internes $\star$ et $\circ$, une application $f : E \longmapsto F$ est un *homomorphisme* (on dit aussi morphisme) si et seulement si :

$$(\forall (x, y) \in E^2) \quad f(x \star y) = f(x) \circ f(y).$$

Un homomorphisme bijectif est appelé *isomorphisme.*

### $\mathbb{R}$-Espace vectoriel ou espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

$(\mathcal{V}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

- $(\mathcal{V}, +)$ est un groupe commutatif;
- la loi de composition externe $\cdot$ (application de $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$) possède les propriétés suivantes : quels que soient les éléments $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ et les réels $\lambda$ et $\mu$,

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$
$$\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{v}$$
$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{v}$$
$$\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}.$$

### Sous-espace vectoriel

■ *Définition*

Une partie $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ si et seulement si $\mathcal{V}'$ est un espace vectoriel pour les deux lois $+$ et $\cdot$ de $\mathcal{V}$.

■ *Caractérisation*

$\mathcal{V}'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$ si et seulement s'il possède l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} \mathcal{V}' \text{ est une partie non vide de } \mathcal{V} \\ (\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}'^2) \quad \vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{V}' \text{ (stabilité pour la loi +)} \\ (\forall \vec{v} \in \mathcal{V}')(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad \lambda \cdot \vec{v} \in \mathcal{V}' \text{ (stabilité pour la loi } \cdot) \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \mathcal{V}' \text{ est une partie non vide de } \mathcal{V} \\ (\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}'^2)(\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2) \quad \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in \mathcal{V}' \\ \text{(stabilité par combinaisons linéaires).} \end{cases}$$

## III COORDONNÉES

### Le plan P est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont *colinéaires* (on dit aussi *linéairement dépendants* ou encore que la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est *liée*)
si et seulement si $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$ avec $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$
si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$ est nul.
- Soit la droite D d'équation $ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$.
La direction de D est la droite vectorielle $\vec{D}$ d'équation $ax + by = 0$.
- Un vecteur directeur de D est $\vec{w}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

### P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ c'est-à-dire $xx' + yy' = 0$.

Un vecteur normal à D est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

- La distance de $M(x_0, y_0)$ à D est : $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

### L'espace E est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

- Soit le plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
La direction de P est le plan vectoriel $\vec{P}$ d'équation $ax + by + cz = 0$.
- Des vecteurs de $\vec{P}$ sont les vecteurs de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### E est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

- Un vecteur normal à P est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
- La distance de $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à P est : $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

## IV CALCULS ALGÉBRIQUES

### Identités remarquables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^p a^{n-p} b^p + \dots + b^n$$

(cf. § 8.7)

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+a^{n-p}b^{p-1}+\ldots+b^{n-1})$$

### Forme canonique de $ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}. \end{aligned}$$

On ne retiendra pas cette dernière formule mais la méthode qui conduit au résultat. De même, il est souvent commode de mettre $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ sous la forme $A+\dfrac{B}{cx+d}$.

## V FORMULES DE TRIGONOMÉTRIE

Le plan P étant orienté et rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\text{dét}_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \frac{\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{xy'-yx'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

### Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a \tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$$

## Formules de multiplication par deux

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\text{Si } \tan\frac{x}{2} = t, \quad \begin{cases} \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \tan x = \dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

## Transformation de produits en sommes

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

## Transformation de sommes en produits

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

# 1 SUITES NUMÉRIQUES

## 1.1 DÉFINITIONS. EXEMPLES

### a) Suite définie par son terme général en fonction de $n$

Rappelons qu'une suite numérique est une application d'une partie D de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u : \mathrm{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n). \end{aligned}$$

Au lieu de $u(n)$ on écrit $u_n$, l'*indice* ou *rang* de $u_n$ étant $n$. On dit que $u_n$ est le *terme général* de la suite. L'*ensemble de définition* de la suite est D. La suite numérique $u$ se note aussi $(u_n)_{n \in \mathrm{D}}$ ou plus simplement $(u_n)$.
*Nous dirons «suite» au lieu de «suite numérique» et nous supposerons $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$ ($n_0$ entier naturel donné).*

EXEMPLES On peut définir des suites de la façon suivante :

- pour $n$ entier $\geqslant 2$, $\quad u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$
- pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n = \sin \dfrac{n\pi}{3}$
- pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad w_n = \mathrm{E}\left(\dfrac{n}{5}\right) - \dfrac{n}{5}$

où $\mathrm{E}\left(\dfrac{n}{5}\right)$ est la partie entière de $\dfrac{n}{5}$.

### b) Suite définie par $u_0$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = f(u_n)$

Une suite peut aussi être définie par la donnée de $u_0$ et d'une *relation de récurrence :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

**EXEMPLES** • Vous avez étudié en 1re la suite définie par $u_0$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad u_{n+1} = u_n + a.$$

Une telle suite est une **suite arithmétique** de raison le réel donné $a$.
Rappelons que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad u_n = u_0 + na.$$

• Vous avez également étudié en 1re la suite définie par $u_0$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad u_{n+1} = au_n.$$

Une telle suite est une **suite géométrique** de raison le réel donné $a$.
Rappelons que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \qquad u_n = a^n u_0. \qquad (1)$$

Remarquons que si $a \neq 0$, $a^0 = 1$ et $u_0 = a^0 u_0$ donc (1) est encore vraie pour $n = 0$.
Mais si $a = 0$, $a^0$ n'a pas de sens et (1) n'est pas vraie pour $n = 0$.

• Nous étudierons plus loin la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

**REMARQUE** On verra en exercices, à la fin du chapitre, d'autres modes de détermination d'une suite.

## 1.2 COMPORTEMENT GLOBAL D'UNE SUITE

### a) Croissance et décroissance

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in D}$ est **croissante** si et seulement si, quels que soient $n$ et $n+1$ de D :

$$u_n \leqslant u_{n+1}.$$

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in D}$ est **décroissante** si et seulement si, quels que soient $n$ et $n+1$ de D :

$$u_n \geqslant u_{n+1}.$$

Les suites croissantes et les suites décroissantes sont dites **monotones**.
Si les inégalités précédentes sont remplacées par des inégalités strictes ($u_n < u_{n+1}$ ou $u_n > u_{n+1}$), on dit que la suite est **strictement** croissante ou strictement décroissante ou strictement monotone.

**EXEMPLE 1** Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = n^2 + n - 1.$$

La fonction $f : x \longmapsto x^2 + x - 1$ définie sur $\mathbb{R}_+$ admet une dérivée définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f'(x) = 2x + 1.$$

Puisque $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc sa restriction à $\mathbb{N}$, c'est-à-dire la suite $(u_n)$, est strictement croissante.

**EXEMPLE 2** Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{n^2}{2^n}.$$

Si $n \geqslant 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{2}$. Nous aurons $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ si et seulement si :

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{2} < 1$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 < 2$$

$$(n+1)^2 < 2n^2$$

$$n+1 < \sqrt{2}n$$

$$(\sqrt{2}-1)n > 1$$

$$n > \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$n > \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$n > \sqrt{2}+1$$

$\sqrt{2}+1 \approx 2{,}414$ donc la suite est strictement décroissante pour $n \geqslant 3$.

**EXEMPLE 3** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et

$(\forall n \in \mathbb{N})$ $$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}.$$

Pour étudier la monotonie de cette suite, au lieu d'étudier le *rapport* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ comme précédemment, étudions la *différence* $u_{n+1} - u_n$.

Démontrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\, u_{n+1} - u_n > 0$. On a :

$$u_1 - u_0 = \sqrt{3} - 1 > 0.$$

Si, pour un entier naturel $n$, $u_{n+1} - u_n > 0$ alors :

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \sqrt{2+u_{n+1}} - u_{n+1} = \sqrt{2+u_{n+1}} - \sqrt{2+u_n}$$

$$= \frac{u_{n+1} - u_n}{\sqrt{2+u_{n+1}} + \sqrt{2+u_n}} > 0.$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\, u_{n+1} - u_n > 0$. La suite est strictement croissante.

### b) Suite périodique

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in D}$ est **périodique, de période** P, s'il existe un entier naturel P non nul tel que, quel que soit $n$ de D, $n+P$ appartient à D et $u_{n+P} = u_n$.

Remarquons que si P est une période, 2P, 3P, ..., $k$P $(k \in \mathbb{N}^*)$ sont aussi des périodes. On cherchera la plus petite période, élément de $\mathbb{N}^*$.

**EXEMPLE** La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sin \frac{n\pi}{3}$ a pour période $P = 6$ car

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad u_{n+6} = \sin(n+6)\frac{\pi}{3} = \sin\left(n\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin\frac{n\pi}{3} = u_n.$$

## c) Suite majorée, minorée, bornée

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in D}$ est **majorée** si et seulement s'il existe un réel M tel que :

$$(\forall n \in D) \qquad u_n \leq M.$$

On dit qu'elle est **minorée** si et seulement s'il existe un réel $m$ tel que :

$$(\forall n \in D) \qquad u_n \geq m.$$

Une suite majorée et minorée est dite **bornée.**

**EXEMPLE 1** Quel que soit l'entier naturel $n$, on a :

$$-1 \leq \cos(n^2+1) \leq 1$$

donc la suite de terme général $\cos(n^2+1)$ est majorée par 1, minorée par $-1$. Elle est bornée.

**EXEMPLE 2** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

Calculons les premiers termes :

$$u_1 = \frac{1}{3} + 4 = \frac{13}{3} \simeq 4{,}333$$

$$u_2 = \frac{1}{3} \times \frac{13}{3} + 4 = \frac{49}{9} \simeq 5{,}444.$$

Démontrons par récurrence que tous les termes sont inférieurs à 6.

- Cela est vrai, pour $u_0$, $u_1$, $u_2$.
- Si $u_n \leq 6$, alors $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{3} \times 6 + 4$$

$$u_{n+1} \leq 6.$$

La suite $(u_n)$ est donc majorée par 6.
Elle est aussi minorée par 0 (par récurrence encore, vous trouverez que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n \geq 0$). La suite est donc bornée.

## 1.3 LIMITE D'UNE SUITE

### a) Symboles $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = -\infty$

**Définitions**

> **1. On dit que la suite $(u_n)$ a pour limite $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$ si, quel que soit le réel strictement positif donné, on sait trouver un rang à partir duquel $u_n$ est supérieur à ce réel. On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$.**
>
> **2. On dit que la suite $(u_n)$ a pour limite $-\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$ si $\lim\limits_{n \to +\infty} (-u_n) = +\infty$. On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = -\infty$.**

Quel que soit le réel strictement positif $x$, nous admettrons qu'il est toujours possible de trouver $10^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ tel que $10^p \geqslant x$. Donc pour montrer que $u_n \geqslant x$, il suffira de montrer que $u^n \geqslant 10^p$.

**EXEMPLE 1** Soit la suite $(n^\alpha)$ définie sur $\mathbb{N}$, $\alpha$ étant un entier naturel non nul donné.

Si $\alpha = 1$, on a $n^\alpha = n$

Si $\alpha > 1$ et $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} n^\alpha &= n \times n \times n \times \ldots \times n \\ n^\alpha &\geqslant n \times 1 \times 1 \times \ldots \times 1 \\ n^\alpha &\geqslant n. \end{aligned}$$

Nous avons $n^\alpha \geqslant 10^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ si $n \geqslant 10^p$.

**EXEMPLE 2** Soit la suite $(\sqrt{n})$ définie sur $\mathbb{N}$.

Nous avons $\sqrt{n} \geqslant 10^p$ si $n \geqslant 10^{2p}$.

**EXEMPLE 3** Soit la suite géométrique $(a^n)$ définie sur $\mathbb{N}$, $a$ étant un réel strictement supérieur à 1.

Posons $a = 1 + \lambda$ $(\lambda > 0)$ et montrons par récurrence que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ :

$$a^n \geqslant 1 + \lambda n. \qquad (1)$$

- (1) est vraie pour $n = 0$;
- si $a^n \geqslant 1 + \lambda n$, alors

$$\begin{aligned} a^{n+1} &= a^n a \\ a^{n+1} &\geqslant (1 + \lambda n)(1 + \lambda) \\ a^{n+1} &\geqslant 1 + \lambda(n+1) + \lambda^2 n \\ a^{n+1} &\geqslant 1 + \lambda(n+1). \end{aligned}$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\qquad a^n \geqslant 1 + \lambda n$.

Il en résulte que

$(\forall n \in \mathbb{N})$ $\qquad a^n > \lambda n$

nous aurons donc $a^n \geqslant 10^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ si

$$\begin{aligned} \lambda n &\geqslant 10^p \\ n &\geqslant \frac{10^p}{\lambda}. \end{aligned}$$

Nous retiendrons les résultats :

**Théorème**

> **Les suites $(n^\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $(\sqrt{n})$, $(a^n)$ avec $a$ réel $>1$ ont pour limite $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$.**

## b) Symboles $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \ell$

**Définitions**

> **1. On dit que la suite $(u_n)$ a pour limite 0 ou converge vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$ si, quel que soit le réel strictement positif donné, on sait trouver un rang à partir duquel $|u_n|$ est inférieur à ce réel. On écrit**
>
> $$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = 0.$$
>
> **2. On dit que la suite $(u_n)$ a pour limite $l$ ou converge vers $l$ quand $n$ tend vers $+\infty$ si $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - l) = 0$. On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = l$.**

Quel que soit le réel strictement positif $x$, nous admettrons qu'il est toujours possible de trouver $10^{-p}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ tel que $10^{-p} \leqslant x$. Donc pour montrer, dans la définition 1, que $|u_n| \leqslant x$ il suffira de montrer que $|u_n| \leqslant 10^{-p}$. Lorsque $u_n \geqslant 0$, au lieu de $|u_n|$ on peut écrire $u_n$.

**EXEMPLE 1** Soit la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ définie sur $\mathbb{N}^*$, $\alpha$ étant un entier naturel non nul donné. On a vu que $n^\alpha \geqslant n$ donc $\frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n}$ et nous avons donc $\frac{1}{n^\alpha} \leqslant 10^{-p}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ si $\frac{1}{n} \leqslant 10^{-p}$ donc pour $n \geqslant 10^p$.

**EXEMPLE 2** Soit la suite $\frac{1}{\sqrt{n}}$ définie sur $\mathbb{N}^*$. Nous avons $\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 10^{-p}$ si $\sqrt{n} \geqslant 10^p$ donc si $n \geqslant 10^{2p}$.

**EXEMPLE 3** Soit la suite $(a^n)$ définie sur $\mathbb{N}$ avec $a$ réel donné, $0 < a < 1$. Nous avons $\frac{1}{a} > 1$ et d'après, l'étude du § 1.3 a (exemple 3), $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\left(\frac{1}{a}\right)^n > \lambda n$ $\left(\text{en posant } \frac{1}{a} = 1 + \lambda\right)$. Donc on a

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$
$$a^n < \frac{1}{\lambda n}.$$

Nous aurons $a^n \leqslant 10^{-p}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ si $\frac{1}{\lambda n} \leqslant 10^{-p}$ donc si $n \geqslant \frac{10^p}{\lambda}$.

Nous retiendrons les résultats :

**Théorème**

> **Les suites $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $(a^n)$ avec $0 < a < 1$ ont pour limite 0 quand $n$ tend vers $+\infty$.**

### c) Suite convergente. Suite divergente

Lorsqu'une suite converge vers un réel $l$, on dit qu'elle est **convergente.** Nous admettrons que cette limite $l$, quand elle existe, est unique. Lorsqu'une suite n'est pas convergente, on dit qu'elle est **divergente** : sa limite est $+\infty$ ou $-\infty$ ou la suite n'admet aucune limite. Par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ prend les valeurs 1 ou $-1$ : elle est divergente.

## 1.4 MAJORATION OU MINORATION D'UNE SUITE PAR UNE AUTRE SUITE

Nous admettrons les théorèmes suivants :

**Théorèmes**

> **1. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = +\infty$,**
>
> **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$.
>
> **2. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = -\infty$,**
>
> **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = -\infty$.
>
> **3. Si, à partir d'un certain rang, $|u_n - l| \leq v_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = 0$,**
>
> **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = l$.
>
> **4. Si, à partir d'un certain rang,**
>
> $w_n \leq u_n \leq v_n$ **et si** $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} (w_n) = l$, **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = l$.

**REMARQUES**

1. Le théorème 2 est une conséquence immédiate du théorème 1 [considérer, dans le théorème 1, les suites $(-u_n)$ et $(-v_n)$].

2. Le théorème 3 est un cas particulier du théorème 4 [en effet, $|u_n - l| \leq v_n$ peut s'écrire $-v_n \leq u_n - l \leq v_n$, lorsque $v_n \geq 0$].

3. Le théorème 4 est encore vrai si l'une des suites $(v_n)$ ou $(w_n)$ est constante à partir d'un certain rang, sa valeur étant $l$.

4. Il sera commode, quand cela est simple, de prendre pour suites $(v_n)$ ou $(w_n)$ de comparaison l'une des suites de référence du paragraphe 1.3 ou encore l'une des suites, si $\lambda > 0$, de terme général :

$$\lambda n^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{N}^*), \quad \lambda\sqrt{n}, \quad \lambda a^n \ (a > 1)$$

$$\frac{\lambda}{n^\alpha} (\alpha \in \mathbb{N}^*), \quad \frac{\lambda}{\sqrt{n}}, \quad \lambda a^n \ (0 < a < 1).$$

Nous allons en donner des exemples.

**EXEMPLE 1** Soit la suite de terme général $u_n = 3n^2 - n - 5$.
Cherchons une minoration de la forme $3n^2 - n - 5 \geq \lambda n^\alpha$. Pour $n$ assez grand, on peut « négliger » $-n-5$ devant $3n^2$ et penser que $u_n \approx 3n^2$ mais $u_n < 3n^2$. Montrons alors, qu'à partir d'un certain rang,

$$\begin{aligned} 3n^2 - n - 5 &\geq 2n^2 \\ 3n^2 - 2n^2 - n - 5 &\geq 0 \\ n^2 - n - 5 &\geq 0. \end{aligned}$$

Le trinôme $x^2 - x - 5$ admet pour racines $\frac{1-\sqrt{21}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$. Il est nul ou du signe du coefficient de $x^2$ pour $x \in \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{21}}{2}, +\infty\right[$.

Nous avons $\frac{1+\sqrt{21}}{2} \approx 2{,}791$. Donc pour $n \geq 3$, on a :

$$3n^2 - n - 5 \geq 2n^2.$$

D'après le théorème 1, $\lim_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$.

**EXEMPLE 2** Soit la suite de terme général $u_n = n^4(\cos n - 2)$.
Pour tout entier naturel $n$ :

$$\begin{aligned} \cos n &\leq 1 \\ \cos n - 2 &\leq 1 - 2 \\ \cos n - 2 &\leq -1 \\ n^4(\cos n - 2) &\leq -n^4. \end{aligned}$$

On a $\lim_{n \to +\infty} (-n^4) = -\infty$ donc, d'après le théorème 2, $\lim_{n \to +\infty} (u_n) = -\infty$.

**EXEMPLE 3** Soit la suite de terme général $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$.

$$u_n = \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{n - (n+1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

$$|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}.$$

Pour $n \geq 1$, nous avons $|u_n| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = 0$ donc, d'après le théorème 3, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$.

**EXEMPLE 4** Soit la suite de terme général $u_n = \frac{n^2+1}{2n^2+3}$.

Pour $n$ assez grand, on peut « négliger » 1 et 3 devant $n^2$ et $2n^2$ et penser que $u_n \approx \frac{n^2}{2n^2}$ c'est-à-dire $u_n \approx \frac{1}{2}$. Plus précisément :

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n^2+1}{2n^2+3} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|2n^2+2-2n^2-3|}{2(2n^2+3)} = \frac{1}{2(2n^2+3)}.$$

Pour $n \geqslant 1$, nous avons $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{4n^2}$ (car $4n^2+6 \geqslant 4n^2$) et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4n^2}\right) = 0$ donc, d'après le théorème 3, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \frac{1}{2}$.

**EXEMPLE 5** Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$. Cherchons à encadrer $(u_n)$ par deux suites de même limite. On peut remarquer que, pour tout entier $p$ tel que $1 \leqslant p \leqslant n$, on a :

$$n^2+1 \leqslant n^2+p \leqslant n^2+n$$

donc

$$\frac{1}{n^2+n} \leqslant \frac{1}{n^2+p} \leqslant \frac{1}{n^2+1}$$

$$\frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^2+1}$$

comme il y a $n$ fractions dans chaque somme :

$$n \times \frac{n}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant n \times \frac{n}{n^2+1}$$

on peut écrire :

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^2+1}{n^2+1}$$

$$\frac{n}{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1.$$

Montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ :

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{donc} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

D'où, d'après le théorème 4 (cf. remarque 3), $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 1$.

## 1.5 OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Il n'est pas toujours simple de majorer ou minorer une suite par une autre suite. On démontre les théorèmes suivants que nous admettrons :

**Théorèmes**

| si $u_n$ a pour limite : | et si $v_n$ a pour limite : | alors $u_n + v_n$ a pour limite : |
|---|---|---|
| $l$ | $l'$ | $l + l'$ |
| $l$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $l$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | on ne peut conclure |

| si $\lvert u_n \rvert$ a pour limite : | et si $\lvert v_n \rvert$ a pour limite | alors $\lvert u_n v_n \rvert$ a pour limite : |
|---|---|---|
| $l$ | $l'$ | $ll'$ |
| $l \neq 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $0$ | $+\infty$ | on ne peut conclure |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

| si $\lvert u \rvert$ a pour limite : | et si $\lvert v_n \rvert$ a pour limite : | alors $\left\lvert \frac{u_n}{v_n} \right\rvert$ a pour limite : |
|---|---|---|
| $l$ | $l' \neq 0$ | $\frac{l}{l'}$ |
| $l \neq 0$ | $0$ | $+\infty$ |
| $0$ | $0$ | on ne peut conclure |
| $l$ | $+\infty$ | $0$ |
| $+\infty$ | $l'$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | on ne peut conclure |

**REMARQUES** 1. Les théorèmes s'appliquent encore quand $(u_n)$ est une suite constante, la limite de cette suite étant la valeur de cette constante.

2. Dans certains cas nous avons mis « on ne peut conclure ». Cela signifie qu'il n'y a pas de théorème général relatif à chacun de ces cas. On étudiera les limites correspondantes sur les exemples rencontrés.

3. Dans le deuxième et le troisième tableau nous avons mis, pour simplifier, des valeurs absolues. Il restera à préciser le signe de la limite de $u_n v_n$ et de $\frac{u_n}{v_n}$ sur les exemples rencontrés, si $u_n v_n$ et $\frac{u_n}{v_n}$ gardent un signe constant à partir d'un certain rang.

**EXEMPLE 1** $P(n) = n^5 - 2n^3 - 1 = n^5\left(1 - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^5}\right)$. Utilisons les théorèmes précédents :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{2}{n^2}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{n^5}\right) = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) = 1 \text{ (cf. 1}^{\text{er}} \text{ tableau 1}^{\text{re}} \text{ ligne)}$$

$$\lim_{n \to +\infty} (n^5) = +\infty$$

d'où
$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(n) = +\infty \text{ (cf. 2}^{\text{e}} \text{ tableau 2}^{\text{e}} \text{ ligne).}$$

Plus généralement :
**Si P est un polynôme, la limite de P($n$) quand $n$ tend vers $+\infty$ est celle de son terme de plus haut degré.**

**EXEMPLE 2** Pour $n \geqslant 2$, on peut écrire :

$$u_n = \frac{2n^6 + 5n + 1}{n^6 - 1} = \frac{n^6\left(2 + \frac{5}{n^5} + \frac{1}{n^6}\right)}{n^6\left(1 - \frac{1}{n^6}\right)} = \frac{2 + \frac{5}{n^5} + \frac{1}{n^6}}{1 - \frac{1}{n^6}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{n^5}\right) = 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^6}\right) = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(2 + \frac{5}{n^5} + \frac{1}{n^6}\right) = 2 \text{ (cf. 1}^{\text{er}} \text{ tableau 1}^{\text{re}} \text{ ligne)}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^6}\right) = 1 \text{ (cf. 1}^{\text{er}} \text{ tableau 1}^{\text{re}} \text{ ligne)}$$

d'où
$$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = 2 \text{ (cf. 3}^{\text{e}} \text{ tableau 1}^{\text{re}} \text{ ligne).}$$

**EXEMPLE 3** Pour $n \geqslant 1$, on peut écrire :

$$u_n = \frac{5n^3 + 2n - 1}{n + 3} = \frac{n^3\left(5 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)}{n\left(1 + \frac{3}{n}\right)} = n^2 \, \frac{5 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{3}{n}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} (n^2) = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{5 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{3}{n}} = 5 \quad \text{d'où} \quad \lim_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty.$$

Plus généralement :

**Si P et Q sont deux polynômes, la limite de $\frac{\mathrm{P}(n)}{\mathrm{Q}(n)}$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est celle du quotient des termes de plus haut degré.**

**EXEMPLE 4** Soit une suite géométrique $(u_n)$ de raison $a$. Nous supposerons $u_0 \neq 0$ et $a \notin \{-1, 0, 1\}$.

Rappelons le calcul de la somme $\mathrm{S}_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ qu'on écrit $\sum_{p=0}^{n} u_p$ :

$$\mathrm{S}_n = u_0 + au_0 + a^2u_0 + \ldots + a^{n-1}u_0 + a^n u_0$$
$$a\mathrm{S}_n = au_0 + a^2u_0 + \ldots + a^{n-1}u_0 + a^n u_0 + a^{n+1}u_0$$

d'où en retranchant membre à membre ces égalités :

$$(1-a)S_n = u_0 - a^{n+1}u_0$$

$$(1-a)S_n = u_0(1-a^{n+1}).$$

Comme nous avons supposé $a \neq 1$, $\boxed{S_n = u_0 \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}}$

Étudions la limite de $S_n$ en utilisant les théorèmes précédents. On peut écrire

$$S_n = \frac{u_0}{1-a} - \frac{au_0}{1-a}\, a^n.$$

• <u>Si $|a| > 1$.</u>

$$\lim_{n \to +\infty} |a^n| = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left| -\frac{au_0}{1-a}\, a^n \right| = +\infty$$

(produit d'une suite par une constante non nulle, cf. remarque 1)

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_0}{1-a} - \frac{au_0}{1-a}\, a^n \right| = +\infty$$

(addition d'une constante, cf. remarque 1)

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} |S_n| = +\infty}$$

• <u>Si $|a| < 1$.</u>

$$\lim_{n \to +\infty} (a^n) = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{au_0}{1-a}\, a^n\right) = 0 \text{ (produit d'une suite par une constante)}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{u_0}{1-a} - \frac{au_0}{1-a}\, a^n\right) = \frac{u_0}{1-a} \text{ (addition d'une constante)}$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{u_0}{1-a}}$$

## 1.6 ÉTUDE DE LA CONVERGENCE D'UNE SUITE SANS CALCULER SA LIMITE

Les théorèmes suivants, que nous admettrons, permettent d'affirmer qu'une suite est convergente, donc que sa limite existe, sans qu'il soit nécessaire de la calculer.

**Théorèmes**

> **1. Toute suite croissante et majorée est convergente.**
>
> **2. Toute suite décroissante et minorée est convergente.**

**EXEMPLES** Soit les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}$$

($\alpha$ entier strictement supérieur à 2).
Montrons que ces suites sont croissantes et majorées. Elles seront donc convergentes d'après le théorème 1 précédent.

■ ***Étude de $(u_n)$***

• $(u_n)$ est strictement croissante car :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

• $(u_n)$ est majorée car :
$u_1 = 1$ et si $n \geqslant 2$, pour tout entier $p$ tel que $2 \geqslant p \geqslant n$ :

$$\frac{1}{p^2} < \frac{1}{(p-1)p} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$$

donc :

$$u_n < 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$u_n < 2 - \dfrac{1}{n}$.

La suite $(u_n)$ est majorée par 2. La suite $(u_n)$ est strictement croissante et majorée donc elle converge.

■ ***Étude de $(v_n)$***

• $(v_n)$ est strictement croissante car :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0.$$

• $(v_n)$ est majorée car :

$(\forall p \in \mathbb{N}^*) \quad p^\alpha \geqslant p^2$ (puisque $\alpha > 2$)

$$\frac{1}{p^\alpha} \leqslant \frac{1}{p^2}$$

par suite pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ :

$$v_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = u_n < 2.$$

La suite $(v_n)$ est majorée par 2. La suite $(v_n)$ est strictement croissante et majorée donc elle converge.

## 1.7 TRAVAUX PRATIQUES

**EXERCICE 1** *Soit la suite définie par* $u_n = \frac{3^n}{n^2}$ *sur* $\mathbb{N}^*$.

**1.** *Calculer* $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$.
*Étudier la monotonie de la suite* (vous formerez le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et montrerez que $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ pour $n \geqslant 2$).

**2.** *Montrer que* $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 2$ *pour* $n \geqslant 5$.

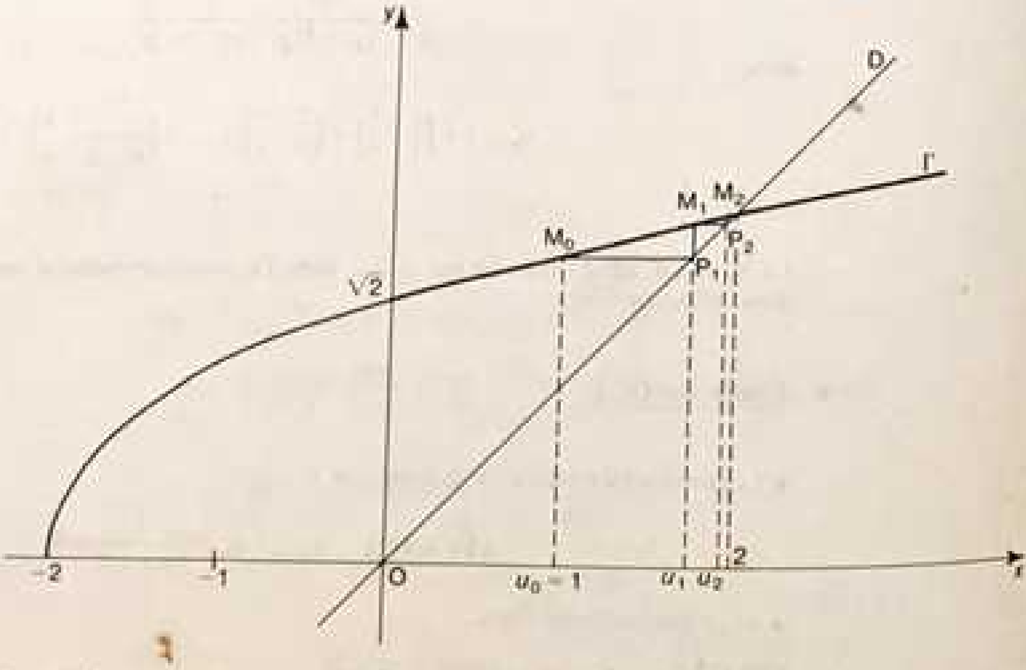
**3.** *Montrer que* $u_n > 2^{n-5} u_5$ pour $n \geqslant 6$ (on écrira : $u_6 > 2u_5$, $u_7 > 2u_6$, ..., $u_n > 2u_{n-1}$ et on multipliera membre à membre ces inégalités. Vous pouvez aussi raisonner par récurrence).

**4.** *Quelle est la limite de* $(u_n)$ *quand* $n$ *tend vers* $+\infty$? (la suite $(u_n)$ est minorée par une suite géométrique de raison 2 à partir d'un certain rang).

**EXERCICE 2** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

On peut représenter les termes de la suite de la façon suivante : soit $\Gamma$ la représentation graphique de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{2+x}$ définie sur $[-2, +\infty[$ et D la droite d'équation $y = x$, dans un repère orthonormé.




Par $M_0(u_0, f(u_0))$ on mène la parallèle à $Ox$, elle rencontre D en $P_1$ d'ordonnée celle de $M_0$ c'est-à-dire $f(u_0) = u_1$. Comme $P_1$ appartient à D d'équation $y = x$, l'abscisse de $P_1$ est $u_1$.
Par $P_1$ on mène la parallèle à $Oy$, elle rencontre $\Gamma$ en $M_1(u_1, f(u_1))$.
Par $M_1$ on mène la parallèle à $Ox$, elle rencontre D en $P_2$ d'ordonnée celle de $M_1$ c'est-à-dire $f(u_1) = u_2$. Comme $P_2$ appartient à D, son abscisse est $u_2$.
On mène ainsi successivement des parallèles aux axes de coordonnées, on lit ainsi sur l'axe $Ox$ les différentes valeurs $u_0, u_1, u_2, \ldots$
On *conjecture* graphiquement que la suite $(u_n)$ est croissante, majorée par 2, de limite 2.

*Traitez les questions suivantes :*

1. *Démontrer que la suite est croissante.* (On montrera par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} - u_n > 0$. *cf.* § 1.2.*a.* exemple 3).

2. *Démontrer que la suite est majorée par* 2 (vous raisonnerez par récurrence). *Conclure que la suite est convergente* (on énoncera le théorème utilisé).

3. On peut écrire pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ :

$$u_{n+1} - 2 = \sqrt{2+u_n} - 2 = \frac{(\sqrt{2+u_n}-2)(\sqrt{2+u_n}+2)}{\sqrt{2+u_n}+2}$$

$$|u_{n+1} - 2| = \frac{|2+u_n-4|}{\sqrt{2+u_n}+2} = \frac{|u_n-2|}{\sqrt{2+u_n}+2}$$

$$|u_{n+1} - 2| \leqslant \frac{|u_n-2|}{2}.$$

*En déduire que* $|u_n - 2| \leqslant \frac{1}{2^n}$. *Conclure que* $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 2$.

**REMARQUE** On verra au chapitre suivant un théorème permettant d'affirmer que la limite $l$ de la suite vérifie l'égalité $l = \sqrt{2+l}$.

**EXERCICE 3** *Calcul du terme d'indice* N *de la suite de nombres réels définie par*

$$u_0 = 2 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \; u_{n+1} = 3u_n + 1.$$

**CASIO FX 180P**

On vide les deux zones de programmation $P_1$ et $P_2$ (mode 0, PCL).

$P_1$ ENTER Kin 2 « compteur, indice du premier terme »
ENTER Min « 1^er terme »
ENTER Kin 3 « le rang N »

$P_2$ 1 Kin+2 « 1 est ajouté au compteur »
1 + 3 × MR = Min « calcul du terme de rang suivant »
Kout 3 − Kout 2 = X > 0
MR

**Application :** indice du premier terme 0 et N = 40.
Mode .
$P_1$ 0 Run
2 Run
40 Run

$P_2$ on attend 17 s et on obtient $u_{40} = 3{,}0394 \cdot 10^{19}$.

**CASIO 7000G**

Mode 2 on sélectionne une zone de programme vide (par exemple P0).

"I PREM." : ? ⟶ I exe
"U PREM." : ? ⟶ U exe
"N" : ? ⟶ N exe
Lbl 1 : I + 1 ⟶ I exe
3 × U + 1 ⟶ U exe
I < N ⟹ GOTO 1 exe

Reprenons l'application précédente.
Mode 1 Prog 0 exe
0 exe
2 exe
40 exe

on patiente 1,5 s et on obtient $3{,}0394 \cdot 10^{19}$.

**CASIO 850P (Programmateur en Basic)**

Sélectionner une zone mémoire vide en mode 1 (appuyer sur "exe" après chaque ligne)

```
10  INPUT   "I PREM."; I
20  INPUT   "U PREM."; U
30  INPUT   "N="; N
40  I=I+1
50  U=3*U+1
60  IF I<N THEN GOTO 40
70  PRINT   "U"; I; "="; U
```

**Application :**

Mode 0

Après sélection de la zone mémoire

```
0   exe
2   exe
40  exe
```

on patiente 2,12 s et on obtient $3{,}0394 \cdot 10^{19}$.

Avec une "boucle"

```
10  INPUT   "I PREM."; I
20  INPUT   "U PREM."; U
30  INPUT   "N="; N
40  FOR J=1 TO N-1
50  U=3*U+1
60  NEXT J
70  PRINT   "U"; J; "="; U
```

On patiente 1,24 s et on obtient avec les mêmes données $3{,}0394 \cdot 10^{19}$.

# Exercices

## Comportement global d'une suite

**1.1** Les suites de terme général $u_n$, $v_n$, $w_n$ sont-elles croissantes? décroissantes? bornées?

$$u_n = \frac{1}{1+n^2}, \quad v_n = (-1)^{2n+1}, \quad w_n = n^3 - n^2.$$

**1.2** Montrer que la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = (-1)^n + \sin n$$

est bornée.

**1.3** Étudier la monotonie des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{n^3}{5^n}, \quad v_n = \frac{n!}{2^n}.$$

($n! = n(n-1)(n-2)\ldots\times 1$ si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $0! = 1$.)

**1.4** Soit la suite $(u_n)$ définie par la donnée de $u_0$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

Discuter, suivant les valeurs de $u_0$, la monotonie de $(u_n)$.

**1.5** Même question qu'à l'exercice précédent avec $u_0$ donné et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = \sqrt{3+u_n}.$$

**1.6** Trouver une période pour chacune des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sin n\frac{\pi}{2}; \quad v_n = \cos\frac{n\pi}{3};$$

$$w_n = \sin n\frac{\pi}{2} + \cos n\frac{\pi}{3};$$

$t_n = \mathrm{E}\left(\frac{n}{5}\right) - \frac{n}{5}$ où $\mathrm{E}\left(\frac{n}{5}\right)$ est la partie entière de $\frac{n}{5}$.

## Majoration ou minoration d'une suite par une autre

**1.7** Étudier

$$\lim_{n\to+\infty} (n + 2\sin n^2), \quad \lim_{n\to+\infty} (2n + (-1)^n n).$$

**1.8** Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} (3\sqrt{n^2+1} - 5n)$.

**1.9** Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1})$.

**1.10** Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = \left(\frac{n}{5} - 1\right)^n.$$

Montrer, qu'à partir d'un certain rang,

$$\left(\frac{n}{5} - 1\right)^n \geq 2^n.$$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)$.

**1.11** Étudier la limite de

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+2n+1}.$$

(On cherchera à majorer la suite $(u_n)$ par une suite de limite nulle.)

**1.12** Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n\cos n}{\sqrt{n^4+1}}$.

**1.13** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = -3$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = u_n + n^2 - n - 2.$$

Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$.
Montrer que, pour $n \geq 5$, on a :

$$u_n \geq 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} \geq n^2 - n - 2.$$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)$.

**1.14** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = u_n - 2n^2 + 3n - 1.$$

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n \leq 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} \leq -2n^2 + 3n - 1.$$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)$.

## Opérations sur les limites

**1.15** Trouver les limites, quand $n$ tend vers $+\infty$, de : $n^5 - 3n^4 - n - 1$,

$$\frac{3n^2+2n-1}{5n+3}, \quad \frac{5n^4+n^2+1}{n^4+n^3+2}, \quad \frac{n-1}{n^2+5n+1}.$$

**1.16** Trouver les limites, quand $n$ tend vers $+\infty$, de :

$$\frac{2n+(-1)^n}{3n-(-1)^n}, \quad \frac{n^2+\cos n}{3n^2+\sin n}.$$

**1.17** Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)}$.

Calculer $S_n$ en fonction de $n$, en mettant $\frac{1}{p(p+1)}$ sous la forme $\frac{a}{p} + \frac{b}{p+1}$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

**1.18** Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$

Calculer $S_n$ en fonction de $n$, en mettant $\frac{1}{p(p+1)(p+2)}$ sous la forme $\frac{a}{p}+\frac{b}{p+1}+\frac{c}{p+2}$.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

**1.19** Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{p=1}^{n} p$. En écrivant :

$$S_n = 1+2+...+n$$

et $$S_n = n+(n-1)+...+1,$$

calculer $2S_n$, puis $S_n$ en fonction de $n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{S_n}{n^2}\right)$.

**1.20** Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $S' = \sum\limits_{p=1}^{n} p^2$. En partant du développement de $(x+1)^3$ où l'on remplacera successivement $x$ par 1, 2, ..., $n$, en déduire le calcul de $S'_n$ en fonction de $S_n$ et de $n$ ($S_n$ est la somme de l'exercice précédent).
Calculer $S'_n$ en fonction de $n$ uniquement. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{S'_n}{n^3}\right)$.

**1.21** Trouver la limite, quand $n$ tend vers $+\infty$, de :

$$u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}.$$

## Limite de la somme d'une suite géométrique

**1.22** Soit $x$ le réel dont le développement décimal illimité est 0,14 14 14 14 14... (période 14).

**1.** Démontrer que $x$ est la limite de la somme des termes d'une suite géométrique. Calculer $x$.

**2.** Retrouver la valeur de $x$ en calculant $100x - x$.

**1.23** Résoudre l'équation :

$$\frac{\text{EVE}}{\text{DID}} = 0,\text{TALK TALK TALK TALK}...$$

sachant que 0 est le chiffre zéro, chaque lettre représente un chiffre dans le système décimal, deux lettres différentes représentent deux chiffres différents, la fraction du premier membre est irréductible, le second membre est un développement décimal de période TALK.

## Suite définie par $u_0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = f(u_n)$

**1.24** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 2.$$

**1.** Construire les droites $\Delta$ et D d'équations respectives : $y = \frac{1}{2}x$ et $y = x$ dans un repère orthonormé.
Représenter sur l'axe des abscisses les termes $u_0$, $u_1$, $u_2$, ... (cf. § 1.7, Exercice 2 du cours).
Que constatez-vous?
Démontrer que la suite $(u_n)$ est majorée par 4 et croissante. Qu'en concluez-vous?

**2.** On pose : $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = u_n + h$.
Déterminer $h$ pour que $(v_n)$ soit une suite géométrique. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)$.

**1.25** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 4$ et :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = \sqrt{5+2u_n}.$$

**1.** Construire la représentation graphique $\Gamma$ de la fonction numérique de la variable réelle $f$ : $x \longmapsto \sqrt{5+2x}$, et la droite D d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.
Représenter sur l'axe des abscisses les termes $u_0$, $u_1$, $u_2$, ... (cf. § 1.7, Exercice 2 du cours).
Que constatez-vous?
Démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante et minorée. Qu'en concluez-vous?

**2.** Calculer l'abscisse $x_0$ du point d'intersection de D et $\Gamma$.
Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - x_0| \leqslant k\,|u_n - x_0| \ (0 < k < 1).$$

En déduire que :

$$|u_n - x_0| \leqslant k^n\,|u_0 - x_0|.$$

Quelle est la limite de la suite $(u_n)$?

**3.** Soit la suite $(v_n)$ vérifiant la même relation de récurrence que $(u_n)$ et telle que $v_0 = 3$. Représenter sur l'axe des abscisses les termes $v_0$, $v_1$, $v_2$, ...
Que constatez-vous?
Démontrer que la suite $(v_n)$ est croissante et majorée par 4. Qu'en concluez-vous?
Quelle est sa limite? (Procéder comme à la question 2.)

**4.** Calculer, à l'aide d'une calculatrice, $u_1$, $u_2$, $u_3$, $v_1$, $v_2$, $v_3$. En déduire un encadrement de $\sqrt{6}$.

**1.26** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}.$$

**1.** Construire la représentation graphique $\Gamma$ de la fonction $f : x \longmapsto 1 + \frac{2}{x}$ pour $x > 0$, et la droite D d'équation $y = x$, dans un repère orthonormé.
Représenter sur l'axe des abscisses les termes $u_0$, $u_1$, $u_2$, $u_3$, ... (cf. § 1.7, Exercice 2 du cours). Que constatez-vous?
Démontrer que, $p$ étant un entier naturel quelconque, la suite $(u_{2p})$ est majorée par 2 et croissante et que la suite $(u_{2p+1})$ est minorée par 2 et décroissante. Qu'en concluez-vous?

**2.** Soit $x'$ et $x''$ les racines de l'équation : $x = 1 + \frac{2}{x}$.
On supposera $x' < 0 < x''$. On définit pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ :

$$v_n = \frac{u_n - x''}{u_n - x'}.$$

Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique. Quelle est sa limite?

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)$.

**1.27** On se propose de montrer que les relations :

$$u_0 = -3$$

et pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{u_{n-1}-8}{2u_{n-1}-9}$ définissent bien une suite et que cette suite est convergente.

1. Représenter graphiquement la fonction $f$ définie par :
$$f(x)=\frac{x-8}{2x-9}$$
pour tout $x$ réel distinct de 9/2. Utiliser cette représentation graphique pour conjecturer le comportement de la suite $(u_n)$.

2. Démontrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n<1$.

3. Démontrer que la suite est croissante et qu'elle converge.

4. Démontrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ :
$$|u_n-1|<\frac{|u_{n-1}-1|}{7}.$$
En déduire que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ :
$$|u_n-1|<\frac{|u_0-1|}{7^n}.$$
En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

(*D'après Exercice Bac. E. Paris-Créteil-Versailles* 1985.)

**1.28** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0=2$ et :
$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{1}{u_n}\right).$$
On pose, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ :
$$v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}.$$

1. Démontrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad v_{n+1}=v_n^2$.

2. Calculer $v_n$ et $u_n$ en fonction de $n$.

3. Démontrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\leqslant v_n\leqslant\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

## Révision

**1.29** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0$ et
$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad 3u_{n+1}=2u_n+1.$$

1. Démontrer qu'il existe une valeur $u_0$ pour laquelle la suite $(u_n)$ est constante.

2. On suppose désormais $u_0=2$ et on pose $u_n=v_n+h$.
Déterminer $h$ pour que $(v_n)$ soit une suite géométrique.

3. Calculer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.

4. Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

5. Soit $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$
$S'_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$.
Calculer $S_n$ et $S'_n$ en fonction de $n$.
Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(S'_n)$.

**1.30** 1. Soit $u_n=\dfrac{n^2}{5^n}$. Montrer, qu'à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<\dfrac{2}{5}$.
En déduire que $(u_n)$ est majorée par une suite géométrique à partir d'un certain rang et trouver
$$\lim_{n\to+\infty}(u_n).$$

2. Soit $v_n=\dfrac{n^2}{n!}$. Montrer, qu'à partir d'un certain rang, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}<\dfrac{1}{2}$.
En déduire que $(v_n)$ est majorée par une suite géométrique à partir d'un certain rang et trouver
$$\lim_{n\to+\infty}(v_n).$$

3. Soit $w_n=\dfrac{2^n}{n!}$. Montrer, qu'à partir d'un certain rang, $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}<\dfrac{1}{2}$.
En déduire que $(w_n)$ est majorée par une suite géométrique à partir d'un certain rang et trouver
$$\lim_{n\to+\infty}(w_n).$$

4. *Applications* : trouver les limites quand $n$ tend vers $+\infty$ de
$$\frac{n^2+5^n}{(-1)^n+5^n},\quad \frac{2^n+n!}{n^2-n!}.$$

**1.31** *Nombre e*
Soit les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ par :
$$u_n=1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$
$$v_n=u_n+\frac{1}{n\times n!}.$$

1. Démontrer que les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes.

2. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$.
On désigne cette limite par $e$.

3. Démontrer qu'on ne peut pas trouver un entier naturel non nul $p$ tel que $u_p\geqslant e$ ni un entier naturel non nul $p'$ tel que $v_{p'}\leqslant e$.
On a donc : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_n<e<v_n$.

4. On suppose $e$ rationnel : $e=\dfrac{a}{b}$, $(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}$.

*a*) Démontrer qu'il existe un réel $\theta$ $(0<\theta<1)$ tel que : $e=u_b+\dfrac{\theta}{b\times b!}$.

*b*) Démontrer que $e-u_b$ est une fraction de dénominateur $b!$ et aboutir à une contradiction. Conclure.

5. Donner, à l'aide d'une calculatrice, un encadrement de $e$ pour $n=6$.
*N.B.* : Le nombre $e$ est la base des logarithmes népériens qu'on étudiera au chapitre 3.

**1.32** On suppose $0 < u_0 < v_0$ et pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ :

$$\begin{cases} u_n v_n = u_0 v_0 \\ v_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + v_{n-1}). \end{cases}$$

**1.** Démontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < v_n$.
En déduire que la suite $(u_n)$ est croissante et que la suite $(v_n)$ est décroissante.

**2.** Démontrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes.

**3.** Démontrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n - u_n < \frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1}).$$

En déduire que $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$ et que $\lim_{n \to +\infty} (u_n) = \lim_{n \to +\infty} (v_n)$. Calculer cette dernière limite.

**1.33** **1.** On définit les deux suites réelles $u$ et $v$ par :

$$u_1 = 1,\ v_1 = 12 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}. \end{cases}$$

On pose $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ w_n = v_n - u_n$.
Démontrer que la suite $w$ ainsi définie est une suite géométrique.
Calculer $w_n$ en fonction de $n$ et trouver $\lim_{n \to +\infty} (w_n)$.

**2.** Démontrer que $u$ est une suite croissante et $v$ une suite décroissante.
Démontrer que $u$ et $v$ sont convergentes.

**3.** On pose $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad t_n = 3u_n + 8v_n$.
Démontrer que la suite $t$ ainsi définie est constante.
En déduire la limite de $u$ et la limite de $v$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**1.34** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

**1.** Démontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \geq n$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} (u_n)$.

**2.** Démontrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = (-1)^n.$$

**3.** On considère la suite $(v_n)$ de terme général $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

*a)* Calculer $\lim_{n \to +\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

*b)* En étudiant le signe de $v_{n+1} - v_{n-1}$, étudier la croissance de la suite $(v_{2p})$ et celle de la suite $(v_{2p+1})$, $p$ étant un entier naturel quelconque.

*c)* Démontrer que les suites $(v_{2p})$ et $(v_{2p+1})$ sont convergentes.

*d)* En déduire $\lim_{n \to +\infty} (v_n)$.

**1.35*** Soit S l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation de récurrence :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}.$$

**1.** Trouver deux suites géométriques non nulles $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ éléments de S.

**2.** Montrer que la suite $(\lambda\alpha^n + \mu\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\lambda$ et $\mu$ sont des réels quelconques, appartient à S.

**3.** Sur un axe d'origine O, on donne les points $A_0$ et $A_1$ d'abscisses respectives $a$ et $b$. On considère les points

$A_2$ milieu de $(A_0, A_1)$
$A_3$ milieu de $(A_1, A_2)$
..........................................
$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad A_{n+2}$ milieu de $(A_n, A_{n+1})$.

Calculer, en fonction de $a$, $b$, $n$, l'abscisse $u_n$ du point $A_n$. Quelle est la limite de cette abscisse quand $n$ tend vers $+\infty$?

**1.36*** Soit S l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation de récurrence :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

**1.** Trouver une suite géométrique non nulle $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ élément de S.

**2.** Montrer que la suite $(n\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de S.

**3.** Montrer que la suite $(\lambda\alpha^n + \mu n\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\lambda$ et $\mu$ sont des réels quelconques, appartient à S.

**4.** Trouver la suite $(u_n)$ élément de S, telle que $u_0 = 1$ et $u_2 = 2$.

**5.** Soit la suite de terme général $v_n = \dfrac{n}{2^n}$. Montrer que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < \dfrac{3}{4}$ à partir d'un certain rang et que $(v_n)$ est majorée pour une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$.

En déduire $\lim_{n \to +\infty} (v_n)$. En déduire la limite de la suite de la question 4.

**1.37** $n$ est un nombre entier naturel.
On étudie la suite de terme général $u_n$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3.$$

**1.** Démontrer qu'il existe un nombre entier naturel $b$, indépendant de $n$, tel que $v_n = u_n + bn - 1$ soit le terme général d'une suite géométrique dont on déterminera le premier terme $v_0$ et la raison.
En déduire $u_n$ en fonction de $n$.

**2.** On pose $$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Calculer $S_n$ en fonction de $n$ et la limite de $S_n$ quand $n$ tend vers plus l'infini.
Calculer la plus petite valeur de l'entier naturel $n$ pour que $S_n$ soit supérieur à 1,9999.

**3.** On pose : $$T_n = \sum_{i=0}^{n} u_i.$$

Calculer $T_n$ en fonction de $n$; $T_n$ admet-elle une limite lorsque $n$ tend vers plus l'infini?

# 2 LIMITES ET CONTINUITÉ

Dans tout ce qui suit, nous considérons des *fonctions numériques d'une variable réelle* c'est-à-dire des fonctions dont les ensembles de départ et d'arrivée sont $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$.

## 2.1 LIMITE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE D'UNE VARIABLE RÉELLE

### a) Symboles $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Si $x \geqslant 1$, comparons $x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{N}^*)$ à $x$ :

si $\alpha = 1$, on a : $\quad x^{\alpha} = x^1 = x$

si $\alpha > 1$, on a :

$$x^{\alpha} = xx \ldots x$$
$$x^{\alpha} \geqslant x \times 1 \times \ldots \times 1$$
$$x^{\alpha} \geqslant x.$$

Donc si $x \geqslant 1$, $(\forall \alpha \in \mathbb{N}^*)$ $\quad x^{\alpha} \geqslant x.$

Nous allons utiliser ce résultat dans les exemples qui suivent.

Nous admettrons, d'autre part, que quel que soit le réel strictement positif $a$ il est possible de trouver une puissance de 10, soit $10^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$, telle que $10^p \geqslant a$. Donc pour montrer que $f(x) \geqslant a$, il suffira de montrer que $f(x) \geqslant 10^p$.
Quel que soit le réel strictement positif $a$, nous admettrons aussi qu'il est possible de trouver $10^{-p}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ tel que $10^{-p} \leqslant a$. Donc pour montrer que $|f(x)| \leqslant a$, il suffira de montrer que $|f(x)| \leqslant 10^{-p}$.

- On a $x^{\alpha} \geqslant 10^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ si $x \geqslant 10^p$. On conçoit que l'on peut rendre $x^{\alpha}$ aussi grand que l'on veut pour $x$ suffisamment grand. On dit que la limite de $x^{\alpha}$ est $+\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

- On a aussi $-x^{\alpha} \leqslant -10^p$ si $x \geqslant 10^p$. On dit que la limite de $-x^{\alpha}$ est $-\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

- On a également $\left|\dfrac{1}{x^{\alpha}}\right| \leqslant 10^{-p}$ si $|x|^{\alpha} \geqslant 10^p$. Cette dernière inégalité est vérifiée si $|x| \geqslant 10^p$ puisqu'on a $|x|^{\alpha} \geqslant |x| \geqslant 10^p$. Dire que $|x| \geqslant 10^p$ signifie que $x \geqslant 10^p$ ou que $x \leqslant -10^p$. On dit que la limite de $\frac{1}{x^\alpha}$ est 0 quand $x$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

- Nous avons $\sqrt{x} \geqslant 10^p$ et aussi $0 < \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant 10^{-p}$ si $x \geqslant 10^{2p}$. On dit que $\sqrt{x}$ a pour limite $+\infty$ et que $\frac{1}{\sqrt{x}}$ a pour limite 0 quand $x$ tend vers $+\infty$.

- Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{5x+1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Pour les grandes valeurs de $|x|$, $f(x) \simeq \frac{5x}{x}$ donc $f(x) \simeq 5$.

Plus précisément : $\left|\frac{5x+1}{x} - 5\right| = \left|\frac{5x+1-5x}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$.

On a $|f(x) - 5| \leqslant 10^{-p}$ si $\frac{1}{|x|} \leqslant 10^{-p}$ donc si $|x| \geqslant 10^p$ c'est-à-dire si $x \geqslant 10^p$ ou si $x \leqslant -10^p$. On dit que la limite de $f(x)$ est 5 quand $x$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Dans les exemples précédents, nous avons étudié le comportement de $f$ pour $x \geqslant 10^p$ ou $x \leqslant -10^p$ c'est-à-dire pour $x \in [10^p, +\infty[$ ou $x \in ]-\infty, 10^p]$. Plus généralement

**Définitions**

**1. On dit que $f(x)$ a pour limite $+\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ si, quel que soit le réel strictement positif donné, on sait trouver respectivement un intervalle $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$ sur lequel $f(x)$ est supérieur à ce réel. On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.**

**2. On dit que $f(x)$ a pour limite $-\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ si la limite de $-f(x)$ est $+\infty$. On écrit**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

**3. On dit que $f(x)$ a pour limite $l$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ si, quel que soit le réel strictement positif donné, on sait trouver respectivement un intervalle $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$ sur lequel $|f(x) - l|$ est inférieur à ce réel. On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.**

On emploie aussi les notations :

$\lim\limits_{+\infty} f$ qu'on lit « limite de $f$ en $+\infty$ »

$\lim\limits_{-\infty} f$ qu'on lit « limite de $f$ en $-\infty$ ».

### b) Symboles $\lim\limits_{h \to 0} f(h)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

• Soit la fonction : $h \longmapsto h^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{N}^*)$ définie sur $\mathbb{R}$.
Vous avez étudié en Première le comportement de cette fonction pour $|h|$ petit.
Si $|h| \leq 1$, comparons $|h|^\alpha$ à $|h|$ :

si $\alpha = 1$, on a : $\quad |h|^\alpha = |h|^1 = |h|$

si $\alpha > 1$, on a : $\quad |h|^\alpha = |h| \times |h| \times \ldots \times |h|$

$$|h|^\alpha \leq |h| \times 1 \times \ldots \times 1$$

$$|h|^\alpha \leq |h|.$$

Donc si $|h| \leq 1$, $(\forall \alpha \in \mathbb{N}^*)$ $|h|^\alpha \leq |h|$.

Il en résulte que $|h^\alpha| = |h|^\alpha \leq 10^{-p}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ si $|h| \leq 10^{-p}$. On dit que la limite de $h^\alpha$ est 0 quand $h$ tend vers 0.

• Soit la fonction : $h \longmapsto \dfrac{1}{h^4}$ définie sur $\mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$.

On a $\dfrac{1}{h^4} \geq 10^p$ si $0 < h^4 \leq 10^{-p}$. Cette dernière inégalité est vérifiée si $0 < |h| \leq 10^{-p}$ puisqu'on a : $0 < h^4 = |h|^4 \leq |h| \leq 10^{-p}$.

On dit que la limite de $\dfrac{1}{h^4}$ est $+\infty$ quand $h$ tend vers 0.

• Nous aurons aussi $-\dfrac{1}{h^4} \leq -10^p$ si $0 < |h| \leq 10^{-p}$. On dit que la limite de $-\dfrac{1}{h^4}$ est $-\infty$ quand $h$ tend vers 0.

• Soit la fonction : $h \longmapsto \sqrt{h}$ définie sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.
On a $\sqrt{h} \leq 10^{-p}$ si $0 \leq h \leq 10^{-2p}$. On dit encore que la limite de $\sqrt{h}$ est 0 quand $h$ tend vers 0.

• Soit les fonctions : $h \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ et $h \longmapsto -\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ définies sur $\mathbb{R}_+^* = ]0, +\infty[$.
On a $\dfrac{1}{\sqrt{h}} \geq 10^p$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{h}} \leq -10^p$ si $0 < \sqrt{h} \leq 10^p$, ce qui est vérifié si $0 < h \leq 10^{2p}$. On dit que les limites de $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ sont respectivement $+\infty$ et $-\infty$ quand $h$ tend vers 0.

**REMARQUE** Dans les exemples précédents, les ensembles de définition des fonctions étudiées sont :

$$\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$$
$$\mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$$
$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$$
$$\mathbb{R}_+^* = ]0, +\infty[.$$

Les fonctions sont *définies ou non* en 0.

Généralisons :

**Définitions**

**Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle contenant 0 sauf éventuellement en 0.**

**1. On dit que $f(h)$ a pour limite 0 quand $h$ tend vers 0 si, quel que soit le réel strictement positif donné, on sait trouver un intervalle contenant 0 (0 éventuellement exclu) sur lequel $|f(h)|$ est inférieur à ce réel. On écrit $\lim\limits_{h \to 0} f(h) = 0$.**

**2. On dit que $f(h)$ a pour limite $+\infty$ quand $h$ tend vers 0 si, quel que soit le réel strictement positif donné, on sait trouver un intervalle contenant 0 (0 éventuellement exclu) sur lequel $f(h)$ est supérieur à ce réel. On écrit $\lim\limits_{h \to 0} f(h) = +\infty$.**

**3. On dit que $f(h)$ a pour limite $-\infty$ quand $h$ tend vers 0 si $\lim\limits_{h \to 0} [-f(h)] = +\infty$. On écrit $\lim\limits_{h \to 0} f(h) = -\infty$.**

Des définitions précédentes nous pouvons déduire :

**Autres définitions**

**4. On dit que $f(h)$ a pour limite $l$ quand $h$ tend vers 0 si $\lim\limits_{h \to 0} [f(h) - l] = 0$. On écrit $\lim\limits_{h \to 0} f(h) = l$.**

**5. On dit que $f(x)$ a pour limite $l$ ou $+\infty$ ou $-\infty$ quand $x$ tend vers $x_0$ si la limite de $f(x_0 + h)$ est respectivement $l$ ou $+\infty$ ou $-\infty$ quand $h$ tend vers 0. On écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ou $+\infty$ ou $-\infty$.**

On emploie aussi les notations :

$\lim\limits_{0} f$ qu'on lit «limite de $f$ en 0»

$\lim\limits_{x_0} f$ qu'on lit «limite de $f$ en $x_0$».

Dans la définition 5, la fonction $f$ est définie sur un intervalle contenant $x_0$ sauf éventuellement en $x_0$ de sorte que la fonction : $h \longmapsto f(x_0 + h)$ obtenue en posant $x = x_0 + h$ est définie sur un intervalle contenant 0 sauf éventuellement en 0.

Donnons des exemples d'application de cette dernière définition.

**EXEMPLE 1** Soit $f : x \longmapsto x^2 - 2x$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrons que $\lim\limits_{1} f = f(1) = -1$ :

$$\begin{aligned} f(1+h) &= (1+h)^2 - 2(1+h) \\ &= 1 + 2h + h^2 - 2 - 2h \\ &= h^2 - 1 \\ |f(1+h) - (-1)| &= |h^2 - 1 + 1| = h^2. \end{aligned}$$

On a vu que $\lim\limits_{h \to 0} h^2 = 0$.

**EXEMPLE 2** Soit $f : x \longmapsto -\dfrac{1}{(x-2)^4}$ définie sur $\mathbb{R} - \{2\} = ]-\infty, 2[ \cup ]2, +\infty[$. Montrons que $\lim\limits_{2} f = -\infty$ :

$$f(2+h) = -\frac{1}{h^4}.$$

On a vu que $\lim\limits_{h \to 0} \left(-\dfrac{1}{h^4}\right) = -\infty$.

## 2.2 MAJORATION OU MINORATION D'UNE FONCTION PAR UNE AUTRE

Pour simplifier le langage, $x_0$ désignera un nombre *fini ou non* et l'expression « **au voisinage de $x_0$** » signifiera que l'on considère un intervalle contenant $x_0$ si $x_0$ est fini ($x_0$ éventuellement exclu) ou de la forme $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$ si $x_0$ n'est pas fini.
Nous admettrons les théorèmes suivants que l'on rapprochera de ceux donnés pour les suites au § 1.4 :

**Théorèmes**

**1. Si, au voisinage de $x_0$, $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$, alors $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$.**

**2. Si, au voisinage de $x_0$, $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x_0} g = -\infty$, alors $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$.**

**3. Si, au voisinage de $x_0$, $|f(x) - l| \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x_0} g = 0$, alors $\lim\limits_{x_0} f = l$.**

**4. Si, au voisinage de $x_0$, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x_0} g = \lim\limits_{x_0} h = l$, alors $\lim\limits_{x_0} f = l$.**

**REMARQUES** Ce sont les mêmes remarques que pour les suites (cf. § 1.4) :

1. Le théorème 2 est une conséquence immédiate du théorème 1 [appliquer le théorème 1 aux fonctions $x \longmapsto -f(x)$ et $x \longmapsto -g(x)$].

2. Le théorème 3 est un cas particulier du théorème 4 [en effet, $|f(x)-l| \leqslant g(x)$ peut s'écrire $-g(x) \leqslant f(x)-l \leqslant g(x)$, lorsque $g(x) \geqslant 0$].

3. Le théorème 4 est encore vrai si l'une des fonctions $g$ et $h$ est constante de valeur $l$ au voisinage de $x_0$.

4. Quand cela est possible et simple, on appliquera les théorèmes en utilisant les fonctions de référence rencontrées précédemment :

$$x \longmapsto x^{\alpha}\ (\alpha \in \mathbb{N}^*), \quad x \longmapsto \sqrt{x}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x^{\alpha}}, \quad x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

ou encore si $\lambda > 0$ (on verra que les limites ne changent pas) :

$$x \longmapsto \lambda x^{\alpha}, \quad x \longmapsto \lambda\sqrt{x}$$
$$x \longmapsto \frac{\lambda}{x^{\alpha}}, \quad x \longmapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x}}.$$

Au lieu de la variable $x$, on pourra prendre la variable $h$.
Nous allons en donner des exemples.

**EXEMPLE 1** Soit $f : x \longmapsto 2x^5+3x^2+5x-8$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrons que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Si $x \geqslant \frac{8}{5}$, $5x-8 \geqslant 0$ et

$$2x^5+3x^2+5x-8 \geqslant 2x^5+3x^2 \geqslant 2x^5$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^5) = +\infty$ donc (théorème 1) $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

**EXEMPLE 2** Soit $f : x \longmapsto 2x - x \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$. Quel que soit $x$ réel :

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant -\sin x \leqslant 1.$$

• Si $x \geqslant 0$, on a :

$$-x \leqslant -x \sin x \leqslant x$$
$$x \leqslant 2x - x \sin x \leqslant 3x$$

puisque $2x - x\sin x \geqslant x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ (théorème 1).

• Si $x \leqslant 0$, on a :

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

en multipliant par $-x$ qui est positif, on déduit :

$$x \leqslant -x \sin x \leqslant -x$$

d'où :

$$3x \leqslant 2x - x \sin x \leqslant x$$

puisque $2x - x\sin x \leq x$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$, on déduit d'après le théorème 2 :

$$\lim_{-\infty} f = -\infty.$$

**EXEMPLE 3** Soit $f : x \longmapsto x^2+3x-1$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrons que $\lim\limits_{2} f = f(2) = 9$. Posons $x = 2+h$ et supposons $-1 \leq h \leq 1$ donc $1 \leq x \leq 3$. Le nombre $x$ décrit l'intervalle $[1, 3]$ qui est un intervalle fermé de centre 2.

$$\begin{aligned}|f(2+h)-9| &= |(2+h)^2+3(2+h)-1-9|\\ &= |4+4h+h^2+6+3h-1-9|\\ &= |7h+h^2|.\end{aligned}$$

Rappelons que quels que soient les réels $a$ et $b$ :

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

donc :

$$|f(2+h)-9| \leq 7|h|+h^2.$$

On a vu (cf. § 2,1 b) que, si $|h| \leq 1$, $h^2 \leq |h|$ donc :

$$|f(2+h)-9| \leq 8|h|$$

puisque $\lim\limits_{h \to 0} 8|h| = 0$, on déduit d'après le théorème 3 (la variable étant $h$) : $\lim\limits_{h \to 0} f(2+h) = 9$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 9$.

**EXEMPLE 4** Soit $f : x \longmapsto x^2\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$, le nombre $\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)$ désignant la partie entière de $\frac{1}{x}$. Étudions $\lim\limits_{0} f$.

Il existe un entier relatif unique $n$ tel que $n \leq \frac{1}{x} < n+1$, la partie entière de $\frac{1}{x}$ est $\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) = n$. Cherchons à encadrer $f$ par deux fonctions ayant même limite quand $x$ tend vers 0 :

puisque $n \leq \frac{1}{x}$, on déduit $\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$

puisque $\frac{1}{x} < n+1$, on déduit $\frac{1}{x} - 1 < \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)$

donc

$$\frac{1}{x} - 1 < \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$

$$x - x^2 < x^2\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

les deux fonctions qui encadrent la fonction $f$ ont pour limite 0 quand $x$ tend vers 0. En effet :

$$\lim_{x \to 0} x = 0 \text{ et si, } -1 \leq x \leq 1,\ |x - x^2| \leq |x| + x^2 \leq 2|x|.$$

D'après le théorème 4, on déduit $\lim\limits_{0} f = 0$.

## 2.3 LIMITE A DROITE. LIMITE A GAUCHE

**Définitions**

> Soit une fonction $f$ dont l'ensemble de définition est D et un réel $x_0$.
>
> 1. Si la restriction de $f$ à $D \cap ]x_0, +\infty[$ admet une limite (finie ou non), cette limite est appelée limite de $f$ à droite en $x_0$. On la note $\lim\limits_{x_0^+} f$ ou encore $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.
>
> 2. Si la restriction de $f$ à $D \cap ]-\infty, x_0[$ admet une limite (finie ou non), cette limite est appelée limite de $f$ à gauche en $x_0$. On la note $\lim\limits_{x_0^-} f$ ou encore $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

**EXEMPLE 1** Soit $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2 + |x|}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

- Considérons la restriction $f_1$ de $f$ à $]0, +\infty[$ :

$$f_1(x) = \frac{2x^2 + x}{x} = 2x + 1$$

$$|f_1(x) - 1| = 2|x|, \quad \lim_{x \to 0} 2|x| = 0$$

donc $\lim\limits_{0} f_1 = 1$ et $\lim\limits_{0^+} f = 1$.

- Considérons la restriction $f_2$ de $f$ à $]-\infty, 0[$ :

$$f_2(x) = \frac{2x^2 - x}{x} = 2x - 1$$

$$|f_2(x) - (-1)| = 2|x|, \quad \lim_{x \to 0} 2|x| = 0$$

donc $\lim\limits_{0} f_2 = -1$ et $\lim\limits_{0^-} f = -1$.

**EXEMPLE 2** Soit $f : x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x-3}$ définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$.

Étudions la limite de $f$ quand $x$ tend vers 3. Pour cela, posons $x = 3 + h$ $(h \neq 0)$ :

$$f(3+h) = \frac{2(3+h)+1}{h} = \frac{7+2h}{h} = \frac{7}{h} + 2.$$

- Si $h > 0$, $f(3+h) > \dfrac{7}{h}$. La restriction de : $h \longmapsto \dfrac{7}{h}$ à $]0, +\infty[$ a pour limite $+\infty$ quand $h$ tend vers 0. Ce qu'on écrit : $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{7}{h} = +\infty$. Donc la restriction de $f$ à $]3, +\infty[$ a pour limite $+\infty$ quand $x$ tend vers 3. On peut écrire : $\lim\limits_{3^+} f = +\infty$.

- Si $h < 0$, $f(3+h) = \dfrac{7+2h}{h} < \dfrac{6}{h}$ si

$$\frac{7+2h-6}{h} < 0 \qquad \frac{2h+1}{h} < 0$$

$$2h+1>0 \text{ (car } h<0)$$
$$h>-\frac{1}{2}$$

donc si $-\frac{1}{2}<h<0$, nous avons $f(3+h)<\frac{6}{h}$. La restriction de : $h \longmapsto \frac{6}{h}$ à $]-\infty, 0[$ a pour limite $-\infty$ quand $h$ tend vers 0. Ce qu'on écrit : $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{6}{h}=-\infty$. Donc la restriction de $f$ à $]-\infty, 3[$ a pour limite $-\infty$ quand $x$ tend vers 3. On peut écrire : $\lim\limits_{3^-} f=-\infty$.

## 2.4 OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Comme pour les suites, il n'est pas toujours facile de majorer ou de minorer une fonction par une autre. On démontre les théorèmes suivants identiques à ceux donnés pour les suites (cf. § 1.5) et que nous admettrons.

**Théorèmes**

Quand $x$ tend vers $x_0$ (fini ou non),

| si $f$ a pour limite : | et si $g$ a pour limite | alors $f+g$ a pour limite |
|---|---|---|
| $l$ | $l'$ | $l+l'$ |
| $l$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $l$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | on ne peut conclure |

| si $\|f\|$ a pour limite : | et si $\|g\|$ a pour limite : | alors $\|fg\|$ a pour limite : |
|---|---|---|
| $l$ | $l'$ | $ll'$ |
| $l \neq 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $0$ | $+\infty$ | on ne peut conclure |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

| si $\|f\|$ a pour limite : | et si $\|g\|$ a pour limite : | alors $\left\|\frac{f}{g}\right\|$ a pour limite : |
|---|---|---|
| $l$ | $l' \neq 0$ | $\frac{l}{l'}$ |
| $l \neq 0$ | $0$ | $+\infty$ |
| $0$ | $0$ | on ne peut conclure |
| $l$ | $+\infty$ | $0$ |
| $+\infty$ | $l'$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | on ne peut conclure |

**REMARQUES**

1. Les théorèmes indiqués dans les trois tableaux s'appliquent naturellement encore quand $f$ est une fonction constante, la limite de cette fonction étant la valeur de cette constante.

2. Dans certains cas nous avons mis « on ne peut conclure ». Cela signifie qu'il n'y a pas de théorème général relatif à chacun de ces cas. On étudiera les limites correspondantes sur les exemples rencontrés.

3. Dans le deuxième et le troisième tableau nous avons mis, pour simplifier, des valeurs absolues. Il restera à préciser, s'il y a lieu, le signe de la limite de $fg$ et de $\frac{f}{g}$ sur les exemples rencontrés.

**EXEMPLE 1** Soit la fonction polynôme $f : x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ définie sur $\mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \neq 0$).
Pour tout $x \neq 0$ on a :

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right),$$

en appliquant les théorèmes précédents :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a_{n-1}}{a_n x}\right) = \ldots \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a_0}{a_n x^n}\right) = 0$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = 1,$$

par suite quand $x$ tend vers $+\infty$, $f(x)$ a même limite que $a_n x^n$. On verra qu'il en est de même pour la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers $-\infty$. Donc :
**Quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, toute fonction polynôme de la variable réelle $x$ a même limite que son terme de plus haut degré.**

Ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} (2x^5 + x^3 - 1) = \lim_{x \to +\infty} (2x^5) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (3x^3 + x^2 - x) = \lim_{x \to -\infty} (3x^3) = -\infty.$$

**EXEMPLE 2** Soit la fonction rationnelle de la variable réelle $x$, c'est-à-dire le quotient de deux fonctions polynômes de la variable réelle $x$ :

$$f : x \longmapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

($a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$) définie pour tout $x$ n'annulant pas le dénominateur. Pour tout $x \neq 0$ et appartenant à l'ensemble de définition de $f$, on a :

$$f(x) = \frac{a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)}{b_p x^p \left(1 + \frac{b_{p-1}}{b_p x} + \ldots + \frac{b_1}{b_p x^{p-1}} + \frac{b_0}{b_p x^p}\right)}$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \frac{a_n x^n}{b_p x^p} g(x),$$

$g(x)$ ayant pour limite 1 quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Donc $f(x)$ a même limite que $\frac{a_n x^n}{b_p x^p}$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. On peut énoncer :
**Quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, toute fonction rationnelle de la variable réelle $x$ a même limite que le quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.**

Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^5+x^3-1}{x^2+2x+3}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^5}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x^3) = +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2+x-1}{2x^2+1}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{2x^2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+1}{x^4-2x+1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x}{x^4}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{x^3}\right) = 0.$$

## 2.5 COMPOSITION DE FONCTIONS AYANT DES LIMITES

Nous admettrons les théorèmes suivants :

**Théorème 1**

**Soit $x_0$, $l$, $l'$ des réels finis ou non et les applications :**

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

**où E est un intervalle contenant $x_0$, $x_0$ éventuellement exclu**
**F est un intervalle contenant $l$, $l$ éventuellement exclu.**

**Si $\lim\limits_{x_0} f = l$ et si $\lim\limits_{l} g = l'$, alors $\lim\limits_{x_0} g \circ f = l'$.**

En particulier si $(u_n)$ est une suite (qui n'est autre que la restriction d'une fonction à une partie de $\mathbb{N}$) :

**Théorème 2**

**Si $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = l$ et si $\lim\limits_{l} f = l'$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = l'$.**

Nous allons donner des applications de ces théorèmes dans ce qui suit.

## 2.6 LIMITES FAISANT INTERVENIR DES FONCTIONS CIRCULAIRES

### a) Quelques résultats importants

• Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\boxed{|\sin x| \leqslant |x|}$ :

— si $|x| \geqslant \dfrac{\pi}{2}$, on a $\dfrac{\pi}{2} > \dfrac{3{,}14}{2}$

$$\frac{\pi}{2} > 1{,}57 \quad \text{donc} \quad |x| > 1{,}57$$

comme $|\sin x| \leq 1$, on a bien $|\sin x| \leq |x|$ ;

— si $|x| < \frac{\pi}{2}$, considérons le cercle trigonométrique muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, soit M le point du cercle tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) = x \quad [2\pi]$, H la projection orthogonale de M sur la droite (OA), M′ le symétrique de M par rapport à (OA) (fig. 1).

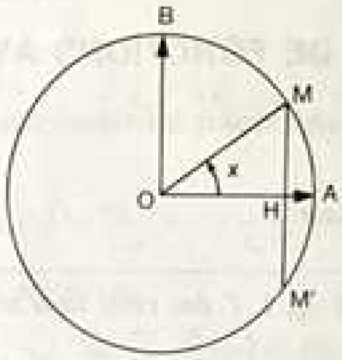



fig. 1

Nous admettrons que la distance MM′ est plus petite que la longueur de l'arc $\widehat{MAM'}$. La longueur de cet arc est $2|x|$. On peut écrire :

$$MM' \leq 2|x|$$
$$2MH \leq 2|x|$$
$$2|\sin x| \leq 2|x|$$
$$|\sin x| \leq |x|.$$

• Pour $|x|$ petit, on peut considérer que la corde et l'arc ont pratiquement même longueur

$$2|\sin x| \simeq 2|x|$$
$$|\sin x| \simeq |x|$$

et, comme $\sin x$ et $x$ sont de même signe pour $x$ suffisamment petit, on peut dire que $\sin x \simeq x$ donc $\frac{\sin x}{x} \simeq 1$.

Nous admettrons plus précisément que : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$.

• Étudions $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

On sait que $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ donc si $x \neq 0$ :

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \times \frac{1}{2}.$$

Posons $X = \frac{x}{2}$ et considérons les applications :

$$\mathbf{R}^* \xrightarrow{f} \mathbf{R}^* \xrightarrow{g} \mathbf{R}$$

$$x \longmapsto X = \frac{x}{2} \longmapsto \frac{\sin X}{X}$$

$\sin(x) \leq |x|$

on a $\lim\limits_{0} f = 0$ et $\lim\limits_{0} g = 1$ donc, d'après le théorème 1 précédent, $\lim\limits_{0} g \circ f = 1$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1.$

Il en résulte que $\lim\limits_{x \to 0} \left( \dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 1$ et

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

• Étudions $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$. Supposons $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[ \cup \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$.

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x \cos x} = \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x},$$

On sait que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, montrons que $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ :

$$|\cos x - 1| = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \leq 2 \left( \frac{x}{2} \right)^2 \quad \text{(vu précédemment)}$$

$$|\cos x - 1| \leq \frac{x^2}{2}$$

comme $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{2} = 0$, on déduit que $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

D'où $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left( \dfrac{\sin x}{x} \right) \lim\limits_{x \to 0} \left( \dfrac{1}{\cos x} \right) = 1 \times 1$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1}$$

### b) Exercice résolu

*Étudions les limites, quand $n$ tend vers $+\infty$, des suites définies sur* $\mathbf{N}^*$ :

$$n \longmapsto n \sin \frac{1}{n}$$

$$n \longmapsto 2^n \tan \frac{1}{2^n}.$$

Posons $\quad u_n = \frac{1}{n} \quad$ et $\quad f(u_n) = n \sin\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

$\quad v_n = \frac{1}{2^n} \quad$ et $\quad g(v_n) = 2^n \tan\frac{1}{2^n} = \frac{\tan\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}.$

On peut appliquer le théorème 2 précédent :

$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 1$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g(v_n) = 1$.

## 2.7 FONCTION CONTINUE

### a) Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

Soit une fonction $f$ définie en $x_0$ et admettant une limite $l$ en $x_0$ :

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = l$$

cela signifie que, quel que soit le réel $a$ strictement positif donné, on peut trouver un intervalle contenant 0 sur lequel

$$|f(x_0+h) - l| \leqslant a,$$

en particulier pour $h = 0$ :

$$|f(x_0) - l| \leqslant a.$$

Si l'on prend $a = \frac{|f(x_0)-l|}{2}$, $\quad |f(x_0) - l| \leqslant \frac{|f(x_0)-l|}{2}$

ce qui n'est possible que si $f(x_0) = l$. Donc :

**Théorème**

> **Si une fonction $f$ est définie en $x_0$ et admet une limite en $x_0$, cette limite est nécessairement $f(x_0)$.**

Une telle fonction est dite *continue* en $x_0$.

**Définitions**

> **Une fonction $f$ continue en $x_0$ est une fonction définie en $x_0$ et telle que sa limite en $x_0$ est égale à $f(x_0)$.**
> **Une fonction continue sur un intervalle est une fonction continue en tout point de cet intervalle.**

**EXEMPLES** • Soit $f : x \longmapsto x^2-2x$ définie sur $\mathbb{R}$. On a vu (cf. § 2.1 b) que $\lim\limits_{1} f=-1$ cette limite n'est autre que $f(1)$. Donc $f$ est continue au point $x_0=1$.

• Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. On sait que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}=1$ mais $f$ n'est pas définie en 0. Considérons alors la fonction $g$ telle que :

si $x \neq 0$, $\quad g(x)=f(x)$

si $x=0$, $\quad g(0)=\lim\limits_{0} f=1$

la fonction $g$ est continue en 0. On dit que $g$ est un **prolongement par continuité** de $f$ au point 0.

• Soit la fonction cosinus : $x \longmapsto \cos x$ définie sur $\mathbb{R}$. Quels que soient les réels $x_0$ et $h$, on a :

$$\cos(x_0+h)=\cos x_0 \cos h-\sin x_0 \sin h$$

on a vu (cf. § 2.6 a) que : $|\sin h| \leq |h|$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \sin h=0$ et que : $\lim\limits_{h \to 0} \cos h=1$.

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \cos(x_0+h)=\cos x_0$ ce qui montre que :

**la fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$.**

• Soit la fonction sinus : $x \longmapsto \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$. On peut aussi écrire :

$$\sin(x_0+h)=\sin x_0 \cos h+\cos x_0 \sin h$$

$\lim\limits_{h \to 0} \sin h=0$, $\lim\limits_{h \to 0} \cos h=1$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \sin(x_0+h)=\sin x_0$. On peut énoncer :

**la fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$.**

## b) Continuité à droite. Continuité à gauche

**Définitions**

> **Une fonction $f$ continue à droite en $x_0$ est une fonction définie en $x_0$ et telle que sa limite à droite en $x_0$ est égale à $f(x_0)$.**
> **Une fonction $f$ continue à gauche en $x_0$ est une fonction définie en $x_0$ et telle que sa limite à gauche en $x_0$ est égale à $f(x_0)$.**

**EXEMPLE** Soit $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2+|x|}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. On a vu (cf. § 2.3) que :

$$\lim_{0^+} f=1 \text{ et } \lim_{0^-} f=-1.$$

Considérons la fonction $g$ telle que :

si $x \neq 0$, $\quad g(x)=f(x)$

si $x=0$, $\quad g(0)=\lim\limits_{0^+} f=1$,

la fonction $g$ est continue à droite en 0.
On dit que $g$ est un **prolongement par continuité de $f$ à droite en 0.**

## c) Opérations sur les fonctions continues

Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues en $x_0$. On a donc $\lim_{x_0} f = f(x_0)$ et $\lim_{x_0} g = g(x_0)$. Il résulte des opérations sur les limites (cf. § 2.4) que :

**Théorèmes**

> **Soit deux fonctions $f$ et $g$ continues en $x_0$ et un nombre réel $\lambda$.**
>
> **1. Les fonctions $f+g$, $\lambda f$, $fg$ sont continues en $x_0$.**
>
> **2. Si, de plus, $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues en $x_0$.**

• Il n'est pas toujours commode d'utiliser la définition pour démontrer qu'une fonction est continue en un point. Les théorèmes précédents permettent de démontrer, d'une façon immédiate et générale, cette continuité. Ainsi la fonction constante : $x \longmapsto \lambda$ ($\lambda$ réel donné) et la fonction identique : $x \longmapsto x$ définies sur $\mathbb{R}$ étant continues en tout point de $\mathbb{R}$, toute fonction déduite de ces deux fonctions par un nombre fini d'additions et de multiplications sera continue en tout point de $\mathbb{R}$. Par exemple, quel que soit l'entier naturel $n$ non nul la fonction : $x \longmapsto x^n$ est continue pour tout $x$ réel et toute fonction polynôme :

$$x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

est continue pour tout $x$ réel.

• Toute fonction rationnelle est le quotient de deux fonctions polynômes donc elle est continue en tout point où elle est définie.

• Pour tout $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), la fonction tangente : $x \longmapsto \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est définie et elle est le quotient de deux fonctions continues donc elle est continue.

• Pour tout $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), la fonction cotangente : $x \longmapsto \text{cotan}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ est définie et elle est le quotient de deux fonctions continues donc elle est continue. On peut énoncer :

**Théorèmes**

> **1. Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.**
>
> **2. Toute fonction rationnelle, la fonction tangente, la fonction cotangente sont continues en tout point où elles sont définies.**

### d) Composition faisant intervenir la continuité

• Soit $f$ une fonction continue en $x_0$ et $g$ une fonction continue en $f(x_0)$. On a :

$$\lim_{x_0} f = f(x_0) \text{ et } \lim_{f(x_0)} g = g(f(x_0)).$$

D'après le théorème 1 sur la composition de fonction ayant des limites (cf. § 2.5), on déduit :

$$\lim_{x_0} g \circ f = g(f(x_0))$$

donc $g \circ f$ est continue en $x_0$ :

**Théorème**

**Si $f$ est une fonction continue en $x_0$ et si $g$ est une fonction continue en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en $x_0$.**

**EXEMPLE** Soit la fonction : $x \longmapsto \sin(x^2+x-1)$ définie sur $\mathbb{R}$. Cette fonction n'est autre que $g \circ f$ avec $f : x \longmapsto x^2+x-1$ (fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$) et $g : x \longmapsto \sin x$ continue sur $\mathbb{R}$.
Donc $g \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• Soit une suite $(u_n)$ définie par une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$. Supposons que $(u_n)$ converge vers $l$ (fini) quand $n$ tend vers $+\infty$ et que $f$ soit continue au point $l$. On a :

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = l \quad \text{et} \quad \lim_{l} f = f(l).$$

D'après le théorème 2 sur la composition de fonctions ayant des limites (*cf.* § 2.5), on déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l).$$

De la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$, on déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(u_n)$$

c'est-à-dire $l = f(l)$.

On peut énoncer :

**Théorème**

**Soit une suite définie par une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si elle converge vers $l$ et si $f$ est continue au point $l$, alors :**

$$l = f(l).$$

**EXEMPLE** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0$, on suppose $-1 < u_0 < 0$, et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = u_n^2 + u_n.$$

- La suite est croissante, car, quel que soit $n$ entier naturel :

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0.$$

- Démontrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n < 0$.

— On a bien $u_0 < 0$.
— Si $u_n < 0$, alors $u_{n+1} = u_n^2 + u_n = u_n(u_n + 1) < 0$ puisque l'on a $u_n < 0$ et $u_n + 1 > 0$ (car, la suite étant croissante, $u_n \geq u_0 > -1$).
La suite, étant croissante et majorée par 0, admet une limite $l$ (*cf.* § 1.6).
La fonction $f : x \longmapsto x^2 + x$ définie sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc au point $l$.
D'où, d'après le théorème précédent :

$$l = l^2 + l$$
$$l^2 = 0$$

la limite de la suite est 0.

## 2.8 PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONTINUES SUR UN INTERVALLE

Nous supposerons que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ fermé ou non, borné ou non.

### a) Image d'un intervalle par une fonction continue

Conformément au programme, nous admettrons le théorème suivant :

**Théorème 1**

> **Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle, l'image par $f$ de cet intervalle est un intervalle.**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle I, ce théorème permet d'affirmer que $f(\mathrm{I})$ est un intervalle mais $f(\mathrm{I})$ peut être ouvert ou fermé. Par exemple, soit la fonction : $x \longmapsto x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$, cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et l'image de l'intervalle ouvert $]1, 2[$ est l'intervalle ouvert $]3, 4[$. Par contre, soit la fonction : $x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$, cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, l'image de l'intervalle ouvert $]-1, +1[$ est l'intervalle $[0, 1[$ qui est fermé à gauche et ouvert à droite.
On peut énoncer un autre théorème plus précis que nous admettrons également, lorsqu'il s'agit d'un segment c'est-à-dire un intervalle fermé à gauche et à droite :

**Théorème 2**

> **Soit $f$ une fonction continue sur un segment, l'image par $f$ de ce segment est un segment.**

Soit $[m, M]$ l'image du segment $[a, b]$ (fig. 2). $m$ est la plus petite valeur de $f$ sur $[a, b]$ et $M$ sa plus grande valeur. Le théorème permet d'affirmer l'existence, lorsque $f$ est continue sur $[a, b]$, des nombres $m$ et $M$ et $f$ est une **surjection** de $[a, b]$ sur $[m, M]$ c'est-à-dire que :

$$(\forall \lambda \in [m, M]) \quad (\exists x \in [a, b]) \quad f(x) = \lambda.$$

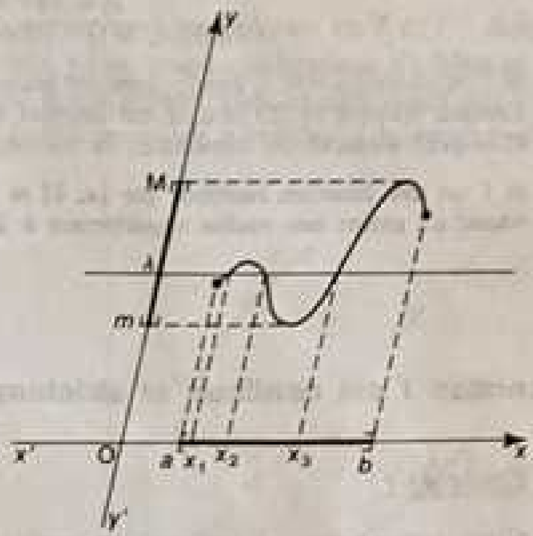



fig. 2

**REMARQUE** La condition : « $f$ continue sur un segment » est une *condition suffisante* pour que l'image de ce segment soit un segment. Mais cette *condition n'est pas nécessaire* : l'image d'un segment peut être un segment sans que $f$ soit continue.
Par exemple, soit la fonction $f$ définie sur $[1, 3]$ par :

si $1 \leqslant x < 2$, $\quad f(x) = 2x$
si $2 \leqslant x \leqslant 3$, $\quad f(x) = -2x + 10$,

la fonction $f$ n'est pas continue au point $x = 2$ mais l'image du segment $[1, 3]$ est le segment $[2, 6]$ (fig. 3).

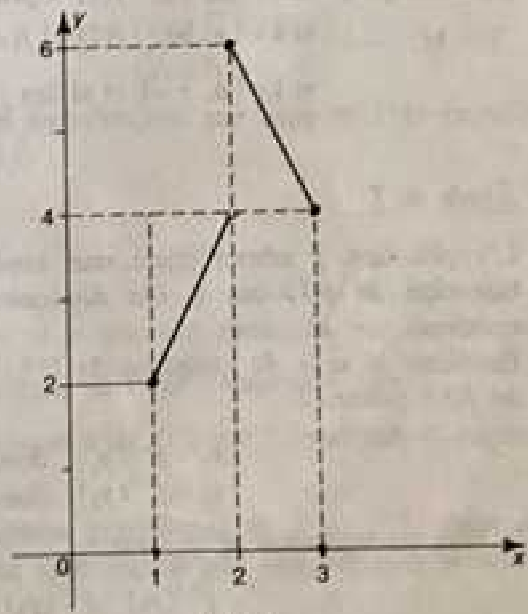



fig. 3

**EXERCICE RÉSOLU** *Montrer que l'équation : $x^4+5x^3-x^2+x-1=0$ admet au moins une racine appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.*

Considérons la fonction $f : x \longmapsto x^4+5x^3-x^2+x-1$ définie sur $\mathbb{R}$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, 1]$. D'après le théorème 2, l'image du segment $[0, 1]$ est un segment $[m, M]$.

$f(0)=-1$ et $f(1)=5$ appartiennent à $[m, M]$. On a donc :

$$m \leq -1 < 0 < 5 \leq M$$
$$(\forall \lambda \in [m, M]) \quad (\exists x \in [0, 1]) \quad f(x)=\lambda.$$

Si l'on choisit $\lambda=0$, il existe donc au moins un élément $x$ de $[0, 1]$ tel que $f(x)=0$. Comme $f(0)\neq 0$ et $f(1)\neq 0$, $x$ est distinct de 0 et de 1 donc $x \in ]0, 1[$.

Plus généralement on démontre, de même, que :

**Si $f$ est une fonction continue sur $[a, b]$ et si $f(a)f(b)<0$, alors l'équation : $f(x)=0$ admet au moins une racine appartenant à $]a, b[$.**

## b) Cas où la fonction $f$ est continue et strictement monotone sur I

■ *Étude de $f$*

Nous supposerons $f$ strictement croissante. Le raisonnement est analogue lorsque $f$ est strictement décroissante.

Quels que soient $x_1$ et $x_2$ de I :

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$
$$x_1 > x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

donc

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

Il en résulte que tout élément de l'intervalle $f(\mathrm{I})$ admet un antécédent unique dans I, $f$ est donc une **bijection** de I sur l'intervalle $f(\mathrm{I})$.

De plus, si I est un intervalle ouvert à gauche ou à droite, $f(\mathrm{I})$ aussi sera un intervalle ouvert à gauche ou à droite respectivement :

par exemple, si $\mathrm{I}=]a, b[$, $f(\mathrm{I})=]f(a), f(b)[$

si $\mathrm{I}=[a, b[$, $f(\mathrm{I})=[f(a), f(b)[$

si $\mathrm{I}=[a, +\infty[$ et si $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$, $f(\mathrm{I})=[f(a), +\infty[$.

■ *Étude de $f^{-1}$*

L'application $f$ admet donc une application réciproque $f^{-1}$ qui est une bijection de $f(\mathrm{I})$ sur I. On démontre (nous l'admettrons) que $f^{-1}$ est continue.

Étudions le sens de variation de $f^{-1}$. Quels que soient $y_1$ et $y_2$, distincts, de $f(\mathrm{I})$, posons :

$$x_1=f^{-1}(y_1) \quad \text{donc} \quad y_1=f(x_1)$$
$$x_2=f^{-1}(y_2) \quad \text{donc} \quad y_2=f(x_2)$$

le taux de variation de $f^{-1}$ est :

$$\frac{f^{-1}(y_2)-f^{-1}(y_1)}{y_2-y_1}=\frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)}$$

nous remarquons que le taux de variation de $f^{-1}$ est l'inverse de celui de $f$ donc de même signe. $f^{-1}$ est strictement croissante (resp. décroissante) sur $f(\mathrm{I})$ si $f$ est strictement croissante (resp. décroissante) sur I. Nous dirons que $f^{-1}$ varie dans le même sens que $f$.

- *Représentation graphique de $f^{-1}$*

Soit $\Gamma$ et $\Gamma_1$ les représentations graphiques de $f$ et $f^{-1}$ dans un *même* repère orthonormé. Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan et $M_1(x_1, y_1)$ tel que $x_1 = y$ et $y_1 = x$. Ces deux points sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ appelée première bissectrice du repère orthonormé (fig. 4).

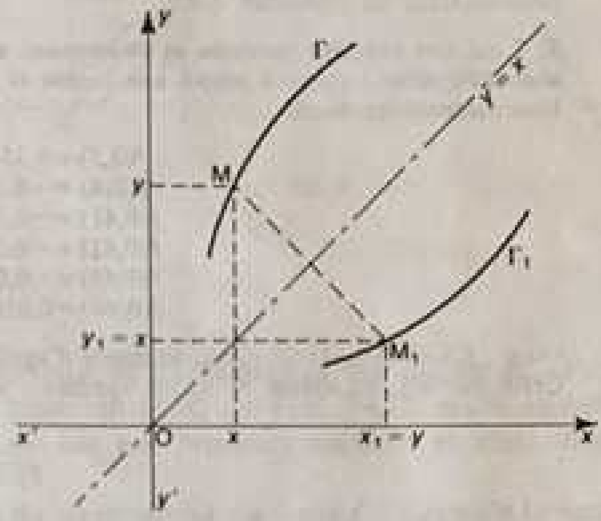



fig. 4

On peut écrire les équivalences suivantes :

$$M \in \Gamma \iff \begin{cases} y = f(x) \\ x \in \mathrm{I} \end{cases} \iff \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(\mathrm{I}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y_1 = f^{-1}(x_1) \\ x_1 \in f(\mathrm{I}) \end{cases} \iff M_1 \in \Gamma_1$$

Donc $\Gamma$ et $\Gamma_1$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère. En résumé :

**Théorème**

**Si $f$ est continue et strictement monotone sur un intervalle I,**

- **$f$ est une bijection de I sur l'intervalle $f(\mathrm{I})$,**
- **$f^{-1}$ est une bijection de $f(\mathrm{I})$ sur I, continue et variant dans le même sens que $f$,**
- **les représentations graphiques de $f$ et $f^{-1}$, dans un même repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère.**

**EXERCICE RÉSOLU**

*Montrer que l'équation : $x^5+5x-2{,}2=0$ admet une racine et une seule $x_0$ appartenant à $]0, 1[$. Donner une valeur approchée de $x_0$ à $10^{-2}$ près par défaut.*

Considérons la fonction $f : x \longmapsto x^5+5x-2{,}2$ définie sur $\mathbb{R}$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme. D'autre part

$$f'(x)=5x^4+5=5(x^4+1)>0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$f(0)=-2{,}2 \text{ et } f(1)=3{,}8$$

l'image de l'intervalle $]0, 1[$ est l'intervalle $]-2{,}2; 3{,}8[$. La restriction de $f$ à l'intervalle $]0, 1[$ est une bijection de $]0, 1[$ sur $]-2{,}2; 3{,}8[$. Donc 0 élément de $]-2{,}2; 3{,}8[$ admet un seul antécédent $x_0$, par $f$, élément de $]0, 1[$. Ce qui veut dire que l'équation : $f(x)=0$ admet une racine et une seule $x_0$ appartenant à $]0, 1[$. Plus généralement on démontre que :

**Si $f$ est une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$ et si $f(a)f(b)<0$, alors l'équation : $f(x)=0$ admet une racine et une seule appartenant à $]a, b[$.**

Une calculatrice donne :

$$\begin{aligned}
f(0{,}5)&=0{,}331\,25\\
f(0{,}4)&=-0{,}189\,76\\
f(0{,}41)&=-0{,}138\,4\ldots\\
f(0{,}42)&=-0{,}086\,9\ldots\\
f(0{,}43)&=-0{,}035\,2\ldots\\
f(0{,}44)&=0{,}016\,4\ldots
\end{aligned}$$

On a : $f(0{,}43)f(0{,}44)<0$ donc, toujours d'après le même théorème, $0{,}43<x_0<0{,}44$.
Cette méthode de calcul de $x_0$ est appelée : *méthode des substitutions.*

## 2.9 FONCTION : $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ $(n\in\mathbb{N}^*; x\in\mathbb{R}_+)$

Donnons un exemple important de fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone.

### a) Étude de $f : x \longmapsto x^n$ $(n\in\mathbb{N}^*; x\in\mathbb{R}_+)$

Tout d'abord si $n=1$, la fonction : $x \longmapsto x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Si $n$ est un entier strictement supérieur à 1, la fonction polynôme $f$ : $x \longmapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on sait (classe de Première) que sur $\mathbb{R}_+$ :

$$f'(x)=nx^{n-1}.$$

$f'(0)=0$ et $f'(x)>0$ pour $x>0$ donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} x^n=+\infty$ d'où le tableau de variations :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

On obtient la représentation graphique à la figure 5.

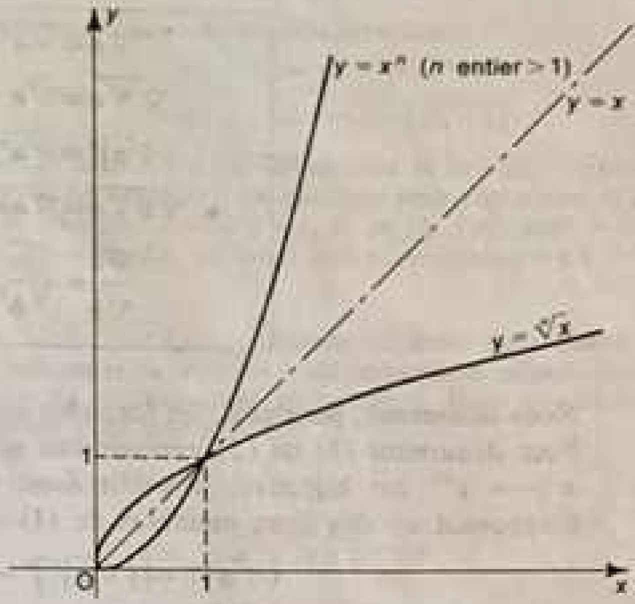



fig. 5

## b) Étude de $f^{-1}$

Puisque $f$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, l'application $f$ (cf. § 2.8 b) est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+)=\mathbb{R}_+$ et elle admet une application réciproque $f^{-1}$ qui est une bijection continue et strictement croissante de $f(\mathbb{R}_+)=\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
L'image unique du nombre réel $x \geqslant 0$ par $f^{-1}$ s'appelle la **racine $n^{\text{ième}}$ positive du nombre positif $x$.** Cette image se note $\sqrt[n]{x}$ et on a $f^{-1} : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Le symbole $\sqrt[n]{\ }$ s'appelle un *radical*, l'entier strictement positif $n$ s'appelle *l'indice* du radical. Si l'indice du radical est $n=2$, on convient de ne pas l'écrire (pour tout $x \geqslant 0$ on écrit $\sqrt{x}$ au lieu de $\sqrt[2]{x}$) et on dit « racine carrée » au lieu de « racine deuxième ». Pour $n=3$, on dit « racine cubique » au lieu de « racine troisième ».
On peut écrire :

$$[\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2] \ y=\sqrt[n]{x} \iff x=y^n.$$

Dans un *même repère orthonormé*, la représentation graphique (fig. 5) de

$$f^{-1} : x \longmapsto y=\sqrt[n]{x}$$

se déduira de la représentation graphique de $f : x \longmapsto y=x^n$ par symétrie par rapport à la première bissectrice du repère (cf. § 2.8 b). Notons que pour $n=1$ on a

$$y=x=\sqrt[1]{x}.$$

## c) Opérations sur les radicaux

Quels que soient les entiers strictement positifs $n$ et $p$ et les nombres réels $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ (sauf dans la dernière formule où $b>0$) démontrons les égalités :

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[np]{a^p} \quad (1)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[np]{a} \quad (2)$$

$$(\sqrt[n]{a})^p=\sqrt[n]{a^p} \quad (3)$$

$$\bullet\ \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}. \quad (5)$$

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

Nous utiliserons, pour cela, les formules connues sur les puissances *entières*. Pour démontrer (1) ou (2), remarquons que l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ : $x \longmapsto x^{np}$ est bijective, il suffit donc de montrer que les puissances d'exposant $np$ des deux membres de (1) ou de (2) sont égales :

$$(\sqrt[n]{a})^{np}=[(\sqrt[n]{a})^n]^p=a^p$$

$$(\sqrt[np]{a^p})^{np}=a^p \quad \text{donc (1) est vérifiée.}$$

$$(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}})^{np}=[(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}})^n]^p=(\sqrt[p]{a})^p=a$$

$$(\sqrt[np]{a})^{np}=a \quad \text{donc (2) est vérifiée.}$$

De même, l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ : $x \longmapsto x^n$ étant bijective, (3) sera vérifiée si les puissances d'exposant $n$ des deux membres de (3) sont égales :

$$[(\sqrt[n]{a})^p]^n=(\sqrt[n]{a})^{pn}=[(\sqrt[n]{a})^n]^p=a^p$$

$$(\sqrt[n]{a^p})^n=a^p \quad \text{donc (3) est vérifiée.}$$

Vous démontrerez, de même, les égalités (4) et (5) en calculant les puissances d'exposant $n$ des deux membres.

## d) Continuité et limites contenant des radicaux

Soit $f$ une fonction définie et positive sur un intervalle I et la fonction $\sqrt[n]{f}$ : $x \longmapsto \sqrt[n]{f(x)}$ définie sur I. On peut écrire $\sqrt[n]{f}=g\circ f$ avec :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{I} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & f(x)=\mathrm{X} & \longmapsto & \sqrt[n]{\mathrm{X}}. \end{array}$$

• Si $f$ est continue sur I, comme $g$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, alors $\sqrt[n]{f}=g\circ f$ est continue sur I (composition de fonctions continues).

• $x_0$ étant fini ou non, si $\lim\limits_{x_0} f=l$, comme $\lim\limits_{\mathrm{X}\to l}\sqrt[n]{\mathrm{X}}=\sqrt[n]{l}$ (continuité de la fonction racine $n^{\text{ième}}$), alors $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{l}$.

• $x_0$ étant fini ou non, si $\lim\limits_{x_0} f=+\infty$, comme $\lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty}\sqrt[n]{\mathrm{X}}=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=+\infty$.

Donnons des exemples d'application de ces résultats :

**EXEMPLE 1** Soit les fonctions numériques de la variable réelle

$$f : x \longmapsto (x-1)(x-2)$$
$$\sqrt{f} : x \longmapsto \sqrt{(x-1)(x-2)}$$

$f$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais $\sqrt{f}$ n'est définie que si $(x-1)(x-2) \geq 0$ c'est-à-dire sur $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$. La fonction $f$ est continue pour tout $x$ réel et en particulier elle est continue sur les demi-droites $]-\infty, 1]$ et $[2, +\infty[$ dont $\sqrt{f}$ est continue sur $]-\infty, 1]$ et sur $[2, +\infty[$. On dit aussi que $f$ est continue sur $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

**EXEMPLE 2** Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+2x+2}+2x$. Étudions la limite de $f$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Le discriminant de $x^2+x+2$ est strictement négatif donc ce trinôme est toujours du signe du coefficient de $x^2$ qui est 1. Donc $x^2+2x+2>0$ pour tout $x$ réel et $f$ est définie pour tout $x$ réel.

*a*) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+2x+2) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+2x+2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

*b*) On a de même $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+2x+2} = +\infty$ mais $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$.

On ne peut donc conclure pour la somme $f(x)$. Opérons comme pour l'étude des limites de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles (cf. § 2.1 c) :

$$f(x) = \sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2x = |x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+2x$$

$$f(x) = -x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+2x \quad \text{car} \quad x<0$$

$$f(x) = x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+2\right)$$

$$\lim_{x \to -\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+2\right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

donc la limite du produit est $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

**EXEMPLE 3** Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+2x+2}+x$. Étudions $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Comme dans l'exemple 2, $f$ est définie pour tout $x$ réel.

*a*) En raisonnant comme dans le cas *a*) précédent, on trouve $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

*b*) On ne peut procéder comme dans le cas *a*) pour avoir $\lim\limits_{x \to -\infty} f$ car :

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+2x+2} = +\infty$, mais $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et on ne peut conclure pour la limite de la somme $f(x)$.

On ne peut procéder, non plus, comme dans le cas *b*) précédent car on arrive à

$$f(x) = x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)$$

$$\lim_{x \to -\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{2}{2x}+\frac{2}{x^2}}+1\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

et on ne peut conclure pour la limite du produit $f(x)$. Il nous faut donc chercher une autre méthode. Pour $x<0$ on peut écrire :

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+2x+2}+x)(\sqrt{x^2+2x+2}-x)}{\sqrt{x^2+2x+2}-x}=\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}-x}$$

$$f(x)=\frac{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-x}=\frac{2+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{2}{x}\right)=2,\quad \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right)=-2$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{2}{-2}=-1.$$

## 2.10 TRAVAUX PRATIQUES

*Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0=1$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$ $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$.*

1. *Montrer que la suite est croissante et majorée par 2. Qu'en concluez-vous?* (Nous avons déjà étudié cette question au § 1.7).

2. *Trouver la limite $l$ de cette suite.*
($f : x \longmapsto \sqrt{2+x}$ est continue sur $[-2, +\infty[$ donc en $l$ car la limite d'une suite positive est positive donc $l\in[-2, +\infty[$. On a alors $l=\sqrt{2+l}$. On trouve $l=2$.)

# Exercices

### Limite d'une fonction par comparaison à une fonction de référence

*En majorant ou en minorant f par une fonction, étudier la limite de f dans les cas suivants (ex. 2.1 à 2.9) :*

**2.1** $f(x) = x^2 + x + 1$ en $x_0 = 1$.

**2.2** $f(x) = x^3 + 3x$ en $x_0 = 0$.

**2.3** $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ en $x_0 = 1$.

**2.4** $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$ en $+\infty$.

**2.5** $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$ en $+\infty$.

**2.6** $f(x) = x^3\left(\cos\frac{1}{x} - 2\right)$ en $+\infty$.

**2.7** $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ en $+\infty$; en 1; en 2.

**2.8** $f(x) = \dfrac{5x^2+3}{x^2}$ en $-\infty$.

**2.9** $f(x) = \dfrac{E(x)}{x}$, $E(x)$ étant la partie entière de $x$, quand $x$ tend vers $+\infty$; vers $-\infty$.

### Opérations sur les limites. Composition

*Étudier les limites (on discutera éventuellement suivant les valeurs des réels donnés a, b, c, d) des fonctions qui associent au nombre réel x le nombre suivant quand il existe (ex. 2.10 à 2.27) :*

**2.10** $\dfrac{x^2-4}{x^2+3x-10}$ quand $x$ tend vers 2, vers $-5$, vers $+\infty$, vers $-\infty$.

**2.11** $\dfrac{x^2-4}{(x-2)^2(x+5)}$ quand $x$ tend vers 2, vers $-5$, vers $+\infty$, vers $-\infty$.

**2.12** $\dfrac{8x^3-27}{4x^2-9}$ quand $x$ tend vers $\frac{3}{2}$, vers $-\frac{3}{2}$, vers $+\infty$, vers $-\infty$.

**2.13** $\dfrac{x^4-3x^3+3x^2-3x+2}{x^3-6x^2+11x-6}$ quand $x$ tend vers $+\infty$, vers 1, vers 2, vers 3.

**2.14** $(x-2)\left(1+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}\right)$ quand $x$ tend vers 2, vers $+\infty$, vers $-\infty$.

**2.15** $\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ quand $x$ tend vers 1, vers $+\infty$, vers $-\infty$.

**2.16** $\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{ax}{(x^2-1)^2}$ quand $x$ tend vers 1, vers $+\infty$, vers $-\infty$.

**2.17** $\dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{a}{x^3-1}$ quand $x$ tend vers 1, vers $+\infty$, vers $-\infty$.

**2.18** $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x}$ quand $x$ tend vers 0, vers $+\infty$, vers $-\infty$.

**2.19** $\dfrac{ax^3+bx^2+x-1}{x-1}$ quand $x$ tend vers 1, vers $+\infty$, vers $-\infty$.

**2.20** $\dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}$ quand $x$ tend vers 0.

**2.21** $\dfrac{\operatorname{cotan} x}{x-\frac{\pi}{2}}$ quand $x$ tend vers $\frac{\pi}{2}$.

**2.22** $\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ quand $x$ tend vers 0.

**2.23** $\dfrac{2\tan x + \sin x}{x}$ quand $x$ tend vers 0.

**2.24** $\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$ quand $x$ tend vers 0.

**2.25** $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$ quand $x$ tend vers 0.

**2.26** $\dfrac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{x-\frac{\pi}{3}}$ quand $x$ tend vers $\frac{\pi}{3}$.

**2.27** $(x+1)\tan\dfrac{1}{x}$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

**2.28** Soit les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par :
si $x \geqslant 0$, $f(x) = -x$, $g(x) = 1$.
si $x < 0$, $f(x) = 1$, $g(x) = x$.

Étudier $\lim\limits_{0^+} f$, $\lim\limits_{0^+} g$, $\lim\limits_{0^+} g \circ f$.

Pourquoi n'a-t-on pas $\lim\limits_{0^+} g \circ f = \lim\limits_{0^+} g$ ?

**2.29** On suppose $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Calculer :

$$S_n(x) = \tan x + \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}.$$

On démontrera et on utilisera l'égalité

$$\tan \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} - \frac{2}{\tan 2\alpha}.$$

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x)$.

**2.30** Soit, pour $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$,

$$P_n(x) = \cos x \cos\frac{x}{2} \dots \cos\frac{x}{2^n}$$

$$Q_n(x) = (1 - \tan^2 x)\left(1 - \tan^2\frac{x}{2}\right) \dots \left(1 - \tan^2\frac{x}{2^n}\right)$$

$$R_n(x) = (1 + \tan^2 x)\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right) \dots \left(1 + \tan^2\frac{x}{2^n}\right).$$

**1.** A l'aide de l'égalité $\cos \alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$ où l'on remplacera $\alpha$ successivement par $x, \dfrac{x}{2}, \dots, \dfrac{x}{2^n}$, simplifier $P_n(x)$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n(x)$.

**2.** Simplifier $Q_n(x)$ et $R_n(x)$ et trouver leurs limites quand $n$ tend vers $+\infty$.

## Opérations sur les fonctions continues. Composition

**2.31** $E(x)$ désignant la partie entière de $x$, soit la fonction $f : x \longmapsto (-1)^{E(x)}[x - E(x)]$ définie sur $\mathbb{R}$.

**1.** Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x+2) = f(x).$$

Que peut-on dire des points

$$M(x, f(x)) \quad \text{et} \quad M'(x+2, f(x+2)) ?$$

**2.** Étudier la continuité et faire la représentation graphique de $f$.

**2.32** $E(x)$ désignant la partie entière de $x$, soit la fonction $f : x \longmapsto E(x) + [x - E(x)]^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

**1.** Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x+1) = f(x) + 1.$$

Que peut-on dire des points

$$M(x, f(x)) \quad \text{et} \quad M'(x+1, f(x+1)) ?$$

**2.** Étudier la continuité et faire la représentation graphique de $f$.

**2.33** Soit la fonction $f : x \longmapsto xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}_+^* = ]0, +\infty[$.

**1.** Représenter graphiquement la restriction de $f$ à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$.

**2.** Étudier la continuité de $f$.

**3.** Étudier la limite de $f$ quand $x$ tend vers 0.

**2.34** Soit $f : x \longmapsto \left|x^2 + x + 1 - |x - 1|\right|$ définie sur $\mathbb{R}$.
Montrer que :

$$f = v \circ (h - v \circ g)$$

avec
$$g : x \longmapsto x - 1$$
$$v : x \longmapsto |x|$$
$$h : x \longmapsto x^2 + x + 1,$$

définies sur $\mathbb{R}$.
En déduire que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

## Prolongement par continuité

**2.35** Trouver un prolongement par continuité en $x_0$, la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ étant définie par :

$$f(x) = \frac{6x^2 + 5x - 4}{2x - 1};$$

on considère le point $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

**2.36** Même question qu'à l'exercice précédent avec :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 4}{x + 1}, \quad x_0 = -1.$$

**2.37** Même question qu'à l'exercice 2.35 avec :

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{2}\cos x}{1 - \sqrt{2}\sin x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

**2.38** Même question qu'à l'exercice 2.35 avec :

$$f(x) = \frac{\tan x - 1}{2\cos x - \sqrt{2}}, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

## Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

**2.39** Soit $f$ une fonction continue sur $[0, 1]$ et prenant ses valeurs dans $[0, 1]$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une racine appartenant à $[0, 1]$.
(Indication : considérer la fonction

$$g : x \longmapsto f(x) - x.)$$

**2.40** Étudier les variations de

$$f : x \longmapsto 2x^3 + 5x - 4$$

définie sur $\mathbb{R}$.

En déduire que l'équation : $2x^3+5x-4=0$ admet une racine et une seule $x_0$ appartenant à $]0, 1[$. Donner une valeur approchée de $x_0$ à $10^{-2}$ près par défaut à l'aide d'une calculatrice.

**2.41** Mêmes questions qu'à l'exercice précédent avec : $x^4+x^2-1=0$.

## Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone

X **2.42** Soit $f : \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[ \longrightarrow [1, +\infty[$

$$x \longmapsto 4x^2+4x+2.$$

1. Montrer que $f$ est bijective.
2. Étudier les variations de $f^{-1}$ et représenter, dans un même repère orthonormé, $f$ et $f^{-1}$.
3. Calculer $f^{-1}(x)$.

**2.43** Soit $f : [0, +\infty[ \longrightarrow [5, +\infty[$

$$x \longmapsto x^4+2x^2+5.$$

1. Montrer que $f$ est bijective.
2. Étudier les variations de $f^{-1}$ et représenter, dans un même repère orthonormé, $f$ et $f^{-1}$.
3. Calculer $f^{-1}(8)$ et plus généralement $f^{-1}(x)$.

**2.44** Soit la fonction $f$ définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x)=\cos x$.
Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ continue sur $[-1, +1]$. Sens de variation et représentation graphique de $f^{-1}$.

**2.45** Mêmes questions qu'à l'exercice précédent avec $f$ définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x)=\sin x$.

**2.46** Soit la fonction $f$ définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\tan x$.
Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ continue sur $\mathbb{R}$. Sens de variation et représentation graphique de $f^{-1}$.

## Fonction : $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$

**2.47** Simplifier $\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin x}$.

**2.48** Simplifier :

$$A=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

$$B=\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}-\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\right).$$

(On remarquera que les nombres figurant sous les radicaux $\sqrt[3]{\ }$ ou $\sqrt[4]{\ }$ sont des cubes ou des carrés simples.)

$$C=\sqrt{\sqrt{3}}-2\sqrt[4]{48}+\sqrt[4]{243}.$$

**2.49** Comparer les nombres :

$$\sqrt[3]{4}, \quad \sqrt[4]{7}, \quad \sqrt[6]{9}.$$

**2.50** Soit la fonction numérique de la variable réelle

$$f : x \longmapsto \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}.$$

Trouver l'ensemble de définition de $f$. Simplifier $f$ et construire sa représentation graphique.

**2.51** Soit la fonction $f : x \longmapsto E(x)+\sqrt{x-E(x)}$ définie sur $\mathbb{R}$, $E(x)$ étant la partie entière de $x$.

1. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x+1)=f(x)+1$.
Que peut-on dire des points

$$M(x, f(x)) \quad \text{et} \quad M'(x+1, f(x+1))?$$

2. Étudier la continuité et faire la représentation graphique de $f$.

*Examiner si les fonctions $f$ ont une limite et calculer cette limite quand elle existe dans les cas suivants (ex. 2.52 à 2.61) :*

**2.52** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ quand $x$ tend vers 1, vers $+\infty$.

**2.53** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}$ quand $x$ tend vers 0, vers $+\infty$.

**2.54** $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$ quand $x$ tend vers 0 (pour le numérateur on utilisera l'identité remarquable

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)).$$

**2.55** $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ quand $x$ tend vers 0, vers $+\infty$.

**2.56** $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}\sqrt[12]{x}$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

**2.57** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x}$ quand $x$ tend vers $+\infty$, vers $-\infty$.

**2.58** $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}+mx$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (discuter suivant les valeurs du paramètre réel $m$).

**2.59** $f(x)=\sqrt{x^2+5x+1}+ax+b$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (discuter suivant les valeurs des paramètres réels $a$ et $b$).

**2.60** $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+mx$ quand $x$ tend vers $+\infty$ (discuter suivant les valeurs du paramètre réel $m$).

**2.61** $f(x)=\sqrt{x^3+ax^2+bx+c}+mx\sqrt{x+2}$ quand $x$ tend vers $+\infty$ (discuter suivant les valeurs des paramètres réels $a$, $b$, $c$, $m$).

**2.62** Étudier les limites, quand $n$ tend vers $+\infty$, des suites :

$$n \longmapsto 3\sqrt{n^2+n+1}-5n$$

$$n \longmapsto \sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n^2+1}.$$

**2.63** Étudier la limite, quand $n$ tend vers $+\infty$, de la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \; u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n + 6}.$$

**2.64** Étudier la monotonie de la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \; u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + 16}{2}}.$$

(On discutera suivant les valeurs du réel $u_0$.) Quelle est la limite de la suite? (On rappellera avec soin les théorèmes utilisés.)

## Révision

**2.65** **1.** Étudier les variations de

$$f : x \longmapsto x^4 + x - 0{,}537$$

définie sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que l'équation :

$$x^4 + x - 0{,}537 = 0 \qquad (1)$$

admet une racine et une seule $x_0$ appartenant à $]0, 1[$.

**2.** On se propose de trouver un encadrement de $x_0$ en écrivant l'équation (1) sous la forme :

$$x = \frac{0{,}537}{x^3 + 1} \qquad (2)$$

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = \frac{0{,}537}{u_n^3 + 1}.$$

*a*) Construire la représentation graphique $\Gamma$ de $g : x \longmapsto \frac{0{,}537}{x^3 + 1}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et la droite D d'équation $y = x$, dans un repère orthonormé. Représenter sur l'axe des abscisses les termes $u_0$, $u_1$, $u_2$, ... (cf. § 1.7. Exercice 2 du cours). Que constatez-vous?

*b*) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$0 \leq u_n \leq 0{,}6$$
$$|u_{n+1} - x_0| \leq 0{,}6 \, |u_n - x_0|$$
$$|u_n - x_0| \leq (0{,}6)^{n+1}.$$

*c*) En déduire que la suite $(u_n)$ a pour limite $x_0$ et montrer que :

$$(\forall p \in \mathbb{N}) \quad u_{2p} < x_0 < u_{2p+1}.$$

*d*) Donner, à l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée de $x_0$ à $10^{-3}$ près par défaut en calculant un certain nombre de termes de la suite $(u_n)$.
(Cette méthode de calcul de $x_0$ est appelée *méthode d'itération.*)

**2.66** On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{u_n} \end{cases}$$

**1.** Dans un plan affine muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm, dessiner la courbe C représentative de la fonction $f$ définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 5 - \frac{4}{x}$ et la droite $\Delta$ d'équation $y = x$.
On précisera les points communs à ces deux courbes.

**2.** Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

*a*) Montrer par récurrence que $u_n$ est bien définie pour tout $n$ et vérifie $1 < u_n < 4$.

*b*) Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

*c*) En déduire le comportement de la suite $(u_n)$ pour $n \longrightarrow +\infty$ et calculer éventuellement sa limite.

**3.** Représenter les 4 premiers de la suite $(u_n)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sur l'axe $(O, \vec{i})$, à l'aide de C et $\Delta$.

(*Exercice. Bac. E. Lille* 1984.)

# 3 FONCTIONS LOGARITHMES, EXPONENTIELLES ET PUISSANCES

Nous allons donner de nouvelles applications des notions de limites et continuité et découvrir de nouvelles fonctions dont l'emploi est très fréquent.

Nous utiliserons, pour cela, certains résultats relatifs aux dérivées vus en classe de Première.

## 3.1 PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE

**Définition**

> **Soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (fermé ou non, borné ou non).**
> **On dit qu'une fonction F définie sur I est une fonction primitive (ou plus simplement une primitive) de $f$ sur I si et seulement si F admet pour fonction dérivée $f$ sur I.**

Par exemple, une primitive de $f : x \longmapsto x^2 + x$ définie sur $\mathbb{R}$ est la fonction $F : x \longmapsto \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x$ réel

$$F'(x) = \frac{3x^2}{3} + \frac{2x}{2} = x^2 + x.$$

Une autre primitive est la fonction : $x \longmapsto \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Plus généralement nous admettrons que, si $f$ est une fonction *continue* sur I, elle admet au moins une primitive F sur I. Une autre primitive de $f$ sur I est F + C, C étant une constante réelle arbitraire, car la dérivée de F + C sur I est :
$$(F + C)' = F' = f.$$

Réciproquement si F et G sont deux primitives de $f$ sur I, pour tout $x$ de I :
$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

nous admettrons que si une fonction admet une dérivée nulle sur I, cette fonction est constante sur I, donc G − F est constante sur I et on peut écrire : G = F + C. Énonçons ces résultats :

**Théorème 1**

> **Si $f$ est une fonction continue sur I, elle admet sur cet intervalle une infinité de primitives. Si l'une d'elles est F, l'ensemble des primitives de $f$ sur I est l'ensemble des fonctions F + C où C est une fonction constante réelle arbitraire.**

Parmi les primitives précédentes, cherchons celle qui prend une valeur donnée $a$ au point $x_0$ de I :

$$F(x_0) + C = a$$

d'où la constante $C = a - F(x_0)$. On peut énoncer :

**Théorème 2**

> **Si $f$ est une fonction continue sur I, il existe une primitive et une seule sur I qui prend une valeur arbitraire donnée en un point donné de I.**

En particulier, pour $a = 0$, $C = -F(x_0)$. La fonction : $x \longmapsto F(x) - F(x_0)$ est la primitive de $f$ sur I qui s'annule au point $x_0$ de I.

## 3.2 FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

### a) Définition. Premières propriétés

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc elle admet, d'après le théorème 2 précédent, une primitive et une seule sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule pour $x = 1$.

**Définition**

> **On appelle fonction logarithme népérien la primitive définie sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, qui s'annule pour $x = 1$.**

Le mot « népérien » provient du nom de Neper (ou Napier), mathématicien écossais (1550-1617) à qui l'on doit l'invention des logarithmes.

On désigne la fonction logarithme népérien par le symbole ln. Ainsi, d'après la définition,

$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ $\boxed{(\ln)'(x) = \frac{1}{x}}$

et $\boxed{\ln 1 = 0}$

## b) Interprétation géométrique

Construisons, dans un repère orthonormé, la courbe Γ représentant la fonction

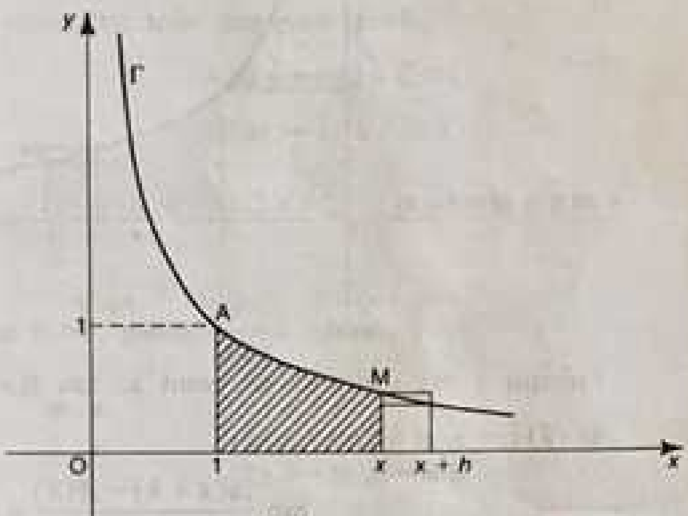



fig. 1

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

Soit l'application $\mathcal{A} : [1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R},$
$x \longmapsto \mathcal{A}(x),$

$\mathcal{A}(x)$ étant l'aire de la partie du plan hachurée limitée par Γ, $Ox$ et les droites parallèles à $Oy$ et passant respectivement par $A(1, 1)$ et $M\left(x, \frac{1}{x}\right)$.

• Si $h > 0$ (fig. 1), $\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)$ est comprise entre les aires de deux rectangles :

$$f(x+h) \times h \text{ et } f(x) \times h.$$

On peut écrire :

$$f(x+h) \times h < \mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x) < f(x) \times h$$

$$f(x+h) < \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} < f(x). \qquad (1)$$

• Si $h<0$ (fig. 2), on peut écrire :

$$f(x)\times(-h)<\mathcal{A}(x)-\mathcal{A}(x+h)<f(x+h)\times(-h)$$

$$f(x)<\frac{\mathcal{A}(x)-\mathcal{A}(x+h)}{-h}<f(x+h)$$

$$f(x)<\frac{\mathcal{A}(x+h)-\mathcal{A}(x)}{h}<f(x+h). \qquad (2)$$

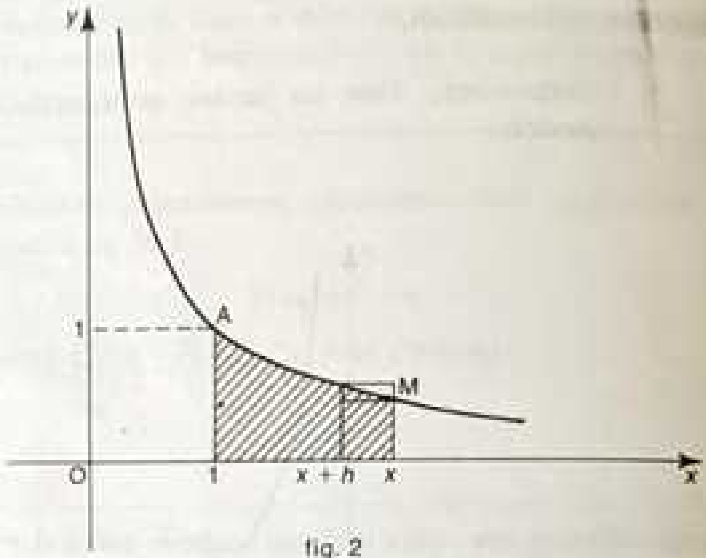


fig. 2

Puisque $f$ est *continue* au point $x$, $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$. Donc d'après (1) et (2) :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathcal{A}(x+h)-\mathcal{A}(x)}{h}=f(x)=\frac{1}{x}.$$

Ce qui montre que $\mathcal{A}$ admet $f$ pour fonction dérivée sur $[1, +\infty[$. Donc $\mathcal{A}$ est une primitive de $f$ sur $[1, +\infty[$, de plus : $\mathcal{A}(1)=0$. Il en résulte que

$$\boxed{\mathcal{A}(x)=\ln x}$$

**REMARQUE** Si $0<x<1$, en appelant encore $\mathcal{A}(x)$ l'aire de la partie limitée par $\Gamma$, $Ox$ et les droites parallèles à $Oy$ et passant respectivement par $A(1, 1)$ et $M\left(x, \frac{1}{x}\right)$, vous verrez, de même, que $\mathcal{A}(x)$ qui est un nombre positif est :

$$\mathcal{A}(x)=-\ln x=|\ln x|.$$

## c) Formules

• Supposons $a>0$ et $x>0$.
Cherchons une relation entre $\ln ax$ et $\ln x$.
On a vu en Première que, $a$ et $b$ étant des réels donnés, J étant l'image par $f : x \longmapsto ax+b$ d'un intervalle I, si $g$ est une fonction dérivable sur J, alors :

$$(\forall x\in \mathrm{I}) \quad [g(ax+b)]'=ag'(ax+b)$$

(l'écriture $[g(ax+b)]'$ désigne le nombre dérivé de la fonction : $x \longmapsto g(ax+b)$ au point $x$)

donc : $$(\ln ax)' = a\,(\ln)'(ax) = a\frac{1}{ax} = \frac{1}{x}.$$

Les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ :

$$x \longmapsto \ln x \quad \text{et} \quad x \longmapsto \ln(ax)$$

ont même dérivée $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$, donc ce sont deux primitives de $f$ et, d'après le théorème 1 (cf. § 3.1),

$$\ln(ax) = \ln x + C,$$

C était une constante telle que pour $x = 1$ :

$$\ln a = \ln 1 + C = C$$

d'où $$\ln(ax) = \ln a + \ln x$$

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \quad \boxed{\ln ab = \ln a + \ln b}$$

• Si $a > 0$ et $b > 0$, posons $\frac{a}{b} = c$ donc

$$a = bc$$
$$\ln a = \ln b + \ln c$$
$$\ln c = \ln a - \ln b$$

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \quad \boxed{\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b}$$

Pour $a = 1$ et $b > 0$, $\ln \frac{1}{b} = \ln 1 - \ln b = 0 - \ln b$. Donc :

$$(\forall b \in \mathbb{R}_+^*) \quad \boxed{\ln \frac{1}{b} = -\ln b}$$

• Si $a > 0$,

$$\ln a^0 = \ln 1 = 0 = 0 \ln a$$
$$\ln a^1 = 1 \ln a$$
$$\ln a^2 = \ln(aa) = \ln a + \ln a = 2 \ln a$$

on peut donc penser que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\ln a^n = n \ln a$. Raisonnons par récurrence :
si pour un entier naturel $n$, on a $\ln a^n = n \ln a$, alors :

$$\ln a^{n+1} = \ln a^n a = \ln a^n + \ln a = n \ln a + \ln a = (n+1) \ln a$$

donc : $$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall a \in \mathbb{R}_+^*) \quad \ln a^n = n \ln a.$$

On peut aussi écrire :

$$\ln a^{-n} = \ln \frac{1}{a^n} = -\ln a^n = -n \ln a.$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{R}_+^*)$ $\boxed{\ln a^n = n \ln a}$

• Si $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculons $\ln \sqrt[n]{a}$. Posons $b = \sqrt[n]{a}$ donc (1)

$$b^n = a$$
$$n \ln b = \ln a$$
$$\ln b = \frac{1}{n} \ln a$$
$$\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a.$$

(2)

Si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, $\qquad \ln \sqrt[q]{a^p} = \frac{1}{q} \ln a^p$ (d'après (2))

$$= \frac{p}{q} \ln a. \qquad \text{(d'après (1))}$$

Pour avoir une égalité de la forme (1), nous sommes amenés à poser :

$$(\forall p \in \mathbb{Z})(\forall q \in \mathbb{N}^*)(\forall a \in \mathbb{R}_+^*) \quad \boxed{\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}}$$

Il en résulte alors, en posant $\frac{p}{q} = \alpha$ :

$$(\forall \alpha \in \mathbb{Q})(\forall a \in \mathbb{R}_+^*) \quad \boxed{\ln a^\alpha = \alpha \ln a}$$

## d) Étude de la fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien est définie et a pour dérivée $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $\frac{1}{x} > 0$ pour $x > 0$, la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudions les limites de ln en $+\infty$ et en 0.
Une calculatrice nous montre que pour $x$ « de plus en plus grand », $\ln x$ est « de plus en plus grand ». Plus précisément nous aurons $\ln x \geqslant 10^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ si nous trouvons un entier naturel $n$ tel que :

$$\ln x \geqslant \ln 2^n \geqslant 10^p$$
$$\ln x \geqslant n \ln 2 \geqslant 10^p$$

une calculatrice donne $\frac{1}{\ln 2} = 1{,}442\,69\ldots$ Pour avoir $\ln x \geqslant 10^p$ il suffit de choisir $n$ entier naturel de manière que

$$n \geqslant \frac{10^p}{\ln 2}$$

on prendra $n \geqslant 1{,}5 \cdot 10^p$, puis $x \geqslant 2^n$. Ainsi :

| On a | $\ln x \geqslant 10$ | $\ln x \geqslant 10^2$ | $\ln x \geqslant 10^3$ |
|---|---|---|---|
| pour | $n \geqslant 15$ | $n \geqslant 150$ | $n \geqslant 1\,500$ |
| si | $x \geqslant 2^{15}$ | $x \geqslant 2^{150}$ | $x \geqslant 2^{1\,500}$ |

Nous retiendrons : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$

Étudions la limite de $\ln x$ quand $x$ tend vers 0 dans l'ensemble de définition de $\ln x$ c'est-à-dire $x \in ]0, +\infty[$. Une calculatrice nous montre que pour $x$ positif « de plus en plus petit », $\ln x$ est négatif et $|\ln x|$ est « de plus en plus grand ». Plus précisément, on peut se ramener à la limite précédente en posant $X = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \ln x &= \lim_{X \to +\infty} \ln \frac{1}{X} \\
&= \lim_{X \to +\infty} (-\ln X) \\
&= -\lim_{X \to +\infty} \ln X \\
&= -\infty ;
\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty}$

Le tableau de variations de la fonction logarithme népérien est :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{x}$ | ‖ | $+$ | $1$ | $+$ | |
| $\ln x$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Puisque $\ln 1 = 0$, la représentation graphique $\Gamma$ de la fonction ln passe par le point $A(1, 0)$. La tangente en ce point a pour coefficient directeur la valeur de la dérivée $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ pour $x = 1$ c'est-à-dire 1 (fig. 3).

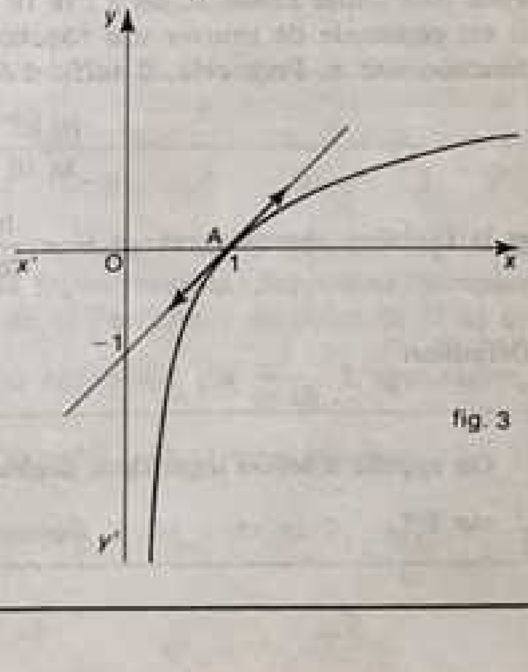



fig. 3

### e) Un isomorphisme de groupes

D'une façon générale, toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle. Ce résultat sera démontré au chapitre suivant.
La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc (cf. § 2.8 b) elle est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur l'image de $\mathbb{R}_+^*$ qui est $\mathbb{R}$.
Nous avons vu, d'autre part, que quels que soient les réels $a>0$ et $b>0$ :

$$\ln ab = \ln a + \ln b.$$

D'une façon générale, soit $\varphi$ une application d'un ensemble E muni d'une loi de composition interne $\star$ dans un ensemble F muni d'une loi de composition interne $\circ$. On dit que $\varphi$ est un **morphisme** de $(E, \star)$ dans $(F, \circ)$ si et seulement si :

$$(\forall (a, b) \in E^2) \quad \varphi(a \star b) = \varphi(a) \circ \varphi(b).$$

Si, de plus, $\varphi$ est bijective, on dit que $\varphi$ est un **isomorphisme** de $(E, \star)$ sur $(F, \circ)$.
Nous pouvons énoncer :

**Théorème**

> **La fonction logarithme népérien est un isomorphisme du groupe multiplicatif des réels strictement positifs $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur le groupe additif des réels $(\mathbb{R}, +)$.**

## 3.3 FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL

### a) Définition. Propriétés

Pour tout entier relatif $n$, on a : $\ln 10^n = n \ln 10$.
Il est commode de trouver une fonction telle que l'image de $10^n$ par cette fonction soit $n$. Pour cela, il suffit d'écrire :

$$\frac{\ln 10^n}{\ln 10} = n$$

et la fonction cherchée est : $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

**Définition**

> **On appelle fonction logarithme décimal la fonction : $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.**

On la note log. Donc :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \qquad \boxed{\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}}$$

Considérons les formules trouvées au § 3.2 c. Si nous divisons les deux membres par ln 10, nous déduisons quels que soient les réels $a>0$ et $b>0$ et quel que soit $\alpha$ rationnel :

$$\boxed{\begin{aligned} &\log ab = \log a + \log b \\ &\log \frac{a}{b} = \log a - \log b \\ &\log \frac{1}{b} = -\log b \\ &\log a^\alpha = \alpha \log a \end{aligned}}$$

## b) Étude de la fonction logarithme décimal

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ donc la fonction logarithme décimal est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, sa dérivée étant :

$$x \longmapsto \frac{(\ln)'(x)}{\ln 10} = \frac{1}{x \ln 10}.$$

Puisque $10>1$, on a $\ln 10>0$ donc $\dfrac{1}{x\ln 10}>0$ pour $x>0$ et la fonction log est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \log x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln 10} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \log x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\ln 10} = -\infty.$$

D'où le tableau de variations :

| $x$ | 0 | | 1 | | 10 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(\log)'(x)$ | ‖ | + | | + | | + | |
| $\log x$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | 0 | ↗ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

La représentation graphique Γ' de la fonction log se déduit de celle Γ de la fonction ln de la façon suivante. Supposons le repère orthonormé, pour une même valeur de $x$, l'ordonnée du point de Γ' se déduit de l'ordonnée du point de Γ en la multipliant par $\dfrac{1}{\ln 10}$. L'application :

$$M(x, \ln x) \longmapsto M'(x, \log x)$$

est l'affinité orthogonale d'axe $x'Ox$ et de rapport $\dfrac{1}{\ln 10} \approx 0{,}4343$ (fig. 4).

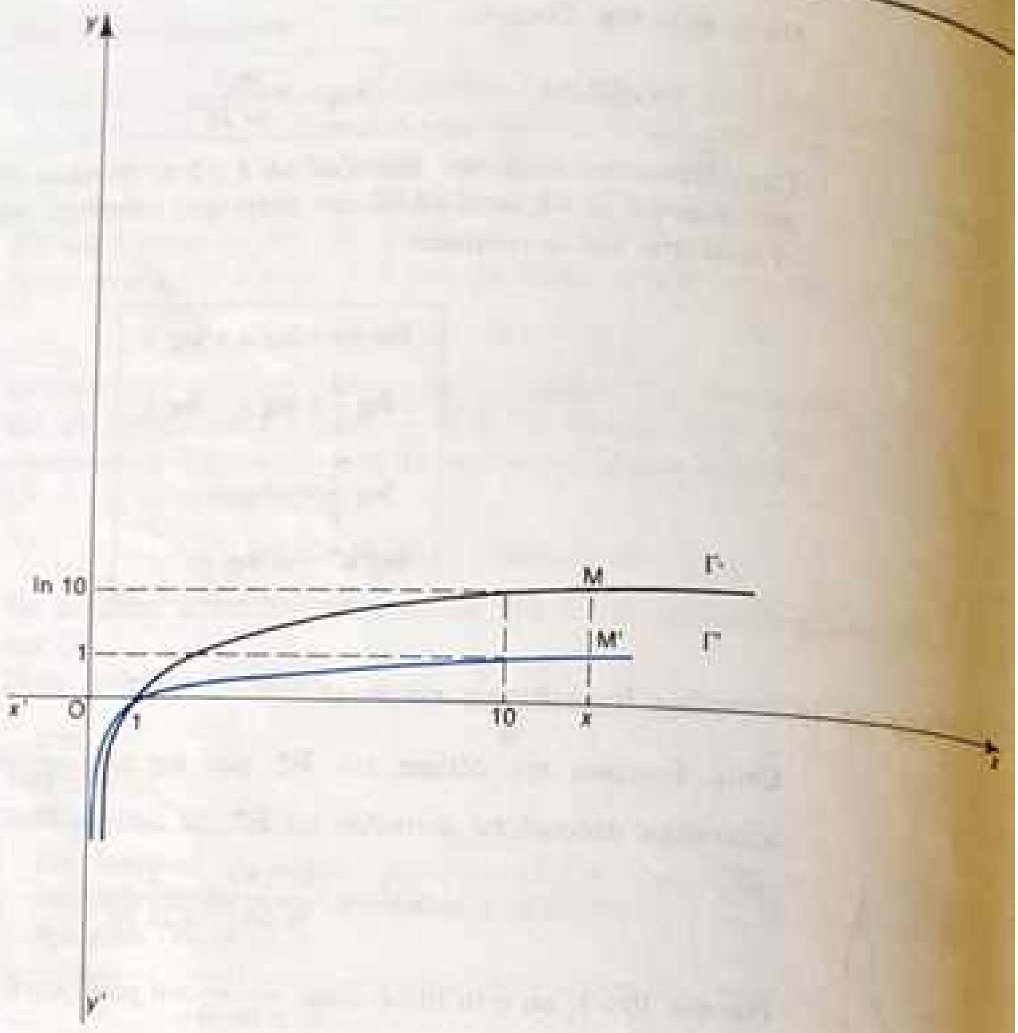



fig. 4

**REMARQUE** On a vu que $\log 10 = \frac{\ln 10}{\ln 10} = 1$. On dit que 10 est la **base des logarithmes décimaux**.
La base des logarithmes népériens est le **nombre** $e$ tel que $\ln e = 1$.
Une calculatrice donne $e \approx 2{,}718\,281\,828$.
On peut fabriquer d'autres fonctions logarithmes, si $a > 0$ et $a \neq 1$, définies sur $\mathbb{R}_+^*$ :
$x \longmapsto \frac{\ln x}{\ln a}$ qu'on note $\log_a x$. Nous avons encore : $\log_a a = 1$. Le nombre $a$ est la base de ces nouveaux logarithmes.

## 3.4 FONCTION EXPONENTIELLE

### a) Définition. Étude de la fonction exponentielle

On sait que la fonction $\ln : x \longmapsto \ln x$ est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc (cf. 2.8 b) c'est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur l'image de $\mathbb{R}_+^*$ qui est $\mathbb{R}$ et elle admet une fonction réciproque qui est une bijection continue, strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Définition**

> **On appelle fonction exponentielle la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.**

On la note exp. On peut écrire :

$$(\forall(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) \quad y = \exp x \iff \ln y = x. \qquad (1)$$

Si $x$ est *rationnel*, on sait que (cf. § 3.2 c) :

$$\ln e^x = x \ln e = x$$

donc, d'après (1),

$$e^x = \exp x.$$

Si $x$ n'est pas rationnel, *par extension*, on convient que $e^x = \exp x$. Donc :

$$(\forall(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) \quad \boxed{y = e^x \iff \ln y = x} \qquad (2)$$

Nous avons le tableau de variations :

| $x$ | $+\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $e^x$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Dans un même repère orthonormé, la représentation graphique $\Gamma^*$ de la fonction exponentielle est la symétrique de celle $\Gamma$ de la fonction logarithme népérien (cf. § 2.8 b) par rapport à la première bissectrice du repère (fig. 5).

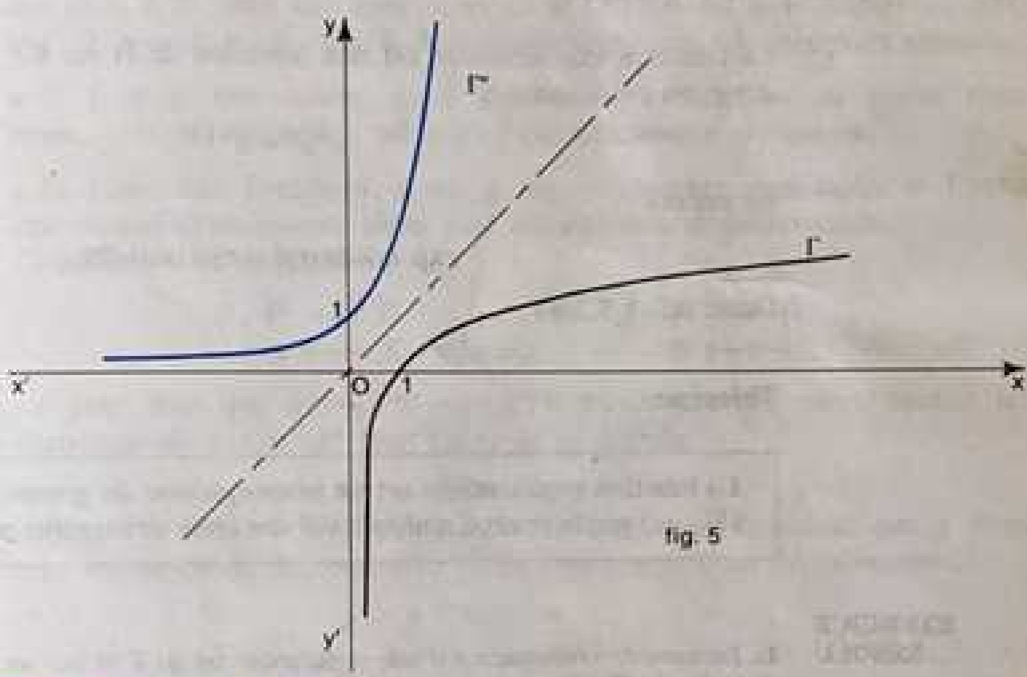



fig. 5

**b) Signification de $a^\alpha$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$)**

- On connaît la signification de $a^\alpha$ si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$ et on a vu (cf. § 3.2 c) que $\ln a^\alpha = \alpha \ln a$ donc $a^\alpha = e^{\alpha \ln a}$ d'après (2).
- Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \notin \mathbb{Q}$, *par extension*, nous poserons :

$$\ln a^\alpha = \alpha \ln a$$

ce qui signifie encore d'après (2) :

$$\boxed{a^\alpha = e^{\alpha \ln a}}$$

• On démontre les formules sur les puissances qui sont les mêmes que celles à exposants entiers relatifs. Quels que soient $a>0$, $b>0$, $\alpha$ et $\beta$ réels :

$$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta} \quad (3)$$

$$\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta} \quad (4)$$

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta} \quad (5)$$

$$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha \quad (6)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha} \quad (7)$$

Ces formules se démontrent en prenant les logarithmes népériens. Par exemple démontrons l'égalité (5) (vous démontrerez les autres égalités de la même façon) :

$$\ln(a^\alpha)^\beta = \beta \ln a^\alpha = \alpha\beta \ln a = \ln a^{\alpha\beta}$$

donc $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

## c) Isomorphisme de groupes

La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après (3), pour $a=e$ on peut écrire :

$$e^\alpha e^\beta = e^{\alpha+\beta}$$

ou encore :

$$\exp \alpha \times \exp \beta = \exp(\alpha+\beta).$$

Donc (cf. § 3.2 e) :

**Théorème**

**La fonction exponentielle est un isomorphisme du groupe additif des réels $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe multiplicatif des réels strictement positifs $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.**

**EXERCICE RÉSOLU**

1. *Le taux de croissance t d'une population est de 8 % par an. A la fin de la 1^re année, la population p devient donc*

$$p + 0{,}08p = 1{,}08p.$$

*A la fin de la 2^e année la population est $1{,}08\,(1{,}08p) = (1{,}08)^2 p$, ..., à la fin de la n^e année elle est $(1{,}08)^n p$ (par récurrence).*
*Au bout de combien d'années n, la population a-t-elle doublé? triplé?*

2. *Déterminer t pour que la population double seulement au bout de 20 ans.*

1. On a :

$$(1{,}08)^n p = 2p \iff (1{,}08)^n = 2$$
$$\iff n \ln(1{,}08) = \ln 2$$
$$\iff n = \frac{\ln 2}{\ln(1{,}08)} \simeq 9$$

la population double au bout de 9 ans.

De même : $(1,08)^n p = 3p \iff n = \dfrac{\ln 3}{\ln(1,08)} = 14,27\ldots$

la population triple au bout de 15 ans.

**2.** La population double au bout de 20 ans, lorsque le taux de croissance est $t$, si et seulement si :

$$\begin{aligned} (1+t)^{20} &= 2 \\ 20\ln(1+t) &= \ln 2 \\ \ln(1+t) &= \frac{\ln 2}{20} \\ 1+t = e^{\frac{\ln 2}{20}} &= 1,035\ldots \\ t &\simeq 3,5\,\%. \end{aligned}$$

## 3.5 FONCTION : $x \longmapsto a^x$ $(a>0,\ x\in\mathbb{R})$

Si $a>0$, quel que soit $x$ réel, on sait (cf. § 3.4 b) que : $a^x = e^{x\ln a}$. Rappelons que si I, J, K sont des intervalles de $\mathbb{R}$ (fermés ou non, bornés ou non) et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$, $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathrm{K}$ deux applications, on a les résultats suivants :

- Si $f$ et $g$ sont toutes deux strictement croissantes ou toutes deux strictement décroissantes, alors $g \circ f$ est strictement croissante.

- Si l'une des fonctions $f$ ou $g$ est strictement croissante et l'autre strictement décroissante, alors $g\circ f$ est strictement décroissante.

Considérons les applications

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto \mathrm{X} = x\ln a \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \mathrm{X} \longmapsto e^{\mathrm{X}}$$

on peut dire que $a^x = e^{x\ln a} = g\circ f(x)$. Nous pouvons alors étudier les variations de $x \longmapsto a^x$ sans l'aide de la dérivée.

- Si $a>1$, $\ln a>0$ et $f$ est strictement croissante de même que $g$ donc $g\circ f$ est strictement croissante. Nous avons le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x\ln a$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |
| $a^x = e^{x\ln a}$ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

- Si $0<a<1$, $\ln a<0$ et $f$ est strictement décroissante tandis que $g$ est strictement croissante donc $g\circ f$ est strictement décroissante. On a :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x\ln a$ | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ |
| $a^x = e^{x\ln a}$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ |

- Si $a=1$, $(\forall x\in\mathbb{R})$ $\quad a^x = e^{x\ln a} = e^0 = 1.$

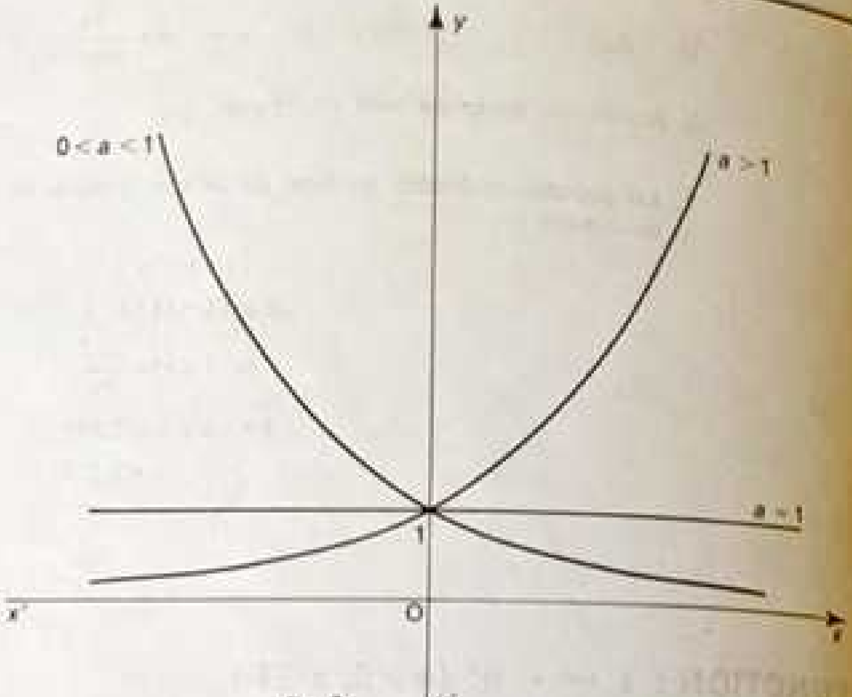



fig. 6

**REMARQUE** Si $a \neq 1$ et $a>0$, appelons $\Gamma_a$ et $\Gamma_{\frac{1}{a}}$ les courbes représentant les fonctions : $x \longmapsto a^x$ et $x \longmapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x$. Les points de $\Gamma_a$ et $\Gamma_{\frac{1}{a}}$ d'abscisses respectives $x$ et $-x$ ont même ordonnée puisque

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = e^{-x \ln \frac{1}{a}} = e^{x \ln a} = a^x,$$

donc, dans un même repère orthonormé, $\Gamma_a$ et $\Gamma_{\frac{1}{a}}$ se déduisent l'une de l'autre par la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y'Oy$.

## 3.6 FONCTION PUISSANCE : $x \longmapsto x^\alpha$ ($x>0$, $\alpha \in \mathbb{R}$)

Quels que soient $x>0$ et $\alpha$ réel, on sait que $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.
Considérons les applications

$$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto X = \alpha \ln x \qquad\qquad X \longmapsto e^X$$

on peut dire que $x^\alpha = e^{\alpha \ln x} = g \circ f(x)$. Nous pouvons alors étudier les variations de $x \longmapsto x^\alpha$ sans l'aide de la dérivée.

- Si $\alpha > 0$, $f$ et $g$ sont strictement croissants donc $g \circ f$ également :

| $x$ | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ln x$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |
| $\alpha \ln x$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |
| $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

$$\lim_{x \to 0} x^\alpha = \lim_{x \to 0} e^{\alpha \ln x} = 0$$

nous pouvons *prolonger par continuité en* 0 la fonction puissance en définissant la fonction $h$ par :

si $x>0$, $h(x)=x^\alpha$
si $x=0$, $h(0)=0$.

Soit $M(x, h(x))$ où l'on suppose $x>0$. Le coefficient directeur de la demi-droite [OM) est :

$$\frac{h(x)}{x}=\frac{x^\alpha}{x}=x^{\alpha-1}=e^{(\alpha-1)\ln x}$$

— si $\alpha>1$, $\lim\limits_{x\to 0} e^{(\alpha-1)\ln x}=0$ et la courbe représentant $h$ admet une demi-tangente portée par $x'Ox$ (fig. 7);

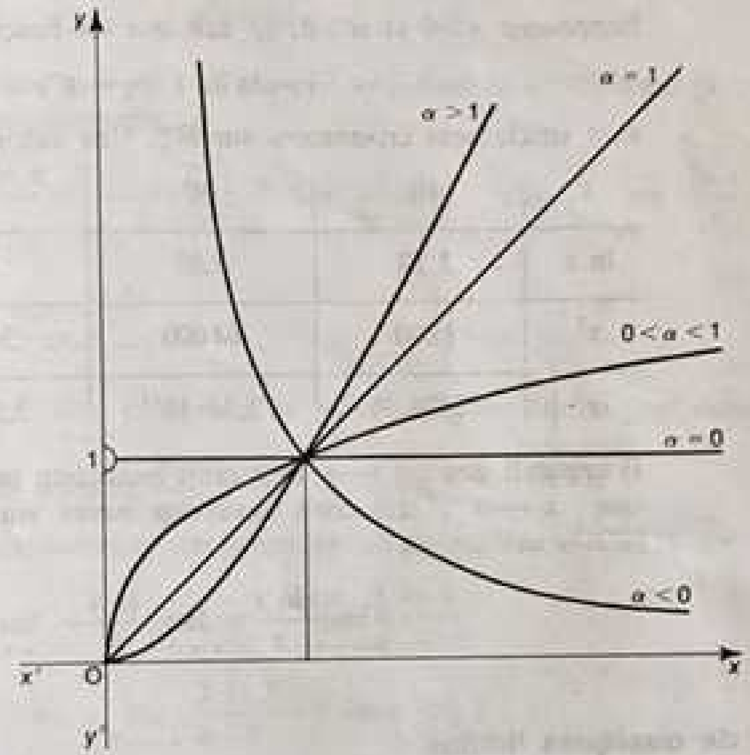


fig. 7

— si $\alpha=1$, $h(x)=x$ et la courbe représentant $h$ est la demi-droite définie par $y=x$ et $x\geqslant 0$;

— si $0<\alpha<1$, $\lim\limits_{x\to 0} e^{(\alpha-1)\ln x}=+\infty$, on exprime cette propriété en disant que la courbe représentant $h$ admet une demi-tangente portée par $y'Oy$.

• Si $\alpha<0$, $f$ est strictement décroissante tandis que $g$ est strictement croissante donc $g\circ f$ est strictement décroissante :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ln x$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |
| $\alpha \ln x$ | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ |
| $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ |

• Si $\alpha = 0$, la fonction : $x \longmapsto x^0 = 1$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est représentée par une demi-droite ouverte parallèle à $Ox$.

## 3.7 CROISSANCE COMPARÉE DE : $x \longmapsto \ln x$, $x \longmapsto x^\alpha$, $x \longmapsto e^x$ ($x > 0$, $\alpha > 0$)

### a) Introduction

Supposons $x > 0$ et $\alpha > 0$, on sait que les fonctions :

$$x \longmapsto \ln x,\ x \longmapsto x^\alpha,\ x \longmapsto e^x$$

sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$. Une calculatrice nous donne :

| $x$ | 10 | 40 | 70 | 100 |
|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | 2,30 | 3,69 | 4,25 | 4,60 |
| $x^3$ | 1 000 | 64 000 | 343 000 | $10^6$ |
| $e^x$ | 22 026,46 | $2{,}35 \cdot 10^{17}$ | $2{,}51 \cdot 10^{30}$ | $2{,}68 \cdot 10^{43}$ |

Il apparaît que : $x \longmapsto \ln x$ croît beaucoup moins vite que : $x \longmapsto x$ et que : $x \longmapsto x^3$ qui croît beaucoup moins vite que : $x \longmapsto e^x$. On peut penser que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0.$$

### b) Étude de quelques limites

Nous supposons $x > 0$ et $\alpha > 0$.

■ *Étude de* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$. On ne peut conclure pour la limite du quotient $\dfrac{\ln x}{x}$.

Cherchons un encadrement $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x} \leqslant \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$. Il en résultera que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Montrons, pour cela, que si $x \geqslant 1$ nous avons : $\ln x \leqslant 2\sqrt{x}$. On prendra alors $\varphi(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{x} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Étudions la fonction $g : x \longmapsto \ln x - 2\sqrt{x}$ sur $[1, +\infty[$.
Pour $x \geqslant 1$, on a les équivalences :

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant 0 \iff \frac{1-\sqrt{x}}{x} \leqslant 0$$
$$\iff 1 \leqslant \sqrt{x}$$
$$\iff 1 \leqslant x.$$

D'où le tableau de variations de $g$ :

| $x$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-2$ | $\searrow$ | |

ce qui montre que $g(x) < 0$ sur $[1, +\infty[$ donc $\ln x < 2\sqrt{x}$ sur $[1, +\infty[$ et on aura sur cet intervalle :

$$0 \leqslant \frac{\ln x}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0, \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

- *Étude de* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$

Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$. On ne peut conclure pour la limite du quotient $\frac{\ln x}{x^\alpha}$.
On peut se ramener au cas précédent en posant $X = x^\alpha$ d'où $\ln X = \alpha \ln x$ et :

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\ln X}{X}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$, $\quad \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\ln X}{X} = 0$ donc (cf. § 2.5) :

$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)$ $\qquad \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0}$

On peut dire que, lorsque $x$ tend vers $+\infty$, le comportement de $\frac{\ln x}{x^\alpha}$ est celui de $\frac{1}{x^\alpha}$.

- *Étude de* $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha \ln x$

Nous avons $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ donc on ne peut conclure pour la limite du produit. On peut se ramener à la limite précédente par un changement de variable.

Posons $X = \frac{1}{x}$ d'où $x^\alpha \ln x = -\frac{\ln X}{X^\alpha}$.

$$\lim_{x \to 0^+} X = +\infty, \quad \lim_{X \to +\infty} \left(-\frac{\ln X}{X^\alpha}\right) = 0$$

donc :

$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)$ $\boxed{\lim_{x \to 0} x^\alpha \ln x = 0}$

On peut dire que, lorsque $x$ tend vers 0, le comportement de $x^\alpha \ln x$ est celui de $x^\alpha$.

- *Étude de* $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$

Nous avons $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$ donc on ne peut conclure pour la limite du quotient. On peut écrire :

$$\frac{e^x}{x^\alpha} = \frac{e^x}{e^{\alpha \ln x}} = e^{x - \alpha \ln x} = e^X$$

en posant $X = x - \alpha \ln x = x\left(1 - \alpha \frac{\ln x}{x}\right)$. Nous avons :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \alpha \frac{\ln x}{x}\right) = 1, \quad \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \alpha \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

il en résulte que :

$$\lim_{x \to +\infty} X = +\infty, \quad \lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty$$

d'où :

$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)$ $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty}$

Quand $x$ tend vers $+\infty$, le comportement de $\frac{e^x}{x^\alpha}$ est celui de $e^x$.

- *Étude de* $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x}$

Nous avons $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ donc on ne peut conclure pour la limite du produit $x^\alpha e^{-x}$. On remarque que : $x^\alpha e^{-x} = \frac{x^\alpha}{e^x}$ qui n'est autre que l'inverse de $\frac{e^x}{x^\alpha}$ dont on vient de trouver la limite. D'après le théorème relatif à la limite de l'inverse d'une fonction (cf. § 2.4) :

$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)$ $\boxed{\lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0}$

Quand $x$ tend vers $+\infty$, le comportement de $x^\alpha e^{-x}$ est celui de $e^{-x}$.

## 3.8 APPLICATION AUX SUITES

### a) Limites des suites $(\ln n)$, $(a^n)$, $(n^\alpha)$ avec $a$ réel$>0$ et $\alpha$ réel

Certaines des suites sont définies sur $\mathbb{N}$ et d'autres sur $\mathbb{N}^*$. Nous supposerons, pour simplifier, que $n \in \mathbb{N}^*$.
Nous supposerons également $a$ réel strictement positif donné et $\alpha$ réel donné.
Les suites $(\ln n)$, $(a^n)$, $(n^\alpha)$ ne sont autres que les restrictions à $\mathbb{N}^*$ des fonctions étudiées précédemment :

$$x \longmapsto \ln x, \quad x \longmapsto a^x, \quad x \longmapsto x^\alpha.$$

On peut dire aussi que ce sont les images par les fonctions précédentes de la suite : $n \longmapsto n$ définie sur $\mathbb{N}^*$ donc (cf. § 2.5 théorème 2) elles ont même limite que ces fonctions quand $x$ tend vers $+\infty$ :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln n) = +\infty.$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} (a^n) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a>1 \\ 0 & \text{si } 0<a<1 \\ 1 & \text{si } a=1. \end{cases}$

Rappelons que nous avons déjà étudié cette dernière suite qui est une *suite géométrique* (cf. § 1.3).

- $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^\alpha) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha>0 \\ 0 & \text{si } \alpha<0 \\ 1 & \text{si } \alpha=0. \end{cases}$

Nous avons également étudié cette suite par une autre méthode (cf. § 1.3) lorsque $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

### b) Comparaison des comportements des suites $(\ln n)$, $(a^n)$, $(n^\alpha)$

Nous avons déjà (cf. § 3.7. a) comparé les comportements de :

$$x \longmapsto \ln x, \quad x \longmapsto x, \quad x \longmapsto x^3, \quad x \longmapsto e^x$$

en donnant à $x$ des valeurs entières. Nous allons déduire des limites classiques trouvées au § 3.7 b des limites relatives aux suites de référence $(\ln n)$, $(a^n)$, $(n^\alpha)$.

■ *Étude de* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{\ln n}{n^\alpha}\right)$

- Si $\alpha>0$, on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ donc

si $\alpha>0$, $\qquad \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{\ln n}{n^\alpha}\right) = 0.$

• Si $\alpha<0$, $\dfrac{\ln n}{n^{\alpha}}=n^{-\alpha}\ln n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln n)=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^{-\alpha})=+\infty$ (car $-\alpha>0$) donc

si $\alpha<0$, $\quad\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ln n}{n^{\alpha}}\right)=+\infty.$

**Théorème**

> Si $\alpha>0$, $\quad\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ln n}{n^{\alpha}}\right)=0.$
>
> Si $\alpha<0$, $\quad\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ln n}{n^{\alpha}}\right)=+\infty.$

On peut dire que, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, le comportement de $\left(\dfrac{\ln n}{n^{\alpha}}\right)$ est celui de $\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)$, pour $\alpha\neq 0$.

■ *Étude de* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a^{n}}{n^{\alpha}}\right)$

Soit $u_n=\dfrac{a^n}{n^{\alpha}}$. Posons $v_n=\ln u_n$.

$$v_n=n\ln a-\alpha\ln n=n\left(\ln a-\alpha\frac{\ln n}{n}\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)=0,\quad\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln a-\alpha\dfrac{\ln n}{n}\right)=\ln a\quad$ donc :

• si $a>1$, $\ln a>0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)=+\infty$ d'où :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n)=\lim_{n\to+\infty}(e^{v_n})=+\infty.$$

• Si $0<a<1$, $\ln a<0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)=-\infty$ d'où :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n)=\lim_{n\to+\infty}(e^{v_n})=0.$$

**Théorème**

> **Quel que soit le réel $\alpha$ :**
>
> si $a>1$, $\quad\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a^n}{n^{\alpha}}\right)=+\infty.$
>
> Si $0<a<1$, $\quad\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a^n}{n^{\alpha}}\right)=0.$

On peut dire que, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, le comportement de $\left(\dfrac{a^n}{n^{\alpha}}\right)$ est celui de $(a^n)$, pour $a\neq 1$.

- *Étude de* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{a^n}{\ln n}\right)$

- Si $a > 1$, $\dfrac{a^n}{\ln n} = \dfrac{a^n}{n} \dfrac{n}{\ln n}$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a^n}{n}\right) = +\infty, \quad \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right) = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{\ln n}\right) = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a^n}{\ln n}\right) = +\infty.$$

- Si $0 < a < 1$, $\dfrac{a^n}{\ln n} = a^n \left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$

$$\lim_{n \to +\infty} (a^n) = 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\ln n}\right) = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a^n}{\ln n}\right) = 0.$$

**Théorème**

**Si $a > 1$,** $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{a^n}{\ln n}\right) = +\infty.$

**Si $0 < a < 1$,** $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{a^n}{\ln n}\right) = 0.$

On peut dire que, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, le comportement de $\left(\dfrac{a^n}{\ln n}\right)$ est celui de $(a^n)$, pour $a \neq 1$.

# Exercices

### Nombre $a^{\alpha}$

**3.1** Simplifier en utilisant des exposants rationnels :

$$\sqrt{\sqrt{3}}-2\sqrt[4]{48}+\sqrt[4]{243}$$

$$\frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[3]{128}}}$$

**3.2** Simplifier en utilisant des exposants rationnels :

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{16}\sqrt[8]{8}}{\sqrt[12]{2^{11}}}$$

**3.3** Soit $a>0$ et $b>0$. Simplifier :

$$(a^2+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}+(b^2+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}+3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-3b^{\frac{7}{6}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$$

Pour quelles valeurs de $a$ et $b$, cette dernière expression n'est-elle pas définie?

**3.4** Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}-(1-x)^{\frac{1}{2}}=(1-x^2)^{\frac{1}{4}}.$$

**3.5** Simplifier $e^{5\ln 3}$ ; $e^{-3\ln 2}$.

**3.6** Simplifier $e^{2\ln 3}\times\ln\sqrt[3]{e}$.

### Équations. Inéquations. Systèmes d'équations

*Déterminer les réels $x$ et $y$ sachant que (ex. 3.7 à 3.22) :*

**3.7** $8(\ln x)^3-9(\ln x)^2+\ln x=0$.

**3.8** $\log(2x-5)+\log(3x+7)=4\log 2$.

**3.9** $\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+11)$.

**3.10** $e^x-2e^{-x}=1$.

**3.11** $\ln(\ln e^x+e^{-\ln x})=1-\ln x$.

**3.12** $e^{12{,}51x+2{,}37}=7{,}25$.

**3.13** $3^{x+2}+9^{x-1}=1\,458$.

**3.14** $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+3}$
$=3^x+3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}$.

**3.15** $2^{2x-1}+9^{\frac{x}{2}}+4^{x+\frac{1}{2}}-3^{x+2}=0$.

**3.16** $5^{\cos x}+\dfrac{3}{5^{\cos x}}=4$.

**3.17** $10^{6x}-10^{3x}-2=0$.

**3.18** $\log_2 x>\log_8(3x-2)$.

**3.19** $\log_3 x=\dfrac{1}{2}+\log_9(4x+15)$.

**3.20** $\begin{cases}3x+2y=23\\ \ln x-\ln y=\ln 7.\end{cases}$

**3.21** $\begin{cases}\log_x e+\log_y e=\dfrac{7}{3}\\ \ln xy=\dfrac{7}{2}.\end{cases}$

**3.22** $\begin{cases}a^x=y^a\\ a^{x+2}=y^{a+1}\end{cases}$ ($a>0$ donné).

### Placement d'un capital à intérêts composés annuellement

**3.23** **1.** Un capital est placé à intérêts composés à la fin de chaque année au taux $t=13{,}5$ %. Au bout de combien d'années $n$, le capital a-t-il doublé? triplé?

**2.** Déterminer le taux d'intérêts $t$ pour que le capital double au bout de 5 ans.

### Limites de fonctions

*Étudier les limites suivantes (ex. 3.24 à 3.44) :*

**3.24** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^{-x^2+1}$.

**3.25** $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{x}}$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$.

**3.26** $\lim\limits_{x\to-1}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ ; $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

**3.27** $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x^2)^{\frac{1}{x}}$.

**3.28** $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}$.

**3.29** $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\ln x)$.

**3.30** $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x^2+1)$.

**3.31** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}$ ($\alpha>0$, $\beta>0$).

**3.32** $\lim\limits_{x\to 0}x^3(\ln x)^2$.

**3.33** $\lim\limits_{x\to 0}x^\alpha|\ln x|^\beta$ ($\alpha>0$, $\beta>0$).

**3.34** $\lim\limits_{x \to 0} (\tan x)^{\sin x}$.

**3.35** Limite de : $x \longmapsto xe^{\frac{1}{x}}$ quand $x$ tend vers 0; vers $+\infty$; vers $-\infty$.

**3.36** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2+1}$.

**3.37** Limite de : $x \longmapsto \frac{1+\ln x}{x^2}$ en 0; en $+\infty$.

**3.38** Limite de : $x \longmapsto x - \ln|2e^x - 1|$ en $+\infty$; en $-\infty$.

**3.39** $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

**3.40** $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^{\tan x}$.

**3.41** $\lim \frac{3^x}{x^3}$ en 0; en $+\infty$; en $-\infty$.

**3.42** $\lim \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$ en 1; en $+\infty$.

**3.43** Étudier la limite de $f : x \longmapsto \frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}}$ quand $x$ tend vers 0; vers $+\infty$.

**3.44** Mêmes questions qu'à l'exercice précédent avec

$$f : x \longmapsto \frac{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+2x}.$$

## Étude de fonctions

*Étudier, sans l'aide des dérivées, les variations des fonctions suivantes et les représenter graphiquement. [On rappelle que la composée de deux applications toutes deux strictement croissantes ou toutes deux strictement décroissantes est strictement croissante. Si l'une est strictement croissante et l'autre strictement décroissante, la composée est strictement décroissante. La somme de deux applications strictement croissantes sur un intervalle I est strictement croissante sur I. La somme de deux applications strictement décroissantes sur I est strictement décroissante sur I] (ex. 3.45 à 3.50) :*

**3.45** $f : x \longmapsto e^{\frac{1}{x-1}}$.

**3.46** $f : x \longmapsto \ln \frac{x+1}{x-1}$

$\left(\text{on écrira } \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}\right)$.

**3.47** $f : x \longmapsto 2^x + 3^x$.

**3.48** $f : x \longmapsto \pi^x + x^\pi$.

**3.49** **1.** Étudier, sans calculer la dérivée, les variations de la fonction suivante et la représenter graphiquement

$$f : x \longmapsto \ln(e^x - 1).$$

**2.** La fonction $f$ admet-elle une fonction réciproque? Si oui, la définir en fonction de la variable $x$ et la représenter graphiquement.

**3.50** **1.** Étudier, sans calculer la dérivée, les variations de la fonction suivante et la représenter graphiquement

$$f : x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

**2.** Discuter algébriquement et graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel $m$, le nombre de racines de l'équation :

$$e^{2x} - 2me^x - 1 = 0.$$

**3.** La fonction $f$ admet-elle une fonction réciproque? Si oui, la définir en fonction de la variable $x$ et la représenter graphiquement.

## Suites numériques

**3.51** Étudier les limites, quand $n$ tend vers $+\infty$, des suites de terme général :

$$\frac{3^{(2^n)}}{2^{(3^n)}}, \quad \sqrt[n]{a}\,(a>0), \quad \sqrt[n]{n}.$$

**3.52** Étudier les limites, quand $n$ tend vers $+\infty$, des suites de terme général :

$$\frac{(\ln n)^2}{n^3}, \quad \frac{(0{,}5)^n}{n^3}, \quad (0{,}5)^n n^3, \quad \frac{2^n}{(\ln n)^2}.$$

**3.53** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} u_n}.$$

On pose $v_n = \ln u_n$.

**1.** Montrer que la suite $(v_n)$ vérifie la relation de récurrence :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_{n+2} = \frac{1}{2}(v_{n+1} + v_n). \qquad (1)$$

**2.** Trouver deux suites géométriques non nulles $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence (1).

**3.** Montrer que la suite $(\lambda\alpha^n + \mu\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\lambda$ et $\mu$ sont des réels quelconques, vérifie la relation de récurrence (1).
Calculer $v_n$ et $u_n$ en fonction de $n$.
Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)$.

## Révision

**3.54** **1.** Démontrer que :

$$(\forall p \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{1}{p+1} < \ln(p+1) - \ln p < \frac{1}{p}. \qquad (1)$$

[Indication : $\ln(p+1) - \ln p$ est l'aire (cf. § 3.2 b)) de la partie du plan limitée par la courbe représentant $x \longmapsto \frac{1}{x}$ $(x>0)$, $Ox$, les droites d'équations $x = p$ et $x = p+1$; cette aire est comprise entre les aires de deux rectangles.]

**2.** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $u_n = \sum\limits_{p=n}^{2n} \frac{1}{p}$.

En faisant varier, dans (1), l'entier $p$ de $n$ à $2n-1$, démontrer que :

$$u_n - \frac{1}{n} < \ln 2 < u_n - \frac{1}{2n}.$$

Donner un encadrement de ln 2 pour $n = 10$.

**3.** Démontrer que :

$$\ln 2 + \frac{1}{2n} < u_n < \ln 2 + \frac{1}{n}.$$

En déduire $\lim_{n \to +\infty} (u_n)$.

**4.** On pose, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ :

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$w_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1).$$

*a*) Démontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ w_n < v_n$.

Étudier $\lim_{n \to +\infty} (v_n - w_n)$.

*b*) Démontrer que les suites $(v_n)$ et $(w_n)$ sont convergentes et ont même limite $\ell$ (qu'on ne demande pas de calculer).

*c*) Donner un encadrement de $\ell$ pour $n = 10$.

*d*) Quelles valeurs faut-il donner à $n$ pour avoir une valeur approchée de $\ell$ à $10^{-2}$ près par défaut?

**3.55** **1.** Étudier la limite de : $x \longmapsto \frac{2^x}{x^3}$ quand $x$ tend vers 0; vers $+\infty$; vers $-\infty$.

**2.** On se propose de calculer une valeur approchée de la racine de l'équation :

$$2^x = x^3 \qquad (1)$$

appartenant à l'intervalle [9; 10].

*a*) Montrer que $f : x \longmapsto x \ln 2 - 3 \ln x$ s'annule une seule fois sur [9; 10].

*b*) Montrer que (1) est équivalente à une équation de la forme :

$$x = g(x). \qquad (2)$$

*c*) Construire la représentation graphique Γ de la fonction $g$ et la droite D d'équation $y = x$, dans un repère orthonormé.

*d*) Soit les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 9 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 10 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$$

Représenter sur l'axe des abscisses les termes $u_0$, $u_1$, $u_2$, ..., $v_0$, $v_1$, $v_2$, ... (cf. § 1.7, Exercice 2 du cours).

*e*) En déduire une valeur approchée à $10^{-2}$ près par défaut de la racine de l'équation (1) appartenant à l'intervalle [9; 10].

# 4 COMPLÉMENTS SUR LES DÉRIVÉES

Nous avons utilisé précédemment des résultats relatifs aux dérivées établis en Première. Nous allons les rappeler brièvement et les compléter.
Nous supposerons les fonctions définies sur des intervalles de $\mathbb{R}$, fermés ou non, bornés ou non.

## 4.1 RAPPELS DE LA CLASSE DE PREMIÈRE

### a) Fonction dérivable. Nombre dérivé. Fonction dérivée (ou dérivée)

**Définitions**

**Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle contenant $x_0$.**
**On dit que $f$ est dérivable au point $x_0$ si et seulement s'il existe un intervalle I contenant 0 tel que :**

$$(\forall h \in \mathrm{I}) \qquad f(x_0+h)=a+bh+h\varepsilon(h),$$

**où $a$ et $b$ sont des réels et $\varepsilon$ une fonction définie sur I telle que $\lim\limits_{0} \varepsilon=0$.**

**Le réel $b$ (dont on admet l'unicité) est appelé le nombre dérivé de $f$ en $x_0$.**

On dit aussi que $a+bh+h\varepsilon(h)$ est un **développement limité d'ordre 1** au voisinage de 0 de la fonction : $h \longmapsto f(x_0+h)$.
Faisons $h=0$ dans l'égalité précédente, nous avons

$$f(x_0)=a,$$

d'après les théorèmes sur les limites :

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=a+\lim_{h\to 0}(bh)+\lim_{h\to 0} h\varepsilon(h)=a$$

donc $\lim\limits_{x_0} f=f(x_0)$ ce qui signifie que $f$ est continue en $x_0$. Énonçons ce résultat :

**Théorème**

**Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.**

Nous verrons plus loin que la réciproque est fausse : une fonction peut être continue en un point sans être dérivable en ce point.
Rappelons le théorème suivant établi en Première :

**Théorème**

**Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle contenant $x_0$.**
**La fonction $f$ est dérivable en $x_0$ si et seulement si le taux de variation $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ a une limite finie quand $h$ tend vers 0.**
**Cette limite est le nombre dérivé de $f$ en $x_0$.**

Notons que cette limite est aussi $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
Rappelons encore les définitions suivantes :

**Définitions**

**Si une fonction $f$ est dérivable en tout point $x$ d'un intervalle I, on dit que $f$ est dérivable sur I et la fonction qui associe à tout $x$ de I le nombre dérivé de $f$ au point $x$ est appelée fonction dérivée (ou plus simplement dérivée) de $f$ sur I.**

On note cette fonction dérivée : $f'$ ou encore : $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

## b) Interprétation géométrique

Soit $\Gamma$ la représentation graphique d'une fonction $f$ dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M(x_0+h, f(x_0+h))$ deux points distincts ($h \neq 0$) de $\Gamma$ (fig. 1, page suivante).

Le coefficient directeur de la droite $(M_0M)$ est $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Si $f$ est dérivable en $x_0$, la droite $D_0$ passant par $M_0$ et de coefficient directeur $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ est appelée **tangente en $M_0$ à $\Gamma$**.

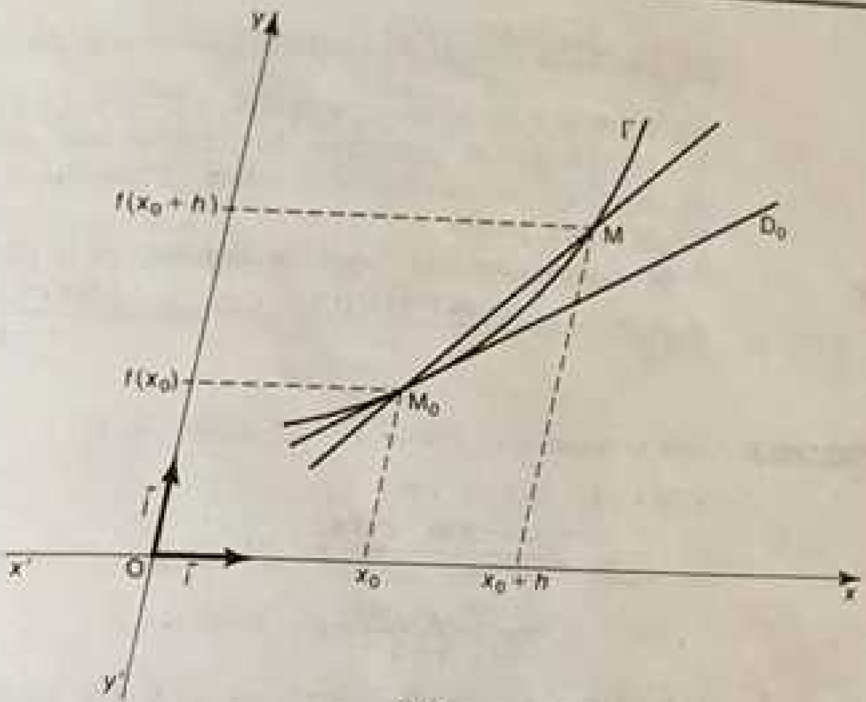



fig. 1

Cherchons une équation cartésienne de $D_0$ : un vecteur directeur de $D_0$ est $\vec{u}_0(1, f'(x_0))$

$$\begin{aligned} P(x, y) \in D_0 &\iff \overrightarrow{M_0P} \text{ et } \vec{u}_0 \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \begin{vmatrix} x-x_0 & 1 \\ y-f(x_0) & f'(x_0) \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (x-x_0)f'(x_0) - (y - f(x_0)) = 0 \\ &\iff y = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0). \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la tangente $D_0$ est donc :

$$\boxed{y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)}$$

La fonction : $x \longmapsto f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)$ définie sur $\mathbb{R}$, de représentation graphique la tangente $D_0$, est appelée **fonction affine tangente à $f$ en $x_0$.**

## 4.2 EXTENSIONS DE LA NOTION DE DÉRIVÉE

### a) Fonction dérivable à droite ou à gauche en $x_0$

Si $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l$ ($l \in \mathbb{R}$), on dit que $f$ est **dérivable à droite en $x_0$**.
le nombre $l$ est le nombre dérivé à droite en $x_0$.
La représentation graphique de $f$ admet une **demi-tangente à droite en $M_0(x_0, f(x_0))$** de coefficient directeur $l$ (les considérations précédentes sont encore valables en remplaçant la droite $(M_0M)$ par la demi-droite $[M_0M)$ obtenue pour $h > 0$).

Si $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l \ (l \in \mathbb{R})$, on dit que $f$ est **dérivable à gauche en $x_0$**.
Le nombre $l$ est le nombre dérivé à gauche en $x_0$.
La représentation graphique de $f$ admet une **demi-tangente à gauche en $M_0(x_0, f(x_0))$** de coefficient directeur $l$ (considérer, de même, la demi-droite $[M_0M)$ pour $h<0$).
Pour comprendre ces nouvelles notions, nous allons donner un exemple.
Rappelons que $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ s'écrit aussi $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ en posant $x = x_0+h$.

**EXEMPLE** Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2+|x|$ définie sur $\mathbb{R}$.

- Si $x>0$, $f(x) = x^2+x$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2+x}{x} = x+1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$$

la fonction $f$ est dérivable à droite en $x_0=0$ et la représentation graphique $\Gamma$ de $f$ admet une demi-tangente à droite en O de coefficient directeur 1 (fig. 2).

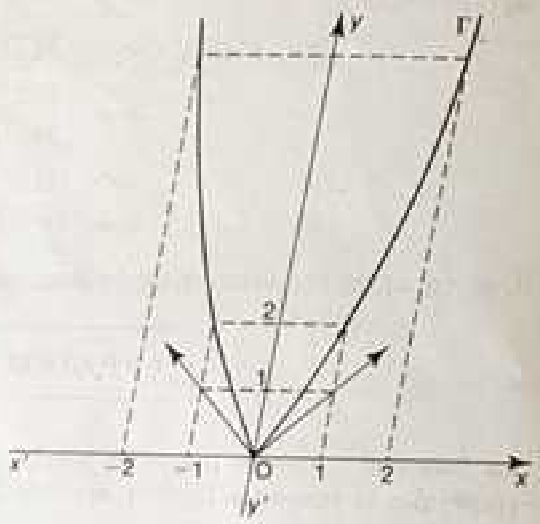



fig. 2

- si $x<0$, $f(x) = x^2-x$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2-x}{x} = x-1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$$

la fonction $f$ est dérivable à gauche en $x_0=0$ et $\Gamma$ admet une demi-tangente à gauche en O de coefficient directeur $-1$.
Les deux demi-tangentes en O n'ayant pas même support, on dit que O est un **point anguleux.**
La fonction $f$ est continue en 0 et elle n'est pas dérivable en 0 puisque les nombres dérivés à droite et à gauche sont distincts. Alors qu'une fonction dérivable en un point est toujours continue en ce point, cet exemple nous montre qu'**une fonction continue en un point n'est pas nécessairement dérivable en ce point.**

### b) $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ quand $h$ tend vers 0

EXEMPLE 1 Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
si $x \geqslant 1$, $f(x)=\sqrt{x-1}$;
si $x<1$, $f(x)=-\sqrt{|x-1|}$.

• Si $x>1$, le coefficient directeur de la demi-droite $[M_0M)$ est (fig. 3) :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

d'où $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$.

• Si $x<1$, le coefficient directeur de la demi-droite $[M_0M)$ est :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{-\sqrt{1-x}}{x-1}=\frac{\sqrt{1-x}}{1-x}=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

d'où $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$. **On admettra que lorsque le taux de variations a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en $x_0$, la représentation graphique de $f$ admet pour tangente en $M_0(x_0, f(x_0))$ la droite passant par $M_0$ et parallèle à $y'Oy$ (fig. 3).**

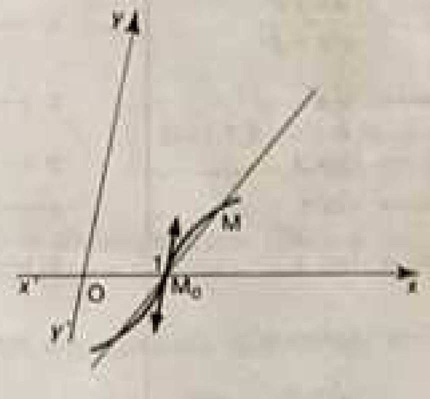



fig. 3

EXEMPLE 2 Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x^2-x-2}$. Elle est définie si et seulement si $x^2-x-2 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 2$. Donc l'ensemble de définition de $f$ est

$$]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[.$$

Étudions la tangente en $M_0(2, 0)$ (fig. 4).

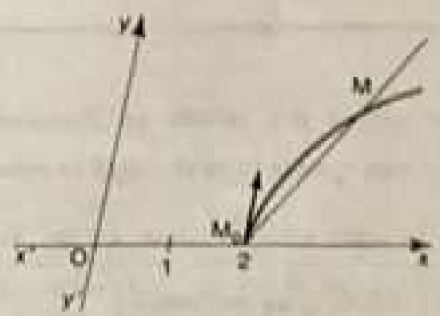



fig. 4

Si $x>2$, le coefficient directeur de la demi-droite $[M_0M)$ est :

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x-2}=\frac{\sqrt{(x+1)(x-2)}}{x-2}$$
$$=\sqrt{\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)^2}}=\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$$

d'où $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=+\infty$. **On admettra que lorsque le taux de variation a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ à droite (ou à gauche) en $x_0$, la représentation graphique de $f$ admet en $M_0(x_0, f(x_0))$ une demi-tangente à droite (ou à gauche) parallèle à $y'Oy$ (fig. 4).**

## 4.3 DÉRIVÉES USUELLES

### a) Rappel des résultats de Première

Si les dérivées existent :

| Fonctions | Dérivées |
|---|---|
| $x \longmapsto x^n \ (n \in \mathbb{Z})$ | $x \longmapsto nx^{n-1}$ |
| $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{a'x+b'}$ | $x \longmapsto \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}{(a'x+b')^2}$ |
| $x \longmapsto \sqrt{x}$ | $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $x \longmapsto \cos x$ | $x \longmapsto -\sin x$ |
| $x \longmapsto \sin x$ | $x \longmapsto \cos x$ |
| $x \longmapsto \tan x$ | $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ |
| $x \longmapsto \text{cotan}\, x$ | $x \longmapsto -\dfrac{1}{\sin^2 x}=-(1+\text{cotan}^2 x)$ |
| $f+g$ | $f'+g'$ |
| $\lambda f \ (\lambda \in \mathbb{R})$ | $\lambda f'$ |
| $fg$ | $f'g+fg'$ |
| $\dfrac{1}{f}$ | $-\dfrac{f'}{f^2}$ |
| $\dfrac{f}{g}$ | $\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$ |

**REMARQUE** Si vous n'avez pas calculé en Première les dérivées de $x \longmapsto \tan x$ et de $x \longmapsto \text{cotan}\, x$, vous ferez ce calcul en remarquant que $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ pour $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $\text{cotan}\, x=\frac{\cos x}{\sin x}$ pour $x \neq k\pi$. Vous appliquerez la dernière formule du tableau $\left(\text{dérivée d'un quotient } \frac{f}{g}\right)$.

### b) Dérivées de $x \longmapsto \ln x$ et de $x \longmapsto e^x$

- Par définition, la fonction logarithme népérien est la primitive définie sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$, qui s'annule pour $x=1$ donc la dérivée de $x \longmapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$. On peut écrire (cf. § 3.2 a) :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \qquad \boxed{(\ln)'(x) = \frac{1}{x}}$$

En particulier : $(\ln)'(1)=1$
ce qui veut dire que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = 1$$

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1}$$

Au voisinage de $h=0$, on peut écrire :

$$\frac{\ln(1+h)}{h} = 1 + \varepsilon(h), \qquad \lim_{0} \varepsilon = 0$$

$$\boxed{\ln(1+h) = h + h\varepsilon(h)}$$

On obtient ainsi le développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 de la fonction : $h \longmapsto \ln(1+h)$.

- Soit la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$

$$\exp : x \longmapsto e^x.$$

Si $h \neq 0$ et quel que soit $x_0$ réel, cherchons $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h}$. Rappelons que

$$y = e^{x_0+h} \iff x_0 + h = \ln y$$
$$y_0 = e^{x_0} \iff x_0 = \ln y_0$$

donc

$$\frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \frac{y - y_0}{\ln y - \ln y_0}$$

$$\lim_{h \to 0} y = \lim_{h \to 0} e^{x_0+h} = e^{x_0} = y_0$$

$$\lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{\ln y - \ln y_0} = \frac{1}{\lim\limits_{y \to y_0} \frac{\ln y - \ln y_0}{y - y_0}} = \frac{1}{(\ln)'(y_0)} = \frac{1}{\frac{1}{y_0}} = y_0 = e^{x_0}$$

donc (composition de fonctions ayant des limites cf. § 2.5) :

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0}$$

$(\forall x \in \mathbb{R})$ $$\boxed{(\exp)'(x) = \exp(x)}$$

Vous remarquerez que **la fonction exponentielle est égale à sa dérivée.** En particulier :

$$(\exp)'(0) = \exp(0) = e^0 = 1$$

ce qui veut dire que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - e^0}{h} = 1$$

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1}$$

Au voisinage de $h = 0$, on peut écrire :

$$\frac{e^h - 1}{h} = 1 + \varepsilon(h), \quad \lim_0 \varepsilon = 0$$

$$\boxed{e^h = 1 + h + h\varepsilon(h)}$$

On obtient le développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 de la fonction : $h \longrightarrow e^h$.

## 4.4 COMPOSITION DE FONCTIONS DÉRIVABLES

Soit $f$ une fonction dérivable en $x_0$ et $g$ une fonction dérivable en $f(x_0)$. Étudions si $g \circ f$ est dérivable en $x_0$.
Puisque $f$ est dérivable en $x_0$, il existe un intervalle I contenant 0 tel que :

$$(\forall h \in \mathrm{I}) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\alpha(h) \tag{1}$$

$\alpha$ étant une fonction telle que $\lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0$.
Puisque $g$ est dérivable en $f(x_0)$, il existe un intervalle J contenant 0 tel que :

$$(\forall k \in \mathrm{J}) \quad g[f(x_0) + k] = g[f(x_0)] + kg'[f(x_0)] + k\beta(k). \tag{2}$$

$\beta$ étant une fonction telle que $\lim_{k \to 0} \beta(k) = 0$.
D'après (1), on peut poser $f(x_0 + h) = f(x_0) + k$ avec $k = hf'(x_0) + h\alpha(h)$.
L'égalité (2) peut alors s'écrire au voisinage de $h = 0$ :

$$\begin{aligned} g[f(x_0+h)] &= g[f(x_0)] + [hf'(x_0) + h\alpha(h)]g'[f(x_0)] + h\gamma(h) \\ &= g[f(x_0)] + hf'(x_0) \times g'[f(x_0)] + h\varepsilon(h) \\ &= g \circ f(x_0) + h[g' \circ f(x_0) \times f'(x_0) + h\varepsilon(h)] \end{aligned} \tag{3}$$

où $\gamma$ et $\varepsilon$ sont des fonctions de $h$ de limite 0 quand $h$ tend vers 0.

Le développement limité (3) nous montre que $g \circ f$ est dérivable en $x_0$, le nombre dérivé étant :

$$g' \circ f(x_0) \times f'(x_0).$$

Si $x_0$ décrit un intervalle, on peut conclure :

**Théorème**

> **Si $f$ est dérivable sur un intervalle et si $g$ est dérivable sur l'image par $f$ de cet intervalle, alors $g \circ f$ est dérivable sur le même intervalle que $f$ et l'on a :**
>
> $$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'.$$

■ *Applications*

1. Soit $f : x \longmapsto ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g$ une fonction dérivable sur un intervalle J image par $f$ d'un intervalle I. Pour tout $x$ de I,

$$(g' \circ f)(x) = g'(ax + b)$$
$$f'(x) = a$$

on convient d'écrire : $(g \circ f)'(x) = [g(ax + b)]'$. On obtient la formule établie en classe de Première :

$(\forall x \in \mathrm{I})$ $\boxed{[g(ax + b)]' = ag'(ax + b)}$

2. •Soit $f$ une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $g : x \longmapsto \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.

$$(\forall x \in \mathrm{I}) \quad (g \circ f)'(x) = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

c'est-à-dire :

$$(\ln f)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

• Soit $f$ une fonction dérivable et strictement négative sur I. Étudions la dérivée de $\ln |f|$.

$$(\forall x \in \mathrm{I}) \quad \ln |f(x)| = \ln[-f(x)]$$
$$(\ln |f|)'(x) = \frac{1}{-f(x)}(-f'(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Donc dans les deux cas, si $f$ est dérivable et non nulle sur I, on a sur cet intervalle :

$$\boxed{(\ln |f|)' = \frac{f'}{f}}$$

**3.** Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I et $g : x \longmapsto \exp x = e^x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, le nombre dérivé étant $(e^x)' = e^x$.

$$(\forall x \in \mathrm{I}) \quad (g \circ f)'(x) = \exp[f(x)] \times f'(x).$$

Donc si $f$ est dérivable sur I, on a sur cet intervalle :

$$\boxed{(\exp f)' = \exp f \times f'}$$

En particulier :

$$(\forall a \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad a^x = e^{x \ln a}$$

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

**4.** Soit $f$ une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I et $\alpha$ un réel quelconque. Considérons la fonction $f^\alpha$ définie sur I par :

$$f^\alpha(x) = [f(x)]^\alpha$$

$$f^\alpha(x) = e^{\alpha \ln[f(x)]}$$

$$[f^\alpha(x)]' = (e^{\alpha \ln[f(x)]})' = e^{\alpha \ln[f(x)]} \times \frac{\alpha f'(x)}{f(x)}$$

$$= f^\alpha(x) \times \frac{\alpha f'(x)}{f(x)} = \alpha f^{\alpha-1}(x) f'(x).$$

Donc si $f$ est dérivable et strictement positive sur I, quel que soit le réel $\alpha$, on a sur I :

$$\boxed{(f^\alpha)' = \alpha f^{\alpha-1} f'} \qquad (1)$$

En particulier en posant $f(x) = x$ donc $f'(x) = 1$ :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall \alpha \in \mathbb{R}) \qquad \boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$$

C'est la même formule que lorsque l'exposant est un entier relatif (cf. § 4.3 a).

Si l'on prend $\alpha = \frac{1}{2}$ dans la formule (1), pour toute fonction $f$ dérivable et strictement positive sur I :

$$(f^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} f'$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}}$$

## 4.5 INÉGALITÉS DES ACCROISSEMENTS FINIS

Soit une fonction $f$ dérivable sur $[a, b]$ $(a < b)$.

• Supposons que $f'$ soit bornée sur $[a, b]$ c'est-à-dire qu'il existe deux réels $m$ et M tels que $m \leq f' \leq M$ sur $[a, b]$.
Considérons les fonctions définies sur $[a, b]$

$$g : x \longmapsto f(x) - mx$$
$$h : x \longmapsto f(x) - Mx.$$

Pour tout $x$ de $[a, b]$ nous avons :

$$g'(x) = f'(x) - m \geq 0$$
$$h'(x) = f'(x) - M \leq 0$$

donc $g$ est croissante et $h$ décroissante sur $[a, b]$ d'où :

$$\begin{cases} g(a) \leq g(b) \\ h(a) \geq h(b) \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} f(a) - ma \leq f(b) - mb \\ f(a) - Ma \geq f(b) - Mb \end{cases}$$

ce qu'on peut écrire :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

• En particulier si $|f'| \leq M$ sur $[a, b]$, on a :

$$-M \leq f' \leq M$$

d'où $\quad -M(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b-a).$$

On peut énoncer :

**Théorème**

**Soit une fonction $f$ dérivable sur $[a, b]$ $(a < b)$.**
- **Si $m \leq f' \leq M$ sur $[a, b]$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.**
- **Si $|f'| \leq M$ sur $[a, b]$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$.**

Nous allons donner une application de ce théorème en travaux pratiques.

## 4.6 TRAVAUX PRATIQUES

*Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} = f(u_n)$ avec : $f : x \longmapsto 1 + \ln(1+x)$ définie sur $]-1, +\infty[$.*

1. *Montrer que l'équation : $1 + \ln(1+x) = x$ admet une racine unique $x_0$ appartenant à $[2, 3]$.*

(Considérer $g : x \longmapsto f(x) - x$. Vous montrerez que $g$ est continue et strictement décroissante sur $[2, 3]$ donc $g$ est une bijection de $[2, 3]$ sur le segment $g([2, 3])$. Comme $g(2) > 0$ et $g(3) < 0$, le nombre $0 \in g([2, 3])$ et 0 admet un antécédent unique $x_0$ appartenant à $[2, 3]$.)

**2.** *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2 \leqslant u_n \leqslant x_0$.
(Vous raisonnerez par récurrence.)

**3.** *Montrer que* $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$x_0 - u_{n+1} \leqslant \frac{x_0 - u_n}{3} \qquad (1)$$

$$x_0 - u_n \leqslant \frac{x_0 - u_0}{3^n}. \qquad (2)$$

*En déduire* $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)$.

(Vous montrerez (1) en utilisant les *inégalités des accroissements finis* : sur $[2, 3]$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ donc $\frac{1}{4} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{3}$

$$f'(x) \leqslant \frac{1}{3} \text{ sur } [u_n, x_0] \implies f(x_0) - f(u_n) \leqslant \frac{1}{3}(x_0 - u_n)$$

$$x_0 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{3}(x_0 - u_n).)$$

## 4.7 DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Si $f$ est dérivable sur un intervalle I, elle admet une dérivée définie sur I et notée $f'$. Si $f'$ est elle-même dérivable sur I, elle admet une dérivée définie sur I, notée $f''$ et appelée **dérivée seconde** (ou **d'ordre 2**) de la fonction $f$.

Plus généralement, on définit les dérivées successives de $f$ sur I, si elles existent :

$$\begin{aligned} f^{(3)} &= f''' = (f'')' \\ f^{(4)} &= (f^{(3)})' \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f^{(n)} &= (f^{(n-1)})' \end{aligned}$$

appelées dérivée troisième (ou d'ordre 3), dérivée quatrième, ..., **dérivée** $n^{\text{ième}}$ (ou **d'ordre** $n$) de $f$. On dit alors que $f$ est **dérivable** $n$ **fois** sur l'intervalle I.

Par analogie, la dérivée $f'$ de $f$ est aussi appelée dérivée première (ou d'ordre 1) de $f$.

On note aussi $f'$ sous la forme $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ d'où :

$$f'' = \frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) \quad \text{qu'on note} \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}.$$

Plus généralement la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f$ se note également : $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

**EXERCICE RÉSOLU** *Calculer la dérivée $n^{ième}$ de la fonction sinus.*

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (\sin)'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\sin)''(x) = -\sin x = \sin(x + \pi).$$

On peut penser que, $x$ étant un réel quelconque,

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \tag{1}$$

Raisonnons par récurrence :
Supposons que (1) soit vraie pour un entier naturel non nul $n$, alors :

$$\sin^{(n+1)}(x) = \left[\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Donc, sur $\mathbb{R}$, quel que soit $n$ entier naturel non nul :

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Vous verrez, de même, que :

$$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

# Exercices

## Développement limité d'ordre 1

**4.1** Soit la fonction $f : x \longmapsto x^3 + x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

**1.** Trouver un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 de la fonction :

$$h \longmapsto f(1+h).$$

**2.** En déduire une valeur approchée de $f(1{,}017)$.

**4.2** Soit la fonction $f : x \longmapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$.

**1.** Trouver un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 de la fonction :

$$h \longmapsto f(x_0 + h).$$

**2.** Soit un cube de métal dont les arêtes ont pour longueur $x_0$ à la température de 0 degré et pour longueur $x$ à la température de $t$ degrés. On appelle coefficient de dilatation linéaire le nombre $\alpha$ tel que :

$$x = x_0(1+\alpha t).$$

Si $v_0$ est le volume du cube à 0 degré et $v$ son volume à $t$ degrés, on appelle coefficient de dilatation cubique le nombre $\beta$ tel que :

$$v = v_0(1+\beta t).$$

En prenant $h = x - x_0 = x_0\alpha t$, montrer que $\beta \simeq 3\alpha$.

**4.3** Donner un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 de la fonction :

$$h \longmapsto \sin(x_0 + h).$$

En déduire une valeur approchée de $\sin(61°)$.
Comparer avec le résultat obtenu en cherchant directement $\sin(61°)$ à l'aide d'une calculatrice.

## Extensions de la notion de dérivée

*Étudier si les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ sont dérivables à droite ou à gauche (ex. 4.4 à 4.7) :*

**4.4** $f : x \longmapsto |x^2 - 1|$ en $x_0 = 1$.

**4.5** $f : x \longmapsto |x(x+1)|$ en $x_0 = 0$ et en $x_1 = -1$.

**4.6** $f : x \longmapsto |x^2 - 1| + 2|x| - 3$ en $x_0 = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 1$.

**4.7** $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2+|x|}$ en $x_0 = 0$.

*Examiner si la représentation graphique $\Gamma$ de $f$ admet des tangentes ou demi-tangentes et « placer $\Gamma$ » par rapport à ces tangentes ou demi-tangentes dans les cas suivants (ex. 4.8 à 4.14) :*

**4.8** si $x \geqslant 0$, $f(x) = \sqrt{x}$
si $x < 0$, $f(x) = -\sqrt{-x}$
à l'origine.

**4.9** $f(x) = \sqrt{|x|}$ à l'origine.

**4.0** $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ en $M_0(1, 0)$.

**4.11** $f(x) = \sqrt{2x(4-x)}$ à l'origine et en $M_0(4, 0)$.

**4.12** $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 + x}$ à l'origine et en $M_0(1, 0)$.

**4.13** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ à l'origine.

**4.14** $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x-2)^3}{x+1}}$ en $M_0(2, 0)$.

## Calcul de dérivées (opérations, composition)

*Calculer les dérivées, quand elles existent, des fonctions $f$ définies par (ex. 4.15 à 4.38) :*

**4.15** $f(x) = (x^2 + 3x + 7)^4$.

**4.16** $f(x) = (x-2)(x-3)^2(x+4)^3$.

**4.17** $f(x) = x + 1 + \dfrac{4}{(x-3)^2}$.

**4.18** $f(x) = 2x\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$.

**4.19** $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$.

**4.20** $f(x) = \tan x + \text{cotan}\, x + \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$.

**4.21** $f(x) = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$.

**4.22** $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

**4.23** $f(x) = \dfrac{\sin^2 x - \sin x + 1}{2\sin^2 x - 1}$.

**4.24** $f(x) = \tan^3 x - 4\tan^2 x + 5\tan x - 1$.

**4.25** $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 2}$.

**4.26** $f(x) = x(x + \sqrt{1+x^2})$.

**4.27** $f(x) = \sqrt{2\sin^2 x - 1}$.

**4.28** $f(x) = \sqrt{\dfrac{2 - \sin x}{2 - \cos x}}$.

**4.29** $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1}$.

**4.30** $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$.

**4.31** $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

**4.32** $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+2)}{x+1}}$.

**4.33** $f(x)=x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

**4.34** $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.

**4.35** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}+\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

**4.36** $f(x)=(x^2+5x-1)\,e^x$.

**4.37** $f(x)=\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

**4.38** $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$. (On suppose $x>0$.)

**4.39** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

si $x\neq 0$, $\quad f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$;

si $x=0$, $\quad f(0)=0$.

Calculer $f'(x)$ pour $x\neq 0$.
La dérivée $f'$ a-t-elle une limite en 0? Calculer $f'(0)$.
Qu'en concluez-vous?

**4.40** Mêmes questions qu'à l'exercice précédent avec :

si $x\neq 0$, $\quad f(x)=x^3\sin\dfrac{1}{x}$;

si $x=0$, $\quad f(0)=0$.

**4.41** Mêmes questions qu'à l'exercice 4.41 avec :

si $x\neq 0$, $\quad f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x}$;

si $x=0$, $\quad f(0)=0$.

## Dérivée logarithmique

**4.42** Soit $f$ une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle I. On appelle dérivée logarithmique de $f$ la fonction $\dfrac{f'}{f}$ définie sur I.

1. Calculer la dérivée logarithmique de $\varphi=f^{\alpha}g^{\beta}h^{\gamma}$ dans les deux cas :

a) $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, sont des entiers relatifs et $f$, $g$, $h$ sont dérivables et ne s'annulent pas sur I.

b) $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont des réels et $f$, $g$, $h$ sont dérivables et strictement positives sur I.

2. Application : calculer la dérivée logarithmique puis la dérivée, quand elles existent, de $x\longmapsto\dfrac{(x-1)(x+1)^3}{(x^2+x+1)^2}$.

## Primitives

**4.43** Calculer les dérivées, quand elles existent, des fonctions :

$$x\longmapsto \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|,$$

$$x\longmapsto \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|,$$

$$x\longmapsto \ln\left|x+\sqrt{x^2+h}\right| \quad (h \text{ réel donné}).$$

En déduire les primitives des fonctions :

$$x\longmapsto\frac{1}{\sin x},$$

$$x\longmapsto\frac{1}{\cos x},$$

$$x\longmapsto\frac{1}{\sqrt{x^2+h}}.$$

*Calculer, quand elles existent, les primitives des fonctions définies par (ex. 4.44 à 4.56) :*

**4.44** $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+5}$.

**4.45** $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

**4.46** $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

**4.47** $f(x)=\operatorname{cotan} x$.

**4.48** $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$.

**4.49** $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2}$.

**4.50** $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x}$.

**4.51** $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x-1}$ (mettre $f(x)$ sous la forme $ax+b+\dfrac{c}{x-1}$).

**4.52** $f(x)=\dfrac{x^3+4x^2+6x+4}{(x+1)^2}$ (mettre $f(x)$ sous la forme $ax+b+\dfrac{c}{x+1}+\dfrac{d}{(x+1)^2}$).

**4.53** $f(x)=(x^3+x)\,e^{x^4+2x^2-1}$.

**4.54** $f(x)=\dfrac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$.

**4.55** $f(x)=(\sin 2x)\,e^{\cos^2 x}$.

**4.56** $f(x)=x^2 2^{x^3}$ (mettre $f(x)$ sous la forme $x^2 e^{\varphi(x)}$).

## Calcul de limites

**4.57** On rappelle que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

En déduire :

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \to +\infty} x \ln \frac{x}{x+1},$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)}.$$

**4.58** On rappelle que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.

En déduire :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\sin^2 x}, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x(e^{\frac{1}{x}}-1)}{e^{\frac{1}{x}}+1}, \quad \lim_{x \to +\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$$

## Tangente à une courbe

**4.59** Équation de la tangente à la représentation graphique de $f : x \longmapsto x^5(x-1)$ au point $M_0(1, 0)$.

**4.60** Équation de la tangente à la représentation graphique de $f : x \longmapsto \sin x$ au point $M_0(\pi, 0)$.

**4.61** Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle : $x \longmapsto ax^2$ ($a$ donné *non nul*).

a) Former l'équation de la tangente $\Delta$ à la représentation graphique $\Gamma$ de $f$ au point M de $\Gamma$ d'abscisse $x_0$.

b) Si M est distinct de l'origine, $\Delta$ coupe les axes de coordonnées $Ox$ et $Oy$ respectivement en T et T'. Soient $m$ la projection de M sur $Ox$ parallèlement à $Oy$ et $m'$ la projection de M sur $Oy$ parallèlement à $Ox$. Montrer que T est le milieu du segment $[O, m]$ et que O est le milieu du segment $[m', T']$. En déduire une construction géométrique de $\Delta$ connaissant M.

c) On suppose le repère orthonormé.

1. Trouver l'ensemble des points P de coordonnées $\alpha$ et $\beta$ d'où l'on peut mener deux tangentes à $\Gamma$ perpendiculaires.

2. On appelle normale à $\Gamma$ au point M de $\Gamma$ la perpendiculaire à la tangente à $\Gamma$ en M. Former l'équation de cette normale.

3. Si M est distinct de l'origine, la normale à $\Gamma$ en M coupe $Oy$ en N. Calculer $\overline{m'N}$.

**4.62** Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle : $x \longmapsto \dfrac{a}{x}$ ($a$ donné non nul).

a) Former l'équation de la tangente $\Delta$ à la représentation graphique $\Gamma$ de $f$ au point M de $\Gamma$ d'abscisse $x_0$.

b) $\Delta$ coupe les axes de coordonnées en T et T'. Montrer que M est le milieu du segment $[T, T']$. En déduire une construction géométrique de $\Delta$ connaissant M.

c) Si O est l'origine des coordonnées, montrer que le produit $\overline{OT} \times \overline{OT'}$ est constant quand M décrit $\Gamma$.

## Inégalités des accroissements finis

**4.63** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{3}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+2x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \dfrac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 1$.

2. Montrer que $|f'(x)| \leqslant \dfrac{18}{25}$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$.

3. On appelle $x_0$ la racine positive de l'équation

$$\frac{1}{1+2x} = x.$$

Montrer que pour tout $n$ entier naturel :

$$|u_{n+1} - x_0| \leqslant \frac{18}{25} |u_n - x_0|$$

$$|u_n - x_0| \leqslant \left(\frac{18}{25}\right)^n |u_0 - x_0|.$$

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)$.

**4.64** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f : x \longmapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2 \leqslant u_n \leqslant 3$.

2. Montrer que $|f'(x)| \leqslant \dfrac{2}{9}$ sur l'intervalle $[2, 3]$.

3. On appelle $x_0$ la racine positive de l'équation :

$$\frac{x}{2} + \frac{5}{2x} = x.$$

Montrer que pour tout $n$ entier naturel :

$$|u_{n+1} - x_0| \leqslant \frac{2}{9} |u_n - x_0|$$

$$|u_n - x_0| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n |u_0 - x_0|.$$

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)$.

**4.65** Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2}.$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

Le but de la suite de cette partie est de déterminer une valeur approchée de $\alpha$.

2. Étudier les variations de $f'$ dans $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ et en déduire qu'il existe un réel $k$ appartenant à l'intervalle $]-1, 0[$ tel que pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ on ait :

$$k \leqslant f'(x) \leqslant 0.$$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout entier naturel, } u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

a) Montrer que, pour tout entier $n$, $u_n$ est élément de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

b) En remarquant que $u_{n+1} - \alpha = f(u_n) - f(\alpha)$, montrer en utilisant le **2.** que pour tout entier naturel $n$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant |k|\,|u_n - \alpha|.$$

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$.

4. En utilisant le sens de variation de $f$ dans $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, montrer que pour tout entier naturel $n$ on a

$$(u_{n+1} - \alpha)(u_n - \alpha) < 0.$$

En déduire que $\alpha$ est compris entre $u_n$ et $u_{n+1}$. Déterminer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près, en justifiant la méthode employée.

*(Problème. 3e partie. Bac. C. Paris-Créteil-Versailles 1985.)*

## Dérivées successives

**4.66** Calculer les dérivées successives de la fonction polynôme :

$$f : x \longmapsto x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 + x - 1.$$

Quelle est la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction polynôme de la variable réelle $x$ de degré $n$? Que peut-on dire des dérivées suivantes?

**4.67** 1. Calculer les dérivées successives, quand elles existent, de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{x-a} \text{ (raisonner par récurrence).}$$

2. Calculer les dérivées successives, quand elles existent, de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1+x}{1-x}$$

$\left(\text{qu'on écrira sous la forme } A + \frac{B}{x-1}\right)$.

3. Même question avec la fonction :

$$x \longmapsto \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$$

$\left(\text{qu'on écrira sous la forme } \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x-2}\right)$.

**4.68** Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de

$$f : x \longmapsto \ln(1+x).$$

**4.69** 1. Démontrer que, pour tout $x$ réel, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction cosinus est :

$$\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

et la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction sinus est :

$$\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

En déduire la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction : $x \longmapsto \cos(ax+b)$ et de la fonction : $x \longmapsto \sin(ax+b)$, $a$ et $b$ étant deux nombres réels donnés.

2. Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction : $x \longmapsto \sin^2 x$.

**4.70** On pose

$$0! = 1 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$$

(qu'on lit factorielle $n$). Quel que soit l'entier naturel $p$ tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on pose :

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p(p-1)\ldots 1} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$C_n^p$ est un *coefficient binomial* (voir chapitre 8).

1. Démontrer que si $0 \leqslant p \leqslant n-1$,

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}.$$

2. Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables $n$ fois sur un intervalle I. Démontrer par récurrence la **formule de Leibniz :**

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g' + \ldots + C_n^p f^{(n-p)}g^{(p)} + \ldots + C_n^n f g^{(n)}.$$

3. Calculer la dérivée de $n^{\text{ième}}$ de :

$$x \longmapsto (x^2 + 3x - 1)\sin x.$$

**4.71** Soit $f$ une fonction polynôme du 3e degré. Démontrer que :

$$(\forall x_0 \in \mathbb{R}) \quad (\forall h \in \mathbb{R})$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(x_0).$$

Si $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 7$, calculer $f(3{,}002)$ par défaut avec une incertitude inférieure à $10^{-4}$; à $10^{-7}$.

## Révision

**4.72** 1. Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une racine $x_0$ unique dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

2. Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0{,}5$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = \cos u_n.$$

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0{,}5 \leqslant u_n \leqslant 1$.

3. Montrer que $|(\cos)'(x)| \leqslant 0{,}9$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

4. Montrer que pour tout $n$ entier naturel :

$$|u_{n+1} - x_0| \leqslant 0{,}9\,|u_n - x_0|$$
$$|u_n - x_0| \leqslant (0{,}9)^n\,|u_0 - x_0|.$$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)$.

5. a) Construire, dans un repère orthonormé, la droite d'équation $y = x$ et la courbe représentant : $x \longmapsto \cos x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Représenter sur l'axe des abscisses les termes $u_0, u_1, u_2, \ldots$

c) Donner une valeur approchée de $x_0$ à $10^{-2}$ près par défaut en utilisant des encadrements de $x_0$ par des termes de la suite $(u_n)$.

**4.73 A.** On suppose $x$ réel et $|x|<1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les sommes:

$$S_n(x)=1+x+x^2+...+x^n$$
$$S'_n(x)=1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$$
$$S''_n(x)=2+6x+12x^2+...+n(n-1)x^{n-2}.$$

**1.** Mettre $S_n(x)$, $S'_n(x)$, $S''_n(x)$ sous forme de fonctions rationnelles de $x$.

**2.** Étudier les limites, quand $n$ tend vers $+\infty$, de $nx^n$ et $n^2x^n$.

**3.** Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}[S'_n(x)]=[\lim_{n\to+\infty}S_n(x)]^2$$

$$\lim_{n\to+\infty}[S''_n(x)]=[\lim_{n\to+\infty}S_n(x)]^3.$$

**B.** On suppose $z$ complexe et on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S'_n(z)=1+2z+3z^2+...+nz^{n-1}.$$

On admet que le calcul de $S'_n(x)$ de la question **A. 1.** s'applique encore à $S'_n(z)$ pour $z \in \mathbb{C}-\{1\}$.

On appelle $z_0=1$, $z_1$, ..., $z_k$, ..., $z_{n-1}$ les racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1.

**1.** Calculer $S'_n(z_k)$.

**2.** En factorisant $z^n-1$ démontrer que :

$$(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_{n-1})=z^{n-1}+z^{n-2}+...+1.$$

En déduire le calcul, en fonction de $n$ uniquement, de:

$$(1-z_1)(1-z_2)...(1-z_{n-1})$$
$$S'_n(z_0)S'_n(z_1)...S'_n(z_{n-1}).$$

# 5 ÉTUDE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE D'UNE VARIABLE RÉELLE

Nous supposerons le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'axe des abscisses étant $x'Ox$, celui des ordonnées $y'Oy$.

## 5.1 SIMPLIFICATION DE LA FONCTION ÉTUDIÉE

Lorsqu'on étudie une fonction, on examine tout d'abord si l'on peut la simplifier.

**EXEMPLE 1** Soit la fonction numérique de la variable réelle $f : \sqrt{4x^2-8x+4}$. Pour tout $x$ de l'ensemble de définition :

$$f(x)=\sqrt{4(x^2-2x+1)}=2\sqrt{(x-1)^2}=2|x-1|$$

donc $f$ est définie pour tout $x$ réel et sa représentation graphique est la réunion des deux demi-droites fermées définies par :

$$\begin{cases} y=2(x-1) \\ x \geqslant 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2(x-1) \\ x \leqslant 1. \end{cases}$$

**EXEMPLE 2** Soit la fonction $f : x \longmapsto y=\sqrt{3}\cos x-\sin x+1$ définie sur $\mathbb{R}$. Nous savons transformer une expression de la forme $a\cos x+b\sin x$ :

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$$

d'où

$$y=2\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+1.$$

En posant

$$\begin{cases} x+\dfrac{\pi}{6}=X \\ y-1=Y \end{cases}$$

ce qui revient à faire un changement de repère, on est ramené à l'étude de la fonction plus simple : $X \longmapsto Y=2\cos X$.

## 5.2 ENSEMBLE DE DÉFINITION ET ENSEMBLE D'ÉTUDE

L'étude de la parité et de la périodicité permet de réduire l'*ensemble de définition* de la fonction $f$. Le plus petit ensemble sur lequel on étudie $f$ est l'*ensemble d'étude* de $f$.

**EXEMPLE 1** Soit $f : x \longmapsto \cos^2 x \sin 2x$ définie sur $\mathbb{R}$.

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x+\pi) = f(x)$$

donc $f$ est périodique, de *période* $\pi$. On étudiera $f$ sur un intervalle d'*amplitude* $\pi$.
Cette fonction est *impaire*, il suffit donc de l'étudier sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Son étude sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ s'en déduira et la représentation graphique sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ est symétrique de celle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par rapport à l'origine O du repère.

Nous aurons alors étudié $f$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ qui est un intervalle d'amplitude $\pi$. Nous déduirons alors l'étude de $f$ sur les autres intervalles d'amplitude $\pi$, sur ces intervalles la représentation graphique de $f$ se déduit de celle sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par des translations de vecteurs $k\pi\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

**EXEMPLE 2** Soit $f : x \longmapsto \sin x - \sin^2 x$ définie sur $\mathbb{R}$. Nous avons

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

donc $f$ est périodique, de *période* $2\pi$. On étudiera $f$ sur un intervalle d'*amplitude* $2\pi$. Nous avons aussi

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(\pi - x) = f(x),$$

le plan étant rapporté à un repère orthonormé (fig. 1), soit les points $M(x, f(x))$ et $M'(\pi - x, f(\pi - x))$. Le milieu I de (M, M') a pour coordonnées

$$\frac{x+\pi-x}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{f(x)+f(\pi-x)}{2} = f(x).$$

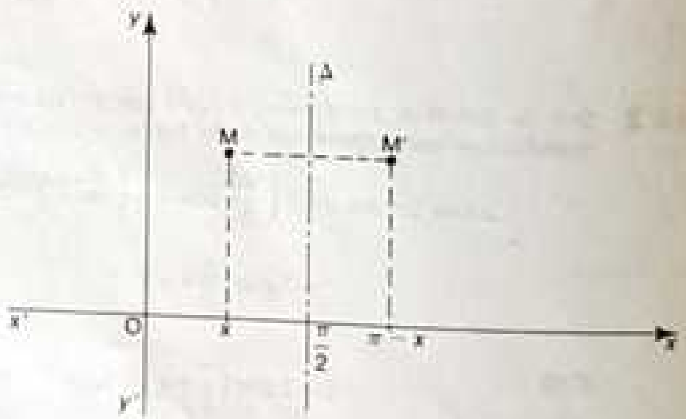



fig. 1

Le point I appartient à la droite Δ d'équation $x = \frac{\pi}{2}$. Les points M et M' sont donc symétriques dans la *symétrie orthogonale d'axe* Δ. On étudiera $f$ sur un intervalle d'*amplitude* $\pi$, l'une des bornes étant $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ou $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Si nous étudions $f$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, nous en déduirons l'étude sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ et la représentation graphique par symétrie par rapport à $\Delta$. Nous aurons alors étudié $f$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ qui est un intervalle d'amplitude $2\pi$. Nous en déduirons ensuite l'étude de $f$ sur les autres intervalles d'amplitude $2\pi$, sur ces intervalles la représentation graphique de $f$ se déduit de celle sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ par des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

## 5.3 ÉTUDE DES VARIATIONS

### a) Rappel de quelques définitions

Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle I. On appelle taux de variation ou taux d'accroissement de $f$ entre $x_1$ et $x_2$, distincts, de I le nombre $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. On dit que $f$ est **croissante** sur I si et seulement si quels que soient $x_1$ et $x_2$, distincts, de I :

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geqslant 0.$$

On dit que $f$ est **strictement croissante** sur I si et seulement si quels que soient $x_1$ et $x_2$, distincts, de I :

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0.$$

On dit que $f$ est **décroissante** sur I si et seulement si quels que soient $x_1$ et $x_2$, distincts, de I :

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant 0.$$

On dit que $f$ est **strictement décroissante** sur I si et seulement si quels que soient $x_1$ et $x_2$, distincts, de I :

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0.$$

On dit que $f$ est **monotone** sur I si et seulement si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.
On dit que $f$ est **strictement monotone** sur I si et seulement si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.
*Cas particulier :* On sait que $f$ est **constante** sur I si et seulement s'il existe un nombre réel $k$ tel que, pour tout $x$ de I, $f(x)=k$. On peut dire que $f$ est constante sur I si et seulement si quels que soient $x_1$ et $x_2$, distincts, de I, on a $f(x_2)=f(x_1)$ c'est-à-dire

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0.$$

Étudier les variations d'une fonction numérique $f$ définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ c'est partager, lorsque c'est possible, D en un nombre fini d'intervalles tels que sur chacun d'eux $f$ soit

ou bien constante
ou bien strictement croissante
ou bien strictement décroissante.

Nous dirons que deux fonctions $f$ et $g$ **varient dans le même sens** sur un intervalle I si et seulement si l'on sait partager I en un nombre fini d'intervalles partiels tels que sur chacun d'eux $f$ et $g$ soient toutes deux strictement croissantes ou toutes deux strictement décroissantes. Si, au contraire, sur chacun de ces intervalles, l'une des fonctions est strictement croissante et l'autre strictement décroissante, nous dirons que $f$ et $g$ **varient en sens contraires** sur I. Nous excluons le cas où l'une des fonctions est constante sur un intervalle partiel.

## b) Composition de fonctions strictement monotones (Rappels)

Soit $f$ une fonction strictement monotone sur I et $g$ une fonction strictement monotone sur J ($f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$). Soit $g \circ f$ la fonction composée définie sur I, son taux de variation entre $x_1$ et $x_2$ quelconques, distincts, de I est :

$$\frac{g[f(x_2)] - g[f(x_1)]}{x_2 - x_1} = \frac{g(y_2) - g(y_1)}{y_2 - y_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

en posant $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ce taux de variation est strictement positif si

$$\frac{g(y_2) - g(y_1)}{y_2 - y_1} \quad \text{et} \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

sont de même signe c'est-à-dire si $f$ et $g$ sont toutes deux strictement croissantes ou toutes deux strictement décroissantes respectivement sur I et sur J; ce taux de variation est strictement négatif si

$$\frac{g(y_2) - g(y_1)}{y_2 - y_1} \quad \text{et} \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

sont de signes contraires c'est-à-dire si l'une des deux fonctions $f$ ou $g$ est strictement croissante et l'autre strictement décroissante sur les intervalles correspondants I ou J.
On peut énoncer :

**Théorème**

> **Si $f$ et $g$ sont toutes deux strictement croissantes ou toutes deux strictement décroissantes respectivement sur les intervalles I et J ($f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$), la fonction composée $g \circ f$ est strictement croissante sur I. Si l'une des deux fonctions $f$ ou $g$ est strictement croissante et l'autre strictement décroissante sur les intervalles correspondants I ou J, la fonction composée $g \circ f$ est strictement décroissante sur I.**

Nous avons utilisé ce théorème au chapitre 3 pour étudier les variations des fonctions: $x \longmapsto a^x$ et $x \longmapsto x^n$ (cf. § 3.5 et 3.6).

**Applications**

Ce théorème peut aussi s'énoncer :
Soit deux fonctions $f$ et $g$ strictement monotones respectivement sur les intervalles I et J ($f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$), la fonction composée $g \circ f$ varie sur I dans le même sens que $f$ ou en sens contraire suivant que $g$ est strictement croissante ou strictement décroissante sur J.
C'est sous cette forme que nous allons utiliser le théorème. Nous supposerons que l'on sait étudier le sens de variation de $f$ et nous utiliserons des fonctions $g$ connues :

1. On sait que la fonction affine $g : x \longmapsto ax+b$ définie sur $\mathbb{R}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a>0$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a<0$. La fonction $g \circ f$ n'est autre que la fonction : $x \longmapsto af(x)+b$.
Donc :

**sur tout intervalle où $f$ est définie, la fonction : $x \longmapsto af(x)+b$ varie dans le même sens que $f$, ou en sens contraire, suivant que l'on a : $a>0$ ou $a<0$. Ce résultat est indépendant de $b$.**

2. On sait que la fonction $g : x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$. La fonction $g \circ f$ n'est autre que $f^2 : x \longmapsto [f(x)]^2$. Donc :

**la fonction $f^2$ varie dans le même sens que $f$ sur tout intervalle où $f(x) \geqslant 0$ et en sens contraire sur tout intervalle où $f(x) \leqslant 0$.**

3. On sait que la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. La fonction $g \circ f$ n'est autre que $\dfrac{1}{f} : x \longmapsto \dfrac{1}{f(x)}$. Donc :

**la fonction $\dfrac{1}{f}$ varie en sens contraire du sens de variation de $f$ sur tout intervalle où $f(x)$ a un signe constant.**

4. On sait que la fonction $g : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $g \circ f$ n'est autre que $\sqrt[n]{f} : x \longmapsto \sqrt[n]{f(x)}$. Donc :

**la fonction $\sqrt[n]{f}$ varie dans le même sens que $f$ sur tout intervalle où $f(x) \geqslant 0$.**

EXEMPLE Soit à étudier le sens de variation de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{3(x+1)^2+4}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Indiquons, dans un tableau, le sens de variation de chaque fonction auxiliaire en précisant l'application du théorème utilisée :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | ↗ | $0$ | ↗ | |
| $(x+1)^2$ (application 2) | | ↘ | $0$ | ↗ | |
| $3(x+1)^2+4$ (application 1) | | ↘ | $4$ | ↗ | |
| $\sqrt{3(x+1)^2+4}$ (application 4) | | ↘ | $2$ | ↗ | |
| $\dfrac{1}{\sqrt{3(x+1)^2+4}}$ (application 3) | | ↗ | $\dfrac{1}{2}$ | ↘ | |

## c) Addition de fonctions strictement monotones

Soit deux fonctions $f$ et $g$ variant dans le même sens sur un intervalle I.
Quels que soient $x_1$ et $x_2$, distincts, de I, le taux de variation de $f+g$ entre $x_1$ et $x_2$ est :

$$\frac{f(x_2)+g(x_2)-f(x_1)-g(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}+\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1},$$

il est du signe commun de $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ et de $\dfrac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$.
On peut énoncer :

**Théorème**

**Si $f$ et $g$ varient dans le même sens sur un intervalle I, leur somme $f+g$ varie sur I dans le même sens que $f$ et $g$.**

EXEMPLE La fonction $f : x \longmapsto -2x+1$ définie sur $\mathbb{R}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Donc la somme $f+g : x \longmapsto -2x+1+\dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

## d) Emploi de la dérivée

Les définitions et les théorèmes précédents ne s'utilisent que dans des cas particuliers simples.
Rappelons les théorèmes, d'un emploi plus général, donnés en Première :

**Théorèmes**

> **Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I.**
>
> **1. Si $f'$ est positive sur I, alors $f$ est croissante sur I.**
>
> **2. Si $f'$ est négative sur I, alors $f$ est décroissante sur I.**
>
> **3. Si $f'$ est nulle sur I, alors $f$ est constante sur I.**

## 5.4 EXTREMUMS D'UNE FONCTION

**Définitions**

> **Soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in$ I. On dit que $f$ admet un maximum relatif $f(x_0)$ en $x_0$ si et seulement s'il existe un intervalle I' de centre $x_0$ tel que**
>
> $$(\forall x \in \mathrm{I} \cap \mathrm{I}') \quad f(x) \leq f(x_0).$$
>
> **On dit que $f$ admet un minimum relatif $f(x_0)$ en $x_0$ si et seulement s'il existe un intervalle I' de centre $x_0$ tel que**
>
> $$(\forall x \in \mathrm{I} \cap \mathrm{I}') \quad f(x) \geq f(x_0).$$

Nous dirons que $f(x_0)$ est un **extremum relatif** si c'est un maximum relatif ou un minimum relatif.
Supposons que l'on ait pour tout $x$ de l'ensemble de définition : $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$), on dit que $f(x_0)$ est un **maximum absolu** (resp. **minimum absolu**); un maximum absolu ou un minimum absolu est un **extremum absolu.**
Si $f$ est dérivable sur un intervalle I de centre $x_0$ et si la dérivée s'annule en $x_0$ **en changeant de signe** on a sur un intervalle $]x_0 - h, x_0 + h[$ $(h > 0)$ l'un des tableaux de variation suivants :

| $x$ | $x_0 - h$ | | $x_0$ | | $x_0 + h$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ | |

| $x$ | $x_0 - h$ | | $x_0$ | | $x_0 + h$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↗ | |

ce qui montre que $f$ a un extremum relatif en $x_0$. Nous pouvons énoncer :

**Théorème**

> **Si $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle de centre $x_0$, et si la dérivée s'annule en $x_0$, en changeant de signe, la fonction $f$ admet un extremum relatif en $x_0$.**

**REMARQUE** Le théorème précédent nous donne une **condition suffisante** pour que $f$ admette un extremum en $x_0$ mais cette condition n'est pas nécessaire comme nous le montre l'exemple suivant. Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

si $0 < x \leq 1$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{x}$

si $x > 1$, $\quad f(x) = x^2$

elle présente un minimum en $x_0 = 1$ mais $f$ n'est pas dérivable en $x_0 = 1$ car en ce point le nombre dérivé à gauche est $-1$, le nombre dérivé à droite est $+2$.

## 5.5 BRANCHES INFINIES

Nous allons poursuivre notre étude locale, cette fois-ci au voisinage de l'infini. On dit que la représentation graphique $\Gamma$ de $f$ admet une **branche infinie** si et seulement si l'une au moins des coordonnées d'un point de $\Gamma$ devient infinie.

### a) Asymptotes parallèles aux axes de coordonnées

**Définitions**

**Soit $\Gamma$ la représentation graphique de $f$ dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.**

**1. La droite D d'équation $y = b$ est une asymptote à $\Gamma$ si et seulement si :**

$$\lim_{+\infty} f = b \quad \text{ou} \quad \lim_{-\infty} f = b.$$

**2. La droite D d'équation $x = x_0$ est une asymptote à $\Gamma$ si et seulement si**

$$\lim_{x_0^+} f = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0^+} f = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0^-} f = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0^-} f = -\infty.$$

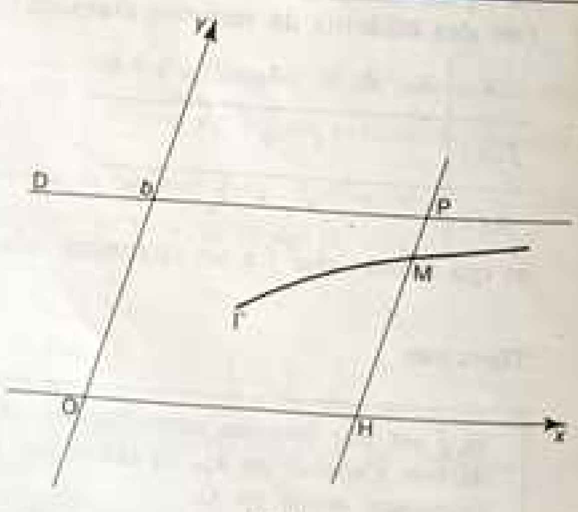



fig. 2

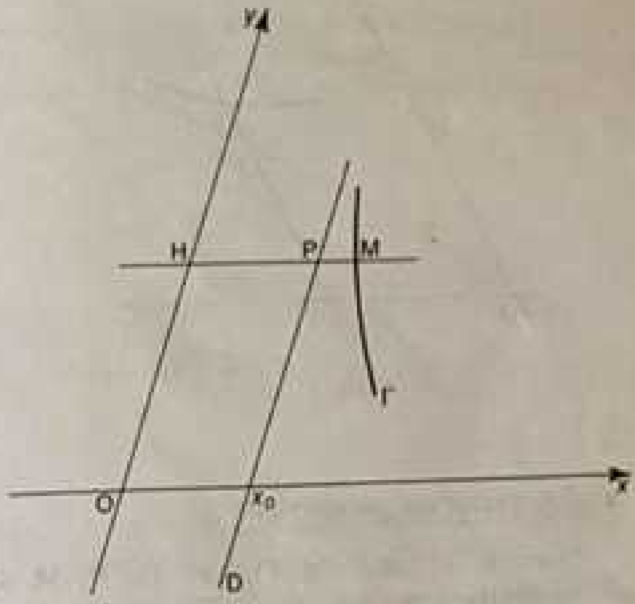



fig. 3

■ *Interprétation géométrique*

Dans le 1$^{er}$ cas (fig. 2), soit H, P, M des points de même abscisse $x$ respectivement sur O$x$, D, Γ :

$$\overline{PM} = \overline{HM} - \overline{HP} = f(x) - b$$

la limite de $\overline{PM}$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est nulle.

Dans le 2$^e$ cas (fig. 3), soit H, P, M des points de même ordonnée $y$ respectivement sur O$y$, D, Γ :

$$\overline{PM} = \overline{HM} - \overline{HP} = x - x_0$$

la limite de $\overline{PM}$ est encore nulle quand $x$ tend vers $x_0$ à droite ou à gauche.

### b) Asymptote d'équation $y = ax + b$. Courbes asymptotes

**Définitions**

**1. La droite D d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la représentation graphique Γ de $f$ si et seulement si :**

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

**2. Les représentations graphiques Γ et Γ' de $f$ et $g$ sont deux courbes asymptotes, l'une à l'autre, si et seulement si :**

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

**REMARQUE** Le théorème précédent nous donne une **condition suffisante** pour que $f$ admette un extremum en $x_0$ mais cette condition n'est pas nécessaire comme nous le montre l'exemple suivant. Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

si $0 < x \leq 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$

si $x > 1$, $f(x) = x^2$

elle présente un minimum en $x_0 = 1$ mais $f$ n'est pas dérivable en $x_0 = 1$ car en ce point le nombre dérivé à gauche est $-1$, le nombre dérivé à droite est $+2$.

## 5.5 BRANCHES INFINIES

Nous allons poursuivre notre étude locale, cette fois-ci au voisinage de l'infini. On dit que la représentation graphique $\Gamma$ de $f$ admet une **branche infinie** si et seulement si l'une au moins des coordonnées d'un point de $\Gamma$ devient infinie.

### a) Asymptotes parallèles aux axes de coordonnées

**Définitions**

**Soit $\Gamma$ la représentation graphique de $f$ dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.**

**1. La droite D d'équation $y = b$ est une asymptote à $\Gamma$ si et seulement si :**

$$\lim_{+\infty} f = b \quad \text{ou} \quad \lim_{-\infty} f = b.$$

**2. La droite D d'équation $x = x_0$ est une asymptote à $\Gamma$ si et seulement si**

$$\lim_{x_0^+} f = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0^+} f = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0^-} f = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0^-} f = -\infty.$$

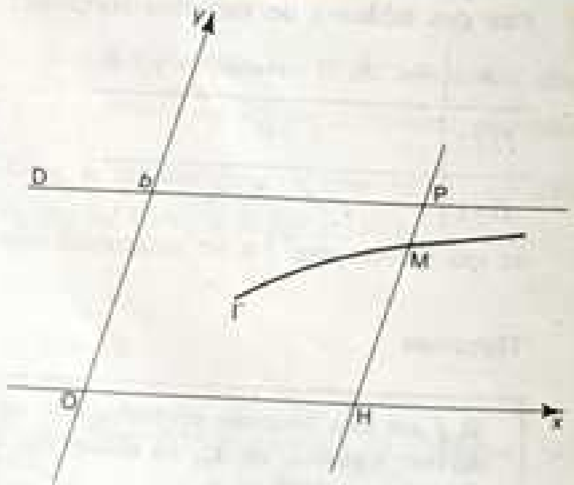



fig. 2

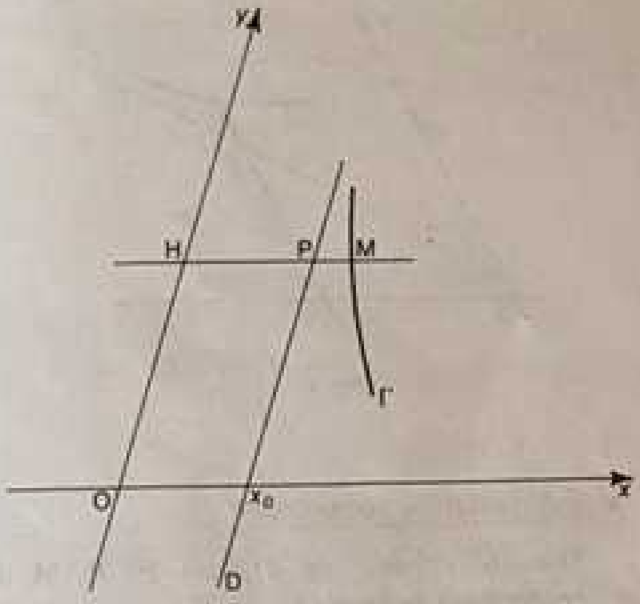


fig. 3

■ *Interprétation géométrique*

Dans le 1[er] cas (fig. 2), soit H, P, M des points de même abscisse $x$ respectivement sur Ox, D, Γ :

$$\overline{PM} = \overline{HM} - \overline{HP} = f(x) - b$$

la limite de $\overline{PM}$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est nulle.

Dans le 2[e] cas (fig. 3), soit H, P, M des points de même ordonnée $y$ respectivement sur Oy, D, Γ :

$$\overline{PM} = \overline{HM} - \overline{HP} = x - x_0$$

la limite de $\overline{PM}$ est encore nulle quand $x$ tend vers $x_0$ à droite ou à gauche.

## b) Asymptote d'équation $y = ax + b$. Courbes asymptotes

**Définitions**

**1. La droite D d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la représentation graphique Γ de $f$ si et seulement si :**

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

**2. Les représentations graphiques Γ et Γ' de $f$ et $g$ sont deux courbes asymptotes, l'une à l'autre, si et seulement si :**

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

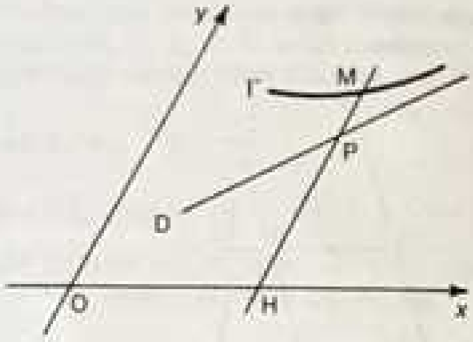



fig. 4

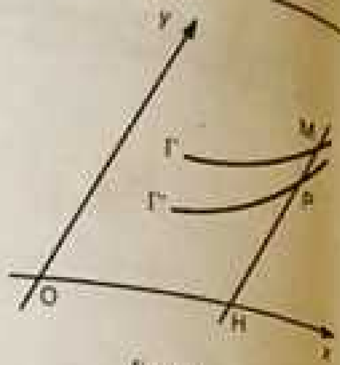



fig. 5

■ *Interprétation géométrique*

Dans le 1er cas (fig. 4), soit H, P, M des points de même abscisse $x$ respectivement sur Ox, D, Γ :

$$\overline{PM} = \overline{HM} - \overline{HP} = f(x) - ax - b$$

la limite de $\overline{PM}$ est nulle quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
Dans le 2e cas (fig. 5), soit H, P, M des points de même abscisse $x$ respectivement sur Ox, Γ', Γ :

$$\overline{PM} = \overline{HM} - \overline{HP} = f(x) - g(x)$$

la limite de $\overline{PM}$ est encore nulle quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

**REMARQUES** 1. L'étude du *signe* de $\overline{PM}$ permet de « placer » Γ par rapport à l'asymptote D ou la courbe asymptote Γ' c'est-à-dire de savoir laquelle des deux courbes est au « dessus » de l'autre.

2. Si le repère est orthonormé, la distance du point de couple de coordonnées $(x_0, y_0)$ à la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

La distance du point $M(x, f(x))$ à l'asymptote D d'équation $y = ax + b$ est donc, *si le repère est orthonormé* :

$$\frac{|f(x) - ax - b|}{\sqrt{1 + a^2}}$$

cette distance tend vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

## c) Étude de quelques exemples

**EXEMPLE 1** Soit $f : x \longmapsto \dfrac{3x^3 + 4}{(x-1)(x-2)^2}$ définie sur $\mathbb{R} - \{1, 2\}$. Les branches infinies de la représentation graphique Γ de $f$ correspondent aux cas suivants :

- $\lim\limits_{1^+} f = +\infty$ (asymptote d'équation $x = 1$).

- $\lim_{1^-} f = -\infty$ (asymptote d'équation $x=1$).

- $\lim_{2^+} f = \lim_{2^-} f = +\infty$ (asymptote d'équation $x=2$).

- $\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} \dfrac{3x^3}{x^3} = 3$ (asymptote d'équation $y=3$).

- $\lim_{-\infty} f = \lim_{-\infty} \dfrac{3x^3}{x^3} = 3$ (asymptote d'équation $y=3$)

pour placer $\Gamma$ par rapport à cette dernière asymptote, calculons $\overline{\mathrm{PM}}$ (fig. 6) :

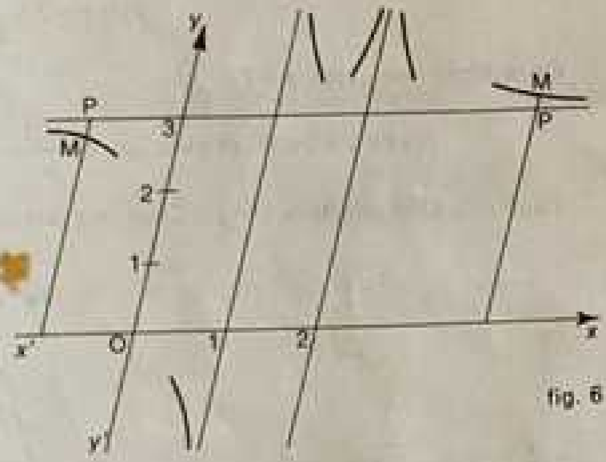



fig. 6

$$\overline{\mathrm{PM}} = \frac{3x^3+4}{(x-1)(x-2)^2} - 3 = \frac{15x^2-24x+12}{(x-1)(x-2)^2}$$

$\overline{\mathrm{PM}} = \dfrac{15x^2(1+\alpha(x))}{x^3(1+\beta(x))} = \dfrac{15}{x}(1+\gamma(x))$, $\alpha$ $\beta$, $\gamma$ étant des fonctions ayant pour limite 0 quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Au voisinage de $+\infty$ (c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a>0$), $\overline{\mathrm{PM}}$ est du signe de $\dfrac{15}{x}$ donc $\overline{\mathrm{PM}}>0$ et la courbe $\Gamma$ est « au-dessus » de l'asymptote.

Au voisinage de $-\infty$ (c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $]-\infty, b]$ avec $b<0$), $\overline{\mathrm{PM}}$ est encore du signe de $\dfrac{15}{x}<0$ donc $\Gamma$ est « au-dessous » de l'asymptote.

**EXEMPLE 2** Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$. Les branches infinies correspondent aux cas suivants :

- $\lim_{1^+} f = +\infty$ (asymptote d'équation $x=1$).

- $\lim_{1^-} f = -\infty$ (asymptote d'équation $x=1$).

- $\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim_{+\infty} x = +\infty$.

- $\lim_{-\infty} f = \lim_{-\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim_{-\infty} x = -\infty$

pour chercher, dans ces deux derniers cas, une asymptote d'équation $y = ax + b$, mettons $f(x)$ sous la forme :

$$\boxed{f(x) = ax + b + \varphi(x)}$$

la limite de $\varphi$ étant nulle quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
On peut écrire $\dfrac{x^2+x-1}{x-1} = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$. On détermine $a$, $b$, $c$ par identification ou par division de $x^2+x-1$ par $x-1$. On trouve :

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1}.$$

On a bien, pour tout $x \neq 1$ :

$$f(x) = x + 2 + \varphi(x) \text{ avec } \varphi(x) = \frac{1}{x-1} \text{ et on a } \lim_{+\infty} \varphi = \lim_{-\infty} \varphi = 0.$$

La droite D d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à la courbe représentant $f$.

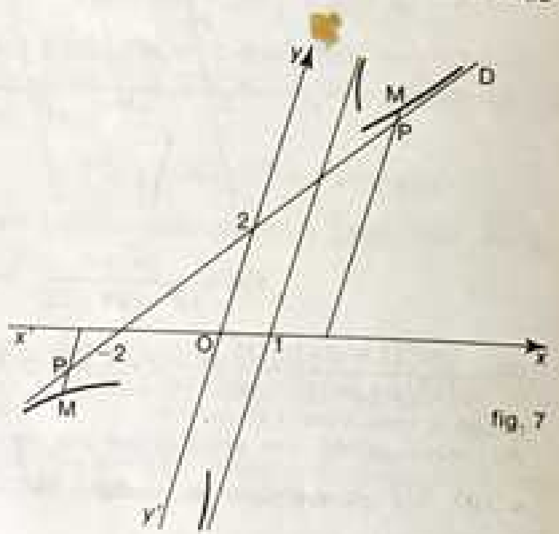



fig. 7

$$\overline{PM} = f(x) - x - 2 = \frac{1}{x-1}$$

si $x > 1$, $\overline{PM} > 0$, la courbe est « au-dessus » de D (fig. 7);
si $x < 1$, $\overline{PM} < 0$, la courbe est « au-dessous » de D.

**EXEMPLE 3** Mais il n'est pas toujours facile de mettre $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = ax + b + \varphi(x), \tag{1}$$

la limite de $\varphi$ étant nulle quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
Lorsqu'on a (1), on peut écrire :

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{\varphi(x)}{x} \quad \text{et} \quad f(x) - ax = b + \varphi(x)$$

d'où, quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$,

$$(2) \quad \lim \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{et} \quad (3) \quad \lim (f(x) - ax) = b.$$

Réciproquement si l'on a (2) et (3), la limite de $f(x)-ax-b$ est nulle quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ et la droite d'équation $y=ax+b$ est bien une asymptote à la représentation graphique de $f$.

Soit, par exemple, $f: x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ définie sur $D = ]-\infty, 0] \cup ]1, +\infty[$. Les branches infinies correspondent à :

- $\lim\limits_{1^+} f = +\infty$ (asymptote d'équation $x=1$);
- $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^3}{x-1} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{+\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$;
- de même $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.

Cherchons, dans ces deux derniers cas, une asymptote d'équation $y=ax+b$. Pour tout $x$ de D :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

Pour tout $x>1$, $|x|=x$ et $\dfrac{f(x)}{x} = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, donc $a=1$.

$$f(x)-ax = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x = \frac{\dfrac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} + x} = \frac{1}{x-1}\,\frac{x^2}{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} + x}$$

$$f(x)-ax = \frac{x^2}{\sqrt{x^4-x^3}+x^2-x} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+1-\dfrac{1}{x}}$$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-ax] = \dfrac{1}{2}$ donc $b=\dfrac{1}{2}$.

La droite $D_1$ d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$ est une asymptote.

Position de la courbe par rapport à $D_1$ :

$$\overline{PM} = f(x)-ax-b = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+1-\dfrac{1}{x}} - \frac{1}{2}$$

pour tout $x>1$, on a :

$$0 < 1-\frac{1}{x} < 1$$

$$0 < \sqrt{1-\frac{1}{x}} < 1$$

donc :

$$0 < \sqrt{1-\frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x} < 2$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+1-\dfrac{1}{x}} > \frac{1}{2}$$

donc $\overline{PM} > 0$, la courbe est au-dessus de $D_1$ (fig. 8, page suivante).

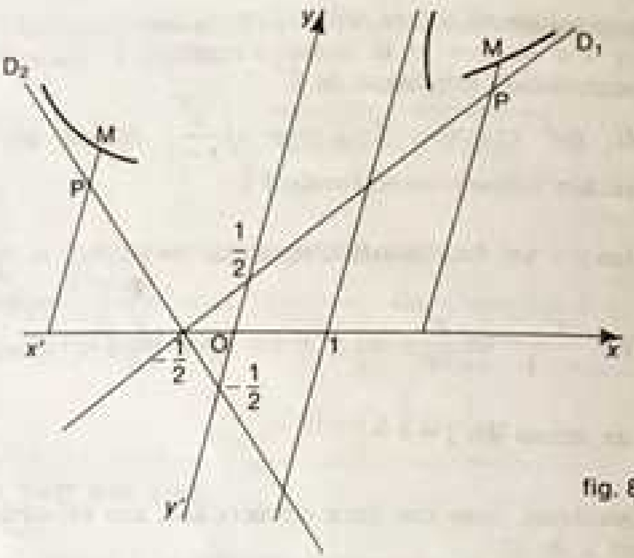



fig. 8

Pour tout $x<0$, $|x|=-x$ et $\frac{f(x)}{x}=-\sqrt{\frac{x}{x-1}}$

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ donc $a=-1$.

$$f(x)-ax=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x=\frac{\frac{x^3}{x-1}-x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}-x}=\frac{1}{x-1}\,\frac{x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}-x}$$

$$f(x)-ax=-\frac{x^2}{\sqrt{x^4-x^3}+x^2-x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1-\frac{1}{x}}$$

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=-\frac{1}{2}$ donc $b=-\frac{1}{2}$.

La droite $D_2$ d'équation $y=-x-\frac{1}{2}$ est une asymptote.

Position de la courbe par rapport à $D_2$ :

$$\overline{PM}=f(x)-ax-b=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1-\frac{1}{x}}+\frac{1}{2}$$

pour tout $x<0$, on a $1-\frac{1}{x}>1$

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}}>1$$

donc :

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1-\frac{1}{x}>2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1-\frac{1}{x}}<\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1-\frac{1}{x}}>-\frac{1}{2}$$

donc $\overline{PM}>0$, la courbe est au-dessus de $D_2$ (fig. 8).

## d) Branches paraboliques

Le dernier exemple précédent nous a conduits à étudier la limite de $\frac{f(x)}{x}$ et, si cette limite est $a$, la limite de $f(x)-ax$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Étudions quelques cas particuliers correspondant à ce qu'on appelle des « branches paraboliques » par analogie avec la parabole qui se trouve dans cette situation :

**Définitions**

**Soit $\Gamma$ la représentation graphique de $f$. On suppose que la limite de $f$ en $+\infty$ ou $-\infty$ est $+\infty$ ou $-\infty$. Dans ces conditions :**

**1. Si $\lim \frac{f(x)}{x}=0$, on dit que $\Gamma$ admet une branche parabolique dans la direction de $Ox$.**

**2. Si $\lim \frac{f(x)}{x}=+\infty$ ou $-\infty$, on dit que $\Gamma$ admet une branche parabolique dans la direction de $Oy$.**

**3. Si $\lim \frac{f(x)}{x}=a$ et $\lim(f(x)-ax)=+\infty$ ou $-\infty$, on dit que $\Gamma$ admet une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y=ax$.**

EXEMPLE 1 Soit la fonction logarithme népérien : $x \longmapsto \ln x$. On sait (cf. § 3.2 d) que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$.

On a vu aussi (cf. § 3.7 b) que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0$. Donc, d'après la définition 1, la représentation graphique $\Gamma$ admet une branche parabolique dans la direction de $Ox$.

EXEMPLE 2 Soit la fonction $f : x \longmapsto x+\ln|x|+e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Les branches infinies correspondent aux cas suivants :

- $\lim\limits_{0} f=-\infty$ (asymptote $y'Oy$).
- Quand $x$ tend vers $-\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty} x=-\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \ln|x|=+\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty.$$

On ne peut pas conclure pour la limite de la somme $x+\ln|x|+e^{-x}$. On peut écrire :

$$f(x)=x\left(1+\frac{\ln|x|}{x}+\frac{e^{-x}}{x}\right).$$

En posant $X=-x$,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln|x|}{x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{-X}=-\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{e^{X}}{-X} = -\lim_{X \to +\infty} \frac{e^{X}}{X} = -\infty \text{ (cf. § 3.7 b)}$$

donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

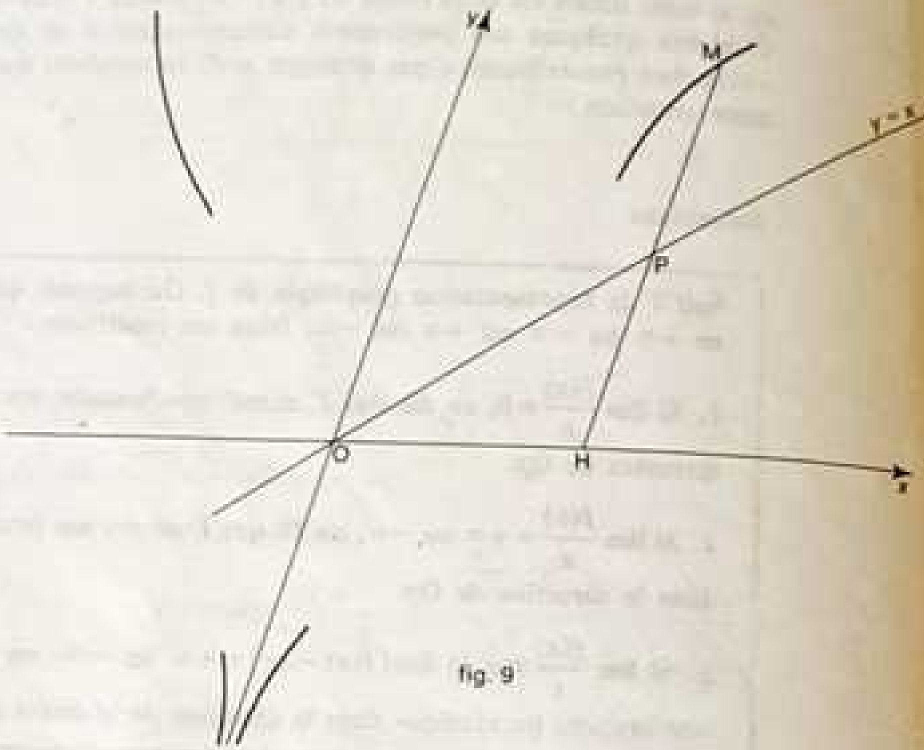



fig. 9

On a aussi : $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{\ln|x|}{x} + \frac{e^{-x}}{x}\right) = -\infty$. Donc, d'après la définition 2, la représentation graphique de $f$ admet une branche parabolique dans la direction de Oy (fig. 9).

• Quand $x$ tend vers $+\infty$,

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \ln|x| = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0.$$

Donc la somme $f(x) = x + \ln|x| + e^{-x}$ a pour limite $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x} + e^{-x}\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \left(e^{-x}\frac{1}{x}\right) = 0 \times 0 = 0$$

donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = a$.

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to +\infty} (\ln x + e^{-x}) = +\infty.$$

Donc, d'après la définition 3, la représentation graphique Γ de $f$ admet une branche parabolique dans la direction de la droite D d'équation $y = x$. On peut encore préciser : soit H, P, M les points de même abscisse $x$ respectivement sur Ox, D, Γ (fig. 9). Pour $x > 1$ :

$$\overline{PM} = \overline{HM} - \overline{HP} = f(x) - x = \ln x + e^{-x} > 0$$

donc Γ est au-dessus de D et, cette fois-ci, $\lim_{x \to +\infty} \overline{PM} = +\infty$.

## 5.6 EXERCICES RÉSOLUS

Nous allons donner deux exemples d'étude complète d'une fonction numérique de la variable réelle avec représentation graphique.

**EXERCICE RÉSOLU 1** Soit $f : x \longmapsto x + \ln|x| + e^{-x}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x$ non nul :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - e^{-x}.$$

- Si $x<0$, on a $-x>0$ donc $e^{-x}>1$. Comme $1+\frac{1}{x}<1$, on a donc

$$1+\frac{1}{x}-e^{-x}<0.$$

- Si $x>0$, on a $-x<0$ donc $e^{-x}<1$. Comme $1+\frac{1}{x}>1$, on a donc

$$1+\frac{1}{x}-e^{-x}>0.$$

- Nous avons étudié les branches infinies au sous-paragraphe précédent. On en déduit le tableau de variations et la courbe représentative.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ \|\| | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | \|\| | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ | \|\| | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

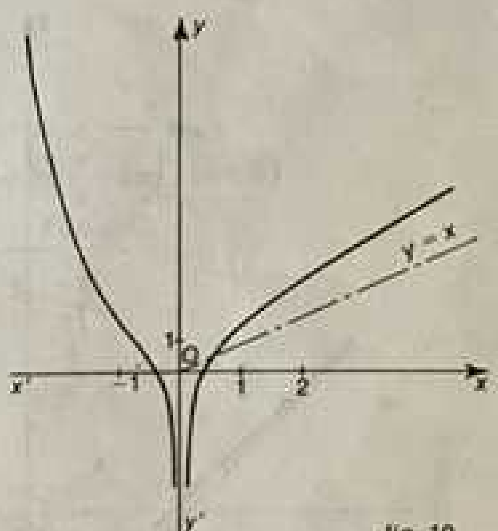



fig. 10

**EXERCICE RÉSOLU 2** Soit $f : x \longmapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$. L'ensemble de définition de $f$ est

$$D = ]-\infty, 0] \cup ]1, +\infty[.$$

Pour tout $x$ de $]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$ :

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2}{2\sqrt{(x-1)^3 x^3}} = \left(x - \frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{x}{(x-1)^3}}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | ////// | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ////// | $+\infty$ | ↘ | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | ↗ | $+\infty$ |

nous avons étudié *les branches infinies* au § 5.5 c, exemple 3 et montré que les asymptotes sont les droites d'équations :

$$x = 1$$

$$y = x + \frac{1}{2}$$

$$y = -x - \frac{1}{2}.$$

• *Demi-tangente en* O

Si $x < 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} = -\dfrac{x}{x}\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} = -\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ donc la représentation graphique de $f$ admet une demi-tangente à gauche à l'origine, portée par $x'x$ (fig. 11).

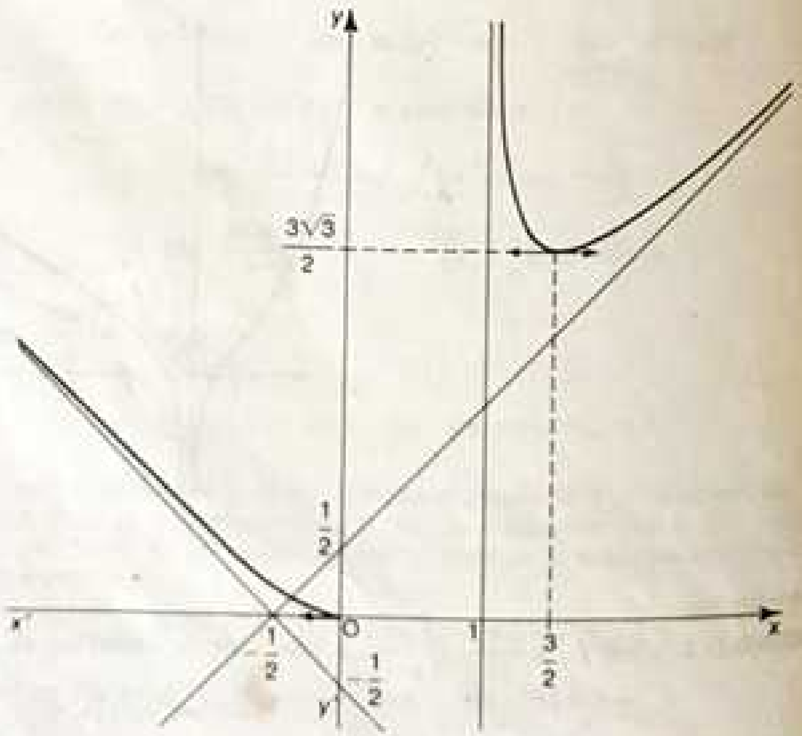



fig. 11

## 5.7 TRAVAUX PRATIQUES

EXERCICE 1 1. *Étudier et représenter* $f : x \longmapsto \cos x$.

Vous remarquerez que $f$ a pour période $2\pi$, que $f$ est paire, $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(\pi - x) = -f(x)$, en déduire que $I\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est centre de symétrie. L'intervalle d'étude est $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. *Étudier et représenter* $g : x \longmapsto \sqrt{3}\cos x - \sin x + 1$.

La transformation de $\sqrt{3}\cos x - \sin x + 1$ conduit à $g(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + 1$ (transformation faite au § 5.1 Exemple 2). En posant $x + \frac{\pi}{6} = X$ et $y - 1 = Y$ on est ramené à la fonction $X \longmapsto Y = 2\cos X$ représentée fig. 12.

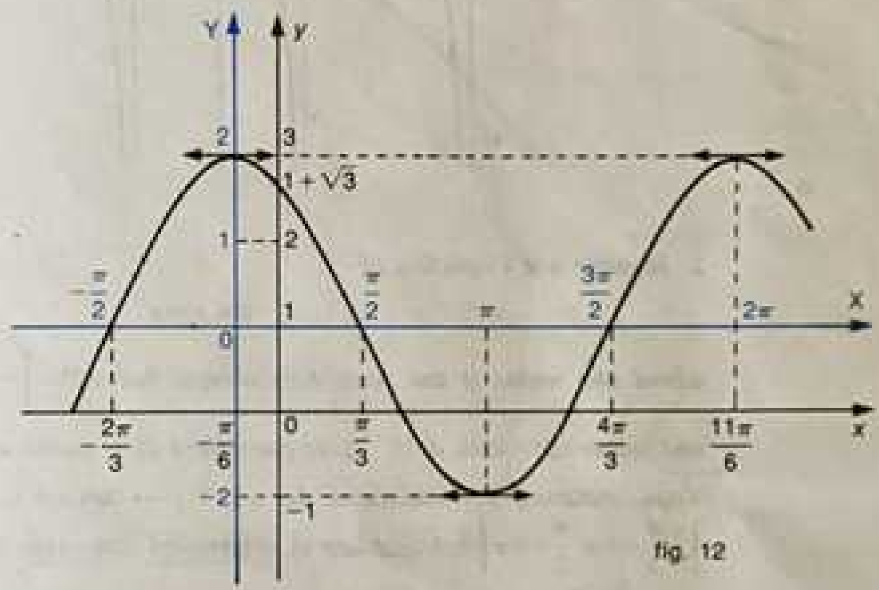



fig. 12

EXERCICE 2 1. *Étudier et représenter* $f : x \longmapsto \tan x$.

$f$ est définie sur $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$

$f$ a pour période $\pi$,

$f$ est impaire,

l'intervalle d'étude est $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

rappelons que $(\tan)'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$,

| $x$ | $0$ | | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| $(\tan)'(x)$ | $1$ | $+$ | | ‖ |
| $\tan x$ | $0$ | ↗ | $+\infty$ | ‖ |

en raison de la symétrie par rapport à l'origine O, la courbe traverse la tangente en O. On dit que O est un *point d'inflexion*.



CamScanner

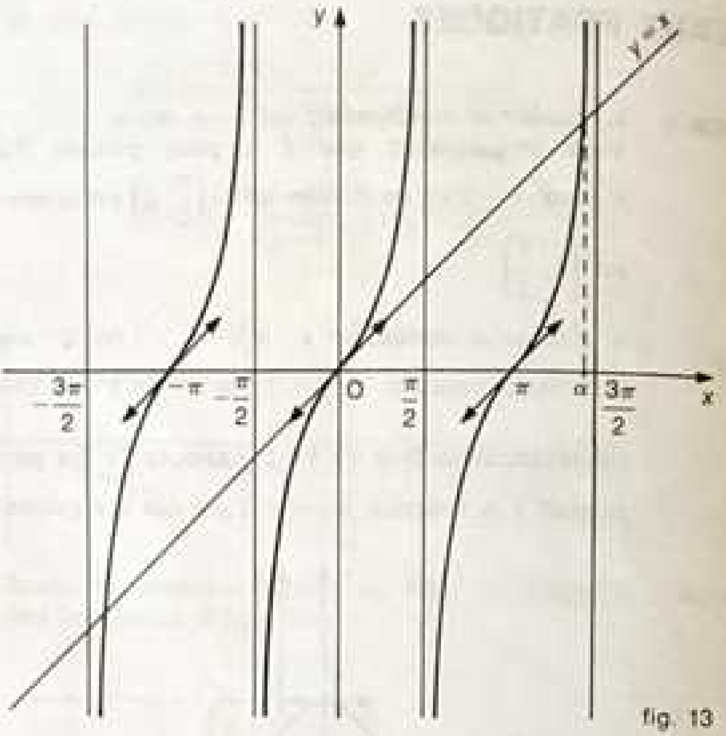



fig. 13

**2.** *Montrer que l'équation :*

$$\tan x = x \qquad (1)$$

*admet une racine et une seule dans chaque intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$. *Donner une valeur approchée à* $10^{-2}$ *près par défaut de la racine* $\alpha$ *appartenant à* $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Vous étudierez les variations de $g : x \longmapsto \tan x - x$. La restriction de $g$ à $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ est continue et strictement croissante donc elle est une bijection de $I = \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ sur $g(I) = \mathbb{R}$. Donc 0, élément de $\mathbb{R}$, admet un antécédent unique dans $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$.

$$g(4) = \tan 4 - 4 = -2{,}842\ldots$$
$$g(4{,}50) = \tan(4{,}50) - 4{,}50 = 0{,}137\ldots$$
$$g(4{,}49) = \tan(4{,}49) - 4{,}49 = -0{,}067\ldots$$

donc $4{,}49 < \alpha < 4{,}50.$

**EXERCICE 3** *Programmation d'une fonction pour calculer différentes valeurs de celle-ci.*

Soit $f$ la fonction numérique de variable réelle définie par $f(x) = 3 \ln x + e^x$.

**CASIO FX 180P**

Mode 0
P1 PCL
« Afficher un nombre qui appartient à l'ensemble de définition de la fonction » puis
Min
P1
$3 \times$ MR ln + MR$e^x$ =
Mode .
Calcul de $f(2{,}05)$
2,05 P₁ on obtient 9,9214

**CASIO FX 7000G**

Écrivons en P0 le programme suivant

```
Lbl 1 : "X" = : ? ──▸ X    exe
3×ln X+e^X ──▸ Y    exe
"Y =" : Y ▲
GOTO 1    exe
```

Mode 1   Prog 0   2,05   exe

on obtient 9,9214. On appuie une nouvelle fois sur "exe" si l'on veut procéder à un nouveau calcul.

**CASIO 850P (en Basic)**

```
10 INPUT "X="; X
20 Y=3×ln X+e^X
30 PRINT Y
30 GOTO 10
```

# Exercices

## Simplification de la fonction étudiée

*Simplifier $f(x)$ ou se ramener à une fonction plus simple par changement de repère et construire la courbe représentative dans les cas suivants (ex. 5.1 à 5.6) :*

**5.1** $f(x)=4\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\sin^2 x.$

**5.2** $f(x)=(x-1)^3+x-1.$

**5.3** $f(x)=(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}-\sqrt{3}).$

**5.4** $f(x)=\sqrt{9x^2+12x+4}.$

**5.5** $f(x)=\dfrac{1}{x}\left[\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(x-1)^2}\right].$

**5.6** $f(x)=xe^{\frac{1}{2}|\ln x^2|}.$

## Ensemble de définition et ensemble d'étude

*Trouver l'ensemble de définition D et étudier si $f$ est paire ou impaire ou périodique ou s'il existe des nombres réels a, P, Q tels que pour tout $x$ de D :*

$$f(a-x)=f(x) \quad \text{ou} \quad f(a-x)=-f(x)$$
$$\text{ou} \quad f(x+P)=f(x)+Q.$$

*Interprétation géométrique (ex. 5.7 à 5.21) :*

**5.7** $f(x)=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2-9}}.$

**5.8** $f(x)=\dfrac{|x|+1}{x}.$

**5.9** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^4-10x^2+9}{x^2}}.$

**5.10** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4-5x^2+4}}{x^3}.$

**5.11** $f(x)=(x-1)^4+(x-1)^2+2.$

**5.12** $f(x)=x-\mathrm{E}(x)$, $\mathrm{E}(x)$ étant la partie entière de $x$.

**5.13** $f(x)=(-1)^{\mathrm{E}(x)}[x-\mathrm{E}(x)].$

**5.14** $f(x)=[x-\mathrm{E}(x)]^2+\mathrm{E}(x).$

**5.15** $f(x)=\cos x-\cos^2 x.$

**5.16** $f(x)=\cos^2 x\cos 2x.$

**5.17** $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos 2x}.$

**5.18** $f(x)=\dfrac{\cos 3x}{1+\sin x}.$

**5.19** $f(x)=\sqrt{\cos 2x-\cos x}.$

**5.20** $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{3}+\sin\dfrac{x}{4}.$

**5.21** $f(x)=x-2\sin x.$

## Étude des variations

**5.22** **1.** Soit $f$ et $g$ deux fonctions *positives* et variant dans le même sens sur un intervalle I. Montrer que $fg$ varie sur I dans le même sens que $f$ et $g$.

**2.** Application : étudier les variations de
$$x \longmapsto (2x+1)\sqrt{x-2}.$$

**5.23** **1.** Étudier les variations de
$$f : x \longmapsto \sqrt{2x^2+x-3}$$
sans l'aide de la dérivée [on mettra $2x^2+x-3$ sous la forme $a(x+\alpha)^2+\beta$].

**2.** Contrôler à l'aide de la dérivée.

**5.24** **1.** Étudier les variations de
$$f : x \longmapsto \frac{x^2+2x}{x+1}$$
sans l'aide de la dérivée [on mettra $f(x)$ sous la forme $ax+b+\dfrac{c}{x+1}$].

**2.** Contrôler à l'aide de la dérivée.

## Extremums d'une fonction

**5.25** Trouver les extremums de
$$f : x \longmapsto a\cos^2 x+2b\sin x\cos x+c\sin^2 x+d$$
en mettant $f(x)$ sous la forme
$$\mathrm{A}\cos 2x+\mathrm{B}\sin 2x+\mathrm{C}$$
puis sous la forme $\mathrm{K}\cos(2x-\alpha)+\mathrm{L}$.

**5.26** Dans un plan, on donne trois points $\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_2$, $\mathrm{A}_3$ et une droite variable D a une direction donnée. On peut toujours choisir le repère orthonormé de manière que cette direction soit celle de Oy. La droite D a, alors, une équation de la forme $x=\lambda$ ($\lambda$ paramètre réel). Déterminer la droite D de manière que la somme des carrés des distances des points $\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_2$, $\mathrm{A}_3$ à cette droite soit minimale. Par quel point remarquable, la droite obtenue passe-t-elle?
Généraliser à $n$ points $\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_2$, ..., $\mathrm{A}_n$ du plan.

**5.27** Un plan étant rapporté à un repère orthonormé, soit $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$ un point donné; on suppose $x_0>0$ et $y_0>0$.

Une droite variable D passe par $M_0$ et coupe $Ox$ en A et $Oy$ en B; on suppose que l'abscisse de A et l'ordonnée de B sont des nombres strictement positifs. La distance de deux points quelconques P et Q est désignée par $d(P, Q)$.
Déterminer D (en prenant pour inconnue l'angle aigu de $Ox$ et de D) de manière que :

a) la distance $d(A, B)$ soit minimale;

b) la somme $d(O, A) + d(O, B)$ soit minimale;

c) le produit $d(O, A) \times d(O, B)$ soit minimal.

**5.28** On a, dans l'espace, un repère orthonormé porté par les axes $Ox$, $Oy$, $Oz$. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives

$$(P) \quad 2x - y + 2z - 5 = 0,$$
$$(Q) \quad 2x + 2y - z - 4 = 0.$$

1. Montrer que ces deux plans sont perpendiculaires.

2. Calculer la distance de $A(1, 2, -1)$ à (P) et à (Q) et en déduire la distance de A à la droite (D), intersection de (P) et de (Q).

3. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (D), le paramètre étant $t$.

4. Pour quelle valeur de $t$ la distance de A à un point de (D) est-elle minimale? Retrouver ainsi la distance de A à (D).

## Branches infinies

*Étudier les branches infinies des représentations graphiques des fonctions f définies par (ex. 5.29 à 5.39) :*

**5.29** $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

**5.30** $f(x) = \dfrac{x^3+1}{(x-2)^2}$.

**5.31** $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+1}{x(x-1)^2}$.

**5.32** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-3x+2}$.

**5.33** $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+x-2}$.

**5.34** $f(x) = \dfrac{\cos 2x + 1}{2\cos x - 1}$.

**5.35** $f(x) = \dfrac{3\sin x + 2}{2\sin^2 x - 7\sin x + 3}$.

**5.36** $f(x) = \sqrt{4x^2 - 6x + 2}$.

**5.37** $f(x) = 5x + 3\sqrt{x^2 - 1}$.

**5.38** $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

**5.39** $f(x) = x + 1 + \sqrt[3]{x}$.

**5.40** Soit $a$ et $b$ deux réels et $f$ l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = ax + b - \sqrt{x^2+1}.$$

1. Étudier la limite de $f$ quand $x$ tend vers moins l'infini (discuter suivant les valeurs de $a$).

2. Déterminer $a$ et $b$ pour que la représentation graphique (C) de $f$ admette pour asymptote, quand $x$ tend vers moins l'infini, la droite (D) d'équation $2x - y + 2 = 0$.

*(Exercice Bac. E. Maroc 1977.)*

**5.41** Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto f(x) = 3x - 3\ln|2e^x - 1|$$

et soit $\Gamma$ la représentation graphique de cette fonction dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Démontrer que $\Gamma$ admet trois asymptotes passant par un même point. On ne demande pas de construire $\Gamma$.

## Étude de fonctions et construction de courbes. Courbes asymptotes

*Étudier et représenter graphiquement les fonctions définies par (ex. 5.42 à 5.79) :*

**5.42** $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

**5.43** $f(x) = \dfrac{x^3+1}{(x-2)^2}$.

**5.44** $f(x) = x\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$.

**5.45** $f(x) = (-1)^{E(x)}[x - E(x)]$, $E(x)$ étant la partie entière de $x$.

**5.46** $f(x) = [x - E(x)]^2 + E(x)$.

**5.47** $f(x) = \cos^2 x \cos 2x$.

**5.48** $f(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\cos x - 1}$.

**5.49** $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$.

**5.50** $f(x) = \sqrt{\cos 2x - \cos x}$.

**5.51** $f(x) = \sqrt{-4\sin^2 x + 8\sin x - 3}$.

**5.52** $f(x) = x - 2\sin x$.

**5.53** $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{1 + \sin x}$.

**5.54** $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 3x - 1}$.

**5.55** $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

**5.56** $f(x) = x + \sqrt{2x + 1}$.

**5.57** $f(x)=5x+3\sqrt{x^2-1}$.

**5.58** $f(x)=x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

**5.59** $f(x)=\sqrt{x^2-6x+5}$.
$g(x)=\sqrt{|x^2-6x+5|}$.

**5.60** $f(x)=\sqrt{x^2+3x-4}$; en déduire la construction de la courbe d'équation :

$$x^2-y^2+3x-4=0.$$

**5.61** $f(x)=5x+20+3\sqrt{x^2+8x}$; en déduire la construction de la courbe d'équation :

$$(y-5x-20)^2=9(x^2+8x).$$

**5.62** $f(x)=\sqrt{2x^2-x}$; en déduire l'étude et la représentation graphique de :

$$g: x \longmapsto \sqrt{\cos 2x-\cos x+1}.$$

**5.63** $f(x)=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{9}{4x}$; placer la courbe représentative par rapport à celle représentant

$$g: x \longmapsto \frac{x^2}{3}$$

(les deux courbes sont asymptotes l'une à l'autre).

**5.64** $f(x)=\dfrac{x^3+2x+2}{2x}$; placer la courbe représentative par rapport à celle représentant

$$g: x \longmapsto \frac{x^2}{2}+1$$

(les deux courbes sont asymptotes l'une à l'autre).

**5.65** $f(x)=2x^2+1-\dfrac{1}{x^2}$; placer la courbe représentative par rapport à celle représentant

$$g: x \longmapsto 2x^2+1$$

(les deux courbes sont asymptotes l'une à l'autre).

**5.66** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

**5.67** $f(x)=x-\ln|x|$.

**5.68** $f(x)=\ln(\cos x)$.

**5.69** $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)|$.

**5.70** $f(x)=x\ln|x|$.

**5.71** $f(x)=(x-1)e^x$.

**5.72** $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

**5.73** $f(x)=e^{\sin x}$.

**5.74** $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$.

**5.75** $f(x)=x^2\ln x-x^2$.

**5.76** $f(x)=\dfrac{x^2}{4}(2\ln x-3)$.

**5.77** $f(x)=x^x$ (on suppose $x>0$).

**5.78** $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ (on suppose $x>0$).

**5.79** $f(x)=x^{(x^x)}$ (on suppose $x>0$).

**5.80** Étudier la fonction $f: x \longmapsto x\sin x$ (on sera amené, pour étudier le signe de la dérivée, à étudier les variations de $g: x \longmapsto \operatorname{tg} x+x$).
Quelle est la tangente à l'origine à la courbe $\Gamma$ représentant $f$? Montrer que les points de $\Gamma$ d'abscisses $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ appartiennent à l'une des deux droites d'équations $y=x$ ou $y=-x$ et que $\Gamma$ est tangente à ces deux droites.
Construire $\Gamma$.

**5.81** Étudier de même et représenter graphiquement la fonction

$$f: x \longmapsto x^2\sin x.$$

**5.82** Étudier de même et représenter graphiquement la fonction

$$f: x \longmapsto \sqrt{x}\sin x.$$

**5.83** Soit la fonction $f$ de $\mathbb{R}-\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{|x^2-1|}}{x}.$$

**1.** Déterminer les restrictions de la fonction dérivée $f'$ aux intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. $f$ est-elle dérivable en 1?
Quel est le signe de $f'(x)$? (On peut poser si nécessaire $u=\sqrt{x^2-1}$.)

**2.** $x$ étant supérieur à 1, mettre $f(x)$ sous la forme $f(x)=\dfrac{x}{2}-1+\varepsilon(x)$ où la fonction $\varepsilon$ tend vers zéro quand $x$ tend vers $+\infty$.
En déduire une équation d'une asymptote à la courbe représentative de $f$.

**3.** Construire la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

## Famille de fonctions

**5.84** Soit les fonctions $f_m$ définies par

$$f_m(x)=2mx^4-x^2-4m+1$$

($m$ paramètre réel).

*a*) Démontrer que, lorsque $m$ varie, les courbes représentatives $C_m$ des fonctions $f_m$ passent par des points fixes.

*b*) Quel est le sens de variation de $f_m$ suivant les valeurs de $m$?

*c*) Quand $f_m$ possède des extremums dont les abscisses sont non nulles, quel est l'ensemble des points représentatifs sur les courbes correspondantes?

**5.85** Soit $f_m$ la fonction définie par

$$f_m(x) = (m-1)x^3 + x^2 - m$$

($m$ paramètre réel).

*a*) Étudier le sens de variation de $f_m$, suivant les valeurs de $m$. La courbe représentative dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ s'appelle $C_m$.

*b*) Démontrer que $C_m$ passe par un point fixe lorsque $m$ varie.

*c*) Quel est l'ensemble des points représentatifs des extremums des fonctions $f_m$ d'abscisse non nulle, lorsque $m$ varie?

**5.86** Soit $f_m$ la fonction définie par

$$f_m(x) = \sqrt{mx^2 - x + 1}.$$

Étudier, suivant les valeurs du paramètre réel $m$, les branches infinies de la courbe représentative $C_m$.
Construire $C_m$ dans les cas suivants :

$$m = -2; \quad m = 0; \quad m = \frac{1}{4}; \quad m = 1.$$

**5.87** Soit $f_m$ la fonction définie par

$$f_m = \sqrt{(m-1)x^2 + mx + 1}.$$

Étudier, suivant les valeurs du paramètre réel $m$, les branches infinies de la courbe représentative $C_m$.
Construire $C_m$ dans les cas suivants :

$$m = 0; \quad m = 1; \quad m = 2; \quad m = 3.$$

## Bijection réciproque d'une bijection

**5.88** Soit $f$ la fonction numérique de la variable $x$ définie par

$$f(x) = \ln \frac{e^{2x} + 5}{e^x - 2}$$

sur l'ensemble E des points de $\mathbb{R}$ pour lesquels cette expression a un sens. $(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de la fonction $f$, construite relativement à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**1.** *a*) Quel est l'ensemble E de définition de la fonction $f$?

*b*) Étudier le sens de variations de $f$, ainsi que ses limites éventuelles aux bornes de l'ensemble E.

*c*) On pose pour tout $x$ appartenant à E : $\varphi(x) = f(x) - x$.
Étudier la limite éventuelle de $\varphi(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$, ainsi que le signe de $\varphi(x)$. Que peut-on en conclure pour $(\mathcal{C})$?

*d*) Tracer $(\mathcal{C})$.

**2.** Soit A l'image de $]\ln 2, \ln 5[$ par $f$ et F l'application de $]\ln 2, \ln 5[$ sur A, définie pour tout $x$ appartenant à $]\ln 2, \ln 5[$ par $F(x) = f(x)$.
Montrer que F admet une application réciproque G dont on précisera les propriétés : sens des variations, continuité.
Tracer sur la même figure que $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de G.

X **5.89** Soit la fonction $f$ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \ln |x^2 - x - 2|$ pour $x$ élément de $\mathbb{R}_-$
$f(x) = -1 + \ln(x+2) + e^x$ pour $x$ élément de $\mathbb{R}_+^*$.

**1.** Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ sur son ensemble de définition.

**2.** Étudier les variations de $f$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**3.** Soit $g$ la restriction de $f$ à $]-\infty, -1[$.
Montrer que $g$ est bijective de $]-\infty, -1[$ vers un intervalle que l'on déterminera.
Calculer $g^{-1}(2)$.

## Discussion graphique d'équations

**5.90** **1.** Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$f : x \longmapsto y = \frac{x(x+1)}{x-2}.$$

**2.** Utiliser la courbe C représentant $f$ pour discuter, suivant les valeurs réelles du paramètre $m$, le nombre de racines de l'équation :

$$x^2 + (1-m)x + 2m = 0.$$

**3.** Utiliser la courbe C pour discuter également, suivant les valeurs de $m$, le nombre de racines de l'équation :

$$\cos 2u + 2(1-m)\cos u + 4m + 1 = 0$$

où l'inconnue $u$ appartient à $[0, 2\pi[$.

**4.** Trouver les points M de C dont les coordonnées sont des entiers relatifs (il sera commode d'écrire $y$ sous la forme $y = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$).

**5.91** **1.** Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$f : x \longmapsto \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

**2.** En déduire le nombre de racines de l'équation :

$$\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} = m,$$

l'inconnue étant le nombre réel $x$, le paramètre réel étant $m$.

**5.92** **1.** Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$f : x \longmapsto 8 \sin x - \tan x.$$

**2.** En déduire le nombre de racines de l'équation :

$$\frac{m}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 8,$$

l'inconnue étant un nombre réel $x$ de $[0, 2\pi[$, le paramètre réel étant $m$.

## Révision

**5.93** Dans ce problème on étudie la famille de fonctions $f_\lambda$ définies par :

$$f_\lambda(x) = 1 + \ln(1 + \lambda x)$$

où $\lambda$ est un nombre réel non nul.
La partie I est essentiellement consacrée à la recherche du nombre de points d'intersection de

la courbe représentative $\mathcal{C}_\lambda$ de $f_\lambda$, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, avec la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$. La partie II donne une méthode de calcul approché de l'abscisse de ces points dans le cas particulier où $\lambda = 1$.

• •

**A. 1.** Donner l'ensemble de définition de $f_\lambda$ (on distinguera les deux cas : $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$).

**2.** *a)* Existe-t-il un lien entre les deux courbes $\mathcal{C}_\lambda$ et $\mathcal{C}_{-\lambda}$ ?

*b)* Soit $\Gamma$ la représentation graphique de la fonction logarithme népérien. Trouver, lorsque $\lambda > 0$, une translation qui transforme $\Gamma$ en $\mathcal{C}_\lambda$.

**3.** On pose $\varphi_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x$.

*a)* On suppose $\lambda < 0$. Étudier les variations de $\varphi_\lambda$ ainsi que ses limites aux bornes du domaine de définition. En déduire le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}_\lambda$ et $\mathcal{D}$.

*b)* On suppose $\lambda > 0$. Étudier les variations de $\varphi_\lambda$ ainsi que ses limites aux bornes du domaine de définition (on pourra par exemple mettre $x$ en facteur dans l'expression de $\varphi_\lambda(x)$ pour déterminer la limite à l'infini). Établir que la plus grande valeur prise par $\varphi_\lambda(x)$, quand $x$ décrit le domaine de définition de $\varphi_\lambda$, est $m(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} + \ln \lambda$.

*c)* Étudier, quand $\lambda$ décrit $]0, +\infty[$, les variations de $m(\lambda)$; en déduire son signe.

*d)* Combien, lorsque $\lambda$ est positif, $\mathcal{C}_\lambda$ et $\mathcal{D}$ ont-elles de points communs?

**B.** Étude du cas particulier $\lambda = 1$.

**1.** *a)* Représenter graphiquement la courbe $\mathcal{C}_1$ et la droite $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$; on prendra comme unité 3 cm.

*b)* On appelle P et Q les points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{D}$. P est le point d'abscisse négative $p$, Q le point d'abscisse positive $q$. Démontrer que : $2 < q < 3$.

**2.** On se propose de calculer une valeur approchée de $q$. On définit la suite $u$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f_1(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

*a)* Représenter à l'aide de la courbe $\mathcal{C}_1$ les termes $u_0$, $u_1$, $u_2$ sur $(O, \vec{i})$.

*b)* Montrer que la suite $u$ est croissante et majorée par $q$.

*c)* Montrer, en utilisant par exemple l'inégalité des accroissements finis, que : $q - u_{n+1} \leqslant \dfrac{q - u_n}{3}$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

*d)* En déduire que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$,

$$q - u_n \leqslant \frac{q - u_0}{3^n}$$

et que la suite $u$ converge vers $q$.

*e)* Déterminer une valeur approchée de $q$ à $10^{-2}$ près en justifiant la méthode choisie.

(*Problème partiel. Bac. C. Dijon* 1985.)

**5.94** **A. 1.** A tout réel $x$, tel que $\cos x \neq 0$, on associe : $f(x) = -\ln|\cos x|$.

*a)* Étudier la fonction $f$ ainsi définie.

*b)* Construire la courbe représentative de $f$, notée $(\mathcal{C})$.

**2.** On note S l'ensemble des solutions, dans $\mathbb{R}$, de : $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 0$.

*a)* Résoudre cette équation.

*b)* On considère la fonction :

$$g : \mathbb{R} - S \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -\ln|\cos x + \sqrt{3} \sin x|.$$

Montrer que la courbe représentative $(\Gamma)$ de $g$ est l'image de $(\mathcal{C})$ par une translation.

**3.** On note $\tilde{f}$ la restriction de $f$ à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

*a)* Montrer que $\tilde{f}$ admet une fonction réciproque $\tilde{f}^{-1}$. Calculer $\tilde{f}^{-1}(\ln \sqrt{2})$.

*b)* Dessiner la courbe représentative de $\tilde{f}^{-1}$ notée (C).

**4.** Soit la suite $u$ définie par $u_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $u_n = f(u_{n-1})$.

*a)* Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\ell$ dans $\left]\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Donner un encadrement de $\ell$ dans un intervalle de longueur $10^{-2}$.

*b)* Montrer par récurrence que tous les termes de la suite $u$ appartiennent à $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Montrer que $u$ est décroissante. Montrer que $u$ est convergente et trouver sa limite.

**B. 1.** *a)* Résoudre dans $\mathbb{C}$ : $z^2 - 2z \cos \alpha + 1 = 0$ ($\alpha$ réel donné).

*b)* En déduire la forme trigonométrique des solutions de : $z^{2n} - 2z^n \cos \alpha + 1 = 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

**2.** On pose $P_n(z) = z^{2n} - 2z^n \cos \alpha + 1$ et on admet que :

$$P_n(z) = \left(z^2 - 2z \cos \frac{\alpha}{n} + 1\right) \times \dots \times$$
$$\left[z^2 - 2z \cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right] \times \dots \times$$
$$\left[z^2 - 2z \cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + 1\right]$$

que l'on note

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left[z^2 - 2z \cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right].$$

*a)* Calculer $P_n(1)$ et en déduire que

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}.$$

*b)* On pose : $(\forall \alpha \in [0, \pi[)$ $(\forall n \in \mathbb{N} - \{0; 1\})$
$H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\dfrac{\alpha}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)$.

Montrer que, pour $\alpha \neq 0$, $2^{n-1}H_n(\alpha) = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2n}}$.

Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque $\alpha$ tend vers 0? En déduire que :

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}, \dots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

*(Problème partiel. Bac. C. Paris 1984.)*

**5.95** Soit $f$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par la relation $f(x) = \dfrac{1-x}{3}e^x$.

On se propose d'étudier un algorithme d'approximation de la solution $a$ de l'équation $f(x) = x$.

1. Étude de $f$.

a) Étudier le sens de variation de $f$, et tracer l'allure de sa courbe représentative (unité graphique : 4 cm).

b) Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une solution $a$ et une seule appartenant à $[0, 1]$.

c) Déterminer l'image de $[0, 1]$ par $f$; en déduire que $a$ appartient à $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

2. On considère la suite $(u_n)$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = \frac{1}{3}$.

a) Prouver que, pour tout entier $n$, $u_n$ appartient à $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

b) Montrer que $u_1 \leq a$; en déduire que

$$|u_0 - a| \leq u_0 - u_1 \leq 2{,}5 \cdot 10^{-2}.$$

c) Établir par récurrence sur $p$, que pour tout $p$, $u_{2p+1} \leq a \leq u_{2p}$.

3. Convergence de $(u_n)$ vers $a$.

a) Démontrer que, pour tout élément $x$ de $\left[0, \frac{1}{3}\right]$

$$-0{,}16 \leq f'(x) \leq 0;$$

en déduire que

$$|f(x) - f(a)| \leq 0{,}16\,|x - a|.$$

b) Prouver que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$|u_n - a| \leq (0{,}16)^n\,|u_0 - a|;$$

en déduire que $(u_n)$ converge vers $a$.

c) Calculer une valeur décimale approchée de $a$ à la précision $10^{-3}$.
Déterminer un entier $p$ tel que $|u_p - a| \leq 10^{-12}$ (on ne demande pas de calculer $u_p$).

*(Problème Bac. C. Groupe I 1985.)*

**5.96** **A. 1.** Variations et représentation graphique (C) de $f : x \longmapsto \ln\left|\dfrac{x}{x-2}\right|$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**2.** Montrer que (C) admet un centre de symétrie.

**B.** Soit $g$ la restriction de $f$ à $]0, 2[$.

**1.** Établir que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$. Calculer $g^{-1}(x)$.

**2.** Déterminer $g^{-1} \circ f$ et construire sa courbe représentative.

**C.** A tout réel $a > 0$, on associe

$$g_a : x \longmapsto \ln\frac{a+1-x}{a(x+1-a)} \text{ sur } ]a-1, a+1[.$$

**1.** Étudier les variations de $g_a$.

**2.** On considère le point $I_a$ $(a-1, -\ln a)$. Écrire une équation de la courbe $(\Gamma_a)$ représentant $g_a$ en prenant pour repère $(I_a, \vec{i}, \vec{j})$.

**3.** Établir que $(\Gamma_a)$ est l'image de la représentation graphique de $g$ par une application $t \circ s$ où $s$ est une symétrie axiale et $t$ une translation.

**4.** En déduire la construction de la courbe $(\Gamma_e)$, $e$ étant la base des logarithmes népériens.

# 6 CALCUL INTÉGRAL

## 6.1 RAPPELS ET NOUVELLES NOTATIONS

### a) Introduction

Nous avons vu au § 3.1 que toute fonction $f$ *continue* sur un intervalle I admet une infinité de primitives c'est-à-dire des fonctions admettant pour dérivée $f$ sur I.

Si l'une des primitives est F, toutes les primitives de $f$ sur I sont les fonctions $F+C$ où C est une constante réelle arbitraire.

Il en existe une seule qui prend une valeur arbitraire donnée en un point donné de I.

Nous avons donné au § 3.2 b une interprétation géométrique de la notion de primitive liée à la *notion d'aire*. Nous y reviendrons au § 6.1.c.

### b) Intégrale d'une fonction continue

Soit F et $G=F+C$ deux primitives de $f$ sur I. Quels que soient les réels $a$ et $b$ de I :

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= (F(b)+C)-(F(a)+C) \\ &= G(b)-G(a). \end{aligned}$$

Donc **le nombre $F(b)-F(a)$ est indépendant du choix de la primitive.**

**Définition**

**Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de $f$ sur I.**
**Soit $a$ et $b$ deux éléments quelconques de I.**
**Le nombre $F(b)-F(a)$ s'écrit $\int_a^b f(t)\,dt$ et s'appelle l'intégrale, de $a$ à $b$, de $f$. On le note aussi $[F(t)]_a^b$.**

Les nombres $a$ et $b$ sont les **bornes** de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$.

Si au lieu de $b$, on considère $x$ qui décrit I, on définit sur I une fonction :

$$x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a) = [\mathrm{F}(t)]_a^x$$

qui est la primitive de $f$ qui s'annule pour $x = a$.

EXEMPLE Prenons $\mathrm{I} = ]0, +\infty[$, pour tout $x$ de I;

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln x$$

$\left(\text{pour simplifier, on écrira } \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \text{ au lieu de } \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right)$.

### c) Interprétation géométrique

Nous allons donner une interprétation géométrique des primitives analogue à celle qui a été donnée au sous-paragraphe 3.2 b sur la fonction logarithme népérien.

Supposons le plan rapporté à un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$. On dit qu'une partie du plan est ***quarrable*** si on peut lui associer un nombre positif appelé aire de cette partie et possédant les propriétés suivantes :

1. Nous admettons que, si $\Delta$ et $\Delta'$ sont deux parties quarrables quelconques du plan, alors $\Delta \cup \Delta'$ et la différence $\Delta - \Delta'$ (ensemble des points du plan appartenant à $\Delta$ sans appartenir à $\Delta'$) sont quarrables.
Il en résulte que $\Delta \cap \Delta' = \Delta - (\Delta - \Delta')$ et $\varnothing = \Delta - \Delta$ sont quarrables.

2. Nous admettons que, si $\Delta$ et $\Delta'$ sont deux parties quarrables *disjointes* quelconques,

$$\text{aire}(\Delta \cup \Delta') = \text{aire}(\Delta) + \text{aire}(\Delta').$$

On démontre alors que, quelles que soient les parties quarrables $\Delta$ et $\Delta'$ du plan,

$$\text{aire}(\Delta \cup \Delta') = \text{aire}(\Delta) + \text{aire}(\Delta') - \text{aire}(\Delta \cap \Delta')$$
$$\Delta' \subset \Delta \Longrightarrow \text{aire}(\Delta') \leqslant \text{aire}(\Delta).$$

3. Soit $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OJ}} = \vec{j}$, l'unité d'aires étant l'aire du rectangle dont trois sommets sont O, I, J, nous admettons que l'aire d'un rectangle quelconque est le produit des longueurs de deux de ses côtés non parallèles.

4. Nous admettons enfin que l'aire d'un segment de droite est nulle.

Soit $f$ une fonction continue et positive sur $[a, b]$ $(a < b)$. Appelons $\Gamma$ la représentation graphique de $f$ dans un plan rapporté à un repère orthogonal. Soit $\Delta$ la partie du plan limitée par $\Gamma$, O$x$ et les parallèles à O$y$ et passant respectivement par $\mathrm{A}(a, f(a))$ et $\mathrm{B}(b, f(b))$. La partie $\Delta$ est l'ensemble des points de coordonnées $x$ et $y$ vérifiant le système d'inégalités :

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$$

Montrons que $\Delta$ est quarrable. Pour cela, nous cherchons à associer à $\Delta$ un réel positif qui sera son aire.

Considérons, de même, la partie $\Delta_x$ limitée par $\Gamma$, $Ox$ et les parallèles à $Oy$ et passant respectivement par $A(a, f(a))$ et $P(x, f(x))$. La partie $\Delta_x$ est hachurée dans les figures 1 et 2. Soit l'application

$$\mathcal{A} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto \mathcal{A}(x),$$

$\mathcal{A}(x)$ étant l'aire attribuée à la partie $\Delta_x$.

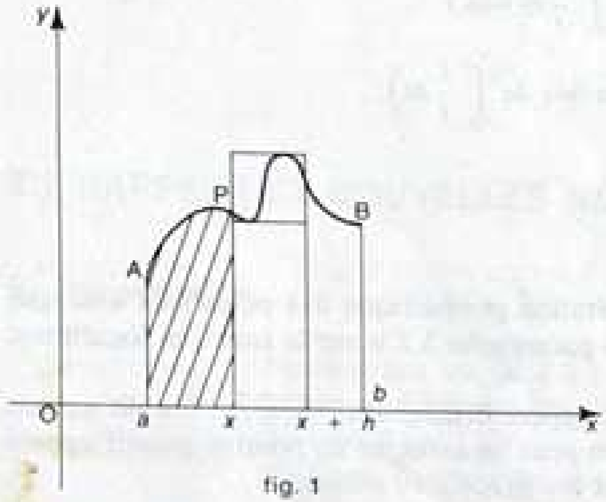



fig. 1

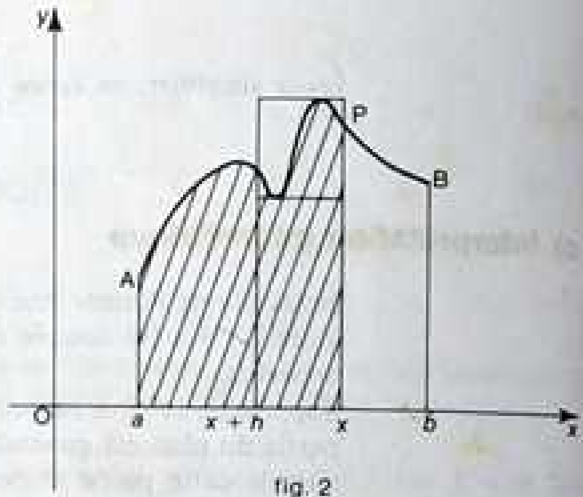



fig. 2

• Si $h>0$ et $a \leqslant x+h \leqslant b$ (fig. 1) désignons par $m(h)$ et par $M(h)$ respectivement la plus petite valeur et la plus grande valeur de $f$ sur $[x, x+h]$.
$\mathcal{A}(x+h)-\mathcal{A}(x)$ est comprise entre les aires de deux rectangles : $m(h)\times h$ et $M(h)\times h$ :

$$m(h)\times h \leqslant \mathcal{A}(x+h)-\mathcal{A}(x) \leqslant M(h)\times h$$

d'où
$$m(h) \leqslant \frac{\mathcal{A}(x+h)-\mathcal{A}(x)}{h} \leqslant M(h). \qquad (1)$$

• Si $h<0$ et $a \leqslant x+h \leqslant b$ (fig. 2), on a de même :

$$m(h)\times(-h) \leqslant \mathcal{A}(x)-\mathcal{A}(x+h) \leqslant M(h)\times(-h)$$

où $m(h)$ et $M(h)$ sont encore la plus petite valeur et la plus grande valeur de $f$ sur $[x, x+h]$, d'où

$$m(h) \leqslant \frac{\mathcal{A}(x)-\mathcal{A}(x+h)}{-h} \leqslant M(h)$$
$$m(h) \leqslant \frac{\mathcal{A}(x+h)-\mathcal{A}(x)}{h} \leqslant M(h)$$

nous avons encore les inégalités (1).

• $\lim\limits_{h\to 0} m(h) = \lim\limits_{h\to 0} M(h) = f(x)$

donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathcal{A}(x+h)-\mathcal{A}(x)}{h} = f(x)$ ce qui signifie que $\mathcal{A}'(x) = f(x)$.

Autrement dit $\mathcal{A}$ est une primitive sur $[a, b]$ de $f$. Cette primitive s'annule pour $x = a$ donc :

$$\mathcal{A}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et l'aire de $\Delta$ est :

$$\mathcal{A}(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Théorème**

> **Si $f$ est une fonction continue et positive sur $[a, b]$ $(a < b)$, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire de la partie du plan, rapporté à un repère orthogonal, définie par :**
>
> $$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$$

## 6.2 PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES

### a) Relation de Chasles

Soit $f$ une fonction continue sur I et F une primitive de $f$ sur I.

$$(\forall (a, b, c) \in \mathrm{I}^3) \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$
$$= \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(c) + \mathrm{F}(c) - \mathrm{F}(a)$$
$$= \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Théorème**

> **Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle I. Quels que soient $a$, $b$, $c$ de I, on a :**
>
> $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Graphiquement, si $a \leq c \leq b$ et si $f$ est continue et positive sur I, l'aire de la partie définie par

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

et la somme des aires des parties définies par (fig. 3) :

$$\begin{cases} a \leq x \leq c \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} c \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

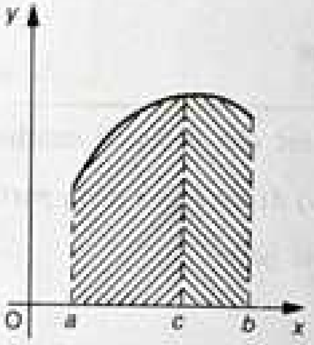


fig. 3

**REMARQUE** $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt = F(c) - F(a)$

$$= -(F(a) - F(c))$$

$$= -\int_c^a f(t)\,dt$$

la relation de Chasles peut s'écrire :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_c^b f(t)\,dt - \int_c^a f(t)\,dt.$$

## b) Linéarité

• Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a, b]$, $f+g$ est aussi continue sur $[a, b]$ et si F et G sont des primitives respectivement de $f$ et $g$ sur $[a, b]$, F+G est une primitive de $f+g$ sur $[a, b]$ puisque :

$$(F+G)' = F' + G' = f + g.$$

On peut écrire :

$$\int_a^b [f(t) + g(t)]\,dt = [F(t) + G(t)]_a^b$$

$$= (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a))$$

$$= (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a))$$

$$\boxed{\int_a^b [f(t) + g(t)]\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt}$$

• Si $\lambda$ un réel quelconque, si $f$ est continue sur $[a, b]$, $\lambda f$ est aussi continue sur $[a, b]$ et si F est une primitive de $f$ sur $[a, b]$, $\lambda$F est une primitive de $\lambda f$ sur $[a, b]$ et l'on peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_a^b [\lambda f(t)]\,dt &= [\lambda F(t)]_a^b \\ &= \lambda F(b) - \lambda F(a) \\ &= \lambda(F(b) - F(a))\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_a^b [\lambda f(t)]\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt}$$

## c) Inégalités

• Supposons $a<b$ et $f$ continue et *positive* sur $[a, b]$. Appelons F la primitive de $f$ sur $[a, b]$ qui s'annule en $a$. Pour tout $x$ de $[a, b]$ :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$F'(x) = f(x) \geqslant 0$$

donc F est croissante sur $[a, b]$ d'où :

$$F(a) \leqslant F(b)$$

$$F(b) - F(a) \geqslant 0$$

$$\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0.$$

Concluons :
Pour toute fonction $f$ continue sur $[a, b]$ $(a<b)$ :

$$\boxed{(f \geqslant 0 \text{ sur } [a, b]) \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0}$$

• Supposons $f$ et $g$ continues et $f \leqslant g$ sur $[a, b]$ $(a<b)$. On a :

$$g - f \geqslant 0$$

$$\int_a^b [g(t) - f(t)]\,dt \geqslant 0$$

$$\int_a^b g(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$$

$$\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt.$$

$$\boxed{(f \leqslant g \text{ sur } [a, b]) \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt}$$

Donc, pour toutes fonctions $f$ et $g$ continues sur $[a, b]$ $(a<b)$ :

Graphiquement si l'on suppose, de plus, $f$ et $g$ positive sur $[a, b]$, l'aire de la partie définie par (fig. 4) :

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

est inférieure à l'aire de la partie définie par :

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant g(x). \end{cases}$$

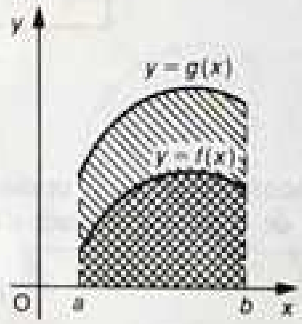


fig. 4

• Supposons $f$ continue et $m \leqslant f \leqslant M$ sur $[a, b]$ $(a<b)$ :

$$\int_a^b m \, dt \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant \int_a^b M \, dt$$

des primitives de : $x \longmapsto m$ et de : $x \longmapsto M$ sur $[a, b]$ sont respectivement : $x \longmapsto mx$ et : $x \longmapsto Mx$. D'où :

$$[mt]_a^b \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant [Mt]_a^b$$

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant M(b-a).$$

Ces inégalités peuvent aussi se déduire des inégalités relatives aux accroissements finis (cf. § 4.5). Rappelons que, si $f$ est une fonction dérivable sur $[a, b]$ $(a<b)$ :

si $m \leqslant f' \leqslant M$ sur $[a, b]$, alors $m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$;
si $|f'| \leqslant M$ sur $[a, b]$, alors $|f(b)-f(a)| \leqslant M(b-a)$.

Dans ces inégalités, remplaçons $f$ par $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\, dt$, on déduit :

Pour toute fonction $f$ continue sur $[a, b]$ $(a<b)$ :

$$m \leqslant f \leqslant M \text{ sur } [a, b] \implies m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant M(b-a)$$

$$|f| \leqslant M \text{ sur } [a, b] \implies \left|\int_a^b f(t)\, dt\right| \leqslant M(b-a)$$

Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ est appelé la **valeur moyenne** ou plus simplement la **moyenne** de $f$ sur $[a, b]$. Ce nombre est compris entre $m$ et M.

Si $m$ et M sont la plus petite et la plus grande valeur de $f$ sur $[a, b]$, on sait que $f([a, b])=[m, \mathrm{M}]$. Ce qui signifie que tout nombre de $[m, \mathrm{M}]$, donc en particulier la moyenne de $f$, admet au moins un antécédent $c$ appartenant à $[a, b]$. Donc :
Pour toute fonction $f$ continue sur $[a, b]$ $(a<b)$ :

$$\boxed{(\exists c\in[a, b])\quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt=f(c)}$$

Cela signifie que :
**la valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment est prise par cette fonction en un point au moins du segment.**

## d) Intégrale d'une fonction continue et paire

Soit $f$ une fonction continue et paire sur $[-a, a]$ $(a>0)$.
Pour tout $x$ de $[-a, a]$, on peut écrire :

$$\mathrm{I}=\int_{-x}^{x} f(t)\,dt=\int_{-x}^{0} f(t)\,dt+\int_0^x f(t)\,dt.$$

Comparons les intégrales $\mathrm{F}(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ et $\mathrm{G}(x)=\int_{-x}^{0} f(t)\,dt$.

Nous avons $\mathrm{F}'(x)=f(x)$ et

$$\mathrm{G}(x)=[\mathrm{F}(t)]_{-x}^{0}=\mathrm{F}(0)-\mathrm{F}(-x)$$

$$\mathrm{G}'(x)=-\mathrm{F}'(-x)\times(-1)=f(-x)=f(x) \qquad \text{(puisque } f \text{ est paire)}$$

donc $\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(x)+\mathrm{C}$

mais $\mathrm{G}(0)=\mathrm{F}(0)=0$ donc $\mathrm{C}=0$ d'où :

$$\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(x)$$

$$\int_{-x}^{0} f(t)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt$$

$$\mathrm{I}=2\int_0^x f(t)\,dt$$

pour $x=a$ :

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=2\int_0^a f(t)\,dt}$$

Si l'on suppose $f$ positive sur $[-a, a]$ les aires des parties définies par :

$$\begin{cases} -a \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

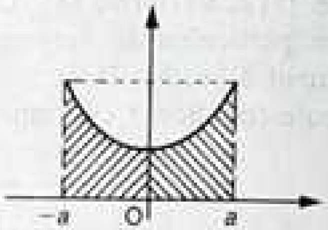



fig. 5

### e) Intégrale d'une fonction continue et impaire

Soit $f$ une fonction continue et impaire sur $[-a, a]$ $(a > 0)$. Avec les notations précédentes, vous verrez que :
$G(x) = -F(x)$ d'où $I = 0$ et pour $x = a$ :

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0}$$

Les aires des parties définies par :

$$\begin{cases} -a \leq x \leq 0 \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

sont opposées (on suppose $f$ positive sur $[0, a]$ et on convient d'affecter du signe − l'aire de la partie au-dessous de $Ox$) (fig. 6).

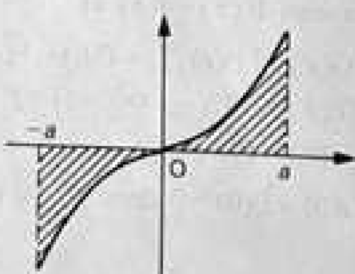



fig. 6

### f) Intégrale d'une fonction continue et périodique

Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de période P.
Pour tout $x$ réel, on peut écrire :

$$I = \int_{x}^{x+P} f(t)\,dt = \int_{x}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{P} f(t)\,dt + \int_{P}^{x+P} f(t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{P} f(t)\,dt - \int_{0}^{x} f(t)\,dt + \int_{P}^{x+P} f(t)\,dt.$$

Comparons les intégrales $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ et $G(x)=\int_P^{x+P} f(t)\,dt$.

Nous avons $F'(x)=f(x)$ et

$$G(x)=[F(t)]_P^{x+P}=F(x+P)-F(P)$$

$G'(x)=F'(x+P)=f(x+P)=f(x)$ (puisque P est une période de $f$)

donc

$$G(x)=F(x)+C$$

mais $G(0)=F(0)=0$ donc $C=0$ d'où :

$$G(x)=F(x)$$

$$\int_P^{x+P} f(t)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt$$

$$I=\int_0^P f(t)\,dt$$

pour $x=a$ :

$$\boxed{\int_a^{a+P} f(t)\,dt=\int_0^P f(t)\,dt}$$

*l'intégrale est indépendante du choix de a.*

Graphiquement, si l'on suppose $f$ positive sur $\mathbb{R}$ et $a \geqslant 0$, les aires des parties définies par :

$$\begin{cases}0 \leqslant x \leqslant a\\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}P \leqslant x \leqslant a+P\\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\end{cases}$$

sont égales (fig. 7).

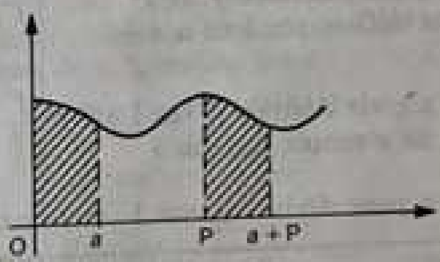



fig. 7

## 6.3 CALCUL DE PRIMITIVES ET D'INTÉGRALES

### a) Primitives usuelles. Exercices résolus

Des formules sur les dérivées, on déduit les formules sur les primitives suivantes, C désignant une constante réelle arbitraire. On vérifiera que les fonctions figurant dans la troisième colonne ont pour fonctions dérivées celles figurant dans la deuxième colonne, dans les conditions indiquées dans la première colonne.

| | Fonction | Primitives |
|---|---|---|
| sur $\mathbb{R}$ | $0$ | $C$ |
| sur $\mathbb{R}$ | $a$ (constante) | $ax+C$ |
| sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ ; sur $\mathbb{R}^*$ si $\alpha$ entier $<-1$ ; sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in (\mathbb{R}-\mathbb{Z})$ | $x^\alpha$ | $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ |
| sur $\mathbb{R}^*$ | $\dfrac{1}{x}$ | $\ln\|x\|+C$ |
| sur $\mathbb{R}$ si $a \neq 0$ | $\cos(ax+b)$ | $\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)+C$ |
| sur $\mathbb{R}$ si $a \neq 0$ | $\sin(ax+b)$ | $-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)+C$ |
| sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$ | $\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ | $\tan x+C$ |
| sur $]k\pi, \pi+k\pi[$ $(k \in \mathbb{Z})$ | $\dfrac{1}{\sin^2 x}=1+\text{cotan}^2 x$ | $-\text{cotan}\, x+C$ |
| $f$ et $g$ ont pour primitives F et G sur un intervalle I | $f+g$ | $F+G+C$ |
| $\lambda$ réel donné, $f$ a pour primitive F sur I | $\lambda f$ | $\lambda F+C$ |
| $f$ et $g$ ont pour dérivées $f'$ et $g'$ sur I | $f'g+fg'$ | $fg+C$ |
| $f$ et $g$ ont pour dérivées $f'$ et $g'$ sur I et $g$ ne s'annule pas sur I | $\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$ | $\dfrac{f}{g}+C$ |
| $f$ a pour dérivée $f'$ et $f^\alpha$ est définie sur I et $\alpha \neq -1$ | $f^\alpha f'$ | $\dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ |
| $f$ a pour dérivée $f'$ sur I et $f$ ne s'annule pas sur I | $\dfrac{f'}{f}$ | $\ln\|f\|+C$ |
| $f$ a pour dérivée $f'$ sur I | $\exp f \times f'$ | $\exp f+C$ |

Nous avons déjà appris (aux exercices 4.43 à 4.56 de ce livre) à reconnaître, dans la recherche des primitives, des dérivées figurant dans la deuxième colonne du tableau précédent.

Nous en donnerons d'autres exemples.

En outre le calcul de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ se déduit du calcul d'une primitive puisque, si F est une primitive de $f$ sur $[a, b]$, $\int_a^b f(t)\,dt=[F(t)]_a^b$.

**EXEMPLE 1** Calculons $I = \int_0^{\pi} (\cos t - t \sin t) dt$.

On reconnaît que, quel que soit $t$ réel,

$$\cos t - t \sin t = 1 \times \cos t + t(-\sin t)$$
$$= f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

avec $f(t) = t$ et $g(t) = \cos t$, donc une primitive de : $t \longmapsto \cos t - t \sin t$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$t \longmapsto f(t)g(t) = t \cos t.$$

D'où :

$$I = [t \cos t]_0^{\pi} = -\pi.$$

**EXEMPLE 2** Calculons la primitive de : $x \longmapsto x\sqrt{1-x^2}$ définie sur $[-1, 1]$ et qui s'annule pour $x = 1$. La primitive cherchée est la fonction : $x \longmapsto \int_1^x t\sqrt{1-t^2}\, dt$ définie sur $[-1, 1]$. On reconnaît que, quel que soit $t$ de $[-1, 1]$,

$$t\sqrt{1-t^2} = -\frac{1}{2}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}(-2t) = -\frac{1}{2}[f(t)]^{\frac{1}{2}} f'(t)$$

avec $f(t) = 1 - t^2$, donc une primitive de : $t \longmapsto t\sqrt{1-t^2}$ sur $[-1, 1]$ est :

$$t \longmapsto -\frac{1}{2}\frac{[f(t)]^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}.$$

La primitive cherchée est :

$$x \longmapsto \left[-\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_1^x = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

**EXEMPLE 3** Calculons $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\, dt$.

Cherchons à *linéariser* $\sin^4 t$ c'est-à-dire à transformer $\sin^4 t$ en une somme de sinus ou de cosinus de multiples de $t$. Rappelons que :

$$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$$

d'où :

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \quad (1)$$

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}. \quad (2)$$

D'après (2) :

$$\sin^4 t = \left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t).$$

D'après (1), en remplaçant $t$ par $2t$ :

$$\sin^4 t = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2}\right) = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2t + \cos 4t).$$

D'où

$$I = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 - 4\cos 2t + \cos 4t) dt$$

$$I = \frac{1}{8}\left[3t - 2\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}.$$

**EXEMPLE 4** Calculons $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 t \sin t - \sin^3 t)\,dt$.

Au lieu de linéariser $f(t) = \cos^3 t \sin t - \sin^3 t$, cherchons à mettre $f$ sous la forme d'une *somme de fonctions de primitives connues* :

$$f(t) = \cos^3 t \sin t - (1 - \cos^2 t)\sin t$$
$$= \cos^3 t \sin t - \sin t + \cos^2 t \sin t.$$

Ce qui montre que $f$ est la somme de trois fonctions de primitives connues, sur $\mathbb{R}$ :

$t \longmapsto \cos^3 t \sin t$ a pour primitive : $t \longmapsto -\frac{1}{4}\cos^4 t$

$t \longmapsto -\sin t$ a pour primitive : $t \longmapsto \cos t$

$t \longmapsto \cos^2 t \sin t$ a pour primitive : $t \longmapsto -\frac{1}{3}\cos^3 t$.

D'où $I = \left[-\frac{1}{4}\cos^4 t + \cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{12}$.

## b) Intégration par parties

Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur $[a, b]$. On sait que l'on a sur $[a, b]$ :

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Puisque $f$ et $g$ sont dérivables sur $[a, b]$, elles sont continues sur $[a, b]$. Supposons $f'$ et $g'$ également continues sur $[a, b]$, alors $f'g$, $fg'$, $f'g + fg' = (fg)'$ sont continues sur $[a, b]$ et admettent des intégrales de $a$ à $b$. On a :

$$\int_a^b (fg)'(t)\,dt = \int_a^b f'(t)g(t)\,dt + \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$$
$$[f(t)g(t)]_a^b = \int_a^b f'(t)g(t)\,dt + \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$$

ce qui permet de ramener le calcul de l'une des intégrales du second membre à celui de l'autre intégrale, s'il est plus simple. Cette méthode de calcul s'appelle une **intégration par parties.** On peut énoncer :

**Théorème**

> **Si $f$ et $g$ admettent des *dérivées continues* sur $[a, b]$, alors :**
>
> $$\int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt = [f(t)\,g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt.$$

**EXEMPLE** Calculons $I_1 = \int_0^1 te^t\,dt$.

Cette intégrale est de la forme $\int_0^1 f(t)g'(t)\,dt$ avec $f(t) = t$ et $g'(t) = e^t$.

Les dérivées $f'$ et $g'$ sont continues sur $[0, 1]$ donc on peut appliquer le théorème précédent. Nous avons : $f'(t) = 1$ et $g(t) = e^t$ et

$$I = [te^t]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^t\,dt = [te^t]_0^1 - [e^t]_0^1$$
$$I_1 = e - (e - 1) = 1.$$

REMARQUES

1. $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \int_0^x te^t \, dt = [te^t]_0^x - [e^t]_0^x$

$$= xe^x - (e^x - 1)$$
$$= xe^x - e^x + 1$$

donc les primitives de : $x \longmapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \longmapsto xe^x - e^x + C$, C étant une constante réelle arbitraire.

2. En faisant une intégration par parties, nous avons calculé $I_1 = \int_0^1 te^t \, dt$ en fonction de $I_0 = \int_0^1 e^t \, dt$. Plus généralement si l'on pose :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad I_n = \int_0^1 t^n e^t \, dt,$$

une intégration par parties donne une *relation de récurrence* entre $I_{n+1}$ et $I_n$ :

$$I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} e^t \, dt$$

choisissons : $f(t) = t^{n+1}$; $g'(t) = e^t$

d'où : $f'(t) = (n+1)t^n$, $g(t) = e^t$

la formule d'intégration par parties nous donne :

$$I_{n+1} = [t^{n+1}e^t]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n e^t \, dt$$
$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$

## 6.4 CALCUL D'AIRES

Nous allons utiliser l'interprétation géométrique d'une intégrale donnée au § 6.1.c pour calculer des aires planes. Nous supposerons le repère orthogonal.

*Dans tous les calculs, l'unité d'aire est l'aire du carré ou rectangle dont les côtés ont pour longueurs les unités de longueurs choisies sur les axes de coordonnées.*

EXEMPLE 1 *Aire d'un trapèze*

On suppose $h > 0$ et $0 < x_0 \leq x_1 < a$. Calculons l'aire du trapèze ABCD de sommets $A(x_0, h)$, $B(0, 0)$, $C(a, 0)$, $D(x_1, h)$.

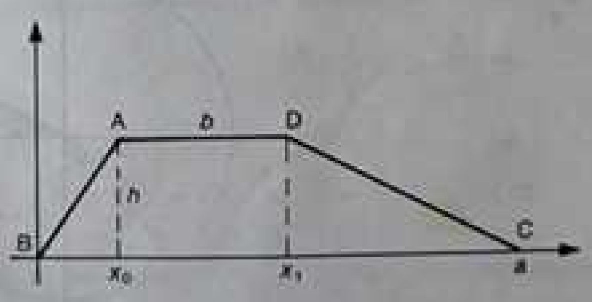



fig. 8

Équation de la droite (AB) : $y = \frac{h}{x_0} x$.

Équation de la droite (AD) : $y = h$.

Équation de la droite (CD) :

$$\begin{aligned} M(x, y) \in (CD) &\Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a & x_1-a \\ y & h \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow h(x-a) - y(x_1-a) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{h(x-a)}{x_1-a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{aire}(ABCD) &= \int_0^{x_0} \frac{h}{x_0} t\, dt + \int_{x_0}^{x_1} h\, dt + \int_{x_1}^{a} \frac{h(t-a)}{x_1-a} dt \\ &= \frac{h}{x_0}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{x_0} + h[t]_{x_0}^{x_1} + \frac{h}{x_1-a}\left[\frac{(t-a)^2}{2}\right]_{x_1}^{a} \\ &= \frac{hx_0}{2} + h(x_1 - x_0) + \frac{h(a-x_1)}{2} \\ &= \frac{h(a + x_1 - x_0)}{2} \end{aligned}$$

posons $x_1 - x_0 = b$, $a$ et $b$ sont les longueurs des bases du trapèze :

$$\boxed{\textbf{aire (ABCD)} = \frac{a+b}{2} h}$$

Si $x_0 = x_1$ c'est-à-dire si $b = 0$, on obtient l'aire du triangle ABC : $\frac{ah}{2}$.

**EXEMPLE 2** *Aire d'un secteur de disque*

Soit un cercle de centre O et de rayon R, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ son équation cartésienne est : $x^2 + y^2 = R^2$ ce qui est équivalent à :

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{ou} \quad y = -\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Soit $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $M(R\cos\theta, R\sin\theta)$. Calculons l'aire du secteur d'angle $\theta$ (fig. 9).

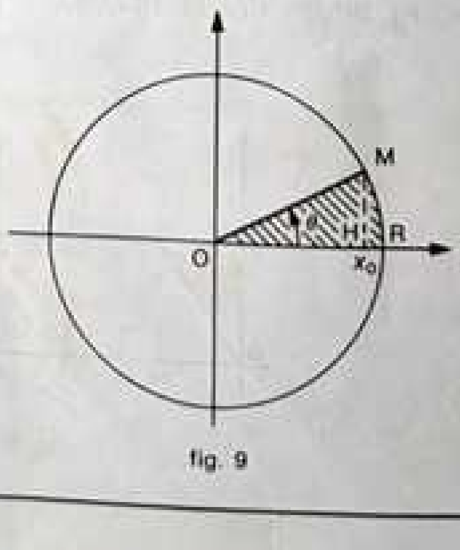



fig. 9

Considérons le point H projection orthogonale de M sur l'axe Ox. L'aire du secteur est la somme de :

- l'aire du triangle OHM : $\dfrac{OH \times HM}{2} = \dfrac{R\cos\theta \times R\sin\theta}{2} = \dfrac{1}{4}R^2\sin 2\theta$

- l'aire de la partie du plan définie par

$$\begin{cases} R\cos\theta \leqslant x \leqslant R \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2}, \end{cases}$$

cette dernière aire est

$$I = \int_{R\cos\theta}^{R} \sqrt{R^2 - t^2}\,dt$$

$I = [F(t)]_{R\cos\theta}^{R}$, F étant une primitive de $t \longmapsto \sqrt{R^2 - t^2}$ sur $[R\cos\theta, R]$.
On peut simplifier le calcul de I en posant $t = R\cos u$.
$t$ prend les valeurs $R\cos\theta$ et R lorsque $u$ prend respectivement les valeurs $\theta$ et 0 et l'on peut écrire :

$$I = [F(R\cos u)]_{\theta}^{0} = [\Phi(u)]_{\theta}^{0},$$

la fonction $\Phi : u \longmapsto F(R\cos u)$ étant dérivable sur $[0, \theta]$.

$$\begin{aligned} \Phi'(u) &= F'(R\cos u) \times (-R\sin u) \\ &= \sqrt{R^2 - R^2\cos^2 u} \times (-R\sin u) \\ &= -R^2\sin^2 u \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} I &= -R^2\int_{\theta}^{0}\sin^2 u\,du = R^2\int_{0}^{\theta}\sin^2 u\,du \\ &= R^2\int_{0}^{\theta}\frac{1-\cos 2u}{2}\,du = R^2\left[\frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4}\right]_{0}^{\theta} \\ &= R^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right). \end{aligned}$$

L'aire du secteur d'angle $\theta$ est donc

$$\frac{1}{4}R^2\sin 2\theta + R^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right) = \boxed{\frac{R^2\theta}{2}}$$

En particulier l'aire du secteur d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est $\dfrac{R^2\pi}{4}$ et l'aire du disque entier est

$$4\left(\frac{R^2\pi}{4}\right) = \boxed{\pi R^2}$$

**EXEMPLE 3** Soit la fonction $f : x \longmapsto y = \sin^2 x$ définie sur $\mathbb{R}$. On peut écrire

$$y = \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

et en posant

$$\begin{cases} 2x = X \\ y - \dfrac{1}{2} = Y, \end{cases}$$

on a $Y = -\dfrac{1}{2}\cos X$, ce qui montre que la représentation graphique de $f$ est une sinusoïde représentée à la figure 10. Calculons l'aire de la partie hachurée Δ ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \sin^2 x. \end{cases}$$

$$\text{aire }(\Delta) = \int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} \, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} dt - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos 2t \, dt$$

$$= \left[\frac{t}{2}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

On peut remarquer que aire $(\Delta)$ est égale à l'aire du rectangle OABC (fig. 10).

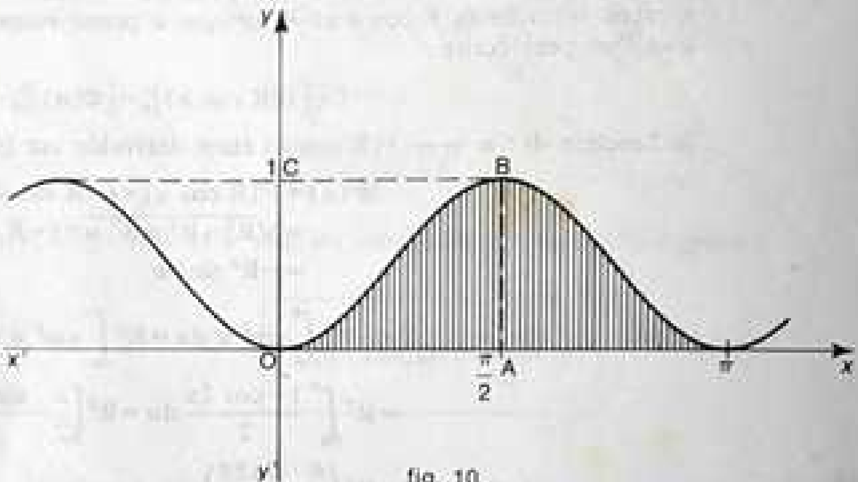



fig. 10

**EXEMPLE 4** Soit la fonction $f : x \longmapsto 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

On peut écrire pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = 2x + 1 + x^{-2}$$

$$f'(x) = 2 - 2x^{-3} = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3-1)}{x^3} = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$$

le trinôme $x^2 + x + 1$ est du signe du coefficient de $x^2$ donc strictement positif quel que soit $x$ car le discriminant est $-3 < 0$. D'où le tableau de variations dans lequel on a mis les limites remarquables :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

On vérifiera que la droite D d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote à la représentation graphique de $f$ (fig. 11, page suivante). Calculons l'aire de la partie $\Delta$ définie par :

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 2x + 1 \leq y \leq 2x + 1 + \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

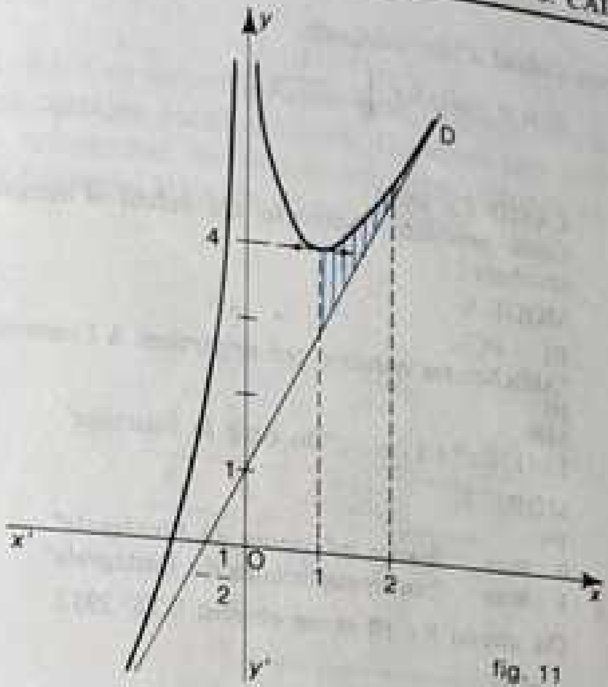



fig. 11

appelons $\Delta_1$ la partie définie par :

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2x + 1 + \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

et $\Delta_2$ la partie définie par

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2x + 1, \end{cases}$$

on a :

$$\Delta_1 = \Delta \cup \Delta_2$$

donc

$$\text{aire}\,(\Delta_1) = \text{aire}\,(\Delta) + \text{aire}\,(\Delta_2) - \text{aire}\,(\Delta \cap \Delta_2)$$

mais $\Delta \cap \Delta_2$ est le segment de droite définie par

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

dont l'aire est nulle (cf. § 6.1 c) donc :

$$\text{aire}\,(\Delta_1) = \text{aire}\,(\Delta) + \text{aire}\,(\Delta_2)$$

l'aire cherchée est

$$\text{aire}\,(\Delta) = \text{aire}\,(\Delta_1) - \text{aire}\,(\Delta_2) = \int_1^2 \left(2t + 1 + \frac{1}{t^2}\right) dt - \int_1^2 (2t+1)\, dt$$

$$= \int_1^2 \left[\left(2t + 1 + \frac{1}{t^2}\right) - (2t+1)\right] dt$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{t^2}\, dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = \frac{1}{2}.$$

**Aire négative**

Nous avons donné une interprétation géométrique (cf. § 6.1 c) de $\int_a^b f(t)\, dt$ lorsque $f$ est continue et positive sur $[a, b]$ $(a < b)$.
Si $a > b$ ou si $f$ est continue et négative sur $[a, b]$, on se ramène au cas précédent. Par exemple si $a < b$ et si $f$ est continue et négative sur $[a, b]$ : $\int_a^b f(t)\, dt = -\int_a^b (-f(t))\, dt$ qui est une «aire négative».

**Travaux pratiques** *Calcul d'une intégrale.*

*Soit à calculer* $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

**CASIO FX 180P**

Cette machine comporte un calcul d'intégrale automatique qui donne de bons résultats :

MODE 0

P1 PCL

"Afficher un nombre qui appartient à l'ensemble de définition de la fonction", puis

P1

Min

$1 \div (\text{MR}x^2 + 1) =$ "On écrit la fonction"

MODE 1

P1

0 Run "borne inférieure de l'intégrale"

1 Run "borne supérieure de l'intégrale"

On attend 8 s 10 et on obtient 0,785 398 2

**CASIO EX 7000G**

Cette machine ne comporte pas de calcul d'intégrales. Nous allons programmer la "formule des rectangles" (cf. exercice **6.64**) et remplacer $\int_a^b f(x)\,dx$ par

$$\frac{b-a}{n}\left(f(a)+f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)+\ldots+f\left(a+(n-1)\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

```
"BORNE INF" : ? ⟶ A            exe
"BORNE SUP" : ? ⟶ B            exe
"NB DIV" : ? ⟶ N               exe
0 ⟶ S                          exe
(B − A)÷N ⟶ P                  exe
A ⟶ X                          exe
Lbl1 :1÷(1 + X²) ⟶ Y           exe
S + Y*P ⟶ S                    exe
X + P ⟶ X                      exe
X<B ⟹ GOTO 1                   exe
S
```

MODE 1

On appelle le programme 1. La méthode de calcul n'étant pas très performante et la machine étant rapide, mettre pour $n$ un nombre assez grand dans l'exemple précédent. N = 256, on obtient I = 0,786 3 au bout de 15,74 s. (La méthode de calcul utilisée par le FX 180P est bien meilleure.)

**CASIO FX 850P** (en basic)

On utilise la méthode précédente :

```
 10 INPUT "N="; N
 20 INPUT "A="; A
 30 INPUT "B="; B
 40 P=(B−A)/N
 50 S=0
 60 X=A
 70 Y=1/(1+X*X)
 80 S=S+Y*P
 90 X=X+P
100 IF X<B THEN GOTO 70
110 PRINT "INTEGRALE="; S
```

## 6.5 CALCUL DE VOLUMES

Nous avons (cf. § 6.1 c) interprété géométriquement une intégrale comme étant l'aire d'une certaine partie du plan. Donnons une autre interprétation géométrique en raisonnant de façon analogue. Montrons que l'on peut calculer certains volumes à l'aide d'une intégrale.

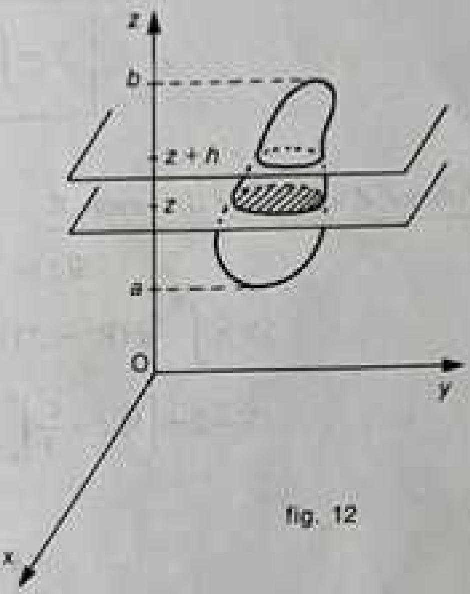



fig. 12

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé, considérons un solide que l'on découpe par des plans parallèles au plan $(xOy)$. Appelons $S(z)$ l'aire de l'intersection par le plan de cote $z$. Supposons que S soit une fonction continue et que le solide soit engendré par cette intersection lorsque $z$ varie de $a$ à $b$ $(a<b)$. Soit $\mathcal{V}(z)$ le volume de la partie du solide au-dessous du plan de cote $z$, donnons à $z$ un accroissement $h$ :

- Si $h>0$, nous admettrons que l'accroissement de volume $\mathcal{V}(z+h)-\mathcal{V}(z)$ est compris entre les volumes de deux cylindres élémentaires

$$S_1(h)\times h \quad \text{et} \quad S_2(h)\times h$$

où $S_1(h)$ et $S_2(h)$ sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur de S sur $[z, z+h]$ :

$$S_1(h)\times h \leqslant \mathcal{V}(z+h)-\mathcal{V}(z) \leqslant S_2(h)\times h.$$

- Si $h<0$, on a de même :

$$S_1(h)\times(-h) \leqslant \mathcal{V}(z)-\mathcal{V}(z+h) \leqslant S_2(h)\times(-h).$$

Dans les deux cas, on peut écrire :

$$S_1(h) \leqslant \frac{\mathcal{V}(z+h)-\mathcal{V}(z)}{h} \leqslant S_2(h)$$

$$\lim_{h\to 0} S_1(h) = \lim_{h\to 0} S_2(h) = S(z)$$

donc $$\mathcal{V}'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{V}(z+h)-\mathcal{V}(z)}{h} = S(z).$$

Cela signifie que la fonction $\mathcal{V} : z \longmapsto \mathcal{V}(z)$ est une primitive de S sur $[a, b]$. Cette primitive s'annule pour $z = a$ donc :

$$\mathcal{V}(z) = \int_a^z S(z)\, dz.$$

Le volume du solide est :

$$\boxed{V = \int_a^b S(z)\, dz}$$

- *Volume d'une boule de rayon* R

$$S(z) = \pi(R^2 - z^2)$$

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)\, dz = 2\int_0^R \pi(R^2 - z^2)\, dz$$

$$V = 2\pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_0^R = 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right)$$

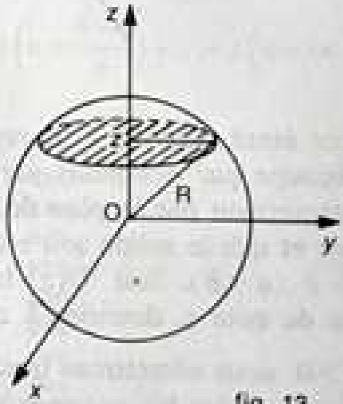



fig. 13

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

- *Volume d'un prisme*

$S(z) = \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ étant l'aire de l'une des bases.
Soit $h$ la hauteur du prisme, nous supposerons que $z$ varie de 0 à $h$. D'où

$$V = \int_0^h \mathcal{B}\, dz = \mathcal{B}[z]_0^h$$

$$\boxed{V = \mathcal{B}h}$$

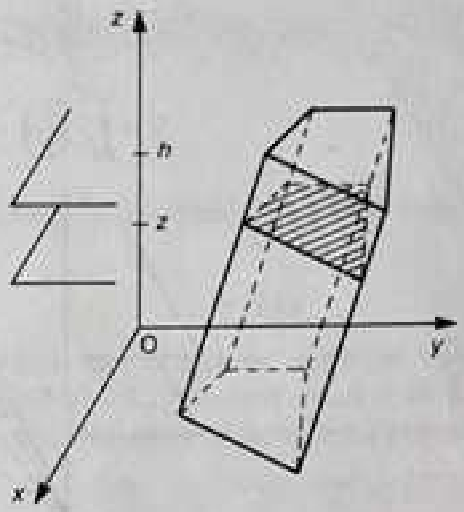



fig. 14

## ■ *Volume d'un cylindre*

En remplaçant le prisme par un cylindre à bases circulaires : $S(z) = \pi R^2$, R étant le rayon de l'une des bases,

$$V = \int_0^h \pi R^2 \, dz = \pi R^2 [z]_0^h$$

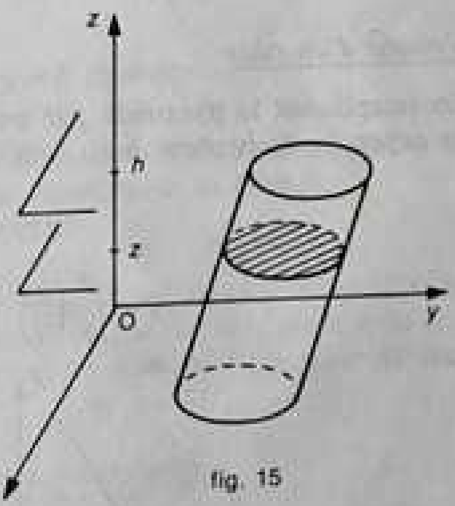



fig. 15

$$\boxed{V = \pi R^2 h}$$

## ■ *Volume d'une pyramide*

Nous supposerons que le sommet de la pyramide est l'origine O du repère orthonormé et que la base est dans le plan d'équation $z = h$, $h$ étant la hauteur de la pyramide.

L'intersection de la pyramide avec un plan de cote $z$ $(0 \leq z \leq h)$ est l'homothétique de la base dans une homothétie de centre O et de rapport $\frac{z}{h}$.

Dans une homothétie de rapport $k$, les aires sont multipliées par $k^2$. Donc si l'on appelle $\mathcal{B}$ l'aire de la base :

$$S(z) = \left(\frac{z}{h}\right)^2 \mathcal{B}$$

$$V = \int_0^h \left(\frac{z}{h}\right)^2 \mathcal{B}\, dz = \frac{\mathcal{B}}{h^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h$$

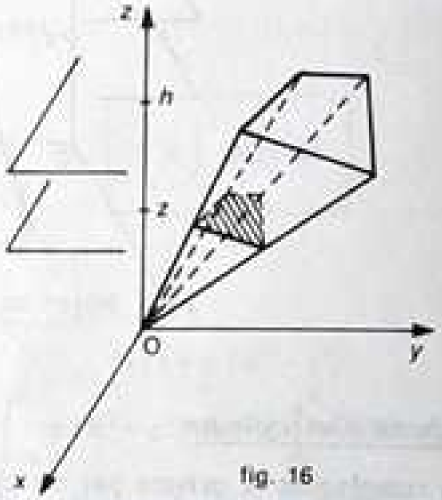



fig. 16

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\,\mathcal{B}h}$$

■ *Volume d'un cône*

En remplaçant la pyramide par un cône de sommet O, de base un cercle de rayon R, de hauteur $h$ :

$$S(z) = \left(\frac{z}{h}\right)^2 \pi R^2$$

$$V = \int_0^h \left(\frac{z}{h}\right)^2 \pi R^2\, dz = \frac{\pi R^2}{h^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h$$

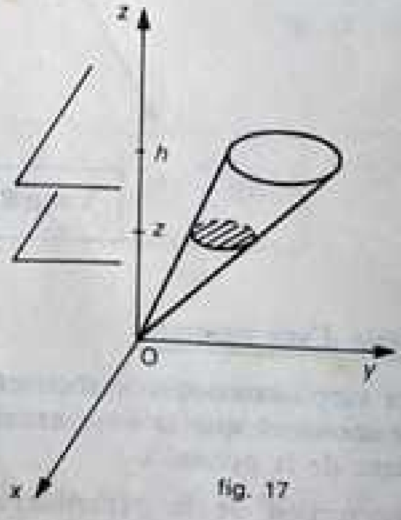



fig. 17

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\,\pi R^2 h}$$

# 6.6 NOTIONS D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

## a) Introduction

Si $f$ est une fonction donnée, continue sur un intervalle I, résoudre l'équation différentielle :

$$y' = f(x) \qquad (1)$$

c'est chercher l'ensemble des fonctions, appelées *solutions* de (1), dont la dérivée prend la valeur $y' = f(x)$ en tout point $x$ de I.
Nous savons que l'ensemble des solutions est l'ensemble des primitives de $f$ sur I.

EXEMPLE Les solutions de l'équation différentielle : $y' = x + \sin x$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y = \frac{x^2}{2} - \cos x + C$, C étant une constante réelle arbitraire.

Nous allons donner d'autres exemples de résolution d'équations différentielles.

## b) Équation différentielle : $ay' + by = 0$ $(a \neq 0)$

On appelle **équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants du premier ordre** toute équation de la forme :

$$ay' + by = 0, \qquad (2)$$

où $a$ et $b$ sont des réels donnés $(a \neq 0)$, $y$ et $y'$ sont les valeurs d'une fonction inconnue et de sa dérivée en tout point $x$ de $\mathbb{R}$. Une telle fonction, quand elle existe, est une solution de l'équation différentielle (2).

- *Recherche d'une solution particulière*

Cherchons une solution de la forme : $x \longmapsto y = e^{rx}$.
Pour tout $x$ réel on a alors :

$$y' = re^{rx}$$

$$\begin{aligned} ay' + by = 0 &\iff are^{rx} + be^{rx} = 0 \\ &\iff ar + b = 0 \\ &\iff r = -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Une solution particulière est donc : $x \longmapsto y = e^{-\frac{b}{a}x}$.

- *Recherche de toutes les solutions*

Posons $y = ze^{-\frac{b}{a}x}$ où $g : x \longmapsto z = g(x)$ est une fonction inconnue dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x$ réel, on a :

$$y' = z'e^{-\frac{b}{a}x} - \frac{b}{a} ze^{-\frac{b}{a}x}$$

$$\begin{aligned} ay' + by = 0 &\iff a\left(z'e^{-\frac{b}{a}x} - \frac{b}{a} ze^{-\frac{b}{a}x}\right) + bze^{-\frac{b}{a}x} = 0 \\ &\iff z' = 0 \\ &\iff z = \lambda \quad \text{(constante réelle arbitraire)} \\ &\iff y = \lambda e^{-\frac{b}{a}x}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (2) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{y = \lambda e^{-\frac{b}{a}x}} \quad (\lambda \text{ constante réelle arbitraire}).$$

En particulier, si l'on connaît la valeur $y_0$ de la solution en $x = 0$, on a : $y_0 = \lambda$ et la solution unique est définie sur $\mathbb{R}$ par : $y = y_0 e^{-\frac{b}{a}x}$.

## c) Travaux pratiques

*Après une injection intraveineuse de glucose, le taux de glycémie décroît à partir d'un certain instant choisi comme origine des temps selon la loi :*

$$g' + kg = 0$$

*où $g$ est une fonction dépendant du temps $t$ ($t \geq 0$), $g'$ est sa dérivée pour $t \geq 0$ et $k$ une constante strictement positive appelée coefficient d'assimilation glucidique. A l'instant $t = 0$, $g(0) = 2$.*

**1.** *Trouver la fonction $g$ précédente et la représenter graphiquement.*

**2.** *La valeur moyenne de $k$ chez un sujet normal varie de $1{,}06 \cdot 10^{-2}$ à $2{,}42 \cdot 10^{-2}$. Un sujet a un taux de glycémie de 1,20 à l'instant $t = 30$. Ce sujet est-il normal?*

*Indications*

**1.** $g(t) = 2e^{-kt}$
$g'(t) = -2ke^{-kt}$

| $t$ | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $-$ | |
| $g(t)$ | 2 | ↘ | 0 |

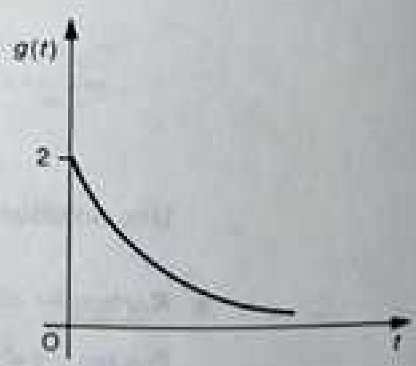


fig. 18

**2.** $g(30) = 1{,}20 = 2e^{-30k}$

$\ln 1{,}20 = \ln 2 - 30k$

$$k = \frac{\ln 2 - \ln 1{,}20}{30} = 1{,}7 \cdot 10^{-2}.$$

Le sujet est normal.

### d) Équation différentielle : $ay'' + by' + cy = 0$ $(a \neq 0)$

On appelle **équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants du second ordre** toute équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad (3)$$

où $a$, $b$, $c$ sont des réels donnés ($a \neq 0$), $y$, $y'$ et $y''$ sont les valeurs d'une fonction inconnue, de sa dérivée et de sa dérivée seconde en tout point $x$ de $\mathbb{R}$. Une telle fonction, quand elle existe, est une solution de l'équation différentielle (3).

■ *Recherche de solutions particulières si $b^2 - 4ac \geqslant 0$*

Comme au sous-paragraphe précédent, cherchons une solution de la forme : $x \longmapsto y = e^{rx}$. Pour tout $x$ réel on a alors :

$$y' = re^{rx}$$
$$y'' = r^2e^{rx}$$

$$(3) \iff ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$
$$\iff ar^2 + br + c = 0 \qquad (4)$$

l'équation (4) est appelée *équation caractéristique* associée à (3). Elle admet des racines réelles si $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$.
Supposons $\Delta \geqslant 0$. Des solutions particulières sont donc :

$$x \longmapsto y = e^{r_1x} \quad \text{et} \quad x \longmapsto y = e^{r_2x},$$

$r_1$ et $r_2$ étant les racines de l'équation caractéristique (4), $r_1 \neq r_2$ si $\Delta > 0$,

$r_1 = r_2 = -\dfrac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$.

■ *Recherche de toutes les solutions si $b^2 - 4ac \geqslant 0$*

Comme au sous-paragraphe précédent, posons pour tout $x$ réel, $y = ze^{r_1x}$ où $g : x \longmapsto z = g(x)$ est une fonction inconnue dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x$ réel, on a :

$$y' = z'e^{r_1x} + r_1ze^{r_1x}$$
$$y'' = z''e^{r_1x} + 2r_1z'e^{r_1x} + r_1^2ze^{r_1x}$$

$$(3) \iff az'' + (2ar_1 + b)z' + (ar_1^2 + br_1 + c)z = 0$$
$$\iff az'' + (2ar_1 + b)z' = 0$$
$$\iff z' = \mathrm{A}e^{-(2r_1 + \frac{b}{a})x}$$

(cf. § 6.6 b où l'on remplace, dans (2), $y$ par $z'$, A constante réelle arbitraire).

• Si $b^2 - 4ac > 0$, on a $r_1 \neq -\dfrac{b}{2a}$ donc $2r_1 + \dfrac{b}{a} \neq 0$ et :

$$(3) \iff z = \frac{\mathrm{A}}{-\left(2r_1 + \frac{b}{a}\right)} e^{-(2r_1 + \frac{b}{a})x} + \lambda_1$$

($\lambda_1$ constante réelle arbitraire)

$$\Leftrightarrow \quad y=\left[\frac{A}{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)}e^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)x}+\lambda_1\right]e^{r_1x}$$

$$\Leftrightarrow \quad y=\lambda_1 e^{r_1x}+\lambda_2 e^{\left(-2r_1-\frac{b}{a}+r_1\right)x},$$

en posant $\lambda_2=\dfrac{A}{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)}$

$$(3) \quad \Leftrightarrow \quad y=\lambda_1 e^{r_1x}+\lambda_2 e^{r_2x},$$

en remarquant que $r_1+r_2=-\dfrac{b}{a}$.

L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$\boxed{y=\lambda_1 e^{r_1x}+\lambda_2 e^{r_2x}}$ ($\lambda_1$ et $\lambda_2$ constantes réelles arbitraires).

- Si $b^2-4ac=0$, on a $r_1=-\dfrac{b}{2a}$ et :

$$(3) \quad \Leftrightarrow \quad z'=A \quad \text{(A constante réelle arbitraire)}$$

$$\Leftrightarrow \quad z=Ax+B \quad \text{(B constante réelle arbitraire)}$$

$$\Leftrightarrow \quad y=(Ax+B)e^{-\frac{b}{2a}x}.$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$\boxed{y=(Ax+B)e^{-\frac{b}{2a}x}}$ (A et B constantes réelles arbitraires).

**REMARQUE** Connaissant pour $x=0$ les valeurs $y_0$ et $y'_0$ d'une solution et de sa dérivée, les constantes sont déterminées, de façon unique, dans chacun des deux cas par :

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=y_0\\ r_1\lambda_1+r_2\lambda_2=y'_0\end{cases} \quad \text{où le déterminant du système est} \quad \begin{vmatrix}1 & 1\\ r_1 & r_2\end{vmatrix}\neq 0$$

ou par :

$$\begin{cases}B=y_0\\ A-\dfrac{b}{2a}B=y'_0.\end{cases}$$

Donc il existe une solution unique vérifiant les « conditions initiales » $y_0$ et $y'_0$ pour $x=0$.

- *Cas où $b^2-4ac<0$*

Si $b^2-4ac<0$, l'équation caractéristique admet des racines complexes. Pour étendre les résultats trouvés dans le cas : $b^2-4ac>0$ au cas : $b^2-4ac<0$, nous devons définir la dérivée de : $x \longmapsto e^{rx}$ lorsque $r\in\mathbb{C}$.
Par définition, si $f_1$ et $f_2$ sont des fonctions numériques de la variable réelle dérivables sur un intervalle I, la dérivée de la *fonction à valeurs complexes* F définie sur I : $x \longmapsto f_1(x)+if_2(x)$ est F' : $x \longmapsto f'_1(x)+if'_2(x)$.
Soit, en particulier, la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ : $x \longmapsto e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}e^{i\beta x}$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des réels.

$$\begin{aligned}
F(x) &= e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x \\
F'(x) &= \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x + i(\alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x) \\
&= \alpha e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) + i\beta e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) \\
&= (\alpha + i\beta)\, e^{\alpha x} e^{i\beta x} \\
&= (\alpha + i\beta)\, e^{(\alpha + i\beta)x}.
\end{aligned}$$

Donc si $r \in \mathbf{C}$, on a encore : $(e^{rx})' = re^{rx}$ pour tout $x$ réel.

On démontre que, si F et G sont des fonctions à valeurs complexes admettant des dérivées F′ et G′ sur un intervalle I, on a (utiliser la définition donnée de la dérivée) :

$$(FG)' = F'G + FG'.$$

Il en résulte alors que le raisonnement et les résultats trouvés lorsque $b^2 - 4ac > 0$ s'appliquent lorsque $b^2 - 4ac < 0$ et l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions à valeurs complexes définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x},$$

$r_1$ et $r_2$ étant les racines complexes de l'équation caractéristique, $\lambda_1$ et $\lambda_2$ étant des constantes complexes arbitraires. On peut poser

$$r_1 = \alpha + i\beta \quad \text{et} \quad r_2 = \alpha - i\beta \quad (\beta \neq 0)$$

d'où

$$(5) \qquad \begin{aligned}
y &= \lambda_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + \lambda_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \\
&= e^{\alpha x}(\lambda_1 e^{i\beta x} + \lambda_2 e^{-i\beta x}) \\
&= e^{\alpha x}\left[\lambda_1(\cos \beta x + i \sin \beta x) + \lambda_2(\cos \beta x - i \sin \beta x)\right]
\end{aligned}$$

$$(6) \qquad \boxed{y = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)}$$

en posant :

$$\begin{cases} A = \lambda_1 + \lambda_2 \\ B = i(\lambda_1 - \lambda_2). \end{cases}$$

Réciproquement, soit une fonction à valeurs complexes définie sur $\mathbf{R}$ par (6), A et B étant des constantes complexes arbitraires. On a (5) en prenant

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{2}\left(A + \dfrac{B}{i}\right) = \dfrac{1}{2}(A - iB) \\[2ex] \lambda_2 = \dfrac{1}{2}\left(A - \dfrac{B}{i}\right) = \dfrac{1}{2}(A + iB). \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions à *valeurs complexes* est défini sur $\mathbf{R}$ par (6) où A et B sont des *constantes complexes* arbitraires.

Si A et B sont réels, on obtient des solutions à valeurs réelles. Réciproquement soit une solution à valeurs réelles définie par (6). Montrons que A et B sont réels. Pour $x = 0$, la valeur de la solution est réelle et égale à A. Pour $x = \dfrac{\pi}{2\beta}$, la valeur de la solution est réelle et égale à $e^{\frac{\alpha\pi}{2\beta}}$B donc B est réel. Donc l'ensemble des solutions à *valeurs réelles* est défini par (6) où A et B sont des *constantes réelles* arbitraires.

**EXEMPLE** Soit l'équation différentielle : $y'' - 2y' + 2y = 0$. Cherchons la solution à valeurs réelles qui s'annule pour $x = 0$ et dont la dérivée prend une valeur donnée $y'_0$ pour $x = 0$.
L'équation caractéristique est : $r^2 - 2r + 2 = 0$. Le discriminant simplifié est $\Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2$. Les racines de l'équation caractéristique sont donc :

$$r_1 = 1 + i \quad \text{et} \quad r_2 = 1 - i.$$

Nous avons $\alpha = 1$ et $\beta = 1$.
L'ensemble des solutions à valeurs réelles est l'ensemble des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y = e^x(\mathrm{A} \cos x + \mathrm{B} \sin x), \quad \mathrm{A} \text{ et } \mathrm{B} \text{ constantes réelles arbitraires.}$$

La solution cherchée est telle que, pour $x = 0$,

$$y_0 = \mathrm{A} = 0$$

d'autre part :

$$y' = e^x(\mathrm{A} \cos x + \mathrm{B} \sin x) + e^x(-\mathrm{A} \sin x + \mathrm{B} \cos x)$$

pour $x = 0$ : $$y'_0 = \mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{B}$$

la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y = y'_0 e^x \sin x.$$

# Exercices

### Propriétés des intégrales et des primitives

**6.1** Soit $f$ une fonction continue sur

$$[a,\ b]\ (a<b).$$

1. Démontrer que $|f|$ est continue sur $[a,\ b]$.
2. Démontrer l'inégalité :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

**6.2** Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a,\ b]$ et $\lambda$ un nombre réel quelconque. Mettre l'intégrale

$$\int_a^b [f(x)+\lambda g(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

sous la forme d'un polynôme en $\lambda$, ordonné suivant les puissances décroissantes.
En déduire l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right]\times\left[\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right].$$

**6.3** Soit $f$ une fonction continue et $m \leqslant f \leqslant M$ sur $[a,\ b]$ $(a<b)$. Soit $g$ une fonction continue et positive sur $[a,\ b]$. Démontrer que :

$$(\exists c\in[a,\ b])\quad \int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

**6.4** Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=x^2\sin\frac{1}{x}\quad \text{si}\quad x\neq 0$$
$$F(0)=0.$$

1. Montrer que F a pour fonction dérivée $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\quad \text{si}\quad x\neq 0$$
$$f(0)=0.$$

2. Quelles sont les primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$? En déduire qu'*une fonction f peut avoir des primitives sur un intervalle sans être continue sur cet intervalle.*

**6.5** Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^5\sqrt{t^4+1}\,\mathrm{d}t.$

**6.6** Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^7 t\,\mathrm{d}t.$

### Primitives déduites des primitives usuelles

**6.7** Trouver la primitive de $f : x \longmapsto x^3+2x-1$ définie sur $\mathbb{R}$, qui s'annule pour $x=-1$.

**6.8** Trouver la primitive de $f$ :

$$x \longmapsto x^3+5x^2-x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

définie sur $\mathbb{R}^*$, qui s'annule pour $x=2$.

*Calculer les intégrales suivantes (ex. 6.9 à 6.29) :*

**6.9** $\displaystyle\int_0^1 (t+1)^2(t-3)\,\mathrm{d}t.$

**6.10** $\displaystyle\int_0^1 (t^4+4t^3+t^2-1)^5(2t^3+6t^2+t)\,\mathrm{d}t.$

**6.11** $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3+1}{(t^4+4t+1)^2}\,\mathrm{d}t.$

**6.12** $\displaystyle\int_0^2 \frac{t^2}{\sqrt{5+t^3}}\,\mathrm{d}t.$

**6.13** $\displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{2t+1}+\frac{1}{\sqrt{t+5}}\right)\mathrm{d}t.$

**6.14** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{t\cos t-\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

**6.15** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^3+3t}{(t^2-1)^3}\,\mathrm{d}t$ $\left(\text{on mettra } \dfrac{t^3+3t}{(t^2-1)^3} \text{ sous la forme } \dfrac{a}{(t-1)^3}+\dfrac{b}{(t+1)^3}\right).$

**6.16** $\displaystyle\int_0^1 \frac{(t+\sqrt{t^2+1})^2}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t.$

**6.17** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cos 3t\cos 5t\,\mathrm{d}t.$

**6.18** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\sin^2 t\,\mathrm{d}t.$

**6.19** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t\,\mathrm{d}t.$

**6.20** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^6 t}.$

**6.21** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t\sin^2 t-2\cos^3 t)\,\mathrm{d}t.$

**6.22** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t}.$

**6.23** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \, dt$.

**6.24** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t \, dt$.

**6.25** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 t - 2\tan t + 5}{\cos^2 t} dt$.

**6.26** $\int_2^{e} \frac{dt}{t \ln t}$

**6.27** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan t}}{\cos^2 t} dt$.

**6.28** $\int_0^1 t^2 2^{t^3} dt$.

**6.29** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^6 t + \cos^6 t) dt$.

**6.30** Soit $n$ un entier naturel et $f_n$ la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sin x} \quad \text{si} \quad 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$$
$$f_n(0) = n.$$

1. Montrer que $f_n$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt$. Calculer $I_{n+2} - I_n$. En déduire $I_n$ (on distinguera deux cas suivant que $n$ est pair ou impair).

## Intégration par parties

**6.31** Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx.$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx.$$

Plus généralement, soit :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \, dx$$
$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x \, dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

trouver des relations de récurrence entre ces intégrales.

**6.32** Calculer $\int_a^x (t^2 + t + 1) \sin t \, dt$ ($a$ et $x$ réels quelconques).

**6.33** 1. Linéariser $\sin^3 x$.

2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^3 x \, dx$.
3. Calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} (\pi - |2x - \pi|) \sin x \, dx.$$

**6.34** Calculer $I = \int_a^x \frac{1}{\sin^4 t} dt$.

(On suppose la fonction : $t \longmapsto \frac{1}{\sin^4 t}$ continue sur $[a, x]$ et on écrira $I = \int_a^x \frac{1}{\sin^2 t} \frac{1}{\sin^2 t} dt$; on fera une intégration par parties.)

**6.35** Soit $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1 - x} \, dx \quad (n \in \mathbb{N})$.

1. Par une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n-1}$.
2. Calculer $I_0$.
3. Calculer $I_n$.
4. Étudier $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

**6.36** Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \quad (n \in \mathbb{N})$.

1. Par une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n-2}$.
2. En déduire $I_{2p}$ et $I_{2p+1}$ $(p \in \mathbb{N})$.
3. Montrer que

$$\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} \leqslant \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \leqslant 1.$$

En déduire

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots \cdot 2p)^2}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots \cdot (2p-1)]^2 (2p+1)}.$$

**6.37** Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par :

$$f(x) = \sin^2 x \cos^3 x.$$

1. Linéariser $f(x)$.
2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16x \sin^2 x \cos^3 x \, dx.$$

**6.38** Calculer $\int_0^1 t^3 (\ln t)^2 dt$.

• **6.39** Le but de l'exercice est le calcul de $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^5 x}$. Pour tout entier naturel $n$ on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}.$$

1. Montrer qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que :

$$\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right) \quad \frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}.$$

En déduire le calcul de $I_0$.

2. Montrer, par une intégration par parties, que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2nI_n = (2n-1) I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}.$$

3. En déduire le calcul de I.

**6.40** Calculer, à l'aide de deux intégrations par parties :

$$I_k = \int_0^k x^2 e^{-x}\, dx.$$

Étudier la limite de $I_k$ lorsque $k$ tend vers $+\infty$.

*(Exercice. Bac. C. Aix-Nice 1985.)*

## Étude de $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$

**6.41** Soit la fonction $F : x \longmapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(x)$ et $F''(x)$ si ces nombres existent.

**6.42** **1.** Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$, $\alpha$ une fonction dérivable sur un intervalle I,

$$\alpha(I) \subset [a, b].$$

Démontrer que la fonction $F : x \longmapsto \int_a^{\alpha(x)} f(t)\,dt$ est dérivable sur I et que l'on a pour tout $x$ de I :

$$F'(x) = f[\alpha(x)] \times \alpha'(x).$$

**2.** Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$, $\alpha$ et $\beta$ deux fonctions dérivables sur I, $\alpha(I)$ et $\beta(I)$ étant inclus dans $[a, b]$. Démontrer que la fonction $F : x \longmapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$ est dérivable sur I et que l'on a pour tout $x$, de I :

$$F'(x) = f[\beta(x)] \times \beta'(x) - f[\alpha(x)] \times \alpha'(x).$$

**3.** Application. Soit $F : x \longmapsto \int_{x+1}^{x^2+1} \sqrt{1+t^2}\,dt$ définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(x)$ si cette dérivée existe.

**6.43** Soit la fonction numérique de la variable réelle

$$F : x \longmapsto \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+|t|+t^2}}\,dt.$$

On pose $\quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+|t|+t^2}}$.

**1.** Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et que F est impaire (indication : on remarquera que $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 2\int_0^x f(t)\,dt$).

**2.** Montrer que :

$$\text{si} \quad t \geqslant 0, \quad \frac{1}{1+t} \leqslant f(t) \leqslant 1.$$

En déduire que, pour $x \geqslant 0$,

$$F(x) \leqslant x \quad \text{et que} \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty.$$

**3.** Montrer que :

$$\text{si} \quad t \geqslant 1, \quad f(t) \leqslant \frac{1}{t}.$$

En déduire $\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

**4.** Variations et représentation graphique de F.

**6.44** Soit la fonction numérique de la variable réelle

$$F : x \longmapsto \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

On pose : $\quad f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

**1.** Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et que F est impaire (indication : on remarquera que

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 2\int_0^x f(t)\,dt).$$

**2.** Montrer que :

si $t \geqslant 1$, $\quad f(t) \leqslant e^{-\frac{t}{2}}$.

On admet qu'une fonction croissante et majorée sur $[1, +\infty[$ admet une limite en $+\infty$. Montrer que F admet une limite (qu'on ne demande pas de calculer) quand $x$ tend vers $+\infty$.

**3.** Montrer que :

$$(\forall x \in [0, +\infty[) \quad F(x) \leqslant x.$$

**4.** Variations et représentation graphique de F.

## Calcul d'aires

*On suppose le plan rapporté à un repère orthogonal (ex. 6.45 à 6.51) :*

**6.45** Calculer l'aire du *segment de parabole* défini par :

$$\begin{cases} -a \leqslant x \leqslant a \\ x^2 \leqslant y \leqslant a^2. \end{cases} \quad (a > 0)$$

Soit $A(a, 0)$, $B(a, a^2)$, $C(-a, a^2)$, $D(-a, 0)$. Montrer qu'elle est égale aux $\frac{2}{3}$ de l'aire du rectangle ABCD.

**6.46** Calculer l'aire de l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x - \sin^2 x. \end{cases}$$

**6.47** Même question avec :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \\ 0 \leqslant y \leqslant 4x - \tan^2 x. \end{cases}$$

**6.48** Même question avec :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ x - \sin x \leqslant y \leqslant x. \end{cases}$$

Si l'unité de longueur sur les deux axes de coordonnées est 2 cm, calculer cette aire en $cm^2$.

**6.49** Construire la parabole d'équation

$$y = -x^2 - 2x + 3.$$

Calculer l'aire de l'ensemble limité par cette parabole et les tangentes aux points où elle coupe $x'x$.

**6.50** Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux paraboles d'équations :

$$y=x^2-3x+3, \quad y=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{3}{2}.$$

**6.51** Construire la courbe d'équation

$$a^2y^2=x^2(a^2-x^2), \quad \text{on donne} \quad a>0.$$

(on étudiera les éléments de symétrie et on calculera $y$ en fonction de $x$).
Calculer l'aire de la partie du plan limitée par cette courbe.

**6.52** **1.** Étudier la fonction numérique $f$ définie par $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**2.** Montrer que la fonction $g$ définie sur $]1, \infty[$ par $g(x)=f(x)-x$ est continue et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. Déterminer ses limites lorsque $x$ tend vers 1 par valeurs supérieures et lorsque $x$ tend vers $+\infty$. En déduire qu'il existe un seul point d'intersection de (C) et de la droite d'équation $y=x$. On désigne par $\alpha$ l'abscisse de ce point. Vérifier que $\alpha<e$.

**3.** Calculer en fonction de $\alpha$ l'aire de la portion du plan ensemble des points M de coordonnées $(x, y)$ vérifiant

$$\begin{cases} \alpha \leq x \leq e \\ f(x) \leq y \leq x. \end{cases}$$

**6.53** Soit $f$ la fonction numérique de variable réelle définie par

$$f(x)=1-|e^x-e^{3x}|.$$

**1.** Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$.

**2.** Étudier les variations de $f$ et construire sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**3.** Soit $\lambda$ un réel négatif. Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x, y)$ vérifient

$$\lambda \leq x \leq 0 \quad \text{et} \quad f(x) \leq y \leq 1.$$

Montrer que $\mathcal{A}(\lambda)$ a une limite lorsque $\lambda$ tend vers $-\infty$.

## Calcul de volumes

*On suppose l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, d'axes Ox, Oy, Oz (ex. 6.54 à 6.59).*

**6.54** Soit $\Delta$ la partie du plan $(xOz)$ définie par

$$\begin{cases} a \leq z \leq b \\ 0 \leq x \leq f(z), \end{cases} \quad f \text{ fonction continue sur } [a, b].$$

L'ensemble des points de l'espace engendré par la révolution de $\Delta$ autour de Oz est un *solide de révolution.*

**1.** Démontrer que le volume de ce solide est

$$V=\pi\int_a^b [f(z)]^2\,dz.$$

**2.** Soit $\Gamma$ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$ dans le plan $(xOz)$.
Calculer le volume du solide limité par la révolution de $\Gamma$ autour de Oz.
Examiner le cas particulier où $a=b$.

**6.55** Calculer le volume du solide engendré par la révolution (cf. ex. 6.54) autour de Oy de la partie $\Delta$ du plan $(xOy)$ définie par

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ x^2 \leq y \leq a^2. \end{cases}$$

**6.56** Calculer le volume du solide engendré par la révolution (cf. ex. 6.54) autour de Ox de la partie $\Delta$ du plan $(xOy)$ définie par

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \sin^2 x. \end{cases}$$

**6.57** **1.** On suppose que S est une fonction polynôme de degré 3 au plus.
Démontrer la *formule des 3 niveaux* :

$$\int_a^b S(z)\,dz=\frac{b-a}{6}\left[S(a)+S(b)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)\right].$$

**2.** Képler (1571-1630) détermine le volume d'un tonneau par cette formule. Calculer le volume d'un tonneau de hauteur 28 cm, les diamètres des deux bases mesurent 20 cm, le diamètre de l'intersection par le plan équidistant des plans des deux bases mesure 24 cm.

**6.58** Démontrer que le *volume d'un tronc de pyramide* est

$$V=\frac{h}{3}(\mathcal{B}+\mathcal{B}'+\sqrt{\mathcal{B}\mathcal{B}'}),$$

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ étant les aires des deux bases, $h$ la hauteur du tronc de pyramide, par les deux méthodes suivantes :

**1.** En utilisant la formule du cours (cf. § 6.5) : $V=\int_a^b S(z)\,dz$, le sommet de la pyramide étant en O et $b-a=h$.

**2.** En utilisant la formule des 3 niveaux (cf. ex. 6.57).

**6.59** Démontrer que le *volume d'un tronc de cône* est

$$V=\frac{\pi h}{3}(R^2+R'^2+RR'),$$

R et R' étant les rayons des deux bases, $h$ la hauteur du tronc de cône, par les deux méthodes données à l'exercice précédent.

## Moyenne d'une fonction

**6.60** Trouver la moyenne de la fonction :

$$t \longmapsto a\sin\omega t$$

($a>0$, $\omega>0$ donnés) sur $\left[0, \dfrac{2\pi}{\omega}\right]$.

**6.61** Trouver la moyenne de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{sur} \quad [0, 1].$$

**6.62** Soit $f$ la fonction réelle de la variable réelle $x$ définie sur l'intervalle

$$I = \left[-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right]$$

par $f(x) = |x| + \tan x$.

1. Étudier cette fonction et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
2. Montrer qu'il existe un réel unique $x_0$ appartenant à I tel que $f(x_0) = \frac{\pi}{8}$.
3. Calculer $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$. Quelle est la valeur moyenne de $f$ sur l'intervalle I ?

## Encadrement et valeur approchée d'une intégrale

**6.63** Étudier les variations de : $t \longmapsto \frac{t}{\ln t}$ sur $[2, 4]$.
En déduire que :

$$(\forall t \in [2, 4]) \quad e \leqslant \frac{t}{\ln t} \leqslant \frac{2}{\ln 2}.$$

En déduire un encadrement de $I = \int_2^4 \frac{t}{\ln t}\,dt$.

**6.64** *Encadrement d'une intégrale par la méthode des rectangles*

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt.$$

On pose $$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}.$$

On partage le segment $[0, 1]$ en 5 segments de même longueur $\frac{1}{5} = 0{,}2$ par les points $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}2$; ...; $x_i = 0{,}2i$; ...; $x_5 = 1$.
Démontrer que :
$(\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\})$

$$0{,}2f(x_i) \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt \leqslant 0{,}2f(x_{i-1}).$$

En déduire un encadrement de I.

**6.65** *Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des trapèzes*
L'intégrale I et les notations sont les mêmes qu'à l'exercice précédent.
On considère les trapèzes dont les côtés parallèles ont pour longueurs $f(x_{i-1})$ et $f(x_i)$ et la distance de ces côtés est 0,2. L'aire de l'un de ces trapèzes est $T_i = 0{,}2\,\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$ (cf. § 6.4 du cours).
Calculer une valeur approchée

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$$

de I.
Expliquer pourquoi on obtient une meilleure approximation de I qu'à l'exercice précédent.

**6.66** $I = \int_0^1 \sqrt{t}\,dt$. On pose $f(t) = \sqrt{t}$.
On partage le segment $[0, 1]$ en $n$ segments de même longueur $\frac{1}{n}$ par les points $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, ..., $x_i = \frac{i}{n}$, ..., $x_n = 1$.
Démontrer que :
$(\forall i \in \{1, 2, ..., n\})$

$$\frac{1}{n} f(x_{i-1}) \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n} f(x_i).$$

En déduire un encadrement de I.
Trouver la limite, quand $n$ tend vers $+\infty$, de la suite de terme général :

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

**6.67** $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt$. On pose $f(t) = \frac{1}{1+t}$.
On partage le segment $[0, 1]$ en $n$ segments de même longueur $\frac{1}{n}$ par les points $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, ..., $x_i = \frac{i}{n}$, ..., $x_n = 1$.
Démontrer que :
$(\forall i \in \{1, 2, ..., n\})$

$$\frac{1}{n} f(x_i) \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n} f(x_{i-1}).$$

En déduire un encadrement de I.
Trouver la limite, quand $n$ tend vers $+\infty$, de la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

**6.68*** $I = \int_0^1 2^t\,dt$. On pose $f(t) = 2^t$.
On partage le segment $[0, 1]$ en $n$ segments de même longueur $\frac{1}{n}$ par les points $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, ..., $x_i = \frac{i}{n}$, ..., $x_n = 1$.

1. Démontrer que :
$(\forall i \in \{1, 2, ..., n\})$

$$\frac{1}{n} f(x_{i-1}) \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n} f(x_i).$$

2. En déduire un encadrement de I.
3. Trouver la limite, quand $n$ tend vers $+\infty$, de la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + ... + \sqrt[n]{2^n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

4. Retrouver la limite précédente en remarquant que $\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + ... + \sqrt[n]{2^n}$ est la somme d'une suite géométrique.

**6.69*** Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ par :

$$u_n = \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \dots + \frac{1}{n \ln n} - \ln(\ln n).$$

**1.** Démontrer que quel que soit l'entier naturel $p \geqslant 2$ :

$$\frac{1}{(p+1)\ln(p+1)} \leqslant \int_p^{p+1} \frac{dt}{t \ln t} \leqslant \frac{1}{p \ln p}.$$

**2.** Démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante et minorée. Qu'en concluez-vous?

## Équations différentielles

**6.70** Résoudre l'équation différentielle :

$$y' = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + \cos x - x.$$

**6.71** Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' = xe^x + x^2 - x + 1.$$

**6.72** **1.** Résoudre l'équation différentielle :

$$y' = 2y.$$

**2.** Trouver une solution de la forme :

$$x \longmapsto y_1 = \mathrm{P}(x).$$

(P polynôme) de l'équation différentielle :

$$y' = 2y + x.$$

En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle précédente (on posera $y = y_1 + z$).

**6.73** Soit $x$ le nombre d'atomes de radium d'une substance radioactive à l'instant $t$. La fonction $f : t \longmapsto x = f(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a, à tout instant :

$$x' = -k^2 x \quad (k \text{ réel non nul donné}).$$

A l'instant $t = 0$, le nombre d'atomes de radium est $x_0$.

**1.** Donner l'expression de $x$ en fonction de $x_0$, $k^2$ et $t$.

**2.** On suppose $t$ évalué en années et $k^2 = 5 \cdot 10^{-4}$. Au bout de combien d'années, le nombre d'atomes de radium a-t-il diminué de moitié?

**6.74** Soit $\theta$ la température d'un corps à l'instant $t$. La température ambiante est 20 °C. On pose $x = \theta - 20$, on suppose la fonction : $t \longmapsto x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et, à tout instant, on a :

$$x' = -k^2 x \quad (k \text{ réel non nul donné}).$$

Pour $t = 0$, $\theta_0 = 70$ °C. Au bout de 5 minutes, $\theta = 60$ °C.

**1.** Calculer $\theta$ en fonction de $t$ mesuré en minutes.

**2.** A quelle température sera le corps au bout de 20 minutes?

**6.75** Trouver la solution de l'équation différentielle : $y'' + y' - 2y = 0$ s'annulant pour $x = 0$ et dont la dérivée prend la valeur $y'_0$ pour $x = 0$.

**6.76** Même question qu'à l'exercice précédent avec : $y'' - 2y' + y = 0$.

**6.77** Trouver une solution de la forme :

$$x \longmapsto y_1 = a \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + b \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

de l'équation différentielle :

$$2y'' - y' - y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right). \qquad (1)$$

En déduire toutes les solutions de (1) (on posera $y = y_1 + z$).

**6.78** Soit $\omega$ un réelle non nul. Trouver la solution de l'équation différentielle :

$$y'' = -\omega^2 y$$

prenant la valeur $y_0$ pour $x = 0$ et dont la dérivée prend la valeur $y'_0$ pour $x = 0$.

**6.79** **1.** Trouver les fonctions numériques de la variable réelle solutions de l'équation différentielle :

$$y'' = -9y.$$

**2.** Trouver une solution de la forme :

$$x \longmapsto y_1 = \mathrm{P}(x)$$

(P polynôme) de l'équation différentielle :

$$y'' = -9y + 5x + 1.$$

En déduire toutes les fonctions numériques de la variable réelle solutions de l'équation différentielle précédente (on posera $y = y_1 + z$).

**6.80** **1.** Trouver la solution de l'équation différentielle: $y'' + 2y' + 10y = 0$ qui s'annule pour $x = 0$ et qui prend la valeur $e^{-\frac{\pi}{6}}$ pour $x = \frac{\pi}{6}$.

**2.** Construire la représentation graphique $\Gamma$ de la solution précédente (on montrera que $\Gamma$ est tangente aux deux courbes d'équations $y_1 = e^{-x}$ et $y_2 = -e^{-x}$).

**6.81** Trouver une solution de la forme :

$$x \longmapsto y_1 = a \cos x + b \sin x$$

de l'équation différentielle :

$$(1) \qquad y'' + 4y = \sin x.$$

En déduire toutes les solutions de (1) (on posera $y = y_1 + z$).

**6.82** Trouver une solution de la forme :

$$x \longmapsto y_1 = ax \cos 2x + bx \sin 2x$$

de l'équation différentielle :

$$(1) \qquad y'' + 4y = 2 \cos 2x.$$

En déduire toutes les solutions de (1) (on posera $y = y_1 + z$).

## Compléments ne faisant l'objet d'aucune question au baccalauréat

*Dans les applications qui suivent, on calculera d'abord une valeur approchée* $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i)$ *de la grandeur en considérant une subdivision* $(x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ *de* $[a, b]$. *La valeur exacte est* $\int_a^b f(t)\,dt$ *(ex. 6.83 à 6.89).*

**6.83** Si l'on partage un corps en $n$ petits éléments de masse $\Delta m_i$ à la distance $d_i$ d'un point O et d'une droite D ou d'un plan P, le *moment d'inertie* du corps par rapport à O ou D ou P a pour valeur approchée : $\sum_{i=1}^{n} (\Delta m_i) d_i^2$. Sa valeur exacte est l'intégrale associée à cette somme.
On désignera ce moment d'inertie respectivement par $I_O$, $I_D$, $I_P$.
On supposera le corps *homogène* c'est-à-dire que si l'on partage le corps en $n$ petits arcs de longueur $\Delta \ell_i$ (ou éléments d'aire $\Delta S_i$ ou éléments de volume $\Delta v_i$), le quotient $\mu = \frac{\Delta m_i}{\Delta \ell_i}$ $\left(\text{ou } \mu = \frac{\Delta m_i}{\Delta S_i}\right.$ ou $\left.\mu = \frac{\Delta m_i}{\Delta v_i}\right)$ est constant. Le nombre $\mu$ est appelé *masse spécifique linéaire* (ou *superficielle* ou *volumique*).

**1.** Soit trois axes orthogonaux deux à deux : Ox, Oy, Oz. Démontrer les égalités :

$$I_{Ox} = I_{xOy} + I_{zOx}$$

$$I_O = I_{xOy} + I_{yOz} + I_{zOx} = \frac{1}{2}(I_{Ox} + I_{Oy} + I_{Oz})$$
$$= I_{Ox} + I_{yOz}.$$

**2.** Une barre homogène est assimilée à un segment de droite de longueur $2\ell$ et de masse M. Calculer son moment d'inertie par rapport au milieu O de la barre (choisir un axe d'origine O, contenant le segment et une subdivision $(x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ de $[0, \ell]$.

On déduira $I_O = \frac{M\ell^2}{3}$.

**3.** On donne une plaque homogène rectangulaire de dimensions $a$, $b$ et de masse M, définie dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy, par :

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}. \end{cases}$$

Calculer $I_{Oy}$ en considérant des éléments rectangulaires définis par :

$$\begin{cases} x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}. \end{cases}$$

Calculer $I_{Ox}$ et $I_{Oz}$ où Oz est un axe perpendiculaire en O au plan (xOy) de la plaque.

$\left[\text{Réponses : } \frac{1}{12}Ma^2, \frac{1}{12}Mb^2, \frac{1}{12}M(a^2 + b^2).\right]$

**6.84** L'espace étant rapporté à un repère orthonormé, soit le pavé ensemble des points $P(x, y, z)$ tels que :

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \\ -\frac{c}{2} \leq z \leq \frac{c}{2} \end{cases}$$

(on dit encore qu'on a un parallélépipède rectangle dont les arêtes ont pour longueurs $a$, $b$, $c$). On suppose que ce pavé est un corps homogène de masse M. Calculer les moments d'inertie du pavé par rapport aux plans de coordonnées.
[On partagera le pavé en plaques rectangulaires d'axe Oy, et d'épaisseur $y_i - y_{i-1}$. Réponse : $I_{xOz} = \frac{1}{12}Mb^2$.]
Calculer les moments d'inertie du pavé par rapport à O, par rapport aux axes de coordonnées.

**6.85** Calculer le moment d'inertie d'un disque homogène de rayon R et de masse M par rapport à son centre O, par rapport à un diamètre Ox (on partagera le disque à l'aide de cercles de centre O et de rayon $R_i$. Réponse : $I_O = \frac{MR^2}{2}$. Si Oy est un diamètre perpendiculaire à Ox,

$$I_O = I_{Ox} + I_{Oy} = 2I_{Ox} \text{ d'où } I_{Ox} = \frac{MR^2}{4}\Big).$$

**6.86** Calculer le moment d'inertie d'un cylindre de révolution homogène de rayon R, de hauteur $h$ et de masse M par rapport à son axe Oz (utiliser des cylindres de révolution d'axes Oz, de rayon $R_i$ et de hauteur $h$. Réponse : $I_{Oz} = \frac{MR^2}{2}$).

**6.87** Calculer le moment d'inertie d'une boule homogène de rayon R et de masse M par rapport à son centre O, par rapport à son diamètre Oz (on partagera la boule à l'aide de sphères de centre O et de rayon $R_i$. Réponses : $I_O = \frac{3}{5}MR^2$; $I_{Oz} = \frac{2}{5}MR^2$).

**6.88** Une résistance électrique de mesure R est traversée par un courant alternatif d'intensité, à tout instant $t$ : $i = I_m \sin \omega t$. La *puissance calorifique* dégagée à l'instant $t$ est $P = Ri^2$, l'*énergie calorifique* dégagée pendant la durée $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ est $\Delta W_i = P_i(t_i - t_{i-1})$ où $P_i = RI_m^2 \sin^2 \omega t_i$.

**1.** Calculer l'énergie calorifique dégagée pendant une période T.

**2.** Si $f$ est une fonction périodique de période T et si $f^2$ est continue sur $[0, T]$, on appelle *valeur efficace* de la fonction $f$ le nombre positif dont le carré est $\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2 dt$ c'est-à-dire la moyenne de $f^2$ sur $[0, T]$.
Calculer l'intensité efficace $I_e$ en fonction de $I_m$.
Montrer que $I_e$ est l'intensité d'un courant continu, constant, qui, dans la même résistance, pendant la même durée T, produirait la même énergie calorifique.

**6.89** Entre deux points d'un circuit électrique il y a une différence de potentiel :

$$v = V_m \sin \omega t$$

et l'intensité du courant est :

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi).$$

Calculer l'énergie mise en jeu pendant une période (on rappelle que la puissance à l'instant $t$ est $P = vi$). Calculer la puissance moyenne $\frac{1}{T}\int_0^T vi\,dt$. (Réponse : cette puissance moyenne est $V_e I_e \cos\varphi$, $V_e$ étant la différence de potentiel efficace, $I_e$ l'intensité efficace, $\cos\varphi$ s'appelle le facteur de puissance.)

## Révision

**6.90** On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2, \quad u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}.$$

**1.** Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Quel est l'ensemble de définition de $f$ ?
Montrer que $f$ est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

**2.** Montrer que, pour tout entier $k$ au moins égal à 2, on a :

$$\frac{1}{k \ln k} > \int_k^{k+1} f(x)\,dx.$$

En déduire une minoration de $u_n$ par une intégrale.

**3.** Calculer $\int_2^{n+1} f(x)\,dx = I_n$ en fonction de $n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$), puis $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

La suite $(u_n)$ a-t-elle une limite quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

(*Exercice Bac. C. Lille* 1985.)

**6.91** On notera $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{N}'$ l'ensemble des entiers naturels privé des nombres 0 et 1.

**A.** On considère les suites $u$ et $v$ définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_1 = 1$ et $v_1 = 1$ et, pour tout $n$, élément de $\mathbb{N}'$ :

$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

et $\quad v_n = 1 + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)\times n}$.

*a)* Trouver deux réels A et B tels que, pour tout $n$, élément de $\mathbb{N}'$ :

$$\frac{1}{(n-1)\times n} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n}.$$

En déduire que, pour tout $n$, élément de $\mathbb{N}'$ :

$$v_n = 2 - \frac{1}{n}.$$

*b)* Montrer que la suite $u$ est croissante, que pour tout $n$, élément de $\mathbb{N}'$ : $u_n \leqslant v_n$, que la suite $u$ est majorée. Conclure.

**B.** On rappelle que si $q$ est un nombre complexe différent de 1 et $n$ un élément de $\mathbb{N}$ :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

**1.** Soit $t$ un élément de $[0, \pi]$ ; on pose pour $n$, élément de $\mathbb{N}^*$ :

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos kt \quad \text{et} \quad \boxed{S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin kt}$$

*a)* Calculer le nombre complexe : $C_n(t) + i S_n(t)$. En déduire que si $t$ est un élément de $]0, \pi]$

$$C_n(t) = \frac{\sin \frac{nt}{2} \cdot \cos \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}$$

et si $t = 0$, $C_n(0) = n$.

*b)* L'application $C_n$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ est-elle continue sur $[0, \pi]$ ?

**2.** Vérifier que pour tout $t$, élément de $]0, \pi]$ :

$$1 + 2C_n(t) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}$$

et montrer que l'application de $]0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ qui à $t$ associe

$$\frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}$$

peut être prolongée en une fonction $g_n$ continue sur $[0, \pi]$.

**3.** Montrer que pour tout $n$, élément de $\mathbb{N}^*$ :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos nt\,dt = \frac{1}{n^2}$$

en déduire que :

$$u_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) C_n(t)\,dt.$$

**4.** Vérifier que $\frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) dt = \frac{\pi^2}{6}$ et que, pour tout $n$, élément de $\mathbb{N}^*$ :

$$\frac{\pi^2}{6} - u_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) g_n(t)\,dt.$$

**C.** On considère la fonction numérique $f$ définie sur $[0, \pi]$ par :
$f(0) = 2$ et pour tout $t$, élément de $]0, \pi]$ :

$$f(t) = \frac{t - \frac{t^2}{2\pi}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

**1.** Montrer que $f$ est continue sur $[0, \pi]$ ; en déduire l'existence d'un réel M tel que, pour tout $t$, élément de $[0, \pi]$ :

$$0 \leqslant f(t) \leqslant M.$$

**2.** Soit $\alpha$ un réel fixé tel que $0 < \alpha < \pi$.

*a)* Montrer que, pour tout $n$, élément de $\mathbb{N}$ :

$$\left|\int_0^\alpha f(t) \sin \frac{2n+1}{2} t\,dt\right| \leqslant \alpha M.$$

*b*) Montrer que $f$ est dérivable sur $[\alpha, \pi]$ et que la fonction dérivée $f'$ est continue sur ce segment. En déduire l'existence d'un réel M' tel que, pour tout $t$, élément de $[\alpha, \pi]$ :

$$|f'(t)| \leqslant M'.$$

*c*) On pose, pour tout $n$, élément de $\mathbb{N}$ :

$$I_n = \int_\alpha^\pi f(t) \sin \frac{2n+1}{2} t \, dt.$$

Montrer, en utilisant une intégration par parties, que

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0.$$

**3.** Déduire de la question **2.** que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\pi^2}{6} - u_n\right) = 0.$$

(*Problèmes. Bac. C. Aix-Marseille* 1981.)

**6.92** Pour chaque entier $k$ strictement positif, on définit une application $f_k$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout $x$ associe $f_k(x) = \dfrac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$. On appelle $f_0$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout $x$ associe $f_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

**1.** *a*) Démontrer que pour chaque $k \geqslant 1$, la fonction $f_k$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ ; en déduire, suivant la parité de l'entier $k$, le sens de variation des fonctions $f_k$.

*b*) Étudier, en discutant suivant les valeurs de $k \geqslant 1$, les limites de $f_k(x)$ et de $\dfrac{f_k(x)}{x}$ quand $x$ tend vers $+\infty$.
Que peut-on en déduire pour les branches infinies des courbes représentatives $C_k$ des fonctions $f_k$ ?

*c*) Démontrer que les courbes $C_k$ passent par deux points fixes; construire sur une même figure et dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes $C_1$, $C_2$, $C_3$. On précisera, s'il y a lieu, les asymptotes. (On prendra 2 cm pour unité.)

**2.** Soit $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$I_k = \int_0^1 f_k(x) \, dx.$$

*a*) Démontrer que la fonction

$$x \longrightarrow \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ ;
(ln désigne la fonction logarithme népérien).
En déduire la valeur de $I_0$.

*b*) Calculer $I_1$.

*c*) Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a la relation :

$$k \cdot I_k = \sqrt{2} - (k-1) I_{k-2}.$$

En déduire $I_2$ et $I_3$.

*d*) Démontrer que $I_k \leqslant \dfrac{1}{k+1}$ et en déduire la limite de la suite $I_k$ quand $k$ tend vers $+\infty$.

**3.** Soit $u_0$ un nombre réel tel que $0 < u_0 < 1$; on définit par récurrence une suite infinie $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant, pour $k > 0$ fixé,

$$u_1 = f_k(u_0), \quad u_n = f_k(u_{n-1}) \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1.$$

*a*) Démontrer, par récurrence, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

*b*) On suppose que $k \geqslant 2$.
Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$u_n < \frac{u_{n-1}}{\sqrt{2}}.$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite (que l'on précisera) quand $n$ tend vers $+\infty$.

**4.** Pour chaque entier $k$ strictement positif, on définit une application $g_k$ de $[0, 1]$ dans $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ par $g_k(x) = f_k(x)$.

*a*) Démontrer que pour chaque entier $k \geqslant 1$, la fonction $g_k$ admet une fonction réciproque $g_k^{-1}$.

*b*) Construire sur la figure précédente les courbes représentatives des fonctions $g_k^{-1}$ pour $k = 1, 2, 3$.

*c*) Donner l'expression des fonctions $g_1^{-1}$ et $g_2^{-1}$.

(*Problème. Bac. C. Paris* 1982.)

**6.93** **A.** *Étude d'une fonction numérique définie par une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.*

**1.** Démontrer que pour tout nombre réel $x$ élément de l'ensemble $\left]0, \frac{1}{2}\right[ \cup ]1, +\infty[$ l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} \, dt$ est définie (ln désigne la fonction logarithme népérien).
On considère l'application $f$ :

$$\left]0, \frac{1}{2}\right[ \cup ]1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} \, dt.$$

**2.** Démontrer que $f$ est dérivable en tout point de l'ensemble de définition, et que pour tout $x$ élément de $\left]0, \frac{1}{2}\right[ \cup ]1, +\infty[$ :

$$f'(x) = \frac{\ln \frac{x}{2}}{(\ln 2x)(\ln x)}.$$

Déterminer le sens de variation de $f$.

**3.** *a*) Démontrer que pour tout $x$ élément de $\left]0, \frac{1}{2}\right[ \cup ]1, +\infty[$ :

$$\frac{x}{\ln 2x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{\ln x}.$$

*b*) Déterminer les limites respectives de $f(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque $x$ tend vers zéro.

c) Déterminer les limites respectives de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**4.** On considère l'application

$$\Phi : ]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \Phi(t) = 2 - 2t + \ln t.$$

De l'étude des variations de $\Phi$ sur $]0, 1]$ (sens de variation de $\Phi$ et limites de $\Phi$ aux bornes de l'intervalle de définition) déduire l'existence d'un unique nombre réel $\alpha$ élément de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $\Phi(\alpha) = 0$ et justifier que pour tout nombre réel $t$ élément de $[\alpha, 1]$, on a : $\ln t \geqslant 2t - 2$.
Utiliser l'inégalité précédente pour démontrer que pour tout $x$ élément de $\left[\alpha, \frac{1}{2}\right]$ :

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2} \int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}.$$

En déduire la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $\frac{1}{2}$.

**5.** Démontrer que pour tout nombre réel $t$ élément de $[1, +\infty[$ :

$$\ln t \leqslant t - 1.$$

Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers 1.

**6.** a) Résumer dans un tableau l'étude des variations de $f$.

b) On note (C) la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(C') = (C) \cup \{O\}$.
Donner l'allure de la courbe (C') en précisant la tangente en O et les droites asymptotes.

**B.** *Étude d'une famille de fonctions numériques définies par une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.*
On considère, pour chaque entier $n$ supérieur ou égal à 2, l'application

$$g_n : ]1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g_n(x) = \int_x^{x^n} \frac{1}{\ln t}\, dt$$

et on désigne par $(\Gamma_n)$ la courbe représentative de $g_n$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

**1.** $n$ et $m$ étant des entiers tels que : $2 \leqslant n < m$, étudier la position relative des courbes $(\Gamma_n)$ et $(\Gamma_m)$.

**2.** Démontrer que $g_n$ est dérivable en tout point de l'intervalle $]1, +\infty[$ et expliciter sa fonction dérivée.
En déduire que $(\Gamma_n)$ admet une unique tangente parallèle à l'axe des abscisses en un point d'abscisse $u_n = n^{\frac{1}{1-n}}$ et d'ordonnée $v_n = g_n(u_n)$.

**3.** a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est convergente et préciser sa limite.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2 on a :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} < e \quad \text{et} \quad \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} < 1$$

(on pourra utiliser le résultat : pour tout réel $t$ élément de $]1, +\infty[$ $\ln t < t - 1$).
En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$.

**4.** Étudier la limite de la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$.

(*Problèmes. Bac. C. Bordeaux-Poitiers 1985.*)

**6.94** *Dans ce problème, on étudie la fonction f définie sur* $[0, +\infty[$ *par* $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $(x > 0)$ *et* $f(0) = 1$, *ce qui fait l'objet de la partie I.*
*Dans la partie II, on décrit une méthode de calcul d'une valeur approchée de l'intégrale*
$J = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx.$

**I Étude de la fonction f**

**1.** *Dérivation de f*
Montrer que $f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer la dérivée de $f$ sur cet intervalle.

**2.** *Signe de f*

a) Déterminer les nombres réels $x \geqslant 0$ tels que $f(x) = 0$. On rangera ces nombres en une suite strictement croissante $(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$.

b) Étudier le signe de $f$.

**3.** *Encadrement de f*

a) Prouver que pour tout nombre réel $x > 0$,

$$-\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

En déduire la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

b) Déterminer les nombres réels $x > 0$ tels que $f(x) = \frac{1}{x}$ et ceux tels que $f(x) = -\frac{1}{x}$. On rangera ces nombres en des suites strictement croissantes $(b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots)$ et $(c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots)$.

c) En déduire la position relative de la courbe représentative C de $f$ et des courbes représentatives $H_+$ de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $H_-$ de $x \longmapsto -\frac{1}{x}$.
Comparer les tangentes à C et $H_+$ au point d'abscisse $b_k$, ainsi que les tangentes à C et $H_-$ au point d'abscisse $c_k$.

**4.** *Variations de f*

a) Étudier le signe de $x \longmapsto \tan x - x$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
En déduire le signe de $f'$ sur cet intervalle.

b) Prouver que pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe un élément $x_k$ et un seul de $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ tel que $\tan x_k = x_k$ ; montrer que $x_k > k\pi$.

c) En déduire le signe de $f'$ sur $]0, x_1[$, puis sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$, où $k = 1, 2, \ldots$

**5.** *Étude de f en 0*

a) Prouver que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$0 \leqslant x - \sin x \leqslant \frac{x^3}{6}.$$

(Pour cela, on introduira la fonction $\varphi$ définie sur $[0, +\infty[$ par $\varphi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$, on calculera les dérivées $\varphi'$, $\varphi''$ et $\varphi'''$ et on en déduira le signe de $\varphi$.)

b) Prouver que $f$ est dérivable au point 0 et calculer $f'(0)$.

**6.** *Courbe représentative de f*

a) Dresser le tableau de variations de $f$ sur l'intervalle $[0, 3\pi]$.

b) Tracer sur une même figure les courbes $H_+$, $H_-$ et C en se limitant à l'intervalle $[0, 3\pi]$ et placer les points $a_k$, $b_k$, $c_k$ et $x_k$.
On utilisera les valeurs approchées $x_1 \approx 4{,}49$ et $x_2 \approx 7{,}73$.
(Unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 3 cm sur l'axe des ordonnées.)

**II Approximation de l'intégrale J**

**1.** *Transformation de J*

Pour tout élément $u$ de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, on pose
$F(u) = \int_1^u \frac{\sin t}{t}\,dt$ et pour tout élément $x$ de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$,
on pose $G(x) = \int_0^x \frac{\sin \pi t}{1-t}\,dt$.

a) Prouver que pour tout élément $x$ de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ :

$$G(x) = F(\pi) - F(\pi(1-x)).$$

(On pourra comparer les dérivées des deux membres.)

b) En déduire que $J = \int_0^1 \frac{\sin \pi t}{1-t}\,dt$.

**2.** *Approximation de J*
Soit $(u_n)$ la suite définie par :

$u_0 = \int_0^1 \sin \pi t\,dt$ et si $n \geqslant 1$, $\quad u_n = \int_0^1 t^n \sin \pi t\,dt$.

a) Prouver que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$J = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + r_n$$

où $$r_n = \int_0^1 \frac{t^n \sin \pi t}{1-t}\,dt.$$

b) Établir que, pour tout élément $t$ de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$$\frac{t^n \sin \pi t}{1-t} \leqslant 2t^n.$$

En déduire une majoration simple de $r_n$.

c) Montrer que $J = \lim\limits_{n \to +\infty} (u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1})$.

**3.** *Calcul des intégrales $u_n$*

a) Calculer $u_0$ et $u_1$.

b) Établir que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$u_n = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{n}{2^{n-1}} - n(n-1)\,u_{n-2}\right].$$

**4.** *Conclusion*
A partir des résultats obtenus en **2.** et **3.**, indiquer une méthode de calcul d'une valeur approchée de J à la précision $10^{-2}$. (On ne demande pas d'effectuer ce calcul.)

(*Problème Bac. C. Paris* 1987.)

**6.95** *Ce problème a pour buts, d'une part d'étudier la suite $\frac{n^n e^{-n}}{n!}$, d'autre part de donner une expression de $e^a$ comme limite d'une suite.*

Pour tout entier $n > 0$, on note $f_n$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

On appelle $C_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On prendra $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 10$ cm.

**A.1.** Déterminer le tableau de variations de $f_n$ sur $[0, +\infty[$.

**2.** Pour tout entier $n \geqslant 2$, étudier la position relative de $C_n$ et de $C_{n-1}$ et vérifier que le point $A_n$ de coordonnées $(n, f_n(n))$ appartient à $C_{n-1}$.

**3.** Construire avec soin, sur un même graphique, les courbes $C_1$, $C_2$ et $C_3$; on placera les tangentes en O à ces trois courbes.

**B.** Le but de cette seconde partie est d'étudier la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = f_n(n)$.

**1.** a) En utilisant les résultats du **A.**, démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

b) La suite $(u_n)$ est-elle convergente? Justifier.
On se propose, dans les questions suivantes, de déterminer la limite de cette suite.

**2.** a) Soit $g$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$g(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{4}.$$

En utilisant les variations de $g$, démontrer que pour tout $t$ de $[0, 1]$ on a :

$$\ln(1+t) \leqslant t - \frac{t^2}{4}.$$

b) En déduire que pour tout entier $n > 0$ on a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e^{1 - \frac{1}{4n}}.$$

**3.** a) Démontrer que pour tout entier $n > 0$ on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant e^{-\frac{1}{4n}}.$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :

$$u_n \leqslant e^{-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right)}.$$

**4.** a) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :

$$\int_1^n \frac{dt}{t} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}.$$

(On pourra utiliser des considérations d'aire.)

b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :

$$u_n \leqslant e^{-1-\frac{1}{4}\ln n}.$$

c) Quelle est la limite de la suite $(u_n)$?

**C.** Pour tout entier $n > 0$ et pour tout réel $a$ positif ou nul, fixé, on pose :

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{t^n e^{-t}}{n!}\,dt.$$

**1.** Calculer $I_1(a)$.

**2.** Démontrer que pour tout entier $n > 0$ et tout réel $t$ positif ou nul, on a :

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{t^n}{n!}.$$

En déduire un encadrement de $I_n(a)$.

**3.** *a)* Démontrer que pour tout entier $n > 0$, on a :

$$\frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n.$$

(On pourra utiliser **B. 1.** a).)

*b)* Déterminer alors une nouvelle majoration de $I_n(a)$, puis la limite de $I_n(a)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**4.** *a)* Établir pour tout entier $n \geqslant 2$ une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n-1}(a)$.
(On pourra utiliser une intégration par parties.)

*b)* En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :

$$I_n(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}\right).$$

Cette égalité reste-t-elle valable pour $n = 1$?

**5.** Démontrer que pour tout $a$ de $[0, +\infty[$ on a :

$$e^a = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}\right).$$

(*Problème Bac. C. Espagne 1987.*)

**6.96** *Pour tout entier naturel $n$, on note $f_n$ l'application de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = \dfrac{\sin(2(n+1)x)}{\sin x}$ pour $x$ appartenant à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, et $f_n(0) = 2n + 2$. Le but du problème est d'établir la convergence de la suite $u$ de terme général :*

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x \text{ et de calculer sa limite.}$$

**A. *Préliminaires***

**1.** Montrer que $f_n$ est continue dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, en déduire que la suite $u$ est bien définie dans $\mathbb{N}$.

**2.** Montrer que : $u_{n+1} - u_n = 2\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$.

(On rappelle que
$\sin p - \sin q = 2 \sin \dfrac{p-q}{2} \cos \dfrac{p+q}{2}$)

**3.** Calculer $u_0$, $u_1$ et $u_2$.

**B. *Le but de cette partie est d'établir la convergence de u.***

**1.** Montrer que :

$$u_n = 2\sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

**2.** Calculer $\int_0^1 \mathrm{d}x$, et $\int_0^1 x^{2k}\,\mathrm{d}x$, $k$ étant un entier naturel non nul.

En déduire que : $u_n = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{1 + (-1)^n x^{2n+2}}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$.

**3.** Établir : $\left| u_n - 2\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \dfrac{2}{2n+3}$

**4.** En déduire la convergence de la suite $u$.

**C. *Le but de cette partie est de calculer l'intégrale*** $\mathbf{J} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Soit $\varphi$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Soit F la primitive nulle en zéro de $\varphi$; soit G l'application de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $G(\nu) = F(\tan \nu)$.

**1.** Montrer que G est dérivable et admet une fonction dérivée G' très simple que l'on précisera.

**2.** En déduire G.

**3.** En déduire la valeur de J. Quelle est la limite de la suite $u$?

(*Problème Bac. C. Nouvelle-Calédonie, 1986.*)

# 7 COURBES PARAMÉTRÉES DU PLAN

*Nous supposerons le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Nous appellerons $\vec{P}$ le plan vectoriel associé à P.*

## 7.1 DÉFINITIONS. EXEMPLES

### a) Introduction

A tout instant $t$ ($t \in \mathbb{R}$) un point M a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (a > 0,\ b > 0 \text{ donnés}).$$

Cherchons à construire l'ensemble des points M lorsque $t$ décrit $\mathbb{R}$.
Pour cela, nous allons étudier les variations des fonctions définies sur $\mathbb{R}$

$$f_1 : t \longmapsto a \cos t$$
$$f_2 : t \longmapsto b \sin t$$

ou encore nous allons étudier la fonction

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \vec{P}$$
$$t \longmapsto F(t) = (a \cos t)\vec{i} + (b \sin t)\vec{j}.$$

La fonction F n'est plus une fonction *numérique* de la variable réelle comme $f_1$ et $f_2$.

### b) Définition

Soit $f_1$ et $f_2$ deux fonctions numériques définies sur une partie D de $\mathbb{R}$. L'application

$$F : D \longmapsto \vec{P}$$
$$t \longmapsto f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j}$$

est appelée **fonction vectorielle** de la variable réelle $t$, de fonctions coordonnées $f_1$ et $f_2$.
Si l'ensemble des points M tels que $\overline{OM} = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j}$ est une courbe Γ,

on dit que $\Gamma$ est une **courbe paramétrée** de **paramètre** $t$. Sa **représentation paramétrique** est définie sur D par :

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t). \end{cases} \qquad (1)$$

En cinématique, $\Gamma$ est la **trajectoire** de M relativement au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ considéré et le paramètre est l'**instant** ou la **date** $t$. La position de M à chaque instant $t (t \in D)$ est définie par (1).

**REMARQUE** Si $\Gamma$ est la représentation graphique de la fonction

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = f(x),$$

on peut dire qu'une représentation paramétrique de $\Gamma$ est définie sur D par :

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t). \end{cases}$$

### c) Construction d'une courbe paramétrée

■ Période et symétries

Reprenons l'exemple de l'introduction. Les fonctions $f_1 : t \longmapsto a \cos t$ et $f_2 : t \longmapsto b \sin t$ ont pour période $2\pi$. On peut aussi écrire :

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad F(t + 2\pi) = F(t).$$

On dit que F est périodique, de *période* $2\pi$. Les points correspondants aux paramètres $t$ et $t + 2\pi$ sont confondus. Donc, lorsque $t$ décrit un intervalle d'*amplitude* $2\pi$, le point M décrit $\Gamma$ en entier.
Les points correspondants à $t$ et $-t$ ont même abscisse et des ordonnées opposées, donc $\Gamma$ admet l'*axe Ox pour axe de symétrie.*
Les points correspondants à $t$ et $\pi - t$ ont des abscisses opposées et même ordonnée, dont $\Gamma$ admet l'*axe Oy pour axe de symétrie.* Il suffit alors d'étudier $f_1$ et $f_2$ et par conséquent F sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, soit $\Gamma_1$ la courbe obtenue, pour obtenir $\Gamma$ on fera les symétries précédentes :

la partie $\Gamma_2$ de $\Gamma$ correspondant à $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ est la symétrique de $\Gamma_1$ par rapport à O$x$;

la partie $\Gamma_3$ de $\Gamma$ correspondant à $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ est la symétrique de $\Gamma_1$ par rapport à O$y$;

la partie $\Gamma_4$ de $\Gamma$ correspondant à $\left[-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right]$ est la symétrique de $\Gamma_2$ par rapport à O$y$.

$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_3$ est la courbe $\Gamma$ cherchée, car la réunion des intervalles de temps précédents est $[0, 2\pi]$ qui est un intervalle d'amplitude $2\pi$.

■ Construction de $\Gamma$

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \; f_1'(t) = -a \sin t, \quad f_2'(t) = b \cos t.$$

On dispose de la façon suivante l'étude des variations de $f_1$ et $f_2$ :

| $t$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f_1'(t)$ | $0$ | $-$ | $-a$ |
| $x=f_1(t)$ | $a$ | ↘ | $0$ |
| $y=f_2(t)$ | $0$ | ↗ | $b$ |
| $f_2'(t)$ | $b$ | $+$ | $a$ |

D'où la courbe $\Gamma$ (fig. 1).

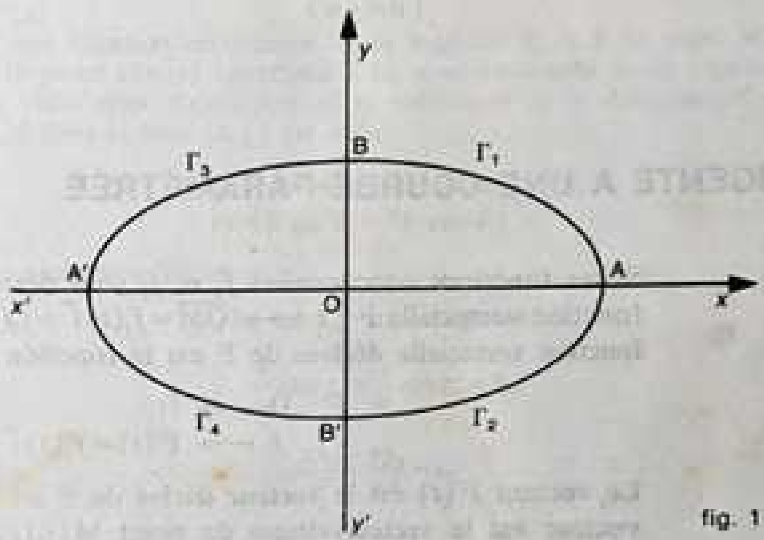


fig. 1

Soit un point M de $\Gamma$ de coordonnées

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \tag{1}$$

on peut écrire :

$$\frac{x}{a} = \cos t, \quad \frac{y}{b} = \sin t$$

comme $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, on déduit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

*Réciproquement,* si $M(x, y)$ a ses coordonnées vérifiant (2), le point $m\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ appartient au cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1.

Il existe un angle orienté unique de mesure $t$ (modulo $2\pi$) tel que $\frac{x}{a} = \cos t$ et $\frac{y}{b} = \sin b$. Donc on a :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad \text{M appartient à } \Gamma.$$

Une équation cartésienne de $\Gamma$ est donc l'équation (2).
On verra en géométrie (chapitre 10) que $\Gamma$ est une **ellipse.** Dans le cas particulier où $a = b$, $\Gamma$ est le cercle de centre O et de rayon $a$.

**REMARQUE** Si l'on suppose, dans l'exemple précédent, que $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la trajectoire de M est *incluse* dans l'ellipse $\Gamma$. On dit aussi que l'équation cartésienne du *support* de la trajectoire est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
La trajectoire est définie par :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \end{cases} \quad \text{ou plus simplement} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

## 7.2 TANGENTE A UNE COURBE PARAMÉTRÉE

Si les fonctions coordonnées $f_1$ et $f_2$ sont dérivables sur D, on dit que la fonction vectorielle F : $t \longmapsto \overrightarrow{OM} = f_1(t)\vec{\imath} + f_2(t)\vec{\jmath}$ est dérivable sur D et la **fonction vectorielle dérivée** de F est la fonction :

$$\begin{aligned} F' : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto F'(t) = f_1'(t)\vec{\imath} + f_2'(t)\vec{\jmath}. \end{aligned}$$

Le vecteur $F'(t)$ est le **vecteur dérivé** de F au point $t$. En cinématique, ce vecteur est le **vecteur-vitesse** du point $M(f_1(t), f_2(t))$ à l'instant $t$. On le note $\vec{v}$. Donc $\vec{v} = F'(t)$. On le note aussi $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$.
Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, on appelle **tangente** à $\Gamma$ au point M la droite passant par M et de vecteur directeur $\vec{v} = F'(t)$.
Dans le cas de l'ellipse de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f_1(t) = a \cos t \\ y = f_2(t) = b \sin t \end{cases} \quad (a > 0,\ b > 0,\ t \in \mathbb{R}),$$

$f_1'(0) = 0$ et $f_2'(0) = b$ donc la tangente en $A(a, 0)$ est parallèle à Ox (fig. 1).
$f_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -b$ et $f_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc la tangente en $B(0, b)$ est parallèle à Oy.

**REMARQUE** Si $\Gamma$ est la représentation graphique de la fonction dérivable sur D

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x), \end{aligned}$$

une représentation paramétrique de $\Gamma$ est définie sur D par :

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t). \end{cases}$$

Un vecteur directeur de la tangente en $M(t, f(t))$ est $\vec{v}\,(1, f'(t))$.
Le coefficient directeur de cette tangente est $f'(t)$ c'est-à-dire $f'(x)$.
On retrouve l'interprétation géométrique du nombre dérivé donné au § 4.1.b).

## Exercices résolus

**EXERCICE 1** *Soit l'ellipse $\Gamma$ de représentation paramétrique*

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (a>0,\ b>0,\ t \in \mathbb{R}).$$

*Trouver une équation cartésienne de la tangente à $\Gamma$ en $M_0(t_0)$.*

La fonction vectorielle $F : t \longmapsto a\cos t\vec{i} + b\sin t\vec{j}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t$ de $\mathbb{R}$, on a :

$$F'(t) = -a\sin t\vec{i} + b\cos t\vec{j}$$

et $F'(t) \neq \vec{0}$ car $a>0$, $b>0$ et $\sin t$ et $\cos t$ ne sont jamais nuls simultanément. Donc l'ellipse $\Gamma$ admet une tangente en tout point $M(a\cos t, b\sin t)$, de vecteur directeur $F'(t)$.
Cherchons une équation cartésienne de la tangente $D_0$ à $\Gamma$ au point $M_0(a\cos t_0, b\sin t_0)$. Un point $P(x, y)$ appartient à $D_0$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{M_0P}$ et $F'(t_0)$ sont colinéaires c'est-à-dire si et seulement si le déterminant du couple $(\overrightarrow{M_0P}, F'(t_0))$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est nul :

$$\begin{vmatrix} x-a\cos t_0 & -a\sin t_0 \\ y-b\sin t_0 & b\cos t_0 \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire, après simplification,

$$bx\cos t_0 + ay\sin t_0 = ab$$

ou encore : $$\frac{x}{a}\cos t_0 + \frac{y}{b}\sin t_0 = 1$$

c'est-à-dire : $$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

**EXERCICE 2** *Représenter graphiquement la courbe $\Gamma$ dont une représentation paramétrique est définie, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, par :*

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad (t \text{ décrit } \mathbb{R}).$$

*Construire les tangentes aux points O, A(1, 0), B$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.*

La fonction vectorielle associée est

$$F : t \longmapsto \sin t\vec{i} + \sin 2t\vec{j}$$

les fonctions coordonnées de F sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(t) = \sin t, \quad f_2(t) = \sin 2t$$

$2\pi$ est une période des fonctions $f_1$ et $f_2$ donc

$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad F(t+2\pi) = F(t)$

ce qui signifie que $2\pi$ est aussi une *période* de F.
Les points correspondants aux paramètres $t$ et $-t$ ont des abscisses et des ordonnées opposées, la courbe $\Gamma$ est donc *symétrique par rapport à* O. Les points correspondants aux paramètres $t$ et $\pi - t\ (t \in \mathbb{R})$ ont même abscisse, mais des ordonnées opposées, la courbe $\Gamma$ est donc *symétrique par rapport à l'axe* O$x$. Il suffit donc d'étudier les fonctions $f_1$ et $f_2$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, soit $\Gamma_1$ la courbe obtenue, pour obtenir $\Gamma$ on complétera par symétrie par rapport à O$x$ et par rapport à O.

$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad f_1'(t) = \cos t, \quad f_2'(t) = 2\cos 2t.$

D'où le tableau donnant les variations de $f_1$ et $f_2$ que l'on dispose de la façon suivante :

| $t$ | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'(t)$ | $1$ | $+$ | | | $0$ |
| $x = f_1(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\nearrow$ | $1$ |
| $y = f_2(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |
| $f_2'(t)$ | $2$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-2$ |

On placera les points $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ et $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, les tangentes en ces points admettent respectivement les vecteurs de coordonnées $(1, 2)$, $(0, -2)$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ comme vecteurs directeurs.

Lorsque $t$ décrit $\mathbb{R}$, les coordonnées des points de $\Gamma$ sont comprises en $-1$ et $1$, la courbe $\Gamma$ est à l'intérieur du carré de sommets $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$, d'où la représentation de $\Gamma$ (fig. 2).

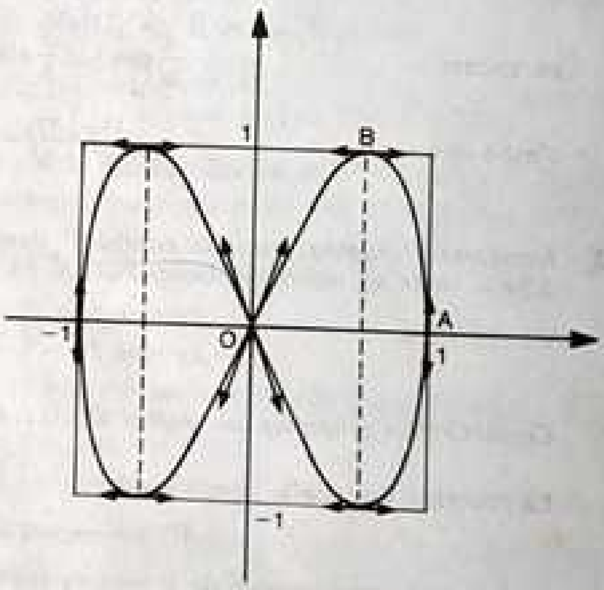



fig. 2

## 7.3 TRAVAUX PRATIQUES

*On suppose le plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct* $(O, \vec{i}, \vec{j})$. *Une roue de bicyclette de centre C et de rayon R se déplace sur l'axe* $(O, \vec{i})$ *de manière que si H est le point de contact avec l'axe* $(O, \vec{i})$ : $\overline{OH} = Rt\ (t \in \mathbb{R})$ *et il existe un point M fixé à la jante tel qu'une mesure de* $(\widehat{\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CH}})$ *est t (une mesure de l'arc orienté* $\widehat{MH}$ *est alors* $Rt = \overline{OH}$, *on dit que la roue roule sans glisser sur l'axe des abscisses).*

1. *Calculer les coordonnées de M en fonction de t.*

2. *Construire l'ensemble décrit par M lorsque le temps t décrit* $\mathbb{R}$. *(On étudiera les changements :* $t \longmapsto t+2k\pi$ *où* $k \in \mathbb{Z}$ *et* $t \longmapsto -t$*).*

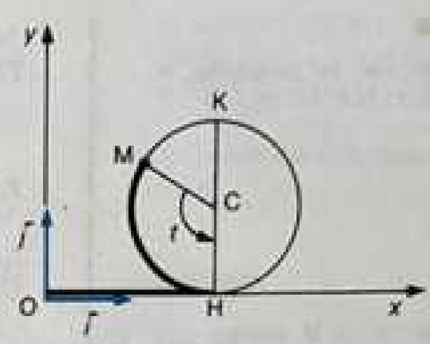



fig. 3

1. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CM}$

$$x\vec{i} + y\vec{j} = Rt\vec{i} + R\vec{j} + R\left[\cos\left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{CM}}\right)\vec{i} + \sin\left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{CM}}\right)\vec{j}\right]$$

$$\left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{CM}}\right) = \left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{CH}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{CM}}\right) \quad [2\pi]$$

$$= -\frac{\pi}{2} - t.$$

Vous trouverez $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t). \end{cases}$

2. $M(t) \longmapsto M'(t+2k\pi)$ par la translation de vecteur $2k\pi\vec{i}$.
$M(t) \longmapsto M''(-t)$ par la symétrie orthogonale d'axe $(O, \vec{j})$.

$$x' = R(1 - \cos t)$$
$$y' = R \sin t$$

| $t$ | 0 | | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $x'$ | 0 | + | 2R |
| $x$ | 0 | ↗ | $\pi$R |
| $y$ | 0 | ↗ | 2R |
| $y'$ | 0 | + | 0 |

Une telle courbe est une **cycloïde** (fig. 4).

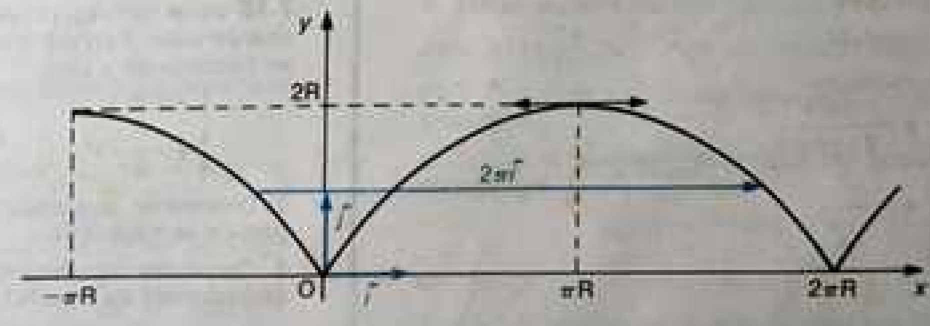



fig. 4

REMARQUE Soit K le point diamétralement opposé à H (fig. 4); on démontre que la droite (MK) est la tangente en M à la cycloïde (voir exercice 7.19).

# Exercices

## Tangente à une courbe

*Déterminer une équation de la tangente à l'ensemble des points M(x, y) (ex. 7.1 et 7.2)*

**7.1** $\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t} \\ y = \sqrt{16+t^2} \end{cases}$

pour $t=0$; pour $t=3$.

**7.2** $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^2}{2} \\ y = \dfrac{t^2}{2} - 3t + 1 \end{cases}$

pour $t=1$; pour $t=2$; pour $t=3$.

**7.3** Soit l'ellipse $\Gamma$ de représentation paramétrique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

($a > b > 0$ et le plan de $\Gamma$ est rapporté à un repère orthonormé).

**1.** Former une équation de la tangente à $\Gamma$ au point M de $\Gamma$ associé à une valeur quelconque du paramètre $t$.

**2.** Soit T et T' les tangentes à $\Gamma$ respectivement en $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$. Si $t \neq k\pi$, la tangente en M à $\Gamma$ coupe T et T' respectivement en P et P'. Montrer que $\overline{AP} \cdot \overline{A'P'}$ est constant.

**3.** Soit F et F' les points de $Ox$ d'abscisses respectives $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ et $-c = -\sqrt{a^2 - b^2}$. Montrer que les droites (FP) et (FP') sont perpendiculaires, ainsi que les droites (F'P) et (F'P').

## Courbes définies par une représentation paramétrique

*Représenter graphiquement les courbes $\Gamma$ dont une représentation paramétrique est définie par (ex. 7.4 à 7.11)*

**7.4** $\begin{cases} x = \cos 3t \\ y = \cos t + \sin t. \end{cases}$

**7.5** $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin 3t. \end{cases}$

**7.6** $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \dfrac{\sin t}{2 + \cos t} \end{cases}$

**7.7** $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$

**7.8** $\begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = t\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

**7.9** $\begin{cases} x = \dfrac{t-1}{t} \\ y = \dfrac{t^2}{t+1}. \end{cases}$

**7.10** $\begin{cases} x = \dfrac{\ln t}{t} \\ y = t \ln t. \end{cases}$

$\left(\text{On étudiera le changement : } t \longmapsto \dfrac{1}{t}\right)$

**7.11** $\begin{cases} x = t + \sqrt{t} \\ y = \sqrt{t}. \end{cases}$

**7.12** Construire la courbe ensemble des points M d'affixe

$$z = 2e^{it} - e^{it}$$

lorsque $t$ décrit $\mathbb{R}$.

## Cinématique du point

*Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.*

**7.13** Les coordonnées de M sont à tout instant $t$ de $\mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} x = 1 - 3t^2 \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$$

On appelle P le point où la tangente à la trajectoire en M rencontre la droite d'équation $x = 1$. Calculer les coordonnées du vecteur-vitesse de M et celles du vecteur-vitesse de P. Comparer les normes de ces deux vecteurs.

**7.14** Soit le mouvement plan du point M défini dans un repère orthonormé par les coordonnées du point M en fonction de la date $t$

$$M : \begin{cases} x = a(\cos t - \sin t) \\ y = b(\cos t + \sin t), \end{cases}$$

où $a$ et $b$ sont des réels positifs non nuls. Déterminer une équation cartésienne de la trajectoire.

**7.15** Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les coordonnées d'un point mobile M sont exprimées en fonction de $t$ par :

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \dfrac{t^3}{3} - t^2 + 1 \end{cases} \quad \text{où} \quad t \in [1, +\infty[.$$

**1.** Déterminer une équation cartésienne du support de la trajectoire.

**2.** Construire cette trajectoire. Quel est le sens de déplacement du mobile?

**7.16** Le mouvement d'un point mobile M, dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, est déterminé par les conditions suivantes :

— le vecteur-vitesse à l'instant $t$ $(t \geq 0)$ est

$$\vec{V}(t) = e^t\vec{i} + (1 - e^{-t})\vec{j} ;$$

— à l'instant $t = 0$, le mobile M est en A de coordonnées (1, 0).

**1.** Déterminer, en fonction de $t$, les coordonnées du point mobile M et en déduire une équation cartésienne du support de la trajectoire.

**2.** Construire cette trajectoire. Quel est le sens de déplacement du mobile?

**7.17** Les coordonnées de M à tout instant $t$ de $[0, 2\pi]$ sont :

$$\begin{cases} x = \cos t - \sin t \\ y = \cos t + \sin t. \end{cases}$$

**1.** Quelle est la trajectoire de M?

**2.** Que peut-on dire de la norme du vecteur-vitesse de M?

**7.18** Les coordonnées de M à tout instant $t$ de $\mathbb{R}$ sont :

$$\begin{cases} x = \dfrac{2R}{1+t^2} \\ y = \dfrac{2Rt}{1+t^2} \end{cases}$$

**1.** Déterminer une équation cartésienne du support de la trajectoire.

**2.** Quelle est cette trajectoire?

*Étude de lieux géométriques à l'aide d'un paramétrage*

**7.19** Les notations sont celles de l'exercice proposé en travaux pratiques (cf. § 7.3). Soit K le point diamétralement opposé à H.
Montrer que la tangente en M à la cycloïde passe par K à tout instant $t$ $(t \neq 0\ [2\pi])$.

**7.20** Les notations sont encore celles de l'exercice proposé en travaux pratiques (cf. § 7.3).

On considère le point N tel que $\overrightarrow{CN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CM}$ et le point Q tel que $\overrightarrow{CQ} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{CM}$. Construire les trajectoires décrites par N et Q.

**7.21** On donne, dans le plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle $\Gamma$ de centre O et de rayon R.
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre C et de rayon R tangent extérieurement à $\Gamma$ en H.

On pose $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OH}}) = t\ [2\pi]$ et on appelle M le point de $\mathcal{C}$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{CM}}) = t\ [2\pi]$.

**1.** Calculer les coordonnées de M en fonction de $t$.

**2.** Construire la courbe décrite par M lorsque $t$ décrit $\mathbb{R}$. (Une telle courbe est une *cardioïde*.)

**7.22** Dans un plan orienté rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne le point A(2$a$, 0) $(a > 0)$. Soit $\Delta$ et $\Delta'$ des droites passant respectivement par O et A et de vecteurs directeur $\vec{u}$ et $\vec{u}'$. On suppose :

$$(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = \theta \quad [2\pi] \quad \text{et} \quad (\widehat{\vec{i}, \vec{u}'}) = 3\theta \quad [2\pi].$$

**1.** Calculer $\tan 3\theta$ en fonction de $\tan \theta$.

**2.** Calculer les coordonnées du point d'intersection M de $\Delta$ et $\Delta'$ en fonction du paramètre $t = \tan \theta$.

**3.** Construire la courbe décrite par M lorsque $t$ varie.

## Révision

Les parties **B** et **C** sont indépendantes de la partie **A**.

**7.23 A. 1.** Résoudre l'équation différentielle

$$X'' + 2X' + 2X = 0 \qquad (1)$$

où X représente une fonction numérique de la variable réelle $t$ définie sur $\mathbb{R}$.

**2.** Déterminer les solutions $f$ et $g$ de (1) vérifiant :

$$f(0) = 1 \qquad f'(0) = -1$$
$$g(0) = 0 \qquad g'(0) = 1.$$

**B.** Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $t$ définie par :

$$f(t) = e^{-t} \cos t.$$

**1.** Montrer que, pour tout réel $t$ :

$$-e^{-t} \leq f(t) \leq e^{-t}.$$

Qu'en déduit-on quant à la position relative des courbes représentatives $\mathcal{C}$, $\Gamma$, $\Gamma'$ des fonctions

$$t \longmapsto f(t);\ t \longmapsto +e^{-t};\ t \longmapsto -e^{-t}?$$

Étudier la limite de $f$ en $+\infty$.

**2.** Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; vérifier que, pour tout réel $t$ :

$$f'(t) = -\sqrt{2}e^{-t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Dresser le tableau de variations de $f$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 2\pi\right]$.

**3.** Déterminer les points communs à $\mathcal{C}$ et $\Gamma$, à $\mathcal{C}$ et $\Gamma'$.
Montrer qu'en ces points les tangentes aux deux courbes sont confondues.

**4.** Tracer les arcs des courbes $\mathcal{C}$, $\Gamma$, $\Gamma'$ correspondant à $t \in \left[\dfrac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 2 cm en abscisses; 16 cm en ordonnées).

**5.** Soit $g$ la fonction numérique de la variable réelle $t$ définie par :

$$g(t) = e^{-t} \sin t.$$

Calculer $g(t)$ en fonction de $f\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Déduire le tableau de variations de $g$ sur $[0, 2\pi]$ du tableau de variations de $f$ obtenu en **B. 2.**

**C.** Le plan P est rapporté à un nouveau repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$, orthonormé (unité : 16 cm).

A tout réel $t$ on associe le point $M(t)$ d'affixe $z(t)=f(t)+ig(t)$, et on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des points $M(t)$ lorsque $t$ décrit $\mathbb{R}$.
L'objet de cette partie est d'étudier quelques propriétés de $\mathcal{S}$.

**1.** Pour tout entier naturel $n$, on note $A_n$ le point $M\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

*a)* Placer $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ et la tangente en $A_0$ à $\mathcal{S}$.

*b)* Tracer l'arc $\widehat{A_0A_3}$ de $\mathcal{S}$, correspondant aux réels $t\in\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.
Préciser les points de cet arc où les tangentes à $\mathcal{S}$ sont parallèles aux axes.

**2.** a) Déterminer, en fonction de $t$, le module et l'argument de $z(t)$.

*b)* Prouver qu'il existe une similitude de centre O, dont on précisera les éléments, telle que, pour tout réel $t$ : $M\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$ soit l'image de $M(t)$.

*c)* Quelle est l'image de l'arc de courbe $\widehat{A_nA_{n+1}}$ par cette similitude?

**3.** On admet que tout arc $\widehat{A_nA_{n+1}}$ a une longueur $\ell_n$ et qu'une similitude de rapport $k$ transforme un arc de longueur $\ell$ en un arc de longueur $k\ell$.

*a)* Calculer $\ell_n$ en fonction de $\ell_0$ et de $n$; en déduire la longueur $L_n$ de $\widehat{A_0A_n}$.

*b)* Étudier la limite de $L_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement ce résultat.

**4.** On donne $\ell_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{[f'(G)]^2+[g'(G)]^2}\,dt$.
Calculer $\ell_0$; en déduire la valeur de la limite obtenue en **3.** *b*.

(*Problème. Bac. C. Aix-en-Provence - Nice* 1985.)

**7.24** *N.B.* : Il n'est pas nécessaire d'avoir traité la partie **B.** pour aborder la suite.
Soit P un plan affine euclidien orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$; les points de P sont repérés soit par leurs coordonnées $(x, y)$, soit par leur affixe $x+iy$. Le but de ce problème est l'étude de l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M(t)$, $t\in\mathbb{R}$, du plan P, de coordonnées $(x(t), y(t))$ telles que :

$$\begin{cases} x(t)=e^t\cos t \\ y(t)=e^t\sin t. \end{cases}$$

**A. 1.** *a)* Vérifier, pour tout $t$ réel, les relations :

$$\cos t-\sin t=\sqrt{2}\cos(t+\pi/4)$$

et

$$\cos t+\sin t=\sqrt{2}\sin(t+\pi/4).$$

*b)* Étudier les variations des fonctions : $x(t\longmapsto x(t))$ et $y(t\longmapsto y(t))$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$.

*c)* Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la portion de $(\Gamma)$, ensemble des points $M(t)$ lorsque $t$ décrit $[0, \pi/2]$.
(On aura soin, en particulier, de représenter les points $M(0)$, $M(\pi/4)$, $M(\pi/2)$ et les tangentes à $(\Gamma)$ en ces points.)

**2.** Calculer, pour tout réel $t$ :

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM}(t), \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\widehat{\overrightarrow{OM}(t), \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}\right)$$

En déduire que l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}(t), \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}\right)$ est constant et en donner une mesure.

**3.** On pose, pour tous réels $a$ et $b$,

$$L_a^b=\int_a^b\left\|\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right\|dt.$$

Donner l'expression de $L_0^{\pi/2}$ et en calculer une valeur approchée à $10^{-2}$ près.
Étudier la limite éventuelle de $L_t^0$ lorsque $t$ tend vers $-\infty$.

**B. 1.** Montrer que les fonctions $x$ et $y$ sont des solutions sur $\mathbb{R}$ d'une même équation différentielle linéaire et homogène du second ordre à coefficients constants.

**2.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$X''-2X'+2X=0.$$

**C. 1.** Pour tout réel $t$, on note $f_t$ l'application de P dans P qui, au point M d'affixe Z fait correspondre le point $M_1$ d'affixe $Z_1$ telle que : $Z_1=z(t)Z$, où $z(t)$ est l'affixe du point $M(t)$ défini dans la partie **A.**

*a)* Préciser la nature de $f_t$ et ses éléments remarquables.

*b)* Montrer que, pour tous $t$ et $t'$ réels, $f_t\circ f_{t'}=f_{t+t'}$.
Soit G l'ensemble des applications $f_t$, $t\in\mathbb{R}$.
Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe commutatif de transformations de P.

**2.** a) Montrer que, pour tous $t$ et $t_1$ réels, $f_t(M(t_1))=M(t+t_1)$.
En déduire que, pour tout réel $t$, $f_t(\Gamma)=(\Gamma)$.

*b)* Montrer que, si $M_1=M(t_1)$ est un point quelconque de $(\Gamma)$, l'ensemble : $\{f_t(M_1), t\in\mathbb{R}\}$ est égal à $(\Gamma)$.

**D.** Soit $t$ un réel fixé non nul. On note $A_0$ le point $M(0)$ et on définit les points $A_n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ par la relation de récurrence :

$$A_n=f_t(A_{n-1}) \quad \text{si} \quad n\geqslant 1.$$

**1.** *a)* Calculer en fonction de $t$ la longueur $A_0A_1$.

*b)* Montrer que la suite $(A_{n-1}A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des longueurs $A_{n-1}A_n$ est une suite géométrique.

*c)* En déduire une expression de :
$L_n(t)=A_0A_1+A_1A_2+\ldots+A_{n-1}A_n$ en fonction de $n$ et $t$.

**2.** On suppose $t<0$. Montrer l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty}L_n(t)$ et calculer sa valeur $L(t)$.

Montrer que $\dfrac{e^{2t}-2e^t\cos t+1}{(1-e^t)^2}=1+2e^t\dfrac{1-\cos t}{(1-e^t)^2}$.
En déduire la limite de $L(t)$ lorsque $t$ tend vers zéro par valeurs négatives.
Comparer ce résultat à la limite $L_t^0$ trouvée en **A. 3.**

(*Problème. Bac. C. Aix-Marseille* 1984.)

# 8 PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENT

Dans de nombreuses situations, il est utile de dénombrer les éventualités qui se présentent. Par exemple, dans une course de chevaux, quel est le nombre de tiercés dans l'ordre? Quel est le nombre de tiercés dans le désordre? Quelle relation existe-t-il entre ces deux nombres?
Quel est le nombre de mains de 8 cartes contenant exactement 1 as et 2 rois dans un jeu de 32 cartes?

*On se reportera au début du livre (cf. «quelques notions fondamentales») pour la signification des mots : injection, surjection, bijection, restriction, prolongement.*

## 8.1 ENSEMBLES ÉQUIPOTENTS. ENSEMBLES FINIS

### a) Ensembles équipotents

**Définition**

**On dit que deux ensembles E et F sont équipotents si et seulement s'il existe une bijection de l'un sur l'autre.**

EXEMPLE Soit $E = \mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et F l'ensemble des entiers naturels pairs.
L'application

$$f : E \longrightarrow F$$
$$n \longmapsto 2n$$

est une bijection de E sur F.
Les ensembles E et F sont équipotents.

### b) Ensemble fini

**Définition**

**On dit qu'un ensemble E est fini si et seulement s'il est vide ou s'il existe un entier naturel $n$ non nul tel que E soit équipotent au sous-ensemble de $\mathbb{N}$ : $\{1, 2, ..., n\}$.**

Lorsque E est vide, on dit que son **cardinal** est nul : card $\varnothing = 0$. Lorsque E est non vide, l'entier naturel $n$ précédent (dont on admettra l'unicité) est le cardinal de E : card $E = n$.
Un ensemble qui n'est pas fini est appelé **ensemble infini**. Par exemple, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

### c) Cardinal de la réunion d'ensembles finis

• Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux $n$ et $p$ non nul, **disjoints** (c'est-à-dire $E \cap F = \varnothing$). Désignons par $\mathbb{N}_k$ l'ensemble $\{1, 2, ..., k\}$ des entiers non nuls inférieurs ou égaux à l'entier naturel $k$. Il existe une bijection $f$ de E sur $\mathbb{N}_n$ (card $E = n$ donc E et $\mathbb{N}_n$ sont équipotents) et de même une bijection $g$ de F sur $\mathbb{N}_p$. Soit $\varphi$ l'application de $E \cup F$ sur $\mathbb{N}_{n+p}$ définie par

$$\text{si } x \in E, \quad \varphi(x) = f(x)$$

$$\text{si } x \in F, \quad \varphi(x) = g(x) + n.$$

$\varphi(E) = f(E) = \{1, 2, ..., n\}$ et $g(F) = \{1, 2, ..., p\}$ donc
$\varphi(F) = \{n+1, n+2, ..., n+p\}$,
d'où $\varphi(E \cup F) = \{1, 2, ..., n, n+1, ..., n+p\} = \mathbb{N}_{n+p}$.

Tout élément de $\{1, 2, ..., n\}$ a un antécédent unique par $\varphi$ dans E ($f$ est une bijection), il n'en admet pas dans F.
Tout élément $y$ de $\{n+1, ..., n+p\}$ a un antécédent unique par $\varphi$ dans F, c'est l'antécédent unique de $y-n$ par $g$; il n'en admet pas dans E.
Donc tout élément de $\mathbb{N}_{n+p}$ a un antécédent unique dans $E \cup F$ par $\varphi$; $\varphi$ est donc une bijection de $E \cup F$ sur $\mathbb{N}_{n+p}$. $E \cup F$ et $\mathbb{N}_{n+p}$ sont donc équipotents d'où

$$\text{card}(E \cup F) = n + p$$
$$\text{card}(E \cup F) = \text{card } E + \text{card } F.$$

• Si l'un des deux ensembles est vide; par exemple si $F = \varnothing$ :

$$E \cap \varnothing = \varnothing \quad \text{et} \quad E \cup \varnothing = E$$

donc $\quad \text{card}(E \cup \varnothing) = \text{card } E$

on a encore $\quad \text{card}(E \cup \varnothing) = \text{card } E + \text{card } \varnothing.$

**Théorème 1**

> **Quels que soient les ensembles finis E et F disjoints :**
>
> $$\text{card}(E \cup F) = \text{card } E + \text{card } F.$$

Plus généralement on démontrera par récurrence le théorème suivant :

On a : $\text{card}(E\cup F)=30$

$\text{card}(E\cup F)=\text{card } E+\text{card } F-\text{card}(E\cap F)$

$30=20+15-\text{card}(E\cap F)$

d'où : $\text{card}(E\cap F)=5$

il y a donc 5 élèves étudiant à la fois l'anglais et l'allemand
15 étudiant seulement l'anglais
10 étudiant seulement l'allemand.

- Soit E et F deux ensembles finis tels que $E\subset F$ (fig. 2).

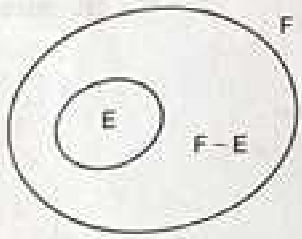



fig. 2

$F-E$ est le complémentaire de E dans F que l'on note $\overline{E}$ ou $\complement_F E$.
Les ensembles E et $\overline{E}$ sont disjoints donc d'après le théorème 1 :

$$\text{card}(E\cup\overline{E})=\text{card } E+\text{card } \overline{E}$$

c'est-à-dire $\text{card } F=\text{card } E+\text{card } \overline{E}$

donc $\text{card } E\leq\text{card } F.$

**Théorème 4**

> **Soit E et F deux ensembles finis tels que $E\subset F$ on a**
>
> $$\textbf{card } E\leq\textbf{card } F$$

## ) Cardinal du produit cartésien de deux ensembles finis

**EXEMPLE** Soit $E=\{a_1, a_2, a_3\}$, $F=\{b_1, b_2\}$ deux ensembles finis. Déterminons $E\times F$ :

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|
| $b_1$ | $(a_1, b_1)$ | $(a_2, b_1)$ | $(a_3, b_1)$ |
| $b_2$ | $(a_1, b_2)$ | $(a_2, b_2)$ | $(a_3, b_2)$ |

$$\begin{aligned} E\times F&=\{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_3, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_3, b_2)\}\\ &=\{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_3, b_1)\}\cup\{(a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_3, b_2)\}\\ &=(E\times\{b_1\})\cup(E\times\{b_2\}) \end{aligned}$$

$E\times\{b_1\}$ et $E\times\{b_2\}$ sont disjoints donc

$$\text{card}(E\times F)=\text{card}(E\times\{b_1\})+(\text{card } E\times\{b_2\}).$$

Mais $$\operatorname{card}(E\times\{b_1\})=\operatorname{card}(E\times\{b_2\})=\operatorname{card} E$$
d'où $$\operatorname{card} E\times F=2\operatorname{card} E=(\operatorname{card} E)\times(\operatorname{card} F).$$

**Cas général**

• Soit $E=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble fini de cardinal $n$ et $F=\{b\}$ un ensemble à un élément; considérons l'application de $E\times F$ dans E définie par :

$$\begin{aligned} E\times F &\longrightarrow E\\ (a_i, b) &\longmapsto a_i\end{aligned}$$

cette application est bijective et l'on a donc

$$\operatorname{card}(E\times F)=\operatorname{card} E.$$

• Supposons maintenant que l'ensemble $F=\{b_1, \ldots, b_p\}$ soit de cardinal $p$ on a :

$$E\times F=(E\times\{b_1\})\cup(E\times\{b_2\})\cup\ldots\cup(E\times\{b_p\}).$$

Les $p$ sous-ensembles de $E\times F$ ainsi définis sont disjoints deux à deux et ont comme cardinal commun le cardinal de E d'où

$$\operatorname{card}(E\times F)=p\operatorname{card} E=(\operatorname{card} E)\times(\operatorname{card} F)$$

d'où

**Théorème**

> **Soit E et F deux ensembles finis non vides, $E\times F$ est un ensemble fini et l'on a :**
>
> $$\operatorname{card}(E\times F)=(\operatorname{card} E)\times(\operatorname{card} F)$$

Cas particulier : si $E=F$, on a

$$\operatorname{card}(E\times E)=\operatorname{card}(E^2)=(\operatorname{card} E)^2.$$

Nous allons voir la généralisation de ce dernier résultat.

## 8.2 NOMBRE D'APPLICATIONS D'UN ENSEMBLE FINI DANS UN ENSEMBLE FINI

### a) Étude d'un exemple

Soit $E=\{a, b, c\}$ et $F=\{\alpha, \beta\}$ deux ensembles. Soit $f$ une application de E dans F on a $f(a)=\alpha$ *ou bien* $f(a)=\beta$. On représente ces deux cas à l'aide de deux traits (branches) partant d'un point de départ, les différentes extrémités indiquant les différents choix possibles d'images pour $a$.

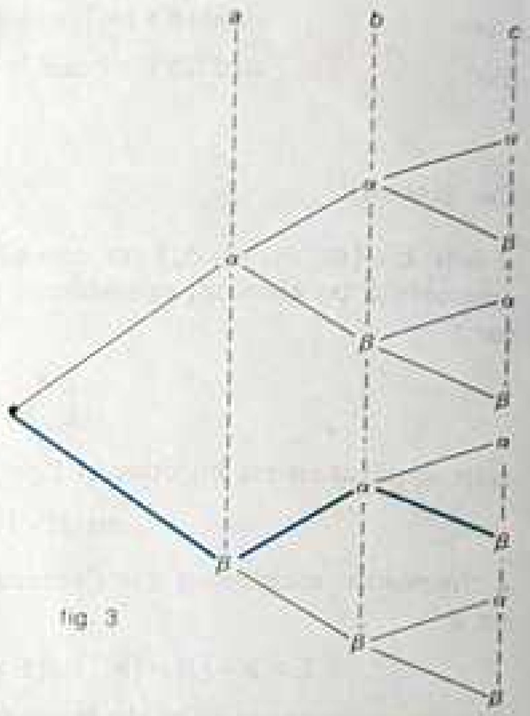



fig. 3

Si $f(a)=\alpha$ on aura $f(b)=\alpha$ ou bien $f(b)=\beta$ que l'on schématise par deux segments partant de l'extrémité $\alpha$ de la figure. Si $f(a)=\beta$ on aura $f(b)=\alpha$ ou bien $f(b)=\beta$.
Les choix des images d'un élément quelconque de E sont indépendants les uns des autres. On obtient ainsi le schéma de la figure 3 appelé arbre des applications de E dans F.
Le chemin en rouge obtenu en partant du point de départ jusqu'à l'une des extrémités de l'arbre représente l'application $f$ telle que :

$$f(a)=\beta, \quad f(b)=\alpha, \quad f(c)=\beta.$$

A tout chemin est associée une application de E dans F et à toute application de E dans F est associé un chemin unique donc le nombre d'applications de E dans F est égal au nombre de ces chemins.
Le nombre des chemins est $2\times2\times2=2^3=8$. Il y a 8 applications de E dans F.

## b) Cas général

D'une façon générale nous supposerons les ensembles finis et non vides et nous désignerons par $\mathcal{F}(A, B)$ l'ensemble des applications de l'ensemble A dans l'ensemble B. Soit $E_p$ un ensemble de cardinal $p$, $F_n$ un ensemble de cardinal $n$. Soit $a$ un élément de $E_p$ :

$$E_p=E_{p-1}\cup\{a\}$$

où $E_{p-1}$ est le complémentaire de $\{a\}$ dans $E_p$ (card $E_{p-1}=p-1$).
A toute application de $E_p$ dans $F_n$ on peut associer sa restriction à $E_{p-1}$ qui est une application de $E_{p-1}$ dans $F_n$.

*Réciproquement* à toute application de $E_{p-1}$ dans $F_n$ correspond $n$ prolongements distincts de $E_p$ dans $F_n$ (ils diffèrent tous par les $n$ choix possibles de l'image de l'élément $a$). On a donc

$$\text{card}(\mathcal{F}(E_p, F_n)) = n \cdot \text{card}(\mathcal{F}(E_{p-1}, F_n))$$

on écrit successivement

$$\begin{aligned}\text{card}(\mathcal{F}(E_{p-1} F_n)) &= n \cdot \text{card}(\mathcal{F}(E_{p-2}, F_n))\\ \text{card}(\mathcal{F}(E_{p-2}, F_n)) &= n \cdot \text{card}(\mathcal{F}(E_{p-3}, F_n))\\ &\vdots\\ \text{card}(\mathcal{F}(E_2, F_n)) &= n \cdot \text{card}(\mathcal{F}(E_1, F_n)).\end{aligned}$$

On a $\text{card}(\mathcal{F}(E_1, F_n)) = n$ (l'unique élément de $E_1$ a $n$ images possibles). Aucun des termes écrits dans les égalités n'étant nul, en multipliant membre à membre et en simplifiant on obtient

$$\text{card}(\mathcal{F}(E_p, F_n)) = n^p.$$

**Théorème**

> **Le nombre d'applications d'un ensemble à $p$ éléments ($p \geq 1$) dans un ensemble à $n$ éléments ($n \geq 1$) est $n^p$.**

**EXERCICE RÉSOLU**

*On lance cinq fois une pièce de monnaie pour jouer à pile ou face. Déterminer le nombre de résultats possibles.*

Considérons par exemple, le résultat PFPPF où P signifie « Pile » et F signifie « Face ». On obtient ce résultat en faisant l'application de $E_5 = \{1^{er}$ tirage, $2^e$ tirage, ..., $5^e$ tirage$\}$ dans l'ensemble $F_2 = \{$Pile, Face$\}$ :

$$\begin{aligned}1^{er}\text{ tirage} &\longmapsto P\\ 2^e\text{ tirage} &\longmapsto F\\ 3^e\text{ tirage} &\longmapsto P\\ 4^e\text{ tirage} &\longmapsto P\\ 5^e\text{ tirage} &\longmapsto F.\end{aligned}$$

A chaque résultat on peut ainsi associer une application de $E_5$ dans $F_2$ et réciproquement.
Le nombre des résultats est donc le nombre des applications de $E_5$ dans $F_2$ :

$$2^5 = 32.$$

### c) Ensemble $E^p$

Soit un ensemble $E = \{a, b, c, ..., t, n\}$ de cardinal $n$. Considérons une application de $\mathbb{N}_p = \{1, 2, ..., p\}$ dans E :

$$\begin{aligned}1 &\longmapsto b\\ 2 &\longmapsto b\\ 3 &\longmapsto a\\ &\cdots\cdots\\ p &\longmapsto t\end{aligned}$$

cela revient à mettre $b$ à la 1[re] place, encore $b$ à la 2[e] place, $a$ à la 3[e] place, ..., $t$ à la $p$[e] place. Ce qu'on écrit sous la forme :

$$(b, b, a, ..., t)$$

que l'on appelle **$p$-liste** d'éléments de E.
L'ensemble des $p$-listes d'éléments de E est noté $E^p$. Le nombre de ces $p$-listes est le nombre d'applications de $\mathbb{N}_p$ dans E c'est-à-dire $n^p$.

**Théorème**

**Soit E un ensemble fini non vide et $p \in \mathbb{N}^*$ :**

$$\mathbf{card}\,(E^p) = (\mathbf{card}\ E)^p.$$

**REMARQUE** Au lieu de $p$-liste on dit aussi **$p$-uplet** ou **arrangement avec répétition de $p$-éléments** de E. Au lieu de $(b, b, a, ..., t)$ on peut écrire plus simplement $bba...t$.

## Travaux pratiques

- *Une classe comporte 30 élèves. Un cours facultatif d'informatique est organisé; déterminez le nombre de manières de constituer le groupe des élèves participant à cet enseignement.*

Considérez pour cela les deux ensembles : E ensemble des élèves, F ensemble à deux éléments {participe, ne participe pas}.

- *Combien de mots de quatre lettres distinctes ou non peut-on constituer avec l'alphabet?*

## 8.3. NOMBRES D'INJECTIONS D'UN ENSEMBLE FINI DANS UN ENSEMBLE FINI

Soit $E_p$ et $F_n$ deux ensembles non vides de cardinaux respectifs $p$ et $n$.
Soit $f$ une injection de $E_p$ dans $F_n$, $f(E_p)$ est une partie à $p$ éléments de $F_n$; $f$ ne peut donc exister que si $n \geq p$.
On suppose donc $1 \leq p \leq n$.

### a) Étude d'un exemple

Soit $E_3 = \{a, b, c\}$ et $F_4 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ deux ensembles. On a $f(a) = \alpha$ ou bien $f(a) = \beta$ ou bien $f(a) = \gamma$ ou bien $f(a) = \delta$ que l'on schématise comme au (§ 8.2 a) par quatre branches issues d'un point de départ.
Si $f(a) = \alpha$ on ne pourra pas avoir $f(b) = \alpha$ (injectivité de $f$) mais seulement $f(b) = \beta$ ou bien $f(b) = \gamma$ ou bien $f(b) = \delta$ (il n'y a plus que 3 branches à cette étape) et ainsi de suite; les choix des images ne sont plus indépendants les uns des autres comme au paragraphe précédent.

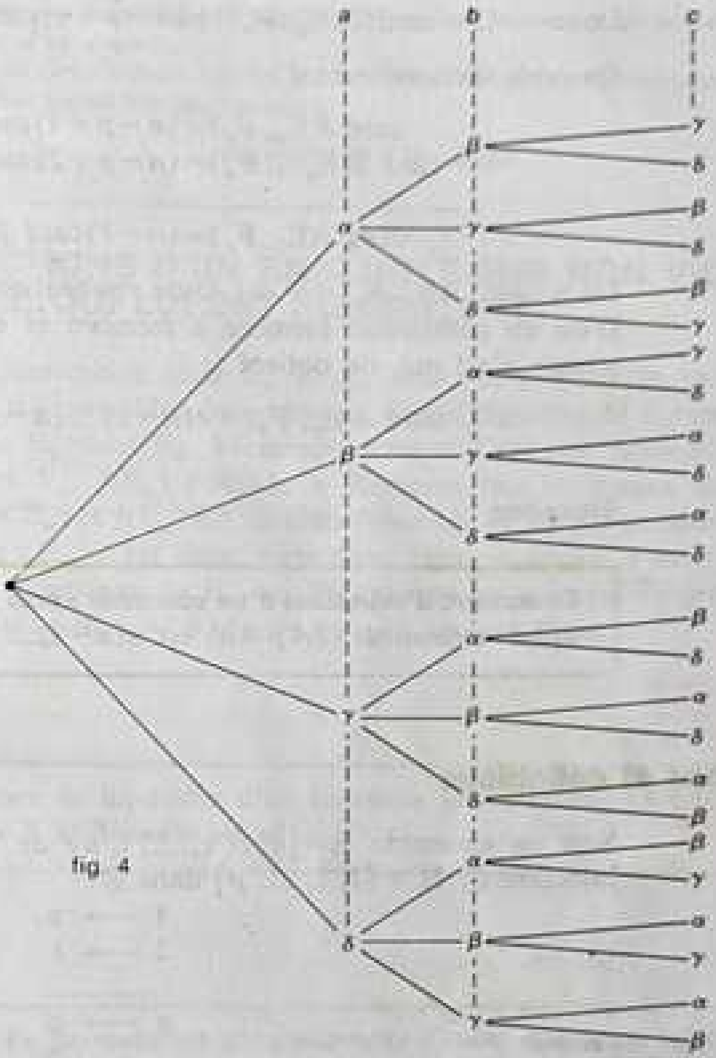



fig. 4

Le nombre de choix possibles pour $a$ est 4.
Le nombre de choix possibles pour $a$ et $b$ est $4 \times 3 = 12$.
Le nombre de choix possibles pour $a$, $b$ et $c$ est $4 \times 3 \times 2 = 24$.
Le nombre d'injections de $E_3$ vers $F_4$ est 24.

### b) Cas général

Soit $E_p$ et $E_n$ deux ensembles finis de cardinaux respectifs $p$ et $n$, désignons par $\mathcal{J}(E_p, F_n)$ l'ensemble des injections de $E_p$ dans $F_n$ $(1 \leq p \leq n)$.
Soit $a$ un élément de $E_p$ on a

$$E_p = E_{p-1} \cup \{a\}$$

où $E_{p-1}$ est le complémentaire de $\{a\}$ dans $E_p$ (card $E_{p-1} = p-1$). A toute injection de $E_p$ dans $F_n$ on peut associer sa restriction à $E_{p-1}$ qui est une application injective de $E_{p-1}$ dans $F_n$.
*Réciproquement* soit $\alpha$ une application injective de $E_{p-1}$ dans $F_n$ il y a $n-p+1$ prolongements injectifs possibles de $\alpha$ à $E_p$ (les $p-1$ éléments de $E_{p-1}$ ont $p-1$ images distinctes dans $F_n$, il y a donc $n-(p-1) = n-p+1$ images possibles pour $a$). Ces $n-p+1$ applications sont toutes distinctes car elles diffèrent par l'image de l'élément $a$.

Donc $\quad \text{card}(\mathcal{J}(E_p, F_n)) = (n-p+1)\text{card}(\mathcal{J}(E_{p-1}, F_n))$.

On écrit successivement :

$$\begin{aligned} \text{card } \mathcal{J}(E_p, F_n) &= (n-p+1)\text{card}(\mathcal{J}(E_{p-1}, F_n)) \\ \text{card } \mathcal{J}(E_{p-1}, F_n) &= (n-p+2)\text{card}(\mathcal{J}(E_{p-2}, F_n)) \\ &\cdots\cdots \\ \text{card } \mathcal{J}(E_2, F_n) &= (n-1)\text{card } \mathcal{J}(E_1, F_n). \end{aligned}$$

On a card $\mathcal{J}(E_1, F_n) = n$ car toute application de $E_1$ dans $F_n$ est injective. D'où en multipliant membre à membre et en simplifiant, car aucun des termes n'est nul, on obtient :

$$\text{card } \mathcal{J}(E_p, F_n) = n(n-1)\ldots(n-p+2)(n-p+1).$$

**Théorème**

> **Le nombre d'injections d'un ensemble ayant $p$ éléments dans un ensemble ayant $n$ éléments $(1 \leqslant p \leqslant n)$ est $n(n-1)\ldots(n-p+1)$.**

## c) Notations et définitions

Soit un ensemble $E = \{a, b, c, \ldots, t, u\}$ de cardinal $n$. Considérons une injection de $\mathbb{N}_p = \{1, 2, \ldots, p\}$ dans E :

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto b \\ 2 &\longmapsto t \\ &\cdots\cdots \\ p &\longmapsto a \end{aligned}$$

on obtient une $p$-liste $(b, t, \ldots, a)$ appelée **arrangement sans répétition de $p$ éléments** de E. Les éléments d'une telle $p$-liste sont tous distincts.
Le nombre de ces arrangements est le nombre d'injections de $\mathbb{N}_p$ dans E et se note $A_n^p$.
Soit un entier naturel $n \geqslant 1$. On note $n!$ et on lit « **factorielle $n$** » l'entier naturel : $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$.
On pose également $0! = 1$.
On peut écrire si $1 \leqslant p \leqslant n$ :

$$A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1) = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)(n-p)\ldots 2\cdot 1}{(n-p)\ldots 2\cdot 1}$$
$$= \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Par extension, si $n \in \mathbb{N}$, $A_n^0 = \dfrac{n!}{(n-0)!} = 1$.

**EXERCICES RÉSOLUS**

1. *Déterminer le nombre de façons de disposer 2 objets distincts dans 4 cases distinctes de sorte qu'il y ait au plus un objet par case.*
Le nombre de dispositions est le nombre d'injections de l'ensemble des objets dans l'ensemble des cases :

$$A_4^2 = 4 \times 3 = 12.$$

2. *20 chevaux participent à une course. Déterminer le nombre de tiercés dans l'ordre (il n'y a pas d'ex aequo).*
Le nombre de tiercés dans l'ordre est le nombre d'arrangements sans répétition de 3 chevaux pris parmi les 20 chevaux :

$$A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6\,840.$$

## 8.4 NOMBRE DE BIJECTIONS D'UN ENSEMBLE FINI NON VIDE SUR UN ENSEMBLE QUI LUI EST ÉQUIPOTENT

Soit deux ensembles finis $E_n$ et $F_n$ non vides ayant le même nombre d'éléments $n$ (ensembles équipotents). Toute bijection de $E_n$ sur $F_n$ est une injection de $E_n$ dans $F_n$. *Réciproquement* si $f$ est une application injective de $E_n$ dans $F_n$, $f(E_n)$ possède $n$ éléments (les $n$ images distinctes des éléments de $E_n$) et $f(E_n)$ est un sous-ensemble de $F_n$ qui possède $n$ éléments donc $f(E_n) = F_n$ ; $f$ est donc surjective, étant injective, $f$ est bijective. Le nombre de bijections de $E_n$ sur $F_n$ est égal au nombre d'injections de $E_n$ dans $F_n$ c'est-à-dire $A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$ Donc :

**Théorème**

> **Le nombre de bijections d'un ensemble à $n$ éléments ($n \in \mathbb{N}^*$) sur un ensemble à $n$ éléments est $n$!**

**Définition**

> **On appelle permutation d'un ensemble E non vide toute bijection de E sur lui-même.**

Il résulte du théorème précédent :

**Corollaire**

> **Le nombre des permutations d'un ensemble E de cardinal $n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est $n$!**

EXERCICE RÉSOLU

*Combien peut-on écrire de mots avec les lettres du mot MATHS, les lettres étant toutes employées et toutes une fois et une seule.*
Le nombre de mots ainsi définis est le nombre de permutations de l'ensemble $\{M, A, T, H, S\}$ : ce nombre est $5! = 120$. L'ensemble de ces mots ainsi définis est appelé l'ensemble des anagrammes du mot maths.

## Travaux pratiques

EXERCICE 1 *a) Soit $E = \{a, b, c\}$, déterminez les bijections de E sur E laissant invariant un seul élément et échangeant les deux autres éléments. (Une bijection échangeant deux éléments et laissant les autres éléments invariants s'appelle une transposition.)*

*b) Montrez que toute permutation de E est une transposition ou la composée de deux transpositions.*
Il y a $3!=6$ permutations de E, vous montrerez qu'il y a trois transpositions; les deux permutations différentes de l'identité et des transpositions sont appelées des permutations circulaires (expliquez pourquoi).

**EXERCICE 2** *Montrez que pour tout entier naturel non nul $n$ :*

$$2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n.$$

## 8.5 NOMBRE DE PARTIES DE CARDINAL DONNÉ D'UN ENSEMBLE FINI

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal $n$ ($n>0$). Désignons par $\mathscr{T}_p(E)$ l'ensemble des parties de E ayant $p$ éléments. On cherche à déterminer card $\mathscr{T}_p(E)$.

### a) Étude d'un ensemble

$E=\{a, b, c\}$. Déterminons les cardinaux des ensembles $\mathscr{T}_0(E)$, $\mathscr{T}_1(E)$, $\mathscr{T}_2(E)$, $\mathscr{T}_3(E)$.

$\mathscr{T}_0(E)=\{\varnothing\}$, card $\mathscr{T}_0(E)=1$
$\mathscr{T}_1(E)=\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, card $\mathscr{T}_1(E)=3$
$\mathscr{T}_2(E)=\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$, card $\mathscr{T}_2(E)=3$
$\mathscr{T}_3(E)=\{\{a, b, c\}\}$, card $\mathscr{T}_3(E)=1$.

### b) Cas général

• Si $p=0$, il y a une seule partie ne contenant aucun élément : card $\mathscr{T}_0(E)=1$.

• Supposons $p>0$, soit $\mathbb{N}_p$ le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ : $\{1, 2, ..., p\}$. Soit $i$ une injection de $\mathbb{N}_p$ dans E ($i$ existe car card $\mathbb{N}_p \leqslant$ card E). $i(\mathbb{N}_p)$ est un sous-ensemble de E ayant $p$ éléments (fig. 5).
Toute partie A à $p$ éléments de E peut être obtenue comme image par une injection de $\mathbb{N}_p$ dans E, mais il n'y a pas unicité du choix de l'injection. Cherchons le nombre d'injections $i$ de $\mathbb{N}_p$ dans E telles que $i(\mathbb{N}_p)=A$.

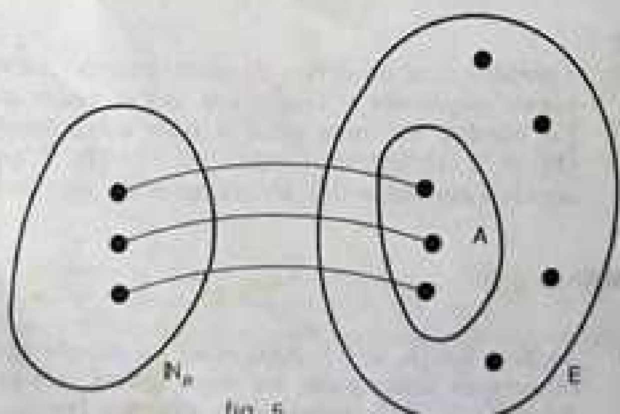


fig. 5

A chacune de ces injections $i$ on peut associer une bijection $b$ de $\mathbb{N}_p$ sur A telle que, pour tout $x$ de $\mathbb{N}_p$, on ait : $b(x)=i(x)$.
*Réciproquement* à toute bijection $b$ de $\mathbb{N}_p$ sur A on peut associer une injection $i$ de $\mathbb{N}_p$ dans E telle que, pour tout $x$ de $\mathbb{N}_p$, on ait : $i(x)=b(x)$ et on a $i(\mathbb{N}_p)=\mathrm{A}$.
Il y a donc autant d'injections $i$ de $\mathbb{N}_p$ dans E telles que $i(\mathbb{N}_p)=\mathrm{A}$ que de bijections de $\mathbb{N}_p$ sur A, c'est-à-dire $p!$ Par conséquent A est l'image de $\mathbb{N}_p$ par $p!$ injections d'où :

$$\operatorname{card} \mathcal{J}(\mathbb{N}_p, \mathrm{E})=p! \operatorname{card} \mathcal{T}_p(\mathrm{E})$$

$$\operatorname{card} \mathcal{T}_p(\mathrm{E})=\frac{\operatorname{card} \mathcal{J}(\mathbb{N}_p, \mathrm{E})}{p!}=\frac{\mathrm{A}_n^p}{p!}$$

$$=\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Ce résultat est encore vrai pour $p=0$ car $\frac{n!}{0!\,n!}=1=\operatorname{card} \mathcal{T}_0(\mathrm{E})$.

Une partie à $p$ éléments de E est appelée une **combinaison sans répétition de $p$ éléments** de E et on note alors leur nombre : $\mathrm{C}_n^p$.

On utilise aussi la notation $\binom{n}{p}$. Vous noterez les places différentes des indices $n$ et $p$ dans les deux symboles. En conclusion :

**Théorème**

> **Le nombre de parties à $p$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments $(0 \leq p \leq n)$ est**
>
> $$\mathrm{C}_n^p=\frac{\mathrm{A}_n^p}{p!}=\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

EXERCICES RÉSOLUS

1. *20 chevaux participent à une course. Déterminer le nombre de tiercés dans le désordre (on suppose qu'il n'y a pas d'ex aequo).*
Le nombre de tiercés dans le désordre est le nombre de combinaisons sans répétition de 3 chevaux pris parmi les 20 chevaux :

$$\mathrm{C}_{20}^3=\frac{20\times 19\times 18}{6}=1\,140.$$

Une calculatrice donne aussi bien :

$$\mathrm{C}_{20}^3=\frac{20!}{3!\,17!}=1\,140.$$

2. *Déterminer le nombre de mains de 8 cartes contenant exactement 1 as et 2 rois dans un jeu de 32 cartes.*

Il y a $\mathrm{C}_4^1=4$ choix de l'as. Il y a $\mathrm{C}_4^2=\frac{4\times 3}{2}=6$ choix des 2 rois.

Lorsqu'on a choisi 1 as et 2 rois, il reste $8-3=5$ cartes à choisir parmi $32-(4+4)=24$ cartes autres que des as et des rois. Le nombre de choix de 5 cartes parmi ces 24 cartes est $C_{24}^5$.
Le nombre de mains cherché est donc :

$$C_4^1 \times C_4^2 \times C_{24}^5 = 4 \times 6 \times \frac{24!}{5!19!} = 1\,020\,096.$$

## 8.6 PROPRIÉTÉS DES COEFFICIENTS $C_n^p$. TRIANGLE DE PASCAL

• $(\forall n \in \mathbb{N})$ $C_n^0 = C_n^n = 1$ (nombre de parties à 0 ou à $n$ éléments d'un ensemble de $n$ éléments).

• La formule trouvée, quels que soient les entiers naturels $n$ et $p$ tels que $p \leq n$,

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{1}$$

montre que $C_n^p = C_n^{n-p}$. Cette dernière égalité est également évidente en remarquant que chaque fois que l'on forme une partie A à $p$ éléments dans un ensemble E à $n$ éléments, le complémentaire de A dans E est une partie à $n-p$ éléments. Il y a donc autant de parties à $p$ éléments que de parties à $n-p$ éléments.

• A l'aide de la formule (1) on peut calculer $C_n^p + C_n^{p+1}$ et vérifier que, quels que soient les entiers naturels $n$ et $p$ tels que $p+1 \leq n$, on a :

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}. \tag{2}$$

On peut aussi démontrer (2) par un raisonnement « direct » :
Soit un ensemble E à $n+1$ éléments. Considérons un élément $a$ de E. Le nombre de parties de E à $p+1$ éléments, contenant $a$, est le nombre de parties à $p$ éléments de $E-\{a\}$ auxquelles on adjoint $a$. Ce nombre est donc $C_n^p$.
Le nombre de parties de E à $p+1$ éléments, ne contenant pas $a$, est $C_n^{p+1}$.
Le nombre total de parties de E à $p+1$ éléments est donc :

$$C_n^p + C_n^{p+1}.$$

C'est aussi $C_{n+1}^{p+1}$.

En résumé :

**Formules**

**Quel que soit l'entier naturel $n$, $C_n^0 = C_n^n = 1$.**
**Quels que soient les entiers naturels $n$ et $p$ tels que $p \leq n$,**

$$C_n^p = C_n^{n-p}.$$

**Quels que soient les entiers naturels $n$ et $p$ tels que $p+1 \leq n$,**

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}.$$

La dernière relation permet de calculer les nombres $C_n^p$ de proche en proche. On obtient un tableau appelé **triangle de Pascal.**

| $n \backslash p$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 |

Les nombres de la $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne s'obtiennent à partir des nombres de la $n^{\text{ième}}$ ligne en utilisant la troisième formule ($C_6^2 = C_5^2 + C_5^1$ c'est-à-dire $15 = 10 + 5$).

## 8.7 BINÔME DE NEWTON

Soit $a$ et $b$ deux nombres réels, ou complexes, cherchons à effectuer

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b),$$

$n$ étant un entier naturel non nul.

Le développement est la somme de termes de la forme $a^p b^{n-p}$. Il y a $C_n^p$ manières de choisir les $p$ facteurs où l'on prendra $a$, on prendra alors $b$ dans les facteurs restants. Le coefficient de $a^p b^{n-p}$ est donc $C_n^p$. En faisant varier $p$ de 0 à $n$, on déduit la formule du binôme de Newton :

**Théorème**

**Quels que soient les réels ou complexes $a$ et $b$ et l'entier naturel non nul $n$ :**

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}. \qquad (1)$$

Les nombres $C_n^p$ sont appelés **coefficients binomiaux.**
La formule du binôme peut aussi s'écrire :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^{n-p} a^{n-p} b^p$$

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p \quad \text{(puisque } C_n^p = C_n^{n-p}\text{)}. \tag{2}$$

On utilisera l'une ou l'autre des formules (1) ou (2) suivant que l'on veut ordonner suivant les puissances croissances ou décroissantes de $a$.

**REMARQUE** Une autre démonstration de la formule du binôme est proposée à l'exercice 8.31.

**EXEMPLE** Calculons le développement de $(a+b)^6$. Les coefficients binomiaux peuvent être calculés à l'aide du triangle de Pascal.
On lit sur la ligne $n=6$ :

$$C_6^0 = 1, \quad C_6^1 = 6, \quad C_6^2 = 15, \quad C_6^3 = 20, \quad C_6^4 = 15, \quad C_6^5 = 6, \quad C_6^6 = 1$$

d'où $$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

## 8.8 NOMBRE DE PARTIES D'UN ENSEMBLE FINI

• Si $n \in \mathbb{N}^*$, en faisant $a=b=1$ dans la formule du binôme, on déduit :

$$\boxed{2^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p}$$

or $C_n^p$ est le nombre de parties à $p$ éléments d'un ensemble E à $n$ éléments.
En faisant varier $p$ de 0 à $n$, la somme $\sum_{p=0}^{n} C_n^p$ est donc le nombre de toutes les parties de E.

• Si $n=0$, on ne peut plus appliquer la formule du binôme. Mais le nombre de toutes les parties de E est encore $2^0 = 1$. Donc :

**Théorème**

**Le nombre de parties d'un ensemble ayant $n$ éléments ($n \in \mathbb{N}$) est : $2^n$.**

# Exercices

4×3×3 2×2×1×1 = 4×9×4 = 16×9

### Ensembles équipotents. Ensembles finis

**8.1** Montrer que toute injection entre deux ensembles finis ayant le même cardinal est une bijection.

**8.2** Montrer que toute surjection entre deux ensembles finis ayant le même cardinal est une bijection.

**8.3** Soit E et F deux ensembles finis non vides, $f$ une application de E dans F.

1. Montrer que si $f$ est surjective alors
$$\text{card } E \geq \text{card } f(E) = \text{card } F.$$
2. Montrer que si $f$ est injective alors
$$\text{card } E = \text{card } f(E) \leq \text{card } F.$$
3. Montrer que si $f$ est bijective alors
$$\text{card } E = \text{card } f(E) = \text{card } F.$$

### Arbre

**8.4** Dans un tournoi deux joueurs A et B s'affrontent, le gagnant sera le joueur qui gagne deux parties de suite ou un total de trois parties. Déterminer tous les résultats possibles à l'aide d'un arbre.

### Dénombrements

**8.5** De combien de manières peut-on ranger cinq objets différents dans trois boîtes (une boîte peut contenir 0, 1, 2, 3, 4, 5 objets).

**8.6** Combien peut-on former de mots de 1, 2, 3, 4 ou 5 lettres avec les lettres du mot MATHS (une lettre peut être répétée jusqu'à 5 fois).

**8.7** Un numéro de téléphone comporte 8 chiffres (un chiffre peut être répété jusqu'à 8 fois).

1. Déterminer le nombre de numéros possibles.
2. Déterminer le nombre de numéros possibles sachant que les deux premiers chiffres ne peuvent être
10-11-12-13-14-15-16-17-18-19.

**8.8** Une personne veut prendre 0 ou 1 ou plusieurs objets parmi 10 objets. Déterminer le nombre de choix possibles.

**8.9** 1. Combien peut-on écrire de nombres différents avec 4 chiffres distincts à choisir parmi les 5 chiffres 1, 2, 3, 4, 5?

2. Dans les mêmes conditions qu'à la question précédente, combien peut-on en écrire dont le chiffre des unités est 1?

**8.10** Le foyer d'un lycée comporte 40 adhérents, déterminer le nombre de bureaux comprenant un président, un vice-président et un trésorier.

**8.11** Soit $n$ un entier naturel. Résoudre l'équation
$$2A_n^2 + 50 = A_{2n}^2.$$

**8.12** Montrer que $A_n^p = pA_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p$.

**8.13** On considère trois personnes voulant manger chacune un gâteau. Il y a 5 gâteaux, combien y a-t-il de choix possibles?

**8.14** Cinq enfants se mettent en rang. Combien y a-t-il de manières de les disposer les uns derrière les autres?

**8.15** Reprendre l'exercice précédent dans le cas où les 5 enfants doivent faire une ronde.

**8.16** Généraliser les deux exercices précédents dans le cas de $n$ enfants.

**8.17** Quatre garçons et deux filles veulent s'asseoir sur un banc. Sachant que les deux filles veulent rester l'une à côté de l'autre déterminer le nombre de manières de les disposer sur le banc.

**8.18** Quatre filles et trois garçons veulent s'asseoir sur un banc. Déterminer le nombre de manières de les disposer sur le banc sachant que :

1. Les garçons sont les uns à côté des autres ainsi que les filles.
2. Il n'y a pas de garçon à côté l'un de l'autre, ni de fille à côté l'une de l'autre.

**8.19** Déterminer le nombre d'anagrammes du mot THÉORÈME (chacune des lettres figure une seule fois) dans chacun des deux cas :

1. Les accents permettront de distinguer les E.
2. En supprimant les accents.

**8.20** En s'inspirant de l'exercice précédent, déterminer le nombre d'anagrammes du mot MAMAN.

**8.21** Reprendre l'exercice précédent avec le mot BACCALAURÉAT.

**8.22** Dans un jeu de 32 cartes combien peut-on former de mains de 8 cartes contenant :

1. 3 piques exactement.
2. 2 piques et 2 carreaux exactement.
3. 1 roi et 1 trèfle exactement.

**8.23** Dans une classe il y a 20 garçons et 13 filles, sachant que l'on doit élire deux délégués déterminer :

1. Le nombre de choix possibles.
2. Le nombre de choix possibles sachant qu'il doit y avoir un garçon et une fille.

**8.24** Dans une colonie de vacances il y a 30 filles, 25 garçons et 5 moniteurs. Cette colonie pour faire une excursion possède un mini-bus de 12 places. Sachant que doivent partir deux moniteurs déterminer :

**1.** Le nombre de remplissages possibles du mini-bus.

**2.** Le nombre de remplissages possibles sachant que seul l'un des moniteurs connaît le lieu de l'excursion et doit donc nécessairement la faire.

**3.** Le nombre de remplissages sachant que deux des moniteurs ne peuvent monter ensemble.

**4.** Le nombre de remplissages sachant que deux des moniteurs ne peuvent monter qu'ensemble.

**8.25** A un jeu télévisé un candidat doit répondre à 7 questions sur un total de 10.

**1.** Combien de choix a-t-il?

**2.** Combien de choix a-t-il sachant qu'il doit répondre aux trois premières questions?

**3.** Combien de choix a-t-il s'il doit répondre à 3 des 4 premières questions?

**8.26** Combien de mains de 13 cartes peut-on constituer dans un jeu non truqué de 52 si :

**1.** Elles contiennent les quatre rois.

**2.** Elles contiennent exactement un roi.

**3.** Elles contiennent au moins un roi.

**4.** Elles contiennent le roi de trèfle et au moins quatre piques.

**5.** Elles contiennent exactement 5 cartes d'une couleur, 4 d'une autre, 3 d'une autre et 1 d'une autre.

**8.27** Quatre joueurs décident de jouer aux dominos, chacun recevant 7 dominos au hasard. Combien y a-t-il de distributions possibles des 28 dominos?

**8.28** Un groupe de quatre personnes se partagent un jeu de 32 cartes (8 cartes chacune). Combien y a-t-il de distributions possibles?

**8.29** Un sac contient 7 boules rouges et 3 boules noires. Déterminer le nombre de manières de tirer deux boules de même couleur.

## Coefficients binomiaux

**8.30** Démontrer la formule du binôme de Newton en utilisant une démonstration par récurrence.

**8.31** Montrer que, quels que soient les entiers $n$ et $p$ tels que $1 \leqslant p \leqslant n$,

$$pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}.$$

**8.32** Montrer que quels que soient les entiers $n$, $p$, $q$ tels que $n \geqslant p \geqslant q \geqslant 0$,

$$C_n^p C_{n-q}^{p-q} = C_n^p C_p^q.$$

**8.33** Calculer les sommes suivantes :

**1.** $A = C_p^p + C_{p+1}^p + \dots + C_n^p$.

**2.** $B = 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + (n-2)(n-1)n$.

**3.** $S_1 = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p, \quad S_2 = \sum_{p=0}^{n} 2^p C_n^p$

$$S_3 = \sum_{0 \leqslant 2p \leqslant n} C_n^{2p}, \quad S_4 = \sum_{0 \leqslant 2p+1 \leqslant n} C_n^{2p+1}.$$

**8.34*** Calculer les sommes suivantes

$$S_1 = C_p^q + C_{p-1}^{q-1} + C_{p-2}^{q-2} + \dots + C_{p-q+1}^1 + 1$$

$$S_2 = C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n$$

$$S_3 = 1 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^n.$$

**8.35** Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation

$$C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 = \frac{5}{3}n^2 - \frac{4}{3}n.$$

## Révision

X **8.35** Raymond Queneau, dans l'un de ses ouvrages, propose quatorze ensembles, $E_1$, $E_2$, ..., $E_{14}$ contenant dix vers chacun.
Pour composer un poème, il suggère de choisir un vers dans chaque ensemble.
Le vers choisi dans $E_1$ est le premier vers du poème.
Le vers choisi dans $E_2$ est le deuxième vers du poème, etc.
Cette règle sera respectée dans toute la suite.

**1.** Raymond Queneau intitule son ouvrage : « Cent mille milliards de poèmes. » Le titre est-il exact?

**2.** Deux vers de $E_{14}$ se terminent par le mot « destin ».
Combien y a-t-il de poèmes se terminant par « destin »?

**3.** L'un des poèmes est le suivant :

*Le vieux marin breton de tabac prit sa prise*
*D'aucuns par-dessus tout prisent les escargots*
*Sur l'antique bahut il choisit sa cerise*
*Qui sait si le requin boulotte les turbots?*

*Le cheval Parthénon frissonnait sous la bise*
*Qui clochard devenant jetait ses oripeaux*
*Un frère même bas est la part indécise*
*Elle effraie le Berry comme les morvandiaux*

*Le loup est amateur de coq et de cocotte*
*On comptait les esprits acérés à la hotte*
*Il voudra retrouver le germe adultérin*

*Sa sculpture est illustre et dans le fond des coques*
*On s'excuse il n'y a ni baleines ni phoques*
*Le mammifère est roi nous sommes son cousin*

(Atlas de Littérature Potentielle
collection idées, éd. Gallimard)

Combien y a-t-il de poèmes ne contenant aucun de ces quatorze vers?
Combien y a-t-il de poèmes contenant exactement trois de ces quatorze vers?

**4.** On s'intéresse maintenant aux poèmes fabriqués selon la règle (R) suivante : aucun mot ne doit rimer avec lui-même, c'est-à-dire que le mot final de deux vers différents ne peut être le même. Or, dans les 140 vers composant les 14 ensembles, le mot « marchandise » est le seul mot terminant deux vers situés dans des ensembles différents, à savoir $E_5$ et $E_7$.

Combien y a-t-il de poèmes satisfaisant à la règle (R)? Et combien d'entre eux finissent par le mot « destin »?

(*Bac. $A_1$, Orléans* 1984.)

**8.36** I. On donne dans le plan $n$ droites sécantes deux à deux, trois quelconques d'entre elles n'étant pas concourantes. On se propose de calculer le nombre de régions du plan qu'elles déterminent, ces régions étant des ensembles de points disjoints deux à deux.
Soit $u_p$ le nombre de ces régions déterminées par $p$ droites $(1 \leqslant p \leqslant n-1)$.

**1.** Trouver une relation entre $u_p$ et $u_{p+1}$.

**2.** En déduire $u_n$ en fonction de $n$.

**3.** Contrôler le résultat précédent avec une figure pour $n = 4$.

II. On donne $n$ points distincts $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ $(n \geqslant 3)$ coplanaires, trois quelconques de ces points n'étant pas alignés.

**1.** Calculer le nombre de droites joignant les points $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ deux à deux.

**2.** On suppose ces droites sécantes deux à deux.

*a*) Dénombrer les paires de droites passant par un point $A_i (1 \leqslant i \leqslant n)$.

*b*) En déduire le nombre de points d'intersection des droites précédentes autre que les points $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$.

**3.** Vérifier les résultats précédents en faisant une figure pour $n = 4$.

**8.37** **1.** Dénombrer les applications de $\{a, b, c\}$ dans $\{1; 2\}$. Parmi les applications précédentes, dénombrer celles qui ne sont pas surjectives et celles qui sont surjectives (on rappelle qu'une application est surjective si tous les éléments de l'ensemble d'arrivée admettent au moins un antécédent).

**2.** Soit E un ensemble de cardinal $n (n \geqslant 3)$.
Dénombrer les applications de E dans $\{1, 2\}$. Parmi ces applications, dénombrer celles qui ne sont pas surjectives et celles qui sont surjectives.

**3.** Dénombrer les applications de E dans $\{1, 2, 3\}$.
Dénombrer les applications de E dans $\{1, 2, 3\}$ ayant pour image $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ ou $\{1, 3\}$.
Dénombrer celles qui ont pour image $\{1\}$, $\{2\}$ ou $\{3\}$.
Dénombrer les applications non surjectives de E dans $\{1, 2, 3\}$.
Dénombrer les applications surjectives de E sur $\{1, 2, 3\}$.

**4.** Soit F un ensemble de cardinal $n - 1$ et $f$ une application de l'ensemble E précédent dans F.

*a*) Démontrer que $f$ est surjective si et seulement si 2 éléments de E ont même image et tous les autres ont des images distinctes et distinctes de la précédente.

*b*) Dénombrer les façons de choisir 2 éléments de E et leur image commune dans F.

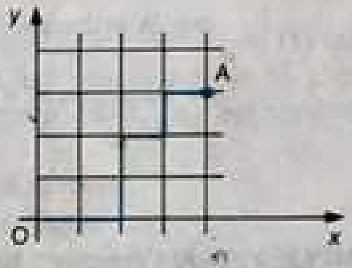
*c*) Dénombrer les surjections de E sur F.

*d*) Application : dénombrer les surjections de $\{a, b, c, d\}$ sur $\{1, 2, 3\}$.

**5.** Dénombrer les applications non surjectives d'un ensemble à $n$ éléments dans lui-même.

**8.38** Sur un quadrillage (ensemble de points dont les coordonnées sont des entiers naturels) dans un repère orthonormé d'origine O.

**1.** On donne $A(n, p)$. Trouver le nombre de chemins OA allant de O vers A (on se déplace parallèlement aux axes de coordonnées dans le sens positif de chacun des axes).




**2.** Soit $B(i, j)$ un point de quadrillage $(0 \leqslant i \leqslant n$ et $0 \leqslant j \leqslant p)$. Trouver le nombre de chemins OA passant par B.

**3.** On suppose $n = p$.
Trouver le nombre total de chemins OA passant par B lorsque $i$ et $j$ varient de manière que $i + j = n$.

En déduire $\sum_{i=0}^{n} (C_n^i)^2$.

**4.** Calculer $\sum_{i=0}^{n} i(C_n^i)^2$.

# 9 PROBABILITÉS

## 9.1 INTRODUCTION

**EXEMPLE 1** Soit l'épreuve : tirer au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. Si le jeu n'est pas truqué toutes les cartes peuvent être tirées (nous dirons que tous les tirages sont possibles) et ont « la même chance » d'être tirées : on dit qu'elles ont la même probabilité d'être tirées ou encore que tous les tirages sont *équiprobables*.
A ce tirage d'une carte correspond 32 résultats possibles. On a donc « une chance sur 32 » de tirer une carte quelconque fixée (par exemple le roi de carreau) on dit que la probabilité de tirer le roi de carreau est $\frac{1}{32}$. On dit aussi que la probabilité de l'événement « tirer le roi de carreau » est $\frac{1}{32}$.

**EXEMPLE 2** Soit l'épreuve : lancer un dé non pipé (non truqué) c'est-à-dire un dé tel que toutes les faces ont « la même chance d'apparaître ». Il y a 6 résultats possibles et les 6 résultats possibles sont équiprobables.

Sachant qu'il n'y a qu'un seul 5 la probabilité d'obtenir 5 en un lancer est $\frac{1}{6}$ (la probabilité de l'événement « tirer 5 » est $\frac{1}{6}$).

**EXEMPLE 3** On tire au hasard 4 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien a-t-on « de chances », quelle est la probabilité de tirer 4 cœurs? L'expression « au hasard » signifie que tous les tirages de 4 cartes sont possibles et ont « la même chance » de se réaliser, on dit que tous les tirages sont équiprobables.
Le nombre de tirages possibles est $C_{32}^{4}$ (un tirage correspond à un sous-ensemble de 4 cartes).
Le nombre de tirages contenant 4 cœurs (on dit tirage favorable pour l'épreuve considérée) est $C_{8}^{4}$ car un tirage favorable correspond à un sous-ensemble de 4 cœurs pris parmi les 8 du jeu.
On a donc $C_{8}^{4}$ chances sur $C_{32}^{4}$ de tirer 4 cœurs, on dit que la probabilité de tirer 4 cœurs est $\frac{C_{8}^{4}}{C_{32}^{4}}$. Soit A l'événement « tirer 4 cœurs en tirant 4 cartes d'un jeu de 32 ». La probabilité de réaliser A est :

$$P(A)=\frac{C_{8}^{4}}{C_{32}^{4}}=\frac{70}{35\,960}=\frac{7}{3\,596}=0{,}0019.$$

## 9.2 DÉFINITIONS

Des considérations intuitives précédentes nous allons dégager quelques définitions et propriétés.
On considère un ensemble non vide $\Omega$ (ensemble des **éventualités**) associé à une épreuve donnée. Cet ensemble $\Omega$ est appelé un **univers**.
On se limitera aux épreuves où le nombre d'éventualités est fini, dans tout le chapitre l'univers $\Omega$ sera donc un ensemble non vide fini. Les éléments de l'univers $\Omega$ (éventualités) seront aussi appelés les **cas possibles**.
On appelle **événement** toute partie de $\Omega$ c'est-à-dire tout élément de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de $\Omega$.

EXEMPLE On lance deux fois de suite une pièce de monnaie et on note le côté vu de la pièce (P pour pile et F pour face). L'univers associé à cette épreuve est

$$\Omega = \{(P, P); (P, F); (F, P); (F, F)\}.$$

Soit A l'événement « obtenir le même résultat au cours des deux lancers » on a :

$$A = \{(P, P); (F, F)\}.$$

REMARQUE Si card $\Omega = n$, le nombre d'événements c'est-à-dire le nombre de parties de $\Omega$ est $2^n$.

Un événement qui contient une seule éventualité (singleton de $\Omega$) est appelé un **événement élémentaire**. Un événement est une partie de $\Omega$ c'est-à-dire un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ donc si $a$ est un élément de $\Omega$, $\{a\}$ est un événement élémentaire.
La partie pleine $\Omega$ est appelée **l'événement certain.**
La partie $\varnothing$ est appelée **l'événement impossible.**
Le complémentaire dans $\Omega$ de l'événement (partie) A est appelé **l'événement contraire** de A on le note $\overline{A}$.
$A \cap B$ est **l'événement « A et B »**. Dire que « A et B » est réalisé cela signifie que les événements A et B se produisent simultnément.
$A \cup B$ est **l'événement « A ou B »**. Dire que « A ou B » est réalisé cela signifie que l'un au moins des événements A ou B se produit.
Si A et B sont disjoints c'est-à-dire si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont deux **événements incompatibles.**

## 9.3 PROBABILITÉ SUR UN ENSEMBLE FINI. PROPRIÉTÉS

Nous supposerons que $\Omega$ est un univers fini non vide :

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}.$$

Un événement quelconque A est une partie de $\Omega$. Si elle n'est pas vide, c'est la réunion d'événements élémentaires et nous écrirons :

$$A = \bigcup_{i \in I} \{\omega_i\}.$$

où I est inclus dans $\{1, 2, \ldots, n\}$.

## a) Probabilité

**Définition**

**Soit un univers $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Une probabilité sur cet univers est une application**

$$P : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

**définie par :**

**(1) la donnée des probabilités des événements élémentaires**

$$(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}) \quad P(\{\omega_i\}) = p_i$$

**où $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont des nombres réels positifs dont la somme est 1;**

**(2) $P(\varnothing)=0$;**

**(3) pour tout événement non vide $A=\bigcup_{i\in I}\{\omega_i\}$, $P(A)=\sum_{i\in I} p_i$.**

## b) Propriétés d'une probabilité

1. $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ donc, d'après (3), $P(\Omega)=p_1+p_2+\dots+p_n=1$.

$$\boxed{P(\Omega)=1}$$

2. Étudions la probabilité de la réunion de plusieurs événements. Considérons, tout d'abord, deux événements *incompatibles* :

- Soit A un événement quelconque et l'ensemble vide $\varnothing$ :

$$P(A\cup\varnothing)=P(A)=P(A)+0=P(A)+P(\varnothing).$$

- Soit A et B deux événements incompatibles et non impossibles (c'est-à-dire non vides) :

$$A=\bigcup_{i\in I}\{\omega_i\} \quad \text{et} \quad B=\bigcup_{i\in J}\{\omega_i\} \quad \text{avec} \quad I\cap J=\varnothing.$$

Donc
$$A\cup B=\bigcup_{i\in I\cup J}\{\omega_i\}$$

$$P(A\cup B)=\sum_{i\in I\cup J} p_i=\sum_{i\in I} p_i+\sum_{i\in J} p_i=P(A)+P(B).$$

On peut résumer les deux cas étudiés :

pour tout couple (A, B) d'événements incompatibles

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

3. Vous démontrerez aisément par récurrence que

> si $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sont des événements incompatibles deux à deux
> $$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p) = \sum_{i=1}^{p} P(A_i).$$

4. Si A et B sont des événements *quelconques* (A et B ne sont plus nécessairement incompatibles). On remarque (fig. 1) que

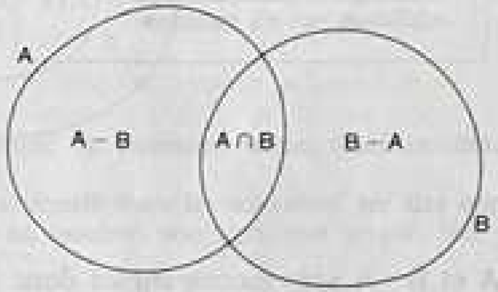



fig. 1

$$A \cup B = A \cup (B - A)$$

A et $B - A$ sont incompatibles donc

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A). \quad (4)$$

$B - A$ et $A \cap B$ sont incompatibles donc :

$$P[(B - A) \cup (A \cap B)] = P(B - A) + P(A \cap B)$$

c'est-à-dire : $P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$

d'où : $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

que l'on reporte dans (4) :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Donc

> pour tout couple (A, B) d'événements :
> $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**REMARQUE** Les trois formules donnant la probabilité de la réunion d'événements sont à rapprocher de celles donnant le cardinal de la réunion d'ensembles finis (cf. § 8.1. c). On remplacera P par card.

5. Soit A un événement quelconque et $\overline{A}$ l'événement contraire. Ces deux événements sont incompatibles donc

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

c'est-à-dire $P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$

$$1 = P(A) + P(\overline{A})$$

d'où $\boxed{(\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)) \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$

**REMARQUE** Pour calculer P(A), il est parfois plus simple de commencer par calculer la probabilité de l'événement contraire $P(\overline{A})$.

6. Soit A et B deux événements tels que $A \subset B$ (fig. 2).

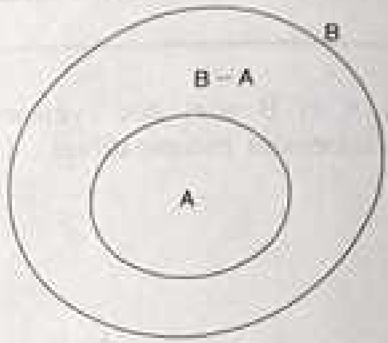



fig. 2

A et B − A sont incompatibles donc :

$$P[A \cup (B-A)] = P(A) + P(B-A)$$

c'est-à-dire :
$$P(B) = P(A) + P(B-A).$$

Comme $P(B-A) \geq 0$, on déduit que, si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.
En particulier on a $A \subset \Omega$ donc $P(A) \leq 1$. On peut résumer ces résultats en disant que :

> P est une application croissante de $(\mathscr{P}(\Omega), \subset)$ dans $([0, 1], \leq)$.

## 9.4 ÉQUIPROBABILITÉ

**Définition**

> **Soit P une probabilité sur un univers fini, on dit qu'il y a équiprobabilité si et seulement si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.**

Dans le cas d'équiprobabilité, on dit que P est une **probabilité uniforme** sur **$\Omega$**. Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ (card $\Omega = n$) on a

$$P(\{\omega_1\}) + \ldots + P(\{\omega_n\}) = 1.$$

S'il y a équiprobabilité on a

$$P(\{\omega_1\}) = \ldots = P(\{\omega_n\})$$

d'où
$$(\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}) \quad P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}.$$

Si A est un événement réunion de $k$ événements élémentaires on a

$$\boxed{P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}}$$

Chacun des éléments contenus dans A est appelé un **cas favorable** on a donc **dans le cas de l'équiprobabilité :**

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}}$$

**REMARQUES** Le calcul de probabilité se ramènera donc, dans ce cas, à deux calculs de dénombrement.

L'équiprobabilité sera signalé dans les exercices par des expressions comme : au hasard, indiscernable au toucher, non pipé, non truqué, etc.

**EXERCICE 1** *On tire au hasard 5 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 cœurs exactement parmi les 5 cartes tirées?*

Le mot « au hasard » signifie que l'on est dans le cas d'équiprobabilité.

Le nombre de cas possibles associés à cette épreuve est le nombre de manières de tirer 5 cartes parmi 32 : $C_{32}^5$.

Le nombre de cas favorables c'est-à-dire le nombre de manières de tirer 5 cartes contenant exactement 3 cœurs s'obtient ainsi : le nombre de manières de tirer 3 cœurs parmi les 8 cœurs est $C_8^3$; les deux cartes qui doivent compléter la main ne doivent pas être des cœurs et sont donc à prendre parmi les $32 - 8 = 24$ cartes qui ne sont pas des cœurs, il y a $C_{24}^2$ manières de les prendre.

A chaque choix des cœurs on peut associer tous les choix possibles des deux cartes qui ne sont pas des cœurs donc le nombre de mains favorables est $C_8^3 \times C_{24}^2$.

La probabilité de l'événement « tirer 3 cœurs exactement sur 5 cartes » est :

$$\frac{C_8^3 \times C_{24}^2}{C_{32}^5} = \frac{69}{3\,596} \simeq 0,019.$$

**EXERCICE 2** *On lance deux dés non pipés. Déterminer la probabilité de l'événement A : obtenir 6 en faisant la somme des deux nombres lus.*

Les deux dés étant non pipés, il y a équiprobabilité des couples de résultats possibles qui sont au nombre de 36. Les couples favorables c'est-à-dire les couples dont la somme fait 6 sont :

$$(1, 5); \quad (5, 1); \quad (2, 4); \quad (4, 2); \quad (3, 3).$$

Il y a donc 5 cas favorables. D'où la probabilité de réaliser A :

$$P(A) = \frac{5}{36} \simeq 0,139.$$

**EXERCICE 3** *Une urne contient trois boules blanches et quatre boules rouges indiscernables au toucher.*

1. *On tire simultanément deux boules de l'urne, déterminer la probabilité $p_1$ de tirer deux boules rouges.*

2. *On tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et l'on tire une deuxième boule. Quelle est la probabilité $p_2$ de tirer deux boules rouges.*

**1.** Il y a équiprobabilité, car les boules sont indiscernables au toucher. Nombre de cas possibles : il y a sept boules donc $C_7^2$ manières de prendre deux boules. Nombre de cas favorables : il y a quatre boules rouges donc $C_4^2$ manières de prendre deux boules roues

$$p_1 = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{4 \times 3}{2!} \times \frac{2!}{7 \times 6} = \frac{2}{7} \approx 0,286.$$

**2.** Il y a $7^2$ manières de prendre les deux boules (nombre d'applications d'un ensemble à deux éléments, les deux tirages, dans un ensemble à sept éléments). De même le nombre de cas favorables est $4^2$ d'où

$$p_2 = \frac{4^2}{7^2} \approx 0,327.$$

**REMARQUE** Lorsque le tirage de différentes boules dans une urne se fait sans remise on parle de **tirage exhaustif**, lorsqu'il y a remise de la boule dans l'urne après chaque tirage on parle de **tirage Bernoullien.**

## 9.5 TRAVAUX PRATIQUES

**EXERCICE 1** *Dans un aquarium, il y a : 5 poissons rouges, 3 poissons noirs et 2 poissons argentés.*
*Avec une épuisette, on pêche au hasard trois poissons que l'on met dans un bocal.*
*Déterminez la probabilité des événements suivants :*
A : *les 3 poissons sont de même couleur*
B : *les 3 poissons sont de trois couleurs différentes*
C : *les 3 poissons sont de deux couleurs exactement.*

« Au hasard » indique qu'il y a équiprobabilité. L'événement A : « les trois poissons sont de même couleur » signifie que les trois poissons sont rouges ou que les trois sont noirs et ces deux événements sont incompatibles. L'événement C est l'événement contraire de $A \cup B$.

Les réponses sont : $P(A) = \frac{11}{120}$; $P(B) = \frac{1}{4}$; $P(C) = \frac{79}{120}$.

**EXERCICE 2** *On dispose d'un dé à six faces portant les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6. On lance le dé une fois; k étant un entier naturel, $1 \leq k \leq 6$, $p_k$ désigne la probabilité d'obtenir le numéro k. Ce dé est déséquilibré de façon que $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$, $p_5$, $p_6$ sont, dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite arithmétique.*

*Calculez sous forme de fractions irréductibles, $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$, $p_5$ sachant que $p_6 = \frac{1}{12}$.*

Il n'y a pas équiprobabilité; on a $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$, $p_6 = \frac{1}{12}$ et $p_1, p_2, \ldots, p_6$ sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique.
Les réponses sont :

$$p_1 = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}, \quad p_2 = \frac{13}{60}, \quad p_3 = \frac{11}{60}, \quad p_4 = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}, \quad p_5 = \frac{7}{60}, \quad p_6 = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}.$$

**EXERCICE 3** *On obtient une grille en noircissant certaines cases du tableau :*

| | *a* | *b* | *c* | *d* |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |

**1.** *Combien de grilles différentes peut-on obtenir, sachant qu'on peut noircir un nombre quelconque de cases de 0 à 16?*

**2.** *Combien peut-on obtenir de grilles ayant exactement 3 cases noires?*

**3.** *Deux joueurs* A *et* B *disposent l'un et l'autre d'un tel tableau; chacun noircit 3 cases au hasard (on se place donc dans une situation d'équiprobabilité).*
*Si* A *a noirci* $(a, 2)$, $(b, 4)$ *et* $(d, 3)$, *quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :*
$E_1$ : B *a une et une seule case noire commune avec* A?
$E_2$ : B *n'a aucune case noire commune avec* A?
$E_3$ : B *a au moins une case noire commune avec* A?
*Vous donnerez les résultats sous forme de fractions irréductibles.*

Indications :

**1.** Le nombre de grilles différentes est le nombre de 16-listes d'éléments de l'ensemble {noircie, pas noircie}.

**2.** C'est déterminer le nombre de sous-ensembles à 3 éléments dans l'ensemble des 16 cases.

**3.** $P(E) = \dfrac{3\,C_{13}^2}{C_{16}^3} = \dfrac{117}{280}$; $\quad P(E_2) = \dfrac{C_{13}^3}{C_{16}^3} = \dfrac{143}{280}$; $\quad E_3 = \overline{E_2}$.

$C^2_7$ $C^2_5 \times C^2_{...}$

$\text{Card}(\Omega) = C^2_{10}$ $P = \frac{C^2_5}{C^2_{10}}$

# Exercices

**9.1** Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher, 3 blanches et 2 rouges. On tire simultanément 3 boules. Quelle est la probabilité pour que :

**1.** Deux boules et deux seulement soient blanches?

**2.** Une et une seule boule soit blanche?

**3.** Trois boules soient blanches?

**9.2** On jette deux dés non pipés. Quelle est la probabilité pour que la somme des nombres apparus soit paire?

**9.3** On jette trois dés non pipés. Quelle est la probabilité pour que la somme des nombres apparus soit égale à 15?

**9.4** Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 4 rouges, 4 bleues et 2 blanches.

**1.** On tire simultanément 3 boules.
Quelle est la probabilité de tirer exactement 1 boule de chaque couleur?

**2.** Même question lorsque le tirage est bernoullien (on fait 3 tirages successifs d'une boule en la remettant chaque fois dans l'urne).

**9.5** On tire simultanément 3 cartes d'un jeu non truqué de 52.

**1.** Quelle est la probabilité de tirer un roi exactement?

**2.** Quelle est la probabilité de tirer un roi et un cœur exactement?

**9.6** 10 couples de rongeurs : 4 couples de souris et 6 couples de mulots, cohabitent dans une ferme lorsque le fermier se procure un chat pour les exterminer.

**1.** Quelle est la probabilité pour que les deux premiers rongeurs qui seront mangés par le chat

*a*) appartiennent à un même couple?

*b*) soient une souris et un mulot?
(On supposera que toutes les paires de rongeurs possibles ont la même chance d'être les deux premières victimes du chat.)

**2.** Quelle est la probabilité pour que les quatre premiers rongeurs croqués par le chat

*a*) appartiennent à 2 couples différents exactement?

*b*) appartiennent à 3 couples différents exactement?
(On supposera encore que le chat mange indifféremment les mulots ou les souris, les mâles ou les femelles, et, par conséquent, que tous les groupes de 4 rongeurs que l'on peut constituer ont la même chance de constituer les 4 premières victimes du chat.)

**9.7** Une boîte contient 10 piles électriques dont 3 sont défectueuses. On tire au hasard 2 piles. Calculer la probabilité pour que :

**1.** Aucune pile tirée ne soit défectueuse.

**2.** Exactement une pile soit défectueuse.

**3.** Au moins une pile soit défectueuse.

**9.8** On choisit deux cartes au hasard parmi 10 cartes numérotées de 1 à 10. Calculer la probabilité pour que la somme des numéros des deux cartes tirées soit impaire dans chacun des cas suivants :

**1.** On tire les deux cartes simultanément.

**2.** On tire les deux cartes successivement sans remettre la première dans l'urne.

**3.** On tire les deux cartes successivement en remettant la première dans l'urne.

**9.9** Il y a dans un tiroir 3 paires de chaussures de couleurs différentes. On tire au hasard deux chaussures, calculer la probabilité pour que :

**1.** Elles appartiennent à la même paire.

**2.** Il y ait un pied droit et un pied gauche.

**9.10** Étant donné trois urnes contenant chacune cinq boules numérotées respectivement 1, 2, 3, 4, 5, on tire au hasard une boule de chaque urne, toutes les boules de chaque urne ayant la même probabilité d'être tirées. Évaluer les probabilités :

**1.** Pour que le numéro 5 ne sorte pas dans le tirage.

**2.** Pour que les trois numéros tirés soient inférieurs ou égaux à 3.

**3.** Pour que le plus grand numéro du tirage soit 4.

**9.11** Une urne contient quatre boules rouges, trois boules noires et une boule blanche. On tire en une seule fois trois boules. Calculer les probabilités d'avoir :

**1.** Deux boules rouges au moins.

**2.** Deux boules de même couleur au moins.

**3.** Une boule de chaque couleur.
On admet l'équiprobabilité des tirages.

**9.12** Un ascenseur dessert 8 étages. Six personnes prennent l'ascenseur au rez-de-chaussée. Trouver la probabilité de chacun des événements suivants :

1. Deux personnes au moins descendent au même étage.

2. Deux personnes descendent au même étage, les autres descendent chacune à des étages différents et différents du précédent.

3. Une personne descend à un étage, deux à un autre, trois à un autre.

**9.13** Dans une loterie de 100 billets, 2 d'entre eux sont gagnants.

1. On prend 12 billets, quelle est la probabilité de gagner au moins une fois?

2. Combien faut-il prendre de billets pour que la probabilité de gagner au moins une fois soit strictement supérieure à $\frac{4}{5}$?

**9.14** On dispose de trois dés normaux A, B, C on les jette et on note $a$, $b$, $c$ les points marqués. Quelle est la probabilité pour que l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admette pas de racine réelle? admette une racine double? admette deux racines réelles distinctes?

**9.15** Une urne contient dix jetons numérotés 5, 2, 49, 65, 9, 4, 8, 25, 22 et 27. On suppose que tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés de l'urne.

1. On extrait simultanément cinq jetons de cette urne.

*a*) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois jetons portant un numéro pair?

*b*) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins trois jetons portant un numéro pair?

2. On extrait simultanément $x$ jetons de cette urne, sachant que $2 \leqslant x \leqslant 8$.
Calculer, en fonction de $x$, la probabilité $p$ d'obtenir au moins un jeton portant un numéro divisible par 3.

**9.16** Dans un vivier nagent $x$ poissons ($x \geqslant 6$) : quatre truites, deux brochets; le reste est constitué par des vairons et des goujons.
On pêche au hasard et sans remise trois poissons.
Soit A l'événement : « Parmi les trois poissons pêchés, on a exactement deux truites. »
Soit B l'événement : « Parmi les trois poissons pêchés, on a un brochet, et un seul. »

1. Calculer en fonction de $x$ la probabilité, de l'événement A; la probabilité de l'événement B.

2. Calculer en fonction de $x$ la probabilité $p$ de l'événement : « Avoir pêché deux truites et un brochet. »

3. Calculer, en fonction de $x$, la probabilité $p'$ de l'événement $A \cup B$.

4. Calculer le nombre de poissons $x$ pour que l'on ait $p' = 5p$.

**9.17** Un élève se présente à un examen, ayant étudié seulement deux des seize chapitres de son cours. L'examinateur a préparé seize sujets portant chacun sur un chapitre différent. Il fait tirer au candidat simultanément et au hasard $n$ questions ($1 \leqslant n \leqslant 16$); on entend par « au hasard » l'équiprobabilité des tirages.

*a*) Si $n=2$, quelle est la probabilité pour que le candidat tire au moins une question qu'il a étudiée?

*b*) Pour quelles valeurs de $n$ la probabilité pour que le candidat tire au moins une question qu'il a étudiée est-elle strictement supérieure à $\frac{5}{8}$?

**9.18** Les faces d'un dé cubique sont numérotées respectivement :

$$6;\ 6;\ 6;\ 5;\ 4;\ 3.$$

On suppose que, lors d'un lancer, la probabilité d'apparition de chaque face est $kx$, $x$ étant le numéro de la face et $k$ étant un nombre réel. Déterminer $k$.

**9.19** Dans une population de 100 personnes, il y a 40 bruns, 35 ont les yeux bleus et 20 sont bruns aux yeux bleus. On choisit une personne au hasard, quelle est la probabilité pour que la personne tirée possède au moins l'un des caractères : bruns, yeux bleus.

**9.20** Une pochette contient 12 hameçons : 4 dorés, 8 bronzés.
Parmi les hameçons dorés, 3 sont du numéro 18, 1 du numéro 16.
Parmi les hameçons bronzés, 3 sont du numéro 18, 5 sont du numéro 16.

1. On extrait simultanément et au hasard 3 hameçons de la pochette.
Calculer sous forme de fractions irréductibles les probabilités des événements suivants :
A : « On extrait exactement deux hameçons dorés. »
B : « On extrait trois hameçons du numéro 18. »
C : « On extrait au plus un hameçon numéro 16. »

**9.21** Une urne contient 50 boules numérotées de 1 à 50.
On extrait une boule de l'urne.

1. Quelle est la probabilité pour que le numéro porté par cette boule soit un multiple de 4 ou de 6?

2. Quelle est la probabilité pour que le numéro porté par cette boule soit un multiple de 4 et de 6?

N.B. : On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

**9.22** Quatre camarades Claude, Dominique, Louis, René décident (indépendamment) d'aller au cinéma le même jour, à la même heure. Il y a quatre salles de cinéma dans la ville. On supposera l'équiprobabilité dans le choix des salles.

1. Calculer la probabilité pour que Claude, Dominique, Louis, René soient dans quatre salles différentes.

2. Calculer la probabilité pour que Claude et Louis se trouvent dans la même salle.

3. Calculer la probabilité pour que Claude et

Louis se trouvent dans la même salle sans les deux autres.

**4.** Calculer la probabilité pour que deux camarades exactement se retrouvent dans le même cinéma, les deux autres étant dans deux salles distinctes.

N.B. : Les résultats sont donnés sous forme de fractions irréductibles.

## Révision

**9.23 A.** Soit la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x)=\frac{x^2-7x+10}{(x+1)^2}.$$

**1.** Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de $f$ et montrer qu'il existe trois réels $a$, $b$, $c$ tels que, pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}.$$

**2.** Étudier les variations de la fonction $f$ et tracer sa représentation graphique (C) dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

**3.** Soit la fonction

$$F : ]-1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt.$$

*a)* Calculer $F(x)$ pour $x > -1$.

*b)* Variations et représentation graphique de F.

*c)* Calculer l'aire, en $cm^2$, de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe $(O, \vec{i})$ et les droites d'équations :

$$x=5 \quad \text{et} \quad x=\lambda \quad (\lambda \geqslant 5).$$

Quelle est la limite de cette aire lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$?

**B.** M. Dupont propose le jeu suivant à M. Durand : un sac contient $n$ boules noires ($n$ entier naturel supérieur ou égal à 1) et une boule blanche.

— M. Durand tire une boule au hasard (c'est-à-dire que les tirages sont équiprobables), note sa couleur, la remet dans le sac, puis tire au hasard une nouvelle boule.

— Si les 2 boules tirées sont noires, M. Dupont verse 1 F à M. Durand.

— Si les 2 boules tirées sont blanches, M. Dupont verse 10 F à M. Durand.

— Si les 2 boules tirées sont de couleurs différentes, M. Durand doit donner 3,50 F à M. Dupont.

**1.** Calculer les probabilités $p_1$, $p_2$, $p_3$ des événements

$A_1$ : les 2 boules tirées sont noires.
$A_2$ : les 2 boules tirées sont blanches.
$A_3$ : les 2 boules tirées sont de couleurs différentes.

**2.** On pose $x_1=1$, $x_2=10$, $x_3=-3{,}5$. On dit que le jeu est équitable si : $p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3=0$. Déterminer $n$ pour que le jeu soit équitable.

**3.** Déterminer $n$ pour que $p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3$ soit minimum.

# Problèmes posés
# au concours général
# et aux
# Olympiades internationales de mathématiques

# Problèmes posés au concours général

La partie **I** et la partie **II** sont indépendantes.
Dans les parties **II** et **III**, il interviendra des fonctions dépourvues d'une expression explicite; on chercherait en vain à leur en donner une. Par contre, dans ces mêmes parties, on n'hésitera pas à faire appel, autant de fois qu'on le jugera nécessaire, à l'affirmation suivante, admise : toute suite croissante et majorée, ainsi que toute suite décroissante et minorée, converge.
On note de la façon habituelle :
$\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs,
$\mathbb{R}^{+*}$ l'ensemble des réels strictement positifs,
$\mathbb{N}^*$ l'ensemble des naturels non nuls.

## I

**1.** *a*) Soit l'application $p$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$x \longmapsto p(x) = \left(1+\frac{x}{2}\right)^2.$$

Sous quelle condition sur $x$ a-t-on l'égalité :

$$\sqrt{p(x+1)} = \sqrt{p(x)} + \frac{1}{2}\,?$$

*b*) Montrer qu'il n'existe pas d'application $q$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sqrt{q(x+1)} = \sqrt{q(x)} + \frac{1}{2}.$$

**2.** On s'intéresse aux applications $\varphi$ de $\mathbb{R}^+$ qui satisfont aux deux conditions (A) et (C) que voici :

(A) $\quad (\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \sqrt{\varphi(x+1)} = \sqrt{\varphi(x)} + \frac{1}{2}.$

(C) $\varphi$ est dérivable, à dérivée positive, et l'application dérivée $\varphi'$ est croissante.

*a*) Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ de ces applications n'est pas vide.

*b*) Montrer que tout élément de $\mathcal{E}$ est strictement monotone et, par conséquent, s'annule au plus en 0.

*c*) Soit $\varphi \in \mathcal{E}$; $n$ désigne un entier naturel.
Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé, le rapport $\dfrac{\varphi'(x+n)}{\varphi(x+n)}$ dépend-il de $n$?
Lorsque $x$ est dans l'intervalle $]0, 1]$, établir que ce rapport est encadré par $\dfrac{\varphi'(n)}{\sqrt{\varphi(n+1)}}$ et $\dfrac{\varphi'(n+1)}{\sqrt{\varphi(n)}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**3.** Soit $\varphi \in \mathcal{E}$. On pose :

$a = \sqrt{\varphi(0)}$
$b = \varphi'(0)$ (nombre dérivé à droite).

Calculer $\varphi(n)$ en fonction de $a$ et $n$.
Dans l'hypothèse $a \neq 0$, calculer $\varphi'(n)$ en fonction de $a$, $b$ et $n$.
Dans cette même hypothèse, établir, en se servant de **2.** *c*), que $\dfrac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}$ est indépendant de $x$; comparer $a$ et $b$, en utilisant (A), et déterminer $\varphi$.

**4.** Pour $\varphi \in \mathcal{E}$ et $x \in \mathbb{R}^+$ on pose $\varphi_1(x) = \varphi(x+1)$; vérifier que $\varphi_1$ est élément de $\mathcal{E}$. Supposant cette fois $\varphi(0) = 0$, déterminer $\varphi_1$, puis $\varphi$.

## II

On considère l'application $g$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $t \longmapsto g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2t}}$ et on associe à tout réel strictement positif $t_0$ ses images successives $t_1 = g(t_0)$, $t_2 = g(t_1)$, ..., $t_n = g(t_{n-1})$, ...

Les questions **1.** et **2.** font étudier la suite $n \longmapsto t_n$ quand $t_0$ est donné (la question **2.** n'est pas indispensable à la progression ultérieure).
Les questions **3.** et **4.** présentent la construction d'une fonction.

**1.** *a*) Montrer brièvement que $g$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}^{+*}$. Comparer $t_0$, $g(t_0)$, et $\dfrac{t_0}{1+t_0}$. Démontrer que la suite $n \longmapsto t_n$ est décroissante, et qu'on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad t_n \geqslant \frac{t_0}{1+nt_0}.$$

*b*) Prouver que les suites $n \longmapsto t_n$ et $n \longmapsto \dfrac{t_{n+1}}{t_n}$ admettent respectivement les limites 0 et 1.

**2.** On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2}$.

*a*) On se donne $t_0 \in \mathbb{R}^{+*}$, et on fait l'hypothèse qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $t_p > \lambda_p$. Démontrer qu'on a alors $t_n > \lambda_n$ pour tout $n \geqslant p$, et que la suite $n \longmapsto nt_n$ est décroissante à partir du rang $p$.
On pose : $\lim (nt_n) = \mathrm{L}$. Démontrer :

$$\lim\left(n\left[nt_n - (n+1)\,t_{n+1}\right]\right) = \mathrm{L}(\mathrm{L}-1).$$

En déduire que, dans l'hypothèse où le réel L serait strictement supérieur à 1, on aurait, pour tout $n$ supérieur à un certain entier $n_0$ :

$$nt_n > (n+1)\,t_{n+1} + \frac{\mathrm{L}(\mathrm{L}-1)}{2n},$$

et, en conséquence :

$$nt_n < 2n \cdot t_{2n} + \frac{\mathrm{L}(\mathrm{L}-1)}{4};$$

on expliquera en quoi ce dernier résultat conduit à une contradiction.

*b*) Pour toute valeur initiale $t_0 \in \mathbb{R}^{+*}$, établir que la suite $n \longmapsto nt_n$ admet la limite 1.

**3.** Montrer brièvement que l'application $\beta$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$t \longmapsto \beta(t) = \frac{1+t}{\sqrt{1+2t}}$$

est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$.
Désignant en abrégé par $\beta_0, \ldots, \beta_n, \ldots$ les valeurs de cette application en $t_0 \in \mathbb{R}^{+*}$, $t_1 = g(t_0), \ldots$, on forme la suite $n \longmapsto \alpha_n$ des produits successifs :

$$\alpha_0 = \beta_0, \quad \alpha_1 = \beta_0\beta_1, \ldots, \quad \alpha_n = \beta_0\beta_1\ldots\beta_n, \ldots$$

On a donc :

$$\alpha_n = \frac{1+t_0}{\sqrt{1+2t_0}} \cdot \frac{1+t_1}{\sqrt{1+2t_1}} \cdots \frac{1+t_n}{\sqrt{1+2t_n}}.$$

Vérifier, $t_0$ étant donné, que cette suite $n \longmapsto \alpha_n$ est croissante et qu'elle est majorée (on pourra établir : $1+t_k < \sqrt{1+2t_{k-1}}$).
Sa limite dépend de $t_0$; on la note $h(t_0)$. Démontrer que la fonction $h$ ainsi obtenue est croissante, et qu'elle est prolongeable en 0 par continuité. On convient de désigner désormais par $t \longmapsto h(t)$ la fonction prolongée.

**4.** *a*) Établir l'égalité $h(4) = \frac{5}{3}\, h\left(\frac{4}{3}\right)$.

*b*) Encadrer $h\left(\frac{4}{3}\right)$ puis $h(4)$. Tous les résultats intermédiaires nécessaires seront affichés clairement; en particulier on indiquera des valeurs approchées de $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$, pour $t_0 = \frac{1}{3}$, et les valeurs $\alpha_n$ correspondantes jusqu'à $n = 5$.
On pourra remarquer que $\alpha_n$ s'exprime, sans radicaux, au moyen de $t_0, t_1, \ldots, t_{n+1}$. Dans un but de contrôle des calculs il est indiqué (mais on ne cherchera pas à le prouver) que les intervalles :

$$\left[\alpha_n + \frac{\alpha_n t_{n+1}}{2+t_{n+1}},\ \alpha_n + \frac{\alpha_n t_{n+1}}{2}\right]$$

sont emboîtés; on se servira du meilleur d'entre eux pour encadrer $h(t_0)$.

*c*) Reporter ces informations sur un dessin donnant l'allure de la variation de la fonction $t \longmapsto h(t)$ sur l'intervalle $[0, 4]$.
Il n'est pas demandé d'établir que $h$ est une application continue. On l'admettra pour la partie qui suit.

### III

On veut construire les applications $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ qui satisfont aux deux conditions (B) et (D) que voici :

(B) $\quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x+1) = f(x) + \sqrt{f(x)}$.

(D) $f$ est dérivable, à dérivée positive, et l'application dérivée $f'$ est continue et croissante.
On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble de ces applications, et on se place, pour **1.**, **2.** et **3.** *a*), dans l'hypothèse où $\mathcal{F}$ n'est pas vide.

**1.** *a*) Soit $f \in \mathcal{F}$. Établir :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sqrt{f(x-1)} \leq f'(x) \leq \sqrt{f(x)}.$$

*b*) Montrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.
Il pourra être utile de considérer les valeurs prises par $f$ lorsque $x$ décrit $\mathbb{Z}$.

**2.** Étant donné $f \in \mathcal{F}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, on choisit

$$t_0 = \frac{1}{2\sqrt{f(x_0)}}$$

comme premier terme de la suite $n \longmapsto t_n$ de la partie **II.**

Établir : $(\forall n \in \mathbb{N}), \quad \dfrac{1}{2\sqrt{f(x_0+n)}} = t_n$.

Exprimer $\dfrac{f'(x_0+1)}{f'(x_0)}$ à l'aide seulement de $t_0$, puis $\dfrac{f'(x_0+n)}{f'(x_0)}$ à l'aide de $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$.

Démontrer l'égalité : $\dfrac{1}{f'(x_0)} = 2t_0 h(t_0)$, où $h$ est la fonction construite dans la partie **II.**

**3.** *a*) On suppose en outre que la fonction $f$ considérée vérifie $f(0) = 1$.
Soit $f^{-1}$ la bijection réciproque de $f$. Pour tout $y \in \mathbb{R}^{+*}$, exprimer $f^{-1}(y)$ sous forme d'une intégrale où figure la fonction $h$.

*b*) Démontrer que $\mathcal{F}$ n'est pas vide, qu'il y a en particulier un et un seul élément $f$ de $\mathcal{F}$ vérifiant $f(0) = 1$. (On commencera par convertir la condition (B) en une condition sur $f^{-1}$.)
Comment s'obtiennent tous les autres éléments de $\mathcal{F}$? Donner l'allure des représentations graphiques.

*c*) Justifier la proposition suivante : il existe une application continue U de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que :

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*}) \quad \int_{\lambda}^{\lambda+\sqrt{\lambda}} U(\tau)\, d\tau = 1.$$

(*Concours général* 1962.)

---

*L'épreuve comprend quatre parties* INDÉPENDANTES.

*Dans la partie* **I** *un thème d'analyse est développé; les trois autres parties* **II. A.**, **II. B.**, **III.** *concernent la géométrie et le calcul vectoriel.*

## I. Analyse

E désigne l'ensemble des suites réelles

$$x = (x_n)_{n \geq 0}$$

vérifiant pour chaque entier $n \geq 1$ la relation :

$$x_{n+1} = (4n+2)\, x_n + x_{n-1}.$$

**1.** $x$ et $x'$ sont les deux suites de E définies respectivement par les conditions

$$x_0 = 1,\ x_1 = -0{,}1639,\ x'_0 = 1,\ x'_1 = -0{,}1640.$$

Montrer qu'à partir d'un rang, que l'on déterminera pour chacune d'elles, les termes ont un signe constant; préciser les comportements respectifs de $x_n$ et $x'_n$ quand $n$ tend vers l'infini.

**2.** On considère les deux éléments $a$ et $b$ de E tels que $a_0 = b_1 = 1$, $a_1 = b_0 = 0$.

*a*) Calculer $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n$ en fonction de $n$.

*b*) Montrer que la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ est convergente.

On pourra utiliser les deux suites $\left(\frac{a_{2n}}{b_{2n}}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}}\right)_{n\geq 0}$ ; la valeur de la limite est déterminée dans la question **3.**

*c*) En étudiant, selon le réel $\mu$, le comportement quand $n$ tend vers l'infini de la suite $(a_n - b_n\mu)_{n\geq 0}$, déterminer l'ensemble des suites de E qui tendent vers zéro.

**3.** A chaque entier $n$ on associe une fonction polynomiale ainsi définie : $\varphi_0$ est la fonction constante égale à 1 et pour $n\geq 1$

$$\varphi_n(t)=\frac{t^n(t-1)^n}{n!}.$$

*a*) Etablir pour $n\geq 1$ la relation :

$$\varphi''_{n+1}=(4n+2)\varphi_n+\varphi_{n-1}.$$

*b*) Soit $I_n=\int_0^1 \varphi_n(t)\,e^{-t}\,dt$ ($e$ désignant la base des logarithmes népériens).

Calculer $I_0$ et $I_1$.

Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ appartient à E.

*c*) Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$.

*d*) Justifier l'écriture :

$$\frac{3-e}{e-1}=\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\dots}}}}$$

**4.** Soit $P_n$ l'unique fonction polynôme telle que l'on ait $P_n - P''_n = \varphi_n$. La vérification de l'existence et de l'unicité de $P_n$ n'est pas demandée; on admettra égalment que les coefficients de $P_n$ sont des nombres rationnels.

*a*) Calculer $I_n$ en fonction de $P_n(0)$ et de $P_n(1)$.

*b*) Montrer que les suites $(P_n(0))_{n\geq 0}$ et $(P_n(1))_{n\geq 0}$ appartiennent à E. On rappelle que $e$ est irrationnel.

**5.** *a*) $Q_n$ désignant la fonction polynomiale définie par :

$$Q_n(t)=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\dots+\frac{t^n}{n!}.$$

Calculer $Q_n(t)-Q'_n(t)$ (on convient que $Q_0(t)=1$).

*b*) Établir l'égalité suivante, où $u$ est un réel quelconque et $W_k=\frac{(2k)!}{k!}$ (en convenant que $0!=1$)

$$P_n\left(\frac{1}{2}+u\right)=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{(-1)^{(n-k)}W_k}{2^{2(n-k)}((n-k)!)}Q_{2k}(u).$$

*c*) En admettant que, pour $t$ fixé, la suite $n \longmapsto Q_n(t)$ converge vers $e^t$, déterminer la limite de la suite $n \longmapsto \frac{P_n\left(\frac{1}{2}+u\right)}{W_n}$, le réel $u$ étant fixé. On pourra montrer que pour tout réel $u$ il existe une constante $K>0$ telle que l'on ait :

$$\left|\frac{P_n\left(\frac{1}{2}+u\right)}{W_n}-Q_{2n}(u)\right|\leq\frac{K}{2n-1}.$$

En déduire que pour toute suite $x$ de E la suite $\left(\frac{x_n}{W_n}\right)_{n\geq 0}$ est convergente; déterminer sa limite en fonction de $x_0$ et de $x_1$.

## II. Géométrie. Premier problème

*Préambule commun aux deux parties indépendantes* **II. A.** *et* **II. B.**

On considère dans le plan un triangle ABC fixé, à sommets non alignés, et une point M quelconque; $a$, $b$, $c$, $x$, $y$, $z$ désignent respectivement les longueurs des segments BC, CA, AB, AM, BM, CM.

**II. A.** Soit $s$ la similitude directe de centre A telle que $s(B)=C$; P étant l'image de M par $s$, calculer les longueurs des segments CP et MP en fonction de $a$, $b$, $c$, $x$, $y$, $z$. Existe-t-il un triangle dont les longueurs des côtés soient $ax$, $by$, $cz$? Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant la relation $ax=by+cz$.

**II. B.** On suppose de plus, dans **II. B.**, que les angles du triangle ABC sont aigus. Au point M on associe le nombre réel $f(M)=ax+by+cz$.

Quelle est la plus petite valeur de $f(M)$, M décrivant le plan?

Où cette plus petite valeur est-elle atteinte?

On pourra considérer le triangle A'B'C' tel que A soit le milieu de B'C', B celui de C'A', C celui de A'B'.

## III. Géométrie. Deuxième problème

Soit un couple $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$, $\mathcal{T}=(A, B, C)$ et $\mathcal{T}'=(A', B', C')$ étant des triplets de points non alignés du plan. On dira que le couple $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ vérifie la relation $\mathcal{R}$ s'il existe un point O tel que les produits scalaires $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{OC'}\cdot\overrightarrow{AB}$, soient nuls.

Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est symétrique, c'est-à-dire que pour tout couple $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ vérifiant la relation $\mathcal{R}$, le couple $(\mathcal{T}', \mathcal{T})$ la vérifie également; on pourra considérer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C'}$.

Soit $\theta$ un nombre réel tel que $0\leq\theta<\pi$; on dira que le couple $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ vérifie la relation $\mathcal{R}_\theta$ s'il existe un point O et une rotation de centre O et d'angle de mesure $\theta$ en radians dans le plan orienté, telle que les parallèles menées par O aux transformées par cette rotation des droites BC, CA, AB contiennent respectivement les points A', B', C'. Pour quelles valeurs de $\theta$ la relation $\mathcal{R}_\theta$ est-elle symétrique?

(*Concours Général* 1984.)

*Les exercices* **I, II,** *et le problème de géométrie* **III.** *sont indépendants.*
*L'emploi d'instruments de calcul est autorisé.*

## I. Exercice

Déterminer toutes les applications $u$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables pour $x = 0$ et vérifiant la conditon suivante :

pour tout nombre réel $x$ on a : $u(2x) = 2u(x)$.

Déterminer toutes les applications F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables pour $x = 0$ et vérifiant la condition suivante :

pour tout nombre réel $x$ on a : $F(2x) = F(x)^2$.

## II. Exercice

$p$ et $q$ étant deux entiers positifs, démontrer la relation suivante :

$$\sum_{0 \leq k \leq q} \frac{C^k_{p+k}}{2^{p+k}} + \sum_{0 \leq k \leq p} \frac{C^k_{q+k}}{2^{q+k}} = 2.$$

## III. Problème de géométrie

*Préambule*

Dans tout le problème un triangle est considéré comme une suite (ou un « triplet ») de trois points *non alignés*; l'aire d'un triangle sera toujours considérée comme un nombre positif. Il est conseillé de faire quelques figures simples, notamment pour les questions de géométrie dans l'espace.

*Les parties* **A., B., C., D** *sont, dans une très large mesure, indépendantes.*
Un triangle PQR sera dit inscrit dans le triangle ABC si les points P, Q, R sont respectivement situés sur les segments BC, CA, AB et sont distincts des extrémités de ces segments; un tel triangle PQR inscrit dans le triangle ABC sera qualifié de cévien si les droites AP, BQ, CR sont concourantes.

**A.** A un triangle PQR inscrit dans le triangle ABC on associe les six nombres réels $u_1$, $u_2$, $u_3$, $v_1$, $v_2$, $v_3$, strictement positifs définis par les relations suivantes :

$$\overline{BP} = u_1\overline{BC}, \quad \overline{PC} = v_1\overline{BC}, \quad \overline{CQ} = u_2\overline{CA}, \quad \overline{QA} = v_2\overline{CA},$$
$$\overline{AR} = u_3\overline{AB}, \quad \overline{RB} = v_3\overline{AB}.$$

**1.** Calculer en fonction de $u_3$ et de $v_2$ le rapport de l'aire du triangle ARQ à l'aire du triangle ABC. Montrer que le rapport de l'aire du triangle PQR à l'aire du triangle ABC a pour valeur

$$u_1u_2u_3 + v_1v_2v_3.$$

**2.** Montrer que si le triangle PQR est cévien la relation (1) suivante est vérifiée :

$$(1) \qquad u_1u_2u_3 - v_1v_2v_3 = 0.$$

(M étant le point de concours des droites AP, BQ, CR, on pourra considérer le rapport de l'aire du triangle AMB à l'aire du triangle AMC et les rapports analogues que l'on peut former, ou utiliser les propriétés des barycentres...).
On admettra, dans la suite, que la relation (1) caractérise les triangles PQR inscrits dans le triangle ABC qui sont céviens.

**3.** Montrer qu'il existe un triangle inscrit dans le triangle ABC, cévien, d'aire maximum; déterminer ce triangle.

**B.** Dans l'espace orienté on considère un plan $\pi$ et un vecteur unitaire $\vec{k}$ orthogonal à $\pi$.

**1.** *a*) Soit O un point de $\pi$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs linéairement indépendants de $\pi$. Montrer que, $\alpha$ et $\beta$ étant deux nombres réels fixés, la courbe définie par la représentation paramétrique

$$t \longrightarrow \overrightarrow{OM}(t) = \cos t\left[\vec{u} + \alpha\vec{k}\right] + \sin t\left[\vec{v} + \beta\vec{k}\right]$$

est un cercle si et seulement si la relation (2) suivante est vérifiée :

$$(2) \qquad (\alpha + i\beta)^2 = \vec{v}^{\,2} - \vec{u}^{\,2} - i(2\vec{u}\cdot\vec{v}).$$

($\vec{v}^{\,2}$, $\vec{u}^{\,2}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}$ représentent des produits scalaires; $i^2 = -1$).

*b*) La relation (2) étant vérifiée, exprimer en fonction de $u$, $v$, $k$, $\alpha$, $\beta$ (on ne calculera pas $\alpha$ et $\beta$) un vecteur normal au plan du cercle ainsi défini et le rayon de ce cercle.
Montrer alors que la représentation paramétrique $t \longmapsto \overrightarrow{Om}(t) = \cos t\vec{u} + \sin t\vec{v}$ définit une ellipse du plan $\pi$. Exprimer en fonction de $u$, $v$, $\alpha$, $\beta$ un vecteur directeur du grand axe de cette ellipse et la longueur de ce grand axe.

**2.** On suppose que $\vec{u} = a\vec{i}$, $\vec{v} = b\vec{j}$, $0 < b \leq a$, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant un repère orthonormal de $\pi$. Déterminer les cercles de l'espace qui se projettent orthogonalement sur le plan $\pi$ suivant l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**3.** Montrer que l'image d'une ellipse par une application affine injective est une ellipse.

**C.** Dans cette partie **C.** on admettra le résultat énoncé ci-dessus, dans la question **3.** de la partie **B.** On pourra également utiliser la conservation du contact par une application affine injective ou par une projection orthogonale injective d'un plan sur un plan (deux courbes tangentes en un point se transforment en deux courbes tangentes au point image).

**1.** On considère trois réels $\lambda$, $\mu$, $\nu$ strictement positifs fixés. Montrer qu'il existe un triangle UVW tel que l'on ait :

$$(3) \qquad VW = \mu + \nu, \; UV = \lambda + \mu, \; UW = \lambda + \nu.$$

Pour un tel triangle on considère le cercle inscrit centré au point de concours des bissectrices intérieures et tangent aux côtés VW, WU, UV respectivement aux points I, J, K; comment à l'aide des éléments géométriques ainsi introduits peut-on interpréter $\lambda$, $\mu$, $\nu$?
On déduit alors immédiatement du résultat admis en **A. 2.** que le triangle IJK inscrit dans UVW est cévien; on ne demande pas de le vérifier.

**2.** On donne, dans le plan, un triangle UVW vérifiant les conditions (3) de la question précédente et un triangle ABC. Comment faut-il choisir les points $P_0$, $Q_0$, $R_0$ pour que dans l'application affine du plan qui transforme respectivement A, B, C en U, V, W, les points $P_0$, $Q_0$, $R_0$ aient pour images respectives I, J, K.

**3.** Étant donné un triangle PQR inscrit dans le triangle ABC, montrer qu'il existe une ellipse tangente respectivement en P, Q, R aux côtés BC, CA, AB si et seulement si le triangle PQR est cévien. Montrer que cette ellipse est alors unique.

**4.** Dans l'espace on considère un plan $\pi$ et un triangle ABC situé dans $\pi$. Un plan S non perpendiculaire à $\pi$ coupe respectivement en $U_1$, $V_1$, $W_1$ les droites perpendiculaires à $\pi$ menées respectivement par A, B, C.
Montrer que l'on peut choisir la direction de S pour que l'on ait :

$$\frac{V_1W_1}{\mu+\nu}=\frac{W_1U_1}{\nu+\lambda}=\frac{U_1V_1}{\lambda+\mu} \tag{4}$$

Discuter le nombre de direction de plans (S) possédant cette propriété; on ne cherchera pas à les déterminer.

**5.** On suppose que le triangle UVW est isocèle et que l'angle en U est droit. Avec les notations de la question précédente, $\vec{k}$ désignant un vecteur unitaire normal à $\pi$, on demande de définir dans la base formée des vecteur $(\vec{k}\wedge\overrightarrow{AB}, \vec{k}\wedge\overrightarrow{AC}, \vec{k})$ un vecteur normal à un plan S vérifiant (4) dans l'hypothèse où AB, BC, CA ont respectivement pour mesure 5, 3, 4. Les coordonnées de ce vecteur normal dans cette base seront données avec deux décimales et une précision de $5\cdot10^{-3}$.

**D.** Dans l'espace orienté on considère un plan $\pi$ et un vecteur unitaire $\vec{k}$ orthogonal à $\pi$. $\mathcal{E}$ désignant l'ensemble des vecteurs de $\pi$, à tout couple $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ d'éléments de $\mathcal{E}$ on associe le scalaire égal au produit mixte $[\vec{k}, \vec{V}_1, \vec{V}_2]$; on le notera $[\vec{V}_1, \vec{V}_2]$. On a donc

$$[\vec{V}_1, \vec{V}_2]=\vec{k}\cdot[\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2].$$

**1.** Montrer qu'à toute application linéaire $\varphi$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ on peut associer un nombre réel et un seul $d(\varphi)$ tel que, pour tout couple $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ de vecteurs du plan, l'on ait

$$[\varphi(\vec{V}_1), \varphi(\vec{V}_2)]=d(\varphi)[\vec{V}_1, \vec{V}_2].$$

**2.** Soit l'ellipse E définie par la représentation paramétrique

$$t \longrightarrow \overrightarrow{Om}(t)=a\cos t\vec{i}+b\sin t\vec{j},$$

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant un repère orthonormal de $\pi$ et $a$, $b$, des constantes telles que $0<b\leqslant a$. On suppose connue une application affine $\Phi$ de $\pi$ dans lui-même vérifiant les conditions suivantes :

*i*) $\Phi(E)=E$, c'est-à-dire que l'image de E par $\Phi$ est E;

*ii*) L'application linéaire $\varphi$ associée à $\Phi$ est telle que $d(\varphi)$ soit positif non nul.

*a*) Montrer que le point O est invariant par $\Phi$.

*b*) On peut écrire

$$\varphi(a\vec{i})=a\cos\alpha\vec{i}+b\sin\alpha\vec{j},$$
$$\varphi(b\vec{j})=a\cos\beta\vec{i}+b\sin\beta\vec{j}.$$

Montrer que $d(\varphi)=1$ et que l'on peut prendre $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$.

*c*) Calculer $[\overrightarrow{Om}, \varphi(\overrightarrow{Om})]$ pour un point $m$ quelconque de E.

*d*) Montrer que, pour tout vecteur non nul $\vec{V}$ de $\mathcal{E}$, $[\vec{V}, \varphi(\vec{V})]$ est non nul.

*e*) Donner une interprétation géométrique de $\Phi$ à l'aide d'un cercle dont la projection orthogonale sur $\pi$ est E.

**3.** *a*) Soit $f$ une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ telle que $d(f)$ soit égal à un et telle que, pour tout vecteur $\vec{V}$ non nul de $\mathcal{E}$, $\vec{V}$ et $f(\vec{V})$ ne soient pas colinéaires, c'est-à-dire que $[\vec{V}, f(\vec{V})]$ soit différent de zéro.
On considère un vecteur $\vec{s}$ non nul de $\mathcal{E}$. Montrer que les vecteurs

$\vec{w}_1=\vec{s}+f(\vec{s})$ et $\vec{w}_2=\vec{s}-f(\vec{s})$ forment une base de $\mathcal{E}$.
Pour $\vec{V}=x_1\vec{w}_1+x_2\vec{w}_2$ calculer $[\vec{V}, f(\vec{V})]$ en fonction de $x_1$, $x_2$, de

$$\alpha_1=[\vec{w}_1, f(\vec{w}_1)] \quad \text{et de} \quad \alpha_2=[\vec{w}_2, f(\vec{w}_2)].$$

On admet que la représentation paramétrique

$$t \longmapsto \overrightarrow{Om}(t)=\cos t\vec{u}+\sin t\vec{v},$$

$(O, \vec{u}, \vec{v})$ étant un repère de $\pi$, définit une ellipse (ce résultat a été établi en (B)).
Que peut-on dire des lignes de niveau définies par $[\overrightarrow{Om}, f(\overrightarrow{Om})]=\lambda$ suivant le réel $\lambda$?

*b*) Soit F une application affine du plan $\pi$ dans lui-même, $f$ l'application linéaire associée; on suppose que $d(f)$ est positif et non nul. A quelles conditions sur $f$ existe-t-il une ellipse E dont l'image E' par F se déduise de E par une translation (éventuellement nulle)? Comment obtenir ces ellipses à partir de l'une d'elles?

**E. 1.** On considère dans le plan $\pi$ deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$, de même aire, et tels que les bases vectorielles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1})$ soient de même sens; on a donc

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]=[\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}].$$

F désignera ici l'application affine de $\pi$ dans lui-même qui transforme A, B, C respectivement en $A_1$, $B_1$, $C_1$.
On suppose que F n'est ni une homothétie, ni une translation.
Un plan S coupe respectivement en A', B', C', $A_1'$, $B_1'$, $C_1'$ les droites perpendiculaires à $\pi$ passant respectivement par A, B, C, $A_1$, $B_1$, $C_1$. On se propose d'étudier le problème suivant : peut-on choisir la direction de S pour que les relations suivantes soient vérifiées :

$$\frac{A_1'B_1'}{A'B'}=\frac{B_1'C_1'}{B'C'}=\frac{C_1'A_1'}{C'A'}.$$

A quelles conditions sur l'application linéaire $f$ associée à F le problème a-t-il des solutions? Discuter leur nombre. On n'en demande pas une détermination explicite.

**2.** Étudier le problème précédent en supposant que les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ de $\pi$ sont tels que l'on ait :

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]=-[\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}].$$

*(Concours Général 1985.)*

*Les exercices* **I.**, **II.**, **III.** *et le problème sont indépendants.*
*Le problème nécessite, en partie, l'emploi d'une calculatrice.*
*Une importance sensiblement égale sera accordée, d'une part à l'ensemble des trois exercices, d'autre part au problème.*

## I. Exercice

On considère dans l'espace quatre points A, B, C, D non coplanaires tels que AC = BD et AB = CD. I, J, K, L sont respectivement les milieux des segments [AB], [AC], [CD], [BD].
Montrer que les points I, J, K, L sont dans un même plan P. Déterminer le point N de P tel que la somme de ses distances aux droites (AD) et (BC) soit minimale.

## II. Exercice

On considère dans le plan quatre points A, B, C, M.

**1.** Soit D un point du plan tel que DA ≤ CA et DB ≤ CB.
Montrer qu'il existe un point N du plan tel que NA ≤ MA, NB ≤ MB et ND ≤ MC.

**2.** Soient A', B', C' trois points du plan tels que l'on ait :

$$A'B' \leq AB, \quad A'C' \leq AC, \quad B'C' \leq BC.$$

Établir l'existence d'un point M' du plan vérifiant :

$$M'A' \leq MA, \quad M'B' \leq MB, \quad M'C' \leq MC.$$

## III. Exercice

**1.** Soient $u$, $v$ deux nombres complexes.
Établir l'inégalité :

$$|u| + |v| \leq |u+v| + |u-v|.$$

**2.** Étant donné quatre nombres complexes $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$, montrer qu'ils vérifient

$$\sum_{k=1}^{4} |z_k| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |z_i + z_j|.$$

## Problème

$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers strictement positifs.
Dans le problème on ne considère que des suites de nombres réels; une telle suite dont le terme général $x_n$ est défini à partir d'un rang $n_0$ sera notée $x = (x_n)_{n \geq n_0}$. A toute suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$ on associe les deux suites

$$\Delta_1 u = (\Delta_1 u_n)_{n \geq 1} \text{ et } \Delta_2 u = (\Delta_2 u_n)_{n \geq 1}$$

définies par

$$\Delta_1 u_n = u_{n+1} - u_n \text{ et } \Delta_2 u_n = \Delta_1 u_{n+1} - \Delta_1 u_n$$

(c'est-à-dire

$$\Delta_2 u_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n);$$

enfin pour tout rang $n$ tel que $\Delta_2 u_n$ soit non nul, on pose :

$$u'_n = u_n - \frac{(\Delta_1 u_n)^2}{\Delta_2 u_n}.$$

*Les parties* **I.** *et* **II.** *peuvent être traitées de façon indépendante.*

### I

**A. 1.** Quelles sont les suites $u = (u_n)_{n \geq 1}$ telles que la suite associée $\Delta_2 u$ soit une suite constante?

**2.** Déterminer les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant la condition suivante : $u'_n$ est défini pour tout $n \geq 1$ et la suite $u' = (u'_n)_{n \geq 1}$ est une suite constante. On pourra considérer d'abord le cas où $u'$ est la suite nulle.

**B.** On dira que la suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$ vérifie la propriété (P) si elle satisfait aux deux conditions ($P_1$) et ($P_2$) suivantes :

($P_1$) la suite $u$ admet une limite finie et, si $\ell$ désigne cette limite, on a, pour tout $n \geq 1$, $u_n - \ell \neq 0$.

($P_2$) la suite $\left(\dfrac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell}\right)_{n \geq 1}$ admet une limite finie, notée $\lambda$, différente de 1.

**1.** Dans cette question on suppose que la suite $u$ vérifie (P) et que $\ell = 0$.

*a)* Montrer que $\lambda$ appartient à $[-1, 1[$.

*b)* Prouver qu'il existe un rang $n_0$ tel que pour $n \geq n_0$ on ait : $\Delta_2 u_n \neq 0$.

*c)* Montrer que la suite $u' = (u'_n)_{n \geq n_0}$ tend vers zéro.

*d)* En supposant $\lambda$ non nul, étudier plus généralement la convergence de la suite $\left(\dfrac{u'_n}{u_{n+k}}\right)_{n \geq n_0}$, $k$ étant un entier positif fixé. On étudiera d'abord le cas où $k = 0$.

*e)* On suppose que $\lambda$ est nul. Montrer que les suites $\left(\dfrac{u'_n}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ et $\left(\dfrac{u'_n}{u_{n+1}}\right)_{n \geq n_0}$ tendent vers zéro.
Donner un exemple de suite $u$ telle que la suite $\left(\dfrac{u'_n}{u_{n+2}}\right)_{n \geq n_0}$ converge vers une limite non nulle.

**2.** Que deviennent les résultats de la question précédente pour une suite quelconque vérifiant la propriété (P)?

### II

Soit $\varphi$ la fonction numérique définie sur l'intervalle fermé [0, 1] par :

$$\varphi(x) = \sqrt[4]{(1-x)} = (1-x)^{1/4}.$$

**A. 1.** *a)* Étudier les variations de $\varphi$. Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction $\varphi$, le plan étant rapporté à un repère orthonormal.
Montrer que l'équation $x = \varphi(x)$ a une solution et une seule. Soit $\ell$ cette solution; vérifier que $\ell$ appartient à l'intervalle [0,72; 0,73].

*b)* Étudier les variations de $\varphi'$. Étant donné deux points $M_1$, $M_2$ de $\mathcal{C}$, d'abscisses distinctes $x_1$, $x_2$, quelle est la position de l'arc $M_1M_2$ de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $M_1M_2$? On pourra étudier le signe de $\varphi'(x) - m$ sur $]x_1, x_2]$, $m$ étant la pente de la droite $M_1M_2$.

**2.** Pour $x \in [0, 1]$ on définit la fonction $\Phi$ par $\Phi(x) = \varphi[\varphi(x)]$.

*a)* Étudier les variations de $\Phi$. Dans le plan, toujours rapporté à un repère orthonormal, tracer la courbe représentative $(\Gamma)$ de $\Phi$ et préciser, en la justifiant, sa position par rapport à la droite $y - x = 0$.
Quelles sont les tangentes à $\Gamma$ aux bornes de $[0, 1]$?

*b)* Soit $a \in ]0, 1[$. On considère la suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_1 = a$ et par $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ pour $n \geq 1$. Montrer que cette suite converge vers $\ell$. On pourra étudier les suites $(u_{2n-1})_{n \geq 1}$ et $(u_{2n})_{n \geq 1}$ et utiliser $\Phi$. Une illustration graphique sera appréciée; un raisonnement rigoureux est nécessaire.

**B.** On rappelle que $\ell$ désigne l'unique racine de l'équation $x = \varphi(x)$ et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $\varphi$.
On considère sur $\mathcal{C}$ les points M et M' d'abscisses respectives $x$ et $\varphi(x)$. On suppose $x$ différent de $\ell$.

**1.** Montrer que la droite MM' coupe la droite d'équation $y - x = 0$ en un point Q unique. Calculer l'abscisse $A(x)$ de Q et montrer que l'on peut écrire :

$$A(x) = x - \frac{(\varphi(x) - x)^2}{[\Phi(x) + x - 2\varphi(x)]}$$

[On rappelle que $\Phi(x) = \varphi(\varphi(x))$.]

**2.** Montrer que la condition $0 < x < \ell$ entraîne $0 < x < A(x) < \ell$.

**3.** Ayant choisi $a \in ]0, \ell[$, montrer que l'on peut définir une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ par $x_1 = a$ et, pour $n \geq 1$, par $x_{n+1} = A(x_n)$. Étudier la convergence de cette suite.

**4.** Montrer que la suite $\left(\dfrac{x_{n+1} - \ell}{x_n - \ell}\right)_{n \geq 1}$ est définie et converge vers une limite que l'on précisera.

**C. 1.** *Indiquer le nombre maximum p de décimales que peut afficher votre calculatrice.* Pour toute expression E calculée à l'aide de celle-ci on désigne par $\overline{E}$ la valeur affichée avec $p$ décimales. Exécuter, dans l'ordre, les instructions suivantes :

1. Donner à $a$ la valeur 0,72.
2. Calculer $\overline{\varphi(a)}$;
3. Calculer $\overline{\Phi(a)}$;
4. Calculer $\overline{\varphi(a)} - a$;
5. Si $|\overline{\varphi(a)} - a|$ est inférieur ou égal à $5 \cdot 10^{-p}$, arrêter les calculs;
6. Calculer $\overline{A(a)}$ et reprendre à l'instruction 2, en donnant à $a$ la valeur $\overline{A(a)}$.

**2.** Soit $\bar{\ell}$ la dernière valeur de $\overline{A(a)}$ obtenue.
On suppose que pour $x \in [0,72; 0,73]$ on a $|\overline{\varphi(x)} - \varphi(x)| < \varepsilon$.
Calculer $\varphi(\bar{\ell}) - \bar{\ell}$. Dire, avec quelle précision, fonction de $\varepsilon$, $\bar{\ell}$ représente $\ell$.

**3.** Soit la suite récurrente définie par $u_1 = 0,72$ et par $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ pour $n \geq 1$.
Déterminer une valeur de l'entier $m$, la plus petite possible, telle que pour $n \geq m$ on ait

$$|\ell - u_n| < 10^{-6}.$$

(*Concours Général* 1986.)

---

*Le problème et l'exercice sont indépendants*

## Exercice

Soit (A, B, C, D) un tétraèdre non aplati et G l'isobarycentre de ses sommets.

**1.** Montrer qu'il existe exactement trois plans passant par G et coupant les faces du tétraèdre suivant un parallélogramme.

**2.** Que peut-on dire du tétraèdre si ces trois parallélogrammes sont des carrés?

## Problème

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, affixes et coordonnées seront toujours pris dans ce repère.

I désignera le point d'affixe $-\dfrac{1}{2}$.

Pour tout point A et tout nombre réel $r > 0$, on notera $\Gamma(A, r)$ le cercle de centre A et de rayon $r$, et $D(A, r)$ le disque ouvert de centre A et de rayon $r$ (c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $AM < r$).
Dans tout le problème, $f$ désignera l'application qui au point M d'affixe $z$ associe le point $M' = f(M)$ d'affixe $z' = z + z^2$.
Si K est une partie quelconque du plan, on notera $f(K)$ l'ensemble des points $f(M)$ lorsque M décrit K, et on notera $f^{-1}(K)$ l'ensemble des points M tels que $f(M)$ soit dans K.

### I

Étude de quelques propriétés géométriques de $f$, utiles pour la suite du problème.

**1.** Quels sont les points invariants par $f$?
Trouver de même les points invariants par $g$, où $g = f \circ f$.

**2.** Déterminer une transformation $s$ du plan telle que, pour tous points M et N, on ait $f(M) = f(N)$ si et seulement si $M = N$ ou $M = s(N)$.

**3.** Pour tout nombre réel $r > 0$, reconnaître $f(D(I, r))$.
Trouver $r_0 > 0$, le plus petit possible, tel que pour tout point M extérieur au disque $D(I, r_0)$ on ait $IM' \geq IM$ (on rappelle que $M' = f(M)$).

**4.** Soit $\Delta$ l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x, y)$ vérifient :

$$-1 < x < 0 \quad \text{et} \quad y^2 + x^2 + x + 1.$$

Soit de même V l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x, y)$ vérifient :

$$-1 < x < 0 \quad \text{et} \quad x + y^2 < 0.$$

Représenter graphiquement $\Delta$ et V, et montrer que $\Delta = f^{-1}(V)$.
Reconnaître $f(\Delta)$ et montrer que $f(\Delta)$ est inclus dans $\Delta$.

**5.** Soit $(\Gamma)$ un cercle tangent en O à l'axe Ox, M un point de $(\Gamma)$ distinct de O.
Que peut-on dire de la droite (MM') et de $(\Gamma)$?

## II

NOTATIONS ET DÉFINITIONS :
Si $x$ et $y$ sont deux nombres réels et $z = x + iy$, on notera $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$ ; on notera $\bar{z}$ le complexe conjugué de $z$ et $|z|$ le module de $z$.
Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres complexes définie à partir du rang $n_0$, et $(P_n)_{n \geq n_0}$ la suite des points d'affixe $u_n$, pour $n \geq n_0$.
S'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $|u_n| \leq k$, on dira que les suites $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(P_n)_{n \geq n_0}$ sont bornées.

Si les suites $(\operatorname{Re} u_n)_{n \geq n_0}$ et $(\operatorname{Im} u_n)_{n \geq n_0}$ sont convergentes, de limites respectives $\alpha$ et $\beta$, on dira que les suites $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(P_n)_{n \geq n_0}$ convergent, que $\ell = \alpha + i\beta$ est la limite de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ et que le point L d'affixe $\ell$ est la limite de la suite $(P_n)_{n \geq n_0}$ ; on notera alors $\lim u_n = \ell$ et $\lim P_n = L$.
On pourra utiliser sans démonstration les propriétés suivantes des suites de nombres complexes :

*a)* $\lim u_n = \ell$ si et seulement si $\lim |u_n - \ell| = 0$.

*b)* Si $\lim u_n = \ell$, alors $\lim \bar{u}_n = \bar{\ell}$ et $\lim |u_n| = |\ell|$ ; si de plus $\ell \neq 0$, alors il existe $n_1$ tel que $u_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_1$, la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_1}$ converge et

$$\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}.$$

*c)* Si $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$, alors

$\lim (u_n + v_n) = \ell + \ell'$ et $\lim u_n v_n = \ell\ell'$.
Soit A un point de plan, et $a$ l'affixe de A. On définit la suite $(M_n)_{n \geq 0}$ par récurrence comme suit : $M_0 = A$, $M_{n+1} = f(M_n)$ pour tout $n$. On notera $z_n$ l'affixe de $M_n$, $x_n = \operatorname{Re} z_n$ et $y_n = \operatorname{Im} z_n$. On se propose dans cette partie d'étudier le comportement de la suite $(M_n)_{n \geq 0}$ dans quelques cas.

**1.** *a)* On suppose que la suite $(M_n)_{n \geq 0}$ converge. Quelle est sa limite?

*b)* On suppose que la suite $(M_{2n})_{n \geq 0}$ converge. Quelles sont les limites possibles de $(M_{2n})_{n \geq 0}$? Étudier alors la convergence de la suite $(M_{2n+1})_{n \geq 0}$.

**2.** On suppose que $a$ est un nombre réel. Discuter selon les valeurs de $a$ la convergence de la suite $(M_n)_{n \geq 0}$.

**3.** On suppose que les suites $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(|y_n|)_{n \geq 0}$ convergent. Soit $\alpha = \lim x_n$ et $\beta = \lim |y_n|$.
Montrer qu'il n'y a que deux valeurs possibles pour $(\alpha, \beta)$.
Établir alors la convergence des suites $(M_{2n})_{n \geq 0}$ et $(M_{2n+1})_{n \geq 0}$.

**4.** On suppose que la suite $(|z_n|)_{n \geq 0}$ converge.
Soit $\lambda = \lim |z_n|$. Montrer que $\lim |1 + z_n| = 1$.
En déduire la convergence des suites $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(|y_n|)_{n \geq 0}$.
Quelles sont les valeurs possibles de $\lambda$?

**5.** On suppose que la suite $\left(\left|z_n + \dfrac{1}{2}\right|\right)_{n \geq 0}$ converge.

Soit $\mu = \lim \left|z_n + \dfrac{1}{2}\right|$.

Étudier la convergence de la suite $\left(\left|z_n + \dfrac{1}{4}\right|\right)_{n \geq 0}$, puis celle des suites $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(|y_n|)_{n \geq 0}$.
Quelles sont les valeurs possibles de $\mu$?

## III

On note $\Omega$ l'ensemble des points A tels que la suite $(M_n)_{n \geq 0}$ (définie au **II**) converge vers O sans stationner (c'est-à-dire que pour tout $n$, $M_n$ est distinct de O).
On se propose dans cette dernière partie d'étudier quelques propriétés de $\Omega$.

**1.** Montrer que $\Omega$ possède un centre de symétrie, et deux axes de symétrie.

**2.** Soit J le point d'affixe $-1$. Établir que $f(\Delta)$ est inclus dans $D(J, 1)$ ($\Delta$ défini au **I. 4.**).
En déduire que, lorsque $A \in \Delta$, la suite $(|z_n|)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.
Établir que $\Omega$ contient $\Delta$.

**3.** Si A n'est pas dans $D(I, r_0)$ (défini au **I. 3.**), montrer que la suite $\left(\left|z_n + \dfrac{1}{2}\right|\right)_{n \geq 0}$ ne converge pas et que la suite $(M_n)_{n \geq 0}$ n'est pas bornée.
Prouver que $\Omega$ est inclus dans $D(I, r_0)$.

**4.** *a)* Montrer que A est dans $\Omega$ si et seulement si il existe un entier $k$ tel que $M_k \in \Delta$.

*b)* S'il existe un entier $k$ tel que $M_k$ ne soit pas dans $D(I, r_0)$, que peut-on dire de A?

*c) Application numérique :* on suppose que $a = \dfrac{p}{10} + \dfrac{i}{2}$ où $p$ est un entier relatif.
Déterminer pour quelles valeurs de $p$ A est élément de $\Omega$ ; on disposera les résultats des calculs effectués dans un tableau. Il est recommandé d'utiliser une calculatrice programmable.

**5.** Montrer l'existence d'un nombre réel $r_1 > 0$ tel que tous les points de $\Omega$ de coordonnées strictement positives soient dans le disque $D(C, r_1)$ où C est le point d'affixe $ir_1$.

*(Concours Général 1987.)*

# Olympiades internationales de mathématiques

L'épreuve se déroule sur deux jours. Chacun des deux jours, les candidats ont à résoudre trois exercices en quatre heures.

**1** Il existe un seul triangle dont les côtés sont des naturels consécutifs tels qu'il existe un angle du triangle double d'un autre.

**2** Trouver tous les entiers $x$ dont le produit des chiffres de l'écriture décimale de $x$ est égal à $x^2-10x-22$.

**3** $a$, $b$, $c$ étant des réels, $a$ étant non nul, on considère le système réel :

$$\begin{cases} ax_i^2+bx_i+c=x_{i+1} & (1 \leqslant i \leqslant n) \\ ax_n^2+bx_n+c=x_1. \end{cases}$$

On pose : $\Delta=(b-1)^2-4ac$. Démontrer que :

— si $\Delta<0$, il n'existe pas de solution;

— si $\Delta=0$, il existe une solution unique;

— si $\Delta>0$, il existe au moins deux solutions.

**4** Dans un tétraèdre; on peut choisir un sommet tel que l'on puisse construire un triangle avec les arêtes issues de ce sommet.

**5** $f$ étant une fonction numérique telle qu'il existe un réel $a$ tel que :

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2},$$

démontrer que $f$ est périodique. Donner un exemple d'une telle fonction avec $a=1$.

**6** $[x]$ étant la partie entière de $x$, calculer la somme :

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\dots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right].$$

*(1968)*

**1** Démontrer qu'il existe une infinité de naturels $a$ tels que $n^4+a$ ne soit premier pour aucune valeur de $n$.

**2** $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ étant des réels, on considère la fonction $f$ définie par :

$$f(x)=\frac{\cos(a_1+x)}{1}+\frac{\cos(a_2+x)}{2}+\dots+\frac{\cos(a_n+x)}{2^{n-1}}.$$

Montrer que $f(x_1)=f(x_2)=0$ implique que $x_1$ est congru à $x_2$ modulo $\pi$.

**3** $a$ étant un nombre donné, discuter pour chaque valeur de $k$ comprise entre 1 et 5 l'existence d'un tétraèdre ayant $k$ côtés de longueur $a$ et $(6-k)$ côtés de longueur 1.

**4** Soit un demi-cercle de diamètre AB, C un point du demi-cercle et D le projeté orthogonal de C sur la droite AB.
Démontrer que le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC est aligné avec les centres des deux cercles tangents à CD et au demi-cercle ABC.

**5** On se donne $n$ points dans un plan. Montrer qu'il existe au moins $\binom{n-3}{2}$ quadrilatères convexes ayant leurs sommets parmi ces points. On suppose $n>4$ et que trois points ne sont pas alignés.

**6** Démontrer l'inégalité :

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \leqslant \frac{1}{x_1y_1+z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}$$

sous les conditions :

$$x_1>0,\quad x_2>0,\quad x_1y_1>z_1^2 \quad \text{et} \quad x_2y_2>z_2^2.$$

Dans quelles conditions a-t-on égalité?

*(1969)*

**1** Soit $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $n>2$. Démontrer que l'inégalité :

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n) \\ +\dots+(a_n-a_1)\dots(a_n-a_{n-1}) \geqslant 0$$

est toujours vraie pour $n=3$ et $n=5$, mais peut être fausse pour les autres valeurs de $n$.

**2** Soit un polyèdre convexe $A_1A_2\dots A_9$ et les neuf polyèdres $P_i$ que l'on en déduit par les translations de vecteurs $\overrightarrow{A_1A_i}$.
Démontrer qu'il existe deux $P_i$ ayant des points intérieurs communs.

**3** ABCD étant un tétraèdre dont toutes les faces ont des angles strictement aigus, on considère les lignes brisées XYZTX, où X appartient à l'ouvert AB, Y à BC, Z à CD et T à DA. Montrer qu'il existe une ligne de longueur minimum si et seulement si :

$$\widehat{DAB}+\widehat{BCD}=\widehat{ABC}+\widehat{CDA}.$$

Montrer qu'il en existe alors une infinité dont la longueur est :

$$2AC\sin\frac{1}{2}[\widehat{BAC}+\widehat{CAD}+\widehat{DAB}].$$

**4** Pour tout naturel $n$, il existe un ensemble fini E de points du plan réel tel que tout élément de E soit situé à une distance égale à 1 de $n$ autres points de E et à une distance différente de tous les autres.

**5** Une matrice carrée d'ordre $n$ est constituée de naturels $a_{ij}$ positifs ou nuls et tels que :

$$(a_{ij}=0) \implies (a_{i1}+\ldots+a_{in}+a_{1j}+\ldots+a_{nj}>n).$$

Démontrer que la somme des éléments de la matrice est au moins égale à $\frac{1}{2}n^2$.

*(1971)*

**1** Pour tout ensemble de dix naturels écrits à l'aide de deux chiffres (en système décimal), il existe au moins deux sous-ensembles disjoints dont les sommes des éléments sont égales.

**2** Pour tout naturel $n \geq 4$, tout quadrilatère inscriptible peut être décomposé en $n$ quadrilatères inscriptibles.

**3** Quels que soient les entiers naturels $m$ et $n$, on a :

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \in \mathbb{N}.$$

**4** Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ le système formé de l'inéquation :

$$(x_1^2-x_3x_5)(x_2^2-x_3x_5) \leq 0$$

et des quatre inéquations déduites par une permutation circulaire sur les indices $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

**5** $f$ et $g$ sont deux fonctions réelles telles que :

a) $f$ n'est pas la fonction nulle;

b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x)| \leq 1;$

c) $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y)$.

Montrer que :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad |g(y)| \leq 1.$$

**6** Étant donné quatre plans parallèles, deux à deux distincts, il existe un tétraèdre régulier dont les sommets appartiennent à chacun de ces plans.

*(1972)*

**1** Soit O un point appartenant à une droite $l$, et $\overrightarrow{OP}_1, \overrightarrow{OP}_2, \ldots, \overrightarrow{OP}_n$ des vecteurs unitaires tels que les points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ appartiennent à un plan contenant $l$ et soient situés d'un même côté de $l$. Démontrer que si $n$ est impair :

$$\|\overrightarrow{OP}_1+\overrightarrow{OP}_2+\ldots+\overrightarrow{OP}_n\| \geq 1,$$

où $\|\overrightarrow{OM}\|$ désigne la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

**2** Existe-t-il dans l'espace à trois dimensions un ensemble fini M non contenu dans un même plan et satisfaisant à la propriété suivante :
Pour tout couple de points $(p, q)$ de M il existe un couple $(r, s)$ tel que les droites $pq$ et $rs$ soient distinctes et parallèles.

**3** Trouver la valeur minimum de $a^2+b^2$, où $a$ et $b$ sont des nombres réels pour lesquels l'équation :

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

admet au moins une racine réelle.

**4** Un soldat doit vérifier qu'il n'y a pas de mine dans un terrain ayant la forme d'un triangle équilatéral (frontières comprises). Le rayon d'action de son détecteur est égal à la moitié de la longueur de la hauteur du triangle. Partant d'un sommet, quel doit être son itinéraire s'il veut minimiser le chemin parcouru, en explorant toute la région?

**5** Soit G un ensemble non vide de fonctions non constantes $f$ avec $f(x)=ax+b$ (où $a$, $b$, $x$ sont réels), satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) Si $f \in G$, $g \in G$ alors $g \circ f \in G$ où $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.) (i.e. l'ensemble G est stable par composition.)

(2) Si $f \in G$ alors $f^{-1} \in G$ $\left(\text{si } f(x)=ax+b, \text{ alors } f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}\right)$.

(3) Pour tout $f \in G$, il existe $x_f \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_f)=x_f$.
Démontrer qu'il existe un réel $k$ tel que, pour tout $f \in G$, $f(k)=k$.

**6** On donne $n$ nombres réels positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et un nombre réel $q$ tel que $0<q<1$.
Trouver $n$ nombres $b_1, b_2, \ldots, b_n$ satisfaisant aux trois conditions suivantes :

(1) Pour tout $k$ de 1 à $n$ : $a_k < b_k$.

(2) Pour tout $k$ de 1 à $n-1$ : $q < \frac{b_k+1}{b_k} < \frac{1}{q}$.

(3) $b_1+b_2+\ldots+b_n < \frac{1+q}{1-q} \times (a_1+a_2+\ldots+a_n)$.

*(1973)*

**1** Trois joueurs A, B, C utilisent un jeu de trois cartes. Sur chacune d'elles est imprimé un nombre entier. Ces trois nombres $p$, $q$, $r$ satisfont à la condition : $0<p<q<r$. On distribue une carte à chaque joueur. Chacun reçoit un nombre de jetons égal au nombre imprimé sur sa carte. On ramasse les cartes, on les bat et on les distribue de nouveau. Après un nombre $N \geq 2$ de distributions les joueurs A, B, C ont respectivement un total de 20, 10 et 9 jetons.
Quel est le joueur qui a reçu $q$ jetons à la première partie sachant que le joueur B a reçu $r$ jetons au cours de la dernière distribution?

**2** Soit un triangle ABC. Prouver que pour qu'il existe sur le segment AB un point D tel que $\|CD\|$ soit la moyenne géométrique de $\|AD\|$ et $\|BD\|$, il faut et il suffit que :

$$\sin A \cdot \sin B \leq \sin^2 \frac{C}{2}.$$

**3** Prouver que pour tout entier naturel $n$ le nombre :

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} \cdot 2^{3k}$$

n'est pas divisible par 5.

**4** Considérons un échiquier de $8 \times 8$ cases et découpons-le en $p$ rectangles, en respectant les cases. Le découpage satisfait aux conditions suivantes :

(1) Chaque rectangle est formé d'autant de cases blanches que de cases noires.

(2) Si $a_i$ est le nombre de cases blanches du $i^{ème}$ rectangle, alors :

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_p.$$

Déterminer la valeur maximale de $p$ pour laquelle un tel découpage est possible. Indiquer pour cette valeur de $p$ toutes les suites $a_1, a_2, \ldots, a_p$ possibles.

**5** Trouver l'ensemble des valeurs de :

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$$

lorsque $a, b, c, d$ prennent des valeurs réelles strictement positives arbitraires.

**6** Soit P un polynôme non réduit à une constante, à coefficients entiers. Si $n$ désigne le nombre d'entiers $k$ distincts tels que $[P(k)]^2 = 1$, démontrer que :

$$n - \text{degré}(P) \leq 2.$$

*(1974)*

---

**1** Déterminer toutes les valeurs du réel $a$ pour lesquelles il existe cinq réels positifs ou nuls $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ vérifiant les relations suivantes :

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \quad \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^2; \quad \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = a^3.$$

**2** On se donne un plan $\Pi$, un point P appartenant à $\Pi$ et un point Q n'appartenant pas à $\Pi$. Trouver tous les points R du plan $\Pi$ tels que le quotient $\dfrac{QP+PR}{QR}$ soit maximum.

**3** Dans un plan on se donne deux cercles sécants $C_1$ et $C_2$. A est un de leurs points communs. Les points $M_1$ et $M_2$ parcourent respectivement, dans le même sens, les cercles $C_1$ et $C_2$, chacun avec une vitesse constante. A chaque tour les points $M_1$ et $M_2$ passent simultanément au point A. Montrer qu'il existe un point fixe du plan qui est constamment équidistant de $M_1$ et $M_2$.

*(1979)*

---

**1** Soit l'ensemble $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, $(n \geq 1)$. On désigne par $p_n(k)$ le nombre de permutations de S ayant exactement $k$ points fixes. Prouver que :

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = n!.$$

Remarques :

(1) On appelle permutation de S toute bijection de S sur lui-même.

(2) Pour toute permutation $f$ de S, on appelle point fixe de $f$ tout $i$ tel que $f(i) = i$.

**2** Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. La bissectrice intérieure de l'angle A coupe le côté BC en L et recoupe le cercle circonscrit au triangle en N. On désigne respectivement par K et M les projections orthogonales de L sur les côtés AB et AC.
Prouver que l'aire du quadrilatère AKNM et l'aire du triangle ABC sont égales.

**3** Soit $n$ nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifiant :

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

et $k$ un entier supérieur ou égal à 2.
Prouver qu'il existe $n$ entiers non tous nuls $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vérifiant :

(1) pour tout entier $i$, $1 \leq i \leq n$, $|a_i| \leq k-1$

(2) $|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n| \leq \dfrac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$.

**4** Prouver qu'il n'existe aucune application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, satisfaisant à : pour tout entier naturel $n$, $f(f(n)) = n + 1987$.

**5** On considère le plan euclidien. Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 3. Montrer qu'il existe $n$ points vérifiant :

(1) trois quelconques de ces points ne sont pas alignés;

(2) la distance entre deux quelconques de ces points est irrationnelle;

(3) l'aire du triangle déterminé par trois quelconques de ces points est rationnelle.

**6** Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. Prouver que si $k^2 + k + n$ est un nombre premier pour tout entier $k$, $0 \leq k \leq \sqrt{\dfrac{n}{3}}$, alors $k^2 + k + n$ est un nombre premier pour tout entier $k$,

$$0 \leq k \leq n-2.$$

*(1987)*

# Index

# Index

ACHEVÉ D'IMPRIMER SUR LES PRESSES DE L'IMPRIMERIE TARDY QUERCY S.A. À BOURGES (CHER)
Nº d'Éditeur : C 44005-I (N.o.VII) MCP - Nº d'Imprimeur : 14412 - Avril 1988 - *Imprimé en France*

## COLLECTION MARC GOURION

- **Mathématiques Terminales CE :**
  - *Tome 1* - Analyse - Dénombrements - Probabilités
  - *Tome 2* - Nombres complexes - Équations linéaires - Géométrie
- **Mathématiques Terminale D**

## COLLECTION ABC

- **Série "Exercices et problèmes résolus" dirigée par** Marc GOURION :
  $2^e$, $1^{re}$ S, $1^{res}$ AB, Terminales AB, Terminales CE (*Tome 1*, *Tome 2*), Terminale D.
- **ABC du BAC**
  $2^e$ (*Tome 1*, *Tome 2*), $1^{res}$ SE (*Tome 1*, *Tome 2*), Terminales $A_1$, $A_2$, $A_3$, Terminales $A_4B$, Terminales CDE (*Tome 1*, *Tome 2*).

9 782091 705903
170590