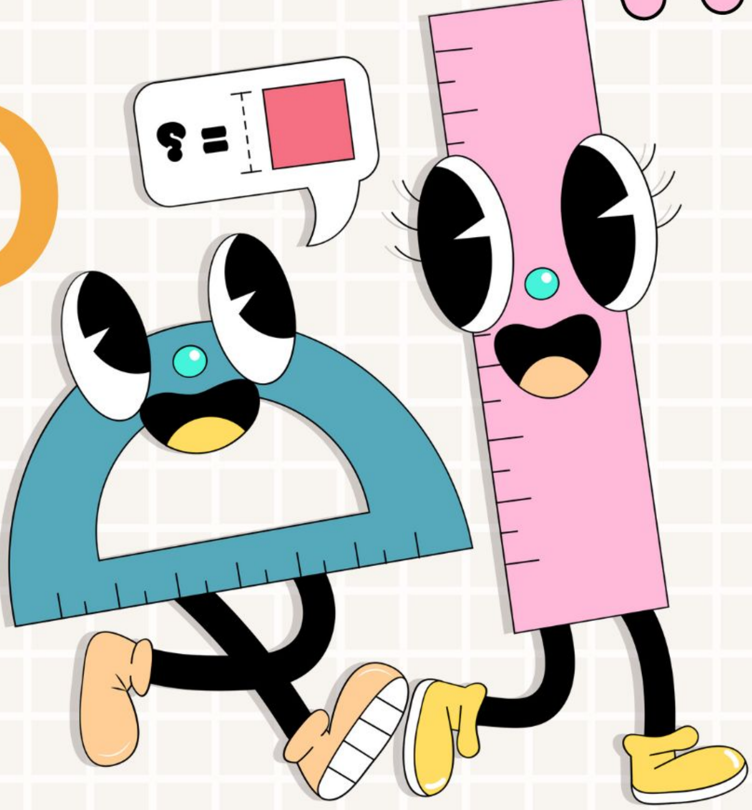
Nom :

Prénom :

T^le^ D

Travaux Dirigés



Mathématiques

Année Scolaire : 2024-2025

Collège le PROVINCIAL DOKUI

Avant – propos

La collection **''LE VALIDEUR''** est un ouvrage des encadreurs de la structure GEA (Groupe Excellences Académique) dans le but de faciliter l'apprentissage et la compréhension des différentes leçons.

Pourquoi cet ouvrage malgré une panoplie de documents sur le marché ?

Il est organisé sur le modèle pédagogique **APC**. Les activités d'application et les exercices sont formulés en des tests objectifs et des tests subjectifs tels que :

- les questions à choix unique,
- les questions à choix multiples,
- les tests à réponses du type alternatif,
- les tests à réponses du type réarrangement,
- les tests d'appariement,
- les items à réponses courtes et élaborées,
- et les situations complexes.

Par souci donc de se soumettre aux exigences de cette nouvelle approche, nous avons modifié certains sujets.

En mettant ce manuel à la disposition de nos élèves, nous avons quatre objectifs majeurs :

- Apprendre aux apprenants à rédiger clairement et avec minimum de rigueur un devoir de mathématiques ;
- Permettre aux apprenants de se familiariser aux sujets d'examen ;
- Aider les apprenants à voir le minimum pour la préparation des interrogations, devoirs et examens ;
- Inciter les apprenants à opter pour le chemin de l'effort personnel qui paie et à abandonner celui de la tricherie qui les plonge dans des lacunes et plus tard dans l'échec.

Nous sommes reconnaissants aux personnes ressources ayant contribué à l'élaboration de ce manuel, remercient d'avance les collègues de l'intérêt qu'ils voudront bien accorder à ce volume et **souhaitons vivement recevoir toutes leurs observations à ce sujet.**

MATHÉMATIQUES __ PROGRESSION T^{le} D

Volume horaire annuel : 192 heures

Trimestre	*Mois*	*Sem.*	*Leçons (6 heures par semaine)*	*Vol hor*	*Taux d'exécution*
1er Trimestre	Septembre	*1*	1. Limites et continuité	16h	**3,33 %** (6/180)
		2			**6,66 %** (12/180)
	Octobre	*3*			**8,88 %** (16/180)
			Régulation	2h	**10%** (18/180)
		4	2. Probabilité conditionnelle et variable aléatoire	18h	**13,33 %** (24/180)
		5			**16,66 %** (30/180)
		6			**20 %** (36/180)
Devoir de niveau	*Novembre*	*7*	***Régulation***	2h	**21,11 %** (38/180)
			3. Dérivabilité et étude de fonction	14h	**23,33 %** (42/180)
		8			**26,66 %** (48/180)
		9			**28,88 %** (52/180)
			Régulation	2h	**30 %** (54/180)
	Décembre	*10*	4. Primitives	6h	**33,33 %** (60/180)
		11	***Régulation***	2h	**34,44 %** (62/180)
			5. Fonctions logarithmes	14h	**36,66 %** (66/180)
		12			**40 %** (72/180)
	Janvier	*13*			**42,22 %** (76/180)

2ème Trimestre			***Régulation***	**2h**	**43,33 %** (78/180)
		14	**6. Nombres complexes**	**16h**	**46,66 %** (84/180)
		15			**50 %** (90/180)
		16			**52,22 %** (94/180)
Devoir de niveau			***Régulation***	**2h**	**53,33 %** (96/180)
	Février	***17***	**7. Fonctions exponentielles et fonctions puissances**	**20h**	**56,66 %** (102/180)
		18			**60 %** (108/180)
		19			**63,33 %** (114/180)
	Mars	***20***			**64,44 %** (116/180)
			Régulation	**2h**	**65,55 %** (118/180)
			8. Nombres complexes et géométrie du plan	**12h**	**66,66 %** (120/180)
		21			**70 %** (126/180)
		22			**72,22 %** (130/180)
3ème Trimestre			***Régulation***	**2h**	**73,33 %** (132/180)
		23	**9. Suites numériques**	**14h**	**76,66 %** (138/180)
	Avril	***24***			**80 %** (144/180)
					81,11 % (146/180)
		25	***Régulation***	**2h**	**82,22 %** (148/180)
Devoir de niveau			**10. Calcul intégral**	**12h**	**83,33 %** (150/180)
		26			**86,66 %** (156/180)

		27			**88,88 %** (160/180)
			Régulation	**2h**	**90 %** (162/180)
		28	**11. Statistique à deux variables**	**08h**	**93,33 %** (168/180)
	Mai	***29***			**94,44 %** (170/180)
			Régulation	**2h**	**95,55 %** (172/180)
			12. Équations différentielles	**06h**	**96,66 %** (174/180)
		30			**98,88 %** (178/180)
			Régulation	**2h**	**100 %** (180/180)
	Juin	***31***	**Révisions**	**12h**	
		32			

<u>NB</u> : La régulation consiste à mener des activités de remédiation relativement aux contenus de la leçon. À cette occasion, le professeur mènera également des activités permettant d'évaluer et de renforcer les acquis des apprenants. C'est le cumul du temps de régulation qui fait 1h ou 2h. Le professeur peut en faire des séances de travaux dirigés.

<u>Remarque</u> **:**

- Le respect de la progression est obligatoire afin de garantir l'achèvement du programme dans le temps imparti et de permettre l'organisation des devoirs de niveau.
- Les volumes horaires indiqués comprennent les cours, les exercices et les travaux dirigés (75%) et <u>IE</u>, <u>DS</u> et <u>comptes rendus</u> (25%)

SOMMAIRE

LIMITES ET CONTINUITES

EXERCICE 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chacune des questions suivantes, trois réponses sont données dont une seule est correcte.

Tu écriras le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse choisie.

Exemple : 6 – a ou 6 – b ou 6 – c.

N°	Affirmations	Réponses		
1	$\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}x^5 + x^2 - 2$	$-\infty$	$+\infty$	0
2	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{2x+4}{x+1}} =$	$+\infty$	$\sqrt{2}$	2
3	$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{x^3-8}{x-2} =$	4	12	$+\infty$
4	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2+2x}{\sin x} =$	$\frac{1}{2}$	2	0
5	$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 1} + 3x =$	$+\infty$	0	$-\infty$

EXERCICE 2

(O ; I ; J) est un repère du plan.

(C) est la représentation graphique d'une fonction f ; d'ensemble de définition D_f.

Pour chaque proposition répond par Vrai ou Faux. (Exemple : 10 – Vrai ou 10 – Faux).

N°	Affirmations
1	a est un réel ; $a \in D_f$ et la limite de f en a est infinie. Donc f n'est pas prolongeable par continuité en a.
2	Si f réalise une bijection de l'intervalle I vers f(I) et que 0 $\in f$(I) alors il existe un unique élément α de I tel que $f(\alpha) = 0$.
3	Si $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $\frac{2}{x^2} - 2 \leq f(x) \leq \frac{2}{x} + 2$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
4	La courbe représentative de la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2-3}{x+1}$ admet pour asymptote la droite d'équation $x = 1$.
5	Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur un intervalle $[a\,;+\infty[$, alors, on a : $f([a\,;+\infty[) = \left[f(a)\,;\, \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[$.
6	Si f une fonction et strictement decroissante sur un intervalle K et si $0 \notin f(K)$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans K.
7	Si f et g sont deux fonctions définies sur $[0;+\infty[$ telles que g ne s'annule pas. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x))}{g(x)} = -1$.
8	Si $f(x) = \frac{x^2+x-6}{4-x^2}$; $x \neq 2$ et $f(2) = -\frac{5}{4}$ alors f est continue en 2.
9	(C) est la courbe représentative d'une fonction f telle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors (C) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $+\infty$.

EXERCICE 3

Pour chacune des affirmations suivantes, écris sur ta copie la bonne réponse.

N°	Affirmations	Réponses		
1	$a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}}$	$(ab)^{\frac{2}{n}}$	$(ab)^{\frac{1}{n}}$	$(ab)^{\frac{1}{2n}}$
2	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{a}$	$\sqrt[m+n]{a^{n\times m}}$	$\sqrt[m\times n]{a^{n+m}}$	$\sqrt[n\times m]{a}$
3	$\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{6}{5}} \times \left(\sqrt[5]{2^7}\right)$	$2\sqrt[10]{2}$	$2^3\sqrt[5]{2}$	$2^3\sqrt[7]{2}$

EXERCICE 4

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = 4x^3 - x^{11} + 8$; 2. $f(x) = \frac{3x^2-2x+5}{-x^2+x-3}$; 3. $f(x) = \frac{2x}{1+\frac{1}{x^2}}$; 4. $f(x) = \sqrt{2}$

EXERCICE 5

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+1}{x-3}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^3+x}{x^2-2x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{4-x^2}{x^2+x-6}$; 5. $\lim\limits_{x\to 2018} 25$

6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{4-x^2}{x^3}$; 7. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{x^2-2x-3}{x-2}$; 8. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{3x-2}{4-x^2}$; 9. $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}} \frac{x^2+2x+3}{x^2-25}$; 10. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{x-1}{x^2-3x+2}$

EXERCICE 6

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; 2. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; 4. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$; 5. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{12-2x}}{x-4}$; 6. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+3}-2}$; 7. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{3x+4}-4}{\sqrt{x+1}-2}$

EXERCICE 7

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{6-2x} - \sqrt{8-2x}$; 2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{2x-5} - \sqrt{4x-7}$; 3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-1} + 3x$; 4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1} - \frac{x}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{6-2x} + 4x - 4$; 6. $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x + 3 + \sqrt{x^2-2x+2}$; 7. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-2}$; 8. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x}-2x-1}{x-1}$

EXERCICE 8

Calculer les limites suivantes en utilisant la définition du nombre dérivée :

1. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\cos x+1}{x-\pi}$; 2. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$; 3. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt{2x^2+7}-3}{x+1}$; 4. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}$; 5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x-1}{3x-\pi}$; 6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-1}{4x-\pi}$

EXERCICE 9

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{5x}$; 2. $\lim\limits_{x\to +\infty} 3x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$; 3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{3x}$; 5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{2x}$; 7. $\lim\limits_{x\to -\infty} x\sin\left(\frac{3}{x}\right)$; 8. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin(2x-4)}{4x-8}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(6x)}{6x}$; 10. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right)$

EXERCICE 10

Calcule les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+1+3\sin x$; 2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+\cos x}$; 3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x\sin(5x^2)}{x^2+1}$; 4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+\sin(3x)}{2x^3}$

EXERCICE 11

Le but de cet exercice est de calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\sin\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\right]$.

Pour cela, on considère la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$.

1) a- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

b- Justifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2) On considère la fonction g définie sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ par :

$g(x)=\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)\sin\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

a- Démontre que : $\forall x\in D_f, g(x)=2\frac{\sin f(x)}{f(x)}$.

b- Déduis – en que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2$.

3) a- Vérifie que , $\forall x\in[1;+\infty[, x\sin\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\frac{g(x)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$.

b- Déduis – en : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\sin\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\right]$.

EXERCICE 12

A - On donne les fonctions f et g définies par : $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$ et $g(x)=\sqrt{x-1}$.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} gof(x)$ et $\lim\limits_{x\to2} fog(x)$.

B - Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-2x^3+5x+1}$; 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{1-2\pi x}{3x+4}\right)$; 3. $\lim\limits_{x\to2}\left|\frac{x^2+x-6}{2-x}\right|$; 4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^4+2)^7$

EXERCICE 13

Interprète graphiquement chacune des limites suivantes :

a- $\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}} f(x)=-\infty$; b- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)+x-2=0$; c- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=-\infty$; d- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=0$

EXERCICE 14

Etudie la continuité de f en a dans les cas suivants :

1. $\begin{cases} f(x)=\frac{1-\cos 2x}{x^2}, \forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\\ f(x)=\frac{-x}{|x|}+1, \forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right[\\ f(0)=0\end{cases}$ $a=0$; 2. $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2+7x+12}{x+3} ; si\ x\neq-3 \\ f(-3)=1\end{cases}$ $a=-3$

EXERCICE 15

Dans chacun des cas suivants, peut – on prolonger par continuité f en a? Si oui donné le prolongement g.

1. $f(x)=\frac{\sqrt{3x-5}-1}{x-2}$ $a=2$; 2. $f(x)=\frac{1-x^3}{x-1}$ $a=1$; 3. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$ $a=0$

4. $f(x)=\frac{\sin 2x}{3x}$ $a=0$; 5. $f(x)=\frac{9-x^2}{|x-3|}$ $a=3$

EXERCICE 16

Soit h la fonction définie de ℝ vers ℝ par : $h(x) = \frac{2-\sqrt{4-x}}{x}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = \frac{1}{4}$

1) a- Déterminer l'ensemble de définition de h.

   b- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

   c- Etudier la continuité de h en 0.

   d- Déduire le prolongement par continuité en 0 de h.

2) En utilisant $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$, calculer les limites suivantes : a- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2-\sqrt{4-2x}}{3x}$ b- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}$

EXERCICE 17

On donne ci – dessous, le tableau de variation d'une fonction f continue sur son ensemble de définition $]-3; 1[\cup]1; +\infty[$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

x	-3		-2		1		$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	2 ‖ 2	↘	-3

1) Précise les asymptotes à la courbe (C) en justifiant ta réponse.
2) a- Justifie que f est prolongeable par continuité en 1.
   b- Définis le prolongement par continuité en 1.
3) Détermine l'image de l'intervalle $]-3; 1[$.
4) On désigne par h la restricion de f sur $]1; +\infty[$.
   a- Justifie que h réalise une bijection de $]1; +\infty[$ dans un intervalle K que l'on précisera.
   b- Donne le sens de variation de h^{-1} la bijection réciproque de h sur son ensemble de définition.
   c- Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution β dans $]1; +\infty[$.
   d- Donne un encadrement de β à 10^{-1} près par la méthode de balayage
5) Détermine le signe de f sur son ensemble de définition.
6) Donner l'allure générale de la courbe (C).

EXERCICE 18

Soit f la fonction de ℝ vers ℝ definie par : $f(x) = x^3 - x^2 - x - 3$.

1) Démontre que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[$ et $]1; +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}; 1\right[$.

2) Dresse le tableau de variation de f. On donne : $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{76}{27}$.

3) Détermine l'image de f de chacun des intervalles suivants : $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right]$, $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$, $[1; +\infty[$ et $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

4) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$.
   a- Démontre que h réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
   b- Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$.
   c- Justifie que : $2{,}1 < \alpha < 2{,}2$.

5) On note h^{-1} la bijection réciproque de h.
   Donne le sens de variation de h^{-1} et donne son tableau de variation.

6) Démontre que α est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

SITUATION COMPLEXE

Un artisan produit des articles. Un technicien du Ministère de l'Artisanat, après une étude de son activité, a estimé que si tous les articles produits sont vendus, le bénéfice moyen, en milliers de francs, des x articles est estimé par l fonction suivante : $f(x) = 4000x + \frac{400\,000}{x}, x \geq 1.$

Voulant connaitre l'évolution de son activité, il soumet le résultat de l'étude à son fils élève de Terminale.

1. Détermine le bénéfice que l'artisan fera pour 100 articles, pour 1000 articles vendus.
2. Dis comment évoluera le bénéfice. Justifie ta réponse.

Leçon 2

PROBABILITE CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALEATOIRE

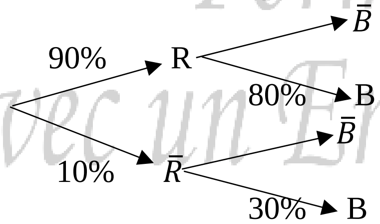
EXERCICE 1

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si l'affirmation est fausse.

N°	AFFIRMATIONS
1	On lance deux fois de suite un dé non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'apparition de la face numéro 6. On a : $X(\Omega) = \{1; 2\}$
2	Si B et $\overline{B}$ sont deux événements contraires, alors $P(\overline{B}) = -P(B) + 1$
3	Si une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et p, alors la probabilite d'obtenir exactement k succès au cours de n epreuves independantes est $C_n^k \times p^k \times q^{n-k}$.
4	Si X suit une loi Binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{4}{7}$, alors la variance de X est $V(X) = \frac{34}{49}$

EXERCICE 2

Pour chacune des affirmations ci – dessous, trois réponses A, B et C sont données dont une seule est juste.
Recopie sur ta feuille, le numéro de l'affirmation suivie de la lettre correspondant à la réponse juste.

<table>
<tr><th>N°</th><th>AFFIRMATIONS</th><th colspan="2">REPONSES</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">Si deux événements E et F d'un univers sont tels que :
P(E) = 0,2 ; P(F) = 0,4 et P $(E \cup F)$ = 0,52 alors E et F sont :</td><td>A</td><td>Indépendants</td></tr>
<tr><td>B</td><td>Incompatibles</td></tr>
<tr><td>C</td><td>Impossibles</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">Soit la loi de probabilité de X suivante :
<table>
<tr><td>x_i</td><td>-200</td><td>300</td><td>400</td></tr>
<tr><td>P(X= x_i)</td><td>$\frac{2}{7}$</td><td>$\frac{1}{7}$</td><td>$\frac{4}{7}$</td></tr>
</table>
L'espérance mathématique E(X) est égale à :</td><td>A</td><td>600</td></tr>
<tr><td>B</td><td>1</td></tr>
<tr><td>C</td><td>$\frac{1700}{7}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3</td><td rowspan="3">On considère l'arbre pondéré ci – dessous.


p(B) est égale à</td><td>A</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>B</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td>C</td><td>0,80</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4</td><td rowspan="3">Le plus petit entier naturel n tel que $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n > 0,95$ est</td><td>A</td><td>2</td></tr>
<tr><td>B</td><td>3</td></tr>
<tr><td>C</td><td>4</td></tr>
</table>

EXERCICE 3

Une population d'élève comportant 40% de bacheliers a subi un test de recrutement en première année d'une grande école. Ce test a donné des résultats suivants :
75% des bacheliers sont admis et 52% des non bacheliers sont admis.
On choisit au hasard un élève de la population.
On note :

- B l'événement : « l'élève est bachelier »
- T l'événement : « l'élève est admis au test »
- A l'événement : « l'élève est bachelier et est admis au test »

1) Préciser chacune des probabilités suivantes :
   a- la probabilité P(B) de l'événement B.
   b- la probabilité $P_B(T)$ de T sachant que B est réalisé.
   c- la probabilité $P_{\overline{B}}(T)$ de T sachant que B n'est pas réalisé.
2) Démontrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,3.
3) Calculer la probabilité de l'événement T.
4) Déduire des questions précédentes que les événements B et T ne sont pas indépendants.
5) Démontrer que la probabilité pour qu'un élève admis au test soit bachelier est $\frac{25}{51}$.

EXERCICE 4

Une maladie atteinte 3% d'une population. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

- Chez les individus malades, 95% de tests sont positifs et 5% négatifs.
- Chez les individus non malades, 1% de tests sont positifs et 99% négatifs.
  On donne :
- M l'événement : « être malade »
- T l'événement : « le test est positif »

1) Construire un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.
2) Donne la probabilité de l'événement : ≪ $M \cap T$ ≫, puis celle de ≪ $\overline{M} \cap \overline{T}$ ≫.
3) Déterminer P(T) et P($\overline{T}$).
4) a- Calculer la probabilité de ne pas être malade, sachant que le test est positif.
   b- Calculer la probabilité d'être malade, sachant que le test est négatif.

EXERCICE 5

On test un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé.
Pour cela, 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie. Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8. On ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre.
1) Calculer la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament.
2) Démontrer que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est 0,52.
3) On soumet au test un individu pris au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie.
4) On contrôle 5 individus au hasard.
   a- Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé.
   b- Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé.
5) On contrôle n individus pris au hasard. (n est un entier naturel non nul).

Déterminer n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieur à 0,98.

EXERCICE 6

Soit X la variable aléatoire discrète définie sur un univers par la loi de probabilité suivante :

x_i	-2	0	3	4	6
P(X=x_i)	0,27	0,15	0,22	0,20	0,16

1) Calcule les probabilités suivantes : P($X < 3$) ; P($0 \leq X \leq 4$) et P($X \geq 4$).
2) Détermine et représente la fonction de répartition de la variable X.
3) Calcule l'espérance mathématique et l'écart type de X.

EXERCICE 7

Dans une association sportive, $\frac{1}{4}$ des femmes et $\frac{1}{3}$ des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30% des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

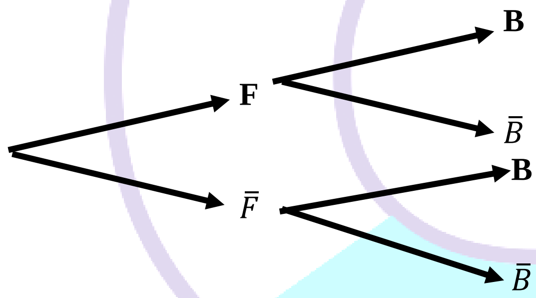
On choisit au hasard un membre de cette association et on note :

- F l'évènement : ≪ le membre choisi est une femme ≫.
- T l'évènement : ≪le membre choisi adhère à la section tennis≫

Partie A

1. a) Traduis les données en termes de probabilités.

   b) Recopie et complète l'arbre pondéré ci – dessous par les probabilités connues :



2. Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $\frac{2}{5}$.

3. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.

   Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

Partie B

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.

   a) Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

   b) Pour tout entier naturel non nul n, note p_n la probabilité pour qu'un en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

   Démontrer que : $P_n = 1 - (0{,}7)^n$.

   c) Déterminer le nombre nominal de semaines pour que : $P_n \geq 0{,}98$.

2. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons : 10 sont gagnants et rapportent chacun 20.000francs les autres ne rapportent rien.

Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5.000 francs puis tirer au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne. Il reçoit alors 20.000 francs par jeton gagnant.

Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.
On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5.000 francs) réalise par un jeton lors d'une partie de cette loterie.

a) Justifie que la probabilité de l'évènement E : les deux jetons tirés sont gagnants » est $\frac{1}{110}$.
b) Détermine les valeurs prises par X.
c) Détermine la loi de probabilité de X.
d) Justifie que $E(X) = -100$. Interprète le résultat obtenu.

EXERCICE 8

Le chargement d'un camion remorque est composé de 60 sacs identiques dont 10 contenants un produit non déclaré aux services de la douane.
Le trajet à parcourir comporte trois barrages de douane.
A chacun de ces barrages le contrôle obligatoire, consiste à examiner le contenu de 5 sacs choisis au hasard des contrôles effectués aux différents barrages sont indépendants.
I. Le camionneur arrive à un barrage donné.
(On donnera un arrondi d'ordre 1 de chacun des résultats obtenus).
1) Calculer la probabilité pour qu'exactement 2 des 5 contrôlés contiennent le produit non déclaré.
2) Démontrer que la probabilité pour que l'un au moins des 6 sacs contrôlés contienne le produit non déclaré est égale à 0,6.

II. Le camionneur sait que si l'un au moins des sacs du produit non déclaré est découvert à un barrage quelconque, il doit payer une taxe forfaitaire de **10.000F** (dix mille francs) à ce barrage pour être autorisé à continuer son chemin avec tout son chargement.
Si le camionneur ne peut pas payer la taxe forfaitaire, tout son déchargement est saisi.
1) On suppose que le camionneur paie la taxe chaque fois que le produit non déclaré est découvert.
On note X la variable aléatoire égale à la somme totale que le camionneur peut ainsi dépenser sur l'ensemble de son trajet.
a- Déterminer la loi de probabilité de X.
b- Démontrer que l'espérance mathématique est égale à **18.000F**.
2) On suppose que le camionneur n'a pas d'argent pour payer une éventuelle taxe.
Calculer la probabilité pour que son chargement soit saisi.

EXERCICE 9

La société ≪Gnamienlait≫ de Gnamien produit des sachets de lait caillé.
Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque sachet de lait caillé produit, sa masse en gramme (g).
La loi de probabilité de X est définie par le tableau ci – dessous.

x_i(en g)	220	230	240	250	260	270	280
P_i	0,08	0,10	a	b	0,16	0,15	0,04

a et b sont deux nombres réels.
x_i: représente la masse du sachet de lait caillé ;
P_i: la probabilité qu'un sachet de lait ait la masse x_i.
1) a- Calculer E(X) l'espérance mathématique de X en fonction de a et b
b- Sachant que E(X) = 250, justifier que : $a = 0{,}14$ et $b = 0{,}33$.
Dans la suite de l'exercice, on conservera les valeurs de a et b données ci – dessus.
2) Gnamien prend au hasard un sachet de lait caillé de la société.
Calculer la probabilité pour que la masse de ce sachet de lait caillé soit au moins de 250g.

3) Tieple, la fille de Gnamien, prend au hasard et de façon indépendante cinq sachets de lait caillé.
Calculer la probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220g.
On prendra l'arrondi d'ordre 3 du résultat.
4) Les sachets de lait caillé sont contrôlés par une machine.
Cette machine est réglée pour éliminer en principe les sachets de lait de masse inférieure à 250g.

- Si un sachet de lait caillé à 240g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,7.
- Si un sachet de lait caillé à 230g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,8.
- Si un sachet de lait caillé à 220g, il est systématiquement éliminé.
- Si un sachet de lait caillé à une masse supérieure ou égale à 250g, il est systématiquement accepté.

a- Justifier que la probabilité qu'un sachet de lait caillé de 240g soit éliminé est de 0,098.
b- Calculer la probabilité pour qu'un sachet de lait caille de cette société soit éliminé.

EXERCICE 10

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation.
Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part d'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autres part sa solidité est testée. Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications que :
- 92% des jouets sont sans défaut de finition
- Parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95% réussissent le test de solidité ;
- 2% des jouets ne satisfont a aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :
F l'événement : « le joue est sans défaut de finition » ;
S l'événement : « le joueur réussi le test de solidité ».
1) **Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.**

a- En utilisant les données de l'énoncé, détermine : $P(F)$; $P_F(S)$; $P(\overline{F} \cap \overline{S})$.
b- Démontre que : $P_{\overline{F}}(\overline{S}) = \frac{1}{4}$.

2). Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition.
(**On donnera le résultat arrondi au millième**).
3) **Etude d'une variable aléatoire**
Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 5.000 francs, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut (donc ne rapportent aucun franc), les autres jouets rapportent 2.500 francs.
On désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporte.

a- Déterminer la loi de probabilité de X.
b- Calculer l'espérance mathématique de X et la variance de X.

SITUATION COMPLEXE 1

Pour réduire le nombre d'accidents de la circulation dû à la consommation d'alcool par les automobilistes, la gendarmerie nationale utilise un nouvel alcootest. Après un essai, dans une population composée de 8% de personnes ivres, la gendarmerie recueille les statistiques suivantes :

- 80% des automobilistes ivres sont déclarés positifs à ce test.
- 95% des automobilistes non ivres sont déclarés négatifs à ce test.

Le commandant de brigade de la gendarmerie de ta localité voudrait savoir le nombre minimal d'automobilistes à contrôler pour que la probabilité d'avoir au moins un test positif soit supérieure à 0,99.
Il te sollicite pour trouver ce nombre.
En utilisant tes connaissances en mathématiques ; réponds à la préoccupation du commandant de brigade.

SITUATION COMPLEXE 2

Un projet de construction d'une université est prévu dans une commune d'Abidjan. Trois filières A, B et C sont prévues. Chaque étudiant ne peut s'inscrire que dans une filière.
L'effectif total de l'université est 220 étudiants. Les effectifs dans les filières B et C sont respectivement la moitié et le tiers de l'effectif de A. Dans la filière A, il doit y avoir 20% de filles ; dans la filière B, 70% de garçons et dans la filière C, 40% de filles.
Une ONG œuvrant dans la politique genre, compte offrir chaque année un kit composé d'un ordinateur, d'une imprimante et d'une collection internet à un étudiant choisi au hasard pour l'encourager dans ses études.
L'ONG a plus d'intérêt dans la filière B concernant les filles. Dans la perspective qu'une fille ait été choisie, l'ONG veut savoir la chance qu'a cette fille d'être de la filière B. Elle te sollicite.
En utilisant tes connaissances mathématiques, réponds à la sollicitation de l'ONG.

SITUATION COMPLEXE 3

A la veille des congés de noël, les élèves de Terminale de ton établissement décident d'organiser une journée récréative. A cette journée, ils veulent organiser des jeux dont l'un se présente sous la forme suivante : dans une urne se trouvant dix jetons indiscernables au toucher dont 4 sont rouges, 2 sont verts, 3 sont blancs et 1 est noir.
Le jeu consistera à miser 200 F, puis à tirer au hasard un jeton de l'urne.

- Si le joueur tire un jeton vert, il gagne 1000 F et une enveloppe contenant un montant S.
- Si le joueur tire un jeton blanc, il gagne une enveloppe contenant une somme S.
- Si le joueur tire un jeton rouge, il paie 1000 F aux organisateurs du jeu.
- Si le joueur tire le jeton noir, il le remet dans l'urne et effectue un second tirage.
  - Si le nouveau jeton tiré est noir, il paie 300 F aux organisateurs du jeu.
  - Dans les autres cas, il gagne 200 F.

Le président du conseil scolaire veut déterminer la valeur de la somme S à mettre dans les enveloppes pour que le gain moyen d'un joueur soit 2500 F.
Ne sachant pas comment déterminer ce montant S, il te sollicite.
En utilisant les connaissances mathématiques, trouve une solution à la préoccupation du président du conseil scolaire.

SITUATION COMPLEXE 4

Dans le cadre de la recherche des causes des accidents de la circulation dans ta région, l'Office de la Sécurité Routière (OSER) a fait une enquête. Elle utilise un alcootest. L'enquête relève que 45% des conducteurs ont un taux d'alcoolémie supérieur ou égale à 0,5. L'enquête relève aussi que :

- 96% des conducteurs qui ont un taux d'alcoolémie supérieur ou égale à 0,5 sont testés positif.
- 2% des conducteurs qui ont un taux d'alcoolémie inferieur ou égale à 0,5 sont testés positif.

Ton oncle, conducteur dans une compagnie de transport a eu un résultat négatif à l'alcootest. Un agent de l'OSER affirme que ton oncle à 97% de chance d'être parmi les conducteurs ayant un taux d'alcoolémie inférieur à 0,5.
A l'aide d'une production argumentée, dis si l'affirmation de l'agent de l'OSER est vérifiée.

Leçon 3

DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTIONS

EXERCICE 1

On donne les phrases suivantes :

1. f est dérivable en tout élément de $]a; b[$ et dérivable à gauche en b.
2. f est dérivable en tout élément de $]a; b[$ et dérivable à droite en a et derivable à gauche en b.
3. f est dérivable en tout élément de $]a; b[$.
4. f est dérivable en tout élément de $]a; b[$ et dérivable à droite en a.

Complète chaque phrase ci – dessous par le numéro de l'une des phrases précédentes :

1. On dit que la fonction f est derivable sur l'intervalle $]a; b]$ lorsque ……………………………...
2. On dit que la fonction f est derivable sur l'intervalle $[a; b[$ lorsque ……………………………...
3. On dit que la fonction f est derivable sur l'intervalle $]a; b[$ lorsque ……………………………...
4. On dit que la fonction f est derivable sur l'intervalle $[a; b]$ lorsque ……………………………...

EXERCICE 2

Ecris sur ta feuille de copie, le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivies de **VRAI** si l'affirmation est vraie et **FAUX** si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	Si g est une fonction continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-2; 3]$ avec $g(-2) = 0{,}07$ et $g(3) = -0{,}03$. On a : $-2 < \alpha < 3$
2	La fonction $x :\mapsto sin\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$ admet pour dérivée sur $\mathbb{R}$ la fonction $x :\mapsto 2x\cos\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$
3	On donne la propriété suivante : f est une fonction dérivable sur un intervalle K. S'il existe un nombre réel M tels que pour tout x element de K, $\|f'(x)\| \leq M$, alors pour tous reels a et b de K, on a : $\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$. Cette propriété est la propriété relative à l'inégalité des accroissements finis.
4	S'il existe deux réel m et M tel que pour tout $x \in [a\,; b], m \leq f'(x) \leq M$, alors on a l'inégalité : $m(b-a) \leq f(x) \leq M(b-a)$
5	Si f est une fonction dérivable et bijective sur $\mathbb{R}$ telle que $f(-2) = 0$ et $f'(-2) = -1$, alors f^{-1} est dérivable en 0 et on : $(f^{-1})'(0) = -2$.
6	Si f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant x_0 et si la dérivée seconde de f s'annule en x_0 en changeant de signe, alors le point $(x_0\,; f(x_0))$ est un extremum.

EXERCICE 3

Pour chacune des affirmations ci – dessous, trois réponses A, B et C sont données dont une seule est juste.
Recopie sur ta feuille, le numéro de l'affirmation suivie de la lettre correspondant à la réponse juste.

Questions à Choix Multiples : Q. C. M			
QUESTIONS	A	B	C
Q_1 : Pour tout $x \neq 2$, $f(x) = \frac{x^2-3x}{x-2}$, donc $f'(x) = \cdots$	$\dfrac{3x^2 - 10x + 6}{(x-2)^2}$	$3x^2 - 10x + 6$	$\dfrac{x^2 - 4x + 6}{(x-2)^2}$

Q_2 : Pour tout $x \in [-1; 1]$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, donc pour tout $x \in]-1; 1[$ $f'(x) = \cdots$	$\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{x}{2\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$
Q_3 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x(1-3x)^4$, donc $f'(x) = \cdots$	$-12(1-3x)^3$	$(15x-1)(1-3x)^3$	$(1-15x)(1-3x)^3$
Q_4 : Soit f(x) $= \frac{2x-1}{x+3}$. Le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées est	(0 ; -1)	$(0 ; -\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3} ; 0)$

EXERCICE 4

f est une fonction définie sur un intervalle I contenant a. (C_f) est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On note : ℓ_1 la limite à gauche en a de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et ℓ_2 la limite à droite en a de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Relie chaque résultat de gauche à son interprétation graphique à droite.

$\ell_1 = \sqrt{3}$ et $\ell_2 = +\infty$
$\ell_1 = +\infty$ et $\ell_2 = -\infty$
$\ell_1 = 1$ et $\ell_2 = 1$
$\ell_1 = -\infty$ et $\ell_2 = \frac{3}{2}$
$\ell_1 = 2$ et $\ell_2 = -2$

(C_f) admet une tangente au point A$(a; f(a))$
(C_f) admet une tangente à droite et une tangente à gauche au point A$(a; f(a))$
(C_f) admet une tngente à gauche et une tangente verticale au point A$(a; f(a))$
(C_f) admet une tangente à droite et une tangente verticale au point A$(a; f(a))$
(C_f) admet une tangente verticale au point A$(a; f(a))$

EXERCICE 5

A/ Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité à gauche et la dérivabilité à droite en x_0.

1) $f(x) = |2-2x|$; $x_0 = 1$,

2) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 \ si \ x > -2 \\ -4x - 9 \ \ si \ x < 2 \end{cases}$; $x_0 = -2$

B/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - |x| + 1$.

Etudier la dérivabilité de f en 0, puis donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

EXERCICE 6

Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de f en a puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

1) $f(x) = x^2 + 3x$; $a = 1$

2) $f(x) = |4 - x^2|$; $a = 2$

3) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$; $a = 3$

4) $f(x) = (x-2)\sqrt{x^2+x-6}$; $a = 2$

5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$; $a = 4$

6) $f(x) = \frac{1}{2}x - cosx$; $a = 0$

7) $\begin{cases} f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$; $a = 0$

8) $f(x) = 3x + sinx$; $a = 0$

9) $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$; $a = 2$

EXERCICE 7

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$

1) Après avoir déterminé l'ensemble de définition D_f, étudier la dérivabilité de f en - 1.

2) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

EXERCICE 8

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1) f(x) = $\frac{1}{4}x^6 - 4x^2 + \sqrt{x} - \frac{1}{x^2}$ 2) f(x) = $\frac{2x+3}{x-4}$ 3) f(x) = $\frac{(3x-2)^2}{x^2-3x-7}$ 4) f(x) = $2x(2x+1)^{18}$

5) f(x) = $\sqrt{-x+3}$ 6) f(x) = $\sqrt{sinx}$ 7) f(x) = $\sqrt{2x^2+4x-8}$ 8) f(x) = $\frac{1}{\sqrt{-2x+1}}$

9) f(x) = $\frac{1}{4x^2-4x-1}$ 10) f(x) = $\frac{-2}{(2x-1)^4}$ 11) f(x) = $\frac{x}{\sqrt{-x^2+1}}$ 12) f(x) = $x\sqrt{2x+1}$

13) f(x) = $(2x+1)(x^2-1)$ 14) f(x) = $\left(\frac{-x+3}{x+1}\right)^5$ 15) f(x) = cos(2x+3) 16) f(x) = sin(-2x+1)

17) f(x) = $cos^2(x)$ 18) f(x) = $sin^2(x)$ 19) f(x) = tan(x) 20) f(x) = cotan(x)

21) f(x) = cos(3x).cos(x) 22) f(x) = cos(2x).sin(3x) 23) f(x) = $sin^2(3x+1)$ 24) f(x) = $\sqrt{\cos(x)}$

25) f(x) = $5x^3 - 3x^2 + x + 2$ 26) f(x) = $\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}$ 27) f(x) = $(cosx)^{\frac{3}{2}}$ 28) f(x) = tan(2x+5)

EXERCICE 9

Soit f une fonction derivable sur [2 ; 5] et telle que : $1 \leq f'(x) \leq 4$ pour tout x element de [2 ; 5].
Démontre que : $3 \leq f(5) - f(2) \leq 12$.

EXERCICE 10

k est une fonction derivable sur un intervalle $[a;b]$ telle que pour tout reel $x \in [a;b]$, $|k'(x)| < 0{,}2$. Justifie que $k(a) - 0{,}2(b-a) < k(b) < k(a) + 0{,}2(b-a)$.

EXERCICE 11

On considère la fonction f definie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(x) = x\sqrt{x+1}$ et on note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J).

1. Etudie la dérivabilité de f en -1. Donne une interprétation graphique du résultat de la limite calculée.
2. Le tableau de variation de la fonction f est donné ci – dessous :

x	-1		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗	$+\infty$

Soit h la restriction de f à l'intervalle $\left[-\frac{2}{3};+\infty\right[$.

a) Démontre que h est une bijection de $\left[-\frac{2}{3};+\infty\right[$ sur un intervalle K à préciser.

b) Dresse le tableau de variation de h^{-1}, bijection réciproque de h.

3. a) Calcule $h(3)$.

   b) Justifie que h^{-1} est derivable en 6 et calcule $(h^{-1})'(6)$.

EXERCICE 12

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - 6$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1) a- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) a- Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

b- En déduire $f(]-\infty; 3])$ et $f([0; 4])$.

3) a- Justifier que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans $[-1; 3]$.

b- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions dans $\mathbb{R}$ qu'on notera $\alpha < \beta < \theta$.

c- Trouver un encadrement d'ordre 1 de θ.

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle$[3; +\infty[$.

a- Prouver que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont on précisera les ensembles de départ, d'arrivé et son sens de variation.

b- Construire la courbe de g et celle de g^{-1} dans le même repère.

EXERCICE 13

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique : 2 cm.

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f definie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{-x+1}{x^3+1}$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$. On donne : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

1) a- Calculer la limite de f en $-\infty$ en $+\infty$.

b- Interpréter graphiquement ces résultats.

2) a-Vérifier que : $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$

b- Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Démontrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

4) a- Etudier le sens de variation de f.

b- Dresser le tableau de variation de f.

5) a- Démontrer que : $f(\alpha) = -\frac{1}{3\alpha^2}$

b- En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

6) Déterminer les coordonnées de A et B, points d'intersection respectifs de la courbe (C) et l'axe (OI) puis la courbe (C) et l'axe (OJ).

7) Montrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse – 2 est : $y = -\frac{29}{49}x - \frac{79}{49}$

8) Tracer (T), les asymptotes à (C) et construire la courbe (C).

On prendra : $\alpha = 1,7$ et $f(\alpha) = -0,12$.

9) Soit h la restriction de f à l'intervalle$]-1; \alpha]$.

a- Justifier que h réalise une bijection de $]-1; \alpha]$ dans un intervalle K à déterminer.

b- Dresser le tableau de variation de h^{-1}, la bijection de h.

c- Calculer h(0) puis en déduire $(h^{-1})'(1)$.

d- Déterminer une équation de la tangente (K) à $(C_{h^{-1}})$ au point d'abscisse 1.

10) Construire $(C_{h^{-1}})$, courbe représentative de h^{-1} dans le même repère (O, I, J).

EXERCICE 14

Soit la fonction h definie sur $[-1;+\infty[$ par : $h(x) = \frac{x^2\sqrt{x+1}}{|x|}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$, de représentation graphique (C_h) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 3 cm.

1) a- Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in [-1;0[\,, h(x) = -x\sqrt{x+1} \\ \forall x \in]0\,;+\infty[\,, h(x) = x\sqrt{x+1} \end{cases}$

b- Etudier la continuité de h en 0.

c- Etudier la dérivabilité de h à gauche et à droite en 0. h est – elle dérivable en 0 ? Justifier la réponse et en déduire une interprétation graphique.

d- Etudier la dérivabilité de h à droite en – 1 et donner une interprétation graphique du résultat.

2) Calculer les limites de $h(x)$ et $\frac{h(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. En donner une interprétation graphique.

3) a- Calculer $h'(x)$ pour tout reel x de $[-1;0[$ et pour tout nombre réel x de $]0\,;+\infty[$.

b- Etudier le signe de $h'(x)$.

c- Donner le sens de variation de h puis dresser son tableau de variation.

4) a- Soit g la restriction de h à $[0\,;+\infty[$, démontrer que g réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On note g^{-1} sa bijection réciproque et $(C_{g^{-1}})$, la représentation graphique de g^{-1}.

a- Calculer g (1) et justifier que g^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$, puis calculer $(g^{-1})'(\sqrt{2})$.

b- Donner une équation de la tangente (T) a $(C_{g^{-1}})$ au point d'abscisse $\sqrt{2}$.

5) Construire (C_h) et $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère (O, I, J).

EXERCICE 15

Soit la fonction numérique f définie par : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;1[\,, f(x) = 2x^2 - x - \frac{2}{x-1} \\ \forall x \in]1;+\infty[\,, f(x) = x - \frac{2}{x-1} \end{cases}$

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1$.

On donne : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;\alpha[\,, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[\,, g(x) > 0 \end{cases}$

(C_1) et (C_2) sont respectivement les courbes représentatives de f sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). (Unité : 2 cm)

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) a- Démontrer que $\forall x \in]-\infty;1[\,, f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$ puis étudier le sens de variation de f sur $]-\infty;1[$.

b- Etudier le sens de variation de f sur $]1;+\infty[$.

c- Dresser le tableau de variation de f.

3) a- Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C_2) en $+\infty$.

b- Etudier la position relative de (C_2) par rapport a (Δ).

4) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat.

5) Déterminer les coordonnées des points d'intersection :

a- de (C_1) avec l'axe des ordonnées.

b- de (C_2) avec l'axe des abscisses.

6) Représenter f dans le repère (O, I, J).

7) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1;+\infty[$.

a- Justifier que h est une bijection de $]1;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
b-Dresser le tableau de variation de h et celui de h^{-1} sa bijection réciproque.
c- Calculer $(h^{-1})'(0)$.
d-Représenter h^{-1} dans le même repère que f.

SITUATION COMPLEXE 1

Une société de fabrication de produits cosmétiques fabrique chaque jour x produit avec $x \in [0\,;40]$
Le coût total de productions, exprimée en milliers de francs, est donné par la fonction : $C(x) = x^2 - 60x$.
Chaque produit fabriqué est vendu au prix unitaire de 2.000 F. Toute la production est vendue le même jour.
Pour plus d'efficacité, le directeur de l'entreprise veut réaliser un bénéfice maximal. Il demande au comptable la quantité de produits cosmétiques que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser ce bénéfice maximal.
Le comptable t'associe à ce projet.
Détermine la quantité de produits cosmétiques à fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal.

SITUATION COMPLEXE 2

Un laboratoire pharmaceutique fabrique et commercialise un produit. Ce laboratoire peut produire de 5 à 30 kg de ce produit par semaine. Une étude a montré que le bénéfice réalisé par ce laboratoire, exprimé en milliers de FCFA, pour la production et la vente de x kg de produit est modelisépar la fonction K definie sur l'intervalle $[5\,;30]$ par : $K(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 11x^2 - 40x - 72$.
En t'appuyant sur tes acquis de la classe de Terminale, détermine la quantité de produit que ce laboratoire doit fabriquer et vendre pour réaliser sur un bénéfice maximal par semaine.
Donne une estimation du bénéfice maximale réalisé. On arrondira le résultat à l'unité prêt.

Leçon 4

PRIMITIVES

EXERCICE 1

Complète le tableau des primitives des fonctions usuelles et composées suivantes :

f(x)	0	a	x^r	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{cos^2 x} = 1 + tan^2 x$	$\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$	x	$\frac{1}{x^2}$
F(x)									

Fonctions (f(x))	$\frac{U'}{U^r}$	$U'U^r$	U' + V'	$\frac{U'}{\sqrt{U}}$	$-U'\sin(U)$	$U'\cos(U)$
Primitives (F(x))						

EXERCICE 2

Une seule des réponses proposées est exacte.

Questions à Choix Multiples : Q. C. M			
QUESTIONS	a	b	c
Q_1 : Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty; 0[$ par f(x) $= \frac{3x^2-2}{x^2}$. Une primitive de f sur I est F(x) $= \cdots$	$3x - \frac{2}{x}$	$3x + \frac{2}{x}$	$5x - \frac{2}{x}$
Q_2 : Soit f la fonction définie par f(x) = $\frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})$. Une primitive de f sur $I =]0; +\infty[$ est F(x) $= \cdots$	$-2\cos(\sqrt{x})$	$2\cos(\sqrt{x})$	$-\cos(\sqrt{x})$
Q_3 : Soit f la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par f(x) = $(2x^2+2x+1)^3(2x+1)$.Une primitive de f sur I est F(x) $= \cdots$	$\frac{(2x^2+2x+1)^3}{2}$	$\frac{(2x^2+2x+1)^4}{4}$	$\frac{(2x^2+2x+1)^4}{2}$
Q_4 : Soit f la fonction définie par f(x) = $\frac{1}{x^2-2x+1}$. Une primitive de f sur $I =]1; +\infty[$ est F(x) $= \cdots$	$\frac{-1}{x-1}$	$\frac{-1}{(x-1)^2}$	$\frac{1}{x-1}$
Q_5 : Soit une fonction définie par f(x) = $\frac{x+4}{x^5+4x^4}$. Une primitive de f sur $I =]0; +\infty[$ est F(x) $= \cdots$	$\frac{-1}{4x^4}$	$\frac{-1}{3x^3}$	$\frac{1}{3x^3}$

EXERCICE 3

Démontrer que F est une primitive de f sur l'intervalle I.

a) f(x) = $3x^2 - 1$ F(x) = $(x-2)(x^2+2x+3)$ $I = \mathbb{R}$; b) $f(x) = \sqrt{x}$ F(x) = $\frac{2}{3}\left(x\sqrt{x} + 1\right)$ $I =]0; +\infty[$

c) f(x) = $\frac{x}{(3-x^2)^2}$ F(x) = $\frac{-1}{2(3-x^2)}$ $I = [4;+\infty[$; d) f(x) = $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ F(x) = $\sqrt{1-x^2}$ $I =]-1;1[$

e) f(x) = $x^2 - 2x + 1$ F(x) = $\frac{(x-1)^3}{3}$ $I = \mathbb{R}$; f) f(x) = $-5\sin(x).cos^4(x)$ F(x) = $cos^5(x)$ $I = \mathbb{R}$

EXERCICE 4

Trouver la primitive F de la fonction continue f sur l'intervalle I qui prend la valeur y_0 en x_0.

a) f(x) = $1 - x + x^2 - x^3$ $I = \mathbb{R}$ $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$;

b) $f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ $I =]0;+\infty[$ $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$;

c) f(x) = $x^2(6 + x^3)$ $I = [4;+\infty[$ $x_0 = -3$ et $y_0 = 2$;

d) f(x) = $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ $I =]-\infty;-2[$ $x_0 = 6$ et $y_0 = -1$;

e) f(x) = $\sin(x).cos^4(x)$ $I = \mathbb{R}$ $x_0 = \pi$ et $y_0 = 0$;

f) f(x) = $\frac{3x}{(x^2+1)^2}$ $I = \mathbb{R}$ $x_0 = 0$ et $y_0 = -2$.

EXERCICE 5

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1) f(x) = $x^4 - 3x^3 + x^2 - 7$

2) f(x) = $\frac{-3x^4+2x-5}{x^2}$

3) f(x) = $x^2\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4) f(x) = $cos(x) - 5\sin(x)$

5) f(x) = $\frac{4x^2}{(x^3+8)^2}$

6) f(x) = $-\frac{x+1}{(x^2+2x)^3}$

7) f(x) = $\left(\frac{x}{x^4+1}\right)^3$

8) f(x) = $\frac{\frac{3}{2}x^2+1}{(x^3+2x)^3}$

9) f(x) = $(4x-1)^6$

10) f(x) = $-6x(x^2+3)^3$

11) f(x) = $\left(x^2 + \frac{1}{3}\right)(x^3+x)^4$

12) f(x) = $x(x^2+1)^2$

13) f(x) = $(2x^2+2x+1)^3(2x+1)$

14) f(x) = $(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}$

15) f(x) = $(2x+1)(x-1)$

16) f(x) = $(x-4)^{\frac{4}{3}}$

17) f(x) = $\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

18) f(x) = $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

19) f(x) = $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$

20) f(x) = $\frac{-4x+6}{\sqrt{-x^2+3x+1}}$

21) f(x) = $\frac{x+1}{\sqrt{(x^2+2x+5)^4}}$

22) f(x) = $\tan(x) + \frac{x}{\cos^2(x)}$

23) f(x) = $\cos(x) - x\sin(x)$

24) f(x) = $\frac{x\cos(x)-\sin x}{x^2}$

25) f(x) = $\sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$

26) f(x) = $3\cos(5x-1)$

27) f(x) = $-2\sin(2x+1)$

28) f(x) = $3\cos(x+1)$

29) f(x) = $\cos(x) - 5\sin(x)$

30) f(x) = $\sin(x) - \cos(x)$

31) f(x) = $sin^2(x)$

32) f(x) = $cos^2(x)$

33) f(x) = $2\cos(x).\sin(x)$

34) f(x) = $\frac{1}{cos^2(x)} - \frac{1}{sin^2(x)}$

35) f(x) = $\frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

36) f(x) = $\tan(x) + tan^3(x)$

37) f(x) = $tan^5(x) + tan^3(x)$

38) f(x) = $\frac{\sin(\sqrt{x})}{3\sqrt{x}}$

39) f(x) = $\sin(x).cos^5(x)$

40) f(x) = $\frac{\sin(x)}{cos^3(x)}$

EXERCICE 6

A/ Soit la fonction g définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{3x^2-7x^2+5x+1}{(x-1)^2}$

1) Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall x \in\ ]1\,;+\infty[\ g(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$.

2) En déduire la primitive G de g qui s'annule en 0.

B/ Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par : $f(x) = \frac{6x-4}{(2x-1)^3}$

1) Déterminer les nombres réels a et b tel que $\forall x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, $f(x) = \frac{a}{(2x-1)^2} + \frac{b}{(2x-1)^3}$

2) Déterminer la primitive F de f sur I qui prend la valeur 0 en 1.

C/ Soit f et g les fonctions définies sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ et $g(x) = (ax+b)\sqrt{1+x}$

Déterminer les réels a et b pour que g soit une primitive de f.

EXERCICE 7

A/

Soit f la fonction numérique définie sur $]2;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{8x-2x^2}{(x-2)^2}$

1) Déterminer a et b tels que, pour tout $x \in\ ]2;+\infty[$, $f(x) = a + \frac{b}{(x-2)^2}$

2) En déduire la primitive F sur $]2;+\infty[$ de f telle que F(3) = 1.

B/

1) Trouver les réels a et b tels que, $\forall\ x \in\ ]-1;+\infty[$, $\frac{2x-3}{\sqrt{x+1}} = a\sqrt{x+1} + \frac{b}{\sqrt{x+1}}$

2) Déterminer sur $]-1;+\infty[$, la primitive F de $f : x \mapsto \frac{2x-3}{\sqrt{x+1}}$ qui s'annule en 3.

EXERCICE 8

On donne les fonctions f , g et h, définies sur l'intervalle $I = \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$f(x) = \frac{sin(x)}{cos^3(x)}$; $g(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$ et $h(x) = \frac{3}{cos^4(x)}$

On admettra que f, g et h sont continues et dérivables sur l'intervalle I.

1) Déterminer les primitives de f sur l'intervalle I.

2) a- Calculer la dérivée de f et montrer que : $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $f'(x) = \frac{3}{cos^4(x)} - \frac{2}{cos^2(x)}$

b- Exprimer h(x) en fonction de f'(x) et g(x).

c- Déterminer les primitives de g sur I et en déduire que les primitives de h sur I sont les fonctions :

$$H_k(x) = \frac{sin(x)}{cos^3(x)} + \frac{2\sin(x)}{\cos(x)} + k.$$

3) Déterminer la primitive H_0 de la fonction h sur I qui s'annule en $\frac{\pi}{4}$.$\left(x_0 = \frac{\pi}{4} \text{ et } y_0 = 0\right)$.

SITUATION COMPLEXE

Un pâtissier commercialise des glaces d'un même type très prisées par les consommateurs. Il peut en produire entre 0 et 300 par jour dans sa petite entreprise familiale. Cette production est vendue dans sa totalité.
Lorsque x représente le nombre de centaines de glaces produites, on note $B(x)$, le bénéfice réalisé par le pâtissier pour la vente des x centaines de glaces.
D'après les données précédentes, l'artisan sait que :

- Pour tout x de l'intervalle $[1;3]$, on a : $B'(x) = -20x + 30$, où $B(x)$ est exprimé en milliers de francs et B' la fonction dérivée de B.

- Pour une centaine de glaces vendue, son bénéfice est 20 milles francs.

Il te sollicite pour l'aider à déterminer le nombre de glaces qu'il devra fabriquer par jour pour que son bénéfice soit maximal et de déterminer la valeur de ce bénéfice.

Leçon 5

FONCTIONS LOGARITHMES NEPERIENS

EXERCICE 1

Relie chaque élément de la colonne A à sa correspondance dans la colonne B.

COLONNE A		COLONNE B
$\ln(e^2)$ •		• $\frac{3}{2}$
$\ln(\sqrt{e})$ •		• 2
$\ln(e^3)$ •		• -2
$\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$ •		• 3
$\ln(e\sqrt{e})$ •		• $\frac{1}{2}$

EXERCICE 2

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si l'affirmation est fausse.

N°	AFFIRMATIONS
1	La fonction ln est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
2	La fonction ln est la primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.
3	L'ensemble des solutions de l'inéquation (I) : $\ln(x-3) < 1$ est $]3\,;\, e+3[$
4	Le système d'équation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definie par : $\begin{cases} 5\ln x + 2\ln y = 8 \\ 4\ln x - 3\ln y = 11 \end{cases}$ a pour solution $\left(e^2\,;\,\frac{1}{e}\right)$.

EXERCICE 3

Dans chacun des cas, recopie le chiffre et la lettre correspondant à la bonne réponse.

	QUESTIONS	A	B	C
1	Une primitive de $\frac{4}{1-x}$ est	$-4\ln(1-x)$	$\frac{4}{(1-x)^2}$	$\frac{4}{\ln(x-1)}$
2	$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 =$	2	$+\infty$	0
3	Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{1-x}$ alors $D_f =$	$\mathbb{R}^*$	$]-\infty; 0[\,\cup\,]1; +\infty[$	$]0\,; 1[\,\cup\,]1; +\infty[$
4	Si $f(x) = x^2 \ln x + 3$ alors $f'(x) =$	$(1 + x^2 \ln x)$	$x(2\ln x + 1)$	$2x$

5	L'ensemble des solutions de l'inéquation (I) : $x \in \mathbb{R},\ \ln x < 2$ est	$]-\infty; e^2[$	$]0; e^2[$	$]-\infty; 2[$
6	$F : x \longmapsto \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$ est une primitive de la fonction f sur $]-1; +\infty[$ telle que :	$\frac{x+1}{x+2}$	$\frac{1}{(x+1)(x+2)}$	$\frac{1}{x+2}$
7	Dans $]0;\ +\infty[$, l'ensemble solution de l'équation $ln^2x + lnx - 6 = 0$ est :	$\{e^{-3}\,; e^2\}$	$\{e^2\,; e^3\}$	$\{-3; 2\}$

EXERCICE 4

Simplifier chacune des expressions suivantes :

$A = \ln(27) + 2\ln(8) - 3\ln\left(\frac{16}{81}\right)$; B= $ln\left(1-\sqrt{3}\right)^8 + ln\left(1+\sqrt{3}\right)^8$; $C = ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) + ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

$D = \ln(6{,}75)$; $E = ln\left(2+\sqrt{2}\right) + ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$

EXERCICE 5

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1) f(x) = $2x - xlnx$; 2) f(x) = $\ln(3-2x)$; 3) f(x) = $\ln\left(\sqrt{2x-3}\right)$; 4) f(x) = $ln\left(\frac{3x-2}{2x-5}\right)$

5) f(x) = $ln\left|\frac{2x-3}{5x-2}\right|$; 6) f(x) = $2x - 1 + \frac{lnx}{2x-3}$; 7) f(x) = $2x - 3 - \frac{\ln(2-x)}{x}$; 8) f(x) = $\frac{\ln(x-5)}{lnx}$

EXERCICE 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1) $\ln(4-3x) = 0$; 2) $\ln\left(x(x+4)\right) = 0$; 3) $\ln(x-3) = \ln(2+x)$; 4) $lnx + \ln(x+1) = 1$

5) $ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$; 6) $\ln(2x+1) - \ln(x+2) = \ln(2-x)$; 7) $3(lnx)^2 + 5lnx - 2 = 0$

EXERCICE 7

On donne : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$.

1) a- Vérifier que P(3) = 0. En déduire une factorisation de P(x).

b- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation P(x) = 0.

2) Déduire de la question 1), la résolution dans $\mathbb{R}$ de chacune des équations suivantes :

a) $(E_1): 2(lnx)^3 - 2(lnx)^2 - 7lnx + 6 = 0$; b) $(E_2): 2(lnx)^3 + 2\ln(2x-1) = \ln(7x-6)$.

EXERCICE 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1) $2ln + 1 \geq 0$; 2) $2ln(x+1) \leq ln(5x+1)$; 3) $lnx > ln(2x-1)$;

4) $ln(x-3) + ln(x-1) < ln(3x+2)$; 5) $ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) > 0$; 6) $(2-lnx)(3+lnx) > 0$

7) $(lnx)^2 - 4 \geq 0$; 8) $(lnx)^2 + 2lnx + 15 \leq 0$.

EXERCICE 9

On donne : $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

1) a- Calculer P(1) et P (-1).

b- Trouver le polynôme Q tel que P(x) = $(x^2-1)Q(x)$

c- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation P(x) = 0.

2) Déduire de la question 1), la résolution dans $\mathbb{R}$ de chacune des inéquations suivantes :

a) $(I_1): (lnx)^3 - 3(lnx)^2 - lnx + 3 \leq 0$; b) $(I_2): (\ln(1-x))^3 - 3(\ln(1-x))^2 - \ln(1-x) + 3 \leq 0$

EXERCICE 10

Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les systèmes d'équation suivantes :

1) $\begin{cases} x+y=9 \\ lnx+lny=ln(18\,) \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2lnx-lny=0 \\ \;lnx+lny=3 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} \ln(y+6)-\ \ln(y+6)=3\ln(2) \\ 5x-y=-6 \end{cases}$

EXERCICE 11

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(x+lnx)$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(x-lnx)$; 3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(x^2+3x-xlnx)$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\sqrt{x}lnx$; 5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}xln\sqrt{x}$; 6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{lnx}{x}$

7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(x^3lnx)$; 8) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}ln\left(\frac{1}{x}-lnx\right)$; 9) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\ln(1+x)}{x^2-x}$; 10) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$; 11) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}ln\left(\frac{1}{x}+1\right)$;

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1-xlnx)$; 13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x+1}+1$; 14) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-3x-xlnx$; 15) $\lim\limits_{x\to+\infty}ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

16) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\,ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$; 17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4xlnx}{x+1}$ 18) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln(1+x^2)}{x^2}$; 19) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln(x)}{\sqrt{x}}$; 20) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x-1}$

21) $\lim\limits_{x\to-\infty}2+x+ln(1-x)$; 22) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-1)ln(x)}{x}$; 23) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln(x)}{\sqrt{x}}$; 24) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+lnx}{2-lnx}$; 25) $\lim\limits_{x\to e}\frac{xlnx-x}{x-e}$;

26) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{x-1}$; 27) $\lim\limits_{x\to-3}ln(x^2+x+1)$; 28) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{lnx}$; 29) $\lim\limits_{x\to+\infty}x+\ln(x+1)-lnx$

EXERCICE 12

Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble D sur lequel la fonction f est dérivable et calculer f'(x).

1) f(x) = $\frac{1}{x^3}-lnx+x+1$; 2) f(x) = $\ln(5x-1)$; 3) f(x) = $\frac{\ln(x^2+1)}{x}$; 4) f(x) = $2x^2-4x+xlnx$

5) f(x) = $ln\left|\frac{3x+1}{1-x}\right|$; 6) f(x) = $x^2lnx-x^2+\frac{2}{x^2}$; 7) f(x) = $\frac{lnx}{1-3x}$; 8) f(x) = $\frac{1+lnx}{1-lnx}$; 9) f(x) = $ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

10) f(x) = $\frac{x}{4}-\frac{1}{2x}+\frac{lnx}{x}$; 11) f(x) = $x(lnx)^2-x-1$; 12) f(x) = $ln\left(\sqrt{2x-4}\right)$; 13) f(x) = $\frac{x}{2-x}-\ln(1-x)$;

14) f(x) = $\frac{-2x+1}{x^2}+lnx$; 15) f(x) = $-\frac{2x^2}{x^2+1}+ln(x^2+1)$; 16) f(x) = $\frac{2}{3}x^3+1-2lnx$;

17) f(x) = $2x^2+1-lnx$; 18) f(x) = $\frac{x+2+lnx}{x}$; 19) f(x) = $-9x+5x^2-\frac{2lnx}{x^2}$; 20) f(x) = $\frac{4xlnx}{x+1}$.

EXERCICE 13

Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par : $\begin{cases} \mathrm{f(x)=xln(1-x)-xlnx-1\ \ si\ x>0} \\ \mathrm{f(0)=1} \end{cases}$

On note $(\mathrm{C_f})$ sa courbe représentative.

1) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0. Définir ce prolongement.

2) a- Etudier la dérivabilité de f en 0.

b- f est – elle dérivable en 0 ?

c- Interpréter graphiquement le résultat obtenu en 2 –a).

EXERCICE 14

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

1) f(x) $=\frac{4}{x-3}$ $I=]3;+\infty[$; 2) f(x) = $\frac{x+1}{x+2}$ $I=]-\infty;-2[$; 3) f(x) = $\frac{-4x+6}{x^2-3x-4}$ $I=\mathbb{R}$;

4) f(x) = $\frac{2}{xlnx}$ $I=]1;+\infty[$; 5) f(x) = $\frac{lnx}{3x}$ $I=]0;+\infty[$; 6) f(x) = $\frac{x}{x^2+5}$ $I=\mathbb{R}$;

7) $f(x) = \frac{3}{2-2x} + \frac{4}{(2x-1)^2}$ $I = \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$; 8) $f(x) = \frac{x^3+x^2-2x+3}{x^2}$ $I =]-\infty; 0[$; 9) $f(x) = \frac{1+x}{x^2+2x+3}$ $I = \mathbb{R}$;

10) $f(x) = \frac{(x+1)ln(x^2+2x-3)}{x^2+2x-3}$ $I = \mathbb{R}$; 11) $f(x) = \frac{2x-5}{(x-2)(1-x)}$ $I =]1; 2[$ (Mettre f(x) sous la forme $\frac{a}{x-2} + \frac{b}{1-x}$)

12) $f(x) = \frac{x+2+lnx}{x}$ $I =]0; +\infty[$; 13) $f(x) = \frac{-4x-4}{x^2+2x+3}$ $I = \mathbb{R}$ 14) $f(x) = \frac{ln^3(x)}{x}$ $I =]0; +\infty[$

EXERCICE 15

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ definie par $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

1) Déterminer les nombres réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$; $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$

2) En déduire une primitive F de f sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$; $]-1; 1[$ et $]1; +\infty[$.

EXERCICE 16

On donne la fonction rationnelle h définie par $h(x) = \frac{3x^2+2x-2}{3x-1}$

1) Démontrer qu'il existe trois nombres réels a, b et c tels que : $h(x) = ax + b + \frac{c}{3x-1}$.

2) En déduire une primitive de h sur chacun des intervalles $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$ et $\left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

EXERCICE 17

On veut déterminer une primitive de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2lnx}{(x+1)^3}$

1) Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$

a- Justifier que $\forall x \in]0; +\infty[$; $h(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x(x+1)^2}$

b- En déduire une primitive H de h sur $]0; +\infty[$.

2) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{lnx}{(x+1)^2}$.

Démontrer que $\forall x \in]0; +\infty[$, g'(x) = h(x) – f(x).

3) Déduire des questions précédentes la primitive F de f sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

EXERCICE 18

Le but de cet exercice est de déterminer une primitive F sur $]-\infty; 1[$ de la fonction f definie par :

$f(x) = \frac{2x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. On pose : $g(x) = \frac{2x+1}{(x-1)^2}$, $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et $k(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

1) a- Démontrer que $\forall x \in]-\infty; 1[$, $g(x) = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}$.

b- En déduire une expression de G(x) ou G est une primitive de g sur $]-\infty; 1[$.

2) a- Calculer k'(x) et vérifier que k'(x) = h(x).

b- En déduire une primitive H de h sur $]-\infty; 1[$.

3) Déduire des questions précédentes l'expression de F(x). (On remarquera que : f(x) = g(x) + h(x)).

EXERCICE 19

On considère la fonction f definie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^2 \ln x$.

1) Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2) Justifie que f peut – être prolongé par continuité en 0. Soit φ ce prolongement par continuité. Définis φ.

3) On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^2 \ln x \text{, si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$ et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

a- Etudie la dérivabilité de g sur $]0\,;+\infty[$.

b- Justifie que : $g'(x) = -2x \ln x$.

c- Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.

4)

a- Démontre que la restriction h de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

b- Sur quel ensemble h^{-1} est – elle dérivable ?

c- Résous dans ℝ l'équation $h^{-1}(x) = e$.

d- Construis la courbe de g et celle de h^{-1}.

EXERCICE 20

Soit la fonction f dérivable et définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$.

(C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). **Unité graphique : 2 cm.**

1) a- Justifie que la limite de f en $+\infty$ est égale à 0.

   b- Interprète graphiquement le résultat obtenu précédemment.

2) Démontre que f est prolongeable par continuité en 1. Puis définis ce prolongement.

3) On donne la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x\ln x - x + 1$.

   On admet que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ g(x) > 0$.

   a- Démontre que : $]1;+\infty[, f'(x) = \frac{-g(x)}{x(x-1)^2}$.

   b- Détermine le sens de variation de f sur $]1;+\infty[$. Dresse son tableau de variation.

4) a- Démontre que f realise une bijection de $]1;+\infty[$ sur un intervalle K à déterminer.

   b- Calculer $f(2)$ puis justifier que f^{-1} est derivable en $\ln 2$.

   c- Déterminer $(f^{-1})'(\ln 2)$.

5) Construis la courbe (C).

EXERCICE 21

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x}{1+xlnx} \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique : 4 cm).

1) a- Etudier la continuité de f en 0.

   b- Etudier la dérivabilité de f en 0.

   c- Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point 0 est : $y = x$.

   d- Démontrer que : (C) est au – dessus de (T) sur $]0;1[$ et (C) est en dessous de (T) sur $]1;+\infty[$.

2) Démontrer que la droite (OI) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

3) On suppose que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

   a- Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[\ ,\ f'(x) = \frac{1-x}{(1+xlnx)^2}$

   b- En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J).

5) a- Justifier que : $\forall x \in]0;+\infty[\ ,\ f(x) \leq 1$.

b- Démontrer que : $\forall x \in [1; e], 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$.

EXERCICE 22

Soit la fonction g définie sur $]-\infty; 1[$ par g(x) = $x^2 - 2x + \ln(1-x)$

On admet que : $\forall x \in]-\infty; 0[$,g(x)> 0, $\forall x \in]0; 1[$,g(x)< 0 et g(0) = 0.

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; 1[$ par : f(x) = $x + 1 + \frac{\ln(1-x)}{1-x}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J) ;

Unité : 2 cm.

1. Calcule la limite de f à gauche en 1 puis interprète le résultat.
2. Justifie que la limite de f en $-\infty$ est $+\infty$.
3. a- Démontre que la droite (D) d'équation y = x + 1 est une asymptote à (C) en $-\infty$.
   b- Etudie la position de (C) par rapport à (D).
4. On admet que f est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et onn note f' sa fonction dérivée.
   a. Justifie que : $\forall x \in]-\infty; 1[$, f'(x) =$\frac{g(x)}{(1-x)^2}$
   b. Etudie le signe de f'(x) suivant les valeurs de x puis dresse le tableau de variation de f.
5. On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 0[$.
   a. Démontre que h est une bijection de $]-\infty; 0[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
   On admet que l'équation (E) : $x \in]-\infty; 1[$, f(x) = 0 admet exactement deux solutions α_1 et α_2 telles que : $-1{,}37 < \alpha_1 < -1{,}36$ et $0{,}51 < \alpha_2 < 0{,}52$.
   b. Vérifie que si un nombre réel α est solution de l'équation (E) alors on a : $\ln(1-\alpha) = \alpha^2 - 1$.
   On désigne par (C') la représentation graphique de h^{-1} dans le repère (O ; I ; J).
6. Construis (D), (C) et (C').

EXERCICE 23

Partie A

Soit la fonction g dérivable sur]0 ; +∞[par : g(x) = $x^2 - \ln x - 1$.

1) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2) Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif x, g'(x) = $\frac{2x^2-1}{x}$

3) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

4) a- Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet deux solutions sur]0 ; +∞[.

b- On désigne par α la plus petite des solutions. Démontrer que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

c- Calculer g (1).

d- En déduire que, pour tout nombre réel strictement positif x : $\begin{cases} si, x \in]0\,; \alpha[\cup]1\,; +\infty[, \text{alors } g(x) > 0 \\ si, x \in]\alpha; 1[, \text{alors } g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

L'unité est 4 cm sur (OI) et 2 cm sur (OJ).

1) a- Déterminer la limite de f en 0. Donner une interprétation graphique du résultat.

b- Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2) Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif x, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

3) a- Démontrer que $f(\alpha) = 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$

b- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

5) Etudier la position de (D) par rapport à (C).

6) Tracer (D) et (C). On prendra : $\alpha = 0{,}45$ et $f(\alpha) = 3{,}1$.

SITUATION COMPLEXE 1

Les pertes d'une entreprise due à la pandémie à coronavirus s'expriment par : $f(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$ où x est la quantité de marchandise mise sur le marché en millions de tonnes. Le chef d'entreprise veut estimer la quantité de marchandise qu'il doit éviter de mettre sur le marché, car occasionnant une perte maximale. Il te sollicite pour l'aider et te promet de t'octroyer une bourse mensuelle de 30.000 F CFA.
A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation du chef d'entreprise.

SITUATION COMPLEXE 2

En janvier, le centre médico – scolaire d'une localité a organisé une campagne de dépistage de la fièvre typhoïde dans un établissement. Apres avoir examiné un certain nombre d'élèves pendant x jours, le médecin affirme que le nombre d'élèves atteints de cette maladie est donné par la fonction f définie sur l'intervalle $]0;4[$ par $f(x) = 20 - \ln\left(-\frac{1}{4}x^2 + x\right)$.
Pour sensibiliser d'avantage les élèves sur la propagation de cette maladie, le chef d'établissement voudrait connaitre le nombre minimum d'élèves atteints. Aide – le à déterminer ce nombre.

SITUATION COMPLEXE 3

Une étude épistémologique a démontré qu'une certaine maladie M sévit chaque année dans une région R. Cette maladie a une période de contamination massive de cinq mois. Selon cette étude, le nombre N de personnes atteintes par M, en x mois passes dans la région en période de contamination massive, est donné par : $N = 13 + \ln\left(e^{-3} - \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)$
La rentrée des classes ayant coïncidé avec le début de la période de contamination massive, ton proviseur, en vue de sensibiliser les nouveaux, veut connaitre :

- le nombre probable de personnes atteintes après deux mois ;
- la date du pic de la maladie et le nombre probable de personnes atteintes.

En utilisant tes connaissances mathématiques, réponds aux préoccupations de ton proviseur.

SITUATION COMPLEXE 4

Une entreprise fabrique et commercialise des sachets de poudre de cacao. Sa capacité journalière de production est comprise entre 1000 et 3000. On suppose que toute la production est commercialisée. Une étude a révélé que le bénéfice journalier, exprimé en milliers de francs CFA, réalisé pour la production et la vente de x milliers de sachets est modernisé sur l'intervalle [1 ; 3] par la fonction B définie par :
$B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2 + 2\ln x$.
Le Directeur de l'usine veut accroître le chiffre d'affaires de l'entreprise. Il demande donc au comptable de l'usine le nombre de sachets à produire en un jour, à l'unité près pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal. Le comptable t'associe à ce projet.
Détermine le nombre de sachets de poudre de cacao à produire pour obtenir un bénéfice maximal.

Leçon 6

NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 1

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si l'affirmation est fausse.

N°	AFFIRMATIONS
1	Si z est un nombre complexe et z son conjugé alors on a : $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$
2	Les racines carrées du nombre complexe $a+ib$ sont les solutions du système : $\begin{cases} x^2+y^2=\lvert a+ib\rvert \\ x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases}$
3	Les solutions de l'équation (E): z^2-z+2 dans $\mathbb{C}$ sont : $\frac{1-\sqrt{7}i}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{7}i}{2}$.
4	Le point M de coordonnées $(-2\,;3)$ a pour affixe $-2+3i$.

EXERCICE 2

Pour chacune des affirmations ci – dessous, trois réponses A, B et C sont données dont une seule est juste. Recopie sur ta feuille, le numéro de l'affirmation suivie de la lettre correspondant à la réponse juste.

N°	AFFIRMATIONS	REPONSES	
1	Les points ABCD sont cocycliques si	A	$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\div\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}\in\mathbb{R}^*$
		B	$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\div\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}=i\ ou-i$
		C	$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\div\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}\in i\mathbb{R}^*$
2	La forme algébrique de $\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)^{15}$ est egale à …….	A	$1+i$
		B	i
		C	-1
3	On pose : $Z=-\sqrt{3}+i$. On note r le module de Z et θ l'argument principale de Z. r et θ vérifient …..	A	$r=2$ et $\theta=\frac{5\pi}{6}$
		B	$r=2$ et $\theta=\frac{-5\pi}{6}$
		C	$r=2$ et $\theta=\frac{2\pi}{3}$
4	Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u},\vec{v}$). Soient I et J les points d'affixes respectives 1 et i. On note (Γ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant : $\lvert z-1\rvert=\lvert z-i\rvert$. (Γ) est : ……	A	La droite (IJ) privée du segment $[IJ]$.
		B	La médiatrice du segment $[IJ]$.
		C	Le cercle de centre I et de rayon 1.
5	Le triangle ABC est un triangle rectangle en B si	A	$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\in i\mathbb{R}^*$
		B	$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=i\ ou-i$
		C	$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\in\mathbb{R}^*$

EXERCICE 3

Recopie et complète le tableau suivant :

Module	Argument	Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
				$5e^{-i\frac{\pi}{2}}$
			$3\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$	
		$-2\sqrt{3} + 2i$		
$\sqrt{2}$	$-\frac{\pi}{4}$			

EXERCICE 4

Soit les nombres complexes : $Z_1 = 1 + i$ et $Z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

1) Déterminer $|Z_1|$ et $|Z_2|$

2) Déterminer : arg (Z_1) et arg (Z_2)

3) En déduire le module et un argument des nombres complexes suivants :

$Z_1 = (1+i)(1+\sqrt{3}i)$; $Z_2 = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$ et $Z_3 = (1+i)^7$

EXERCICE 5

Soit les nombres complexes : $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 2i$; $z_3 = 5$ et $z_4 = 1 - i\sqrt{3}$

1) Déterminer le module et un argument des nombres complexes ci – dessus.

2) En déduire leur forme trigonométrique puis leur forme exponentielle.

EXERCICE 6

1) En utilisant la formule du Binôme de Newton, déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants : $Z_1 = (2+3i)^3$; $Z_2 = (-1-5i)^5$;

2) Calculer les nombres complexes suivants : $Z_1 = \left(\sqrt{3} + i\right)^{20}$; $Z_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{2001}$

EXERCICE 7

Soient $z_1 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$

1) Calculer le module et un argument de z_1, z_2 et Z.

2) Déterminer le module et l'argument principal de Z.

3) Déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 8

Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$z_1 = 5 + 12i$; $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$; $z_3 = -1 - i$.

EXERCICE 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

$(E_1) : 4z^2 - 12z + 25 = 0$; $(E_2) : -3z^2 - 2z + 1 = 0$

$(E_3) : z^2 + (1 - 2i)z - 2i = 0$; $(E_4) : z^2 + 9 = 0$

$(E_5) : iz^2 + 4(2 + i)z + 3i + 8 = 0$; $(E_6) : -(4+2i)\, z^2 + (7 - i)z + 1 + 3i = 0$

EXERCICE 10

On considère dans s $\mathbb{C}$ le polynôme $(E): z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = 0$.

1. Démontre que l'équation (E) admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.
2. Détermine les nombres complexes a et b tels que : $z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = (z - z_0)(z^2 + az + b)$.
3. Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

EXERCICE 11

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$,l'équation (E) : $z^2 - 3z + 3i = 0$.

2) Soit P(z) $= z^3 - (3 + 2i)z^2 + (3 + 5i)z - 2 - 6i$.

   a- Démontrer que l'équation P(z) = 0 admet une solution imaginaire pure dont on déterminera.

   b- En déduire une factorisation de P(z) sous la forme $\mathrm{P(z)} = (\mathrm{z} - 2\mathrm{i})(\mathrm{z}^2 + \mathrm{az} + \mathrm{b})$ où a et b sont des nombres complexes à déterminer.

3) En utilisant la question 1, résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation P(z) = 0.

EXERCICE 12

On donne les points M et Q d'affixes respectives : $Z_M = -4 + 3i$ et $Z_Q = -2 - 3i$

1) a- Placer les points M et Q dans le repère (O, I, J).

   b- Démontrer que le triangle MQJ est isocèle et rectangle en J.

2) a- Démontrer que l'affixe Z_N du point N pour que le quadrilatère MJQN soit un parallélogramme.

   b- En déduire que le quadrilatère est un carré.

3) Démontrer que les points M ; J ; Q et N appartiennent à un même cercle (C) dont on déterminer l'affixe z_Ω du centre Ω et le rayon r. Puis construire le cercle (C).

EXERCICE 13

On considère $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.

1. a) Montre que $2i$ est une solution de l'équation $(E) : P(z) = 0$.

   b) Détermine les nombres complexes a, b et c tels que : $P(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$.

2. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\mathrm{z}^2 - 2\sqrt{3}\mathrm{z} + 4$. En déduire $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation (E).
3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique : 2 cm.

On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $\sqrt{3} + i$; $1 + i$; $\sqrt{3} - i$ et $2i$.

   a) Détermine le module et l'argument principale de $\mathrm{z_A}$, $\mathrm{z_B}$ et $\mathrm{z_C}$.

   b) Place les points A, B, C et D dans le repère.

   c) Démontre que le triangle OAC est équilatéral.

4. On pose : $\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{z_A}}{\mathrm{z_B}}$.

   a) Ecris Z sous forme algébrique et sous la forme trigonométrique.

   b) Déduis-en les valeurs exactes de cos $\left(\frac{-\pi}{12}\right)$ et sin $\left(\frac{-\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 14

1) On considère l'équation (E) : $\forall z \in \mathbb{C},\ z^3 - 2(1 - i)z^2 - 2z - 4i(1 - 2i) = 0$

   a- Vérifier que -2i est une solution de (E).

   b- Détermine les réels a, b et c tels que : $z^3 - 2(1 - i)z^2 - 2z - 4i(1 - 2i) = (\mathrm{z} + 2\mathrm{i})(\mathrm{az}^2 + \mathrm{bz} + \mathrm{c})$.

   c- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation de (E).

2) On désigne par : $z_A = -2i,\ z_B = 3 - i\ et\ z_C = -1 + i$, les affixes respectives des points A, B et C.

a- Place dans le plan muni du repère (O, I, J), les points A, B et C.

b- Calcule le quotient $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ et déduis – en la nature du triangle ABC.

c- Justifie que le point I du repère est le milieu du segment $[BC]$.

3) Soit M un point quelconque d'affixe z.

On définit par (C) l'ensemble des points M tels que : $\left|\left(1 - i\sqrt{3}\right)z + 2\left(\sqrt{3} + i\right)\right| = 4$.

a- Justifie que M$\in (C) \Leftrightarrow |z + 2i| = 2$.

b- Détermine et construis l'ensemble (C).

EXERCICE 15

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). **Unité graphique : 2 cm.**

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): z^2 - 6z + 10 = 0$

2) Soit le nombre complexe $z_1 = \frac{3+i}{2-i}$.

a- Ecrire z_1 sous forme algebrique, trigonometrique et exponentielle.

b- Soit le polynôme : $P(z) = z^3 - (7 + i)z^2 + (16 + 6i)z - 10 - 10i$.

Justifie que z_1 est une solution de $P(z)$.

3) On admet que : $P(z) = \left(z - (1 + i)\right)(z^2 - 6z + 10)$.

Déduis – en les solutions de l'équation $z \in \mathbb{C},\ P(z) = 0$.

4) On considère les points A, B et C du plan d'affixes respectives : $1 + i$; $3 - i$ et $3 + i$.

a- Place sur ta feuille de copie et dans le repère (O, I, J) les points A, B et C.

b- Calculer $\frac{z_A - z_C}{z_b - z_C}$ sous forme algébrique. Puis en déduire la nature du triangle ABC.

c- Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

d- Détermine l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que : $|z - 1 - i| = |z - 3 + i|$.

e- Soit le point E d'affixe $1 - i$. Démontrer que les points ABCE appartiennent à un même cercle (C).

Placer le point E et construire le cercle (C).

SITUATION COMPLEXE 1

En vue de préparer leur prochain devoir, deux élèves d'une classe de Terminale D du lycée de Gagnoa font des recherches à la bibliothèque dudit lycée. Ils découvrent dans le livre de Mathématiques dans la collection **''LE VALIDEUR''**, l'exercice suivant :

On considère le plan (P) muni d'un repère orthogonal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation

$$\text{(E)} : z \in \mathbb{C},\ z^3 - (5i - 6)z^2 - (-1 + 2i)z - 14 - 5i = 0.$$

Cette équation admet une solution imaginaire pure $a. b\ et\ c.$ sont les autres solutions de l'équation (E) telle que $Im(b) > Im(c)$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a, b\ et\ c$.

Ces deux élèves affirment que ABC est un triangle rectangle isocèle en B.

Donne un avis sur l'affirmation de ces deux élèves.

SITUATION COMPLEXE 2

A l'approche de la fête de l'indépendance, la société CI – DECORS est sollicitée pour décorer les rues d'une commune de Côte d'Ivoire. Lors d'une visite des rues en chantier par des élèves de terminale D, l'un d'eux pose une question relative à la décoration du centre – ville. N'ayant pas le temps, le spécialiste de la décoration leur donne les informations suivantes :

« Plusieurs objets de décoration ont été prévus par la société. Celui qui sera placé au centre – ville est composé :

- d'une autre configuration représentée par l'ensemble (Γ) des points M d'affixes z du plan tels que : $|z| = |1 + i\sqrt{3}|$
- d'un carré ABCD tel que dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{e}_1;\ \vec{e}_2)$, les affixes des sommets A, B, C et D de ce carré sont solutions de l'équation : $z \in \mathbb{C}, z^4 = 16i$.

Ces deux configurations s'illumineront de façon alternée ». Curieux, ces élèves veulent se faire une idée exacte de l'objet qui va embellir le centre – ville.
En utilisant tes connaissances mathématiques au programme, détermine ces deux configurations en les représentants.

Leçon 7

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

EXERCICE 1

Relie chaque élément de la colonne A à sa correspondance dans la colonne B.

COLONNE A			COLONNE B
e^{m-n}	•	•	$e^m \times e^n$
$e^{m\times n}$	•	•	$(e^m)^n$
e^{-n}	•	•	$\frac{e^m}{e^n}$
e^{m+n}	•	•	m
$e^{\ln m}$	•	•	$\frac{1}{e^n}$

EXERCICE 2

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si l'affirmation est fausse.

N°	AFFIRMATIONS
1	La solution de l'équation $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} - e = 0$ est $\sqrt{e}$.
2	La fonction exponentielle de base α, noté α^x est strictement croissante si $\alpha > 1$ et strictement décroissante si $0 < \alpha < 1$.
3	Pour $0 < x < 2$, la fonction $x \longmapsto (2-x)^x$ est équivalente à la fonction $x \longmapsto e^{x\ln(2-x)}$
4	La fonction dérivée de la fonction logarithme népérien sur ℝ est la fonction : $x \longmapsto e^x$.

EXERCICE 3

Dans chacun des cas recopie le chiffre et la lettre correspondant à la bonne réponse.

	QUESTIONS	A	B	C
1	La fonction exponentielle est pour la fonction logarithme népérien sa	dérivée	primitive	bijection réciproque
2	une primitive de $\frac{e^x}{1-e^x}$ est	$-\ln(1-e^x)$	$-e.\ln(1-x)$	$-e^x\ln(1-e^x)$
3	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{e^x} =$	1	$+\infty$	0
4	6^x	$\ln 6^x$	$e^{x\ln 6}$	$xe^{\ln 6}$
5	Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ alors $D_f =$	$\mathbb{R}^*$	$]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$	$]0\,; 1[\cup]1; +\infty[$
6	si $f(t) = \dfrac{10}{1+2e^{-0,2t}}$ alors $f'(t) =$	$\dfrac{-10e^{-0,2t}}{(1+2e^{-0,2t})^2}$	$\dfrac{40e^{-0,2t}}{1+2e^{-0,2t}}$	$\dfrac{4e^{-0,2t}}{(1+2e^{-0,2t})^2}$

EXERCICE 4

Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

1) $\ln(1+e^x) = x + \ln(1-e^{-x})$; 2) $\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$; 3) $e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x-1}{e^{2x}}$

EXERCICE 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $e^{x+5} = 6$; 2) $e^{4x-5} = -2$; 3) $e^{3x+1} = e^{-x+3}$; 4) $e^{3x+1} = 0$;
5) $e^x(2e^x - 1) = 3$; 6) $3e^x + 5 - \frac{2}{e^x} = 0$; 7) $e^{2x+6} - 3e^{x+3} - 4 = 0$; 8) $e^x + e^{-x} = 2$

EXERCICE 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $e^{2x-1} - 3 \leq 0$; 2) $e^{x^2-3} > 0$; 3) $e^{-x} < -2$; 4) $e^{2x} + e^x - 6 > 0$;
5) $\frac{3}{e^x} < 5$; 6) $2e^{2x} + 5e^x - 3 \leq 0$; 7) $(e^{-x} - 2)(e^{4x+1} - 15) < 0$; 8) $e^{5x+1} < e^{2x+3}$

EXERCICE 7

Soit $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4$.

1) Calculer $P(-1)$ et factoriser $P(x)$ par des polynômes du premier degré.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   a- (E_1) : $2(\ln x)^3 - 7(\ln x)^2 - 5(\ln x) + 4 = 0$.
   b- (E_2) : $2e^{3x} - 7e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$
   c- (E_3) : $\ln(2x) + \ln(x^2-1) = \ln(x+1) + \ln(7x-4)$
   d- (I) : $(2e^{2x} - 1)(e^{2x} - 3e^x - 4) > 0$

EXERCICE 8

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition D_f, calculer les limites aux bornes de D_f et calculer f'(x) la fonction dérivée de la fonction f.

1) $f(x) = x(x+2)e^{x+2}$; 2) $f(x) = 3x + 1 - xe^{-x}$; 3) $f(x) = x - 1 + \frac{1}{e^x-2}$; 4) $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$
5) $f(x) = \frac{x^2-3}{2}e^{-x}$; 6) $f(x) = -x + \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}$; 7) $f(x) = \frac{e^x+3}{e^x-1}$; 8) $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}$
9) $f(x) = \frac{4e^x-2}{e^x+1}$; 10) $f(x) = \frac{1+2x}{4x+e^{-2x}}$; 11) $f(x) = x - \ln(1+e^x)$; 12) $f(x) = \frac{e^x}{1+2e^x}\ln(1+2e^x)$

EXERCICE 9

Déterminer une primitive des fonctions f suivantes :

1) $f(x) = e^x - 2$; 2) $f(x) = 3xe^{x^2}$; 3) $f(x) = e^{-2x} + e^{-x} + 1$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$
5) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$; 6) $f(x) = \frac{e^x+2}{e^x+2x}$; 7) $f(x) = (x+1)e^{3x^2+6x+1}$; 8) $f(x) = \frac{e^x}{1+2e^x}\ln(1+2e^x)$

EXERCICE 10

Dans chacun des cas suivants, déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction F soit une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = (2x+1)e^x$; $F(x) = (ax+b)e^x$

2) $f(x) = (x+1)e^{\frac{x}{2}}$; $F(x) = (ax+b)e^{\frac{x}{2}}$
3) $f(x) = 3(x^2+x)e^{-x}$; $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{-x}$

EXERCICE 11

1) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{2e^x-1}{2e^x+5}$

a- Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = a + \frac{be^x}{2e^x+5}$

b- En déduire la primitive H sur $\mathbb{R}$ de h qui prend la valeur $\frac{6\ln 5}{5}$ en 0.

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \frac{(x-2)e^x-x-2}{e^x-1}$

a- Trouver les nombres réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = ax + b + \frac{ce^x}{e^x-1}$

b- En déduire la primitive G sur $\mathbb{R}^*$ de g telle que G(ln2)=0.

EXERCICE 12

1) Déterminer les réels a et b tels que : $\frac{e^x}{1+e^x} = a + \frac{b}{1+e^x}$

2) Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)= e^{-x}\ln(1+e^x)$

a- Calculer : f'(x) et $f(x) + f'(x)$.

b- En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} - f'(x)$.

3) Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que F(–ln2) = 0.

EXERCICE 13

On considère la fonction f definie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^x - e^x - 1$.
On désigne par (C) la représentation graphique de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1)

a- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement les résultats.

c- Calculer $f'(x)$ et donne le sens de variation de f.

d- Dresse le tableau de variation de f.

2) a- Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1;2[$

b- Dresse une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

c- Démontrer que : $\forall x \in]-\infty;\alpha[$, $f(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[$, $f(x) > 0$

d- Démontre que la courbe (C) admet un point d'inflexion à déterminer.

3) Construire la courbe (C).

EXERCICE 14

On considère les fonctions f et g derivables sur $\mathbb{R}$ et définies par : $f(x) = xe^x(xe^x - 1)$ et $g(x) = 2xe^x - 1$.
(C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 3 cm.
On admet que $g(\alpha) = 0$ et pour tout $x \in]-\infty;\alpha[$, $g(x) < 0$ et pour tout $\in]\alpha;+\infty[$,$g(x) > 0$ avec $0,35 < \alpha < 0,36$.

1. Calcule la limite de $f(x)$ en $-\infty$ et interprète graphiquement le résultat.
2. Calculer la limite de $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et donne une interprétation graphique des résultats obtenu.

3. Démontre que pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x+1)e^{x}g(x)$.
4. a. Etudie le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x, puis donne les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   b. Justifie que : $f(\alpha) = -\frac{1}{4}$
5. Dresse le tableau de variation de f.
6. a. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β dans l'intervalle $]\alpha; +\infty[$.
   b. Vérifie que $0{,}56 < \alpha < 0{,}57$.
7. Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
8. Construis dans le repère (O, I, J) la tangente (T) et la courbe (C_f).
   Le point O est un point d'inflexion de (C_f).
   On prendra $f(-1) = e^{-2} + e^{-1}$; $f(0{,}75) = 0{,}9$; $f(0{,}8) = 1{,}4$ et $f(0{,}9) = 2{,}7$.

EXERCICE 15

On considère la fonction f définie sur $[0;\ +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}} \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Unité graphique 2 cm.

1) Etudie la continuité de f en 0.
2) Etudie la dérivabilité de f en 0.
3) Calcule la limite de f en $+\infty$.
4) a- Justifie que : $\forall x \in]0; +\infty[\,, f'(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-x}$.
   b- En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
5) a- Justifie que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers un intervalle K à préciser.
   b- On note f^{-1}la bijection réciproque de f.Calculer $f(1)$ et $(f^{-1})'\left(\frac{2}{e}\right)$
6) On suppose que $\forall x \in]0; +\infty[\,, 0 < x - f(x) < \frac{1}{2x}$
   a- Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x]$. Interprète le résultat graphiquement.
   b- Précise la position relative de (C_f) par rapport à la droite (D) : $y = x$.
7) Construire (C_f) et (D).

EXERCICE 16

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -1 + (2-2x)e^{-2x+3}$.
1) Le tableau de variation de la fonction g est donné ci – dessous :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	-2	↗ -1

   a- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique notée α.
   b- Vérifier que : $0{,}86 < \alpha < 0{,}87$.
   c- Justifier que : $\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$.
2) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, J, J), (unité graphique : 2 cm).
   On considère la fonction f derivable et definie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}$.
   On note (C) la courbe représentative de f.

a- Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b- En déduire que (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$.

3) On admet que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et la droite (D) d'équation y = - x est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$

Etudier la position de (C) par rapport à (D).

4) Soit f' la fonction dérivée de f.

a- Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$.

b- En déduire les variations de f.

c- Dresser le tableau de variation de f. On ne calculera pas $f(\alpha)$.

5) Construire (D) et (C)sur le même graphique. On précisera les points de (C) d'abscisses : 0 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; 4.

On prendra : $\boldsymbol{\alpha = 0,865}$ $\boldsymbol{et\ f(\alpha) = 0,4}$.

EXERCICE 17

On considère la fonction f définie et dérivable sur ℝ par $f(x) = (x+1)(1-e^{-x})$

Sa représentation graphique (C) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) d'unité graphique OI = 2 cm et OJ = 1 cm.

Partie A

Soit la fonction g définie et dérivable sur ℝ par : $g(x) = 1 + xe^{-x}$

1) Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) a- Soit g' la fonction dérivée de g, déterminer $g'(x)$.

b- Déterminer le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

3) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) > 0$.

Partie B

1) a- Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

c- Etudier les positions relatives de (D) et (C).

2) a- Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b- Donner l'interprétation graphique de l'ensemble de ces résultats.

3) a- Démontrer que pour tout nombre réel, $f'(x) = g(x)$.

b- En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4) a- Démontrer que f est une bijection de ℝ vers ℝ.

b- Soit f^{-1} la bijection réciproque de f. Déterminer$(f^{-1})'(0)$.

c- Déterminer une équation de la tangente (T) à $(C_{f^{-1}})$ en 0.

5) a- Déterminer les coordonnées de A, point d'intersection de (C) et (D).

b- Déterminer le point B de (C) où la tangente (T') à (C) est parallèle à la droite (D).

6) Tracer (D) et construire (C).

EXERCICE 18

Partie A

On considère la fonction u, dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, definie par : $u(x) = \frac{3x-2}{x^2} - 5\ln x$

1) a- Calculer la limite de u en $+\infty$.

b- Calculer la limite de u en 0.

2) a- Démontrer que : $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[, u'(x) = \frac{-5x^2-3x+4}{x^2}$

b- Justifier que : $\forall x \in \left]0\,;\,\frac{-3+\sqrt{89}}{10}\right[, u'(x) > 0$ et $\forall x \in \left]\frac{-3+\sqrt{89}}{10}\,;\,+\infty\right[, u'(x) < 0$.

c- En déduire le sens de variation de u, puis dresser son tableau de variation.

3) On admet que : $u\left(\frac{-3+\sqrt{89}}{10}\right) > 0$

a- Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans $]0\,;\,+\infty[$, avec $\alpha < \beta$.

b- Justifier que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$ et $1{,}2 < \beta < 1{,}3$.

c- Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in]0\,;\,\alpha[\cup]\beta\,;\,+\infty[, u(x) < 0 \\ \forall x \in]\,\alpha\,;\beta[\,, u(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

On donne la fonction f, dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et définie par : $f(x) = \left(\frac{2}{x} + 5\ln x\right)e^{-x}$

(C) est la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J).

Unités graphiques : OI = 2 cm et OJ = 10 cm.

1) a- Calculer la limite de f en $+\infty$, puis en déduire une interprétation graphique du résultat.

b- Calculer la limite de f en 0, puis donner une interprétation graphique du résultat.

2) a- Démontrer que : $\forall x \in]0\,;\,+\infty[, f'(x) = e^{-x}.u(x)$

b- Déterminer le signe de $f'(x)$ en s'aidant de la question 3.c) de la partie A ; puis donner les variations de f.

c- Dresser le tableau de variation de f.

3) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{5\alpha-2}{\alpha^2}e^{-\alpha}$

4) Montrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point $A\left(1\,;\,\frac{2}{e}\right)$ est : $y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{e}$

5) Construire (T) et (C) dans le même repère (O, I, J). On prendra : $\alpha = 0{,}5$ et $\beta = 1{,}2$.

Partie C

On considère la restriction g de la fonction f à l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$.

1) Montrer que g réalise une bijection de $[\alpha\,;\,\beta]$ dans un intervalle J que l'on précisera.

2) Sans étudier g^{-1}, la réciproque de g donner le sens de variation de g^{-1}, puis donner son tableau de variation.

3) Justifier que g^{-1} est dérivable en $\frac{2}{e}$ et Calculer $(g^{-1})'\left(\frac{2}{e}\right)$.

SITUATION COMPLEXE 1

Conviés à une journée carrière le vendredi 16 Avril 2021 au Lycée Classique d'Abidjan sur le thème : **« l'entrepreneuriat, un débouché porteur pour les élèves »,** les élèves de Terminale du Lycée de Garçons de Bingerville ont décidé d'entreprendre. Ils ont noté l'affirmation de l'un des conférenciers sur le bénéfice journalier d'un bon entrepreneur, exprimé en millions de FCFA, réalisé sur x années et donné par la fonction B definie sur $[2; 5]$ par : $B(x) = (x^2 - 3)e^{-x} + \frac{3}{4}$.

Regroupé en association, une entreprise a décidé de financer votre projet entrepreneurial à condition que votre bénéfice minimal journalier sur une période de deux à cinq ans soit supérieur à 700.000 FCFA.
Désigné par ton association, utilise tes connaissances mathématiques, pour convaincre cette entreprise que vous êtes en mesure de satisfaire ses exigences.

SITUATION COMPLEXE 2

Lors d'une expérience pendant le cours de chimie dans une classe de TD d'un lycée, un gaz se répand accidentellement dans le laboratoire. L'évolution du taux de gaz dans l'air peut se modéliser par la fonction f définie sur $[0; 5]$ par $f(x) = (x - 2)e^{-x}$ où x est le nombre de minutes écoulées depuis le début de l'incident

et $f(x)$ est le taux du gaz dans l'air exprimé en ppm (parties pour millions). Le gaz a un effet irritant pour la gorge 3 minutes après que son taux ait atteint sa valeur maximale dans le laboratoire.
Les élèves n'ont pu évacuer le laboratoire avant les 5 minutes qui suivent le début de l'incident. Inquiet, le chef de l'établissement veut urgemment savoir si les élèves ont été affectés par le gaz et sollicite le meilleur élève de ta classe que tu es, pour obtenir une réponse.
À l'aide de tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation du chef de l'établissement.

SITUATION COMPLEXE 3

Lors d'une visite dans l'entreprise de son oncle, un élève de Tle D apprend que cette entreprise fabrique chaque mois entre 5 et 60 appareils électroniques.
Le coût moyen de fabrication, exprimé en millions de francs CFA est, pour une production de x appareils electroniques, est modélisé par la fonction C définie pour x appartenant à l'intervalle $[5\,;60]$ par
$C(x) = \frac{e^{0,1x}+20}{x}$.
Voulant savoir davantage sur cette entreprise, il décide de déterminer un encadrement au centième près du nombre d'appareils à produire pour que le coût moyen soit minimal.
Aide cet élève.

Leçon 8

NOMBRES COMPLEXES ET GEOMERIE DU PLAN

EXERCICE 1

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si l'affirmation est fausse.

N°	AFFIRMATIONS
1	L'écriture complexe $z' = -2iz + 1 - i$ est celle d'une homothétie.
2	Une similitude directe admet un unique point invariant qui est son centre
3	Soit A(i) un point du plan $\mathrm{f(z) = iz + 6 - 3i}$ l'écriture complexe de la rotation r et $\mathrm{A' = r(A)}$ alors l'affixe de $\mathrm{A'}$ est $3 - 5\mathrm{i}$.
4	Toute application du plan ayant pour écriture complexe $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}^*$ est une similitude.

EXERCICE 2

Pour chacune des affirmations ci – dessous, trois réponses A, B et C sont données dont une seule est juste. Recopie sur ta feuille, le numéro de l'affirmation suivie de la lettre correspondant à la réponse juste.

N°	AFFIRMATIONS	REPONSES	
1	L'écriture complexe de la rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ est :	A	$\mathrm{z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega}$
		B	$\mathrm{z' = e^{i\theta}z - \omega}$
		C	$\mathrm{z' = e^{i\theta}(z - \omega) - \omega}$
2	La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-1 + 2i$ a pour écriture complexe :	A	$z' = z - 1 + 2i$
		B	$z' = -z - 1 + 2i$
		C	$z' = (-1 + 2i)z$
3	Toute similitude directe de rapport $\boldsymbol{k}$ multiplie :	A	les distances par$\boldsymbol{k^2}$ et les aires par $\boldsymbol{k}$.
		B	les distances par $\boldsymbol{k}$ et les aires par $\boldsymbol{k^3}$.
		C	les distances par $\boldsymbol{k}$ et les aires par $\boldsymbol{k^2}$.
4	Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, on a : E (-2 + i) et F (-4) l'ensemble des points M(z) tels que : $\lvert z + 2 - i\rvert = \lvert z + 4\rvert$ est :	A	Le cercle de centre E et de rayon 4.
		B	Le cercle de diamètre [EF].
		C	La médiatrice du segment [EF].

EXERCICE 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

Déterminer les écritures complexes des transformations du plan suivantes :

1) L'homothétie h de centre A (2 ; 3) qui transforme B (- 1 ; - 3) en C (1 ; 1).

2) La rotation r de centre A (2 ; 2) qui transforme le point B (3 ; 2) en C (1 ; 2).

3) La rotation r de centre O et d'angle oriente $\frac{5\pi}{6}$

4) La similitude directe de centre I (1 ; 0), de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

5) La similitude directe qui transforme les points A (3 + i) et B (- 1 + 2i) respectivement sur les points C(6 – 2i) et D(3 + 2i).

EXERCICE 4

Dans les cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation du plan dont l'écriture complexe est donnée par :

1) z' = $-3z + 1 - 5i$; 2) z' = $(1 + i)z - i$; 3) z' = $z + 1 + i$;

4.z' = $iz - 1 + 2i$; 5) z' = $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - i) + 1$

EXERCICE 5

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique est : 2 cm.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : 4i ; 2 et $1 + i\sqrt{3}$.

1) a- Ecris le nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonometrique.

b- Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère (O, I, J).

2) Soit S la similitude directe de centre O qui transforme B en C.

a- Justifier que l'expression complexe de S est : $z' = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z$.

b- Justifier que S est une rotation dont on précisera une mesure de l'angle.

4) Soit (F) l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $|z - 2| = |z - 1 - i\sqrt{3}|$.

Détermine et construis (F).

EXERCICE 6

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) ; **unité graphique : 2 cm.**

On considère dans ℂ, l'équation P défini par : $P(z) = z^3 - 2iz^2 + (4 + 4i)z + 16 + 16i$

1) a- Résous dans ℂ l'équation de (E) : $z^2 + (-2 - 2i)z + 8 + 8i = 0$.

b- Justifie que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z + 2)[z^2 + (-2 - 2i)z + 8 + 8i]$

c- Déduis – en les solutions dans ℂ de l'équation : $P(z) = 0$.

2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives -2 ; $4i$ et $2 - 2i$.

a- Place dans le repère (O, I, J) les points A, B et C.

b- Justifie que : $MES\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

c- Déduis – en la nature du triangle ABC.

3) Soit D le point d'affixe $4 + 2i$ tel que ABCD soit un carré et S la similitude directe de centre A qui transforme B en D.

a- Détermine l'écriture complexe de S.

b- Détermine les éléments caractéristiques de S.

c- Détermine les affixes des points C' et T tel que C' image de C par S et T antécédent de A par S.

d- Construis le point E image par S du point K, milieu du segment $[AD]$.

EXERCICE 7

1) Résoudre dans ℂ, l'équation (E) : $z^2 - 3z + 3i = 0$.

2) Soit P(z) = $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (3 + 5i)z - 2 - 6i$.

a- Démontrer que l'équation P(z) = 0 admet une solution imaginaire pure dont on déterminera.

b- En déduire une factorisation de P(z) sous la forme $\mathrm{P(z)} = (\mathrm{z} - 2\mathrm{i})(\mathrm{z}^2 + \mathrm{az} + \mathrm{b})$ où a et b sont des nombres complexes à déterminer.

3) En utilisant la question 1, résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation P(z) = 0.

4) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2i, z_B = 2 + i$ et $z_C = 1 - i$.

a- Placer les points A, B et C dans le repère. **(Unité : 2cm).**

b- Ecrire le nombre complexe $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ sous forme trigonométrique.

c- Déduire de la question 3.b) que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

5) Soit S la similitude directe de centre C, d'angle orienté $-\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

Démontrer que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 - i)z + 1 + i$.

6) Soit D un point du plan tel que S(D) = A.

a- Déterminer l'affixe du point D.

b- Placer le point D.

c- Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

EXERCICE 8

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique : 2 cm).

On considère la transformation $\mathcal{S}$ du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M'd'affixe z' telle que : $z' = \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$

1) a- Soit Ω le point d'affixe 2. Vérifier que : $\mathcal{S}(\Omega) = \Omega$

b- Justifier que $\mathcal{S}$ est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

2) a- Démontrer que : $\forall z \neq 2, \frac{z' - z}{2 - z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b- En déduire que le triangle MΩM'est rectangle en M.

c- Donner un programme de construction de l'image M'par $\mathcal{S}$ d'un point M donné.

3) a- Placer les points A et B d'affixes respectives $-1 + i$ et $5 - i$dans le plan muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Construire les images respectives A' et B' de A et B par $\mathcal{S}$.

b- On note $z_{A'}$; $z_{B'}$; z_A et z_B les affixes respectives des points A', B', A et B.

Démontrer que : $z_{A'} - z_A = z_B - z_{B'}$.

c- En déduire la nature du quadrilatère AA'BB'.

EXERCICE 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

L'unité est le centimètre. Soit A, B et C trois points d'affixes respectives Z_A, Z_B et Z_C tels que $Z_A = 2 + 6i, Z_B = 4 + 2i$ et $Z_C = 6i$.

1) Placer les points A, B et C dans le plan.

2) a- Déterminer la forme algébrique de $Z = \frac{Z_O - Z_A}{Z_B - Z_A}$ où Z_O est l'affixe du point O.

b- Ecrire Z sous forme trigonométrique.

c- Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO})$.

3) Soit r la rotation de centre B et de l'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a- Déterminer l'écriture complexe de r.

b- Déterminer l'image de O par r.

c- En déduire que le triangle OAB est rectangle et isocèle.

4) a- Déterminer le centre et le rayon du cercle (C) circonscrit au triangle OAB.

Construire.

b- Démontrer que les points O, A, B et C appartiennent à un même cercle.

EXERCICE 10

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

On considère l'équation (E) : $Z \in \mathbb{C}, Z^3 - (6-5i)Z^2 + (1-20i)Z - 14 - 5i = 0$

1) a- Vérifier que i est solution de l'équation (E).

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 + (6-4i)Z + 5 - 4i = 0$

c- Résoudre l'équation (E) à l'aide des questions précédentes.

2) On considère les points A, B et D d'affixes respectives $u = i,\ v = -2 + 3i\ \ et\ \ t = -4 + i$.

a- Placer les points A, B et D dans le repère.

b- Ecrire le nombre complexe $Z = \frac{u-v}{t-v}$ sous forme trigonométrique.

c- En déduire que le triangle ABD est rectangle isocèle en B.

3) Soit S la similitude directe de centre A qui transforme D en B. B' est l'image de B par S.

a- Justifier que le triangle ABB' est rectangle isocèle en B'.

b- En déduire la construction du point B'.

4) a- Déterminer l'écriture complexe de S.

b- Calculer l'affixe de B'.

SUITES NUMERIQUES

EXERCICE 1

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si l'affirmation est fausse.

N°	AFFIRMATIONS
1	Si pour tout entier naturel n, $u_n < -3$, alors la suite (u_n) est minorée par -3.
2	Toute suite croissante est nécessairement convergente.
3	On considère la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$ La suite u est une suite arithmétique.
4	Soit (v_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n$ et $v_0 = 2$. La somme $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{19}$ est 1 048 575.

EXERCICE 2

Pour chacune des affirmations ci – dessous, trois réponses A, B et C sont données dont une seule est juste. Recopie sur ta feuille, le numéro de l'affirmation suivie de la lettre correspondant à la réponse juste.

N°	AFFIRMATIONS	REPONSES	
1	Soit u la suite numerique définie par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$ La suite u a pour limite ….	A	$-\infty$
		B	2
		C	0
2	Si (U_n) est une suite géométrique de raison $k (k \neq 1)$, alors la somme des termes consécutifs $U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1} + U_n$ est égale à	A	$U_0 \times \frac{1-k^n}{1-k}$
		B	$U_0 \times \frac{1-k^{n+1}}{1-k}$
		C	$U_0 \times \frac{1-k^{n-1}}{1-k}$
3	On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \end{cases}$ *et* $v_n = \ln(u_n) - \ln 4$. La suite (v_n) est géométrique de raison :	A	2
		B	$\frac{1}{2}$
		C	$2 \ln 4$
4	Si (U_n) est une suite arithmétique de raison $-0{,}5$ et si $U_2 = 7$, alors U_n est égal à :	A	$8 - 0{,}5n$
		B	$7 - 0{,}2n$
		C	$7 - 0{,}5n$

EXERCICE 3

On considère la suite numérique (u) définie par : $u_0 = \sqrt{2}$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}u_n$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

1) Déterminer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ et de représentation graphique (D).

a- Tracer (D) et la droite (Δ) d'équation $y = x$.

b- Placer u_0 sur l'axe (OI).

c- A l'aide de (D) et (Δ), placer les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite (u) sur l'axe (OI).

3) a- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leq 4$.

b- Démontrer que la suite (u) est croissante.

c- En déduire que la suite (u) est convergente.

4) On considère la suite (v) définie par $v_n = u_n - 4$, pour tout nombre entier naturel n.

Démontrer que la suite (v) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

5) On pose, pour tout nombre entier naturel n:

$T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite (v);

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite (u).

a- Déterminer une expression de T_n en fonction de n.

b- Justifier que : $S_n = 2(\sqrt{2} - 4)\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + 4(n + 1)$.

c- Déterminer la limite de S_n.

EXERCICE 4

Soit a un nombre réel donne. On considère les suites U et V définies respectivement par :

$U_0 = 3, U_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+2} = \frac{1}{2}(a + 1)^2 U_{n+1} + (a - 2)U_n$, $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_{n+1} - U_n$

1) On pose a = 1.

a- Démontrer que la suite (V) est constante et donner sa valeur.

b- En déduire que (U) est une suite arithmétique dont la raison est égale à 2.

c- On pose : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$. Exprimer U_n puis S_n en fonction de n.

2) On pose : a = - 5.

a- Démontrer que la suite (V) est une suite géométrique dont la raison est égale à 7.

b- Exprimer V_n en fonction de n.

c- Pour tout entier n supérieur ou égale à 1, exprimer en fonction de n la somme T_n où :

$T_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$

d- Exprimer U_n en fonction de T_n.

e- En déduire que la suite (U) diverge.

EXERCICE 5

On considère les suites :$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definies par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{3}{2}(U_n)^2 \end{cases}$ et $V_n = \ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)$

1) Calculer V_0.

2) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 2.

3) Exprimer V_n en fonction de n.

4) Calculer la limite de (V_n).

5) Exprimer U_n en fonction de V_n et en déduire la limite de (U_n).

6) Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$ et $T_n = U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_{n-1}$

a- Démontrer que : $S_n = (1 - 2^n)ln2$

b- Justifier que : $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$.

c- Exprimer T_n en fonction de n.

EXERCICE 6

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$.

Soit u, la suite définie par : $u_0 = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Calculer u_1

2) Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 2 cm.

a- Tracer les droites (D) et (Δ) d'équations respectives : $y = x$ et $y = \frac{1}{4}x + 3$.

b- Utiliser (D) et (Δ) pour placer $u_0; u_1; u_2;\ u_3; u_4$ sur l'axe des abscisses.

(On laissera les traits de construction en pointilles sur le dessin)

c- Que peut – on conjecturer quant à la convergence de la suite u ?

3) a- Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 4$.

b- Démontrer que la suite u est strictement croissante.

c- La suite u est – elle convergente ? Justifier.

4) On pose : pour tout entier naturel n ; $v_n = u_n - 4$

a- Démontrer que v est une suite géométrique. Donner son premier terme et sa raison.

b- Démontrer que pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{-2}{4^{n-1}}$

c- Déterminer la limite de la suite v.

d- En déduire la limite de la suite u.

5) a- Exprimer u_n en fonction de n.

b- Trouver une valeur de l'entier naturel k telle que : $|u_k - 4| < 10^{-10}$.

EXERCICE 7

Soient les suites (a_n) et (b_n) definies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \end{cases}$ et $\begin{cases} b_0 = 8 \\ b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} \end{cases}$

1) Calculer a_1 et b_1.

2) Soit la suite (d_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $d_n = b_n - a_n$

a- Démontrer que (d_n) est une suite suite géométrique.

b- Déterminer le premier terme d_0 et la raison q.

c- En déduire une expression de d_n en fonction de n. Puis en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, d_n > 0$.

d- Calculer la limite de la suite (d_n).

3) a- Démontrer que :$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n = \frac{d_n}{3}$ et $b_{n+1} - b_n = -\frac{d_n}{4}$

En déduire les variations des suites (a_n) et (b_n).

b- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_0 < a_n < b_n < b_0$

c- Déduire des questions 3.a) et 3.b) que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

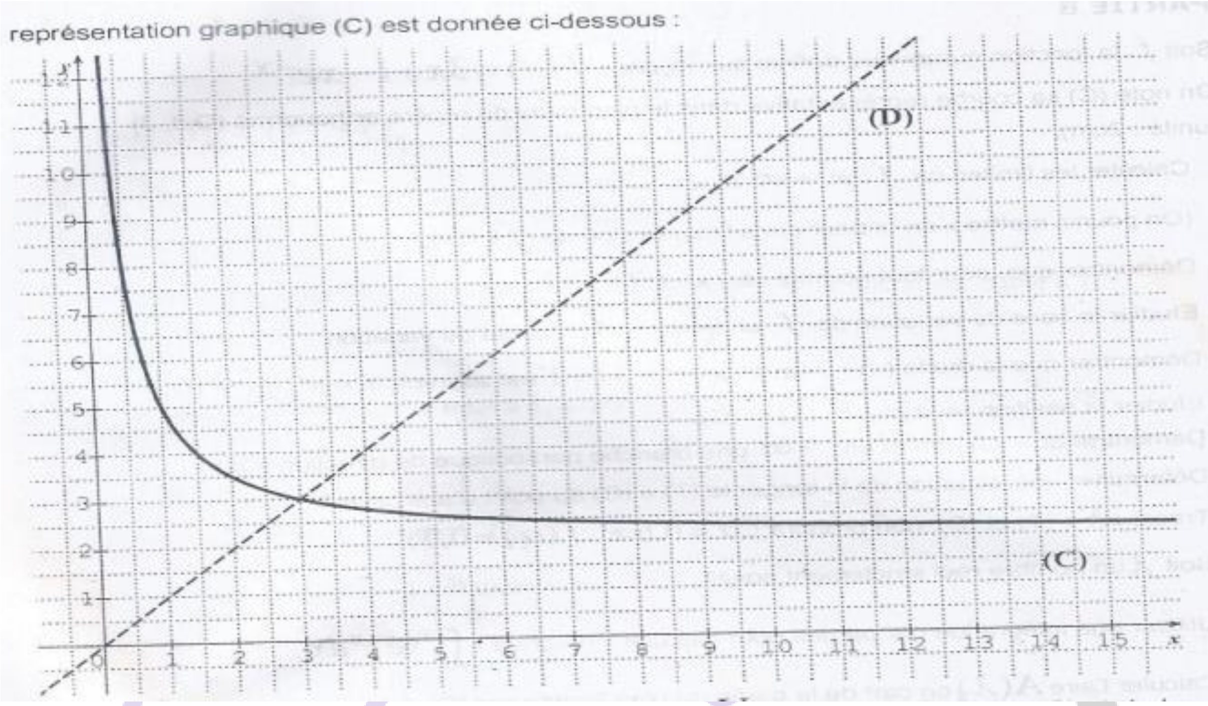
4) a- Déduire de la question 3.a que : $\forall n > 1, a_n - a_0 = \frac{1}{3}(d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1})$.

b- Déduire la limite de la suite (a_n) puis celle de la suite (a_n).

EXERCICE 8

Soit la suite numérique U définie par : $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n}$

1) Soit f la fonction définie sur$]0;+\infty[$, par : $f(x)=\frac{2x+3}{x}$ et dont la représentative graphique (C) est donnée ci-dessous :



a- Représenter sur l'axe (OI), les termes de la suite U à l'aide de la courbe (C) et de la droite (D) d'équation $y=x$.

b- Que peut-on conjecturer quant à la convergence de la suite U ?

2)

a- Démontrer que $f([1;5])\subset[1;5]$

b- En déduire au moyen d'un raisonnement par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ 1\le U_n\le 5$.

SITUATION COMPLEXE 1

Une société ivoirienne de transformation de produits agricoles acheté 5 000 tonnes de noix de cajou aux paysans en 2011. La société décide d'augmenter de 5% ses achats chaque année par rapport à l'année précédente.

Le comptable veut connaitre l'année à partir de laquelle la quantité de noix de cajou achetée sera supérieure à 10 000 tonnes.

A l'aide de tes connaissances mathématiques et d'un raisonnement cohérent et logique, aide ce comptable à déterminer l'année à partir de laquelle la quantité de noix de cajou sera supérieure à 10 000 tonnes.

SITUATION COMPLEXE 2

Au cours d'une visite dans une université, les élèves de Terminale D du CSM-Angré ont été informés par le Président de l'université (Recteur) sur son établissement.

Ils ont appris que cette université accueillait 27 500 étudiants en septembre 2019 et que sa capacité d'accueil ne peut excéder 33 000 étudiants.

D'après une étude statistique, chaque année 156 étudiants abandonnent en cours d'année académique (entre le 1er septembre d'une année et le 30 juin de l'année suivante). De plus, les effectifs enregistrent à la rentrée en septembre connaissent une augmentation de 4% par rapport à ceux du mois de juin précédent.

Le Recteur veut savoir à partir de quelle année la capacité d'accueil de son université sera – t -elle dépassée.

Ces élèves de Terminale D intéressés par la préoccupation du Recteur décident de l'aider.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n, le nombre d'étudiants estimé par ce modèle à la rentrée académique de septembre de l'année $2019 + n$.
On considère la suite (v_n) definie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 3900$.

1) Détermine la nature de la suite (v_n).
2) Détermine l'année à partir de laquelle la capacite d'accueil de cette université sera dépassée.

Leçon 10

CALCUL INTEGRAL

EXERCICE 1

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si l'affirmation est fausse.

N°	AFFIRMATIONS
1	Soit f continue sur K, a et b sont deux elements de K tels que $a \leq b$. S'il existe deux reels m et M tel que pour tout x element de $[a; b]$, on a : $\mathrm{m} \leq f'(x) \leq b$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.
2	$\int_1^{\mathrm{e}} \ln(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \int_{\mathrm{e}}^1 \ln\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right) \mathrm{dx}$.
3	Pour tous réels a et b et toute fonction continue f sur $\mathbb{R}$ telle que : $\int_a^b (1+2f(t))dt = b - a + 2\int_a^b f(t)dt$
4	Soit f une fonction continue et negative sur un intervalle K, (C) sa représentation graphique dans un repère orthogonal (O, I, J), a et b deux elements de K $(a < b)$. L'aire (en unités d'aire) de la partie du plan limitée par (C), (OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $\int_b^a f(t)dt$.

EXERCICE 2

Pour chacune des affirmations ci – dessous, trois réponses A, B et C sont données dont une seule est juste.
Recopie sur ta feuille, le numéro de l'affirmation suivie de la lettre correspondant à la réponse juste.

N°	AFFIRMATIONS	REPONSES	
1	On appelle intégrale de a à b de f le nombre réel F(b) – F(a), ou F est une primitive de f sur K. On note:	A	F(b) – F(a) $=\int_b^a f(x)dx = [F(x)]_a^b$
		B	F(b) – F(a) $=\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_b^a$
		C	F(b) – F(a) $=\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$
2	On donne : I$=\int_1^2 \frac{1}{3u-1} du$ La valeur de I est :	A	$\frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$
		B	$\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{5}\right)$
		C	$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$
3	Soit (C) la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x + x - 1$. On donne la droite (D) d'équation $y = x$. On suppose que : sur $]-\infty; 0[$, (C) est en dessous de (D). Alors l'aire de la partie du plan limitée par (C), (D) et les droites d'équations $x = -2$ et $x = -1$ est :	A	$\mathcal{A} = -\int_{-2}^{-1} f(x)\, dx . U_a$
		B	$\mathcal{A} = \int_{-2}^{-1} (x - f(x))\, dx . U_a$
		C	$\mathcal{A} = \int_{-2}^{-1} (f(x) - x)\, dx . U_a$
4	On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{f(x) = e^{-x}}$. La valeur moyenne de la fonction f dans l'intervalle [0; 2] est égale à :	A	$\frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2})$
		B	$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-2} + 1)$
		C	$\frac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{-2})$

EXERCICE 3

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{-2}^0 (2x^3 - x + 1)dx$; $I_2 = \int_0^1 \left(-x + 2 + \frac{6}{5x+1}\right) dx$; $I_3 = \int_1^2 \frac{2}{(3u-1)^2} du$; $I_4 = \int_0^1 2x(x^2 - 5x + 1)dx$

$I_5 = \int_{-3}^{0} \frac{x+3}{(x^2+6x-1)^2} dx$; $I_6 = \int_{1}^{e} \left(x + \frac{1}{x}(1+2lnx)\right) dx$; $I_7 = \int_{0}^{2} 3e^{2x} dx$; $I_8 = \int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

$I_9 = \int_{1}^{2} x^2\sqrt{x}.dx$; $I_{10} = \int_{2}^{3} \sqrt{3t+2}\,dt$; $I_{11} = \int_{-3}^{3} -\frac{5}{t^2} e^{\frac{3}{t}+1} dt$; $I_{12} = \int_{e}^{e^2} \left(\frac{10}{xlnx}\right) dx$

$I_{13} = \int_{ln2}^{ln3} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$; $I_{14} = \int_{ln2}^{ln3} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx$; $I_{15} = \int_{0}^{1} (x+1)e^{x^2+2x+3} dx$; $I_{16} = \int_{4}^{4} \frac{x^2+2x-3}{x-1} dx$;

$I_{17} = \int_{1}^{e} \frac{dt}{t(lnt)^2}$; $I_{18} = \int_{-3}^{0} \frac{dx}{2x-1}$; $I_{19} = \int_{1}^{2} \left(\frac{lnx}{x} - \frac{ln^2x}{x}\right) dx$; $I_{20} = \int_{0}^{2} 9t^2\sqrt{1+t^3} dt$

EXERCICE 4

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{-2}^{2} |x-1| dx$; $I_2 = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) dx$; $I_3 = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) dx$

EXERCICE 5

A/

Soit t un nombre réel. On pose : $J = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin^2t dt$ et $K = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^2t dt$

1) Calculer J + K et J – K.
2) En déduire la valeur de J et de K.

B/

Soit $I = \int_{0}^{1} \frac{e^x}{e^x+e^{-x}} dx$ et $J = \int_{0}^{1} \frac{e^{-x}}{e^x+e^{-x}} dx$

1) Calculer J + K et J – K.
2) En déduire la valeur de J et de K.

EXERCICE 6

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{-2}^{1} xe^x dx$; $I_2 = \int_{0}^{2} (2x+4)e^{x-1} dx$; $I_3 = \int_{\frac{3}{2}}^{2} \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2x+3} dx$;

$I_4 = \int_{1}^{e} lnxdx$; $I_5 = \int_{0}^{1} \ln(3x+1) dx$; $I_6 = \int_{1}^{e} tlnt.dt$

$I_7 = \int_{0}^{\pi} xcosx.dx$; $I_8 = \int_{0}^{\pi} xsin(3x) dx$

EXERCICE 7

A l'aide de deux intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{0}^{1} x^2 e^{\frac{x}{2}} dx$; $I_2 = \int_{0}^{1} (x+1)^2 e^x dx$; $I_3 = \int_{1}^{2} (lnx)^2 dx$;

$I_4 = \int_{1}^{e} \frac{(lnx)^2}{x^3} dx$; $I_5 = \int_{0}^{\pi} e^x sinxdx$; $I_9 = \int_{0}^{\pi} e^{-x} cosxdx$

EXERCICE 8

Soit : $A = \int_{0}^{1} \frac{1-\text{lnx}}{5x} dx$; $A_1 = \int_{0}^{1} \frac{1}{5x} dx$ et $A_2 = \int_{0}^{1} -\frac{\text{lnx}}{5x} dx$

1) Calculer A_1.
2) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que $A_2 = -\frac{1}{10}$. Puis en déduire la valeur de A.

EXERCICE 9

1) Soit l'intégrale : K $=\int_0^{\pi} e^x(cos2x)dx$. A l'aide de deux intégrations part parties, montrer que : $K = \frac{e^{\pi}-1}{5}$

2) Soit A $=\int_0^{\pi} e^x(cos^2x)dx$ et B $=\int_0^{\pi} e^x(sin^2x)dx$

a- Calculer A + B et A – B.

b- En déduire les valeurs exactes de A et B.

EXERCICE 10

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O I, J). OI = 2cm et OJ = 1cm. On donne la fonction dérivable f définie sur]0 ; $+\infty$[par f(x) = $x + 1 + \frac{1+lnx}{x^2}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O, I, J).

1) Etudier la position de (C) par rapport à la droite (D) : $y = x - 1$.

2) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et x = 1 vaut : $(2e - 4)cm^2$.

EXERCICE 11

On considère la fonction numérique f definie sur ℝ par : $f(x) = (x+1)e^{1-x} - x + 1$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

L'unité graphique est le centimètre.

1. On admet que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.
   Interprète graphiquement ces résultats.
2. a- Calcule la limite de f en $-\infty$.
   b- Justifie que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
3. Soit g la fonction numérique définie sur ℝ par : $g(x) = xe^{1-x} + 1$.

On admet qu'il existe un nombre réel α élément de l'intervalle $[-0{,}4\ ;\ -0{,}2]$ tel que $g(\alpha) = 0$ et

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;\alpha\,[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha\,;+\infty[, g(x) > 0 \end{cases}.$$

On admet que f est dérivable sur ℝ.

a- Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -g(x)$.

b- Etudie le sens de variation de f.

c- Dresse le tableau de variation de f.

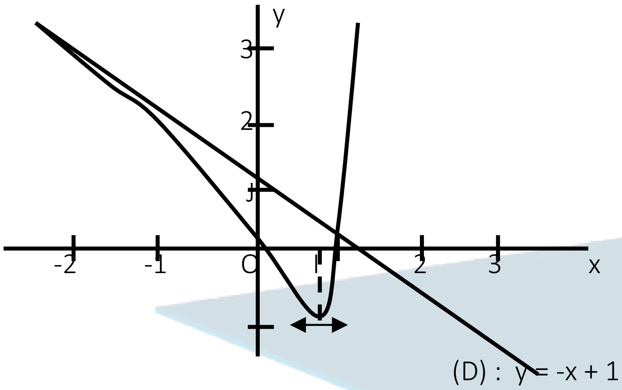
4. On admet que (C) est au-dessus de (D) sur $[-1\,;+\infty[$ et en dessous de (D) sur $]-\infty\,;-1]$.
   Construis (C) (Tu prendras : $\alpha = -0{,}3$ et : $f(\alpha) = 3{,}9$).
5.
   a- Interprète graphiquement l'intégrale K tels que : K = $\int_0^1 (f(x) - (-x+1))\,dx$.
   b- Justifie, à l'aide d'une intégrale par parties, que : K = $2e - 3$.

EXERCICE 12

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). OI = 2cm.

On considère la fonction dérivable f définie sur ℝ par : f(x)= $(x-1)(e^{2x} - 1)$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O, I, J).



On donne : pour x = 0,69 ; y = - 1

1) Reproduire le graphique donne avec soin.

2) Etudier la position de (C) et la droite (OI).

3) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Quelle en est la conséquence sur la courbe (C).

4) a- Justifier que la droite (D) : $y = -x + 1$, est une asymptote à (C) en $-\infty$.

   b- Etudier la position de (C) par rapport à la droite (D).

5) On donne la fonction continue g définie sur ℝ par : g(x)= $(x-1)e^{2x}$.

   On note G la primitive de g sur ℝ telle que G(0) = 0.

   a- $\forall x \in \mathbb{R}$, definir G(x) à l'aide d'une intégrale puis expliciter G(x) à l'aide d'une intégration par parties.

   b- En déduire la primitive F de f sur ℝ telle que : F(0) = 0.

6) a- Hachurer le domaine du plan limite par la courbe (C), la droite (OI), la droite (OJ) et la droite d'équation $x = 1$.

   b- Calculer l'aire $\mathcal{A}_6$, en cm^2, du domaine hachure.

7) Calculer l'aire $\mathcal{A}_7$, en cm^2, de l'ensemble de points M(x ; y) du plan tels que : $\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$.

8) Calculer l'aire $\mathcal{A}_8$, en cm^2, de la partie du plan comprise entre la courbe (C) la droite (D) et les équations respectives : $x = 0$ et $x = 1$.

9) On pose : $K_t = \int_t^1 (-x + 1 - f(x))\mathrm{d}x$ où $t \in]-\infty ; 1]$.

   a- Interpréter géométriquement K_t.

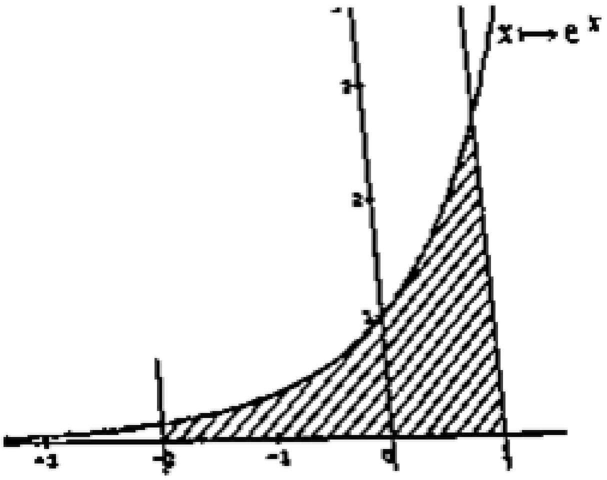
   b- Calculer K_t.

   c- En déduire l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2, de l'ensemble de points M du plan de coordonnées (x ; y) telles que : $\begin{cases} x \leq 1 \\ f(x) \leq y \leq -x + 1 \end{cases}$

SITUATION COMPLEXE 1

Dame kora est propriétaire du domaine représenté ci-contre au kilomètre 17 sur l'emprise de la nouvelle autoroute Gesco-Grand Lahou en construction. Pour son dédommagement, l'état décide de lui octroyer un nouveau domaine rectangulaire sur une bande de terrain de largeur 30 m. Sachant que son nouveau domaine s'étend sur toute la largeur de la bande, quelle doit être sa hauteur pour qu'il ait la même aire que celui qu'elle perd au profit de l'état ?

(*L'unité de graduation du repère est 10 m*)



SITUATION COMPLEXE 2

Lors d'une conférence prononcée dans un lycée par un médecin, des élèves de Terminale D ont noté les informations suivantes :

« La capacite pulmonaire d'un être humain est la quantité d'air présente dans les poumons, mesurée à des fins diagnostiques lors d'une exploration fonctionnelle respiratoire.

Elle est exprimée en litres et dépend de plusieurs facteurs dont l'âge.

On peut la modéliser par la fonction f telle que : $f(x) = \frac{110(lnx-2)}{x}$ où x désigne l'âge et $x[10\,;90]$.

- La capacité pulmonaire reste supérieure à 4,5 L dans une certaine tranche d'âge.
- La capacité pulmonaire moyenne entre 20 et 70 ans n'atteint pas 5 L. »

En utilisant tes connaissances mathématiques sur les intégrales, justifie les affirmations du médecin.

Leçon 11

STATISTIQUES A DEUX VARIABLES

EXERCICE 1

Relie chaque élément de la colonne A à sa formule dans la colonne B.

COLONNE A

- Coefficient de corrélation linéaire •
- Variance de X •
- Moyen de X •
- Coefficient directeur de la droite de régression de y en x •
- Covariance •

COLONNE B

- • $\frac{1}{N}\sum x_i$
- • $\frac{COV\ (X;Y)}{\sigma_X.\sigma_Y}$
- • $\frac{1}{N}\sum x_i y_i - \bar{x}.\bar{y}$
- • $\frac{COV\ (X;Y)}{\sigma_X.\sigma_Y}$
- • $\frac{1}{N}\sum {x^2}_i - \bar{x}^2$

EXERCICE 2

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou de FAUX si l'affirmation est fausse.

N°	AFFIRMATIONS
1	Une équation de la droite de régression par la méthode des moindres carrées à pour équation : $y = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}x + \left(\bar{x} - \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}\bar{y}\right)$.
2	On appelle coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double de caractères X et Y, le nombre réel r défini par : $r = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}}$.
3	La covariance d'une série statistique à 2 caractères X et Y, de moyennes respectives $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ et d'effectif total N est le nombre réel note : $COV(X,Y) = \frac{1}{N}\sum \boldsymbol{x_i y_i} - \bar{X}.\bar{Y}$
4	Soit r le coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double de caractère (X, Y). Si -1< r $\leq -0{,}87$, alors la corrélation linéaire est faible.

EXERCICE 3

Un pharmacien observe, durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaires en millions de Francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant ou x désigne le numéro du mois et y le chiffre d'affaires correspondant.

x	1	2	3	4	5	6
y	12	13	15	19	21	22

1) Calculer $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ les moyennes des variables x et y.

2) Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point moyen G. (Unité : 2 cm en abscisses et 1 cm pour 2 unités en ordonnées).

3) Calculer la variance V(X) de x et la covariance Cov(X, Y) de x et y.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

4) Démontrer qu'une équation de la droite de régression (D) de y en x est : $y = \frac{78}{35}x + 9,2$.

5) Tracer la droite (D).

6) En utilisant la droite (D), calculer une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7eme mois.

EXERCICE 4

Pour étudier l'évolution du nombre de bacheliers accédant aux études supérieures, le Ministère du Plan d'un pays a diligente une enquête depuis l'an 2003. Les résultats de cette enquête sont consignes dans le tableau ci-dessous.

Années	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang X de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre Y de diplômés (en milliers)	25	27	30	33	34	35	38	41	43

1) Représenter le nuage de points associe à la série statistique double (X ; Y) dans le plan muni d'un repère orthonormé. (Unité graphique :1 cm).

On prendra pour origine du graphique le point $\Omega\binom{0}{24}$.

2) Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série statistique (X ;Y).

3) Justifier que :

a- la variance de X est : $\frac{20}{3}$;

b- la covariance de X et Y est : $\frac{44}{3}$

4) a- Sachant que la variance de Y est égale à $\frac{98}{3}$, déterminer la valeur du coefficient de corrélation linéaire.

b- Justifier que ce résultat permet d'envisager un ajustement linéaire.

5) Soit (D) la droite d'ajustement de Y en X obtenue par la méthode des moindres carres.

Déterminer une équation de (D). Tracer (D).

6) On suppose que l'évolution se poursuit de la même manière au cours des années suivantes.

Donner une estimation du nombre de bacheliers qui accéderont aux études supérieures en 2020.

EXERCICE 5

Les tailles x_i, en centimetre et les poids y_i, en kilogrammes de huit sont indiqués dans le tableau ci – dessous :

x_i	154	166	167	169	172	175	175	182
y_i	50	52	68	66	70	72	80	78

1) Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O ; I ;J), représenter le nuage de points relatifs à la série statistiques double définie par ce tableau.

Unités graphiques : $\begin{cases} \text{En abscisse : 1cm pour 20cm} \\ \text{En ordonnee : 1cm pour 10Kg} \end{cases}$

2) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage. Placer G sur le graphique.

3) Calculer les variances v(x) et v(y) respectives des variables x et y, et la covariance cov(x,y).

4) a- Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x.

b- Déterminer une équation de la droite (D') de régression de x en y.

5) Tracer (D).

6) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r et interpréter le résultat.
7) Utiliser cette droite pour trouver, à l'aide du graphique :
a- Le poids d'un élève dont la taille serait de 161cm,
b- La taille d'un élève dont le poids serait 71kg,
8) Vérifier, par le calcul les résultats obtenus en 7.a) et en7.b).

EXERCICE 6

Dans une commune d'Abidjan, chaque année, un dépistage systématique du VIH est effectué après une campagne de sensibilisation. Le résultat est consigné dans le tableau ci - dessous. Mais le nombre de personnes contaminés de l'année 2013 a été effacé par inadvertance.

Année	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Numéro de l'année	0	1	2	3	4	5
Nombre de personnes contaminés dans l'année	122	105	90	67	n	31

Degnan, élève en classe de terminale D au lycée Moderne de Cocody, qui a obtenu tous les chiffres a déterminé une équation de la droite de régression (D) de y en x, qui est : (D) : $y = -18x + 122$. (x désigne le numéro de l'année et y le nombre de personne contaminés.).
1) Calculer la variance de x.
2) Démontrer que cov(x ; y)= -52,5.
3) En notant n, le nombre de personne contaminés en 2013 ;
Démontrer que cov(x;y) = $\frac{-396,5+1,5n}{6}$
4) En déduire le nombre de personnes contaminés en 2013.
5) Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O ; I ; J), représenter le nuage de points relatifs à la série statistiques double définie par ce tableau.
6) Placer G$\binom{\bar{x}}{\bar{y}}$ sur le graphique et tracer (D)
7) Trouver, par le calcul le nombre de personnes contaminés dans l'année 2019.

SITUATION COMPLEXE 1

Pour préparer la retraite de ses membres, une coopérative a planté en 2010 des anacardiers qui sont rentrés en production trois ans plus tard. Le comptable après une étude établit le tableau suivant donnant l'évolution des productions depuis la première année de récolte.

Ordre X de l'année de production	1	2	3	4	5	6	7
Quantité Y de production (en tonnes)	118	146	184	247	267	278	255

Il veut connaitre, une estimation de la production en 2025.
A l'aide de tes connaissances mathématiques et d'un raisonnement cohérent, détermine une estimation de la production en 2025.

SITUATION COMPLEXE 2

Une société fabrique et commercialise des produits cosmétiques. Les relevés, en millions de Francs CFA, des frais publicitaires manuels de la société et de son chiffre d'affaires mensuel sont consignés dans le tableau suivant.

Frais publicitaires	1	2	3	4	5
Chiffres d'affaires	60	66	69	75	81

Le directeur commercial veut investir davantage dans la publicité pour que le chiffre d'affaires mensuel atteigne 100 millions de Francs CFA.

Informée du problème, sa fille, qui est une de tes camarades de classe, te sollicite pour trouver le montant des frais à investir dans la publicité afin d'atteindre 100 millions comme le chiffres d'affaires.

Fais une proposition argumentée.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

EXERCICE 1

Réorganise les groupes de mots ci-dessous pour obtenir une définition.

équation différentielle / de cette fonction inconnue / toute équation dont l'inconnu / On appelle / l'une des dérivées successives / est une fonction / dans laquelle figure au moins.

EXERCICE 2

Relie chaque équation différentielle à ses solutions

$f' = af \,, a \in \mathbb{R}$ •	• $x \longmapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$; $k \in \mathbb{R}$
$f' = af + b \,,$ $a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R}$ •	• $x \longmapsto \mathrm{A}\cos(\omega x) + \mathrm{B}\sin(\omega x)$; $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$
$f'' = 0$ •	• $x \longmapsto \mathrm{A}e^{\omega x} + \mathrm{B}e^{-\omega x}$; $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$
$f'' = \omega^2 f \,, \omega \in \mathbb{R}^*$ •	• $x \longmapsto \mathrm{A}x + \mathrm{B}$; $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$
$f'' = \omega^2 f \,, \omega \in \mathbb{R}^*$ •	• $x \longmapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$; $k \in \mathbb{R}$

EXERCICE 3

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si l'affirmation est fausse.

N°	AFFIRMATIONS
1	Les solutions de l'équation différentielle $f' = -2f$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{2x}$ où k est une constante réelle quelconque.
2	Les solutions de l'équation différentielle $y' + 7y = 0$ sont les fonctions : $x \longmapsto ke^{-7x}$ ($k \in \mathbb{R}$).
3	Les solutions de l'équation différentielle $f'' = 25f$ sont les fonctions $f_{A,B}(x) = Ae^{25x} + Be^{-25x}$, où $A \in \mathbb{R}$ et B$\in \mathbb{R}$
4	Soit ω un nombre réel non nul. Les solutions de l'équation différentielle $f'' = \omega^2 f$ sont les fonctions $f_{A,B}(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$, où $A \in \mathbb{R}$ et B$\in \mathbb{R}$

EXERCICE 4

Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée :

(E_1): $\frac{1}{2}f' - 2f = 0$ et $f(0) = 4$

(E_2): $2f' + f = 0$ et $f(-2) = e$

EXERCICE 5

Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée :

(E_1): $f'' = 0$; $f(-1) = 2$ et $f(2) = 5$

(E_2): $f'' = 0$; $f(3) = -1$ et $f(0) = 3$

EXERCICE 6

Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée :

(E_1): $f'' - 4f = 0$; $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

(E_2): $f'' + 9f = 0$; $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1$

(E_3): $4\,f'' + f = 0$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$

EXERCICE 7

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : (E_3): $3\,f'' + 12f = 0$.

2) Déterminer $f'(x)$.

3) Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale : $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$

EXERCICE 8

On considère l'équation différentielle (E) : $y - y' = \frac{e^x}{x^2}$ et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $]0; +\infty[$.

1) Démontrer que la fonction u définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = \frac{e^x}{x^2}$ est solution de (E).

2) Démontrer qu'une fonction v définie sur $]0; +\infty[$ est solution de (E) si la fonction $v - u$, définie sur $]0; +\infty[$, est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$.

3) En déduire toutes les solutions définies sur $]0; +\infty[$ de l'équation (E).

EXERCICE 9

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population qui semble en voie de disparation.
En l'an 2000, l'effectif était égal à mille (1000).
L'effectif de cette population évolue par rapport au temps t et peut être approcher par une fonction f.
Le temps t est exprimé en années à partir de 2000. La fonction f est dérivable, strictement positive sur l'intervalle $[2000; +\infty[$ et est solution de l'équation différentielle : (E_1): $y'(t) + \frac{1}{200}y(t) = -\frac{200}{t^2} + \frac{1}{t}$

Soit h la fonction dérivable et définie sur l'intervalle $[2000; +\infty[$ par : $h(t) = \frac{200}{t}$.

1) Vérifier que h est solution de (E_1).

2) Résoudre l'équation différentielle (E_2): $y'(t) + \frac{1}{200}y(t) = 0$.

3) a- Démontrer qu'une fonction g est solution de (E_1) si et seulement si g $-h$ est solution de (E_2).

b- Déduis – en les solutions de (E_1).

c- Sachant que : $f(2000) = 1000$, vérifier que : $\forall t \in [2000; +\infty[, f(t) = 999{,}9e^{\left(10-\frac{t}{200}\right)} + \frac{200}{t}$.

d- Déterminer le nombre d'individus de cette population animale en 2020.
Donne le résultat arrondi à l'ordre 0.

EXERCICE 10

Partie A

Soit r la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $r(x) = xe^{-x}$.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = r$.

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par :$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{g}(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$

1. Démontrer que g est une solution de l'équation (E).
2. Soit l'équation différentielle (F) : $y' + y = 0$.
   a) Démontrer qu'une fonction φ est une solution de (E) si et seulement si $\varphi - \mathrm{g}$ est une solution de (F).
   b) Résoudre l'équation différentielle (F).
   c) En déduire la solution φ de (E) qui vérifie $\varphi(0) = -\frac{3}{2}$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2-3}{2}e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), d'unités graphiques OI = 2 cm ; OJ = 4 cm.

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$.
   b) Démontrer que la courbe (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).
2. Calculer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.
3. a) Soit f' la fonction dérivée de f. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x}$
   b) Etudier les variations de f.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) a la courbe (C) au point d'abscisse 0 est : $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$.
5. Etudier les positions relatives de (C) par rapport a l'axe des abscisses.
6. Représenter graphiquement (T) et (C).

Partie C

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$
2. a) Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.
   b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f'(x) + xe^{-x}$
   c) En utilisant la question précédente, calculer en cm^2 l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

SITUATION COMPLEXE

Au cours d'une séance de cours, le professeur de Mathématiques d'une classe de F_3 au Lycée Technique d'Abidjan remet à chaque élève une fiche d'informations sur laquelle sont inscrites les informations suivantes :

la température de refroidissement d'un objet, fabriqué industriellement, est modélisée par une fonction f, ouu, pour tout réel $t \geq 0, f(t)$ représente la température de l'objet, exprimée en degrés Celsius, à l'instant t exprimé en heures . La fonction f vérifie la relation : $f' + \frac{1}{2}f = 10$.

Curieux, les élèves decident de déterminer la fonction f, de faire son étude, de faire son étude et d'interpréter les résultats de cette étude.

Utilisant tes connaissances mathématiques acquises u coirs de l'année scolaire, détermine la fonction f, étudie-la puis interprète les résultats de cette étude.

NB : La température initiale de l'objet est 220°C.

DEVOIR DE NIVEAU
TERMINALE D

MATHEMATIQUES

Coefficient : 4
Durée : 4 h

SÉRIE : D

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2.
Toute calculatrice scientifique est autorisée

EXERCICE 1 (2 points)

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou de FAUX si l'affirmation est fausse.

N°	AFFIRMATIONS
1	Si g est une fonction continue sur un intervalle K, alors g admet une primitive sur K
2	Si la fonction f est dérivable sur un intervalle I et la fonction g est dérivable sur K contenant f(I), alors la fonction est dérivable sur K et $(gof)' = g' \times (f'og)$.
3	Soit f, g et h trois fonctions telles que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$
4	On lance deux fois de suite un dé non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'apparition de la face numéro 6. $X(\Omega) = \{1; 2\}$

EXERCICE 2 (2 points)

Dans chacun des cas recopie le chiffre et la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	QUESTIONS	A	B	C
1	La dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto \cos\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$ est	$-2\cos\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$	$2\sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$	$2\cos\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$
2	Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction h définie et dérivable sur l'intervalle $]1; +\infty[$. $\begin{array}{c\|ccccc} x & 1 & & 2 & & +\infty \\ \hline h'(x) & & - & & + & \\ \hline h(x) & 0 & \searrow & -2 & \nearrow & +\infty \end{array}$ $h(]1; 2[)$ est égale à	$]-2; 0[$	$]0; +\infty[$	$[-2; 0[$
3	A et B sont deux événements d'une même expérience aléatoire. Si $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{3}{10}$ et $P(A \cap B)=\frac{1}{10}$ alors $P_B(A)$ est égale à	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
4	Si $f(3) = 1$ et $f'(3) = -1$ alors la tangente (T) à (C) en 3 est	$y = -x - 4$	$y = x - 4$	$y = -x + 4$

EXERCICE 3 (3 points)

Dans une ville, les personnes qui ont un âge supérieur ou égal à 40 ans constituent 40% de la population. 50% des personnes ayant un âge supérieur ou égal à 40 ans ont le bac et seulement 0,5% des individus de moins de 40 ans ont le bac. On prend un individu au hasard et on donne les événements :

- S : « L'individu a un âge supérieur ou égal à 40 ans ».
- B : « L'individu a le bac ».

1°) Dresse un arbre de probabilité qui présente la situation.
2°) Calcule la probabilité de l'événement : L'individu a moins de 40 ans et le bac.
3°) Justifie que : P(B) = 0,203.
4°) Tu prends au hasard n personnes dans la ville et on note P_n la probabilité d'avoir au moins une personne qui a le bac ($n \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}$).

a- Justifie que : $P_n = 1 - (0{,}797)^n$.

b- Détermine le nombre minimum de personnes à prendre pour que la probabilité d'avoir au moins une personne qui a le bac dépasse 99,99%.

<u>EXERCICE 4</u> (4 points)

Calcule la limite de f dans chaque cas.

1°) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\frac{3x-2}{2-x}} - \frac{1}{x}}{\sqrt{2-x^2}-1}$ en 1 ; 2°) $f(x) = \dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}$ en π

3°) $f(x) = \dfrac{1+\cos x}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$; 4°) $f(x) = -\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$ en 0 à gauche.

<u>EXERCICE 5</u> (4 points)

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x|x^2 - 1|$.
1°) Ecris h sans symbole de valeur absolue.
2°) Etudie la dérivabilité de h en -1.
3°) On considère g la restriction de h à l'intervalle $[0; 1]$.

a- Justifie que : $\forall t \in [0; 1],\ -2 \le g'(t) \le 1$.

b- En utilisant l'inégalité des accroissement finis, démontre que : $\forall x \in [0; 1],\ -2x \le g(x) \le x$.

<u>EXERCICE 6</u> (5 points)

Soit f la fonction définie par son tableau de variation ci – dessous :

x	$-\infty$		-5		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-			‖	-	0	+	
$f(x)$	1	↗	4	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	7

1°) Détermine l'ensemble de définition D_f de f.
2°) Donne les limites de f aux bornes de son ensemble de definition.
3°) A l'aide du tableau de variation, détermine les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{f(x)-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{f(x)-7}$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} \dfrac{(f\circ f)(x)}{f(x)}$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \dfrac{(f\circ f)(x)}{f(x)}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{x^2-5}{2x+1}\right)$.

4°) Détermine le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
5°) Donne les équations des asymptotes à la courbe (C_f) de f.
6°) Trace dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 1 cm, une allure de la courbe (C_f) de f.

BACCALAUREAT REGIONAL
SESSION 2022

Coefficient : 4
Durée : 4h

MATHEMATIQUES

SERIE : D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE 1 (2 points)

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si l'affirmation est fausse.

N°	AFFIRMATIONS
1	Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $[1;2]$ telle que $f(1)=2$ et $f(2)=10$, alors l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans $[1;2]$.
2	Toute fonction continue sur un intervalle J est dérivable sur J.
3	g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de courbe représentative (C) dans un repère orthonormé (O, I, J) ; si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0$, alors (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$.
4	La fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ definie par : $h(x)=\frac{8-2x}{-2+\sqrt{x}}$ admet un prolongement par continuité en 4.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations ci – dessous, trois réponses A, B et C sont données dont une seule est juste. Recopie sur ta feuille, le numéro de l'affirmation suivie de la lettre correspondant à la réponse juste.

N°	AFFIRMATIONS	REPONSES	
1	f étant une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et f^{-1} sa bijection réciproque, f est derivable sur $]0;+\infty[$, $f'(2)=0$ et $f(2)=\frac{1}{2}$, alors	A	f^{-1} n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$
		B	$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)=2$
		C	$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)=0$
2	La fonction $h : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa derivee h' est définie par : $h'(x)=$	A	$\frac{-1}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$
		B	$\frac{-2x}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$
		C	$\frac{-x}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$
3	La primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{x^3-x^2-x+5}{(x-1)^2}$ sur $]-\infty;1[$ qui a la valeur -3 en 0 est la fonction	A	$x \longmapsto \frac{x^3+3x}{x-1}+3$
		B	$x \longmapsto \frac{1}{2}x^2+x-\frac{4}{x-1}-7$
		C	$x \longmapsto \frac{x^3-x^2+1}{(x-1)^2}$
4	La fonction : $x \longmapsto \cos(6x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction	A	$x \longmapsto 12\sin(6x^2)$
		B	$x \longmapsto -12x\sin(6x^2)$
		C	$x \longmapsto -12\sin(6x^2)$

<u>EXERCICE 3</u> (3 points)

Si une vache porte un seul fœtus, on dit qu'elle a une gestation unique, sinon on dit qu'elle a une gestation multiple.

Dans la réserve du RANCH DE LA MARAHOUE, une étude faite sur une population de vaches gestantes, montre que :

- Le pourcentage des vaches ayant une gestation multiple est de 5%.
- Parmi les vaches ayant une gestation multiple, 55% finissent par mettre bas dans le délai prévu.
- Parmi les vaches ayant une gestation unique, 92% mettent bas dans le délai prévu.

On choisit au hasard une vache de cette population, on considère les évènements suivants :

U : « La vache a une gestation unique ».

D : « La vache met bas dans le délai prévu ».

1) Détermine la probabilité de U.
2. a) Calcule la probabilité de U.
   b) Une vache a mise bas dans le délai prévu.
   Démontre qu'une valeur approchée à10^{-4} près de la probabilité que sa gestation soit unique est 0,9694.
2) Le vétérinaire de la réserve souhaite accroitre la population bovine.
   Il prévoit qu'en juillet 2022, n vaches en gestation devraient mettre bas dans le délai prévu ($n \geq 2$).
   On note P_n la probabilite qu'au moins une de ces vaches ait une gestation multiple.
   a) Exprime P_n en fonction de n.
   b) Détermine le nombre minimal des vaches qui devront mettre bas en juillet 2022 dans le délai pour que la probabilité P_n soit supérieur ou égal à 0,9.

<u>EXERCICE 4</u> (3 points)

On considère dans ℂ, l'équation P défini par : $P(z) = z^3 - (7 + 6i)z^2 + (10 + 26i)z + 6 - 24i$

4) a- Calculer P(3).
   b- Justifie que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - 3)[z^2 + (-4 - 6i)z - 2 + 8i]$
   c- Résous dans ℂ l'équation de (E) : $z^2 + (-4 - 6i)z - 2 + 8i = 0$.
   d- Déduis – en les solutions dans ℂ de l'équation : $P(z) = 0$.
5) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) ; **unité graphique : 2 cm.**

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $1 + i$; 3 et $3 + 5i$.

a- Place dans les points A, B et C.
b- Démontre que le triangle ABC est rectangle.
c- Détermine l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un rectangle.
d- Détermine l'affixe du point D du centre K du rectangle ABCD.

<u>EXERCICE 5</u> (5 points)

<u>PARTIE A</u>

Soit la fonction h derivable sur ℝ et définie par : $h(x) = 3 + (x - 1)e^{-x}$. On admet que :

- $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 3$ et $\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$
- Pour tout nombre réel $x, h'(x) = (2 - x)e^{-x}$

1. Etudie les variations de h et dresse son tableau de variation.
2. a) Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$.
   b) Justifie que : $-1 < \alpha < 0$.
3. Démontre que : $\forall x \in]-\infty ; \alpha[, h(x) < 0$ et que : $\forall x \in]\alpha ; +\infty[, h(x) > 0$.

<u>PARTIE B</u>

Soit la fonction numérique f définie sur ℝ par : : $f(x) = 3x + 1 - xe^{-x}$.

(C) désigne la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) ; unité graphique : 2 cm.

1. Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Démontre que pour tout nombre réel, $f'(x) = h(x)$.

3. a) Etudie les variations de f.
   b) Dresse le tableau de variations de f.
4. Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
5. Démontre que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).
6. Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

EXERCICE 6 (5 points)

La Bourse Régionale des Valeurs Mobilières (BRVM) située dans la commune du plateau est le marché financier des états de l'UEMOA.

A la BRVM, les investisseurs où achètent des actions et ou des obligations.

Le cours d'une action cotée à la BRVM à partir du 1er janvier 2022 exprimée en dizaine de milliers de francs CFA est modélisée par la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 28 - 25\ln(x)$ où x désigne le nombre de mois écoulé avec $x \in [1\,;12]$.

Monsieur Sémian veut acheter 2 500 actions lorsque le cours sera minimal. Il veut savoir le mois de l'année 2022 où il sera judicieux pour lui de les acheter. Ne disposant par des compétences pour répondre à cette préoccupation, il sollicite ton aide.

En utilisant tes connaissances mathématiques de terminale D, apporte une réponse à la préoccupation de monsieur Sémian.