Se préparer au BAC

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Bac

Sujets et corrigés

Maths

Série D

Le Guide

- Sujets de 1992 à 2024
- Corrigés détaillés

Bengaly Kalifa

Lycée Moderne 3 Divo
+225 0707346649

Édition 2024

SOMMAIRE

SESSION NORMALE 2024 SERIE D

EXERCICE 1 (2 points)

Écris, le numéro de chacun des énoncés ci-dessous suivi de VRAI si l'énoncé est vrai ou de FAUX si l'énoncé est faux.

1. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K et F une primitive de f sur K.

Les fonctions $x \mapsto F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$ sont les primitives de f sur K.
2. Le coefficient de corrélation linéaire r d'une série statistique double (X, Y) est tel que : $-1 < r < -0{,}87$. La corrélation lineaire entre les variables X et Y est forte.
3. La fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto a^x, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, est la fonction : $x \mapsto a^x$.
4. Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty$ [et ℓ un nombre réel tel que :
$\forall x \in]0; +\infty[\ , |f(x) - \ell| < \frac{1}{x}$ On a : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés ci-dessous, les informations a, b, c et d permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie.
Écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de l'information qui donne l'affirmation vraie.

1. z est un nombre complexe tel que $z = a + bi, a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Le module de z est égal à...
   a) $a^2 + b^2$
   b) $\sqrt{a^2 + b^2}$;
   c) $a^2 - b^2$;
   d) $|a + b|$
2. Une primitive sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ de la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$ est la fonction F définie par :...
   a) $F(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
   b) $F(x) = -\ln(\sin x)$;
   c) $F(x) = \ln(\sin x)$
   d) $F(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\sin x)^2}$
3. Soit Ω un point du plan. L'homothétie de centre Ω et de rapport -3 est une similitude directe de centre Ω, de ..
   a) rapport -3 et d' angle 0
   b) rapport -3 et d'angle π;
   c) rapport 3 et d'angle π
   d) rapport 3 et d'angle 0 .
4. Si A, B et C sont des points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B et z_C telles que : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i\sqrt{3}$, alors...
   a) ABC est un triangle rectangle en A
   b) ABC est un triangle isocèle en A
   c) ABC est un triangle rectangle isocèle en A
   d) les points A, B et C sont alignés.

EXERCICE 3 (3 points)

Dans le cadre du programme jeunesse d'un gouvernement, une enquête a été menée en 2023 sur l'ensemble des élèves issus d'un centre de formation professionnelle.
Cette enquête a révélé que 40% de ces élèves sont des bacheliers. Parmi ces bacheliers, 90% ont obtenu un emploi et parmi les non bacheliers, 70% ont obtenu un emploi.

1. On choisit au hasard un élève issu de ce centre.

Démontre que la probabilité que cet élève ait obtenu un emploi est 0,78 .

2. On admet que le centre a formé suffisamment d'élèves.

On choisit au hasard 5 élèves issus du centre et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves ayant obtenu un emploi.

a) On admet que X suit une loi binomiale de paramètres 5 et 0,78 .

Calcule l'espérance mathématique $\mathrm{E(X)}$ de X et interprète le résultat.

b) Calcule la probabilité qu'au moins 3 de ces élèves aient obtenu un emploi.

EXERCICE 4 (3 points)

On se propose de chercher la fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = -4x - 4$ telle que $f(0) = 1$, puis de déterminer une valeur approchée de l'équation $x \in [0; +\infty[, f(x) = -1$.

1. Démontre que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2x + 3$ est une solution de (E).

2. Soit l'équation différentielle (E') : $\boldsymbol{y}' - 2y = 0$.

Détermine les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E').

3. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Démontre que g est solution de (E) si et seulement si $g - h$ est une solution de (E').
   b) Déduis des questions précédentes les solutions de (E).
   c) Justifie que la fonction f cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = -2e^{2x} + 2x + 3$.
4. a) Justifie que f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
   b) Démontrer que l'équation$x \in [0; +\infty[f(x) = -1$, admet une solution unique α telle que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

EXERCICE 5 (5 points)

Le but de cet exercice est de démontrer qu'une fonction est bijective et d'effectuer un calcul d'aire.
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O $, I, J$) d'unité graphique 2 cm .
On considère la fonction numérique h, continue sur]1 ; $+\infty$[et définie par: $h(x) = \frac{x+1}{x \ln x}$.
On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère $(\mathrm{O, I, J})$.

1. Démontre que: $\forall x \in]1; +\infty[,\ 1 + x + \ln x > 0$.

2. a) Calcule la limite de h à droite en 1 , puis interprète graphiquement le résultat.
   b) Démontre que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe (C) de h en $+\infty$.

3. a) Démontre que : $\forall x \in]1; +\infty[\ \ h'(x) = -\frac{1+x+\ln x}{(x\ln x)^2}$.
   b) Justifie que : $\forall x \in]1; +\infty[\ \ h'(x) < 0$.
4. Démontre que h est une bijection de $]1; +\infty[$ dans un intervalle K à préciser.
5. Soit (Γ) la courbe représentative de la fonction g définie sur $]1; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{\ln x}$.

   Démontre que (C) est au-dessus de (Γ) sur $]1; +\infty[$.
6. a. Justifie que : $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x} dx = \ln 2$.
   b. Détermine l'aire A en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), (Γ) et les droites d'equations $x = e$ et $x = e^2$.

EXERCICE 6 (5 points)

Monsieur Zahui, un entrepreneur, vient d'acquérir avec la mairie de sa ville natale un terrain qu'il doit mettre en valeur. Il souhaite construire sur ce terrain un marché de produits vivriers pour aider les femmes à écouler facilement leurs marchandises. Il dispose de 20000000 F CFA et voudrait doubler cette somme avant de commencer à réaliser son projet. Il sollicite une institution financière qui lui propose d'épargner cette somme à un taux d'intérêt annuel de 6,9%.

Monsieur Zahui voudrait savoir le nombre minimum d'années qu'il lui faut pour commencer le projet. Ne sachant pas comment s'y prendre, il te sollicite.

À l'aide d'une argumentation basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation de Monsieur Zahui.

SESSION NORMALE 2023 SERIE D

EXERCICE 1 (2 points)

Soit f une fonction numérique définie et deux (2) fois dérivable sur un intervalle contenant un nombre réel x_0.On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J). a et b sont deux nombres réels tels que : $a<b$.

On note f' et f'' les dérivées première et seconde respectives de f

Ecris , sur ta copie, le numéro de chaque proposition suivi de **Vrai** si la proposition est vraie ou de **Faux** si la proposition est fausse .

N°	Enoncé
1	Si $f''(x_0) \neq 0$, alors (C) admet un point d'inflexion au point d'abscisse x_0.
2	Si f est négative sur l'intervalle $[a;b]$, alors l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par (C), la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x=a$ et est : $-\int_a^b f(t)dt$
3	Si $\forall x \in [a;b]$, $\lvert f'(x)\rvert \leq m$, alors $\lvert f(a)-f(b)\rvert \leq m(a-b)$, $(m \in \mathbb{R})$
4	Les solutions de l'équation différentielle $f''+\omega^2 f=0$ $(\omega \in \mathbb{R})$ sont de la forme : $x \mapsto Ae^{wx}+Be^{-wx}$ $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous , les informations des lignes A,B, C et D permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie.

Ecris , sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé incomplet suivi de la lettre de la ligne qui donne l'affirmation vraie.

N^o	Enoncé incomplet		Réponse
1	Soient (X,Y) une série statistique double et $\text{cov}(X,Y)$ sa covariance. On note respectivement $V(X)$ et $V(Y)$ les variances respectives de X et Y .On admet que $V(X)\neq 0$ et $V(Y)\neq 0$. On appelle coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double (X,Y), le nombre réel noté r tel que …	A	$r=\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$
		B	$r=-\frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)V(Y)}$
		C	$r=-\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$
		D	$r=\frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)V(Y)}$
2	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos x - x\sin x$ est la fonction…	A	$x \mapsto \cos x - \sin x$
		B	$x \mapsto x\cos x$
		C	$x \mapsto \sin x - \cos x$
		D	$x \mapsto -x\cos x$
3	Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme 3 et de raison 2, alors la somme des n premiers termes consécutifs de cette suite est égale	A	$(n+1)(n+3)$
		B	$n(n+2)$

	à…	C	$\dfrac{(n+1)(n+3)}{2}$
		D	$\dfrac{(n+2)(n+3)}{2}$
4	L'ensemble des solutions de l'inéquation : $x \in \mathbb{R},\ \ln(1-x) < 2$ est…	A	$\left]1; e^2-1\right[$
		B	$\left]-\infty; 1-e^2\right[$
		C	$\left]1-e^2; 1\right[$
		D	$\left]e^2-1; +\infty\right[$

EXERCICE 3 (3 points)

Un sondage effectué auprès d'anciens élèves d'un lycée révèle que :

• 55% d'entre eux poursuivent uniquement leurs études dans une université ;

• 10% poursuivent uniquement leurs études dans une grande école ;

•les autres sont sur le marché du travail.

Ce sondage révèle aussi que certains de ces anciens élèves ont fait le choix de vivre en colocation . Il s'agit de :

• 45% des anciens élèves qui poursuivent leurs études dans une université ;

• 30% des ancien élèves qui poursuivent leurs études dans une grande école ;

• 15% des anciens élèves qui sont sur le marché du travail.

On interroge au hasard un ancien élève du lycée.

On considère les évènements suivants :

U : « L'ancien élève poursuit ses études à l'université »

G : « L'ancien élève poursuit ses études dans une grande école »

T : « L'ancien élève est sur le marché du travail »

C : « L'ancien élève vit en colocation »

1)Construis un arbre pondéré traduisant la situation.

2)Calcule la probabilité pour que l'ancien élève poursuive ses études dans une université et ait choisi de vivre en colocation.

3)Justifie que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,33.

4)Un ancien élève vit en colocation,

Calcule la probabilité qu'il poursuive ses études dans une université.

EXERCICE 4 (3 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J). On désigne par Ω, A et B les points d'affixes respectives $z_\Omega = 1+i$, $z_A = 1$ et $z_B = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

1)On note S la similitude directe de centre Ω qui transforme A en B.

a)Justifie que : $\dfrac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b)Déduis de **1-a)** que S a pour rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

c)Démontre que l'écriture complexe de S est : $z' = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)z + 1$.

2-a)Justifie que l'affixe du point K , image du point J par la similitude directe S est : $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

b)Démontre que les points O, K et Ω sont alignés.

EXERCICE 5 (5 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=xe^{-x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I ,J).

L'unité graphique est : 2cm.

1-a)Détermine la limite de f en $+\infty$.

b)On admet que f est dérivable sur $[0;+\infty[$

Justifie que $\forall x\in[0;+\infty[$, $f'(x)=(1-x)e^{-x}$.

c)Démontre que f est strictement croissante sur $]0;1[$ et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

d)Dresse le tableau de variation de f .

e)Construis (C) dans le repère (O,I,J).

2)Démontre que l'équation $f(x)=\frac{1}{4}$ admet une unique solution α dans $]0;1[$.

3)On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=\alpha \\ u_{n+1}=u_n e^{-u_n} \end{cases}$

a)Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n>0$.

b)Démontre que la suite (u_n) est décroissante .

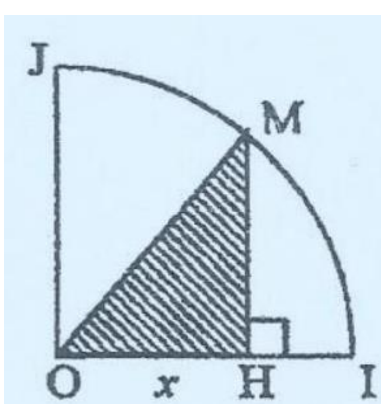
c)Justifie que le suite (u_n) est convergente.

d)Détermine la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 6 (5 points)

Une coopérative agricole possède un terrain qui a la forme d'un quart de disque de rayon 1 km représenté par la figure ci-contre qui n'est pas en grandeurs réelles. Elle veut partager son terrain en trois parcelles pour y cultiver respectivement des tomates, des aubergines et des patates.

La parcelle hachurée est réservée à la culture des tomates. La coopérative souhaite que l'aire de cette parcelle soit maximale.



L'agent de l'agriculture chargé de la mise en valeur de ces trois parcelles informe la coopérative que l'aire de la partie réservée à la culture des tomates est égale à $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$, où $x = \mathrm{OH}$ et $x \in [0; 1]$. Le gérant de la coopérative ne sachant comment déterminer l'aire maximale, te sollicite. À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation du gérant de la coopérative.

SESSION NORMALE 2022 Série D

EXERCICE 1 (2 points)

On donne les groupes de mots (**la droite de régression, des primitives, une bijection,, fonction dérivable, extremum relatif**) et les phrases incomplètes dans le tableau c- dessous

N°	Phrases incomplètes
1	Toute fonction f continue et strictement croissante sur un intervalle K définie ……..de K sur $f(K)$
2	Soit (X,Y) une série statistique double ayant une forte corrélation entre X et Y et telle que $V(X)\neq 0$. Une équation de ………………de Y en X est $y=ax+b$ où $a=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{V(X)}$ et $b=\overline{Y}-a\overline{X}$, $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ étant les moyennes respectives de X et Y.
3	Toute fonction continue sur un intervalle I admet ………………………sur I.
4	Toute …………………..en un point a est continue en a.

Ecris sur ta feuille de copie, le numéro de chaque phrase incomplète suivi du groupe de mots à écrire à la place des pointillés pour que la phrase soit vraie.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés ci-dessous, les informations des colonnes A,B et C permettent d'obtenir trois affirmations dont une seule est vraie.

Ecris sur ta feuille de copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la colonne qui donne l'affirmation vraie.

N°	Enoncés	A	B	C
1	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto e^{-2x+5}$ est…	$x\mapsto -2e^{-2x+5}$	$x\mapsto \frac{1}{2}e^{-2x+5}$	$x\mapsto -\frac{1}{2}e^{-2x+5}$
2	Les solutions de l'équation différentielle $y''-4y=0$ sont de la forme…	$x\mapsto ke^{2x}+k'e^{-2x}$ $(k,k')\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$	$x\mapsto k\cos(2x)+k'\sin(2x)$ $(k,k')\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$	$x\mapsto ke^{4x}+k'e^{-4x}$ $(k,k')\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$
3	$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-e^{x})$ est égale à…	$-\infty$	$+\infty$	0
4	La forme exponentielle du nombre complexe $-1+i$ est …	$2e^{i\frac{\pi}{4}}$	$\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$	$\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

EXERCICE 3 (3 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(0;\vec{u},\vec{v})$.

A, B, C, D et I sont les points du plan complexe d'affixes respectives : $-\sqrt{2}; 1+i; 1-i; 3+i$ et 1 .

1. Justifie que le triangle ABC est isocèle en A.
2. Soit S la similitude directe du plan d'écriture complexe : $z'=(1+i)z+1-3i$.

a) Justifie que : $S(D)=D$ et $S(B)=C$.

b) Détermine les éléments caractéristiques de S.

c) Détermine l'image (C') du cercle (C) de diamètre [BD] par S.

EXERCICE 4 (4 points)

On donne la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{5x+2}{4x+7}$.

(C) est sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé ($\mathrm{O,I,J}$).

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Sur la feuille annexe à rendre avec la copie, construis à l'aide de (C) et de la droite (D) d'équation $y=x$, les quatre premiers termes u_0, u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) sur l'axe des abscissés.

2. On admet que la fonction f est dérivable et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

a) Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \frac{1}{2}$.

b) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{2(u_n+1)(-2u_n+1)}{4u_n+7}$.

c) Déduis de $2.a$) et $2.b$) que la suite (u_n) est décroissante.

3. a) Déduis de $2.a$) et $2.c$) que la suite (u_n) est convergente.

b) Justifie que la limite de la suite (u_n) est égale à $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 5 (4 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x\ln x - 2x, \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé ($\mathrm{O,I,J}$).

L'unité graphique est 2 cm.

1. a) Justifie que f est continue en 0 .

b) Justifie que : $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$.

c) Interprète graphiquement le résultat de $1.b$).

2. On admet que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interprète graphiquement ces résultats.

3. a) On suppose que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Justifie que : $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = -1 + \ln x$.

b) Étudie les variations de f.

c) Dresse le tableau de variation de f.

4. Trace la courbe (C_f).

(Tu pourras tracer l'axe des abscisses dans le sens de la longueur du papier millimétré).

5. a) À l'aide d'une intégration par parties, justifie que l'intégrale K telle que $\mathrm{K} = \int_1^2 x \ln x dx$ est égale à $2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

b) On admet que, sur $[1; 2]$, (C_f) est au-dessous de l'axe des abscisses (OI).

Calcule l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), la droite (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

EXERCICE 6 (5 points)

Lors de la kermesse en fin d'année dans ton lycée, le comité d'organisation a initié un jeu d'adresse.

Le jeu comprend quatre épreuves.

Le joueur reçoit 4 boules après une mise de 100 F CFA.

Une épreuve consiste à lancer une boule dans un trou situé à 10 m.

Le jeu est terminé lorsque le joueur a lancé les quatre boules.

On suppose que les 4 lancers sont indépendants.

À chaque épreuve :

- si le joueur réussit à loger la boule dans le trou, le comité d'organisation lui remet 2 tickets.
- s'il ne réussit pas à loger la boule dans le trou, il ne gagne aucun ticket.

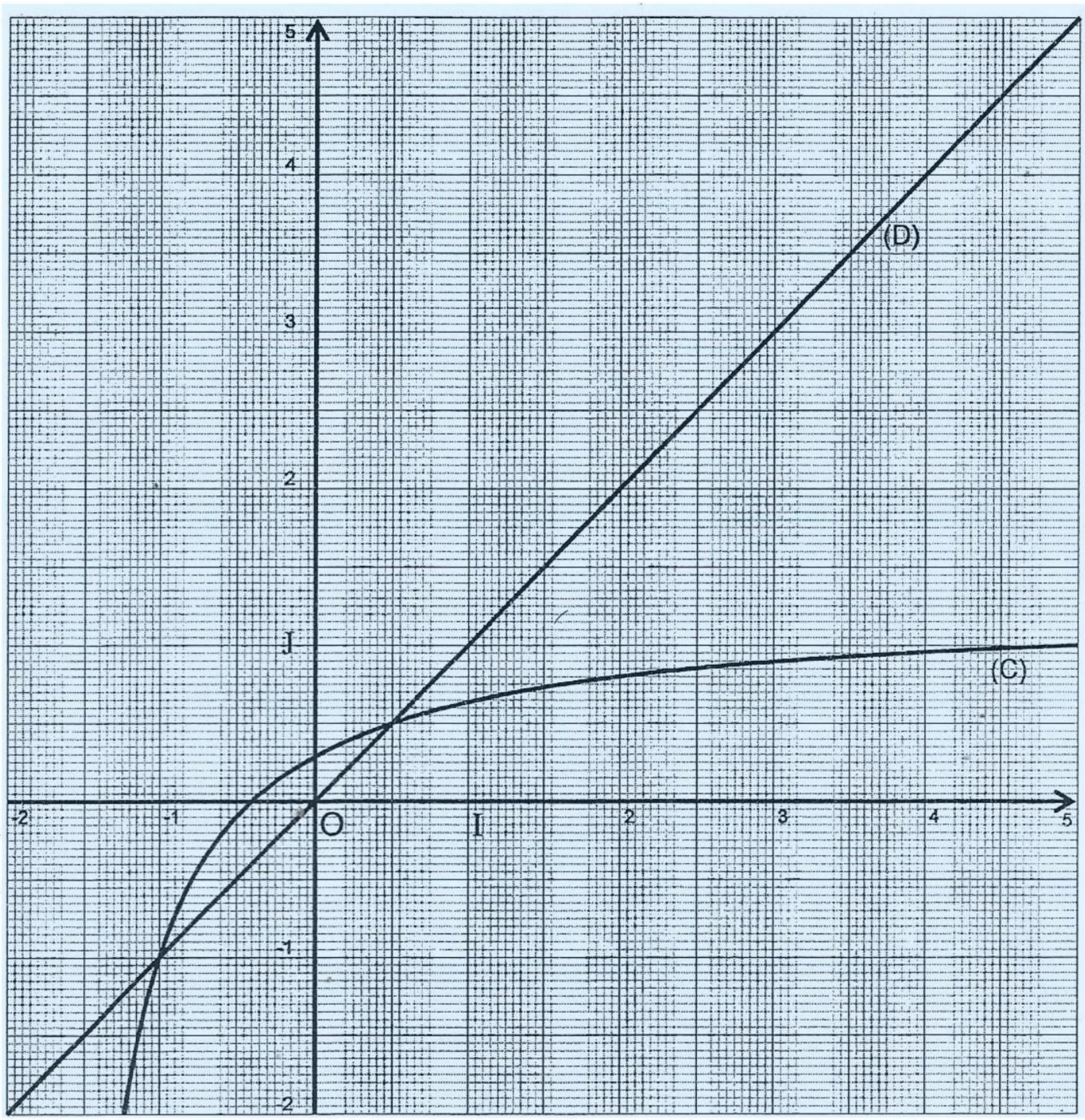
On admet que le joueur a 25% de chance de loger une boule dans le trou.

Le comité d'organisation récompense à hauteur de 2500 F CFA le joueur qui possède à la fin du jeu au moins 4 tickets.

Un élève affirme qu'un joueur a moins de 20% de chance de gagner les 2500 F CFA.

À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, dis si l'affirmation de cet élève est justifiée ou non.

Annexe à rendre avec la copie.



SESSION NORMALE 2021 SERIE D

EXERCICE 1 (2 points)

Pour chaque énoncé , écris **Vrai** si l'énoncé est vrai ou **Faux** si l'énoncé est faux.
Aucune justification n'est demandée.

N°	Enoncé
1	La fonction ln est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$
2	La fonction $\ln$ est la primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.
3	On considère la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$ La suite u est une suite arithmétique.
4	Soit f la fonction numérique dérivable sur un intervalle K. a et b sont deux éléments de K tels que $a < b$. S'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout x élément de $[a;b]$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors, $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

EXERCICE 2_(2 points)

Pour chacun des énoncés incomplets du tableau ci-dessous , quatre réponses A,B, C et D sont proposées dont une seule permet d'avoir l'énoncé juste.
Ecris , sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé incomplet suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N^o	Enoncé incomplet		Réponse
1	Soit u la suite numérique définie par : $u_0 = -2$ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ La suite u a pour limite…	A	$-\infty$
		B	2
		C	0
		D	$-\infty$
2	L'inéquation (E): $x \in \mathbb{R},\ \ln x - 1 \leq 0$,a pour Ensemble de solutions…	A	$]-\infty;e]$
		B	$]0;e]$
		C	$[e;+\infty[$
		D	$\varnothing$
3	On pose : $z = -\sqrt{3} + i$ .On note r le module de z et θ l'argument principal de z . r et θ vérifiant…	A	$r = 2$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$
		B	$r = 2$ et $\theta = \frac{-5\pi}{6}$
		C	$r = 2$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$
		D	$r = 1$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$
4	Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soient I et J les points d'affixes	A	La droite (IJ) privée du segment $[IJ]$

	respectives 1 et i. On note (Γ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant : $\lvert z-1\rvert = \lvert z-i\rvert$. (Γ) est…	B	La droite (IJ)
		C	La médiatrice du segment $[IJ]$
		D	Le cercle de centre I et de rayon 1.
5	Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle K telle que : $\forall x \in K,\ f'(x) > 0$. f est une bijection de K vers $f(K)$. $\forall a \in f(K),\ \left(f^{-1}\right)'(a)$ est égal à …	A	$\dfrac{1}{f'(a)}$
		B	$\dfrac{-1}{f^{-1}(a)}$
		C	$f'\left(f^{-1}(a)\right)$
		D	$\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(a)\right)}$

EXERCICE 3 (3 points)

Dans une ville , 30% de la population ont un âge supérieur ou égal à 65 ans.
60% des personnes ayant un âge supérieur ou égal à 65ans sont atteintes de la Covid-19.
$0{,}1\%$ des personnes de moins de 65ans sont atteintes de la Covid-19.

1)On prend une personne au hasard et on donne les évènements suivants :
S « la personne a un âge supérieur ou égal à 65 ans »
C « La personne est atteinte de la Covid-19 »

a)Dresse un arbre pondéré qui représente la situation.

b)Donne la probabilité $P_S(C)$ des personnes atteintes de la Covid-19 sachant qu'elles ont plus de 65 ans

c)Calcule la probabilité pour que la personne ait au moins 65 ans et soit atteinte de la Covid-19 .

2)Justifie que la probabilité de l'évènement C est : $0{,}1807$.

3)On prend au hasard n personnes dans la ville et on note P_n la probabilité d'avoir au moins une personne atteinte de la Covid-19 $(n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\})$.

a)Justifie que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\},\ P_n = 1-(0{,}8193)^n$.

b)Détermine le nombre minimal de personnes pour que la probabilité d'avoir au moins une personne atteinte de la Covid-19 dépasse $99{,}99\%$.

EXERCICE 4_(4 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{1-x} - x + 1$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O,I,J).
L'unité graphique est le cm.

1)On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Interprète graphiquement ces résultats.

2-a)Calcule la limite de f en $+\infty$.

b)Justifie que la droite (D) d'équation $y = -x+1$ est une asymptote à © en $+\infty$.

3)Soit g le fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^{1-x} + 1$.

On admet qu'il existe un nombre réel α élément de l'intervalle $[-0,4;-0,2]$ tel que $g(\alpha)=0$ et

$$\begin{cases}\forall x \in]-\infty;\alpha[,\ g(x)<0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[,\ g(x)>0\end{cases}$$

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a)Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -g(x)$.

b)Etudie le sens de variation de f.

c)Dresse le tableau de variation de f.

4)On admet que (C) est au-dessus de (D) sur $[-1;+\infty[$ et au-dessous de (D) sur $]-\infty;-1]$.

Construis (C). (*Tu prendras :* $\alpha=-0,3$ *et* $f(\alpha)=3,9$).

5-a)Interprète graphiquement l'intégrale K tel que $K=\int_0^1 \left(f(x)-(-x+1)\right)dx$.

b)Justifie à l'aide d'une intégration par parties : $K = 2e-3$.

EXERCICE 5 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé directe $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique le centimètre.

On réalisera une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

On note A et B les points d'affixes respectives 8 et $4+4i$.

1)On considère la similitude directe S de centre O telle que : $S(A)=B$.

a)Justifie que la similitude directe S a pour écriture complexe : $z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z$.

b)Détermine le rapport et l'angle de S.

2)On considère les points A_n tels que : $\begin{cases}A_0 = A \\ \forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1}=S(A_n)\end{cases}$

On désigne par z_n l'affixe du point A_n.

a)Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^n$.

b)Démontre que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle et isocèle en A_{n+1}.

3-a)Place successivement les points A_0 , A_1 , A_2 , A_3 , A_4 .

b)Justifie que l'aire a_1 en cm^2, du triangle OA_0A_1 est 16.

c)Déduis du résultat précédent l'aire a, en cm^2 du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4$.

EXERCICE 6 (5 points)

Une société fabrique et commercialise des produits cosmétiques. Les relevés , en millions de franc CFA , des frais publicitaires mensuels de la société et de son chiffre d'affaires mensuel sont consignés dans le tableau suivant .

Frais publicitaires	1	2	3	4	5
Chiffre d'affaires	60	66	69	75	81

Le directeur commercial veut investir davantage dans la publicité pour que le chiffre d'affaires mensuel atteigne 100 millions de franc CFA.

Informée du problème , sa fille , qui est une de tes camarades de classe , te sollicite pour trouver le montant des frais à investir dans la publicité afin d'atteindre 100 millions comme chiffre d'affaires.

Fais une proposition argumentée.

SESSION NORMALE 2020 SERIE D

EXERCICE 1

Une entreprise achète, utilise et revend des machines à coudre après un certain nombre d'années. Le tableau suivant donne l'évolution du prix Y de vente d'une machine en fonction du nombre d'années X d'utilisation.

Nombre x_i d'années	1	2	3	4	5	6
Prix y_i(en milliers de francs CFA)	150	125	90	75	50	45

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Unités graphiques : en abscisse, 1 cm pour une année ; en ordonnée, 1 cm pour 20000 F.

1. Représente le nuage de points associés à la série statistique (X, Y).
2. a) Détermine les coordonnées du point moyen G du nuage de points de cette série statistique. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

b) On note $V(X)$ la variance de X et $Cov(X, Y)$ la covariance de (X, Y).

Démontre que : $V(X) = \frac{35}{12}$ et $Cov(X, Y) = -\frac{255}{4}$.

3. On admet que la variance $V(Y)$ de Y est égale à 1445 .

a) Justifie que le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique (X, Y) est $\frac{-3\sqrt{21}}{14}$.

b) Justifie qu'il existe une forte corrélation linéaire entre les variables X et Y.

4. Soit (D) la droite de régression de Y en X.

Démontre, par la méthode des moindres carrés, qu'une équation de (D) est : $y = -\frac{153}{7}x + \frac{497}{3}$.

5. Détermine le prix de vente d'une machine à coudre à la fin de la 7^e année.

On arrondira le résultat au multiple le plus proche de 5.

EXERCICE 2

1. On considère l'équation $(E): z \in \mathbb{C}, z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = 0$.

a) Justifie que $2i$ est une solution de (E).

b) Justifie que : $\forall z \in \mathbb{C}, z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = (z-2i)[z^2 + (1+3i)z - 4]$.

c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'): $z^2 + (1+3i)z - 4 = 0$.

d) Déduis des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$. L'unité graphique est $2 \mathrm{~cm}$.

On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-3i; 1-i; 2i$ et $-2-2i$.

a) Place les points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ et D sur votre feuille de copie.

b) Démontre que le triangle BAD est rectangle et isocèle en A.

3. Soit S la similitude plane directe de centre D qui transforme A en B.

a) Démontre que l'écriture complexe de S est : $z'=(1+i)z-2+2i$.

b) Démontre que $S(B)=C$.

c) Détermine l'image du triangle BAD par la similitude S.

PROBLÈME

PARTIE A

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2x-\mathrm{e}^{-x}$.

1. Calcule $\lim_{x \rightarrow-\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow+\infty} g(x)$.

2. Démontre que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puis dresse son tableau de variation.

3. a) Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$. On la note α.

b) Justifie que : $0{,}3<\alpha<0{,}4$.

4. Justifie que : $\forall x \in]-\infty, \alpha[, g(x)<0; \quad \forall x \in] \alpha,+\infty[, g(x)>0$

PARTIE B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x-1)(2\mathrm{e}^{x}-1)$.

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

L'unité graphique est $2 \mathrm{~cm}$.

1. Calcule $\lim_{x \rightarrow+\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Donne une interprétation graphique des résultats obtenus.

2. a) Calcule $\lim_{x \rightarrow-\infty} f(x)$.

b) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=1-x+2(x-1)\mathrm{e}^{x}$.

c) Démontre que la droite (D) d'équation $y=1-x$ est une asymptote à (C_f) en $-\infty$.

d) Étudie la position relative de (C_f) et (D).

3. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $f\,'$ sa fonction dérivée.

a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{g}(x)$.

b) Étudie le sens de variation de f.

c) Dresse le tableau de variation de f.

4. a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$.

b) Déduis-en les coordonnées des points d'intersection A et B de (C_f) et de l'axe des abscisses.

On choisira : $x_{\mathrm{A}} < x_{\mathrm{B}}$($x_{\mathrm{A}}$ et x_{B} étant les abscisses respectives de A et B).

5. Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0 .

6. Trace les droites (D) et (T), puis construis (C_f).

On prendra : $\alpha = 0{,}35$ et $f(\alpha) = -1{,}2$. 7. À l'aide d'une intégration par parties, calcule l'aire en cm^2, de la partie du plan délimitée par (C_f), la
droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

SESSION NORMALE 2019 SERIE D

EXERCICE 1

Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

En vue de sélectionner des joueurs pour un tournoi international de football, une fédération nationale met à la disposition de l'entraineur un certain nombre de joueurs évoluant au pays et hors du pays. Parmi eux, il y a des joueurs professionnels et des joueurs non professionnels.
Ces joueurs se répartissent comme suit :

- 75% des joueurs évoluent au pays ;
- 60% des joueurs évoluant au pays sont professionnels ;
- 80% des joueurs évoluant hors du pays sont professionnels.

On choisit au hasard un joueur pour subir un test antidopage.

On désigne par A l'évènement «Le joueur choisi évolue au pays».

On désigne par B l'évènement «Le joueur choisi est professionnel ».

On désigne par C l'évènement «Le joueur choisi évolue au pays et est professionnel ».

1. a) Traduis l'énoncé par un arbre de probabilité.

b) Donne $P_A(B)$, la probabilité de B sachant A.

c) Démontre que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,45 .

2. Calcule la probabilité de B.

Partie B

Un entraîneur doit sélectionner des joueurs parmi ceux mis à sa disposition. Pour ce faire, il soumet d'abord chaque joueur à un test qui consiste à faire trois tirs au but successifs à partir du point de penalty. Est retenu à l'issue de ce premier test, tout joueur qui réussit au moins deux de ses trois tirs. On suppose que les tirs sont indépendants les uns des autres et que la probabilité qu'un joueur donné réussisse un tir est égale à $\frac{3}{4}$.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirs réussis par un joueur donné à l'issue de l'épreuve de trois tirs au but successifs.

a) Détermine les valeurs prises par X.

b) Détermine la loi de probabilité de X.

2. Calcule l'espérance mathématique de X.

3. Démontre que la probabilité qu'un joueur donné soit retenu est égale à $\frac{27}{32}$.

EXERCICE 2

Une société ivoirienne de transformation de produits agricoles a acheté 5000 tonnes de noix de cajou aux paysans en 2011. La société décide d'augmenter de 5% ses achats chaque année par rapport à l'année précédente.

On note, pour tout entier naturel n, Q_n la quantité en tonnes de noix de cajou achetée en l'an $(2011+n)$. On a : $\mathrm{Q}_0=5000$.

1. Justifie que la quantité de noix de cajou achetée en 2012 est de 5250 tonnes.

2. Démontre que (Q_n) est une suite géométrique de raison 1,05 .

3. a) Justifie que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{Q}_n=5000 \times(1{,}05)^n$.

b) Détermine la quantité de noix de cajou qu'achètera cette société en 2020. Donne le résultat arrondi à l'ordre 0 .

4. a) Détermine l'année où la quantité de noix de cajou achetée sera supérieure à 10000 tonnes.

b) Détermine la quantité totale de noix de cajou achetée par cette société de 2011 à fin 2020. Donne le résultat arrondi à l'ordre 0 .

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$. L'unité graphique est : $2 \mathrm{~cm}$.

<u>Partie A</u>

Soit g la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{1}{x-1}-\ln(x-1)$.

On note $(\odot_g)$ la courbe représentative de g dans le plan muni du repère (O, I, J).

1. a) Calcule la limite de g à droite en 1 .

b) Interprète le résultat obtenu.

2. a) Calcule $\lim_{x \rightarrow+\infty} g(x)$.

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow+\infty} \frac{g(x)}{x}$.

c) Donne une interprétation graphique des résultats obtenus précédemment.

3. On suppose que g est dérivable sur $]1;+\infty[$ et on note g ' sa fonction dérivée.

a) Justifie que : $\forall x \in]1;+\infty\left[, g'(x)=\frac{-x}{(x-1)^2}\right.$

b) Déduis de ce qui précède le signe de $g'(x)$.

c) Dresse le tableau de variation de g.

4. a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1;+\infty[$.

On note α cette solution.

b) Vérifie que : $2{,}7 < \alpha < 2{,}8$.

5. Démontre que :

$\forall x \in]1;\alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) < 0$.

Partie *B*

On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = 4\mathrm{e}^{-x}\ln(x-1)$.

On note ($\mathcal{C}$) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère (O, I, J).

1. a) Justifie que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) Donne une interprétation graphique du résultat obtenu.

2. a) Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$.

b) Donne une interprétation graphique du résultat obtenu.

3. On suppose que f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et on note f ' sa fonction dérivée.

a) Justifie que : $\forall x \in]1;+\infty[, f'(x) = 4\mathrm{e}^{-x}g(x)$.

b) Déduis de la question précédente et de la question 5 de la partie A, les variations de f.

c) Dresse le tableau de variation de f.

4. Construis les courbes $(\odot_g)$ et $())$ dans le même repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

On prendra : $\alpha = 2{,}75$ et $f(\alpha) = 0{,}14$.

Partic C

1. Justifie que : $\ln(\alpha - 1) = \frac{1}{\alpha-1}$, en utilisant la question 4-a) de la partie A.

2. On pose : $\mathrm{U} = \int_2^\alpha \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{V} = \int_2^\alpha \ln(x-1)\mathrm{d}x$.

a) Calcule U.

b) À l'aide d'une intégration par parties, justifie que : $\mathrm{V} = 3 - \alpha$.

3. On désigne par A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}_\mathrm{g})$, l'axe (OI), les droites d'équations $x = 2$ et $x = \alpha$.

a) Justifie que : $U - V = \frac{(\alpha-2)^2}{\alpha-1}$.

b) Déduis-en l'aire A.

SESSION NORMALE 2018 SERIE D

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$. L'unité graphique est : 2 cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $4i; 2$ et $1 + i\sqrt{3}$.

1. a) Écris le nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.

b) Place les points A, B et C dans le plan muni du repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

2. Soit $\mathcal{S}$ la similitude directe de centre O qui transforme B en C.

a) Justifie que l'expression complexe de $\mathcal{S}$ est : $z' = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z$.

b) Justifie que $\mathcal{S}$ est une rotation dont on précisera une mesure de l'angle.

3. Soit (E) l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que : $|z - 4i| = 2$.

a) Détermine et construis (E).

b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (E') l'image de (E) par $\mathcal{S}$.

4. Soit (F) l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que : $|z - 2| = |z - 1 - i\sqrt{3}|$.

a) Détermine et construis (F).

b) Justifie que le point O et le point K milieu du segment $[\mathrm{BC}]$ appartiennent à (F).

c) Justifie que l'image de (F) par $\mathcal{S}$ est la droite (OJ).

EXERCICE 2

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition. En l'an 2000, l'effectif était égal à mille (1 000).

L'effectif de cette population évolue par rapport au temps t et peut être approché par une fonction f. Le temps t est exprimé en années à partir de 2000. La fonction f est dérivable, strictement positive sur l'intervalle $[2000; +\infty[$ et est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_1):\ y'(t) + \frac{1}{200}y(t) = -\frac{200}{t^2} + \frac{1}{t}$$

1. Soit h la fonction dérivable et définie sur l'intervalle $\left[2000; +\infty\right[\text{par}: h(t) = \frac{200}{t}$.

Vérifie que h est une solution de (E_1).

2. Résous l'équation différentielle

$(\mathrm{E}_2): y'(t) + \frac{1}{200}y(t) = 0.$

3. a) Démontre qu'une fonction g est solution de (E_1) si et seulement si $g - h$ est solution de (E_2).

b) Déduis-en les solutions de (E_1).

c) Sachant que $f(2000) = 1000$, vérifie que :

$$\forall t \in \left[2000; +\infty\right[, f(t) = 999{,}9e^{\left(10-\frac{t}{200}\right)} + \frac{200}{t}$$

d) Détermine le nombre d'individus de cette population animale en 2020.

Donne le résultat arrondi à l'ordre 0 .

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction g dérivable et définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2 + x - 3x\ln(x)$$

1. Calcule la limite de g en 0 et la limite de g en $+\infty$.

2. a) On désigne par g', la fonction dérivée de g.

Calcule $g'(x)$ pour tout nombre réel x strictement positif.

b) Étudie les variations de g.

c) Vérifie que : $g\left(e^{-\frac{2}{3}}\right) = 2 + 3e^{-\frac{2}{3}}$.

Dresse le tableau de variation de g.

3. a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet dans l'intervalle $\left[e^{-\frac{2}{3}}; +\infty\right[$, une solution unique notée α.

b) Justifie que : $1{,}9 < \alpha < 2$.

4. Démontre que : $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur l'intervalle $]0; +\infty\left[par: f(x) = \frac{20\ln(x)}{(x+2)^3}\right.$.

'C) désigne la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 5 cm.

1. a) Calcule la limite de f en 0 .

Interprète graphiquement le résultat.

b) Justifie que la limite de f en $+\infty$ est égale à 0 .

Interprète graphiquement le résultat.

2. On note f'la fonction dérivée de f.

a). Démontre que :

$\forall x \in]0;+\infty[, \ f'(x) = \frac{20g(x)}{x(x+2)^4}$

b) Déduis-en les variations de f.

c) Dresse le tableau de variation de f. On ne calculera pas $f(\alpha)$.

3. Justifie qu'une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1 est : $y = \frac{20}{27}x - \frac{20}{27}$.

4. $\mathrm{Trace(T)}$ et $(\mathcal{C})$. On prendra $\alpha = 1{,}95$ et $f(\alpha) = 0{,}22$.

Partic C

On pose : $\mathrm{U} = \int_1^2 \frac{1}{x(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{V} = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{(x+2)^3}\,\mathrm{d}x$.

1. On admet que : $\forall x \in]0;+\infty[, \frac{1}{x(x+2)^2} = \frac{1}{4x} - \frac{1}{4(x+2)} - \frac{1}{2(x+2)^2}$

Déduis-en que : $\mathrm{U} = \frac{\ln 3}{4} - \frac{\ln 2}{4} - \frac{1}{24}$

2. a) À l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $\mathrm{V} = -\frac{\ln 2}{32} + \frac{1}{2}\mathrm{U}$.

b) Calcule en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe ($\mathcal{C}$), l'axe (OI), les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Donne le résultat arrondi à l'ordre 1.

SESSION NORMALE 2017 SERIE D

EXERCICE 1

Dans le cadre d'un recensement portant sur le nombre de travailleurs dans les champs d'hévéa, un agent recenseur a visité huit (8) exploitations. Un exploitant voudrait estimer le nombre de travailleurs que prendrait une exploitation de 16 ha d'hévéa. Pour cela l'agent recenseur a recueilli les informations consignées dans le tableau ci-dessous.

Nombre x de travailleurs	2	4	4	5	7	7	8	8
Superficie exploitée y (en ha)	3	5	6	7	10	11	8	12

1. Représente le nuage de points correspondant à la série statistique double (X, Y) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On prendra sur l'axe des abscisses 1 cm pour 1 travailleur et sur l'axe des ordonnées 1 cm pour une superficie de 1ha.

Pour les questions 2), 3), 4) et 5), les résultats seront arrondis à l'ordre 2.

2. Justifie que le point moyen a pour couple de coordonnées $(5{,}63; 7{,}75)$.

3. On note $\mathrm{V(X)}$ la variance de $\mathrm{X}, \mathrm{V(Y)}$ la variance de Y et $\mathrm{Cov(X, Y)}$ la covariance de X et Y.

Justifie que : $\mathrm{V(X)} = 4{,}18; \mathrm{V(Y)} = 8{,}44$ et $\mathrm{Cov(X, Y)} = 5{,}37$.

4. a) Calcule le coefficient de corrélation linéaire r de la série (X, Y).

b) Interprète le résultat obtenu précédemment.

5. a) Justifie qu'une équation de la droite (D) d'ajustement de Y en X par la méthode des moindres carrés est : $y = 1{,}28x + 0{,}54$.

b) Trace (D) sur le graphique précédent.

6. Utilise l'ajustement précédent pour répondre à la préoccupation de l'exploitant.

On donnera l'arrondi d'ordre zéro du résultat.

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\mathrm{direct}(\mathrm{O}; \vec{\mathrm{u}}, \vec{\mathrm{v}})$.

L'unité graphique est 2 cm.

1. Résous l'équation : $\mathrm{z} \in \mathcal{C}, \mathrm{z}^2 + (1 - 3i)\mathrm{z} - 4 = 0$.

2. On pose : $\forall \mathrm{z} \in \mathcal{C}, \mathrm{P(z)} = \mathrm{z}^3 + (1 - i)\mathrm{z}^2 + (2 + 2i)\mathrm{z} - 8i$.

a) Justifie que : $P(-2i) = 0$.

b) Détermine les nombres complexes a et b tels que : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z + 2i)(z^2 + az + b)$.

c) Déduis des questions précédentes les solutions de l'équation : $z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$.

3. Soit A, B et C les points d'affixes respectives $-2i; -2 + 2i$ et $1 + i$.

On note D le symétrique de A par rapport au point O.

a) Place les points A, B, C et D dans le plan complexe.

b) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C.

c) Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

L'unité graphique est 2 cm.

1. a) Justifie que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b) Donne une interprétation graphique du résultat obtenu précédemment

2. a) Calcule $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Donne une interprétation graphique des résultats obtenus précédemment.

3. On suppose que f est dérivable et on note f' sa fonction dérivée.

a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$.

b) Justifie que :

* $\forall x \in]-\infty; 1 - \sqrt{2}[\cup]1 + \sqrt{2}; +\infty[, f'(x) > 0$;

* $\forall x \in]1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}[, f'(x) < 0$.

c) Dresse le tableau de variation de f.

On ne calculera pas $f(1 - \sqrt{2})$ et $f(1 + \sqrt{2})$.

4. Démontre qu'une équation de la tangente (T) à (c) au point d'abscisse 0 est : $y = -x + 1$.

5. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (1 + x)e^{-x} - 1$.

a) On suppose que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note h ' sa fonction dérivée. Calcule $h'(x)$.

b) Étudie les variations de h.

c) Calcule $h(0)$ et dresse le tableau de variation de h. On ne demande pas de calculer les limites de h.

d) Justifie que : $\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \mathrm{h}(\mathrm{x}) \leq 0$.

e) Vérifie que : $\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \mathrm{f}(\mathrm{x})+\mathrm{x}-1=(1-\mathrm{x})\mathrm{h}(\mathrm{x})$.

f) Déduis des questions précédentes la position relative de (C) et (T).

6. Trace la tangente (T) et la courbe (C).

On prendra : $f(1-\sqrt{2})=1{,}3$ et $f(1+\sqrt{2})=-0{,}4$.

Partie B

Soit λ un nombre réel de l'intervalle $]1;+\infty[$ et $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations $x=1$ et $x=\lambda$.

1. Démontre, en utilisant deux intégrations par parties, que : $A(\lambda)=\left(\frac{16}{\mathrm{e}}-\frac{4(1+\lambda)^2}{\mathrm{e}^{\lambda}}\right)\mathrm{cm}^2$.

2. Détermine la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

SESSION NORMALE 2016 SERIE D

EXERCICE 1

1. On considère la fonction h dérivable et définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $h(x) = 2x - x^2$

a) Démontrer que h est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$

b) En déduire que l'image de l'intervalle $[0;1]$ par h est l'intervalle $[0;1]$

2. Soit la suite u définie par: $u_0 = \frac{3}{7}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$

a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_{n_s} < 1$

b) Démontrer que la suite U est croissante.

c) Justifier que la suite U est convergente.

3. On considère la suite V définie par: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(1 - u_n)$

a) Démontrer que V est une suite géométrique de raison 2 .

b) Exprimer V_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de la suite V.

d) En déduire la limite de la suite U.

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

(unité graphique: 2 cm).

On considère la transformation S du plan qui, à tout point M d'affixe Z, associe le point $M'd'$ affixe z' telle que : $z' = \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$

1. a) Soit Ω le point d'affixe 2. Vérifier que $S(\Omega) = \Omega$.

b) Justifier que S est une similitude directe dont on précisera les élément caractéristiques

2. a) Démontrer que $\forall z \neq 2$, $\frac{z' - z}{2 - z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) En déduire que le triangle $M\Omega M'$ est rectangle en M.

c) Donner un programme de construction de-l'image $\mathbf{M}'$ par S d'un point $\mathbf{M}$ donné. 3. a) Placer les points A et B d'affixes respectives $-1 + i$ et $5 - i$ dans le plan muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Construire les images respectives A' et B' de A et B par S.

b) On note $Z_{A'} Z_B, Z_{A'}$ et z' les affixes respectives des points A, B, A' et B'.

Démontrer que : $z_{A'} - z_A = z_B - z_{B'}$

c) En déduire la nature du quadrilatère $AA'BB'$
PROBLEME

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = -1 + (2-2x)e^{-2x+3}$ 1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

2. a) Soit g' la fonction dérivée de g.

Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (4x-6)e^{-2x+3}$

b) Etudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x

c) Justifier que : $g\left(\frac{3}{2}\right) = -2$

d) Dresser le tableau de variations de g

3. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique notée α

b) Vérifier que : $0{,}86 < \alpha < 0{,}87$

c) Justifier que : $\forall x \in]-\infty;\alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) < 0$

PARTIE B

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(0,1,J)$, funité graphique : $2\ \text{cm}$),

On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = -x + \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}$$

On note (C) la courbe représentative de f.

1. a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b.).En déduire que (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$

2. a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est asymptote à (C) en $+\infty$

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3.a) Sọit f' la fonction dérivée de f.

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$

b) En déduire les variations de f.

c) Dresser le tableau de variations de f (On ne calculera pas (α)).

4. Construire (D) et (C) sur le même graphique.

On précisera les points de (C) d'abscisses $0; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 4$.

On prendra: $\alpha = 0{,}865$ et $f(\alpha) = 0{,}4$.

5. Soit t un nombre réel strictement supérieur à $\frac{3}{2}$.

On désigne par $A(t)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C), li droite (D) et les droites d'équations $x = \frac{3}{2}$ et $x = t$.

On pose : $I_t = \int_{\frac{3}{2}}^{t} \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2x+3} dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, justifier que : $I_t = \frac{3}{4} - \frac{t}{2} e^{-2t+3}$

b) En déduire $A(t)$.

c) Calculer $\lim_{t \to +\infty} A(t)$

SESSION NORMALE 2015 SERIE D

EXERCICE 1

PARTIE I

On considère la fonction p définie sur $\mathbb{C}$ par :

$\forall z \in \mathbb{C}, p(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i$

1. a) Calculer $p(i)$

b) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que :

$p(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation: $z^2 - (3+i)z + 2 + 2i = 0$

3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $(E): p(z) = 0$.

PARTIE II

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité : 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$

On note A_n le point du plan d'affixe Z_n.

1. a) Calculer z_1 et z_2.

b) Placer les points A_0, A_1 et A_2 dans le plan complexe.

2. On considère la suite U définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = |Z_{n+1} - Z_n|$.

a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$

b) Démontrer que U est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$

c) Exprimer U_n en fonction de n.

3. On désigne par $A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$ la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n (n \in \mathbb{N}^*)$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ell n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$

a) Calculer $\ell \mathrm{n}$

b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} \ell n$.

EXERCICE 2

Mariam, une jeune diplômée sans emploi, a reçu un fonds et décide d'ouvrir un restaurant. Après un mois d'activité, elle constate que :

- pour un jour donné, la probabilité qu'il y ait une affluence de clients est 0,6 ;
- Lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,7;
- lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,4 .

On désigne par A l'évènement "il y a affluence de clients» et B l'évènement "Mariam réalise un bénéfice".

1. On choisit un jour au hasard.

a) Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « il y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice ".

b) Démontrer que la probabilité $p(B)$ de l'évènement B est 0,58 .

c) Mariam a réalisé un bénéfice.

Calculer la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour-là.

On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat.

2. Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs donnés.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où elle réalise un bénéfice sur les 3 jours successifs.

a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E(X)}$ de X.

3. Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 . On note p_n la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours.

a) Justifier que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $p_n = 1 - (0{,}42)^n$.

b) Déterminer la valeur minimale de n pour qu'on ait $p_n \geq 0{,}9999$.

PROBLEME

PARTIE A

Soit r la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $r(x) = xe^{-x}$

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = r$

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par: $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$

1. Démontrer que g est une solution de l'équation (E).

2. Soit l'équation différentielle $(F): y' + y = 0$.

a) Démontrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si φ-gest une solution de (F).

b) Résoudre l'équation différentielle (**F**).

c) En déduire la solution φ de (E) qui vérifie $\varphi(0) = -\frac{3}{2}$.

PARTIE B

On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2-3}{2}e^{-x}$
On note On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, 1, J)$, d'unités graphiques $OI = 2$ cm; $OJ = 4$ cm.

1. a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b) Démontrer que la courbe (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

2. Calculer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

3.a) Soit f' la fonction dérivée de f.

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x}$

b) Etudier les variations de f.

c) Dresser le tableau de variations de f.

4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 est : $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

5. Etudier les positions relatives de (C) par rapport à l'axe des abscisses.

6. Représenter graphiquement (T) et (C).

PARTIE C

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $\int_0^1 xe^{-x}dx$

2.a) Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.

b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f'(x) + xe^{-x}$

c) En utilisant la question précédente, calculer en cm2 l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

SESSION NORMALE 2014 SERIE D

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$.

On note B et C les points du plan d'affixes respectives $3-2i$ et $5+i$. On désigne par S la similitude directe de centre O qui transforme C en B.

1. a) Démontrer que l'écriture complexe de S est : $z'=\frac{1}{2}(1-i)z$.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

c) Déterminer l'affixe du point D qui pour image le point C par S.

2. a) Justifier que l'affixe z_1 du point B_1, image de B par S est $\frac{1}{2}(1-5i)$

b) Justifier que le triangle OBB_1 est rectangle et isocèle en B_1.

3. On définit les points suivants : $B_0=B$ et $\forall n\in\mathbb{N}, B_{n+1}=S(B_n)$

On note z_n l'affixe du point B_n

a) Démontrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}, z_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n(1-i)^n z_0$

b) Calculer la distance OB_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} OB_n$.

EXERCICE 2

Pour étudier l'évolution du nombre de bacheliers accédant aux études supérieures, le ministère du plan d'un pays a diligenté une enquête depuis l'an 2003.

Les résultats de cette enquête sont consignés dans le tableau ci-dessous.

A-ni,e	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang X de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre Y de diplômés (en milliers)	25	27	30	33	34	35	38	41	43

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique double (X,Y) dans le plan muni d'un repère orthonormé. (Unité graphique : $1\ \mathrm{cm}$).

On prendra pour origine le point $\Omega\binom{0}{24}$.

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série (X, Y).

3. Justifier que :

a) La variance de x est $\frac{20}{3}$;

b) La covariance de X et Y est $\frac{44}{3}$.
4. a) Sachant que la variance de Y est égale à $\frac{98}{3}$, déterminer la valeur dú coefficient de corrélation linéaire.

b) Justifier que ce résultat permet d'envisager un ajustement linéaire.

5. Soit (D) la droite de d'ajustement de Y en X obtenue par la méthode des moin jres carrés.

a) Déterminer une équation de (D).

b) Tracer (D).

6. On suppose que l'évolution se poursuit de la même manière au cours des années suivantes. Donner une estimation du nombre de bacheliers qui accéderont aux études supérieures en 2020.

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0,1, J)$.

L'unité graphique est le centimètre.

Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par: $gx = x + (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont des nombres réels.

Dans le plan muni du repère $(0, \mathrm{I}, J)$, on désigne par :

(C) la courbe représentative de g; (D) la droite d'équation $y = x$.

1. a) On donne : $g(0) = 1$. Déterminer la valeur de b.

b) on admet que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite (D).

Déterminer la valeur de a.

2. Soit h la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par: $h(x) = e^x - x$

a) Soit h' la dérivée de h

Calculer $h'(x)$, pour tout x élément de $\mathbb{R}$

b) Dresser la tableau de variation de h.

On ne calculera pas les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) > 0$

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x + (x+1)e^{-x}$.

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$.

b) Justifier que : $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

c) Donner une interprétation graphique de ces résultats.

2. a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Démontrer que (D) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Etudier les positions relatives de (C) et (D).

3. a) On désigne par f' la fonction dérivée de f.

Démontrer que: $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x}h(x)$.

b) Déterminer le sens de variation de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

4. Construire sur le même graphique (T), (C) et (D).

5. a) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Calculer $f^{-1}1$

c) Construire Γ la courbe représentative de f^{-1} sur le même graphique que (C).

Partie C

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_{-1}^{n} (t+1)e^{-t} dt$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = (-2-n)e^{-n} + e$

2. Calculer l'aire A_n en Cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = n$

3. Calculer $\lim_{n \to +\infty} A_n$.

SESSION NORMALE 2013 Série D

EXERCICE 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(0,1,J)$, on désigne par K, A et B les points d'affixes respectives $z_1 = 2, z_2 = 4 + 2i$ et $z_3 = 2 + 4i$.

L'unité graphique est 2 cm.

1. a. Placer les points K, A et B.

b. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.

2. On note S la similitude directe de centre K qui transforme A en B.

a. Démontrer que l'écriture complexe de S est $z' = (1 + i)z - 2i$:

b. Déterminer les affixes respectives des points I' et J', images respectives des points I et J puis placer l et I_1.

3. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle orienté de la similitude directe S.

4. Soit (C) le cercle de centre $\Omega(1; 1)$ et de rayon 2 .

a. Tracer (C).

b. Déterminer le centre et le rayon de (C'), image de (C) par S.

c. Construire (C').

5. a. Déterminer puis construire l'image par S de la droite (IJ).

On pourra caractériser l'image par S de la droite (II) par deux de ses points.

b. On désigne par E le point d'intersection de (C) et la droite (IJ) d'abscisse négative.

Placer E et l'image E' de E par S. Justifier la position du point E'.

EXERCICE 2

On considère la suite numérique (u) définie par: $u_0 = \sqrt{2}$ et pour tout nombre entier naturel $n, u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}u_n$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0,1,J)$. L'unité graphique est 2 cm.

1. Déterminer les valeurs exactes de u_1 et $\dot{u}_2$.

2. Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ et de représentation graphique ((D).
   a. $\text{Tracer}(D)$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$.

b. Placer u_0 sur l'axe (OI).

c. A l'aide de (D) et (Δ), placer les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite (u) sur l'axe (OI).

3. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, u_n \leq 4$.

b. Démontrer que la suite (u) est croissante.

c. En déduire que la suite (u) est convergente.

4. On considère la suite (v) définie par $v_n = u_n - 4$, pour tout nombre entier naturel n.

Démontrer que la suite (v) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

5. On pose, pour tout nombre entier naturel n :

$T_n = v_0 + v_1 + \cdots . + v_n$ la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (v) $S_n = u_0 + u_1 + \cdots . + u_n$ la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u)

a. Déterminer une expression de T_n en fonction de n.

b. Justifier que : $S_n = 2(\sqrt{2} - 4)\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + 4(n+1)$

c. Déterminer la limite de S_n.

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé ($\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J}$). L'unité graphique est 2 cm.

On considère la fonction f dérivable et définie sur $]-\infty; 1[$ par: $f(x) = x^2 - 1 + \ln(1-x)$

On note (C) la courbe représentative de f.

1. a. Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

b. Calculer $\lim_{x \to -} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

c. Calculer la limite de f à gauche en 1 puis donner une interprétation graphique du résultat.

2. a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\infty; \mathbb{1}[$, caculer $f'(x)$.

b. Démontrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

3. a. Démontrer que l'équation (E) $x \in]-\infty; \mathbb{1}, f(x) = 0$ admet une solution unique α.

b. Justifier que $-0{,}7 < \alpha < -0{,}6$.

4. a. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est : $y = -x - 1$.

b. On donne le tableau de valeurs suivant :

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}75$	$-0{,}5$	$-0{,}25$	0,25	0,5	0,75
arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	4,1	2,2	0,7	0,1	$-0{,}3$	$-0{,}7$	$-1{,}2$	$-1{,}4$	$-1{,}8$

Tracer (T) et (C).

On pourra faire la figure dans la partie du plan caractérisée par $\begin{cases} -3 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 6 \end{cases}$

5. On désigne par $\boldsymbol{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par (C), la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$.

a. Calculer $\int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)dx$ à l'aide d'une intégrale par parties.

b. Démontrer que la valeur de $\boldsymbol{A}$ en unités d'aire est $A = \frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)$

c. Déterminer en cm^2 l'arrondi d'ordre 2 de la valeur de $\mathbb{A}$ pour $\alpha = -0{,}65$.

6. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le plan muni du repère $(0, I, J)$.

a. Calculer $f(-1)$.

b. Démontrer que le nombre dérivé de f^{-1} en $\ln 2$ existe puis le calculer.

c. Construire la courbe (C') et sa tangente (Δ) au point d'abscisse $\ln 2$ sur la figure de la question 4b.

SESSION NORMALE 2012 Série D

EXERCICE 1

Madame Kouamé, statisticienne à la retraite, a créé une petite entreprise de fabrication de colliers traditionnels.

Dans l'intention de faire des prévisions pour la production de colliers de l'année 2011, elle a fait l'état des ventes des huit types de colliers fabriqués en 2010.

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Type de collier	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix xi de vente en centaines de francs CFA du collier de type i.	54	60	66	72	84	90	96	102
Nombre yi de dizaines de colliers vendus au prix xi	18	16	15	13	10	9	8	7

On désigne par :

X le caractère " prix de vente du collier "

Y le caractère «nombre de colliers vendus au prix X »

1. Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série statistique double de caractère (X; Y) dans le plan muni d'un repère orthogonal ($0,1,J$).

On prendra 2 cm pour 10 centaines de francs sur (OI) et 2 cm pour 2 dizaines de colliers sur (0).

2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.

3. a. Calculer la variance $V(X)$ de X.

b. Calculer la covariance $\mathrm{COV}(X;\ )$ de la série statistique double de caractère $(X;Y)$

c. On admet que $V(Y)=14{,}50$. Démontrer que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire est égal à - 0,99 .

4. Soit (D) la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.

a. Justifier que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient directeur de (D) est égal à $-0{,}23$.

b. Démontrer qu'une équation de la droite (D) est : $y=-0{,}23x+29{,}94$.

5. Pour l'année 2011, Madame Kouamé souhaite fabriquer un nouveau type de collier qu'elle vendrait à 11500 francs CFA l'unité. Combien de colliers de ce type pourrait-elle vendre selon l'ajustement linéaire réalisé

EXERCICE 2

On considère la suite numérique U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{4}{U_n}\right) \end{cases}$

1. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par: $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal ($0,1,\mathrm{J}$) où les unités respectives sur (OI) et (OJ) sont $4\ \mathrm{cm}$ et $2\ \mathrm{cm}$. La courbe (C) et la droite (D) d'équation $y = x$ sont tracées sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

a. Représenter sur l'axe des abscisses (OI) les termes U_1, U_2 et U_3 de la suite U en utilisant la courbe (C) et la droite (D).

b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la convergence de la suite U ?

2. On admet que f est continue et strictement croissante sur $[2;3]$.

a. Démontrer que $f([2;3]) \subset [2;3]$

b. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $2 \leq U_n \leq 3$

3. a. Démontrer que la suite U est décroissante.

b. En déduire que la suite U est convergente.

4. On considère la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par: $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$

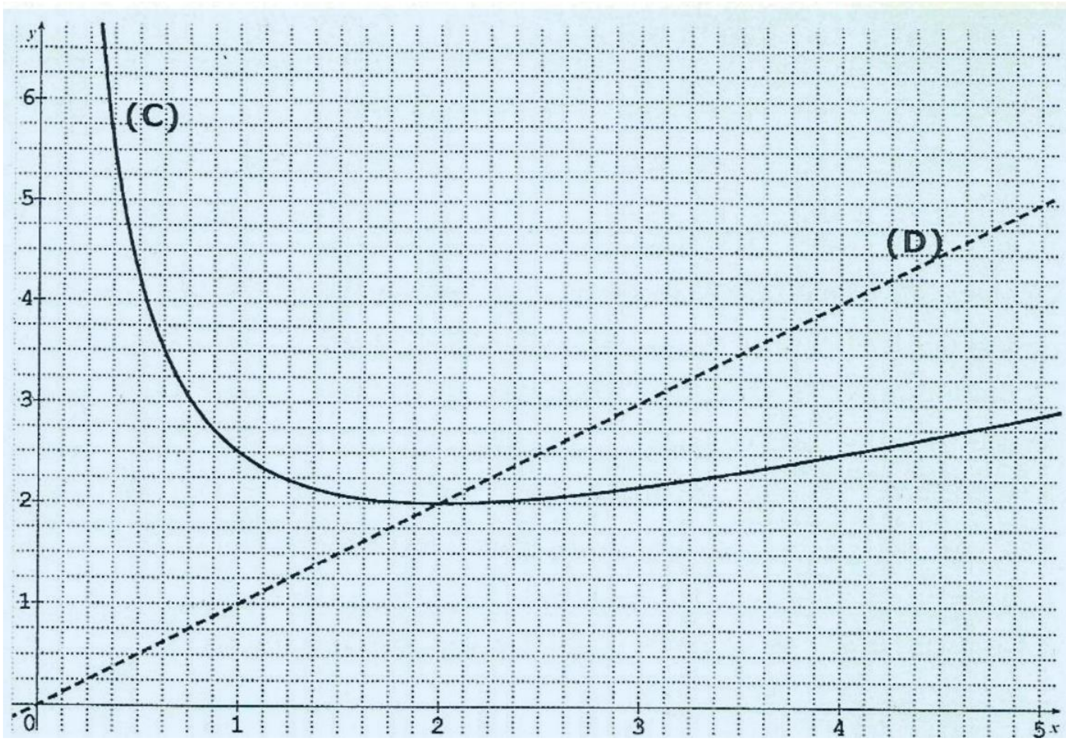
a. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1, V_{n+1} = (V_n)^2$

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1, V_n = (V_1)^{2^{n-1}}$

c. Calculer V_1 puis exprimer V_n en fonction de n.

d. Exprimer U_n en fonction de n.

e. Démontrer que $\lim V = 0$. En déduire la limite de U.



PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction g dérivable et définie sur $]0; +\infty$ I par : $g(x) = e^x + 2\ln x$

1. a. Déterminer $\lim_{x \to 0} g(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

b. Calculer $g'(x)$

c. Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

2. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$

b. Vérifier que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

c. Démontrer que !

$\forall x \in]0; \alpha[,\ g(x) < 0;$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[,\ g(x) > 0.$

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = e^x + 2x\ln x - 2x \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé

$(\mathrm{O, I, J})$. L'unité graphique est 4 cm.

1. a. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b. Interpréter graphiquement les résultats.

2. a. Démontrer que f est continue en 0 .

b. Démontrer que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$.

c. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier la réponse.

d. Interpréter graphiquement le résultat de la question 2.b.

3. On admet que f est dérivable sur $|0;+\infty|$.

a. Démontrer que : $\forall x \in |0;+\infty|, f'(x) = g(x)$.

b. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

4. Tracer la courbe (C) sur l'intervalle $[0;2]$.

(On prendra $\alpha = 0{,}45$ et on admettra que la courbe (C) coupe la droite (OI) en deux points d'abscisses respectives 0,3 et 0,6).

5. a. On pose $K = \int_1^2 x\ln x dx$.

A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $K = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

b. Soit $\mathcal{A}$ l'aire en $\mathrm{cm2}$ de la partie du plan délimitée par la courbe , la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

Calculer $\mathcal{A}$ puis donner l'arrondi d'ordre 2 du résultat.

SESSION NORMALE 2011 SERIE D

EXERCICE 1

On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$

1. a. Démontrer que la suite (v_n) est convergente après avoir déterminé sa limite.

b. Démontrer que la suite (v_n) est croissante.

c. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{3}{4} \leq v_n < 1$

2. On pose pour tout entier naturel non nul $n, a_n = v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n$

a. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a: $a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$

b. En déduire la limite de la suite (a_n).

3. On pose pour tout entier naturel n: $b_n = \ln(v_1) + \ln(v_2) + \cdots + \ln(v_n)$

a. Démontrer que (b_n) est une suite à termes négatifs.

b. Calculer la limite de la suite (b_n).

EXERCICE 2

La société « Gnamienlait » de Gnamien produit des sachets de lait caillé.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque sachet de lait caillé produit, sa masse en gramme (g). La loi de probabilité de X est définie par le tableau ci-dessous.

x_i (en g)	220	230	240	250	260	270	280
P_i	0,08	0,10	a	b	0,16	0,15	0,04

a et b sont deux nombres réels.

x_i représente la masse du sachet de lait caillé ;

P_i la probabilité qu'un sachet de lait ait la masse x_i.

1. a. Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de X en fonction de a et b.

b. Sachant que $E(X) = 250$, justifier que $a = 0{,}14$ et $b = 0{,}33$.

Dans la suite de l'exercice, on conservera les valeurs de **a** et de **b** données ci-dessus.

2. Gnamien prend au hasard un sachet de lait caillé de sa société.

Calculer la probabilité pour que la masse de ce sachet de lait caillé soit au moins de 250 g.

3. Tiéplé, la fille de Gnamien, prend au hasard. et de façon indépendante cinq sachets de lait caillé.

Calculer la probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220 g.

On prendra l'arrondi d'ordre 3 du résultat.

4. Les sachets de lait caillé sont contrôlés par une machine.

Cette machine est réglée pour éliminer en principe les sachets de lait de masse inférieure à 250 g.

- Si un sachet de lait caillé a 240 g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,7.
- Si un sachet de lait caillé a 230 g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,8.
- Si un sachet de lait caillé a 220 g, il est systématiquement éliminé.
- Si un sachet de lait caillé a une masse supérieure ou égale à 250 g, il est systématiquement accepté.

a. Justifier que la probabilité qu'un sachet de lait caillé de 240 g soit éliminé est de 0,098 .

b. Calculer la probabilité pour qu'un sachet de lait caillé de cette société soit éliminé.

PROBLEME

Partie H

Soit la fonction numérique dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x$

1. a. Calculer $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

b. Calculer $\lim_{x \to 0} g(x)$

2. a. Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$

b. En déduire le sens de variation de g.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3. a. Démontrer que l'équation $x \in]0;+\infty[, g(x) = 0$ admet une solution unique α.

b. Justifier que $2{,}55 < \alpha < 2{,}56$.

c. Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in]0;\alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

On considère la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par: $f(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) e^{-x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(0,1,J)$. (Unités graphiques: $OI = 2$ cm et $0J = 10$ cm).

1. a. Calculer $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

b. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

2. Démontrer que : $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha}$

3. a. Démontrer que : $\forall x \in |0; +\infty|, f'(x) = e^{-x} \cdot g(x)$

b. En utilisant la partie A, déterminer les variations de f.

c. Dresser le tableau de variation de f.

4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est: $y = -\frac{3}{e} x + \frac{4}{e}$.

5. Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère $(0{,}1, \mathrm{J})$. On prendra $\alpha = 2{,}6$.

Partie C

1. Soit h la fonction dérivable sur $]0; +\infty$ [et définie par: $h(x) = e^{-x} \cdot \ln x$ Démontrer que h est une primitive de f sur $|0; +\infty|$.

2. Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 3$.

a. Calculer, en cm^2 et en fonction de λ, l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (C), (OI) et les droites d'équation $x = 3$ et $x = \lambda$.

b. Calculer $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$

SESSION NORMALE 2010 SERIE D

EXERCICE 1

Partie A

On considère dans $\mathbb{C}$:I'équation: ((E): $4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4 = 0$.

1. Déterminer les racines carrées de $6 + 6i\sqrt{3}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$: I'équation $2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$.

3. a. Développer, réduire et ordonner $(2z + 1)\left[2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4\right]$

b. En déduire les solutions de (E).

4. Soit $z_0 = -\frac{1}{2}; z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

Exprimer chacun des nombres complexes $z_0; z_1$ et z_2 sous forme trigonométrique.

Partie B

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ où l'unité est $1\ \mathrm{cm}$, on considère les points $M_{(0}, M_1$ et M_2 d'affixes respectives $-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; I + \sqrt{3}i$

S est la similitude directe de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2 .

1. a. Déterminer l'écriture complexe de S.

b. Justifier que $S(M_0) = M_1$ et $S(M_1) = M_2$.

2. Soit M_n un point du plan d'affixe z_n.

On pose pour tout nombre entier naturel $n, M_{n+1} = S(M_n)$

Justifier que $z_{n+1} = (1 - \sqrt{3}i)z_n$ où z_{n+1} est l'affixe de M_{n+1}

3. On considère la suite U_n définie pour tout entier naturel n par $U_n = |z_n|$

a. Démontrer que U_n est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b. Justifier que la distance $OM_{12} = 2048$.

EXERCICE 2

On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé.

Pour cela, 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie.

Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8 .

On ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre.

1. Calculer la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament.

2. Démontrer que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est 0,52 .

3. On soumet au test un individu pris au hasard.

Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie.

4. On contrôle 5 individus au hasard.

a. Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé.

b. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé.

5. On contrôle n individus pris au hasard. (est un entier naturel non nul).

Déterminer n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieur à 0,98 .

PROBLEME

Partie A

Soit la fonction g dérivable sur $]0;+\infty$ I et définie par: $g(x)=1+x\ln x$.

1. a. Justifier que: $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x)=1+\ln x$.

b. Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.

(On ne calculera pas les limites de)

2. En déduire que: $\forall x \in]0;+\infty[, g(x)>0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=\frac{x}{1+x\ln x} \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0,1,\mathrm{J})$. (Unité: $4\ \mathrm{cm}$).

1. a. Étudier la continuité de f en 0.

b. Étudier la dérivabilité de f en 0 .

c. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point O est : $y=x$.

d. Démontrer que :

(C) est au-dessus de (T) sur $]0;1[$

(C) est au-dessous de (T) sur $]1;+\infty[$.

2. Démontrer que la droite (OI) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

3. a. On suppose que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Démontrer que: $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \frac{1-x}{(1+x\ln x)^2}$

b. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.

4. Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère $(0,1, J)$.

Partie C

1. a. Justifier que: $\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) \leq 1$.

b. Démontrer que: $\forall x \in [1;e],\ 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$.

2. Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Démontrer que : $16(e-1) + 16\ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e-1)$

SESSION NORMALE 2009 SERIE D

EXERCICE 1

L'entreprise Ivoirbois, spécialisée dans l'industrie du bois, envisage de faire des prévisions pour l'année 2007 du coût de production de feuilles de contre-plaqués en fonction du chiffre d'affaires.

Elle dispose à cet effet des statistiques résumées dans le tableau ci-dessous :

Années	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Chiffre d'affaires X (en millions de francs)	350	380	500	450	580	650	700
Coût de production Y (en millions de francs)	40	45	50	55	60	65	70

1. Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série double (X, Y) dans le plan rapporté à un repère orthogonal ($0,1, \mathrm{J}$).

On prendra $1 \mathrm{~cm}$ pour 50 millions de francs en abscisse et $1 \mathrm{~cm}$ pour 5 millions de francs en ordonnées.

2. a. Calculer le chiffre d'affaires moyen $\bar{X}$.

b. Calculer le coût moyen de production $\bar{Y}$.

3. a. Vérifier qu'un arrondi à l'entier de la covariance $\operatorname{cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ de la série statistique est égal à 1193.

b. Justifier l'existence d'un ajustement linéaire entre X et Y.

4. a. Déterminer une équation de la droite (D) d'ajustement de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés.

b. Construire (D) dans le repère $(0,1, J)$.

5. Utiliser l'ajustement précédent pour prévoir le coût de production de l'entreprise Ivoirbois de l'année 2007 si le chiffre d'affaires de l'année 2007 est de 800 millions de francs.

EXERCICE 2

Soit la suite définie $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{3}{5} U_n + 1 \end{cases}$

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0, I, J)$, représenter sur l'axe des abscisses les termes $U_0; U_1; U_2$ et U_3 de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (unité graphique $2 \mathrm{~cm}$).

2. a. Démontrer par récurrence que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{5}{2}$.

b. Démontrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3. Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - \frac{5}{2}$

a. Démontrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1$

1. a. Justifier que la limite de g en $+\infty$ est -1 .

b. Déterminer la limite de g en $-\infty$.

2. a. Démontrer que, pour tout x élément de $\mathbb{R}, g'(x) = (x-2)e^{1-x}$.

b. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3. a. Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une solution unique α.

b. Justifier que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

5. En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0; \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0. \end{cases}$

PARTIE B

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$ On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0,1,J)$. L'unité graphique est 2 cm.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. a. Démontrer que f est une primitive de g.

b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. a. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

b. Etudier la position relative de (D) et (C).

4. Démontrer que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

5. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

6. Démontrer que $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$

7. Justifier que, pour tout nombre réel $x, f(-x+2) = e^{x-1} f(x)$

8. On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

On appelle β l'une de ces solutions.

Démontrer que $-\beta + 2$ est l'autre solution.

9. Tracer (D), (T) et (C). (On prendra $\alpha = 0{,}4$ et $= 2{,}5$).

PARTIE C

Soit λ un nombre réel strictement positif et $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C), la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$

1. Calculer $A(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.

2. Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

SESSION NORMALE 2008 SERIE D

EXERCICE 1

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

On considère l'équation (E) : $Z \in \mathbb{C}, Z^3 + (6-5i)Z^2 + (1-20i)Z - 14 - 5i = 0$

1. a. Vérifier que i est une solution de l'équation (E).

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 + (6-4i)Z_+ + 5 - 14i = 0$

c. Résoudre à l'aide des questions qui précèdent l'équation (E).

2. On considère les points A, B et D d'affixes respectives $u = i$; $v = -2+3i$ et $t = -4+i$.

a. Placer les points A, B et D dans le repère.

b. Ecrire le nombre complexe $Z = \frac{u-v}{t-v}$ sous forme trigonométrique.

c. En déduire que le triangle ABD est rectangle isocèle en B.

3. Soit S la similitude directe de centre A qui transforme D en B. B' est l'image de B par S.

a. Justifier que le triangle ABB' est rectangle isocèle en B'.

b. En déduire la construction du point B_1.

4. a. Déterminer l'écriture complexe de S.

b. Calculer l'affixe de B_1.

EXERCICE 2

Le tableau ci-dessous donne les notes sur 20 obtenues en mathématiques et en sciences physiques par huit candidats de la série D au baccalauréat 2005.

X_i est la note de mathématiques, Y_i la note en sciences physiques.

$\mathrm{X_i}$	4	6	7	9	11	14	12	17
$\mathrm{Y_i}$	3	4	6	8	10	12	9	14

1. Représenter graphiquement le nuage de points associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthonormé ($0,1, \mathrm{J}$). L'unité graphique est $1 \mathrm{~cm}$.

2. Calculer les cordonnées du point moyen G du nuage puis le placer dans le repère.

3. a. Vérifier que la covariance $\operatorname{cov}(X, Y)$ de la série statistique est égale à $\frac{57}{4}$

b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

4. Démontrer qu'une équation de la droite (D) de régression de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés est : $Y = \frac{19}{22}X - \frac{17}{44}$

5. Sur la base de l'ajustement linéaire ainsi réalisé, calculer la note probable de mathématiques d'un candidat qui a obtenu 15 sur 20 en sciences physiques.

PROBLEME

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction f dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par $f(x) = 2x - 3 + \frac{\ln x}{x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé $(0, I, J)$. L'unité graphique est 2 cm.

PARTIE A

Soit g la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par: $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$.

1. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.

(On ne demande pas de calculer les limites).

2. Justifier que : $\forall x \in]0; +\infty[,\ g(x) > 0$.

PARTIE B

1. a. Calculer la limite de f en $+\infty$.

b. Déterminer $\lim_{x \to 0} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat.

2. a. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 3$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

b. Préciser la position de (C) par rapport à (D).

3. a. Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif $x, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

c. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est : $y = 3x - 4$.

4. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

b. Justifier que : $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$.

PARTIE C

On pose $\varphi(x) = f(x) - (3x - 4)$ et $h(x) = -x^2 + 1 - \ln x$

1. a. Déterminer le sens de variation de h sur $]0; +\infty[$.

b. Calculer $h(1)$ puis justifier que : $\forall x \in]0;1[, h(x) > 0$ et $\forall x \in];+\infty[, h(x) < 0$.

2. a. Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[, \varphi'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$

b. Etudier les variations de φ puis en déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

c. Déterminer la position de (C) par rapport à la tangente (T).

PARTIE D

1. Tracer la courbe (C), la droite (D) et la tangente (T). On prendra $\alpha = 1{,}35$

2. Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

SESSION NORMALE 2007 SERIE D

EXERCICE 1

On considère les suites U_n et V_n définies par: $U_0 = 4$ et $V_0 = 9$ et pour tout entier naturel n: $U_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n}$ et $V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + V_n)$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $\mathrm{n}, U_n > 0$ et $V_n > 0$.

2. a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(V_n-U_n)^2}{2(U_n+V_n)}$

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$ et que :

$$V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$$

c. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n - U_n \leq \frac{5}{2^n}$

3. a. Démontrer que la suite U_n est croissante et que la suite V_n est décroissante

b. En déduire que les suites U_n et V_n convergent.

c. Démontrer que les suites U_n et V_n ont la même limite ℓ

4. a. Démontrer que pour tout entier naturel $\mathrm{n}, U_{n+1} \cdot V_{n+1} = U_n \cdot V_n$

b. En déduire la valeur exacte de ℓ.

EXERCICE 2

Une population d'élèves comportant 40% de bacheliers a subi un test de recrutement en première année d'une grande école.

Ce test a donné les résultats suivants : $\begin{cases} 75\% \text{ des bacheliers sont admis} \\ 52\% \text{ des non bacheliers sont admis} \end{cases}$

PARTIE A

On choisit au hasard un élève de la population. On note :

B l'évènement : « l'élève est bachelier ";

T l'évènement : «l'élève est admis au test»;

A l'évènement : « l'élève est bachelier et est admis au test ».

1. Préciser chacune des probabilités suivantes:

a. La probabilité $P(B)$ de l'évènement B;

b. La probabilité $P_B(T)$ de T sachant que B-est réalisé;

c. La probabilité $P_{\bar{B}}(T)$ sachant que B n'est pas réalisé.

2. Démontrer que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,3 .
3. Calculer la probabilité de l'évènement T.
4. Déduire des questions précédentes que les évènements B et T ne sont pas indépendants.
5. Démontrer que la probabilité pour qu'un élève admis au test soit bachelier est $\frac{25}{51}$.

PARTIE B

On choisit au hasard 5 élèves de la population étudiée.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'étudiants bacheliers et admis au test parmi les 5 choisis.

1. Démontrer que la probabilité pour que 3 seulement des 5 élèves choisis soient bacheliers et admis au test est égale à 0,1323 .
2. Calculer l'espérance mathématique de X.

PROBLEME

L'objet de ce problème est l'étude de chacune des fonctions f, g et h ci-dessous.

- f est la fonction dérivable sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ et définie par : $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$
- g est la fonction définie sur l'ensemble $D_g=\left[0;\frac{1}{e}\right] \cup \frac{1}{e};+\infty$ I par: $g(x)=f(\ln x)$ et $g(0)=1$
- h est la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par: $h(x)=f(e^x)$.

PARTIE A

1. Démontrer que :
   a. $\forall x \in D_g$ et $x \neq 0, g(x)=1-\frac{4}{\ln x+1}$;
   b. $\forall x \in \mathbb{R}, h(x)=1-\frac{4}{e^x+1}$.
2. a. Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Déterminer $\lim_{x\to-1} f(x)$ et $\lim_{x\to-1} f(x)$.

3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

PARTIE B

On note $\left(C_g\right)$ la courbe représentative de g dans le plan muni du repère orthogonal $R_1=(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$. L'unité sur (O) est $1 \mathrm{~cm}$ et sur (O) est $2 \mathrm{~cm}$.

1. a. Démontrer que g est continue en 0 .

b. Démontrer que $\left(C_g\right)$ admet une demi -tangente verticale au point d'abscisse 0 .

2. a. Déterminer $x \rightarrow+\infty$ résultat.

b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow e}^{<} e_{e} \underset{x \rightarrow e}{>} {}_{>} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

3. Démontrer que g est strictement croissante puis dresser son tableau de variation.

4. $\operatorname{Tracer}\left(C_g\right)$ et ses asymptotes dans le repère R_1.

PARTIE C

On note $\left(C_h\right)$ la courbe représentative de h dans le plan muni du repère orthogonal $R_2=(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

L'unité graphique est $1 \mathrm{~cm}$.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow-\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow+\infty} h(x)$, puis interpréter graphiquement les résultats.

2. Démontrer que, pour tout nombre réel $x, h^{\prime}(x)=\frac{4 e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$

3. En déduire les variations de h puis dresser son tableau de variation.

4. On note A et B les points d'intersection respectifs de $\left(C_h\right)$ avec les droites (OI) et (OJ).

a. Déterminer les coordonnées de chacun des points A et B.

b. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à $\left(C_h\right)$ en B est $y=x-1$

c. Démontrer que B est un centre de symétrie de $\left(C_h\right)$.

5. a. Démontrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.

b. Déterminer l'expression explicite de la bijection réciproque h^{-1} de h.

6. a. $\operatorname{Tracer}(T),\left(C_h\right)$ et ses asymptotes dans le repère R_2.

b. En déduire la représentation graphique Γ de la fonction h^{-1} dans le repère R_2.

SESSION NORMALE 2006 SERIE D

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé ($0, \mathrm{I}, \mathrm{J}$). L'unité est le centimètre. Soit A, B et C trois points d'affixes respectives Z_A, Z_B et Z_C tels que $Z_A = 2 + 6i; Z_B = 4 + 2i; Z_C = 6i$.

1. Placer les points A, B et C dans le plan.

2. a. Déterminer la forme algébrique de $Z = \frac{Z_O - Z_A}{Z_B - Z_A}$ où Z_O est l'affixe du point 0.

b. Ecrire Z sous forme trigonométrique.

c. Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overline{AB}, \overline{AO})$.

3. Soit r la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

a. Déterminer l'écriture complexe de r.

b. Déterminer l'image de O par r.

c. En déduire que le triangle OAB est rectangle et isocèle en B.

4. a. Déterminer le centre et le rayon du cercle (C) circonscrit au triangle OAB. Construire (C).

b. Démontrer que les points O, A, B et C appartiennent à un même cercle.

EXERCICE 2

Une banque dispose de guichets automatiques où certains clients peuvent faire des retraits d'argent à l'aide d'une carte magnétique.

Chaque carte magnétique a un code secret connu seulement du titulaire de la carte.

Ce code secret est une suite de quatre chiffres du système décimal.

Exemples de codes $0375; 9918; 2400$.

Les deux parties A) et B) suivantes sont indépendantes.

PARTIE A

1. Combien de cartes magnétiques la banque peut-elle distribuer à ses clients ?

2. Démontrer que la probabilité pour que le code d'une carte magnétique commence par 0 est égale à $\frac{1}{10}$.

3. Calculer la probabilité pour que le code d'une carte magnétique soit composée des chiffres $2; 4; 5; 7$.

PARTIE B

Monsieur KONE, un client de la banque, titulaire d'une carte magnétique a oublié son code.

Son épouse lui rappelle que celui-ci comporte les chiffres $2; 4; 5; 7$.

Il décide alors de tenter sa chance au guichet automatique.

Les guichets automatiques sont équipés de mémoires leur permettant de confisquer une carte après trois essais infructueux successifs.

Monsieur KONE joue la prudence et s'impose deux essais au maximum.

1. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a. E : «Monsieur KONE réussit à retirer de l'argent au premier essai»

b. F : «Monsieur KONE échoue au premier essai et réussit au deuxième essai».

2. Soit G l'évènement : «Monsieur KONE retire de l'argent ».

Démontrer que la probabilité de G est égale à $\frac{1}{12}$.

3. De retour à la maison, Monsieur KONE annonce fièrement à son épouse qu'il a pu retirer de l'argent au guichet automatique.

Calculer la probabilité qu'il ait effectué le retrait au premier essai.

4. La banque prélève une taxe pour chaque essai de retrait au guichet automatique. Cette taxe s'élève à 30 francs par essai fructueux et à 60 francs par essai infructueux.

X désigne la variable aléatoire qui détermine la tave totale à payer sur l'ensemble des essais faits par Monsieur KONE.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Démontrer que l'espérance mathématique de X est égale à 115 francs.

PROBLEME

PARTIE A

Soit la fonction g dérivable et définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - \ln x - 1$.

1. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2. Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif $x, g'(x) = \frac{2x^2-1}{x}$

3. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

4. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions sur $]0; +\infty[$.

b. On désigne par α la plus petite des solutions. Démontrer que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

c. Calculer $g(1)$.

d. En déduire que, pour tout nombre réel strictement positif x :

$$\begin{cases} \text{si} \quad x \in]0;\alpha| \cup |;+\infty | & \text{alors } g(x) > 0 \\ \text{si} \quad x \in |\alpha;1| & \text{alors } g(x) < 0 \end{cases}$$

PARTIE B

Soit f la fonction dérivable et définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$ On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(0, \mathrm{I}, J)$. L'unité est 4 cm sur (OI) et 2 cm sur (OJ).

1. a. Déterminer la limite de f en 0 . Donner une interprétation graphique du résultat.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif $\mathrm{x}, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

3. a. Démontrer que $f(\alpha) = 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$.

b. Etudier les variations de f et d'resser son tableau de variation.

4. Démontrer que la droite (D) d'équation $\mathrm{y} = \mathrm{x}$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

5. Etudier la position de (D) par rapport à (C).

6. Tracer (D) et (C). On prendra $\alpha = 0{,}45$ et $f(\alpha) = 3{,}1$

7. Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C), (D) et les droites d'équations respectives $x = e^{-2}$ et $x = 1$.

Calculer A.

SESSION NORMALE 2005 SERIE D

EXERCICE 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

L'unité est le centimètre.

On donne le point A d'affixe i.

Soit Γ l'ensemble des points M du plan d'affixe Z vérifiant | $(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i=6$

1. a. Démontrer qu'un point M appartient à Γ si et seulement si son affixe z vérifie: $|z-i|=3$

b. En déduire la nature de Γ.

2. On considère les points B et C d'affixes respectives $\sqrt{3}$ et $-4i$.

L'application S est la similitude directe qui applique A sur O et B sur C.

Soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z ' l'image de M par S.

a. Démontrer que : $z'=(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i$

b. Déterminer les éléments caractéristiques de S. On notera E son centre.

3. On désigne par (C) l'image de Γ par S.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (C).

b. Construire (C) et Γ.

4. Soit D le point tel que : $D\in[EB]$ et $ED=2EB$

a. Construire les points D et E dans le même repère.

b. Démontrer que le triangle ECD est équilatéral.

c. Calculer l'affixe de D.

5. Soit r la rotation de centre E qui transforme C en D.

Déterminer l'écriture complexe de r.

PARTIE A

Soit la fonction définie de $\{2;+\infty$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{6x^2+22x+20}{x^2+5x+6}$

1. Calculer $f(2)$ puis $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

2. Démontrer que : $\forall x\in\Big[2;+\infty\Big|, f(x)=6-\frac{8x+16}{x^2+5x+6}$

3. a. Démontrer que : $\forall x \in 2; +\infty, f'(x) = \frac{8(x+2)^2}{(x^2+5x+6)^2}$

b. Dresser le tableau de variation de f.

PARTIE B

Une urne contient :

- un jeton marqué 1 ,
- deux jetons marqués 2
- et n jetons marqués 3 ;

n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On tire simultanément deux jetons de l'urne.

On suppose que les tirages sont équiprobables.

On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués sur les deux jetons extraits de l'urne.

1. a. Exprimer en fonction de n les valeurs prises par X.

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Soit $E(X)$ l'espérance mathématique de X.

a. Démontrer que $E(X) = \frac{6n^2+22n+20}{n^2+5n+6}$

b. Déterminer n pour que $E(X)$ soit égale à 5 .

c. Déduire de la partie A que : $4{,}4 \leq E(X) \leq 6$.

Donner une interprétation de cet encadrement.

PROBLEME
PARTIE A
Soit g la fonction dérivable sur $]0; +\infty$ et définie par: $g(x) = \frac{2}{3}x^3 + 1 - 2\ln x$.

1. a. Démontrer que : $\forall x \in 0; +\infty \Big[, g'(x) = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x}$.

b. Déterminer le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.

c. En déduire les variations de g.

2. a. Dresser le tableau de variation de g.

b. Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$.

PARTIE B

Soit f la fonction dérivable sur $\int 0; +\infty$ et définie par: $f(x) = \frac{2}{3}x - 1 + \frac{\ln x}{x^2}$.

On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$. L'unité graphique est $2\ \mathrm{cm}$.

1. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. En déduire que (C) admet une asymptote verticale.

2. a. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{2}{3}x - 1$ est une asymptote oblique à (C).

b. Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3. a. Démontrer que : $\forall x \in 0; +\infty, f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

b. Déterminer les variations de f. (On pourra utiliser A.2.b)

c. Dresser le tableau de variation de f.

4. a. Démontrer que l'équation: $x \in 0; +\infty[, f(x) = 0$ admet une solution unique α.

b. Démontrer que : $1{,}15 < \alpha < 1{,}3$

c. Construire (D) et (C) dans le même repère. (On prendra $= 1{,}2$).

5. λ est un nombre réel strictement supérieur à 1.

$A(\lambda)$ désigne l'aire de la partie du plan limitée $\mathrm{par}(D), (C)$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \lambda$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $A(\lambda)$.

b. Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque tend vers $+\infty$.

SESSION NORMALE 2004 SERIE D

EXERCICE 1

Le chargement d'un camion remorque est composé de 60 sacs identiques dont 10 contiennent un produit non déclaré aux services de la douane.

Le trajet à parcourir comporte trois barrages de douane.

A chacun de ces barrages, le contrôle, obligatoire, consiste à examiner le contenu de 5 sacs choisis au hasard (les contrôles effectués aux différents barrages sont indépendants).

I. Le camionneur arrive à un barrage donné.

(On donnera un arrondi d'ordre 1 de chacun des résultats obtenus).

1. Calculer la probabilité pour qu'exactement 2 des 5 sacs contrôlés contiennent le produit non déclaré.

2. Démontrer que la probabilité pour que l'un au moins des 5 sacs contrôlés contienne le produit non déclaré est égale à 0,6 .

II. Le camionneur sait que si l'un au moins des sacs du produit non déclaré est découvert à un barrage quelconque, il doit payer une taxe forfaitaire de 10 000F (dix mille francs) à ce barrage pour être autorisé à continuer son chemin avec tout son chargement.

Si le camionneur ne peut pas payer la taxe forfaitaire, tout son chargement est saisi.

1. On suppose que le camionneur paie la taxe chaque fois que le produit non déclaré est découvert.

On note X la variable aléatoire égale à la somme totale que le camionneur peut ainsi dépenser sur l'ensemble de son trajet.

a. Déterminer la loi de probabilité de $\mathbf{X}$.

b. Démontrer que l'espérance mathématique est égale à 18000 F.

2. On suppose que le camionneur n'a pas d'argent pour payer une éventuelle taxe. Calculer la probabilité pour que son chargement soit saisi.

EXERCICE 2

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(0,1, J)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives Z_A, Z_B et Z_C telles que :

$Z_A = 4i, Z_B = 2\sqrt{3} + 2i$ et $Z_C = -2\sqrt{3} + 2i$.

1. Déterminer le module et l'argument principal de chacun des nombres complexes Z_A, Z_B et Z_C

2. Utiliser les résultats précédents pour placer les points A, B et C.

Unité graphique : 1 cm.

3. Démontrer que le triangle OBA est équilatéral.

4. Démontrer que le quadrilatère $OBAC$ est un losange.

5. On désigne par K le milieu du segment [OA] et par S la similitude directe de centre O qui transforme B en K.

a. Déterminer l'écriture complexe de S.

b. Calculer l'affixe de l'image par S du point L milieu du segment [AC].

c. En déduire que l'image par S de la médiatrice du segment [AC] est la droite (OI).

PROBLEME

PARTIE A

On donne la fonction P définie par: $P(x) = e^{2x} - 5e^{x} + 4$.

1. Résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R}, P(x) = 0$.

2. Démontrer que : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup] \ln 4; +\infty[, P(x) > 0.$ $\quad \forall x \in]0; \ln 4[,\ P(x) < 0$

PARTIE B

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + \frac{1}{e^{x}-2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé ($\mathrm{O, I, J}$).
Unité : 2 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Calculer les limites de f en $+\infty$; en $-\infty$; à gauche et à droite en $\ln 2$.

3. On admet que f est dérivable en tout point de son ensemble de définition et on note f' sa dérivée.

a. Vérifier que : $\forall x \in]-\infty; \ln 2[\cup]\ln 2; +\infty\Big[,\ f'(x) = \frac{P(x)}{(e^{x}-2)^{2}}$

b. Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

c. Dresser le tableau de variation de f.

4. Démontrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

5. Etudier la position de (C) par rapport à (D) sur l'intervalle $\ln 2; +\infty[$.

6. Démontrer que : $\forall x \in |-\infty; \ln 2| \cup| \ln 2; +\infty\Big[, f(x) = x - \frac{3}{2} + \frac{e^{x}}{2(e^{x}-2)}.$

7. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

8. Etudier la position de (C) par rapport à (Δ) sur l'intervalle $]-\infty; \ln 2[$.

9. Construire (C).

PARTIE C

Soit λ un nombre réel strictement négatif.

1. Exprimer en fonction de λ, l'aire $A(\lambda)$ en cm^2 de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (OJ), la droite (Δ) et la droite d'équation $x = \lambda$.

2. a. Calculer la limite A de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $-\infty$.

b. Hachurer, sur la figure, la partie du plan dont l'aire est égale à A.

EXERCICE 1

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{4}x+3$.

Soit u la suite définie par : $u_0=-4$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) Calculer u_1

2) Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (Unité 2cm).

a)Tracer les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $y=x$ et $y=\frac{1}{4}x+3$.

b)Utiliser (D) et (Δ) pour placer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4.

(*On laissera les traits de construction en pointillés sur le dessin).*

c)Que peut-on conjecturer quant à la convergence de la suite u ?

3-a)Démontrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n<4$.

b) Démontrer que la suite u est strictement croissante.

c)La suite u est-elle convergente ? Justifier.

4)On pose : pour tout entier naturel non nul n, $v_n=u_n-4$

a)Démontrer que v est une suite géométrique .Donner son premier terme et sa raison.

b) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n=\frac{-2}{4^{n-1}}$.

c)Détermine la limite de la suite v.

d)En déduire la limite de la suite u.

5-a)Exprimer u_n en fonction de n.

b) Trouver une valeur de l'entier naturel k telle que $|u_k-4|<10^{-10}$.

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni du repère orthonormé (O,I,J), (unité ;2cm).

1) On considère l'équation : $(E): z\in\mathbb{C},\ z^3-2iz^2+4(1+i)z+16+16i=0$.

Vérifier que $\forall z\in\mathbb{C},\ z^3-2iz^2+4(1+i)z+16+16i=(z+2)\left[z^2-2(1+i)z+8(1+i)\right]$.

2-a)Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-8-6i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E_1): z\in\mathbb{C},\ z^2-2(1+i)z+8(1+i)=0$.

c) En déduire les solutions de l'équation (E).

3)Soit A, B et C les points d'affixes respectives -2; $4i$ et $2-2i$.

a)Faire une figure .

b)Soit K le milieu [BC], on considère la similitude directe S de centre A, qui transforme B en K. Déterminer et construire l'image (C') du cercle (C) dd diamètre [AB] par S.

c)Déterminer l'écriture complexe de S.

d) Déterminer l'angle et le rapport de S.

PROBLEME

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{e^x-2}{e^x-2x}$.

Soit (Γ) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthogonal (O,I,J). (OI=2cm et OJ=4cm).

1-a)On considère la fonction u dérivable et définie par : $u(x)=e^x-2x$.

En utilisant le sens de variation de la fonction u, démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x - 2x > 0$.

b) En déduire l'ensemble de définition de f.

c)Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

d) Donner une interprétation graphique des résultats précédents.

2) Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = (2-x)e^x - 2$.

a)Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (1-x)e^x$.

b) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

c)Dresser le tableau de variation de g.

d) Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α, appartenant à l'intervalle $[1;+\infty[$.

e)Calculer $g(0)$ et démontrer que :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty;0[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]0;\alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$$

3-a)Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{2g(x)}{(e^x - 2x)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4-a)Démontrer, en utilisant **2.d**, que : $e^\alpha = \dfrac{2}{2-\alpha}$.

En déduire un encadrement de α par deux entiers consécutifs.

b) Déduire de la question précédente que : $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

c)On admet que 1,60 est la valeur de α à 10^{-2} près par excès.

Démontre que 1,68 est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 2.10^{-2} près.

d) Construire (Γ).

5) Soit (E), la partie du plan limitée par les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=\alpha$, la courbe (Γ) et l'axe des abscisses.

Démontrer que l'aire en cm^2 de (E) est égale à $8\ln\left[\dfrac{2(\alpha-1)^2}{(2-\alpha)(e-2)}\right]$.

SESSION NORMALE 2003 SERIE D

EXERCICE 1

1)Un dé A , bien équilibré possède:

•Une face numérotée 1 ;
•deux faces numérotées 2 ;
•une face numérotée 4 ;
•une face numérotée 5 ;
•une face numérotée 6.

a)On lance une fois le dé A et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. Quelle est la probabilité d'obtenir le numéro 2 ?

b) On lance 3 fois de suite le dé et on note de la gauche vers la droite les chiffres obtenus successivement. On obtient ainsi un nombre de trois chiffres.
Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 421 ?

2) Un autre dé B , bien équilibré , possède :

•un face numérotée 1 ;
•deux faces numérotées 2 ;
•deux faces numérotées 4 ;
•une face numérotée 6 ;

On lance 3 fois de suite le dé B comme à la question **1.b**.
Vérifier que la probabilité d'obtenir 421 est à $\frac{1}{54}$.

3)Une urne contient 4 dés identiques au dé A et 6 dés identiques au dé B.
Egny tire au hasard un dé de l'urne et le lance 3 fois de suite pour obtenir un nombre à 3 chiffres comme décrit précédemment.

a)Démontrer que la probabilité d'obtenir 421 est égale à $\frac{2}{135}$.

b)Egny a obtenu 421 ; calculer la probabilité qu'il ait joué avec un dé de type A.

EXERCICE 2

Soit a un nombre réel donné. On considère les suites (U) et (V) définies respectivement par ;

•$U_0 = a$, $U_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+2} = \frac{1}{2}(a+1)^2 U_{n+1} + (a-2)U_n$.

•$\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = U_{n+1} - U_n$

I) On pose : $a = 1$

1) Démontrer que la suite (V) est constante et donner sa valeur.

2)En déduire que (U) est une suite arithmétique dont la raison est égale à 2.

3)On pose : $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$.

Exprimer U_n puis S_n en fonction de n.

II) On pose $a = -5$.

1) Démontrer que (V) est une suite géométrique dont la raison est égale à 7.

2) Exprimer V_n en fonction de n.

3) Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 , exprimer en fonction de n la somme T_n où $T_n = V_0 + V_1 + ... + V_{n-1}$.

4) Exprimer U_n en fonction de T_n.

5) En déduire que la suite (U) est divergente.

PROBLEME

PARTIE A

Soit h la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = 3 + (x-1)e^{-x}$.

1) Calculer les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Démontrer que, pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $h'(x) = (2-x)e^{-x}$.

3)Etudier les variations de h et dresser son tableau de variation.

4-a)Démontrer que sur l'intervalle $]-\infty;2]$, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α .

b)Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.

5)En déduire que , pour tout nombre réel x ;

Si $x < \alpha$, alors $h(x) < 0$.

Si $x > \alpha$, alors $h(x) > 0$.

PARTIE B

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x + 1 - xe^{-x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J) . (Unité : 2cm).

1) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

(*On pourra mettre x en facteur dans l'expression de* $f(x)$)

2) Démontrer que , pour tout nombre réel x , $f'(x) = h(x)$.

3) Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variation.

4) Démontrer que le droite (Δ) d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

5) Etudier la position relative de (Δ) et (C).

6) Démontrer que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

7) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

8) Tracer (Δ) , (T) et (C). (*On prendra : $\alpha \approx -0,6$ et $f(\alpha) \approx 0,3$*).

9) Soit λ un nombre réel strictement positif.

a)Utiliser une intégration par parties pour calculer $\int_0^{\lambda} xe^{-x}dx$.

b) Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan limitée par (C) , (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

SESSION DE REMPLACEMENT 2002 SERIE D

EXERCICE 1

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n - 3}{U_n} \end{cases}$

1) f désigne la fonction dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et définie par : $f(x) = \dfrac{4x-3}{x}$.

(C) désigne la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé (O,I,J). L'unité graphique est 2cm.

a)Etudier les variations de f puis dresse son tableau de variation.

b)Tracer (C) et la droite (D) d'équation $y = x$.

c)Utiliser (C) et (D) pour construire U_0, U_1, U_2 et U_3 sur l'axe (OI).

2-a)Démontrer que $f([2;3]) \subset [2;3]$.

b)En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence , que pour tout entier naturel n, $2 \le U_n \le 3$.

c)Démontrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

d)En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3) On considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $V_n = \dfrac{U_n - 3}{U_n - 1}$.

a)Démontrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b)En déduire la limite de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c)Déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 2

Une société de transport a déposé dix cars en vue d'une révision dans un garage . Devant l'impossibilité de tenir les délais, le mécanicien a procédé à la révision de seulement huit cars au hasard sur les dix. La société décide tout de même de mettre les dix cars en circulation. Elle estime que :

•Si un car est révisé , la probabilité qu'il tombe en panne avant la prochaine révision est égale à 0,1.

•Si un car n'est pas révisé , la probabilité pour qu'il tombe en panne avant la prochaine révision est égale à 0,6.

1) On choisit au hasard un var sur les dix.

a)Calculer la probabilité pour qu'il ait été révisé.

b) Calculer la probabilité pour qu'il ait été révisé et qu'il tombe en panne avant la prochaine révision.

c)Calculer la probabilité pour qu'il n'ait pas été révisé et qu'il tombe en panne avant la prochaine révision.

d) En déduire que la probabilité pour qu'il tombe en panne avant la prochaine révision est égale à 0,2.

2) La société apprend que l'un des dix cars est tombé en panne avant la prochaine révision. Elle cherche à savoir si ce car a été révisé.
Calculer la probabilité pour que ce car ait été révisé.

3) On suppose que l'état de chaque car est indépendant des autres cars :
Calculer la probabilité pour que huit cars au moins sur les dix ne tombent pas en panne avant la prochaine révision.

(*On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat*)

PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $g(x)=(x-1)^2-1+\ln\left(|x-1|\right)$.

1)On suppose que g est dérivable sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

a)Calculer $g'(x)$.

b)Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

2-a)Calculer $g(0)$ et $g(2)$.

b)Démontrer que $\forall x \in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$, $g(x)>0$ et $\forall x \in]0;1[\cup]1;2[$, $g(x)<0$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x)=x-\dfrac{\ln\left(|x-1|\right)}{x-1}$.

On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J).
L'unité graphique est 2cm.

1-a)Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$.

En déduire que (C) admet une asymptote que l'on déterminera.

b)Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)Démontrer que la droite (D) d'équation $y=x$ est une asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

3)On suppose que f est dérivable sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

a)Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$.

b)En utilisant les résultats de la question **A)2.b** , étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

4)Démontrer que le point $\Omega(1;1)$ est un centre de symétrie de (C).

5-a)Démontrer que pour tout nombre réel x diffèrent de 1 : $\ln\left(|x-1|\right)>0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$.

b) En déduire la position de (C) par rapport à (D).

6) Construire (C) et (D).

7)Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par (C), (D) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1-\dfrac{1}{e}$.

SESSION NORMALE JUIN 2002 SERIE D

EXERCICE 1

On considère la suite numérique u définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n} \end{cases}$

1)Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x}$ et la représentation graphique (C) est donnée en annexe.

a)Représenter sur l'axe (OI) les termes u_0 , u_1 , u_2 , u_3 et u_4 de la suite u à l'aide de la courbe (C) et de la droite (D) d'équation $y = x$.

b)Que peut-on conjecturer quant à la convergence de la suite u ?

2-a)Démontrer que $f([1;5]) \subset [1;5]$.

b)En déduire au moyen d'un raisonnement par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 < u_n < 5$.

3)Soit v la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$.

a)Démontrer que v est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b)En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$.

4-a)Exprimer u_n en fonction de v_n , puis en fonction de n .

b) En déduire la limite de la suite u .

EXERCICE 2

Un enquête menée dans une entreprise auprès du personnel a porté sur le salaire net mensuel par agent Y et le nombre de personnes par famille, à la charge de chaque agent X . Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Salaire net mensuel y_i (en millier de francs)	30	15	25	45	60	45	75
Nombre de personnes de la famille x_i	1	2	2	3	3	4	4

Salaire net mensuel y_i (en millier de francs)	80	90	105	150	100	120	105	130
Nombre de personnes de la famille x_i	5	5	5	6	6	6	7	7

Dans les réponses, tous les résultats seront arrondis au centième près.

1) Représenter le nuage de points correspondant à la série double $(X;Y)$ dans le repère orthogonal $\mathfrak{R}$.

Sur l'axe des abscisses, prendre 1cm pour 1 personne et sur l'axe des ordonnées , prendre 1cm pour 10.000 francs.

2-a)Calculer le salaire moyen $\overline{Y}$ du personnel de l'entreprise.

b) Quel est le nombre moyen de personnes à charge par agent ?

c)Placer dans le repère $\mathfrak{R}$ le point moyen G du nuage.

3) Calculer la covariance $\text{cov}(X;Y)$.

4-a)Déterminer une équation de la droite (D) d'ajustement de Y en X par la methode des moindres carrés.

b)Tracer (D)

5)Selon cet ajustement , si un agent de cette entreprise gagne 80.000 francs par mois , à combien peut-on évaluer le nombre de personnes de sa famille ?
(On arrondira le résultat à l'unité).

PROBLEME

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

On se propose de chercher les fonctions dérivables $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle $(E): f'(x)+2f(x)=2x-1$

1) Démontrer que la fonction g définie par $g(x)=x-1$ est solution de (E).

2) Soit (E') l'équation différentielle $f'(x)+2f(x)=0$.

a)Résoudre (E').

b)Soit k un nombre réel .Démontrer que les fonctions $f_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que ; $f_k=ke^{-2x}+x-1$ sont solutions de (E).

3-a)Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que si f est solution de (E) , alors $f-g$ est solution de (E').

b) En déduire les solutions de (E).

PARTIE B

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{-2x}+x-1$. Soit (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé (O,I,J). *Unité graphique 3cm.*

1-a)Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b)Déterminer la limite lorsque x tend vers $-\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$.

c)Interpréter graphiquement les résultats précédents.

2-a)Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite (D) d'équations $y=x-1$ est une asymptote à (C)en $+\infty$.

c)Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3-a)Pour tout nombre réel x , calculer $f'(x)$.

b)Etudier le sens de variation de f.

c)Dresser le tableau de variation de f.

4-a)Démontrer que l'équation : $x\in\left[\frac{\ln 2}{2};+\infty\right]$, $f(x)=0$ admet une solution unique α.

b)Démontrer que α appartient à l'intervalle $]0,79;0,8[$.

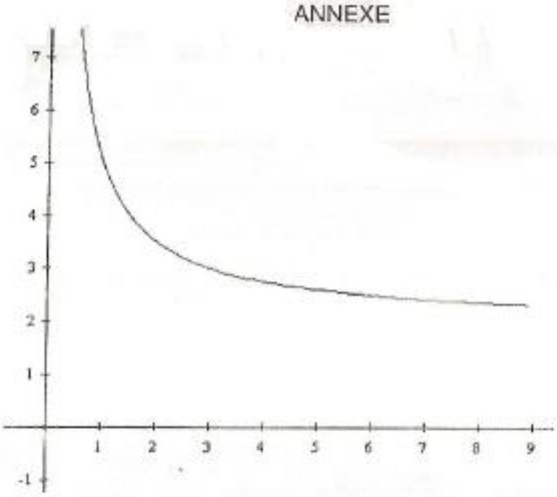
c)Construire (D) et (C).

5)Soit t un nombre réel supérieur à α.

a)Calculer l'aire $A(t)$ de la partie du plan du plan délimitée par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations $x=t$ et $x=\alpha$.

b) Exprimer la limite lorsque t tend vers $+\infty$ de $A(t)$ en fonction de α.

ANNEXE



SESSION DE REMPLACEMENT 2001 SERIE D

EXERCICE 1

1)Déterminer sous forme trigonométrique les racines cubiques du nombre complexe $U = 32\sqrt{2}(1+i)$.

2)On pose $p = e^{3i\frac{\pi}{4}}$. Démontrer que les racines cubiques de U peuvent s'écrire respectivement sous la forme $4p$, $4pe^{2i\frac{\pi}{3}}$ et $4pe^{-2i\frac{\pi}{3}}$.

3) En déduire la forme algébrique de chacune des racines cubiques de U .

4)Déduire des questions précédentes que :

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

EXERCICE 2

1) Déterminer les fonctions g définies sur $\mathbb{R}$, solutions de l'équation différentielle ; $g' = ag$ où a est une constante réelle.

2) Soit f la fonction qui au temps t évalué en années, associe le ombre d'atomes de radium d'une substance radioactive. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On suppose que la vitesse de désintégration de $f'(t)$ est proportionnelle au nombre d'atomes de radium et on a : $f'(t) = -k\,f(t)$, k étant un nombre réel strictement positif donné.

A l'instant $t = 0$, le nombre d'atomes de radium est x_0 .

a)Déduire de la question **1**. L'expression de $f(t)$ en fonction de x_0 , k et t .

b) On donne $k = 4,65.10^{-3}$. Au bout de combien d'années, à partir de l'instant $t = 0$, le nombre d'atomes de radium aura-t-il diminué de moitié ?

PROBLEME

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$f(x) = -\frac{x^3}{6} + x^2 - \frac{x}{2} - x\ln x + \frac{2}{3}$ si $x > 0$ et $f(0) = \frac{2}{3}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J).

L'unité graphique est 3cm.

PARTIE A

On donne la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2} - \ln x$

1) Etudier le sens de variation de g .

2)Calculer $g(1)$

3)En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in]0;1[\quad , g(x) > 0 \\ \forall x \in]1;+\infty[\quad , g(x) < 0 \end{cases}$

PARTIE B

1) Etudier la continuité de f à droite en 0.

2-a)Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

b) f est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifier.

c)Donner une interprétation graphique du résultat de la question **a**.

3-a)Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif x , $f'(x) = g(x)$.

b)Déduire de la **partie A**, le sens de variation de f .

4-a)Calculer la limite de f en $+\infty$.

b)Dresser le tableau de variation de f .

c)Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation graphique du résultat.

5-a)Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

b)Vérifier que : $3,3 < \alpha < 3,4$.

c)Tracer (C).

PARTIE C

Soit t un nombre réel strictement positif inférieur à 1.

1)Calculer $I(t) = \int_t^2 \left(-\frac{x^3}{6} + x^2 - \frac{x}{2} + \frac{2}{3} \right) dx$

2)A l'aide d'une intégration par parties, calculer $J(t) = \int_t^2 x\ln(x)dx$.

3)En déduire l'expression en fonction de t , l'aire $A(t)$ *(en cm^2)* de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = t$ et $x = 2$.

4) Déterminer $\lim_{t\to 0} A(t)$.

SESSION NORMALE JUIN 2001

EXERCICE 1

a est un nombre réel quelconque .

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $Z^3-\left(ia+2\sqrt{3}\right)Z^2+\left(2ia\sqrt{3}+4\right)Z-4ai=0$

1)Déterminer le nombre réel a pour que : $-2i$ soit une solution de (E).

2)Déterminer le polynôme complexe q de degré deux tel que :

$\forall\ Z\in\mathbb{C},\ Z^3+\left(2i-2\sqrt{3}\right)Z^2+\left(4-4i\sqrt{3}\right)Z+8i=q(Z)\left(Z-\sqrt{3}-i\right)$.

3)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) pour $a=-2$.

4)Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O,I,J). On donne les points M, N et Q d'affixes respectives $\sqrt{3}+i$; $-2i$ et $\sqrt{3}-i$.

a)Représenter dans le repère (O,I,J) les points M , N et Q. (*On prendra 3cm pour l'unité*)

b)T désigne la symétrie de M par rapport à (OJ).

Démontrer que le triangle TMQ est rectangle en M.

c)Démontrer que les points M, Q , N et T sont cocycliques.

EXERCICE 2

Dans un urne se trouve six médaillons identiques , indiscernables au toucher , numérotées de 1 à 6.
Un jeu consiste à tirer au hasard un médaillon de l'urne après avoir misé une certaine somme versée aux organisateurs du jeu et à recevoir un prix ou non selon le numéro inscrit sur le médaillon tiré.

•Si le joueur tire le médaillon numéroté 4, on lui remet ce qu'il a misé et il gagne 3000F.

•S'il tire le médaillon numéroté 1, 2 ou 6, il perd sa mise et ne gagne rien.

•S'il tire le médaillon numéroté 3, il ne gagne rien mais récupère sa mise.

•S'il tire le médaillon numéroté 5, il le remet dans l'urne et effectue un second tirage. Si le médaillon retiré :

•porte le même numéro (c'est-à-dire 5), le joueur gagne 2000F et perd sa mise.

•sinon, il perd sa mise et de plus il paie 1500F aux organisateurs.

1)Calculer la probabilité pour que le joueur récupère sa mise.

2)Calculer la probabilité pour qu'il perde 1500F et qu'il perde aussi sa mise..

3)Le joueur a misé une somme S. On noté X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le résultat financier de son jeu, c'est-à-dire la différence entre ce que le joueur possèdera à l'issue du et ce qu'il possédait avant de jouer.

a)Compléter le tableau ci-dessous définissant la loi de probabilité de la variable X .

x_i (valeurs de la variable	-S	-S-1500	0	-S+2000	3000
$p(X=x_i)$					

b)Démontrer que l'espérance mathématique de X est : $E(X)=-\frac{2}{3}S+\frac{3125}{9}$.

c)Quelle somme le joueur doit-il miser pour que son résultat financier moyen soit nul ?
(*On donnera l'arrondi de cette somme à l'unité près*).

PROBLEME

On donne la fonction numérique : $\begin{aligned} f:&\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ &x\mapsto x\left(x+2\right)e^{x+2}\end{aligned}$

Soit (C) la représentation graphique de f dans le repère orthonormé (O,I,J) ;
(*unité graphique :1cm*).

On rappelle que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^x=+\infty$.

1-a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Démontrer que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

c)Interpréter graphiquement les résultats ci-dessus.

2-a)Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Interpréter graphiquement ce résultat.

3) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \left(x^2+4x+2\right)e^{x+2}$.

4-a)Etudier le sens de variation de f.

b) Dresser le tableau de variation de f.

5-a)Déterminer une équation de chacune des tangentes (T) et (T') à la courbe (C) aux points d'abscisses respectives -2 et 0.

b) Tracer (T) , (T') et (C).

6) λ est un nombre réel strictement inférieur à -2. A_λ désigne l'aire de la portion du plan délimitée par (OI) , (C) et les droites d'équations respectives $x=-2$ et $x=\lambda$.

a)A l'aide de deux intégrations par parties , démontrer que $A_\lambda = 4-\lambda^2 e^{\lambda+2}$.

b) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} A_\lambda$.

7-a)Déterminer les nombres réels u et v tels que la fonction F définie par $F(x)=\left(x^2+ux+v\right)e^{x+2}$, soit une primitive de f.

b) Retrouver le résultat de la question **6-a).**

SESSION DE REMPLACEMENT 2000 SERIE D

EXERCICE 1

Pour préparer la retraite de ses membres, une coopérative a planté en 1991 des anacardiers qui sont rentrés en production trois ans plus tard .Le tableau statistique suivant donne l'évolution des productions depuis la première année de récolte.

Ordre X_i de l'année de production	1	2	3	4	5	6	7
Année de production			1996				
Quantité Y_j de production (en tonnes)	118	146	184	247	267	278	255

1) En quelle année cette coopérative a-t-elle obtenu 278 tonnes d'anacarde ?
2) Recopier et compléter le tableau ci-dessus.
3) Représenter dans le plan muni du repère orthogonal (O,I,J) , le nuage de points de la série statistique double $(X_i;Y_j)$.
(*On prendra sur la droite des abscisses :2cm pour unité et sur la droite des ordonnées : 1cm pour 20 tonnes)*
4) Déterminer l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire de la distribution statistique $(X_i;Y_j)$.
5) La corrélation entre les variables X et Y est-elle bonne ? Justifier.
6) Déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression qui permet d'estimer l'année en fonction de la production.
7) En quelle année la coopération produira-t-elle 250 tonnes ?

EXERCICE 2

On considère les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \dfrac{3}{2}(U_n)^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad V_n = \ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)$$ ($\ln$ *désigne le logarithme népérien*).

1) Calculer V_0
2) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 2.
3) Exprimer V_n en fonction de n.
4) Calculer la limite de (V_n).
5) Exprimer U_n en fonction de V_n et en déduire la limite de (U_n).
6) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :
$S_n = V_0 + V_1 + ... + V_{n-1}$ et $T_n = U_0 \times U_1 \times ... \times U_{n-1}$

a)Démontrer que : $S_n = (1-2^n)\ln 2$.

b) Justifier que : $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$.

c)Exprimer T_n en fonction de n.

PROBLEME

PARTIE A

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(0)=0$ et pour $x>0$; $f(x)=-x+x\ln x$

($\ln$ *désigne le logarithme népérien*).

On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J) . (*Unité : 2cm*).

1) Calcule $f(1)$ et $f(e)$.

2) *Etude des branches infinies*

a)Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Calculer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c)Interpréter graphiquement ce résultat.

3) *Etude de la dérivabilité de f en 0.*

a)Démontrer que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Préciser la tangente à (Γ) en O (point O).

4) La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note f' la dérivée de f .

a)Déterminer $f'(x)$ pour tout x élément de $]0;+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c)Donner une équation de la tangente (D) à (Γ) au point d'abscisse e .

5) Construire (D) et (Γ) .

6) Soit t un nombre réel tel que : $0<t<1$.

a)En utilisant une intégration par parties, démontrer que l'aire $A(t)$ de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) , la droite (OI) et les droite d'équations $x=t$ et $x=1$ est égale à $\frac{1}{4}e^2+\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln t\right)t^2$.

b) Calculer la limite de $A(t)$ quand t tend vers 0.

PARTIE B

On considère la transformation plane T qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=z+1+2i$.

On appelle A , le point d'affixe $1-i$ et B le point d'affixe e .

1) Calculer les affixes de O' , A' et B' images respectives des points O, A et B par T.

2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T.

3) Construis en utilisant une autre couleur, la courbe (Γ') , image de (Γ) par T.

SESSION NORMALE JUIN 2000 SERIE D

EXERCICE 1

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O,I,J) , les points A et B ont pour affixes respectives $\sqrt{3}+i$ et . On désigne par S la similitude directe d'écriture complexe :

$z'=\frac{3-i\sqrt{3}}{2}z-\sqrt{3}+i$.

1)Déterminer les images par S des points O et A.

2)Déterminer les éléments caractéristiques de S.

3)Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 2 et (C') son image par S.

a)Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (C').

b)Construire (C').

EXERCICE 2

Une entreprise veut prévoir le nombre d'articles qu'elle aura en stock en l'an 2004.
L'évolution du stock de ses articles , (donc de 1983 à 1990) , est donnée par le tableau statistique ci-dessous :

Ordre x_i des années	1	2	3	4	5	6	7
Nombre y_i d'articles En stock	3010	3860	3940	4020	4100	4180	4220

1) A partir de quelle année l'entreprise s'est-elle intéressée à ses stocks ?

2) Représenter graphiquement le nuage de points de la distribution statistique définie par le tableau précédent, dans le plan muni du repère orthogonal (O,I,J). (*On prendra pour unité 2cm en abscisse et 200 articles pour 1cm sur la droite des ordonnées*).

3) Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points . (*On prendra l'arrondi d'ordre zéro pour l'ordonnée de G*)

4) Déterminer par la méthode des moindres carrés , une équation de la droite de régression de y en x. (*On donnera l'arrondi d'ordre 1 du coefficient directeur de cette droite*).

5)Quel serait le nombre d'articles en stock de l'entreprise en 2004 ?
(*On donnera une valeur approchée d'ordre 1 par excès du résultat).*

PROBLEME

On considère la fonction f numérique définie par : $f(x)=\frac{x^2}{2}+x-2x\ln x$ si $x\in]0;+\infty[$ et $f(0)=0$.

L'objet de ce exercice est l'étude de la fonction f et le tracer de sa courbe représentative (C) dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J), $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

PARTIE A ETUDE D'UNE FONCTION AUXILIAIRE

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x-1-2\ln x$.

1)Calculer les limites respectives de g à droite en 0 et en $+\infty$.

2)On admet que la fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note g'sa dérivée .

a)Déterminer g'et étudier son signe.

b) En déduire le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

3) Vérifier que $g(1)=0$.

4) Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $]3;4[$ et $g(\alpha)=0$.

5) Déduire des questions précédentes, le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B   DETERMINATION D'UNE VALEUR APPROCHEE DE α

On considère la fonction numérique h définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = 2\ln x + 1$.

1) Démontrer que $\forall x \in [3;4]$, $h(x) \in [3;4]$.

2)On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 3,5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$

a)Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [3;4]$.

b)Calculer l'arrondi d'ordre 3 de U_1 .

c)Démontrer par récurrence que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

d)En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

(*On admettra que* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers la valeur* α *précédente et on prendra* $\alpha = 3,5$ *).*

PARTIE C   ETUDE DE LA FONCTION f

1) Démontrer que la fonction f est continue en 0.

2) La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifier votre réponse.

3) En donner une interprétation graphique.

4) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

5) Calculer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

6) La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note f' sa dérivée.

a)Démontrer que $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = g(x)$.

b) En utilisant les résultats de la **PARTIE A** ,déterminer le signe de f'.

c)Dresser le tableau de variation de f .

7) Tracer la courbe (C).

8) Soit t un nombre réel tel que : $0 < t < 1$..

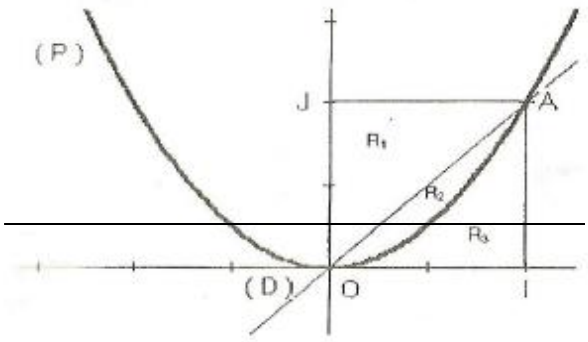
a)En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire $A(t)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations $x = t$ et $x = 1$.

b) b) Calculer la limite de $A(t)$ quand t tend vers 0.

SESSION DE REMPLACEMENT 1999 SERIE D

EXERCICE 1

Dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J) , on donne le point A de coupe de coordonnées $(1;1)$, la droite (D) d'équation $y = x$ et la parabole (P) d'équation $y = x^2$.



1) La parabole (P) et la droite (D) divisent le carré OIAJ en trois régions distincts :

- R_1 est le triangle AJO.
- R_2 est la portion du plan comprise strictement entre (D) et (P), contenue dans le carré OIAJ.
- R_3 est le complémentaire dans le carré OIAJ de $R_1 \cup R_2$.

Calculer les aires A_1 de R_1 , A_2 de R_2 , A_3 de R_3 .

2)On joue à un jeu de fléchettes dont la cible est le carré OIAJ. La probabilité d'atteindre la cible est $\frac{5}{6}$. Lorsque la cible est atteinte, les probabilités d'atteindre les régions R_1 , R_2 et R_3 sont proportionnelles aux aires de ces trois régions ; on les notes p_1 , p_2 et p_3 respectivement.

p_4 Désigne la probabilité de manquer la cible.

a)Calculer p_4 .

b) Démontrer que : $p_1 = \frac{5}{12}$; $p_2 = \frac{5}{36}$ et $p_3 = \frac{5}{18}$.

3) Le joueur ne marque aucun point si la fléchette n'atteint pas le carré.
Marque 3 points si elle atteint R_1 , 4 points si elle atteint R_2 et 2 points si elle atteint R_3 .
Le jeu consiste en deux lancers successifs. Les résultats de lancers sont indépendants.

a)Calculer la probabilité pour qu'il ne marque aucun point.

b) Démontrer que la probabilité pour que le joueur marque 2 points est $\frac{5}{54}$.

<u>ENRICHISSEMENT DE L'EXERCICE</u>

4)On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque jeu associe la somme des points marqués par le joueur.

a)Définir la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'Esperance mathématique $E(X)$ du joueur.

EXERCICE 2

On considère deux triangles équilatéraux ABC et ANP de sens direct tel que le point N soit le milieu du segment [BC]. Soit S la similitude directe de centre A qui applique B sur N. On note O le milieu de [NP].

1) Faire une figure.
2) Déterminer le rapport de la similitude S.
3) Donner la mesure principale de l'angle orienté de S.
4) Justifier que P est l'image de C par S.
5) Justifier que Q est l'image de N par S.
6) On munit le plan du repère orthonormé (O,I,J). Les nombres complexes $2\,;-1+i\sqrt{3}\,;\ -1-i\sqrt{3}$ sont les affixes respectives des points A, B et C.
   a)Faire une nouvelle figure.
   b) Calculer l'affixe de N.
   c)Déterminer la transformation complexe f associée à S.
   d) Calculer les affixes des oints P et Q.

PROBLEME

Dans ce problème, le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J). Unité *2cm*.

PARTIE A

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{x+3}{x+1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Calculer les limites de f en $+\infty$, en -1 et en $-\infty$.
3) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x différent de -1.

PARTIE B

Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x)=\dfrac{3+\ln x}{1+\ln x}$ si $x\neq 0$ et $h(0)=1$.

On désigne par (Γ) la courbe représentative de h.

1)Déterminer l'ensemble de définition de h.

2 -a)Justifier que le limite de $h:\begin{cases}\text{à droite en } \dfrac{1}{e} \text{ est } +\infty \\ \text{à gauche en } \dfrac{1}{e} \text{ est } -\infty \\ \text{en } +\infty \text{ est } 1.\end{cases}$

   b) Interpréter géométriquement les résultats précédents.
3) Démontrer que h est continue en 0.
4) Démontrer que (Γ) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.
5) Calcule $h'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à $\left]0;\frac{1}{e}\right[\cup\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$.
6) Etudier les variations de h puis dresser son tableau de variation.
7) Tracer (T) ; les asymptotes à (Γ) et (Γ).

PARTIE C

Soit φ la restriction de h à $\left[0;\frac{1}{e}\right[$.

1) Démontrer que φ est une bijection de l'intervalle $\left[0;\frac{1}{e}\right[$ sur un intervalle que l'on précisera.

2) Déterminer $\varphi^{-1}(1)$.

3) Pour tout nombre réel x différent de 1, appartenant à K, démontrer que : $\varphi^{-1}(x)=\exp\left(\frac{3-x}{x-1}\right)$.

4) Tracer la courbe représentative $(\Im)$ de φ^{-1} dans le repère (O,I,J).

SESSION NORMALE JUIN 1999 SERIE D

EXERCICE 1

Un pharmacien observe , durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son officine , le chiffre d'affaires en millions de Franc CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où x désigne le numéro du mot et y le chiffre d'affaires correspondant.

x	1	2	3	4	5	6
y	12	13	15	19	21	22

1) Calculer les moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$ respectivement des variables x et y.

2) Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point moyen G (*Unité : 2cm en abscisses et 1cm en ordonnées*).

3) Calculer la variance $V(x)$ de x et la covariance $\operatorname{cov}(x;y)$ de x et y. *Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.*

4) Démontrer qu'une équation de la droite de régression de y en fonction de x est : $y=\frac{78}{35}x+9,2$

5)Tracer la droite (D).

6)En utilisant la droite (D) , calculer une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7e mois.

EXERCICE 2

Cet exercice a pour but de déterminer lesquels des avions à 2 ou à 4 moteurs sont les plus sûrs.
Un avion ne s'écrase pas tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionne. Les moteurs d'un avion tombent en panne de manière indépendante.
Soit P la probabilité pour qu'un moteur tombe en panne.

PARTIE A

Dans cette partie : $P=0,1$.

1) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.
2) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.
3) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne.
4) En déduire la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.

PARTIE B

On revient au cas général.

1)Soit $f(P)$ la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase .

Démontrer que : $f(P)=P^2$.

2) Soit $g(P)$ la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.

Démontrer que : $g(P)=P^2(-3P^2+4P)$.

3) On pose : $h(P)=f(P)-g(P)$.

a)Etudier le signe de $h(P)$ en fonction de P .

b) En déduire, suivant les valeurs de P , dans quels avions il vaut mieux monter.

PROBLEME

Le plan est muni du repère orthogonal (O,I,J) (*1cm en abscisses et 5cm en ordonnées).*

PARTIE A

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{5\ln x}{x^2}$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le repère (O,I,J).

1) Déterminer l'ensemble de définition de f puis l'image de $\sqrt{e}$ par f.

2) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$ puis interpréter graphiquement ces résultats.

3) Déterminer la fonction dérivée f' de f puis étudier le sens de variation de f.

4) Dresser le tableau de variation de f.

PARTIE B

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{5(\ln x)^2}{x^2}$.

On désigne par (C_g) la courbe représentative de g dans le repère (O,I,J).

1) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2) Vérifier que $\forall x\in\,]0;+\infty[$, $g'(x)=\dfrac{10(1-\ln x)\ln x}{x^3}$.

3) Etudier le sens de variation de g.

4) Dresser le tableau de variation de g.

PARTIE C

On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=g(x)-f(x)$.

1)Etudier le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

2)En déduire la position relative des courbes (C_f) et (C_g).

3)Tracer ; les courbes (C_f) et (C_g) sur une même figure.

On donne les valeurs : $e\approx 2,7$; $\sqrt{e}\approx 1,6$; $f(\sqrt{e})\approx 0,91$; $g(e)\approx 0,7$; $\ln 2\approx 0,7$; $\ln 3\approx 1,1$.

PARTIE D

On considère l'intégrale $I_n=\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,dx$.

1) A l'aide d'une intégration par parties , calculer l'intégrale I_1.

2) A l'aide d'une intégration par parties , démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $I_n=-\dfrac{1}{e}+nI_{n-1}$.

3) En déduire que : $I_2=2-\dfrac{5}{e}$.

4) Interpréter graphiquement I_1-I_2 puis calculer I_1-I_2.

SESSION DE REMPLACEMENT 1998 SERIE D

EXERCICE 1

On considère l'équation (E) suivante :

$z \in \mathbb{C},\ z^3 - (7+6i)z^2 + (10+26i)z + 6 - 24i = 0$

1-a)Sachant que (E) admet une solution réelle, la calculer.

b) Résoudre (E).

2) Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$ où l'unité est 2cm , on considère les points A , B et C d'affixes respectives $1+i$; 3 et $3+5i$.

a) Placer les points A, B et C et démontrer que le triangle ABC est rectangle.

b) Déterminer le rapport et la mesure principale de l'angle orienté de la similitude directe S de centre A qui transforme B en C.

3-a) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un rectangle.

b) Déterminer l'affixe du centre Ω du rectangle ABCD.

c) Construire l'image par S du cercle circonscrit au rectangle ABCD.

EXERCICE 2

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier et homogène dont les quatre faces sont marquées des nombres 1, 3, 7 et 10. Lorsque le dé est posé , trois faces sont visibles.

1) Calculer la probabilité pour que le dé se pose sur une face donnée.

2) Soit X la variable aléatoire égale à la somme des nombres visibles après un lancer.

a) Donner l'ensemble des valeurs prises par X .

b) Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geq 14)$.

Soit n un entier naturel non nul. On lance le dé n fois et après chaque lancer, on calcule la somme X des nombres visibles.

3-a) Calculer la probabilité p_n pour que l'évènement $(X \geq 14)$ se réalise au moins une fois au cours des n lancers.

b) Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle on a : $p_n \geq 0,999$.

PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction numérique g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1-(1+x)e^x$.

1-a)Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.

b) Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x .

c)Etudier le signe de $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g .

2-a)Calculer $g(0)$.

b) En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty;0\right[,\ g(x) > 0 \\ \forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ g(x) < 0 \end{cases}$

PARTIE B

On considère la fonction numérique f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2 - xe^x$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O,I,J) où *l'unité graphique est 1 cm.*

1-a) Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.

b)Etudier le sens de variation de f en utilisant la question **A.2)** et dresser son tableau de variation.

2-a)Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

b)Etudier la position de (D) par rapport à (C).

3-a)Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ et donner une interprétation graphique du résultat.

b)Tracer (C).

4-a)Démontrer que (C) coupe (OI) en deux points A et B , A désignant le point d'abscisse négative α .

b)Démontrer que α appartient à l'intervalle $]-2,3 : -2,2[$.

c)Démontrer que $e^{\alpha} = \frac{\alpha + 2}{\alpha}$.

5) Soit h la restriction de f à $]-\infty; 0]$.

a)Démontrer que h est une bijection de $]-\infty; 0]$ sur un intervalle K que l'on précisera.

b)Soit (Γ) la courbe représentative de h^{-1} dans le repère orthonormé (O,I,J) . Tracer la demi-tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 2.

c)Tracer (Γ).

PARTIE C

Soit t un élément de l'intervalle $]-\infty; \alpha]$.

1) Calculer l'aire $\mathcal{A}(t)$ de la partie du plan délimitée par (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = t$ et $x = \alpha$.

2) Calculer la limite quand t tend vers $-\infty$ de $\mathcal{A}(t)$.

SESSION NORMALE JUIN 1998 SERIE D

EXERCICE 1

Soit les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $a_0 = 1$; $b_0 = 8$ et pour tout élément n de $\mathbb{N}$,

$a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$.

1) Calculer a_1 et b_1.

2) Soit la suite (d_n) définie sur $\mathbb{N}$ par ; $d_n = b_n - a_n$

a)Démontrer que (d_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme d_0 et la raison.

En déduire une expression de d_n en fonction de n, puis en déduire que :pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $d_n > 0$.

b) Calculer la limite de la suite (d_n).

3-a)Démontrer que , pour tout élément n de $\mathbb{N}$: $a_{n+1} - a_n = \dfrac{d_n}{3}$ et $b_{n+1} - b_n = -\dfrac{d_n}{4}$.

En déduire les variations des suites (a_n) et (b_n).

b) Démontrer que : pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $a_0 < a_n < b_n < b_0$.

c)Déduire de **3.a** et **3.b** que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

4-a)Déduire de la question **3.a** que : pour tout entier n strictement plus grand que 1,

$a_n - a_0 = \dfrac{1}{3}(d_0 + d_1 + ... + d_{n-1})$.

b) Déduire la limite de la suite (a_n) puis celle de la suite (b_n).

EXERCICE 2

Soit le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (*unité :4cm).*

On considère la transformation S du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1-a)Démontrer que S a un point invariant J d'affixe $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de S.

2) Soit $A(-1;0)$.

a)Tracer le cercle (C) de diamètre $[JA]$.

b) Caractériser puis tracer le cercle image de par S du cercle (C).

3) Déterminer l'ensemble des points M du plan , d'affixe z tels que : $\left|(1 + i\sqrt{3})z + \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$.

*(On pourra utiliser la question **2**)*

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J) (*unité : 2cm)*

PARTIE A

On considère la fonction g , définie , continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, par :

$g(x) = x+1-e^{x}$.

1)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

2)Calculer $g'(x)$ pour x élément de $\mathbb{R}$.

3)Etudier , suivant les valeurs de x , le signe de $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de g . En déduire le signe de $g(x)$, suivant les valeurs de x .

PARTIE B

On considère la fonction f , définie ,continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = 3(x^2+x)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère (O,I,J).

1-a)Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b)Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c)Interpréter graphiquement les résultats de **a.** et **b.**

2-a)Démontrer que , pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3(-x^2+x+1)e^{-x}$.

b)Etudier , suivant les valeurs de x , le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f .

On ne cherchera pas à calculer $f(\frac{1-\sqrt{5}}{2})$ et $f(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

3-a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b) Démontrer que, pour tout élément x de $\mathbb{R}$, $f(x)-3x = 3xe^{-x}g(x)$.

c) Déduire de la **partie A** les positions relatives de (T) et de (C).

4Tracer avec précision , dans le repère (O,I,J), la tangente (T) et la courbe (C).

On donne $\sqrt{5} \approx 2,2$; $f(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) \approx -1,3$ et $f(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \approx 2,5$.

PARTIE C

1) Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{-x}$ où a , b et c sont des nombres réels.
Déterminer a , b et c pour que la fonction F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2)t étant un nombre réel strictement positif, calculer l'aire $\mathcal{A}(t)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=t$.

3) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathcal{A}(t)$.

SESSION DE REMPLACEMENT 1997 SERIE D

EXERCICE 1

Soit l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ suivante : $z^4+(i-\sqrt{3})z^3-iz+1+i\sqrt{3}=0$.

1-a)Développer, réduire et ordonner le polynôme $(z-\sqrt{3}+i)(z^3-i)$.

b) Résoudre (E).

2)Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O,I,J) (*unité : 4cm).*

On considère les points A d'affixe $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, B d'affixe $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ et C d'affixe $-i$.

a)Placer les points A, B et C.

b) Justifier que le triangle ABC est équilatéral.

3) Soit Ω le milieu du segment $[AC]$ et $\mathcal{S}$ la similitude directe de centre Ω qui transforme A en B.

a)Déterminer les éléments caractéristiques de $\mathcal{S}$.

b) Démontrer que l'image du point O par $\mathcal{S}$ est le point C.

EXERCICE 2

On considère un damier carré dont les 16 cases sont numérotées de 1 à 16 comme ci-dessous.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

On dispose :

•d'un sac contenant 16 boules, numérotées de 1 à 16 , indiscernables au toucher .

•et de 4 pions visuellement indiscernables destinés à être placés sur le damier.

On tire du sac simultanément et au hasard 4 boules.

Les numéros des boules tirées indiquent où placer les 4 pions sur le damier.

Par exemple : Si les boules tirées portent les numéros 3,5,7 et 8 , alors on obtient la disposition suivantes des 4 pions.

1	2	•	4
•	6	•	•
9	10	11	12
13	14	15	16

1)Démontrer qu'il existe 1820 dispositions, visuellement distinctes , des 4 pions sur le damier.

2)Quelle est la probabilité des évènements suivants ? (*les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles).*

a)Evènement A : Aucun pion n'occupe une case dont le numéro est strictement supérieur à 10.

b) Evènement B : les 4 pions occupent des cases voisines, formant un carré.

Par exemple

1	2	3	4
5	6	7	8
9	•	•	12
13	•	•	16

3)On appelle « ligne 1 du damier » celle comportant les cases numérotées 1, 2, 3, et 4.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de pions disposés sur la ligne 1.

a)Quel est l'ensemble des valeurs que peut prendre X ?

b)Déterminer la loi de probabilité de X (*chaque résultat sera donné sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est 1820).*

Problème

Le plan est muni d'un repere orthonormé (O,I,J). (*Unité :5cm).*
$\ln$ désigne la la fonction logarithme népérien.
On considère la fonction f , définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ \text{Pour tout } x \text{ élément de } \mathbb{R}_+^* ,\ f(x)=3x^2-2x^2\ln(2x) \end{cases}$$

Et (*C*) sa courbe représentative dans le repère (O,I,J).

Partie A

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. Interpréter ce résultat.

3-a)Démontrer que : pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)=4x(1-\ln(2x))$.

b) Etudier , suivant les valeurs de x , le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f .

4) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (*C*) avec l'axe des abscisses.

Partie B

Dans cette partie , il est proposé une méthode permettant de justifier que l'équation $(E): f(x)=x$ admet exactement trois solutions et d'encadrer les deux solutions non nulles.

1) Démontrer que, pour tout x positif non nul, l'équation (E) équivaut à : $\ln(2x)-\dfrac{3x-1}{2x}=0$.

2)On considère la fonction φ , définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x)=\ln(2x)-\frac{3x-1}{2x}.$$

a)Calculer $\varphi'(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$.

b)Etudier le signe de $\varphi'(x)$ puis dresser le tableau de variations de φ .

(On remarquera que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\varphi(x)=+\infty$ *)*

3) Démontrer que φ s'annule une seule fois sur l'intervalle $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$ en α tel que : $0,2<\alpha<0,25$.

On donne $\ln 2\approx 0,69$; $\ln 5\approx 1,61$; $\ln 10\approx 2,30$

On admet que φ s'annule une seule fois sur $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ en β tel que : $1,65<\beta<1,7$.

4) Déduire des questions **B 1.** et **B 3.** Le nombre de points d'intersection de (*C*) et de la droite (Δ) d'équation $y=x$.

5)Dans le repère (O,I,J), tracer la droite (Δ) et la courbe représentative (*C*) de la fonction f .

On fera apparaitre les points A *et* B *, points d'intersections de (C) avec la droite* (Δ) *et les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses. On donne :* $e^{3/2}\approx 4,5$.

Partie C

Soit un réel a tel que $0 < a < 1$

1) A l'aide d'une intégration par parties , calculer l'aire $I(a)$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$.

2) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ a > 0}} I(a)$.

SESSION NORMALE JUIN 1997 SERIE D

EXERCICE 1

On lance simultanément deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On dit qu'on obtient un « double » si les deux faces supérieures des dés portent des chiffres identiques.
A chaque lancer , si le joueur fait un « double » il gagne 500 francs ; sinon , il perd 100 francs .
1) On lance les dés une fois. Calculer la probabilité de gagner 500 francs.
2) On lance les dés trois fois. Soit X la variable aléatoire associée à la somme gagnée ou perdue après les trois lancers.
 a)Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
 b)Etablir la loi de probabilité de X .
3)On lance les dés n fois.
 a)Calculer , en fonction de n , la probabilité , notée q_n , de ne jamais faire un double.
 b)Calculer , en fonction de n , la probabilité , notée p_n , de faire au moins un double.
 c) Quelle est la valeur minimum de n pour que l'on ait : $p_n \geq 0,8$.

On prendra ; $\ln 0,2 = -1,61$; $\ln\frac{5}{6} = -0,19$

EXERCICE 2

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :
 $(E): z^3 + (4-2i)z^2 + (8-6i)z + 8 - 4i = 0$.
1-a)Démontrer que (E) admet une solution une solution réelle z_0 que l'on déterminera.
 b) Résous l'équation(E).
2)On considère dans le plan complexe les points A , B et C d'affixes respectives $-1+3i$; -2 ; $-1-i$.
Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe i .
 a)Placer les points A , B et C .
 b)Démontrer que le point B est l'image du point A par la rotation r .
 c)Déterminer l'antécédent D du point C par r . Placer D sur la figure .
3-a)Démontrer que les 4 points A , B , C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
 b)Démontrer que le quadrilatère $ADBC$ est un trapèze isocèle.

PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction g définie pour tout réel x par : $g(x) = -x + e^{\frac{-x}{2}}$.
1)Déterminer les limites respectives de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2)Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.
3)Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que : $0,70 < \alpha < 0,71$.
4)En déduire que : pour tout x de $]-\infty;\alpha[$,$g(x) > 0$ et pour tout x de $]\alpha;+\infty[$,$g(x) < 0$.

PARTIE B

On considère maintenant la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = x - 2 + (4-2x)e^{\frac{x}{2}}$.
(C) désigne la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O,I,J)
(Unité : 2cm)

1-a)Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Calculer la limites de l'expression $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$ et donner une interprétation graphique du résultat.

c)Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

d) Etudier la position de la courbe par rapport à (D).

2-a)Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.

b)Démontrer que :pour tout réel x, $f'(x) = g(x)e^{\frac{x}{2}}$ où g est la fonction étudiée dans la **partie A.**

c)En déduire le signe $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.

3-a)α étant un nombre réel définie dans la question **3** de la **partie A**, démontrer que :
En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 2×10^{-1} près par défaut.

b) Compléter, après l'avoir reproduit , le tableau des valeurs ci-dessous.

x	$-1,4$	0	2
Arrondi d'ordre 2 de $f(x)$			

4-a)Déterminer une équation de la tangente (T) au point N d'abscisse 0.

b) Dans le repère (O,I,J), tracer la droite (D), la tangente (T) et la courbe (C).

(*On utilisera comme valeur approchée de* $f(\alpha)$ *le nombre réel* $2,3$*)*.

5) A l'aide d'une intégration par parties , calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la droite (D) , courbe (C) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.

On donne : $e \approx 2,72$ *et* $e^{-0,7} \approx 0,5$.

SESSION DE REMPLACEMENT 1996 SERIE D

EXERCICE 1

Soit un réel α.

Soit la suite (a_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par :

$a_0 = \alpha$ et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{\alpha}{1+a_n}$.

On se propose d'étudier la suite (a_n) pour $\alpha = 2$ puis pour $\alpha = -\dfrac{1}{4}$.

1) On pose $\alpha = 2$. On étudie alors la suite (a_n) , à termes positifs , telle que : $a_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \dfrac{2}{1+a_n}$.

Soit la suite (ω_n) définie, pour tout n élément de $\mathbb{N}$ $\omega_n = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 2}$.

a) Démontrer que la suite (ω_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et calculer sa limite éventuelle.

b) En déduire l'expression de a_n en fonction de ω_n , puis de la suite (a_n).

2) On pose : $\alpha = -\dfrac{1}{4}$. On étudie alors la suite (a_n) telle que : $a_0 = -\dfrac{1}{4}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$,

$a_{n+1} = \dfrac{-1}{4+4a_n}$.

a)Démontrer par récurrence que :pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_n \neq -\dfrac{1}{2}$.

b)On considère la suite (V_n) définie pour tout n élément de $\mathbb{N}$, par : $V_n = \dfrac{1}{a_n + \dfrac{1}{2}}$.

Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison 2 et calculer le premier terme V_0.

c) Pour tout n élément de $\mathbb{N}$,exprimer a_n en fonction de V_n , puis a_n en fonction de n.

d)En déduire la limite de la suite (a_n).

EXERCICE 2

On pose : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{e^x} dx$, $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{e^x} dx$, $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos(2x) dx$.

1)Calculer $I + J$

2)A l'aide de deux intégration par parties , démontrer que : $K = \dfrac{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}{5}$.

3)En déduire la valeur de $I - J$

4)Calculer I et J.

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J) (*Unité : 5cm*).

PARTIE A

On considère la fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$, par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \text{Pour tout } x \text{ élément de } \mathbb{R}_+^*, \ f(x) = x(\ln x)^2 \end{cases}$$

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement ce résultat.

3-a)Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$.

b)Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f.

4)On donne $\ln 2 \approx 0,69$, $\ln 3 \approx 1,1$ et $e^2 = 7,4$.

a)Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	e^{-2}	1	2	3
Arrondi d'ordre 2 de $f(x)$				

b) Construire avec précision la courbe représentative (C) de f dans le repère (O,I,J) et la demi-tangente à (C) au point d'abscisse 0.

PARTIE B

On désigne par (Γ) la représentation graphique , dans le même repère (O,I,J), de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, par : $\begin{cases} g(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = x^2(\ln x)^2 \end{cases}$

1) Etudie la position relative des courbes (C) et (Γ).

2)A partir du tableau de variation de g ci-dessous , construire (Γ) avec précision.

'(On utilisera pour (Γ) une couleur différente de celle utilisée pour (C))

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

PARTIE C

Dans cette partie , t est un nombre réel tel que $0 < t < 1$.

1) Démontrer que pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{2}g'(x) = f(x) + x\ln x$.

2)En utilisant une intégration par parties , calculer : $\int_t^1 x \ln x dx$.

3) En déduire l'aire $A(t)$ de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = t$ et $x = 1$.

4) Calculer $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} A(t)$.

SESSION NORMALE JUIN 1996 SERIE D

EXERCICE 1

PARTIE A

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 6 boues blanches et 4 boules rouges. On tire 2 boules simultanément.

1) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 2 boules , associe le nombre de boules rouges tirées.

a)Donner la loi de probabilité de X .

b)Calculer l'espérance mathématiques de X .

2) Calculer la probabilité pour que 2 boules tirées soient de même couleur.

PARTIE B

Soit un entier n tel que : $2 \leq n \leq 8$.

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : n boules blanches et $(10-n)$ boules rouges. On tire 2 boules simultanément.

1) Démontrer que la probabilité $P(n)$ de tirer deux boules de même couleur est :

$$P(n) = \frac{2n^2 - 20n + 90}{90}.$$

2) Quel doit être le nombre n de boules blanches pour que $P(n)$ soit minimum ?

Calculer ce minimum.

EXERCICE 2

PARTIE A

Soit l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ suivante :

$(E)\ : z^3 - (3i+2)z^2 + (5i-1)z - 2i + 2 = 0$

1) Sachant que (E) admet une solution réelle, la calculer.

2) Résoudre (E).

PARTIE B

Soit le plan rapporté à un repère orthonormé direct (O,I,J) (Unité : 1cm).

Soit $A_1 = I \qquad A_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad A_3\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.

1)Démontrer qu'il existe une similitude directe S de centre O qui transforme A_1 en A_2 et A_2 en A_3.

Donner les éléments caractéristiques de S .

2)On considère la suite de points (A_n) définie par : pour tout entier n supérieur ou égal à 1 ,

$A_{n+1} = S(A_n)$

Dans le repère (O,I,J) (*sur une feuille de papier millimétré)* , placer les points A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 et A_6 .

3) $d(A,B)$ désigne la distance de A à B .

Pour tout entier n supérieur ou égal 1 , démontrer que $d(A_{n+1}, A_{n+2}) = \sqrt{2}d(A_n, A_{n+1})$.

En déduire la longueur L_n de la ligne brisée $A_1A_2......A_n$ en fonction de n .

PROBLEME

L'unité étant le centimètre , le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J) tel que : OI=4 et OJ=1.

PARTIE A

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x} - 7e^{x} + 16}{e^{x} - 3}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère (O,I,J).

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

2) Pour tout x appartenant à D_f, vérifier l'égalité : $f(x) = e^{x} - 4 + \dfrac{4}{e^{x} - 3}$.

3-a)Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Déterminer les équations des asymptotes à (C).

4-a)Démontre que $f'(x)$ peut s'écrire :

pour tout x de D_f, $f'(x) = \dfrac{e^{x}(e^{x} - 1)(e^{x} - 5)}{\left(e^{x} - 3\right)^{2}}$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f .

5) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de (C) avec l'asymptote parallèle à l'axe des abscisses.

6) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point B d'abscisse *ln4* .

7) Construire, dans le repère (O,I,J) la tangente (T) et la courbe (C).

PARTIE B

1) Pour tout x appartenant à D_f, vérifier l'égalité : $f(x) = e^{x} - \dfrac{16}{3} + \dfrac{4e^{x}}{3(e^{x} - 3)}$.

2) t étant un nombre réel strictement négatif, calculer l'aire $A(t)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'asymptote parallèle à l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$.

3) Calculer $\lim\limits_{t \to -\infty} A(t)$.

On donne $\ln 2 \approx 0,7$.

SESSION DE REMPLACEMENT 1995 SERIE D

EXERCICE 1

1) On considère les fonctions f et g, définies pour tout réel x par :

$f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ et $g(x)=\dfrac{1}{\left(1+e^x\right)^2}$.

a)Justifier que pour tout réel x $f(x)=1-\dfrac{e^x}{1+e^x}$,

b) Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

c)Démontrer que pour tout réel x, $g(x)=f(x)-\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$

d) Déterminer une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

2) Soit la suite I, définie pour tout entier naturel n non nul, par :

$I_n=\int_0^1\dfrac{dx}{\left(1+e^x\right)^n}$.

a)Vérifier que $I_1=1+\ln\left(\dfrac{2}{1+e}\right)$ et $I_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1+e}+\ln\left(\dfrac{2}{1+e}\right)$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $I_{n+1}=I_n-\int_0^1\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^{n+1}}\,dx$.

3-a) Démontrer que la suite I est une suite décroissante.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul : $0\le I_n\le\dfrac{1}{2^n}$.

c) Déduire des questions 3a) et 3b) que la suite I est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J).

Soient $A(2;2)$, $B(-4;2)$ et $C(2;-1)$ trois points du plan.

1) Faire une figure et démontrer que ABC est un triangle rectangle.

2) Soit la similitude directe S du plan de centre A telle que $S(B)=C$.

a)Déterminer la transformation de $\mathbb{C}$ associée à S.

b)En déduire l'affixe de l'image C' du point C par S et placer le point C'.

c)Donner les éléments caractéristiques de la similitude S.

3-a)Démontrer que A , B et C' sont alignés et que BCC' est un triangle rectangle.

b)Soit (D) la droite d'équation $y=-\dfrac{1}{2}x$ et (D') son image par la similitude S.

Construire les droites (D) et (D').

c)Ecrire une équation cartésienne de la droite (D').

PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(0)=1 \\ \text{Pour tout réel non nul } x\text{ , } g(x)=1+x-x\ln x \end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0.

2) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations, en précisant les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
3-a)Prouver que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique β dans $[0;+\infty[$.
b) Justifier que $3,5<\beta<3,6$
4) Construire la courbe (C_g) représentative de la fonction g dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J). (*Unité graphique 2 cm*).

PARTIE B

On considère la fonction f définie par : $\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x)=2+\dfrac{\ln x}{1+x}$.
1) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2-a) Démontrer que , pour tout réel x de $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1+x)^2}$.
b) En déduire les variations de f.
3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de la courbe (C_f) représentative de f avec la droite (D) d'équation $y=2$.
4) Construire la courbe (C_f) dans le même repère (O,I,J).

PARTIE C

1-a)Justifier que $\ln\beta=\dfrac{\beta+1}{\beta}$.
b) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\displaystyle\int_1^{\beta} x\ln x\,dx=\frac{(\beta+1)^2}{4}$.
2) Calculer en fonction de β l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C_g), la droite (OI) et les droites d'équation $x=1$ et $x=\beta$.

On prendra ln2=0,69 ; ln3=1,10 ; ln5=1,61 ; ln7=1,95 ; e=2,7

SESSION NORMALE JUIN 1995 SERIE D

EXERCICE 1

On sac contient 6 boules jaunes , 3 boules vertes et une boule rouge indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément 2 boules .

1) Quelle est la probabilité de tirer 2 boules de même couleur ?

2) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 2 boules, associe +2 si les 2 boules sont de même couleur et -2 si les deux boules sont de couleurs différentes.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Vérifier que l'espérance mathématique est -0,4.

3) On recommence 3 fois la même épreuve, en notant à chaque fois la valeur X obtenue, et en remettant les deux boules dans le sac après chaque tirage.

Soit Y la variable aléatoire égale à la somme des 3 valeurs obtenues par X .

a) Déterminer la loi de probabilité de Y .

b) Calculer l'espérance mathématique de Y .

c) Interpréter le résultat obtenu à la question 3b.

On donnera les résultats sous forme de nombres décimaux d'ordre 3.

EXERCICE 2

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 - i = 0$.

2) On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O,I,J) . *(On prendra pour unité 2 cm).*

Soient les points : $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $C(0;-1)$.

On considère la similitude directe S de centre O , de rapport 2 et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

Soit M un point quelconque d'affixe z et M' le point tel que M'=S(M).

a) Déterminer l'affixe z' du point M' en fonction de z .

b) Par une méthode de votre choix, déterminer A', B' et C' les images respectives des points A ,B et C par S. Placer ces points dans le repère (O,I,J).

3) Calculer l'aire du triangle $A'B'C'$ en fonction de l'aire du triangle ABC.

4) Trouver une homothétie de centre O transformant globalement le triangle ABC en le triangle $A'B'C'$. Justifier votre réponse.

PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction f définie , pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, par $f(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$.

1) Etudier les variations de f .

2) En déduire que pour tout x de $]0;+\infty[$, $f(x) > 0$.

PARTIE B

On considère maintenant la fonction g définie , pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, par :

$g(x) = x + 2\frac{\ln x}{x}$.

On appelle (C) la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O,I,J). (On prendra pour unité 3 cm).

1) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition..

2-a) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

b) Démontrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, $g'(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$.

3) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.

4-a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe (C).

b) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à (Δ).

5-a) Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1.

b) On admettra que la courbe (C) est entièrement située au-dessous de la tangente (T).

Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de (T) avec l'axe des abscisses.

c) Déduire de la question 5b et sans calcul , le signe de $g\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

d) Démontrer qu'il existe un réel α unique , appartenant à $\left[\dfrac{2}{3};1\right]$ tel que : $g(\alpha)=0$.

6) Dans le repère (O,I,J), tracer la courbe (C), la droite (Δ) et la tangente (T).

7) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C), (Δ) et les droites d'équation $x=1$ et $x=e$.

On prendra : $\ln 2=0,69$, $\ln 3=1,10$, $\ln 5=1,61$ et $e=2,7$.

SESSION DE REMPLACEMENT 1994 SERIE D

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J)

S est la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

φ est l'application complexe associée à S.

1) Déterminer l'expression de $\varphi(z)$ en fonction du nombre complexe z.

2) On pose $z_0 = 1-i$ et $z_1 = \varphi(z_0)$.

a) Ecrire z_0 sous la forme trigonométrique.

b) Calculer le module r_1 de z_1 et déterminer un argument θ_1 de z_1.

3) Pour tout nombre entier naturel n, on pose :

$z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ où θ_n désigne un argument de z_n et r_n son module.

On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par : $z_0 = 1-i$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{3+i\sqrt{3}}{4} z_n$.

a) Préciser la nature de cette suite et en donner les caractéristiques .

b) Calculer z_n en fonction de n.

c) Calculer r_n et θ_n en fonction de n.

d) Préciser la nature de chacune des suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les caractériser.

EXERCICE 2

Une urne A contient six jetons marqués respectivement 1 ;1 ;2 ;3 ;3 et 3.
Une urne B contient quatre jetons marqués respectivement 0 ;0 ;0 et 5.
On tire un jeton de l'urne A , puis un jeton de l'urne B. On suppose que chaque tirage équiprobable. Le résultat de ce double tirage détermine une variable aléatoire X dont la valeur est le nombre ayant pour chiffre des dizaines le chiffre porté par le jeton extrait de l'urne A et pour chiffre des unités , celui porté par le jeton extrait de l'urne B.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Représenter la fonction de répartition de X.

3) Calcule l'espérance mathématique de la variable X.

PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{(x-2)e^x - x - 2}{e^x - 1}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) .

1–a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

b) Trouver trois nombres réels a, b et c tels que : pour tout x élément de D_f.

$f(x) = ax + b + \frac{ce^x}{e^x - 1}$.

2–a) Calculer les limites aux bornes des intervalles de D_f.

b) Démontrer que la droite (Δ_1) d'équation $y = x-2$ est asymptote à (C).

c) Démontrer que la droite (Δ_2) d'équation $y = x+2$ est asymptote à (C).

3) On note S la symétrie centrale de centre O.

a) Démontrer que $S\left[(\Delta_1)\right]=(\Delta_2)$.

b) Démontrer que $S\left[(C)\right]=(C)$.

4) On admettra que f est dérivable sur $\left]-\infty;0\right[$ et sur $\left]0;+\infty\right[$.

a) Calcule $f'(x)$ pour tout x élément de D_f.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

PARTIE B

1) Démontrer que l'équation : $\forall x\in\left]-\infty;0\right[,\ f(x)=0$ admet une solution unique α.

2-a) Calculer les images de $\ln(11)$ et $\ln(12)$ par f.

b) En déduire un encadrement de α.

3) Tracer la représentation graphique (C) de f.

4) Etant donné un nombre entier naturel k supérieur ou égal à 3, on note A_k l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C), la droite (Δ_1) et les droites d'équations $x=3$ et $x=k$.

a) Calculer A_k.

b) Calculer la limite de A_k lorsque k tend vers plus l'infini.

On prendra : $\ln 11\approx 2,4$; $\ln 12\approx 2,5$ et $e\approx 2,7$.

SESSION NORMALE JUIN 1994 SERIE D

EXERCICE 1

Une loterie nationale propose un jeu appelé "le jeu de trèfle".

Chaque ticket comporte une grille de 9 cases à gratter. Dans chaque grille, 3 cases exactement sont marquées d'un trèfle.

Un ticket est gagnant si les trèfles sont alignés sur une colonne, sur une ligne , ou sur une diagonale (Voir exemple ci-dessous)

Un ticket perdant

	A	B	C
1	®		
2	®	®	
3			

Un ticket gagnant

	A	B	C
1		®	
2		®	
3		®	

1 –a) Quelle est la probabilité pour qu'un joueur ayant acheté un ticket gagne ?

b) Quelle est la probabilité de gagner sachant que la case A , contient un trèfle ?

(A_1 *est la case correspondant à l'intersection de la colonne* A et de la ligne 1)

c) Quelle est la probabilité de gagner sachant que la case numérotée A_1 ne contient pas de trèfle ?

2) Un joueur achète n tickets ($n \in \mathbb{N}^*$).

a) Ecrire en fonction de n , la probabilité P_n pour que le joueur ait au moins un ticket gagnant.

b) Pour quelle valeur de n a-t-on $P_n \geq 0{,}99$?

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O,I,J).

1) Déterminer (Γ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

$|(1-i)z+2i| = 2$.

2) Etudier la transformation F du plan qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = (1-i)z+2i$.

3) Déterminer l'image du cercle (C) de centre $\Omega(2;-1)$ et de rayon 1 par F .

PROBLEME

PARTIE A

On considère g la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $g(x) = 1 + x(2\ln|x|+1)$ où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

1–a) Déterminer l'ensemble de définition de g .

b) Déterminer les limites de g aux bornes des intervalles de son ensemble de définition.

2–a) Démontrer que g est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et expliciter sa fonction dérivée g'.

b) Dresser le tableau de variation de g .

3-a) Calculer l'image de -1 par g .

b) Quelle est l'image J par g de l'intervalle I tel que $I = \left]-\infty; -e^{-\frac{3}{2}}\right]$?

c) Démontrer que l'application h définie sur I par $h(x) = g(x)$ est une bijection de I sur J .

d) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $x \in \mathbb{R}$,$g(x) = 0$.

4) Déduire de tout ce qui précède que :

$\forall x \in]-\infty;1[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]1;0[\cup]0;+\infty[$, $g(x) > 0$.

PARTIE B

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = x(x\ln|x|+1) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) (*Unité : 5cm*).

1) Démontrer que f est continue en 0.

2-a) Donner l'ensemble de définition de f. Préciser les limites aux bornes de son ensemble de définition.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et préciser son ensemble de dérivabilité.

c) Expliciter la fonction dérivée de f' et dresser le tableau de variations de f.

3-a) Trouver une équation de la tangente (D) à la courbe (C) au point O.

b) Démontrer que (D) coupe (C) en deux autres points E et F et calculer leurs coordonnés.

c) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à (D).

4) Démontrer que (C) coupe (OI) en un point K d'abscisse b telle que : $-1,8 < b < -1,7$.

5) Tracer avec précision la courbe (C).

PARTIE C

1) Soit α un réel appartenant à $]0;1[$.

A l'aide d'une intégration par parties , calculer $\int_{\alpha}^{1} x^2 \ln x dx$.

2-a) Calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limitée par (C), la droite (D) et les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$.

b) Calculer $\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ >}} A(\alpha)$.

(*On prendra :* $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 3 \approx 1,1$; $\ln 5 \approx 1,6$; $\ln 17 \approx 2,9$; $e \approx 2,7$; $\sqrt{e} \approx 1,6$).

SESSION DE REMPLACEMENT 1993 SERIE D

EXERCICE 1

On considère les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$U_0 = \frac{1}{2}$ et $V_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et pour tout nombre entier n.

$$\begin{cases} U_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}U_n - V_n \\ V_{n+1} = U_n + \frac{\sqrt{3}}{3}V_n \end{cases}$$

On pose : $z_n = U_n + iV_n$

1) Calculer $|z_0|$; puis $|z_{n+1}|$ en fonction de $|z_n|$ .En déduire , en fonction de n , une expression de $|z_n|$.

2-a) Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.

b) Trouver $ARG\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + i\right)$.

c) Déduire de ce qui précède un argument θ_{n+1} de z_{n+1} en fonction d'un argument de θ_n de z_n.

d) Trouver $Arg(z_0)$ puis une expression de θ_n en fonction de n.

3) Exprimer U_n et V_n en fonction de n.

EXERCICE 2

Sur une route , deux carrefours successifs sont munis de feux tricolores A et B. La couleur du feu B est indépendante de celle du feu A.

La probabilité que le feu A soit vert est $\frac{3}{4}$.

La probabilité que le feu B soit vert est $\frac{1}{2}$.

La probabilité de la couleur orange est toujours nulle.

1- Un automobiliste passe aux deux carrefours .

a) Calculer la probabilité qu'il rencontre deux feux verts .

b) Calculer la probabilité qu'il rencontre au moins un feu vert.

2- On ne s'occupe plus que du feu A.

Un automobiliste passe quatre fois à ce carrefour.

X est la variable aléatoire qui a pour valeur le nombre de feux verts que l'automobiliste rencontre.

a) Trouver la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'espérance mathématique de X . Pouvait-on prévoir ce résultat ?

PROBLEME

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x - 1}$ et (C) le représentation graphique de f dans le repère orthonormé (O,I,J). (*Unité :1 cm*).

1) Etudier les variations de f sur $]0;+\infty[$ et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2-a) Trouver les coordonnées du point d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses.

b) Donner une équation de la tangente (T) à (C) en ce point.

c) Tracer la représentation graphique (C') de la restriction de f à $]0;+\infty[$.

3) Démontrer que le point A(0 ;2) est centre de symétrie de (C).

Indiquer un moyen géométrique d'obtenir (C) à partir de (C').

4) Trace (C).

5-a) Démontrer que pour tout réel x de l'ensemble de définition de f , on a : $f(x)=3-\dfrac{2e^x}{e^x-1}$.

b) Calculer l'aire de la partie du plan délimité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\ln 2$ et $x=\ln 9$.

6- a) On note h la restriction de f à $]0;+\infty[$.

Démontrer que h permet de définir une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle K que l'on déterminera.

b) On note g l'application réciproque de h.

Tracer la représentation graphique (Γ) de g dans le repère orthonormé (O,I,J).

Justifier la construction.

c) Pour tout réel x élément de K , déterminer $g(x)$ en fonction de x.

d) Calculer l'aire de la portion de plan délimité par (Γ), l'axe des ordonnées et les droites d'équations $y=\ln 9$ et $y=\ln 2$.

7- a) Résoudre analytiquement l'inéquation : $f(x)\geq -1$.

b) Donner , suivant les valeurs du réel m , le nombre de solutions de l'équation $\left[f(x)\right]^2=m$.

SESSION NORMALE JUIN 1993 SERIE D

EXERCICE 1

Le propriétaire d'une loterie en vente des billets numérotés de 1 à 50.
La règle du jeu est la suivante :
-Si le numéro du billet se termine par 0 ou 5, le ticket gagne 2000f.
- Si le numéro du ticket se termine par 3, 6 ou 9 , le client gagne 1000f.
- Dans les autres cas, le client ne gagne rien.

1) Le client choisit un seul billet. On suppose que chaque billet a la même chance d'être tiré.
   a) Quelle est la probabilité pour qu'il gagne 1000f ?
   b) Quelle est la probabilité pour qu'il gagne 2000f ?
   c) Soit X la variable aléatoire qui , à chaque billet tiré , associe le gain réalisé.
      Calcule l'espérance mathématique de X .

2) Trouvant qu'il y a trop de gagnants , le propriétaire décide de retirer de la vente un certain nombre n de billets terminés par 0 ou par 5. $0 \leq n \leq 10$.
Le client tire alors un billet parmi ceux restants.
Soit X_n la variable qui , à chaque billet tiré, associe le gain réalisé.
   a) Détermine en fonction de n , l'espérance mathématique de X_n.
   b) En déduire le nombre minimal de billets à retirer pour que $E(X_n) \leq 500$.

3) Le propriétaire enlève 7 billets terminés par 0 ou 5.
Un client tire simultanément 2 billets parmi ceux restants.
   a) Quelle est la probabilité pour qu'il gagne 4000f ?
   b) Quelle est la probabilité pour qu'il ne gagne pas ?

EXERCICE 2

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes, (P) le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1cm).

On considère l'équation (E) défini dans $\mathbb{C}$ par : (E) $\dfrac{z^4}{8} - (1+i)z^3 + 6iz^2 + 8(1-i)z - 10 = 0$.

1) Démontre que (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2 .
2) En utilisant la question précédente, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
On désignera par z_1 , z_2 z_3 et z_4 les solutions de cette équation avec $R_e(z_3) < R_e(z_4)$.
$R_e(z_3)$ désigne la partie réelle de z_3 et $R_e(z_4)$ désigne celle de z_4.
3) On appelle A, B ,C et D les points du plan (P) d'affixes respectives 2 , $2i$, $2+4i$ et $4+2i$.
Faire une figure et démontrer que ABCD est un carré.
4) Déterminer la similitude plane directe S telle que S(A)=B et S(C)=D.
   On précisera les éléments caractéristiques de S.

PROBLEME

PARTIE A

On considère g la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x+1)^2 - \ln(x+1)$ où $\ln$ désigne le logarithme népérien .

1) Etudier les variations de g sans calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de g .
2) Déduire de l'étude précédente le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + \dfrac{1+\ln(x+1)}{x+1}$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé (O, I, J) où l'unité est le 2 cm.

1-a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

c) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Démontre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
Préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.

2-a) Etudier les variations de f.

b) Calculer $f(0)$, $f(-\dfrac{1}{2})$, $f(\dfrac{1}{e}-1)$.

c) Démontrer qu'il existe un réel α appartenant à un intervalle I que l'on précisera tel que $f(\alpha) = 0$.

d) Déterminer le point A de (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (D).

3-a) Déterminer le point d'intersection B de (C) et de son asymptote (D).

b) Tracer (C) dans le repère orthonormé (O, I, J) en utilisant les renseignements précédents .

c) Calcule l'aire de la partie (E) du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = -1 + \dfrac{1}{e}$, $x = 0$ et $y = x$.

4-a) Démontrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée.

b) Représenter graphiquement f^{-1} dans le même repère que précédemment.

SESSION NORMALE JUIN 1992 SERIE D

EXERCICE 1

On dispose d'un quadrillage de 3 lignes sur 6 colonnes et de jetons sur lesquels sont inscrites les 18 premières lettres de l'alphabet français.

L'expérience consiste à placer , au hasard un jeton par case de manière à recouvrir exactement les 18 cases formées par ce quadrillage .

1) Quel est le nombre de dispositions possibles distincts de ces 18 lettres ?
(*On n'effectuera pas le calcul*)

2) On désigne par E l'évènement : « les lettres a, b et c se trouvent toutes les trois sur la première ligne.»
Calculer la probabilité de l'évènement E .
(*On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible*)

3) Sachant que la première case de la première ligne est occupée par un jeton portant la lettre d , quelle est la probabilité pour que les lettres a , b , c soient encore sur la première ligne ?
(*On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible*).

EXERCICE 2

On considère l'équation suivante : $(E)\ z \in \mathbb{C},\ z^3 + (2+i)z^2 + (-3+4i)z - 10 + 5i = 0$

1-a) Démontre que $(2-i)$ est solution de l'équation (E) . (*On justifiera*).
b) Factoriser le polynôme $z^3 + (2+i)z^2 + (-3+4i)z - 10 + 5i$.
c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

2) Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $2-i$, $-2+i$, $-2-i$.
a) Faire une figure et placer ces points (*unité ; le cm*).
b) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe S transformant B en C et C en A.
(*Il est préférable d'utiliser une méthode géométrique mais toute autre méthode sera cependant acceptée*).
c) Construire l'image de A par S .
On justifiera la construction.

PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction numérique g définie comme suit :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 - 1 + \ln|x|$$

(*ln désigne le logarithme népérien)*

1) Vérifier que la fonction g est une fonction paire et calculer $g(1)$.

2) Etudier les variations de la fonction numérique g et dresser son tableau de variations (*il est inutile de calculer les limites*).

3) En s'aidant des deux questions précédentes, donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B

On considère la fonction numérique f définie comme suit :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + 1 - \frac{\ln|x|}{x}$$

(C) désignera la courbe représentative de f et le plan sera rapporté à un repère orthonormé (O,I,J). (*Unité choisie : 2cm*).

1) Calculer, si elle existe , la limite de f en 0 et donner une interprétation graphique du résultat.

2- a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Démontrer que la droite (D) d'équation : $y = x+1$ est asymptote à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Démontrer que (C) et (D) se coupent en deux points A et B d'abscisses respectives x_A et x_B telles que $x_B < 0 < x_A$.

Donner les coordonnées des points A et B et déterminer la position de (C) par rapport à la droite (D).

d) Démontrer que J le point d'intersection des asymptotes à la courbe (C) est le centre de symétrie de (C).

3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

(*On pourra se servir de l'étude du signe de* $g(x)$ de la partie **A**).

4- a) Calcule $f(-e)$ et $f(-\frac{1}{e})$ en fonction de e. On donne les arrondis d'ordre 2 : $e \approx 2,72$; $\frac{1}{e} = 0,37$.

En déduire les arrondis d'ordre 1 de $f(-e)$ et $f(-\frac{1}{e})$.

b) Construire avec précision la courbe (C) en s'aidant de son centre de symétrie J et de la droite (D). (*On expliquera cette construction*).

PARTIE C

1) Tracer les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $x = -e$ et $x = -\frac{1}{e}$.

2) Soit (β) la bande du plan de bord (D_1) et (D_2).

Mettre en évidence :

a) à l'aide d'un crayon de couleur , les parties de (C) et (D) situées dans la bande (β).

b) la partie du plan située dans la même bande (β) limitée par la courbe (C) et la droite (D). (*à l'aide de hachures*).

3) Calculer l'aire de cette partie hachurée.

CORRIGES

DES

EXAMENS

CORRECTION SESSION NORMALE 2024 SERIE D

EXERCICE 1

1-Vrai 2-Vrai 3-Faux 4-Vrai

EXERCICE 2

1-B 2-C 3-C 4-A

EXERCICE 3

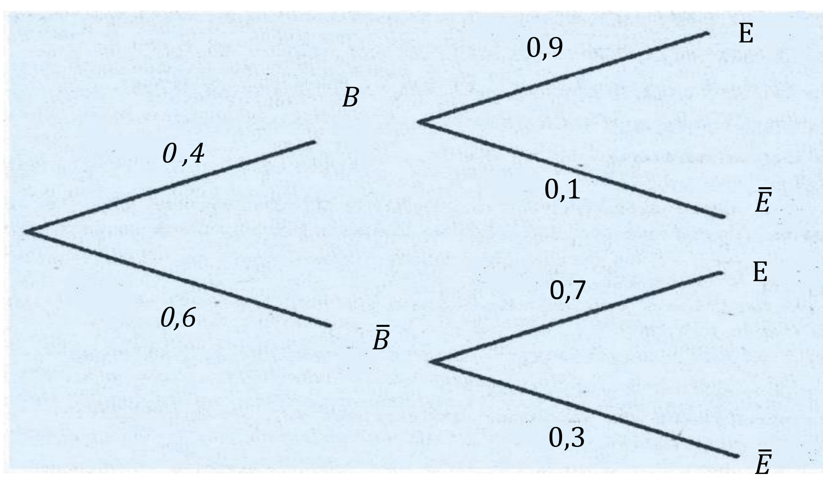
1- Démontrons que la probabilité que cet élève ait obtenu un emploi est 0,78

soit les évènements suivants:

B : 《l'élève est un bachelier》

E: ≪ l'élève a obtenu un emploi»

Arbre pondéré



On a :

$$P(E) = P(B \cap E) + P(\bar{B} \cap E)$$
$$= P(B) \times P_B(E) + P(\bar{B}) \times P(E)$$
$$= 0{,}4 \times 0{,}9 + 0{,}6 \times 0{,}7$$

$$P(E) = 0{,}78$$

2-a) calculons $E(x)$ et interprétons le résultat obtenu.

$$E(x) = n \times P(E) = 5 \times 0{,}78$$
$$E(x) = 3{,}9$$

Interprétation

En moyenne personnes sur 5 de ce centre ont obtenu un emploi.

2-b) calculons la probabilité qu'au moins 3 de ces élèves aient obtenu un emploi

$P(x \geqslant 3) = P(x = 3) + P(x = 4) + P(x = 5)$

$P(x = 3) = C_5^3(0{,}78)^3(1 - 0{,}78)^2 \simeq 0{,}230$

$P(x = 4) = C_5^4(0{,}78)^4(1 - 0{,}78) \approx 0{,}407$

$P(x = 5) = (0{,}78)^5 \approx 0{,}289$

alors $P(x \geqslant 3) = 0{,}230 + 0{,}407 + 0{,}289$

$P(x \geqslant 3) = 0{,}926$

EXERCICE 4

1. Démontrons que h est une solution de (E).

h est dérivable sur $[0; +\infty[$ $\forall x \geqslant 0$ on a :

$\forall x \geqslant 0$ on a:

$h'(x) - 2h(x) = (2x + 3)' - 2(2x + 3)$

$= 2 - 4x - 6$

$h'(x) - 2h(x) = -4x - 4$

Alors h est solution de (E).

2. Déterminons les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E') .

(E '): $y' - 2y = 0$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E') sont les fonctions définies par $y(x) = ke^{2x}, k \in \mathbb{R}$.

3-a) Démontrons que g est solutions de (E) si et seulement si $g - h$ est solution de (E').

Si g est solutions de (E), on a $g'(x) - 2g(x) = -4x - 4$ (1)

or h est solution de (E) donc $h'(x) - 2h(x) = -4x - 4$ (2)

(1)-(2)$\Longrightarrow$ $(g'(x) - 2g(x)) - (h'(x) - 2h(x)) = (-4x - 4) - (-4x - 4)$

$\Longrightarrow$ $(g - h)'(x) - (g - h)(x) = 0$ d'où $g - h$ est solution de (E').

Réciproquement , si $g - h$ solution de (E') alors

$g - h$ solution de (E')

$\Rightarrow (g - h)'(x) \quad - 2(g - h)(x) = 0$

$\Rightarrow g' - h' - 2g + 2h = 0$

$\Rightarrow g' - 2g = h' - 2h$

$\Rightarrow g'(x) - 2g(x) = -4x - 4$

$\text{cor } \forall x \in R, h'(x) - 2h(x) = -4x - 4$

$Alors\ \ g\ \ est$ solution de (E).

Ainsi g est solution de (E) si et seulement si $g - h$ est solution de (E').

$3 - b)$ Déduisons les solutions de (E).

$g - h$ est solution de (E') donc $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$g(x) - h(x) = ke^{2x}, b \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow g(x) = ke^{2x} + h(x)$

$g(x) = ke^{2x} + 2x + 3, \quad k \in \mathbb{R}$

les solutions dans $\mathbb{R}$ de (E) sont donc les fonctions g tel que $g(x) = ke^{2x} + 2x + 3$, $k \in \mathbb{R}$.

$3-c)$ justifions que $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = -2e^{2x} + 2x$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -2e^{2x} + 2x + 3$

$f(0) = 1 \Leftrightarrow ke^{2\times 0} + 2\times 0 + 3 = 1$

$\Leftrightarrow \mathrm{k} + 3 = 1$
$\Leftrightarrow \mathrm{k} = -2$

Donc $\forall x \in R$, on $a\ f(x) = -2e^{2x} + 2x + 3$.

4-a) Justifions que est f décroissante sur $[0; +\infty[$.
$\forall x \in [0; +\infty[$, on a:

$f'(x) = (-2e^{2x} + 2x + 3)'$
$f'(x) = -4e^{2x} + 2$

$\forall x \in [0; +\infty[$, ona:

$2x \geqslant 0$
$\Leftrightarrow e^{2x} \geqslant 1$
$\Leftrightarrow -4e^{2x} \leqslant -4$
$\Leftrightarrow -4e^{2x} + 2 \leqslant -2 \leqslant 0$
$\Leftrightarrow f'(x) \leqslant 0$
$\forall x \in [0; +\infty[\ , f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $[0; +\infty[$.

$4-b)$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(-\frac{2e^{2x}}{x} + 2 + \frac{3}{x}\right)$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

f est continue et structement décrorssante sur $[0; +\infty[$ de plus

$f([0; +\infty[) =]-\infty; 1]$ or $-1 \in]-\infty; 1]$ donc l'équation $f(x) = -1$ admet une solution unique α sur $[0; +\infty[$.

$f(0{,}4) \approx -0{,}65$, $f(0{,}5) \approx -1{,}44$ et $-1 \in [-1{,}44j - 0{,}65]$ d'où d'ou $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

EXERCICE 05

1. Démontrons que $\forall x \in]1; +\infty[\ , 1 + x + \ln x > 0$

$\forall x > 1, 1 + x > 0$ et $\ln x > 0$

donc $\forall x \in]1; +\infty[,\ 1 + x + \ln x > 0$.

2-a) calculons la limite de h à droite en 1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1} h(x) &= \lim_{x\to1} \frac{x+1}{x\ln x} \\ &= \lim_{x\to1} \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{\ln x} = +\infty\end{aligned} \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x\to1} \frac{x+1}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to1} \frac{1}{\ln x} = +\infty \end{cases}$$

Comme $\lim_{x\to 1} h(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$.

2-b) Démontrons que l'axe des abscisses est une asymptote à $(\mathcal{C})$.en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x\ln x} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\ln x} = 0 \end{cases}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{\ln x} = 0$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$ alors la droite d' équation $y = 0$ c'est à dire l'axe des abscisses est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$

3-a] Démontrons que $\forall x \in]1;+\infty[$, $h'(x) = -\frac{1+x+\ln x}{(x\ln x)^2}$.

$$\forall x \in]1;+\infty[\ , h'(x) = \left(\frac{x+1}{x\ln x}\right)'$$
$$= \frac{(x+1)'(x\ln x)-(x\ln x)'(x+1)}{(x\ln x)^2}$$
$$= \frac{x\ln x-\left(x'\ln x+(\ln x)'x\right)(x+1)}{(x\ln x)^2}$$
$$= \frac{x\ln x-(\ln x+1)(x+1)}{(x\ln x)^2}$$
$$= \frac{x\ln x-x\ln x-\ln x-x-1}{(x\ln x)^2}$$
$$= \frac{-1-x-\ln x}{(x\ln x)^2}$$

d' ou $h'(x) = -\frac{1+x+\ln x}{(x\ln x)^2}$

3-b) justifions que $\forall x \in]1;+\infty[$, $h'(x) < 0$.

$\forall x > 1$, on a $1 + x + \ln x > 0$ et
$\frac{1}{(x\ln x)^2} > 0$ donc $\frac{1+x+\ln x}{(x\ln x)^2} > 0$
d'où $-\frac{1+x+\ln x}{(x\ln x)^2} < 0$

Ainsi $\forall x \in]_1;+\infty[$, $h'(x) < 0$

4 – Démontrons que h est une bijection de $]1 + +\infty[$ sur un intervalle K à préciser.

$\forall x \in]1;+\infty[\ h'(x) < 0$ Donc h est continue et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ alors h réalise une bijection de $]1;+\infty[$ dans l'intervalle $= h(]1;+\infty[\,) =]0;+\infty[$.

5. Démontrons que $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (Γ) sur $]1++\infty[$.

$\forall x \in\ ]1;+\infty[$ on a:

$h(x)-g(x)=\frac{x+1}{x\ln x}-\frac{1}{\ln x}$

$=\frac{x+1}{x\ln x}-\frac{x}{x\ln x}$

$=\frac{x+1-x}{x\ln x}$

$h(x)-g(x)=\frac{1}{x\ln x}$

$\forall x \in]1;+\infty\Big[,\ \frac{1}{x\ln x}>0$ donc $h(x)-g(x)>0$ alors $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (Γ) sur $]1++\infty[$.

6-a) justifions que $\int_e^{e^2}\frac{1}{\text{jin}\, nx}dx=\ln 2$

$\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln}\ln x$

$=[\ln(\ln x)]_e^{e^2}$

$=\ln(\ln e^2)-\ln(\ln e)$

$=\ln(2)-\ln(1)$

$\int_{e^e}^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx=\ln 2$

6 -b) Déterminons l'aire A

$\forall x \in [e;e^2], \lg(x)-g(x)>0$ dom

$A=\int_e^{e^2} h(x)-g(x)\Big]dx$ Ua

$\mathrm{U}a=2\times 2=4\ \mathrm{cm}^2$

$A=4\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$

$A=4\ln 2\ \mathrm{cm}^2$

EXERCICE 06

Pour répondre à la préoccupation de monsieur Zahui, je vais utiliser les notions de suites numériques.

Pour cela, je vais:

- Déterminer la nature de la suite V_n égale au montant généré par l’épargne de monsieur Zahui.
- Exprimer V_n en fonction de .
- Résoudre l'inéquation $V_n \geqslant 40.000.000$ afin de déterminer la valeur minimale de n.

Déterminons la nature de la suite V_n

$V_0\ =20.000.000$

$\forall n \in \mathbb{N} V_{n+1}=V_n+0{,}069V_n$

$V_{n+1}=1{,}069V_n$

(V_n) est donc une suite géométrique de raison $q=1{,}069$ et de premier terme $V_0=20.000\cdot 000.$

Exprimons V_n en fonction de n

$V_n = V_{0\times}q^n$
$V_n = 20.000 \cdot 000 \times (1{,}069)^n$

Déterminons n

$V_n \geqslant 40.000 \cdot 000 \Leftrightarrow (1{,}069)^n \geqslant 2$

$\Leftrightarrow \ln(1{,}069)^n \geqslant \ln 2$

$\Leftrightarrow n\ln(1{,}069) \geq \ln 2$

$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 2}{\ln(1{,}069)}$

$\Leftrightarrow n \geqslant 10{,}39$

la valeur minimale de n est $n = 11$
Monsieur Zahui devra attendre 11 ans pour commencer son projet.

CORRECTION SESSION NORMALE 2023 SERIE D

EXERCICE 1

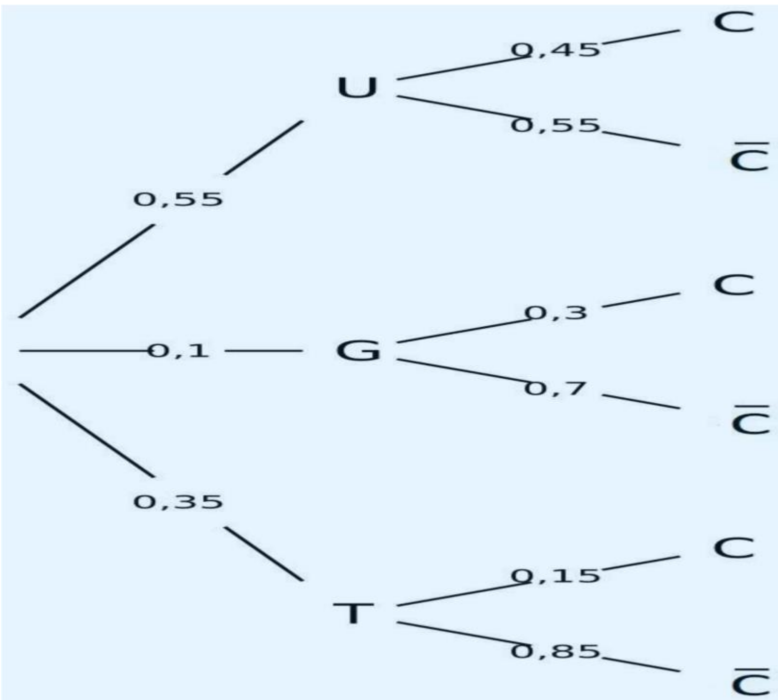
1. Faux 2. Vrai 3. Faux 4. Faux

EXERCICE 2

1. A 2. B 3. B 4. C

EXERCICE 3

1. arbre pondéré.



2. Calculons la probabilité pour que l'ancien élève poursuive ses études dans une université et ait choisi de vivre en colocation.

$P(\mathrm{U} \cap \mathrm{C}) = P(U) \times P_U(C)$
$P(\mathrm{U} \cap \mathrm{C}) = 0{,}55 \times 0{,}45$
$P(\mathrm{U} \cap \mathrm{C}) = 0{,}2475$

3. Justifions que la probabilité de l'évènement C est égale $0{,}33$.

$P(C) = P(\mathrm{U} \cap \mathrm{C}) + P(\mathrm{G} \cap \mathrm{C}) + P(\mathrm{T} \cap \mathrm{C}) = 0{,}55 \times 0{,}45 + 0{,}1 \times 0{,}3 + 0{,}35 \times 0{,}15 = 0{,}33$

4. Calculons $P_C(U)$

$P_C(U) = \frac{P(\mathrm{U} \cap \mathrm{C})}{P(C)} = \frac{0{,}2475}{0{,}33} = 0{,}75$

EXERCICE 4

$z_\Omega = 1 + i$, $z_A = 1$ et $z_B = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.

1. a. Justifions que $\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \frac{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)-(1+i)}{(1)-(1+i)} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}{-i} = \frac{\frac{1}{2}(1-i)}{-i} = \frac{\frac{1}{2}(1-i)\times i}{-i^2} = \frac{1}{2}(1+i)$$

$$\left|\frac{1}{2}(1+i)\right| = \left|\frac{1}{2}\right| \times |(1+i)| = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Arg\left(\frac{1}{2}(1+i)\right) = Arg\left(\frac{1}{2}\right) + Arg(1+i) = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Alors $\frac{1}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi $\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b. Déduisons que S a pour rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et pour angle $\frac{\pi}{4}$.

S	
Ω	Ω
A	B

Rapport

$$k = \frac{\Omega B}{\Omega A} = \left|\frac{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)-(1+i)}{(1)-(1+i)}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}{-i}\right| = \left|\frac{1}{2}(1+i)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Angle

$$\theta = Mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}}\right) = Arg\left(\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega}\right) = Arg\left(\frac{1}{2}(1+i)\right) = \frac{\pi}{4}$$

c. Démontrons que l'écriture complexe de S est $z' = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z + 1$.

S: $z' = az + b$

Avec $\begin{cases} a = ke^{i\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ b = (1-a)z_\Omega = \left[1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right](1+i) = 1 \end{cases}$

Donc S : $z' = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z + 1$.

2. a. Justifions que l'affixe du point K image de J par S est $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

$z' = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z + 1$

$S(J) = K \Leftrightarrow z_K = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z_J + 1 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) \times i + 1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

Donc $z_K = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

b. Démontrons que les points O , K et Ω sont alignés.

$$\frac{z_K - z_O}{z_\Omega - z_O} = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)-0}{(1+i)-0}$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)}{(1+i)} = \frac{\frac{1}{2}(1+i)}{(1+i)} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ donc les points O , K et Ω sont alignés.

EXERCICE 5

$\forall x \in [0;+\infty[, f(x) = xe^{-x}$

1. a. Déterminons la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$$

b. Justifions que $\forall x \in [0,+\infty[$, $f'(x) = (1-x)e^{-x}$.

f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $f'(x) = (xe^{-x})'$
$$= x'e^{-x} + x(e^{-x})'$$
$$= e^{-x} - xe^{-x}$$

$$f'(x) = (1-x)e^{-x}$$

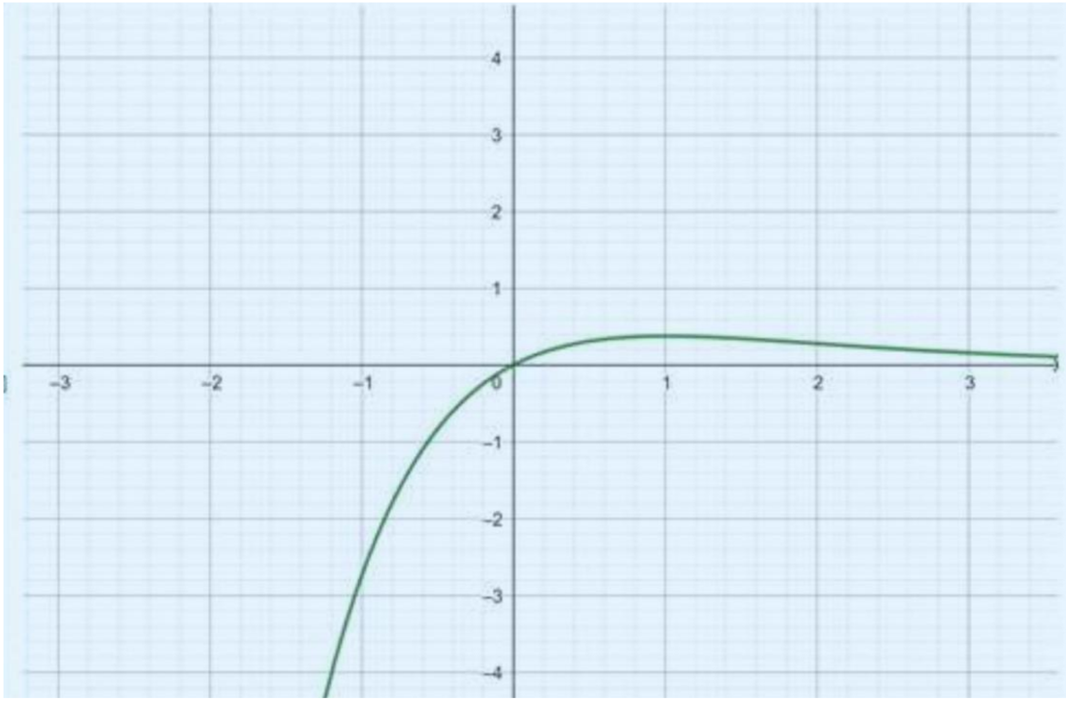
c. $\forall x \in [0+\infty[$ $e^{-x} > 0$ donc le sigue de $f'(x)$ est celui de $(1-x)$.

$\forall x \in]0;1[$, $f'(x) > 0$
$\forall x \in]1;+\infty[$, $f'(x) < 0$
f strictement croissante sur $]0;1[$ et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

d. Tableau de variation de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

e. Construisons (C)



2. Démontrons que l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ admet une solution unique α dans $]0;1[$.
Pour Tout $\in]0;1[$, f est continue et strictement croissante. De plus $f(]0;1[) =]0, e^{-1}[$
or $\frac{1}{4} \in]0; e^{-1}[$ donc l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ admet une solution unique α dans $]0;1[$.

3. $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n e^{-v_n} \end{cases}$

a. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$.
$* \, U_0 = \alpha \;\; or \; \alpha \in]0;1[$ alors $\alpha > 0$ donc $U_0 > 0$.
supposons que $\forall k \in \mathbb{N}, U_k > 0$ puis démontrons que $U_{k+1} > 0$
$U_{\mathrm{k}} > 0 \Leftrightarrow U_k \; e^{-U_{\mathrm{k}}} > 0 \Leftrightarrow U_{k+1} > 0$
Conclusion
$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; U_n > 0$

b. Démontrons que la suite U_n est décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = U_n e^{-u_n} - U_n$
$\mathrm{Or} \; \forall n \in \mathbb{N}, e^{-U_n} \leqslant 1$
$\Leftrightarrow U_n e^{-U_n} \leqslant U_n$ car $u_n > 0$ donc $U_n e^{-U_n} - U_n \leqslant 0$

d'où $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$ alors U_n et decroissante.

3. c) justifions que la suite (U_n) est convergente .
(U_n) est décroissante et minorée $(U_n > 0)$ donc (U_n) est convergente.

d. Déterminons la limite de la suite (U_n)

La limite de la suite (U_n) est solution de l'équation $f(x) = x \quad \forall x \in [0; +\infty[$.

$f(x) = x \qquad \forall x \in [0; +\infty[$
$f(x) = x \Leftrightarrow xe^{-x} = x$

$\Leftrightarrow xe^{-4} - x = 0$

$\Leftrightarrow x(e^{-x} - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $e^{-x} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $e^{-x} = 1$

$\Leftrightarrow x = 0 \; ou \ln e^{-x} = \ln 1$
$\Leftrightarrow x = 0$ on $-x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

Donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$.

EXERCICE 6

Pour répondre à la préoccupation de gérant de la coopérative, de vais utiliser la leçon « DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTIONS » . Pour se faire , je vais:

- Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$ puis dresser son tableau de variation.
- Déterminer le maximum de
- Conclure.

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$.

Sens de variations de f et tableau de variation

f est dérivable sur $[0; 1[$

$$\forall\, x \in [0; 1[\ , f'(x) = \left(\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\right)'$$
$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{1}{2}\left(x'\sqrt{1-x^2} + x(\sqrt{1-x^2})'\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{1-x^2} + x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 - x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$\forall x \in [0;1[\,, f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$\forall x \in [0;1[$, et $\sqrt{1-x^2} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1-2x^2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\forall x \in \left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]_1 f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

$\forall x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right[: f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right[$.

tableau de variation f

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	0	||
$f(x)$	0 ↗	$\frac{1}{4}$	↘ 0

Détermination du maximum de la fonction f

La fonction f admet en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ un maximum égale à $\frac{1}{4}$

Conclusion

l'aire de la partie réservée à la culture des tomates étant modélisée par la fonction , on en déduit que l'aire maximale est $\frac{1}{4}\, m^2$ ou $0{,}25\, m^2$

CORRECTION SESSION NORMALE 2022 SERIE D

EXERCICE 1

(1) une bijection
(2) la droite de régression
(9) fonction dérivable
(3) des primitives

EXERCICE 2

1- C

2 -A

3 -A

4 -B

EXERCICE 3

1. Justifions que le triangle ABC est isocèle en A.

On a : $AB = |z_B - z_A| = |1 + i + \sqrt{2}| = |1 + \sqrt{2} + i| = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

$$AC = |z_C - z_A| = |1 - i + \sqrt{2}| = |1 + \sqrt{2} - i| = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

Donc $AB = AC$, on en déduit que le triangle ABC est isocèle en A .

2. a) Justifions que : $S(D) = D$ et $S(B) = C$.

- On a: $(1 + i)z_D + 1 - 3i = (1 + i) \times (3 + i) + 1 - 3i$

$$= 3 + i + 3i - 1 + 1 - 3i = 3 + i$$

$$(1 + i)z_D + 1 - 3i = z_D \text{ donc } S(D) = D$$

- On a: $(1 + i)z_B + 1 - 3i = (1 + i) \times (1 + i) + 1 - 3i$

$$= 1 + 2i - 1 + 1 - 3i = 1 - i$$

$(1 + i)z_B + 1 - 3i = z_C$ donc $S(B) = C$

b) Déterminons les éléments caractéristiques de S.

<u>Le centre de S</u>.

On a: $S(D) = D$ donc D est le centre de S .

Le rapport k de S

$k = |1+i| = \sqrt{2}$

L'angle α de S

$\alpha = \text{Arg}(1+i)$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

c) Déterminons l'image (C') du cercle (C) de diamètre $\{BD]$ par S.

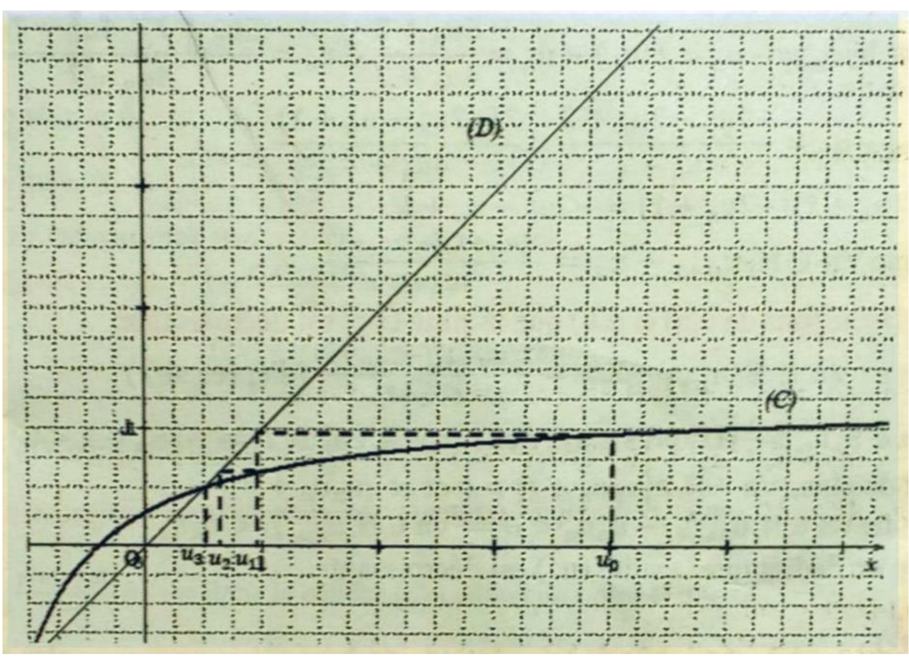
L'image (C') du cercle (C) de diamètre $[BD]$ par S est le cercle de diamètre $S([BD])$.

Or $S([BD]) = [CD]$.

On en déduit que (C') est le cercle de diamètre $[CD]$.

EXERCICE 4

1) Construisons à l'aide de (C) et de la droite (D) d'équation $y = x$ les quatre premiers termes u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.



2) On admet que la fonction f est dérivable et strictement croissante sur $]\,0;+\infty[$.

a) Démontrons par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \frac{1}{2}$.

Soit la proposition $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \frac{1}{2}$

- Vérifions que $P(0)$ est vraie

$$\text{Pour } n = 0, u_0 = 4 \text{ or } 4 > \frac{1}{2} \text{ donc } u_0 > \frac{1}{2}$$

D'où $P(0)$ est vraie.

- Supposons que pour tout entier naturel $k, P(k)$ est vraie.

Démontrons que $P(k+1)$ est vraie

$\forall k \in \mathbb{N}, u_k > \dfrac{1}{2}$

f étant strictement croissante sur $]0; +\infty\left[, f(u_k) > f\left(\frac{1}{2}\right)\right.$

Or $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{5}{2}+2}{\frac{4}{2}+7} = \frac{1}{2}$ et $f(u_k) = u_{k+1}$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} > \frac{1}{2}$

Par suite $P(k+1)$ est vraie.

- Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \frac{1}{2}$.

b) Démontrons que: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{2(u_n+1)(-2u_n+1)}{4u_n+7}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \dfrac{5u_n + 2}{4u_n + 7} - u_n = \dfrac{5u_n + 2 - 4u_n^2 - 7u_n}{4u_n + 7}$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{-4u_n^2 - 2u_n + 2}{4u_n + 7} = \dfrac{2(-2u_n^2 - u_n + 1)}{4u_n + 7}$

$\mathrm{Or}(u_n + 1)(-2u_n + 1) = -2u_n^2 - u_n + 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{2(u_n+1)(-2u_n+1)}{4u_n+7}$

c) Déduisons de 2.a) et 2.b) que la suite (u_n) est décroissante.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{2(u_n+1)(-2u_n+1)}{4u_n+7}$ (d'après 2b))

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \frac{1}{2}$ (D'après 2.a)) donc $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_n > 1 \Rightarrow -2u_n + 1 < 0$

Et de plus, $\forall n \in \mathbb{N}, 2(u_n u_n + 1) > 0$ et et $4u_n u_n + 7 > 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{nu_n+1} - u_n u_n < 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{nu_n+1} < u_n u_n$

On en déduit que la suite (u_n) est décroissante.

3.a) Déduisons de 2.a) et 2.c) que la suite (u_n) est convergente.

D'après 2a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \frac{1}{2}$ donc la suite (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}$.

D'après 2c) la suite (u_n) est décroissante.

La suite (u_n) est décroissante et minorée donc (u_n) est convergente.

b) Justifions que la limite de la suite (u_n) est égale à $\frac{1}{2}$.

La suite (u_n) est convergente donc sa limite est finie.

Soit ℓ cette limite.

On a : $f(\ell) = \ell$ donc $\frac{5\ell+2}{4\ell+7} = \ell$

$$\frac{5\ell + 2}{4\ell + 7} = \ell \Leftrightarrow \frac{5\ell + 2}{4\ell + 7} - \ell = 0 \Leftrightarrow \frac{2(\ell + 1)(-2\ell + 1)}{4\ell + 7} = 0$$

$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow 2(\ell + 1)(-2\ell + 1) = 0 \Leftrightarrow \ell = -1$ ou $\ell = \frac{1}{2}$.

$\ell \neq -1$ car $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

Donc $\ell = \frac{1}{2}$.

D'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$

EXERCICE 5

1 a) Justifions que f est continue en 0 .

On a : $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} (x\ln x - 2x)$

$\begin{cases} \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} x\ln x = 0 \\ \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} 2x = 0 \end{cases}$ donc $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = 0 = f(0)$

D'où f est continue en 0 .

b) Justifions que: $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$.

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{x\ln x-2x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \ln x - 2$$

$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$.

c) Interprétons graphiquement le résultat de 1.b).

$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$ donc la courbe (C_f) admet au point O une tangente verticale.

2) On admet que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Interprétons graphiquement ces résultats.

La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $+\infty$.

3) On suppose que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Justifions que : $\forall x \in]0;+\infty[f'(x) = -1 + \ln x$.

$\forall x \in]0;+\infty\left[f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 2 = \ln x + 1 - 2 = -1 + \ln x. \right.$

b) Etudions les variations de f.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$$

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 + \ln x < 0 \Leftrightarrow x < e$

Tableau de signe de f'

x		e	
$f'(x)$	▨ $-$		$+$

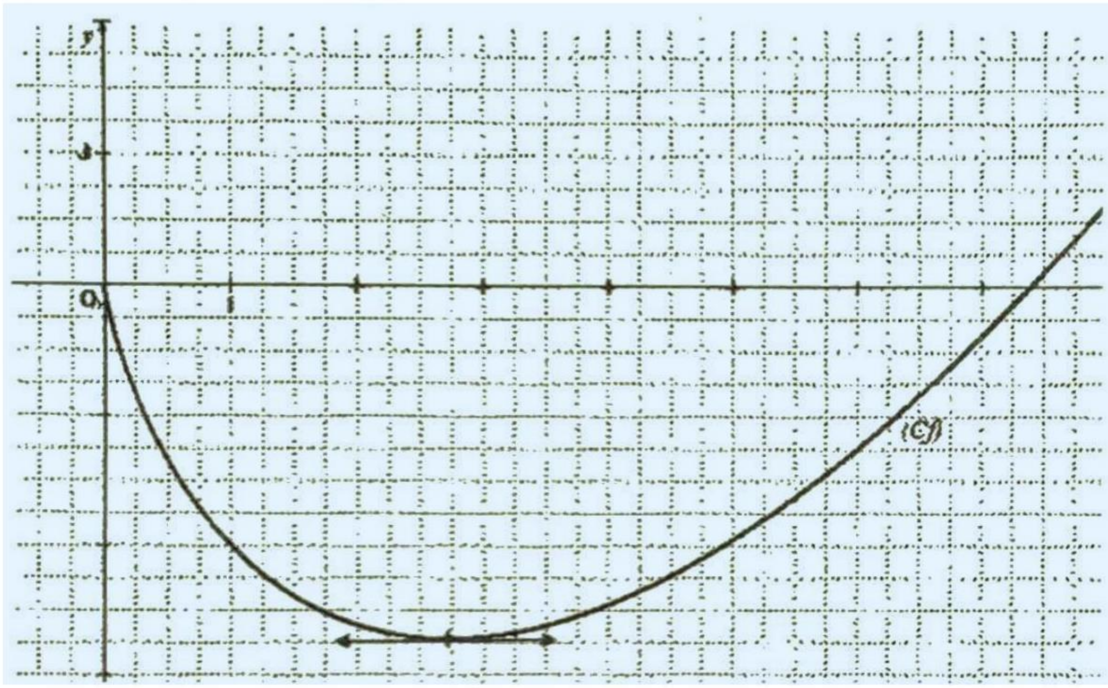
$$\begin{cases} \forall x \in]0;e[, f'(x) < 0 \\ \forall x \in]e;+\infty[, f'(x) > 0 \end{cases}$$

Donc f est strictement décroissante sur $]0;e[$ et strictement croissante sur $]e;+\infty[$.

c) Dressons le tableau de variation de f.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	▨	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	$+\infty$

4) Traçons la courbe (C_f).



5-a) A l'aide d'une intégration par parties, justifions que : $K = \int_1^2 x\ln x dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

$K = \int_1^2 \, x\ln x dx$

On pose : $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$

Donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = \frac{1}{2}x^2$

D'où $K = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \times \frac{1}{2}x^2 dx$

$K = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = 2\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{4}\right)$

$K = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

b) Calculons l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), la droite (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

On a : $\mathcal{A} = -\int_1^2 f(x)dx \times 4 \text{ cm}^2$

$\mathcal{A} = -\int_1^2 (x\ln x - 2x)dx \times 4 \text{ cm}^2 = -4\left(K - \int_1^2 2xdx\right)\text{cm}^2$

$\mathcal{A} = -4(K - [x^2]_1^2)\text{cm}^2 = -4\left(2\ln 2 - \frac{3}{4} - 3\right)\text{cm}^2$

$\mathcal{A} = (15 - 8\ln 2)\text{cm}^2$

EXERCICE 6

Pour dire si l'affirmation de l'élève est justifié ou non, nous allons utiliser la leçon « probabilité conditionnelle et variable aléatoire » ,

Pour cela je vais :

Définir une variable aléatoire X égale au nombre de tickets gagnés par le joueur,

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X,
Calculer $P(X \geq 4)$ puis comparer $p(X \geqslant 2)$ et 0,2
Conclure

- Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tickets gagnés par le joueur à l'issue de 4 lancers.
  Si le joueur réussit à loger dans le trou 4 boules il gagne 8 tickets,
  Si le joueur réussit à loger 3 boules dans le trou il gagne 6 tickets,
  Si le joueur réussit à loger 2 boules dans le trou il gagne 4 tickets,
  Si le joueur réussit à loger 1 boule dans le trou il gagne 2 tickets,
  Si le joueur ne réussit à loger aucune boule dans le trou il gagne o ticket,

Donc l'ensemble des valeurs prises par X est : $\{0; 2; 4; 6; 8\}$.

- Calculons $P(X \geq 2)$

  X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}25$

  $p(x = k) = C_4^k \times (0{,}25)^k \times (0{,}75)^{4-k}$

  avec $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

$P(x \geqslant 2) = p(x = 2) + p(x = 3) + p(x = 4)$
$= C_4^2 \times (0{,}25)^2 \times (0{,}75)^2 + C_4^3 \times (0{,}25)^3 \times (0{,}75)^1 + C_4^4 \times (0{,}25)^4 \times (0{,}75)^0$
$= 0{,}2617$

- Comparons $P(x \geqslant 2)$ et 0,2
  On $a: p(x \geqslant 2) > 0{,}2$

- **Conclusion** : un joueur a environ 26% de chance de gagner les 2500 F CFA.

Donc l'affirmation de l'élève **n'est pas correcte**.

CORRECTION SESSION NORMALE 2021 SERIE D

EXERCICE 1

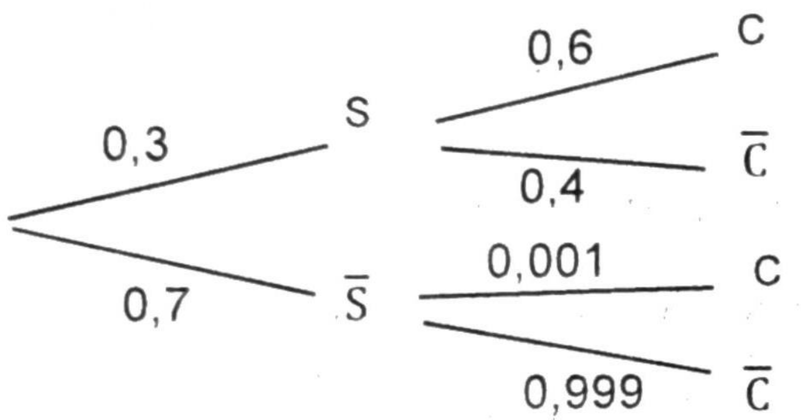
1. FAUX
2. VRAI ;
3. FAUX
4. VRAI

EXERCICE 2

1. B ; 2. B ; 3. A ; 4. C ; 5. D

EXERCICE 3

a)



b) $P_S(C) = 0{,}6$

c) $P(S \cap C) = P_S(C) \times P(S) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$

2. $P(C) = P(S \cap C) + P(\bar{S} \cap C) = 0{,}18 + 0{,}70 \times ,001 = 0{,}1807$

3. a) Dans cette expérience aléatoire, nous avons deux éventualités (être atteint du Covid-19 ou ne pas être atteint du Covid-19). On a donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $P = 0{,}1807$ et $q = 1 - 0{,}1807 = 0{,}8193$

Cette épreuve se répète n fois de manière indépendante.

On a donc une loi binomiale de paramètre n et p.

Calculons la probabilité qu'il n'y ait pas de personne atteinte de Covid-19) parmi les n personnes.

$P(X = 0) = C_n^0 (0{,}1807)^0 \times (0{,}8193)^n = (0{,}8193)^n$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, P_n = 1 - (0{,}8193)^n$

b) On doit résoudre l'inéquation $P_n > 0{,}9999$

$P_n > 0{,}9999 \Leftrightarrow 1-(0{,}8193)^n > 0{,}9999 \Leftrightarrow -(0{,}8193)^n > 0{,}9999-1$
$\Leftrightarrow -(0{,}8193)^n > -0{,}0001 \Leftrightarrow (0{,}8193)^n < 0{,}0001$
$\Leftrightarrow \ln(0{,}8193)^n < \ln(0{,}0001) \Leftrightarrow n\ln(0{,}8193) < \ln(0{,}0001)$
$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}8193)} (\text{car} \ln(0{,}8193) < 0) \Leftrightarrow n > 46{,}12$

Le nombre minimal est $n = 47$.

EXERCICE 4

1. (C) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).

2. a) $\lim_{x\mp\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{1-x} - x + 1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)}{e^{x-1}} - x + 1 = -\infty$

Car $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)}{e^{x-1}} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} -x+1 = -\infty \end{cases}$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x\mp\infty} f(x) - (-x+1) = \lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{1-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)}{e^{x-1}} = 0$

Donc la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

3. a) $f'(x) = ((x+1)e^{1-x} - x + 1)'$

$f'(x) = (x+1)'(e^{1-x}) + (x+1)(e^{1-x})' + (-x+1)'$

$= e^{1-x} + (x+1)(-e^{1-x}) - 1$

$f'(x) = (1-x-1)(-e^{1-x}) - 1 = -x(-e^{1-x}) - 1 = -[x(-e^{1-x}) + 1]$

$f'(x) = -g(x)$

b) Sens de variation de f.

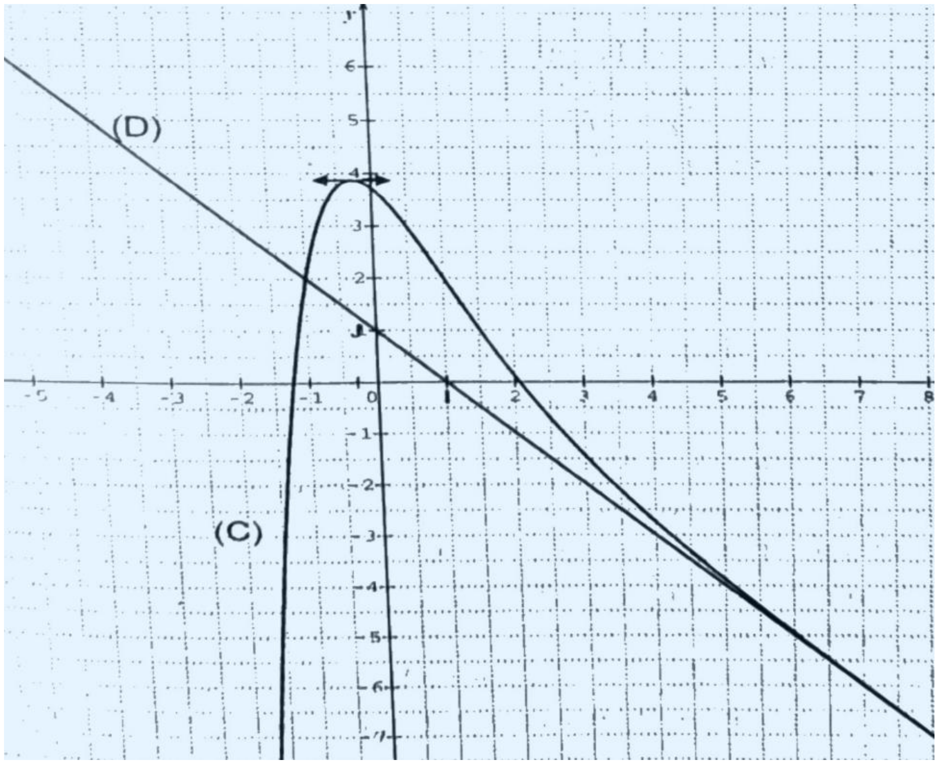
$\forall x \in]-\infty;\alpha[, g(x) < 0$, or $f'(x) = -g(x)$ donc $f'(x) > 0$, d'où f est strictement croissante sur $]-\infty;\alpha[$.

$\forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) > 0$, or $f'(x) = -g(x)$ donc $f'(x) < 0$, d'où f est strictement décroissante sur $]\alpha;+\infty[$.

c) Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		α		$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

4. Construction de (C) ($= -0{,}3$ et $f(\alpha) = 3{,}9$)



5. a) K est en unités d'aires, l'aire du domaine du plan limité par la courbe (C), la droite (D) la droite (OJ) et la droite d'équation telle que : $x = 1$.

b) Justifie, à l'aide d'une intégration par parties, que $\mathrm{K} = 2e - 3$.

Posons : $\begin{cases} u(x) = x + 1 \\ v'(x) = c^{1-x} \end{cases}$ on a : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{1-x} \end{cases}$

$\mathrm{K} = [-(x+1)e^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 (-e^{1-x})dx = [-(x+1)e^{1-x}]_0^1 + \int_0^1 (e^{1-x})dx$

$\mathrm{K} = [-(x+1)e^{1-x}]_0^1 + [-e^{1-x}]_0^1$

$\mathrm{K} = -2 - (-c) + (-1 + e) = -2 + c - 1 + e$

$\mathrm{K} = 2e - 3$

EXERCICE 5

1. a) Justifions que S a pour écriture complexe : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z$.

Soit $\mathrm{z}' = az + \mathrm{b}$

Déterminons a et b

On a: $\begin{cases} S(A) = B \\ S(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} az_A + b = z_B \\ az_0 + b = z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a + b = 4 + 4\mathrm{i} \\ 0 + b = 0 \end{cases}$

$b = 0$ et $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$

Finalement $\mathbf{z}' = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z$

b) Déterminons le rapport et l'angle de S.

Soit k le rapport de la similitude S et θ son angle.

$$k = \left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

On a : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\frac{1}{\frac{1}{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, donc $\theta = \frac{\pi}{4}$

2. On considère les points Λ_n tels que : $\begin{cases} A_0 = A \\ \forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} = S(A_n) \end{cases}$

On désigne par z_n l'affixe de du point A_n.

a) Démontrons par récurrence que : $\forall x \in \mathbb{N}, z_n = 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n$.

Soit la proposition $P_n\colon \mathrm{z}_n = 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n$

Vérifions que P_0 est vraie

$\Lambda_0\colon\ z_0 = 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^0 = 8$, or $\Lambda_0 = \Lambda = 8$, donc P_0 est vraie

Supposons que la proposition P_k est vraie $\forall k \in \mathbb{N}$, démontrons que P_{k+1} est vraie

$$\forall k \in \mathbb{N}, P_k\colon\ z_k = 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^k$$

On a $P_{k+1}\colon\ z_{k+1} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\mathrm{z}_k$ or $\mathrm{z}_k = 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^k$

Donc $z_{k+1} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\times 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^k = 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{k+1}$

La proposition est vraie à l'ordre P_{k+1}, donc $\forall x \in \mathbb{N}$, $\mathrm{z}_n = 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n$.

b) Démontrons que le triangle $0\Lambda_n\Lambda_{n+1}$ est rectangle et isocèle en Λ_{n+1}.

$$\frac{z_n - z_{n+1}}{z_n - z_{n+1}} = \frac{0 - 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{n+1}}{8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n - 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{n+1}} = \frac{-8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{n+1}}{8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n - 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{n+1}}$$

$$\frac{z_n - z_{n+1}}{z_n - z_{n+1}} = \frac{-8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n \times \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^1}{8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n\left[1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^1\right]} = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}$$

$$\frac{z_0 - z_{n+1}}{z_n - z_{n+1}} = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i} = \frac{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)} = \frac{-\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}} = -i$$

le triangle $0A_nA_{n+1}$ est rectangle et isocèle en A_{n+1}.

3. a) Je place successivement les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4. On a : $z_\mathrm{n} = 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n$

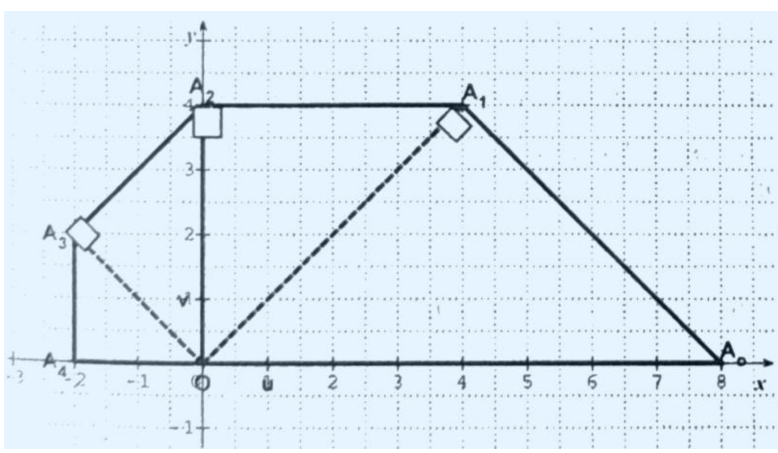
$z_0 = 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^1 = 4+4i$ donc $\mathrm{A}_1(4+4i)$

$z_1 = 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^1 = 4+4i$ donc $A_1(4+4i)$

$z_2 = 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2 = 8\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{4}\right) = 4i$ donc $\mathrm{A}_2(4i)$

$z_3 = 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3 = 4i \times \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) = -2+2i$ donc $\mathrm{A}_3(-2+2i)$

$z_1 = 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^4 = 8 \times \left(\frac{1}{2}i\right)^2 = 8 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -2$ donc $\mathrm{A}_4(-2)$



b) Justifions que l'aire a_1 en cm^2, du triangle $0\ \mathrm{A}_0\ \mathrm{A}_1$ est 16 .

$$a_1 = \frac{A_0A_1 \times 0A_1}{2} = \frac{|z_1 - z_0| \times |z_1|}{2} = \frac{|4+4i-8| \times |4+4i|}{2}$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{(-4)^2+(4)^2} \times \sqrt{(4)^2+(4)^2}}{2} = \frac{\sqrt{32}\times\sqrt{32}}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

$a_1 = 16\ \mathrm{cm}^2$

c) Déduisons du résultat précédent l'aire a, en cm^2, du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4$. $a = \mathrm{aire}(\mathrm{OA}_0\ \mathrm{A}_1) + \mathrm{aire}(\mathrm{OA}_1\ \mathrm{A}_2) + \mathrm{aire}(\mathrm{OA}_2\ \mathrm{A}_3) + \mathrm{aire}(\mathrm{OA}_3\ \mathrm{A}_4)$

$$a = 16 + \frac{|z_2 - z_1| \times |z_2|}{2} + \frac{|z_3 - z_2| \times |z_3|}{2} + \frac{|z_4 - z_3| \times |z_4|}{2}$$

$$a = 16 + \frac{|-4| \times |4i|}{2} + \frac{|-2-2i| \times |-2+2i|}{2} + \frac{|-2i| \times |-2|}{2}$$

$$a = 16 + \frac{4 \times 4}{2} + \frac{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2} + \frac{2 \times 2}{2} = 16 + 8 + 4 + 2 = 30$$

$a = 30\ \mathrm{cm}^2$

EXERCICE 6

Pour répondre au problème qui est posé, je vais utiliser les statistiques.

Je vais calculer $\bar{x}, \bar{y}, v(x), v(y)$ et $\mathrm{cov}(x; y)$.

Puis calculer le coefficient de corrélation linéaire r entre x et y pour voir s'il y a une forte corrélation linéaire entre x et y.

Je vais déterminer une équation de la droite de régression de y en x Enfin je vais remplacery par 100 pour déterminer les frais publicitaires.

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+1+5}{5} = \frac{15}{5} = 3\ ;\ \bar{y} = \frac{60+66+69+75+81}{5} = \frac{351}{5} = 70{,}2$$

$$v(x) = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5} - 3^2 = \frac{55}{5} - 9 = 2$$

$$v(y) = \frac{60^2+66^2+69^2+75^2+81^2}{5} - (70{,}2)^2 = 52{,}56$$

$$\mathrm{cov}(x; y) = \frac{1 \times 60 + 2 \times 66 + 3 \times 69 + 4 \times 75 + 5 \times 81}{5} - 3 \times 70{,}2$$

$\mathrm{cov}(x; y) = 10{,}2$

Le coefficient de corrélation linéaire $r = \frac{\mathrm{cov}(x;y)}{\sqrt{v(x) \times v(y)}} = \frac{10{,}2}{\sqrt{2 \times 52{,}56}} = 0{,}99$

Il y a une forte corrélation entre x et y

Déterminons la droite de régression

$(D){:}\ y = ax + b$

Déterminons a et b

$a = \frac{\mathrm{cov}(x;y)}{v(x)} = \frac{10{,}2()}{2} = 5{,}1$ et $b = \bar{y} - a\bar{x} = 70{,}2 - 5{,}1 \times 3 = 54{,}9$

(D): $y = 5{,}1x + 54{,}9$

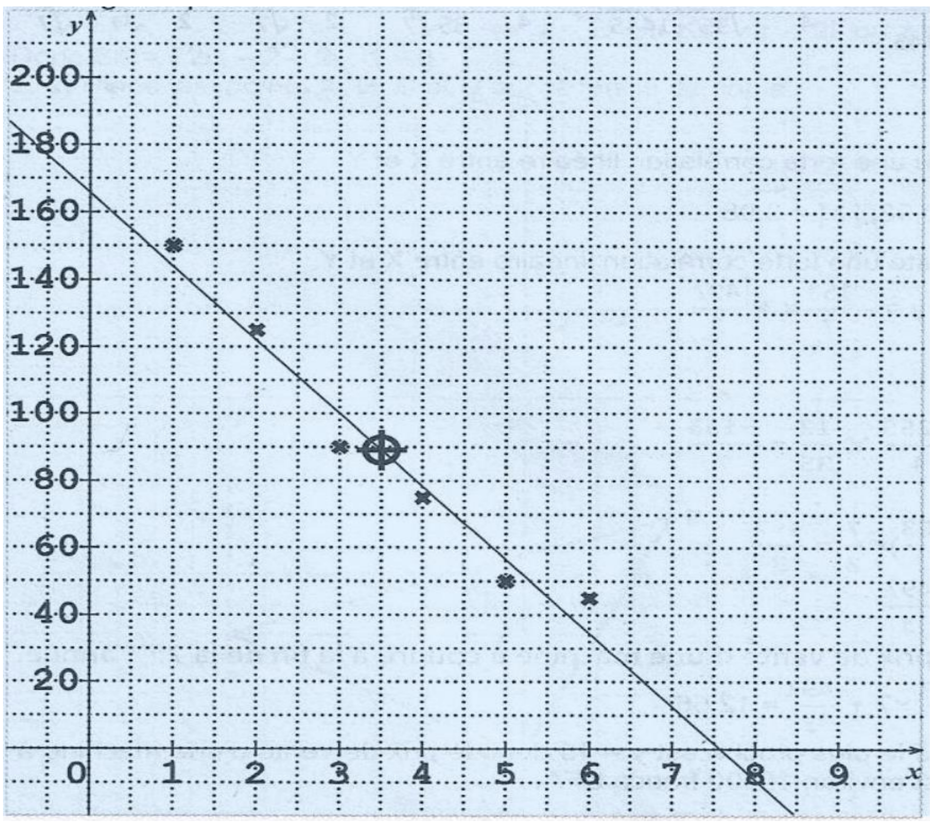
Pour $y = 100, x = \frac{100-51,9}{5,1} = 8,85$

Le directeur commercial doit investir 8.850 .000 FCFA.

CORRECTION SESSION NORMALE 2020 SERIE D

EXERCICE 1

1. Nuage de points



2. a) Coordonnées du point moyen G

On a $G(\bar{x};\bar{Y})$

$$\bar{X}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}\ ;\ \bar{Y}=\frac{150+125+90+75+50+45}{6}=\frac{535}{6}$$

Donc $G\left(\frac{7}{2};\frac{535}{6}\right)$

b) Démontrons que $V(X)=\frac{35}{12}$ et $\mathrm{COV}(X,Y)=-\frac{255}{4}$

$V(X)=\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{182-147}{12}=\frac{35}{12}$

$V(X)=\frac{35}{12}$

$\mathrm{cov}(X)=\frac{1\times150+2\times125+3\times90+4\times75+5\times50+6\times45}{6}-\left(\frac{7}{2}\times\frac{535}{6}\right)^2=\frac{1490}{6}-\frac{3745}{12}$

$\mathrm{cov}(X)=-\frac{255}{4}$

3. a) Justifions que le coefficient de corrélation linéaire $r=-\frac{3\sqrt{21}}{14}$

$$r=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)\cdot V(Y)}}=\frac{-\frac{255}{4}}{\sqrt{\frac{35}{12}\times 1445}}=-\frac{255}{4}\times\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{35\times 1445}}=-\frac{255}{4}\times\frac{2\sqrt{3}}{85\sqrt{7}}=-\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=-\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$$

$$r=-\frac{3\sqrt{21}}{14}$$

b) Justifions qu'il existe une forte corrélation linéaire entre X et Y

On a : $r=-\frac{3\sqrt{21}}{14}, r\approx -0{,}98, |r|=0{,}98$

$0{,}87\leq |r|<1$ donc il existe une forte corrélation linéaire entre X et Y.

4. Démontrons que (D) : $y=-\frac{153}{7}x+\frac{497}{3}$

On a: $(D): y=ax+b$

Calcul de a:

$$a=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{V(X)}=\frac{\frac{-255}{4}}{\frac{35}{12}}=\frac{-255}{4}\times\frac{12}{35}=\frac{-153}{7}$$

Calcul de b:

$$\mathrm{b}=\bar{y}-\mathrm{a}\bar{x}=\frac{535}{6}-\left(\frac{-153}{7}\right)\times\frac{7}{2}=\frac{497}{3}$$

Donc (D) : $y=-\frac{153}{7}x+\frac{497}{3}$

5. Déterminons que le prix de vente d'une machine à coudre à la fin de la 7$^{\text{ème}}$ année.

Pour $x=7$, on : $y=-\frac{153}{7}\times 7+\frac{497}{3}\approx 12{,}66$

L'arrondi au multiple de 5 le plus proche est $y=15$ donc le prix de vente d'une machine à la fin de la 7$^{\text{ème}}$ année est environ 15000 francs CFA.

EXERCICE 2

1. On considère l'équation $(E): z\in\mathbb{C}, z^3+(1+i)z^2+(2-2i)z+8i=0$

a) Justifions que $2i$ est une solution de (E).

On a: $(2i)^3+(1+i)(2i)^2+(2-2i)\times(2i)+8i=-8i-4-4i+4i+4+8i=0$

Donc $2\mathrm{i}$ est une solution de (E).

b) Justifions que: $\forall z\in\mathbb{C}, z^3+(1+i)z^2+(2-2i)z+8i=(z-2i)[z^2+(1+3i)z-4]$

$\forall z \in \mathbb{C}, (2-2i)[z^2+(1+3i)z-4] = z^3 - 4z - 2iz^2 - 2i(1+3i)z + 8i$

$$= z^3 + (1+3i-2i)z^2 + (-4+6-2i)z + 8i$$
$$= z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i$$

c) Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E'): z^2 + (1+3i)z - 4 = 0$

$\Delta = (1+3i)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 1 + 6i - 9 + 16 = 1 + 6i - 9 + 16 = 8 + 6i$

$|\Delta| = |8+6i| = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$

Soit $\delta = x + iy$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$ une racine carrée de Δ.

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 \\ 2y^2 = 2 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ou } y = -3 \\ y = 1 \text{ ou } y = -1 \\ xy > 0 \end{cases}$$

Donc $\delta = 3 + \mathrm{i}$ ou $\delta = -3 - i$

Les solutions de (E') :

$$z_1 = \frac{-1-3i-3-i}{2} = \frac{-4-4i}{2} = -2-2i; z_2 = \frac{-1-3i+3+i}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1-i. \qquad S\mathbb{C} = \{-2-2i; 1-i\}$$

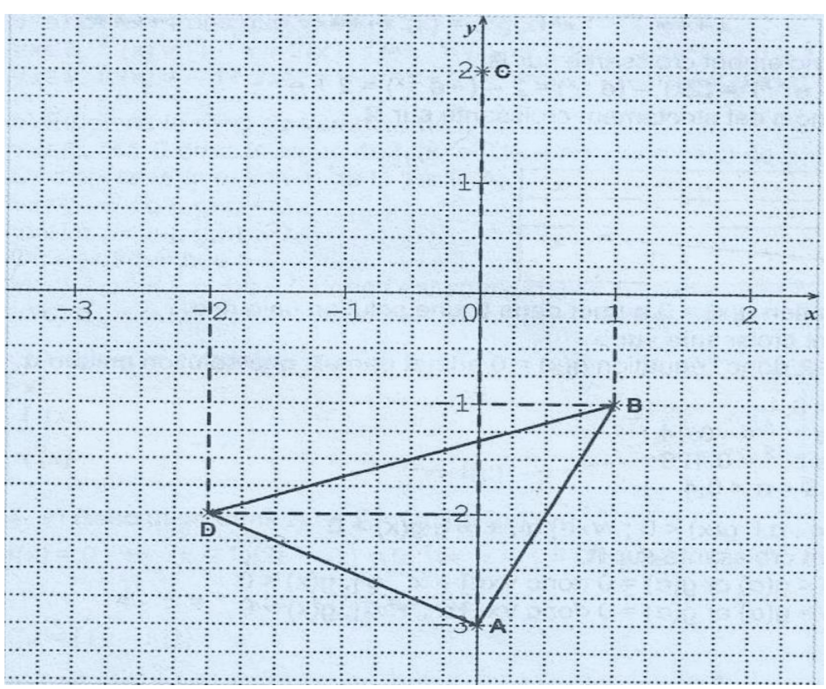
d) Déduisons des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

(E) : $(z-2i)[z^2+(1+3i)z-4] = 0 \Leftrightarrow z - 2i = 0$ ou $z^2 + (1+3i)z - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z = -2-2i \text{ ou } z = 1-i$$

Donc $SC = \{2i; -2-2i; 1-i\}$

2. a) Place les points A, B, C et D sur ta feuille de copie.



b) Démontrons que le triangle BAD est rectangle et isocèle en A.

On a: $\frac{zB-zA}{zD-zA}=\frac{-1-i+3}{-2-2i+3i}=\frac{1+2i}{-2+i}=\frac{(1+2i)(-2-i)}{4+1}=\frac{-2-i-4i+2}{5}=\frac{-5i}{5}=-\mathrm{i}$

Donc le triangle BAD est rectangle et isocèle en A.

3. a) Démontrons que l'écriture complexe de S est : $z'=(1+\mathrm{i})z-2+2\mathrm{i}$.

L'écriture complexe de S est sous la forme : $z'=az+b(a\in\mathbb{C}^*, b\in\mathbb{C})$

On a: $\begin{cases}S(D)=D\\S(A)=B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}az_D+b=zD & 1\\az_A+b=zB & 2\end{cases}$

(1) $-(2)$ donne : $a(z_D-z_A)=z_D-z_B$

$$\mathrm{a}=\frac{zD-zB}{zD-zA}=\frac{-2-2i-1+i}{-2-2i+3i}=\frac{-3-i}{-2+i}=\frac{(-3-i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)}=\frac{6+3i+2i-1}{5+1}=\frac{5+5i}{5}=1+\mathrm{i}$$

Dans (1), on remplace a par sa valeur et on obtient: $(1+i)z_D+b=z_D$

$\mathrm{b}=z_D-(1+\mathrm{i})\mathrm{z_D}=(1-1-\mathrm{i})z_D=-\mathrm{iz}=-\mathrm{iz}=-\mathrm{i}(-2-2\mathrm{i})=-2+2\mathrm{i}$

Donc $z'=(1+i)z-2+2i$

b) Démontrons que $S(B)=C$.

$z'_B=(1+i)Z_B-2+2i=(1+i)(1-i)-2+2i=1+1-2+2i=2i=zc$. Donc $S(B)=C$.

c) Déterminons l'image du triangle BAD par la similitude S.

$S(B)=C, S(A)=B$ et $S(D)=D$ donc l'image du triangle BAD par S est le triangle CBD.

PROBLEME

PARTIE A

1. Calculons $\lim_{x\to-\infty}g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}g(x)$

- $\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x-e^{-x\to})=-\infty$ car $\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}-e^{-x}=\lim_{X\to+\infty}-e^{X}=-\infty$ avec $X=-x$

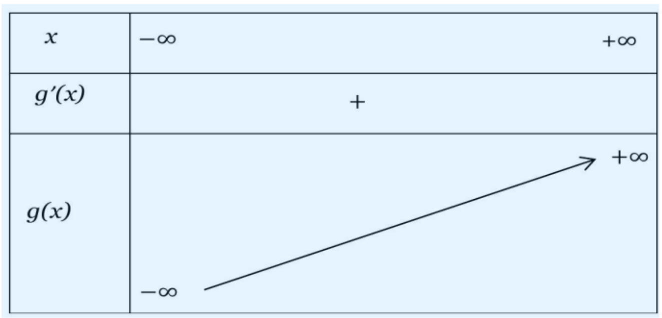
- $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x-e^{-x})=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\frac{1}{e^x}\right)=+\infty$ car $\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$.

2. Démontrons que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

Pour tout $x \in \mathbb{R}, g'(x) = (2x - e^{-x})' = (2x)' - (e^{-x})' = 2 - (-e^{-x}) = 2 + e^{-x}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation.



3.a) Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α.

g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\mathrm{g}(\mathbb{R}) =]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α.

b) Justifions que : $0,3 < \alpha < 0,4$

On a: $\begin{cases} g(0,3) = 2 \times 0,3 - e^{-0,3} \approx -0,14 \\ g(0,4) = 2 \times 0,4 - e^{-0,4} \approx 0,129 \end{cases}$

$g(0,3) \times g(0,4) < 0$ donc $0,3 < \alpha < 0,4$

4. Justifions que : $\forall x \in]-\infty, \alpha[, g(x) < 0 ; \forall x \in]\alpha, +\infty[, g(x) > 0$

g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in]-\infty, \alpha[, x < \alpha \Rightarrow g(x) < g(\alpha)$ or $g(\alpha) = 0$ donc $\forall x \in]-\infty, \alpha[, g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha, +\infty[, x > \alpha \Rightarrow g(x) > g(\alpha)$ or $g(\alpha) = 0$ donc $\forall x \in]\alpha, +\infty[, g(x) > 0$

PARTIE B

1. Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

- $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} (\mathrm{x} - 1)(2\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - 1) = +\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} (\mathrm{x} - 1) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} (2\mathrm{e}^{x} - 1) = +\infty$
- $\lim_{\mathrm{x} \to +\infty} \frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} (2\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - 1) = +\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} (2\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - 1) = +\infty$
- Interprétation graphique.

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $+\infty$.

2.a) Calculons $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x-1)(2e^x-1) = +\infty$ car $\lim_{x\to-\infty}(x-1) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}(2e^x-1) = -1$

b) Justifions que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1-x+2(x-1)e^x$

$f(x) = (x-1)(2e^x-1) = (x-1)(2e^x)-(x-1) = 2(x-1)e^x - x + 1 = 1-x+2(x-1)e^x$

c) Démontrons que la droite d'équation $y = 1-x$ est une asymptote à (C) en $-\infty$. $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(1-x)] = \lim_{x\to-\infty}[1-x+2(x-1)e^x-(1-x)] = \lim_{x\to-\infty} 2(x-1)e^x$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x - 2e^x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0$

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(1-x)] = 0$ donc la droite (D) d'équation $y = 1-x$ est asymptote à (C) en $-\infty$.
d) Etudions la position relative de (C) et (D).

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)-(1-x) = 2(x-1)e^x = 2e^x(x-1)$

$\forall x \in \mathbb{R}, 2e^x > 0$ donc le signe de $f(x)-(1-x)$ est le même que celui de $x-1$.

$f(x)-(1-x) > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

- Sur $]1;+\infty[, f(x)-(1-x) > 0$ donc (C) est au-dessus de (D) sur $]1;+\infty[$.
- Sur $]-\infty;1[, f(x)-(1-x) < 0$ donc (C) est au-dessous de (D) sur $]-\infty;1[$.
- (C) et (D) se coupent au point d'abscisse 1.

3. a) Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x g(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = [1-x+2(x-1)e^x]' = [1-x+2xe^x-2e^x]' = 0-1+2(e^x+xe^x)-2e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -1+2xe^x = (-e^{-x}+2x)e^x = (2x-e^{-x})e^x = g(x)e^x = e^x g(x)$

b) Etudions le sens de variation de f.

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $g(x)$.

Or d'après la question 4. de la partie A,

$\forall x \in]-\infty,\alpha[, g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha,+\infty[, g(x) > 0$

On en déduit que :

$\forall x \in]-\infty,\alpha[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty,\alpha[$ $\forall x \in]\alpha,+\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]\alpha,+\infty[$.

c) Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. a) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $e^x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

$S_{\mathbb{R}} = \{1; -\ln 2\}$

b) Les abscisses X_A et x_B des points d'intersection A et B de (C) et de l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Or $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -\ln 2$

On prend $X_A < X_B$ donc $X_A = -\ln 2$ et $X_B = 1$ d'où $A(-\ln 2; 0)$ et $B(1; 0)$

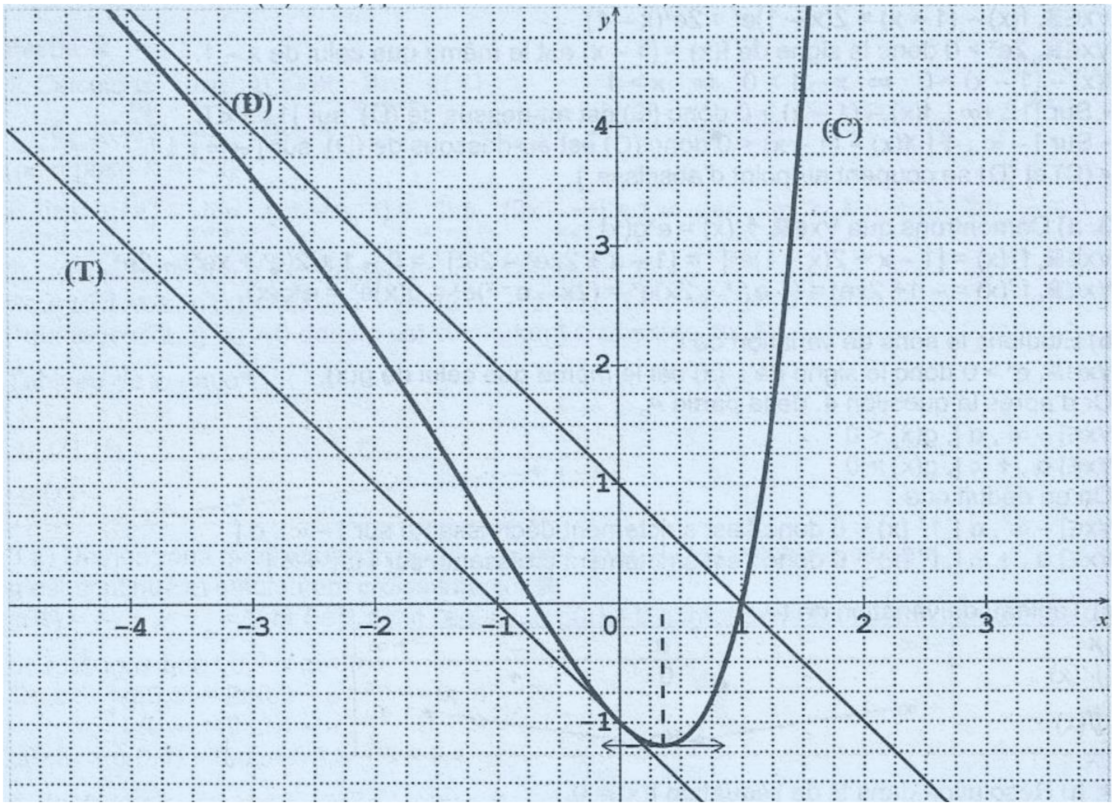
5. Equation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 .

$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f'(0) = e^0 g(0) = -e^0 = -1; f(0) = 2 \times 0 - e^0 = 0 - 1 = -1$

Donc $(T): y = -x - 1$.

6) Tracé des droites (D) et (T) et construction de (C). $\alpha = 0{,}35$ et $(\alpha) = -1{,}2$.



7. Calculons l'aire A en cm^2, de la partie du plan délimitée par (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

$\forall x \in [0;1], f(x) - (1-x) \leq 0$ car (C) est au-dessous de (D) sur [0;1]

Donc $A = \left(-\int_0^1 (f(x) - (1-x))dx\right)$ ua $= \left(\int_0^1 (-2(x-1)e^x)dx\right)$ ua $= \left(\int_0^1 ((-2x+2)e^x)dx\right)$ ua On pose: $u(x) = -2x + 2$ et $v'(x) = e^x$ $u'(x) = -2$ et $v'(x) = e^x$

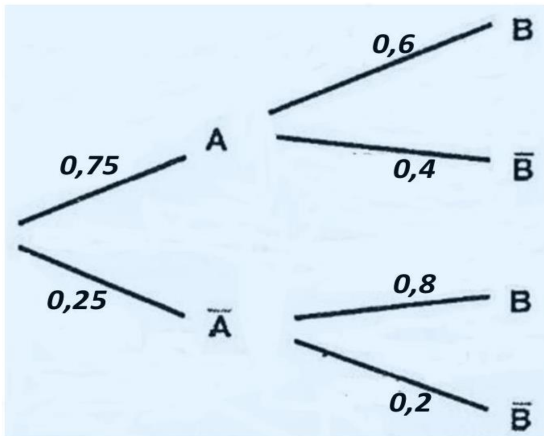
Donc $\mathrm{A} = \left([(-2x+2)e^x]_0^1 + \int_0^1 2\mathrm{e}^x \mathrm{dx}\right)$ ua $= ([(-2x+4)e^x]_0^1)$ ua or ua $= 2\ \mathrm{cm} \times 2\ \mathrm{cm} = 4\ \mathrm{cm}^2$ $A = (2e-4) \times 4\ \mathrm{cm}^2 = (8e-16)\mathrm{cm}^2 = 5{,}75\ \mathrm{cm}^2$

CORRECTION SESSION NORMALE 2019 SERIE D

EXERCICE 1

PARTIE A

1. a)



b) La probabilité de B sachant A est : $P_A(B) = 0{,}6$

c) Démontrons que la probabilité de l'évènement C est égal à 0,45 .

$\mathrm{C} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ donc $\mathrm{P(C)} = P(\mathrm{~A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P(A)} \times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$

$P(C) = \frac{75}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{4500}{10000} = \frac{45}{100} = 0{,}45 \; P(C) = 0{,}45$

2. Calculons la probabilité de B (le joueur est professionnel)

Ici le joueur est professionnel signifie que le joueur évolue au pays et est professionnel $(A \cap B)$ ou le joueur évolue hors du pays et est professionnel $(\bar{A} \cap B)$

Donc $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$
$P(B) = \frac{75}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{25}{100} \times \frac{80}{100} = 0{,}45 + 0{,}2$
$P(B) = 0{,}65$

PARTIE B

1. L'épreuve des tirs au but conduit à deux éventualités : le tir est réussi (succès noté $= \frac{3}{4}$) ou le tir n'est pas réussi (échec noté $q = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$).

On a donc une épreuve de Bernoulli.

On a une suite de 3 épreuves identiques et indépendantes donc on a une loi binomiale.

Les paramètres sont $n = 3$ et $P = \frac{3}{4}$.

a) Les valeurs prises par $X: X = 0; 1; 2; 3$

b) Déterminons la loi de probabilité de X

$\mathrm{P(x = 0)} = C_3^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 1 \times 1 \times \frac{1}{64} = \frac{1}{64}$ $\mathrm{P(x = 2)} = C_3^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 = 3 \times \frac{9}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{27}{64}$ $\mathrm{P(x = 1)} = C_3^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 3 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{9}{64}$ $\mathrm{P(x = 3)} = C_3^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1 \times \frac{27}{64} \times 1 = \frac{27}{64}$

x_i	0	1	2	3	Total
$\mathrm{p}(X = x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	1

2.Calculons $E(x)$ l'espérance mathématique de X.

$\mathrm{E(X)} = n \times p = 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$ $\mathrm{E(X)} = \frac{9}{4}$

3.Démontrons que la probabilité qu'un joueur donné soit retenu est égatè 27 à

Soit k l'évènement ; « le joueur est retenu à l'issue du test ».

Le joueur est retenu s'il réussi exactement deux tirs au but ou exactement trois tirs au but. Donc $P(k) = P(x = 2) + P(x = 3)$ $P(k) = \frac{27}{64} + \frac{27}{64} = \frac{54}{64} = \frac{27}{32}$.

La probabilité qu'un joueur soit retenu est $\frac{27}{32}$.

EXERCICE 2

1. Justifions que la quantité de noix de cajou acheté en 2012 est de 5250 tonnes. Soit Q_1 la quantité de noix de cajou acheté en 2012

$Q_1 = Q_0 + 5\%Q_0 = 5000 + 5\% \times 5000 = 5000 + \frac{5}{100} \times 50005000 + 250$

$Q_1 = 5250$

2. Démontrons que (Q_n) est une suite géométrique de raison 1,05 .

$\forall n \in \mathbb{N}, Q_{n+1} = Q_n + 5\%Q_n = (1 + 5\%)Q_n = (1 + 0{,}05)Q_n$

$Q_{n+1} = 1{,}05Q_n$, donc (Q_n) est une suite géométrique de raison 1,05 de premier $Q_0 = 5000$

3. a) Justifions que: $\forall n \in \mathbb{N}, Q_n = 5000 \times (1{,}05)^n$.

(Q_n) est une suite géométrique de raison 1,05 de premier $Q_0 = 5000$

$Q_n = Q_0 \times q^n$ (avec Q_0 le premier terme et p la raison) donc $Q_n = 5000 \times (1.05)^n$

b) La quantité de noix de cajou qu'achètera cette société en 2020.

En 2020 on calcule Q_9

$Q_9 = 5000 \times (1{,}05)^9 = 5000 \times 1{,}5513282 = 7756{,}64$

L'arrondi d'ordre 0 est $Q_9 = 7757$.

4.a) Déterminons l'année où la quantité de noix de cajou achetée sera supérieure à 10000 tonnes. Il s'agit de déterminer n tel que $Q_n > 10000$

$$Q_n > 10000 \Leftrightarrow 5000 \times (1{,}05)^n > 10000 \Leftrightarrow (1{,}05)^n > \frac{10000}{5000} \Leftrightarrow (1{,}05)^n > 2$$

$$\Leftrightarrow \ln(1{,}05)^n > \ln 2 \Leftrightarrow n\ln(1{,}05) > \ln 2 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 2}{\ln(1{,}05)}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{0{,}6931471805}{0{,}04879016417} \Leftrightarrow n > 14{,}20669.$$ On a donc $n = 15$

L'année où la quantité de noix de cajou achetée sera supérieure à 10000 tonnes est $2011 + 15$ soit 2026.

b) La quantité totale de noix de cajou achetée par cette société de 2011 à fin 2020. De 2011 à fin 2020 la quantité de noix de cajou est égale à la somme **S** des dix (10) termes consécutifs de cette suite géométrique.

$$S = Q_0 \times \frac{1-(1{,}05)^{10}}{1-1{,}05} = 5000 \times \frac{1-(1{,}05)^{10}}{1-1{,}05} = 5000 \times \frac{1-1{,}628894627}{-0{,}05}$$

$$S = 5000 \times \left(\frac{-0{,}628894627}{-0{,}05}\right) S = 62889$$

La quantité totale de noix de cajou achetée par cette société de 2011 à fin 2020 est de 62889 tonnes.

PROBLEME

PARTIE A

1. a) Calculons la limite de g à droite en 1.

$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \ln(x-1) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \lim_{x\to 1} \ln(x-1) = +\infty - (-\infty) = +\infty$
car $(\lim_{x\to 1}(x-1) = 0$ et $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty)$.

Ainsi $\lim_{x\to 1} g(x) = +\infty$

b) $\lim_{x\to 1} g(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe. $x, 11$

2.a) Calculons $\lim g(x)$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to \times} \frac{1}{x-1} - \ln(x-1) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \\ \lim_{x\to\infty} \ln(x-1) = +\infty \end{cases}$

b) Calculons $\lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x}$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x(x-1)} - \frac{\ln(x-1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-(x-1)\ln(x-1)}{x(x-1)}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x(x-1)} - \left|\frac{x-1}{x}\right| \times \frac{\ln(x-1)}{x-1} - 0$

Car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x(x-1)} = 0; \lim_{x\to+\infty} -\frac{x-1}{x} = -1$ et

$\lim_{x\to\cdots} \frac{\ln(x-1)}{x-1} = \lim_{\mathrm{X}\cdots\infty} \frac{\ln \mathrm{X}}{\mathrm{X}} = 0($ en posant $\mathrm{x} = x - 1$)

Finalement : $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ donc $(\mathcal{C}'_g)$ admet une branche parabolique de direction la droite (OI) en $+\infty$.

3.a) Justifions que : $\forall x \in]1;+\infty[, g'(x) = \frac{-x}{(x-1)^2}$.

$g'(x) = \left(\frac{1}{x-1} - \ln(x-1)\right)'$

$= \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{-1-(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{-1-x+1}{(x-1)^2}$

$g'(x) = \frac{-x}{(x-1)^2}$

b) Déduisons de ce qui précède le signe de $g'(x)$.

$\forall x \in]1;+\infty[\,, \frac{x}{(x-1)^2} > 0$, donc $\frac{-x}{(x-1)^2} < 0$ par conséquent $g'(x) < 0$

c) Tableau de variation de g.

$\forall x \in]1;+\infty[\,, g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante.

x		1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$		$+\infty$	$-\infty$

4.a) Démontrons que $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1;+\infty[$. $\forall x \in]1;+\infty[\,, g$ est continue et strictement décroissante.

De plus $g(]1;+\infty[\,) =]-\infty;+\infty[$;et $0 \in]-\infty;+\infty[$, donc $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1;+\infty[$.

b) Vérifions que $2{,}7 < \alpha < 2{,}8$.

On calcule $g(2{,}7)$ et $g(2{,}8)$

$$g(2{,}7) = \frac{1}{2{,}7-1} - \ln(2{,}7-1) = \frac{1}{1{,}7} - \ln(1{,}7) = 0{,}588 - 0{,}531 = 0{,}057$$

$$g(2{,}8) = \frac{1}{2{,}8-1} - \ln(2{,}8-1) = \frac{1}{1{,}8} - \ln(1{,}8) = 0{,}556 - 0{,}588 = -0{,}032$$

$g(2{,}7) \times g(2{,}8) < 0$ donc $2{,}7 < \alpha < 2{,}8$.

5. Démontrons que : $\forall x \in]1;\alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[\,, g(x) < 0$

$\forall x \in]1;+\infty[, g$ est continue et strictement décroissante.

$\forall x \in]1;\alpha[,\ g(]1;\alpha[) =]0;+\infty[$ donc $g(x) > 0$

$\forall x \in]\alpha;+\infty[, g(]\alpha;+\infty[) =]-\infty;0[$ donc $g(x) < 0$

PARTIE B

1. a) Justifions que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Effectuons un changement de variable. On pose $\mathrm{X} = x - 1$ et $x = \mathrm{X} + 1$

Pour $x \to +\infty, \mathrm{x} \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 4e^{-x}\ln(x-1) = \lim_{x\to+\infty} 4e^{-(x+1)}\ln x = \lim_{x\to+\infty} 4e^{-1}\frac{\ln x}{e^{x}} = 0$$

Car $\lim_{x\to+\infty} 4e^{-1} = 4e^{-1}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^{x}} = 0$

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc la droite (OI) est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C}')$.

2.a) Calculons $\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)$.

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\>}} 4e^{-x}\ln(x-1) = \lim_{\substack{x\to1\\>}} 4e^{-x} \times \lim_{\substack{x\to1\\>}} \ln(x-1) = 4e^{-1} \times (-\infty) = -\infty$$

Car $\lim_{\substack{x\to1\\>}} (x-1) = 0$ et $\lim_{\substack{x\to0\\>}} \ln x = -\infty$ (limite de fonction composée).

Finalement, $\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = -\infty$, la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.

3. a) Justifions que : $\forall x \in]1;+\infty[, f'(x) = 4e^{-x}g(x)$.

$\forall x \in]1;+\infty[, f(x) = 4e^{-x}\ln(x-1)$

$$f'(x) = (4e^{-x})'\ln(x-1) + 4e^{-x}[\ln(x-1)]' = -4e^{-x}\ln(x-1) + (4e^{-x}) \times \frac{1}{x-1}$$

$$= (4e^{-x})\left(-\ln(x-1) + \frac{1}{x-1}\right) = (4e^{-x})\left(\frac{1}{x-1} - \ln(x-1)\right)$$

Or $g(x) = \frac{1}{x-1}\ln(x-1)$ donc $f'(x) = 4e^{-x}g(x)$

b) Déduisons les variations de f.

$\forall x \in]1;+\infty,[\ 4e^{-x} > 0$, donc le signe de f' est le même que celui de g. D' après la question 5 partie A, on a :

$\forall x \in]1;\alpha[, g(x) > 0$, donc $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante.

$\forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) < 0$, donc $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante.

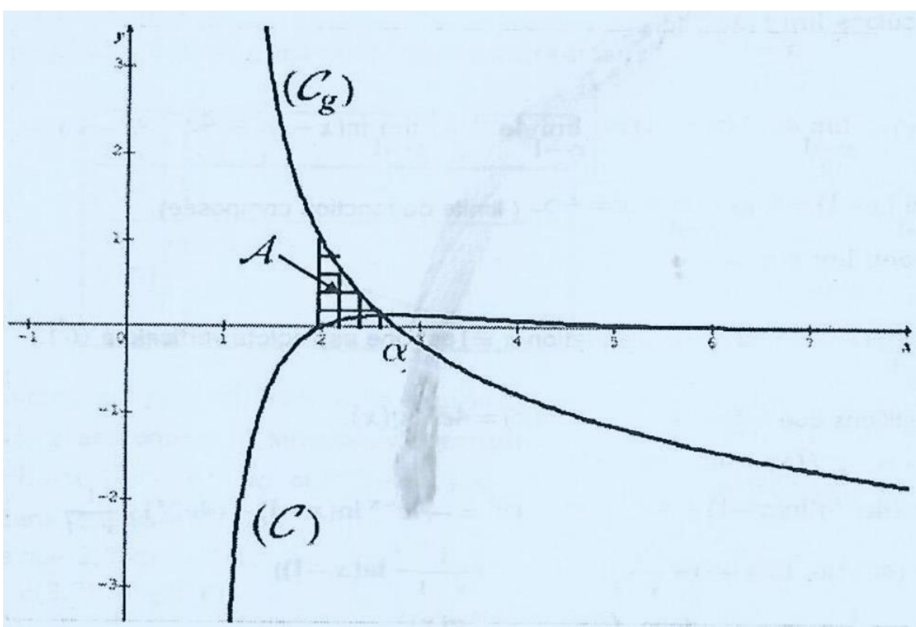
Et $f'(\alpha) = 0$

c) Tableau de variation de f

x	1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

4. Construction des courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C})$ dans le même repère $(0,1,\mathrm{J})$.

On prendra : $\alpha = 2{,}75$ et $f(\alpha) = 0{,}14$.



PARTIE C

1. Justifions que : $\ln(\alpha-1)=\frac{1}{\alpha-1}$

D'après la question 4-a) de la partie A, on a $g(\alpha)=0$

$$g(\alpha)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha-1}-\ln(\alpha-1)=0 \Leftrightarrow \ln(\alpha-1)=\frac{1}{\alpha-1}$$

2.a) Calculons U.

$$\mathrm{U}=\int_2^{\alpha}\frac{1}{x-1}dx=\{\ln|x-1||_2^{\alpha}=\ln(\alpha-1)-\ln 1=\ln(\alpha-1)$$

D'après la question 1) on a $\ln(\alpha-1)=\frac{1}{\alpha-1}$, donc $U=\frac{1}{\alpha-1}$

b) A l'aide d'une intégration par parties, justifions que : $\mathrm{V}=3-\alpha$.

$$\mathrm{V}=\int_2^{\alpha}\ln(x-1)dx$$

Posons $\mathrm{k}'(x)=1$; $\mathrm{p}(x)=\ln(x-1)$

$\mathrm{k}(x)=x$; $\mathrm{p}'(x)=\frac{1}{x-1}$

$$\mathrm{V}=[x\ln(x-1)]_2^{\alpha}-\int_2^{\alpha}\frac{x}{x-1}dx=[x\ln(x-1)]_2^{\alpha}-\int_2^{\alpha}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$\mathrm{v}=[x\ln(x-1)]_2^{\alpha}-\int_2^{\alpha}dx-\int_2^{\alpha}\frac{1}{x-1}dx=[x\ln(x-1)]_2^{\alpha}-[x]_2^{\alpha}-[\ln(x-1)]_2^{\alpha}$$

$$[x\ln(x-1)]_2^{\alpha}-[\ln(x-1)]_2^{\alpha}-[x]_2^{\alpha}=[(x-1)\ln(x-1)]_2^{\alpha}-[x]_2^{\alpha}$$

$$=(\alpha-1)\ln(\alpha-1)-(2-1)\ln(2-1)-(\alpha-2)=(\alpha-1)\ln(\alpha-1)-(1)\ln(1)-(\alpha-2)$$

$$=(\alpha-1)\ln(\alpha-1)-\alpha+2=(\alpha-1)\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)-\alpha+2=1-\alpha+2$$

$$\mathrm{V}=3-\alpha$$

3. $\mathcal{A}$ est l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe, l'axe (OI), les droites d'équations $x=2$ et $x=\alpha$

a) Justifions que : $\mathrm{U}-\mathrm{V}=\frac{(\alpha-2)^2}{\alpha-1}$.

$\mathrm{U}-\mathrm{V}=\int_2^{\alpha}\frac{1}{x-1}dx-\int_2^{\alpha}\ln(x-1)dx$, or $\mathrm{U}=\frac{1}{\alpha-1}$ et $\mathrm{V}=3-\alpha$

Donc $\mathrm{U}-\mathrm{V}=\frac{1}{\alpha-1}-(3-\alpha)=\frac{1-(\alpha-1)(3-\alpha)}{\alpha-1}=\frac{1-(3\alpha-3-\alpha^2+\alpha)}{\alpha-1}$

$=\frac{1-4\alpha+3+\alpha^2}{\alpha-1}=\frac{\alpha^2-4\alpha+4}{\alpha-1}$

$\mathrm{U}-\mathrm{V}=\frac{(\alpha-2)^2}{\alpha-1}$

b) Déduisons-en l'aire $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \int_2^{\alpha} g(x)dx, UA = \int_2^{\alpha} \left(\frac{1}{x-1} - \ln(x-1)\right) dx, UA$$

$$= \left(\int_2^{\alpha} \frac{1}{x-1} dx - \int_2^{\alpha} \ln(x-1)dx\right), UA = (U - \mathrm{V}), UA = \left(\frac{(\alpha-2)^2}{\alpha-1}\right) \times 2 \times 2 \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{A} = \frac{4(\alpha-2)^2}{\alpha-1} \text{ cm}^2$$

CORRECTION SESSION NORMALE 2018 SERIE D

EXERCICE 1

1.a) Forme trigonométrique du nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$.

Module de $1 + i\sqrt{3}$

$|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ |

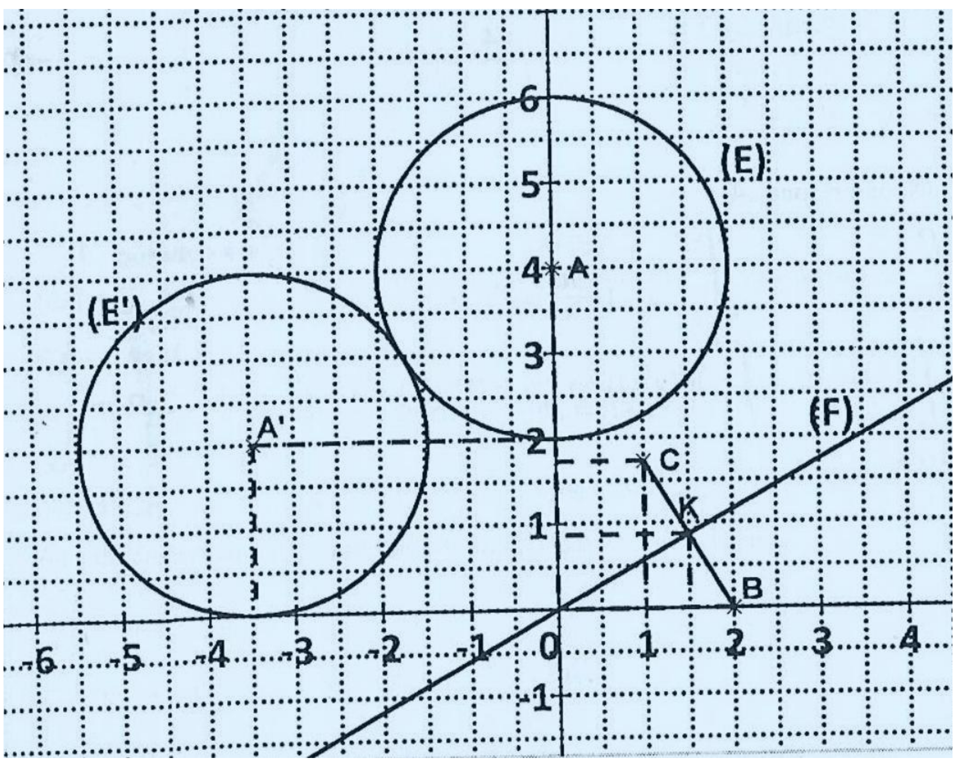
- Argument de $1 + i\sqrt{3}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

- Forme trigonométrique

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

b) Figure.



2. Soit S la similitude directe de centre O qui transforme B en C a) Justifions que l'expression complexe de S est: $z' = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z$.

S est la similitude directe de centre O qui transforme B en C

Donc son écriture complexe est sous la forme $z' = az + b$

$\begin{cases} S(0) = 0 \\ S(B) = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 0 + b = 0 \\ a(2) + b = 1 + \sqrt{3}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 2a = 1 + \sqrt{3}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \end{cases}$

Donc $z' = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z$

b) Justifions que S est une rotation dont on précisera une mesure de l'angle.

$$a = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \notin \mathbb{R}$$

$$|a| = \left|\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})\right| = \frac{1}{2}|(1 + i\sqrt{3})| = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

Donc S est une rotation dont une mesure de l'angle est $\mathrm{Arg(a)}$

Déterminons Argument de a

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Finalement, S est une rotation de centre O dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{3}$.

3. Soit (E) l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que : $|z - 4i| = 2$. a) Déterminons et construisons (**E**).

$|z - 4i| = 2 \Leftrightarrow |z - z_A| = 2 \Leftrightarrow AM = 2$

(E) est le cercle de centre $A(4i)$ et de rayon 2. (voir figure pour la construction).

b) Déterminons la nature et des éléments caractéristiques de (E') l'image de (E) par S. L'image par une rotation d'un cercle (C) de centre A et de rayon r est le cercle (C') de centre A' image de A par la rotation et de même rayon que (C).

Donc (E') est le cercle de centre $A' = S(A)$ et de rayon 2 .

$z_{A'} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z_A = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \times 4i = 2i \times (1 + i\sqrt{3}) = 2i - 2\sqrt{3} = -2\sqrt{3} + 2i$ (voir figure pour la construction).

4. Soit (F) l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que : $|z - 2| = |z - 1 - i\sqrt{3}|$. a) Déterminons et construisons (**F**).

$$\begin{aligned} |z - 2| = |z - 1 - i\sqrt{3}| &\Leftrightarrow |z - 2| = |z - (1 + i\sqrt{3})| \\ &\Leftrightarrow |z - z_B| = |z - z_C| \Leftrightarrow BM = CM \end{aligned}$$

(F) est l'ensemble des points du plan équidistants des points B et C. Donc (F) est la médiatrice du segment $[BC]$.

b) Justifions que le point O et le point K milieu du segment [BC] appartiennent à (F). K est le milieu du segment [BC] donc K appartient à (F) la médiatrice de [BC].

$|z_B - z_O| = |z_B| = |2| = 2$

$|z_C - z_O| = |z_C| = |1 + i\sqrt{3}| = 2 \ \Rightarrow \ OB = OC$

Donc O appartient à (F) la médiatrice de $[BC]$.

c) Justifions que l'image de (F) par S est la droite (OJ).

$S(O) = O$ car O est le centre de la rotation S.

K est le milieu du segment $[BC]$

$$z_K = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{2 + 1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$$

Soit K' l'image de K par S. On a :

$$z_{K'} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z_K = \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\frac{3 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3})(3 + i\sqrt{3})\right.$$

$$z_{K'} = \frac{-}{4}(3 + i3\sqrt{3} + i\sqrt{3} - 3) = \frac{1}{4}(i4\sqrt{3}) = i\sqrt{3} \in i\mathbb{R}$$

K' l'image de K par S appartient à l'axe imaginaire (OJ).

O et K' appartient à l'axe imaginaire $(O\ \mathrm{J})$ donc $(O\ \mathrm{K}') = (\mathrm{O})$.

Or $S[(F)] = (OK')$ donc l'image de (F) est la droite (OJ).

EXERCICE 2

1. Vérifions que h est une solution de (E_1).

$h'(\mathrm{t}) = -\frac{200}{t^2}\ \forall \mathrm{t} \in [2000; +\infty[$

$$-\frac{200}{t^2} + \frac{1}{200} \times \frac{200}{t} = -\frac{200}{t^2} + \frac{1}{t} \Leftrightarrow h'(t) + \frac{1}{200} \times h(t) = -\frac{200}{t^2} + \frac{1}{t}$$

donc h est une solution de (E_1).

2. Résolvons l'équation différentielle (E_2): $y'(t) + \frac{1}{200}y(t) = 0$.

Les solutions de (E_2) sont de la forme : $y_k(t) = ke^{-\frac{1}{200}t}$ $(k \in \mathbb{R})$

3.a) Montrons que g est solution de (E_1) si et seulement si g-h est solution de (E_2).

g est solution de $(E_1) \Leftrightarrow g'(t) + \frac{1}{200}g(t) = -\frac{200}{t^2} + \frac{1}{t}$

$$\Leftrightarrow \mathrm{g}'(t) + \frac{1}{200}\ \mathrm{g}(t) + \frac{200}{t^2} - \frac{1}{t} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{g}'(t) + \frac{200}{t^2} + \frac{1}{200}\ \mathrm{g}(t) - \frac{1}{t} = 0$$

$$\Leftrightarrow g'(t) - \left(-\frac{200}{t^2}\right) + \frac{1}{200}\left(g(t) - \frac{200}{t}\right) = 0 \Leftrightarrow g'(t) - h'(t) + \frac{1}{200}(g(t) - h(t)) = 0$$

$\Leftrightarrow (g-h)'(t) + \dfrac{1}{200}(g-h)(t) = 0$

$\Leftrightarrow (g-h)$ est solution de (E_2) b) Déduisons-en les solutions de (E_1)

f est solution de $(E_1) \Leftrightarrow (f-h)$ est solution de (E_2)

Donc $\forall t \in \left[2000; +\infty\right[, (f-h)(t) = ke^{-\frac{1}{200}t}\ (k \in \mathbb{R})$

D'où $f(t) = h(t) + ke^{-\frac{1}{200}t} = \frac{200}{t} + ke^{-\frac{1}{200}t}\ (k \in \mathbb{R})$

c) Sachant que $f(2000) = 1000$, vérifions que :

$$\Leftrightarrow \forall t \in \left[2000; +\infty\right[, f(t) = 999{,}9e^{\left(10-\frac{t}{200}\right)} + \frac{200}{t} \cdot \Leftrightarrow f(t) = \frac{200}{t} + ke^{-\frac{1}{200}t}$$

$f(2000) = 1000 \Leftrightarrow \frac{200}{2000} + ke^{-\frac{1}{200}\times 2000} = 1000$

$\Leftrightarrow \frac{1}{10} + ke^{-10} = 1000 \Leftrightarrow ke^{-10} = 1000 - \frac{1}{10}$

$\Leftrightarrow ke^{-10} = 1000 - 0{,}1 \Leftrightarrow ke^{-10} = 999{,}9$

$\Leftrightarrow k = \frac{999{,}9}{e^{-10}} = e^{10} \times 999{,}9$

$$f(t) = \frac{200}{t} + ke^{-\frac{1}{200}t} = \frac{200}{t} + e^{10} \times 999{,}9 \times e^{-\frac{1}{200}t}$$

$$f(t) = \frac{200}{t} + 999{,}9 \times e^{10} \times e^{-\frac{1}{200}t} = \frac{200}{t} + 999{,}9 \times e^{\left(10-\frac{1}{200}t\right)}$$

$$f(t) = 999{,}9 \times e^{\left(10-\frac{t}{200}\right)} + \frac{200}{t}$$

d) Déterminons le nombre d'individus de cette population animale en 2020 Donnons le résultat arrondi à l'ordre 0.

En $2020, t = 2020$

$$f(2020) = 999{,}9 \times e^{\left(10-\frac{2020}{200}\right)} + \frac{200}{2020} = 999{,}9 \times e^{\left(\frac{2000-2020}{200}\right)} + \frac{20}{202}$$

$$f(2020) = 999{,}9 \times e^{\left(\frac{-20}{200}\right)} + \frac{20}{202} = 999{,}9 \times e^{\left(\frac{-1}{10}\right)} + \frac{20}{202} = 999{,}9 \times e^{(-0{,}1)} + \frac{10}{101}$$

$f(2020) = 904{,}84 \simeq 905$

Le nombre d'individus de cette population animale en 2020 sera d'environ 905.

PROBLEME

PARTIE A

On donne : $g(x) = 2 + x - 3x\ln(x)$.

1. Limite de g en 0 et limite de g en $+\infty$.

$\lim_{x\to 0} g(x) = 2$ car $\lim_{x\to 0} 2 + x = 2$ et $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{2}{x} + 1 - 3\ln x\right) = -\infty$

car $\lim_{x\to +\infty} x = +\infty; \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = 0; \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

2.a) Calcul de g′, la fonction dérivée de g.

$$g'(x) = 1 - 3\left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right) = 1 - 3(\ln x + 1) = 1 - 3\ln x - 3 = -2 - 3\ln x$$

b) Étudie les variations de g.

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -2 - 3\ln x > 0 \Leftrightarrow -3\ln x > 2 \Leftrightarrow 3\ln x < -2 \Leftrightarrow \ln x < -\frac{2}{3}$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < e^{\frac{2}{3}}$$

$\forall x \in]0; e^{-\frac{2}{3}}[, g'(x) > 0$ donc g est srictement croissante sur $]0; e^{-\frac{2}{3}}[$

$\forall x \in]e^{-\frac{2}{3}}; +\infty[, g'(x) < 0$ donc g est srictement décroissante sur $]e^{-\frac{2}{3}}; +\infty[$ c) Vérifie que : $g\left(e^{-\frac{2}{3}}\right) = 2 + 3e^{-\frac{2}{3}}$

$$g\left(e^{-\frac{2}{3}}\right) = 2 + e^{-\frac{2}{3}} - 3e^{-\frac{2}{3}} \times \ln\left(e^{-\frac{2}{3}}\right) = 2 + e^{-\frac{2}{3}} - 3e^{-\frac{2}{3}} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 2 + e^{-\frac{2}{3}} + 2e^{-\frac{2}{3}}\ g\left(e^{-\frac{2}{3}}\right) = 2 + 3e^{-\frac{2}{3}}$$

Le tableau de variation de g.

X	0		$e^{-\frac{2}{3}}$		$+\infty$
g′(x)		+	0	-	
g(x)	2	$\nearrow$	$g(e^{-\frac{2}{3}})$	$\searrow$	$-\infty$

3.a) Démontre que $\mathrm{g(x)} = 0$ admet dans $]e^{-\frac{2}{3}}; +\infty[$, une solution unique notée α. g est continue et strictement décroissante sur $]e^{-\frac{2}{3}}; +\infty[$.

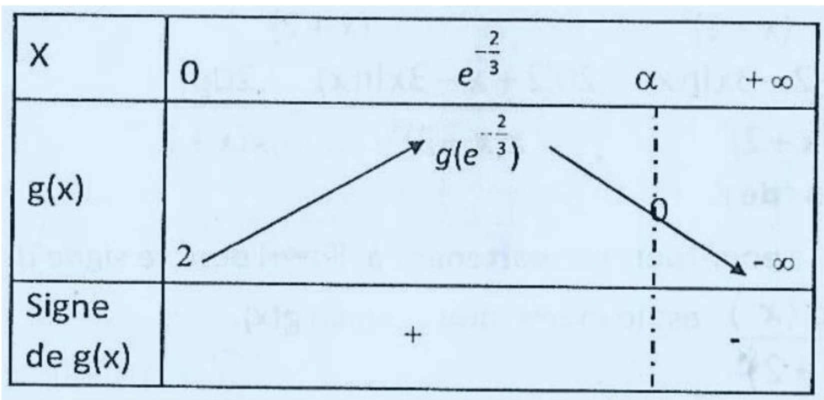
$0 \in g(]e^{-\frac{2}{3}}; +\infty[) = \left]2 + 3e^{-\frac{2}{3}}; -\infty\right[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]e^{-\frac{2}{3}}; +\infty[$ une solution unique notée α.

b) Justifie que: $1{,}9 < \alpha < 2$.

$[1{,}9; 2] \subset]e^{-\frac{2}{3}}; +\infty[$ donc g est continue et strictement décroissante sur $[1{,}9; 2]$ $g(1{,}9) = 0{,}241$ $g(2) = -0{,}159$

$g(1{,}9) \times g(2) < 0$ donc $1{,}9 < \alpha < 2$.

4.a) Démontre que : $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$.



On a : $g(]0; \alpha[) =]0; 2 + 3e^{-\frac{2}{3}}[$ donc $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) \in]0; 2 + 3e^{-\frac{2}{3}}[\Rightarrow g(x) > 0$ $g(]\alpha; +\infty[) =]-\infty; 0; [$ donc $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) \in]-\infty; 0; [\Rightarrow g(x) < 0$

PARTIE B

1.a) Limite de f en 0.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0} (x + 2)^3 = 2^3 = 8$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Donc l'axe (OJ) d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (*C*).

b) Justifie que la limite de f en $+\infty$ est égale à 0 .

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{20x^3}{(x+2)^3} \times \frac{\ln x}{x^3} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{20x^3}{(x+2)^3} = 20$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0$

Donc l'axe (OI) d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (*C*) en $+\infty$.

2. Soit f' la fonction dérivée de f.

a) Démontrons que : $\forall x \in]0; +\infty\left[, f'(x) = \frac{20g(x)}{x(x+2)^4}\right.$

$$f'(x) = \left(\frac{20\ln x}{(x + 2)^3}\right)' = \frac{(20\ln x)' \times (x + 2)^3 - (20\ln x) \times ((x + 2)^3)'}{((x + 2)^3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{20 \times \left(\frac{1}{x}\right) \times (x+2)^3 - (20\ln x) \times 3 \times 1 \times (x+2)^2}{(x+2)^6}$$

$$f'(x) = \frac{20 \times \left(\frac{1}{x}\right) \times (x+2)^3 - 60\ln x(x+2)^2}{(x+2)^6} = \frac{20(x+2)^2 \times \left(\left(\frac{1}{x}\right) \times (x+2) - 3\ln x\right)}{(x+2)^6}$$

$$f'(x) = \frac{20 \times \left(\left(\frac{1}{x}\right) \times (x+2) - 3\ln x\right)}{(x+2)^4} = \frac{20 \times \frac{1}{x} \times (x + 2 - 3x\ln x)}{(x+2)^4}$$

$$f'(x) = \frac{20(x+2-3x\ln x)}{x(x+2)^4} = \frac{20(2+x-3x\ln x)}{x(x+2)^4} = \frac{20g(x)}{x(x+2)^4}$$

b) Les variations de f.

$x(x+2)^4 > 0$ pour tout x appartenant à $10; \infty + [$ donc le signe de $f'(x) = \frac{20g(x)}{x(x+2)^4}$ est le même que celui de $g(x)$.

Or $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$.

Finalement, $f'(x) > 0$ sur $]0; \alpha[$ et $f'(x) < 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

f est strictement croissante sur $]0; \alpha[$

f est strictement décroissante sur $]\alpha; +\infty[$.

c) Tableau de variation de f.

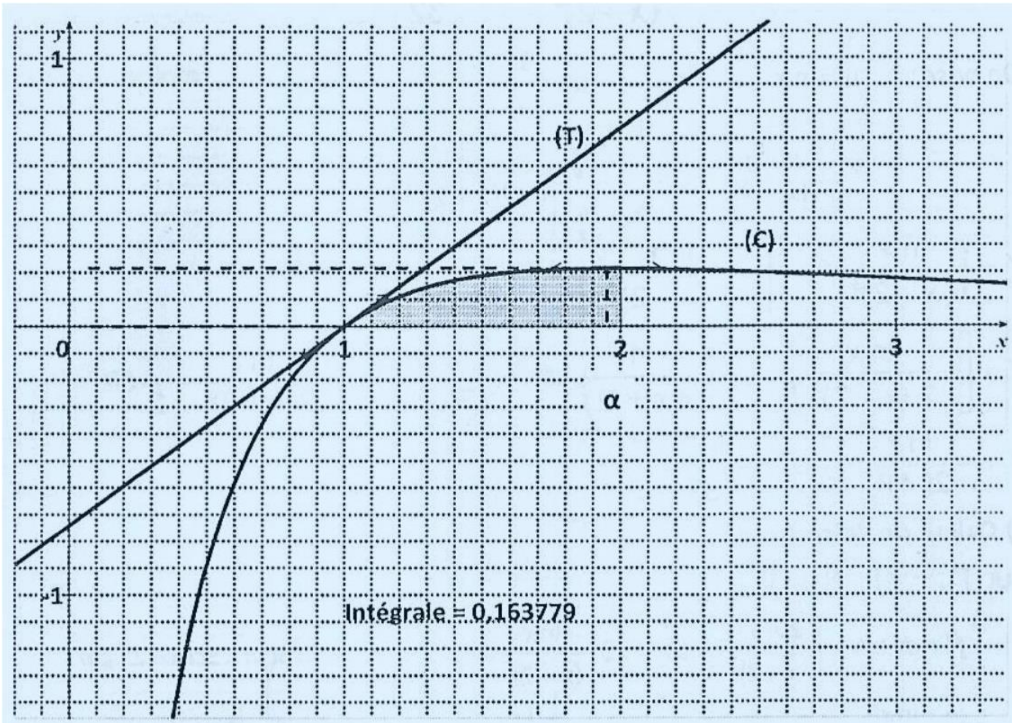
X	0		α		+∞
g'(x)		+	0	-	
g(x)	- ∞	↗	f(α)	↘	0

3. $(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f(1) = \frac{20\ln 1}{(1+2)^3} = \frac{0}{(3)^3} = 0$ et $f'(1) = \frac{20(2+1-3\times1\times\ln 1)}{1\times(1+2)^4} = \frac{20\times(3)}{(3)^4} = \frac{60}{81} = \frac{20}{27}$

$(T): y = \frac{20}{27}(x-1) + 0 = \frac{20}{27}x - \frac{20}{27}$.

4. Traçons (T) et (C). On prendra $\alpha = 1{,}95$ et $f(\alpha) = 0{,}22$.



PARTIE C

1. Déduisons que : $U = \frac{\ln 3}{4} - \frac{\ln 2}{4} - \frac{1}{24}$

$$U = \int_1^2 \frac{1}{x(x+2)^2}dx = \int_1^2 \frac{1}{4x}dx - \int_1^2 \frac{1}{4(x+2)}dx - \int_1^2 \frac{1}{2(x+2)^2}dx$$

$$U = \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{1}{x}dx - \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{1}{(x+2)}dx - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{(x+2)^2}dx$$

$$U = \frac{1}{4}[\ln x]_1^2 - \frac{1}{4}[\ln(x+2)]_1^2 - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(x+2)}\right]_1^2$$

$$U = \frac{1}{4}(\ln 2 - \ln 1) - \frac{1}{4}(\ln 4 - \ln 3) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$U = \frac{1}{4}(\ln 2 - \ln 1) - \frac{1}{4}(\ln 4 - \ln 3) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$U = \frac{1}{4}(\ln 2) - \frac{1}{4}(\ln 4 - \ln 3) - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{\ln 4}{4} + \frac{\ln 3}{4} - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{12} + \frac{4}{12}\right)$$

$$U = \frac{\ln 2}{4} - \frac{2\ln 2}{4} + \frac{\ln 3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\right) = -\frac{\ln 2}{4} + \frac{\ln 3}{4} - \frac{1}{24} = \frac{\ln 3}{4} - \frac{\ln 2}{4} - \frac{1}{24}$$

2. a) Montrons que: $V = \int_1^2 \frac{\ln x}{(x+2)^3}dx = -\frac{\ln 2}{32} + \frac{1}{2}U.$

On pose: $u = \ln x \; u' = \frac{1}{x}$

$v' = \frac{1}{(x+2)^3} \; v = -\frac{1}{2(x+2)^2}$

$$V = \int_1^2 \frac{\ln x}{(x+2)^3} dx = \left[-\frac{\ln x}{2(x+2)^2}\right]_1^2 - \int_1^2 -\frac{1}{2x(x+2)^2} dx$$
$$V = \left[-\frac{\ln x}{2(x+2)^2}\right]_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)^2} dx = -\frac{\ln 2}{2(2+2)^2} + \frac{\ln 1}{2(1+2)^2} + \frac{1}{2}U$$
$$V = -\frac{\ln 2}{2(4)^2} - \frac{1}{2}U = -\frac{\ln 2}{32} + \frac{1}{2}U$$

b) Calcul de l'aire A.

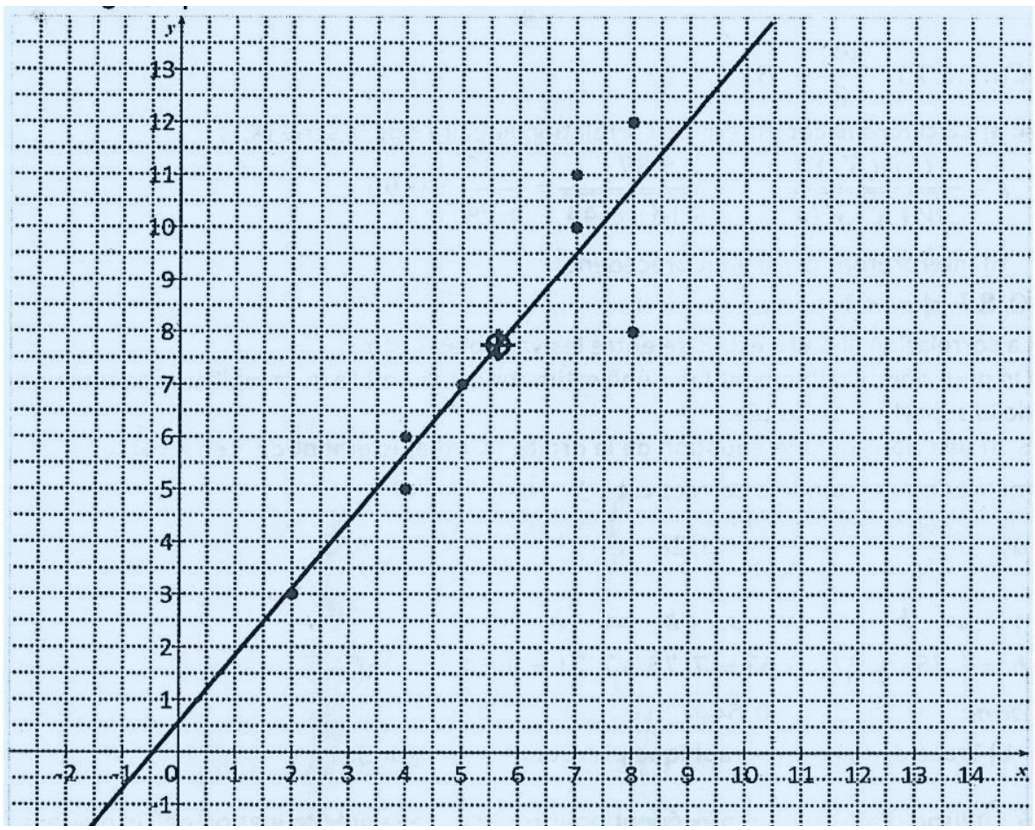
Sur $]1; +\infty[, f(x) \geq 0.$

$$A = \int_1^2 f(x)dx.UA = \int_1^2 \frac{20\ln x}{(x+2)^3} dx \cdot UA = 20\int_1^2 \frac{\ln x}{(x+2)^3} dx.UA \text{ avec } UA = 5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} = 25 \text{ cm}^2$$
$$A = 20\int_1^2 \frac{\ln x}{(x+2)^3} dx.UA = 20 \times V \times UA = 20 \times \left(-\frac{\ln 2}{32} + \frac{1}{2}U\right) \times UA$$
$$A = 20 \times \left(-\frac{\ln 2}{32} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln 3}{4} - \frac{\ln 2}{4} - \frac{1}{24}\right)\right) \times UA = 20 \times \left(-\frac{\ln 2}{32} + \frac{\ln 3}{8} - \frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{48}\right)\Bigg) \times UA$$
$$A = 20 \times \left(-\frac{\ln 2}{32} + \frac{\ln 3}{8} - \frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{48}\right) \times UA = 20 \times \left(-\frac{\ln 2}{32} + \frac{4\ln 3}{32} - \frac{4\ln 2}{32} - \frac{1}{48}\right) \times UA$$
$$A = 20 \times \left(-\frac{5\ln 2}{32} + \frac{4\ln 3}{32} - \frac{1}{48}\right) \times UA = 20 \times \left(-\frac{5\ln 2}{32} + \frac{4\ln 3}{32} - \frac{1}{48}\right) \times UA$$
$$A = 20 \times \left(-\frac{5\ln 2}{32} + \frac{4\ln 3}{32} - \frac{1}{48}\right) \times UA = 0{,}164 \times UA = 0{,}164 \times 25 \text{ cm}^2$$
$$A = 4{,}1 \text{ cm}^2$$

CORRECTION SESSION NORMALE 2017 SERIE D

EXERCICE 1

1. Nuage de points



2. Justifions que le point moyen G a pour couple de coordonnées $(5{,}63; 7{,}75)$

$$\left.\begin{aligned} X_G &= \frac{2+4+4+5+7+7+8+8}{8} = \frac{45}{8} = 5{,}63 \\ Y_G &= \frac{3+5+6+7+10+11+8+12}{8} = \frac{62}{8} = 7{,}75 \end{aligned}\right\} \quad G(5{,}63; 7{,}75)$$

3. Justifions que : $V(X) = 4{,}18; V(Y) = 8{,}44$ et $\mathrm{Cov}(X,Y) = 5{,}37$

$$V(X) = \frac{2^2+4^2+4^2+5^2+7^2+7^2+8^2+8^2}{8} - (5{,}63)^2 = \frac{287}{8} - 31{,}70 = 4{,}18$$

350

$$V(Y) = \frac{3^2+5^2+6^2+7^2+10^2+11^2+8^2+12^2}{8} - (7{,}75)^2 = \frac{548}{8} - 60{,}06 = 8{,}44$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{2\times 3+4\times 5+4\times 6+5\times 7+7\times 10+7\times 11+8\times 8+8\times 12}{8} -$$

$(5{,}63 \times 7{,}75)$

$\text{Cov}(X,Y) = \frac{392}{8} - 43{,}63 = 5{,}37$

4. a) Calculons le coefficient de corrélation linéaire r de la série (X,Y).

$$r = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)\cdot V(Y)}} = \frac{5{,}37}{\sqrt{4{,}18 \times 8{,}44}} = \frac{5{,}37}{5{,}94} = 0{,}90$$

b) Interprétons le résultat précédent.

$0{,}87 < |r| < 1$

La corrélation linéaire est forte entre les variables X et Y

On peut donc valablement faire une estimation du nombre de travailleurs en fonction de la superficie exploitée.

5. a) Justifions qu'une équation de la droite (D) d'ajustement de Y en X par la méthode des moindres carrées est : $y = 1{,}28x + 0{,}54$

$a = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{V(X)} = \frac{5{,}37}{4{,}18} = 1{,}28$

$y = ax + b \Rightarrow \bar{y} = a\bar{x} + b \Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x}$

$b = 7{,}75 - 1{,}28 \times 5{,}63 = 7{,}75 - 7{,}21 = 0{,}54$

donc $y = 1{,}28x + 0{,}54$

b) Tracé de (D) sur le graphique précédent (voir figure).

6. Utilisons l'ajustement précédent pour répondre à la préoccupation de l'exploitant. On donnera l'arrondi d'ordre zéro du résultat.

$y = 1{,}28x + 0{,}54 \Rightarrow x = \frac{y-b}{a}$

pour $y = 16$, on a: $x = \frac{16-0{,}54}{1{,}28} = 12{,}07$

Pour 16 ha d'hévéa, il faut environ 12 travailleurs.

EXERCICE 2

1. $z^2 + (1-3i)z - 4 = 0$

$\Delta = (1-3i)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 1 - 6i + (3i)^2 + 16 = 1 - 6i - 9 + 16$

$\Delta = 8 - 6i$

$\Delta = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$

Soit $u = x + iy$ une racine carrée de Δ

$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2-y^2=8 \\ 2xy=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2=18 \\ 2y^2=2 \\ xy=-3<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=9 \\ y^2=1 \\ xy<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \text{ ou } x=-3 \\ y=1 \text{ ou } y=-1 \\ xy<0 \end{cases}$

Les racines carrées de Δ sont : $u_1 = 3 - i$ et $u_2 = -3 + i$

$z_1 = \dfrac{-1+3i+3-i}{2} = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i$

$z_2 = \dfrac{-1+3i-3+i}{2} = \dfrac{-4+4i}{2} = -2+2i$

$S_{\mathbb{C}} = \{1+i; -2+2i\}$

2.a) $P(z) = z^3 + (1-i)z^2 + (2+2i)z - 8i$

$P(-2i) = (-2i)^3 + (1-i)(-2i)^2 + (2+2i)(-2i) - 8i$

$P(-2i) = 8i + (1-i)(-4) - 4i + 4 - 8i = 8i - 4 + 4i - 4i + 4 - 8i$

$P(-2i) = 0$

b) Division euclidienne

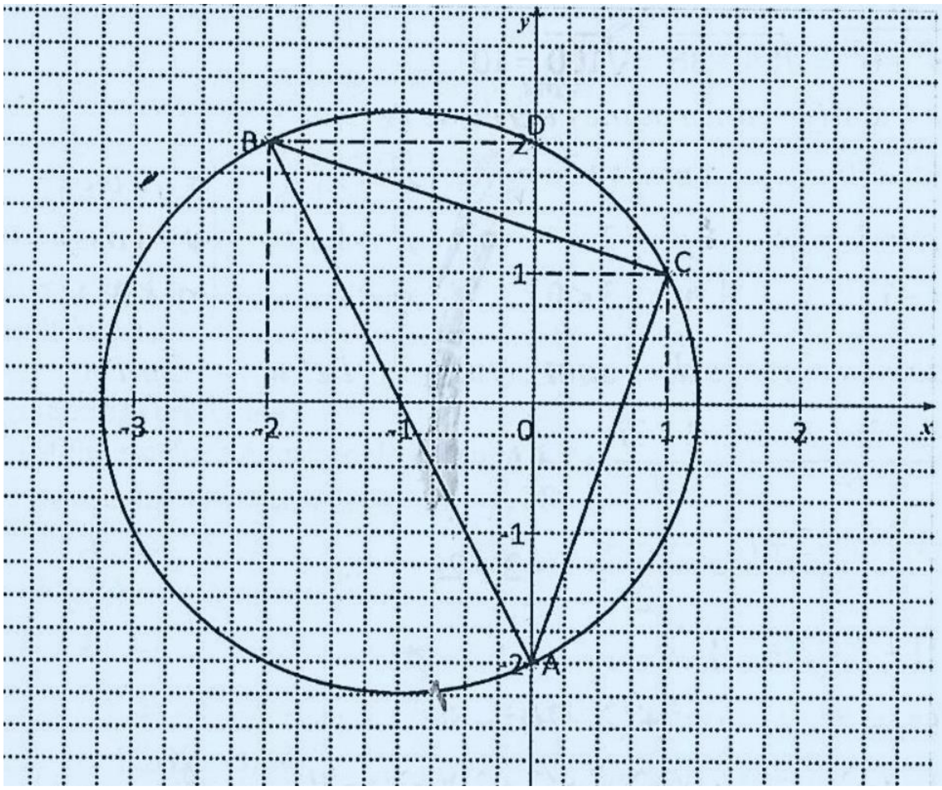
$$\begin{array}{l|l} z^3+(1-i)z^2+(2+2i)z-8i & z+2i \\ \cline{2-2} \underline{z^3+2iz^2} & z^2+(1-3i)z-4 \\ \quad (1-3i)z^2+(2+2i)z & \\ \quad \underline{(1-3i)z^2+(6+2i)z} & \\ \qquad\qquad -4z-8i & \\ \qquad\qquad \underline{-4z-8i} & \\ \qquad\qquad\ \ 0\ \ 0 & \end{array}$$

On en déduit que : $a = 1 - 3i$; $b = -4$.

c) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -2i$ ou $z = 1 + i$ ou $z = -2 + 2i$

$S_{\mathbb{C}} = \{-2i; 1+i; -2+2i\}$

3.a) Voir figure



b) $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \frac{1+i-(-2i)}{1+i-(-2+2i)} = \frac{1+i+2i}{1+i+2-2i} = \frac{1+3i}{3-i} = \frac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$

$$\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \frac{3+i+9i-3}{9+1} = \frac{10i}{10} = i$$

$i \in i\mathbb{R} \Rightarrow ABC$ est rectangle en C ?

$|i| = 1 \Rightarrow$ ABC est isocèle en $C\}$ Alors ABC est rectangle isocèle en C

c) On a montré que $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = i$. On montre de même que $\frac{z_A - z_D}{z_B - z_D} = 2i$

$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} : \frac{z_A - z_D}{z_B - z_D} = \frac{i}{2i} = \frac{i(-i)}{2i(-i)} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$,Donc A, B, C et D sont cocycliques.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$ On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0,1,J)$. L'unité graphique est 2 cm.

PARTIE A

1.a) Justifions que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 - x^2)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} - x^2 e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} - \frac{x^2}{e^x} = 0$$

b) Donnons une interprétation graphique du résultat obtenu précédemment.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. La droite (OI) ($y = 0$)est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

2.a) Calculons $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Car $\lim_{x\to-\infty} 1 - x^2 = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - x^2}{x} \cdot e^{-x} = +\infty$$

$$\text{Car} \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$$

et $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$.

b) Donnons une interprétation graphique des résultats obtenus précédemment.

(C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

3. a) Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - x^2)e^{-x} \\ f'(x) &= (1 - x^2)'e^{-x} + (1 - x^2)(e^{-x})' \\ &= -2xe^{-x} - (1 - x^2)e^{-x} = -2xe^{-x} + (x^2 - 1)e^{-x} \end{aligned}$$

$f'(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $x^2 - 2x - 1$

Etudions le signe de $x^2 - 2x - 1$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8; \sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2x-1		+	0	-	0	+	

On en déduit que :

$* \ \forall x \in]-\infty; 1 - \sqrt{2}[\cup]1 + \sqrt{2}; +\infty[, f'(x) > 0;$

$* \ \forall x \in]1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}[, f'(x) < 0.$

c) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(1-\sqrt{2})$	↘	$f(1+\sqrt{2})$	↗	0

4. Montrons qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est

$y = -x + 1$

$(T): y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0) = -1 \cdot (x - 0) + 1$

$(T): y = -x + 1$

5. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (1 + x)e^{-x} - 1$.

a) Calculons $h'(x)$

$$\begin{aligned} h(x) &= (1 + x)e^{-x} - 1 \\ h'(x) &= (1 + x)'e^{-x} + (1 + x)(e^{-x})' - (1)' \\ &= 1 \cdot e^{-x} - (1 + x)e^{-x} = (1 - 1 - x)e^{-x} \end{aligned}$$

$h'(x) = -x.e^{-x}$

b) Etudions les variations de h.

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0$ donc le signe de $h'(x)$ est le même que celui de-x x

$\forall x \in]-\infty; 0[,\ h'(x) > 0$

$\forall x \in]0; +\infty[,\ h'(x) < 0$ h **est strictement croissante sur** $]-\infty;$ **0 [**

h **est strictement décroissante sur** $]0; +\infty[$

c) Calcul de $h(0)$ et donnons le tableau de variation de h.

$h(0) = (1 + 0)e^{-0} - 1 = 1 \times e^0 - 1 = 1 \times 1 - 1 = 1 - 1 = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	
$h(x)$		↗	0	↘	

d) Justifions que : $\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \mathrm{h(x)} \leq 0$.

O est le maximum absolu de h(x) sur $\mathbb{R}$ donc $\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \mathrm{h(x)} \leq 0$.

e) Vérifions que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + x - 1 = (1 - x)h(x)$

$$\begin{aligned} f(x) + x - 1 &= (1 - x^2)e^{-x} + x - 1 = (1 - x)(1 + x)e^{-x} + x - 1 \\ &= (1 - x)(1 + x)e^{-x} - (1 - x) = (1 - x)[(1 + x)e^{-x} - 1] \end{aligned}$$

$f(x) + x - 1 = (1 - x) \cdot h(x)$

f) Position relative de (C) et (T).

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$(x-1).[-h(x)]$		-	0	-	0	+	

$f(x) - (-x + 1) = f(x) + x - 1 = (1 - x) \cdot h(x) = -(x - 1) \cdot h(x)$

$f(x) - (-x + 1) = (x - 1) \cdot [-h(x)]$

D'après 5.d), $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) \leq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ [-h(x)] \geq 0$

Le signe de $f(x) - (-x + 1)$ est le même que celui de $(x - 1)$

Sur $]-\infty; 0[\cup]0; 1[$, (C) est en dessous de (T).

Sur $]1; +\infty[, (C)$ est au-dessus de (T).

Aux points d'abscisses 0 et 1 , (C) et (T) se coupent.

6. Tracé de la tangente (T) et de la courbe (C). (Voir graphique).

PARTIE B

$A(\lambda)$ est l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations $x - 1$ et $x = \lambda$.

1. Démontrons que: $A(\lambda) = \left(\frac{16}{e} - \frac{4(1+\lambda)^2}{e^\lambda}\right) \mathrm{cm}^2$.

Sur $]1; +\infty[, f(x) \leq 0$.
Donc $A(\lambda) = -\int_1^\lambda f(x)dx.UA = -\int_1^\lambda (1 - x^2)e^{-x}dx.UA = \int_1^\lambda (x^2 - 1)e^{-x}dx \times 4\ \mathrm{cm}^2$

On pose :

$u = x^2 - 1\ u' = 2x$

$v' = e^{-x}\ y = -e^{-x}$

$\int_1^\lambda (x^2 - 1)e^{-x}dx = [(x^2 - 1)e^{-x}]_1^\lambda - \int_1^\lambda (-2x)e^{-x}dx = [(x^2 - 1)e^{-x}]_1^\lambda + \int_1^\lambda 2x \cdot e^{-x}dx$ On pose:

$u = 2x\ u' = 2$

$v' = e^{-x}\ v = -e^{-x}$

$\int_1^{\lambda} 2x \cdot e^{-x}dx = [(-2x)e^{-x}]_1^{\lambda} - \int_1^{\lambda}(-2)e^{-x}dx = [(-2x)e^{-x}]_1^{\lambda} + \int_1^{\lambda} 2e^{-x}dx$

$\int 2x \cdot e^{-x}dx = [(-2x)e^{-x}]_1^{\lambda} + [-2 \cdot e^{-x}]_1^{\lambda} = [(-2x-2)e^{-x}]_1^{\lambda}$

$\int_1^{\lambda}(x^2-1)e^{-x}dx = [-(x^2-1)e^{-x}]_1^{\lambda} + \int_1^{\lambda} 2x \cdot e^{-x}dx = [(-x^2+1)e^{-x}]_1^{\lambda} + [(-2x-2)e^{-x}]_1^{\lambda}$

$\int_1^{\lambda}(x^2-1)e^{-x}dx = [(-x^2+1-2x-2)e^{-x}]_1^{\lambda} = [(-x^2-2x-1)e^{-x}]_1^{\lambda} = -[(x^2+2x+1)e^{-x}]_1^{\lambda}$

$\int_1^{\lambda}(x^2-1)e^{-x}dx = -[(x+1)^2e^{-x}]_1^{\lambda}$

$\int_1^{2}(x^2-1)e^{-x}dx = -(\lambda+1)^2e^{-\lambda} - [-(1+1)^2e^{-1}] = -(\lambda+1)^2e^{-\lambda} + [(2)^2e^{-1}]$

$\int_1^{\lambda}(x^2-1)e^{-x}dx = -(\lambda+1)^2e^{-\lambda} + 4e^{-1} = \dfrac{-(\lambda+1)^2}{e^{\lambda}} + \dfrac{4}{e} = \dfrac{4}{e} - \dfrac{(\lambda+1)^2}{e^{\lambda}}$

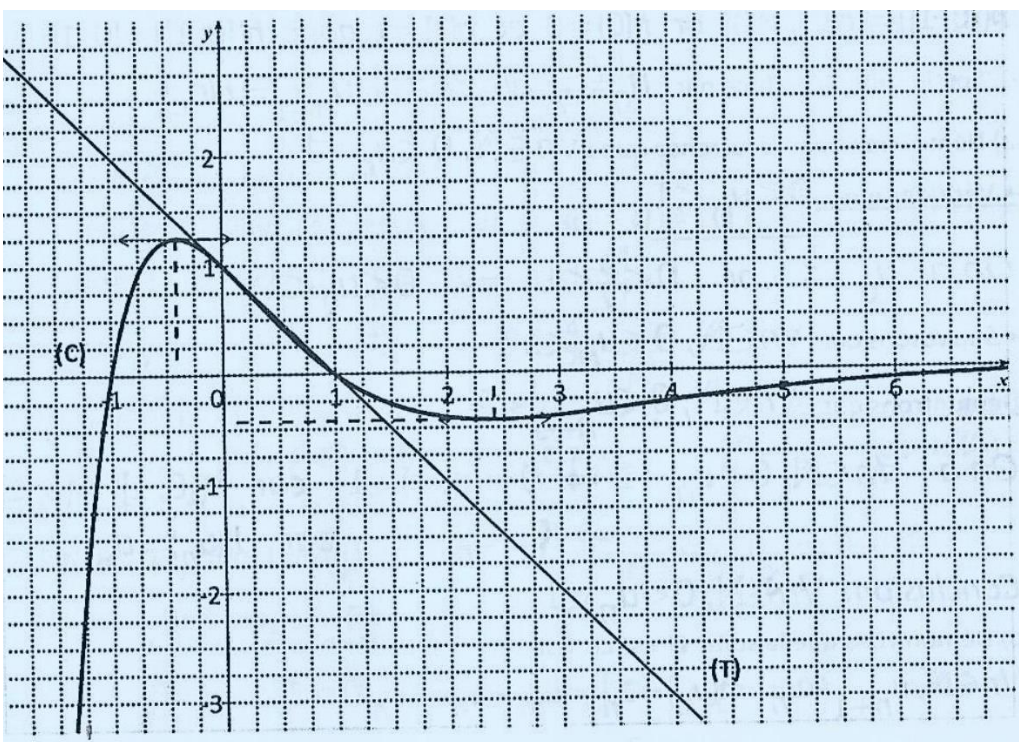
$A(\lambda) = \int_1^{\lambda}(x^2-1)e^{-x}dx \times 4\text{ cm}^2 = \left(\dfrac{4}{e} - \dfrac{(\lambda+1)^2}{e^{\lambda}}\right) \times 4\text{ cm}^2 = \left(\dfrac{16}{e} - \dfrac{4(\lambda+1)^2}{e^{\lambda}}\right)\text{cm}^2$

2. Déterminons la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{16}{e} - \frac{4(\lambda+1)^2}{e^{\lambda}} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{16}{e} - \frac{4(\lambda^2+2\lambda+1)}{e^{\lambda}}$$
$$= \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{16}{e} - 4 \times \frac{\lambda^2}{e^{\lambda}} - 8 \times \frac{\lambda}{e^{\lambda}} - 4 \times \frac{1}{e^{\lambda}}$$

$\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = \frac{16}{e} cm^2$ car $\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda^2}{e^{\lambda}} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda}{e^{\lambda}} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{e^{\lambda}} = 0.$

Figure



CORRECTION SESSION NORMALE 2016 SERIE D

EXERCICE 1

1. Soit la fonction h dérivable et définie sur $[0;1]$ par: $h(x) = 2x - x^2$

a) Démontrons que h est strictement croissante sur l'inte:- /alle $[0;1]$.

$\forall x \in [0;1], h'(x) = 2 - 2x = 2(1-x)$

$\forall x \in [0;1], 1 - x \geq 0 \Rightarrow h'(x) \geq 0$ donc h est croissante sur $[0;1]$

b) En déduisons que l'image de l'intervalle $[0;1]$ par h est l'intervalle $[0;1]$. $h([0;1]) = [h(0);h(1)]$ or $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$ donc $h([0;1]) = [0;1]$

2. Soit la suite U définie par : $U_0 = \frac{3}{7}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$

a) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$

- Vérifions que: $0 < u_0 < 1$

On $a: u_0 = \frac{\bar{3}}{7}$ or $0 < \frac{3}{7} < 1 \Rightarrow 0 < u_0 < 1$

- Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$

Démontrons que: $\forall r \in \mathbb{N}, 0 < u_{n+1} < 1$

On a: $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1 \Rightarrow 0 < h(u_n) < 1 \text{ car } h([0;1]) = [0;1]$

$$\Rightarrow 0 < u_n < 1 \text{ car } h(u_n) = u_{n+1}$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$

b) Démontrons que la suite u est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = h(u_n) - u_n = 2u_n - u_n^2 - u_n$

$$= u_n - u_n^2 = u_n(1 - u_n)$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1 \Rightarrow -1 < -u_n < 0$

$$\Rightarrow -1 + 1 < 1 - u_n < 0 + 1 \Rightarrow 0 < 1 - u_n < 1$$

$0 < u_n < 1$ et $0 < 1 - u_{n!} < 1$ donc $u_n(1 - u_n) > 0$

D'où: $u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$

Par conséquent: la suite u est croissante.

c) Justifions que la suite U est convergente.

La suite U est croissante et majorée par 1 donc la suite U est convergente.

3. On considère la suite V définie par: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(1 - u_n)$

a) Démontrons que V est une suite géométrique de raison 2 .

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \ln(1 - u_{n+1})$ or $u_{n+1} = h(u_n) = 2u_n - u_n^2$

$v_{n+1} = \ln\left(1 - (2u_n - u_n^2)\right) = \ln(1 - 2u_n + u_n^2)$

$v_{n+1} = \ln[(1 - u_n)^2] = 2\ln(1 - u_n)$

$v_{n+1} = 2v_n$ car $v_n = \ln(1 - u_n)$

Donc V est une suite géométrique de raison 2 .

b) Exprimons V_n en fonction de n.

V est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = \ln(1 - u_0) = \ln\left(1 - \frac{3}{7}\right) = \ln\left(\frac{7-3}{7}\right) = \ln\left(\frac{4}{7}\right)$.

Donc: $v_n = v_0 \times q^n = \ln\left(\frac{4}{7}\right) \times 2^n = 2^n \ln\left(\frac{4}{7}\right)$

c) Calculons la limite de la suite V.

$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} 2^n \ln\left(\frac{4}{7}\right) = -\infty$ car $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et $\ln\left(\frac{4}{7}\right) < 0$

d) En déduisons la limite de la suite u

On a: $v_n = \ln(1 - u_n) \Leftrightarrow e^{v_n} = 1 - u_n \Leftrightarrow u_n = 1 - e^{v_n}$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - e^{v_n} = 1$

car $\lim_{n\to+\infty} e^{v_n} = 0$ puisque $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

EXERCICE 2

S est la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe Z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$

1. a) Vérifions que $S(\Omega) = \Omega$.

$z'_\Omega = \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_\Omega + 2i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 2 + 2i\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - i\sqrt{3} + i\sqrt{3} = 2$ $z'_\Omega = z_\Omega$ donc $S(\Omega) = \Omega$ b) Justifions que **S** est une similitude directe

L'écriture complexe de s est de la forme: $z' = az + b$ avec $a = 1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $|a| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \neq 1$ donc S est une similitude plane directe.

Déterminons les éléments caractéristiques de **S**.

- Le centre de S est Ω car $S(\Omega) = \Omega$.
- Le rapport de S est $k = |a| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
- L'angle de **S** est $\theta = \arg(a) = -\frac{\pi}{6}$

car $\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(a)}{|a|} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(a)}{|a|} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = -\frac{1}{2}$

2. a) Démontrons que $\forall z \neq 2, \frac{z'-z}{2-z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\forall z \neq 2,\ \frac{z'-z}{2-z} = \frac{\left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3} - z}{2-z} = \frac{-i\frac{\sqrt{3}}{3}z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}}{2-z}$$

$$\forall z \neq 2,\ \frac{z'-z}{2-z} = \frac{i\frac{\sqrt{3}}{3}(2-z)}{2-z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) En déduisons que le triangle $M\Omega M'$ est rectangle en M.

Première démonstration:

$$\forall z \neq 2,\ \frac{z'-z}{2-z} = \frac{z_{M'} - z_M}{z_\Omega - z_M} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Donc le triangle $\mathrm{M}\Omega\mathbf{M}'$ est rectangle en M.

Deuxième démonstration:

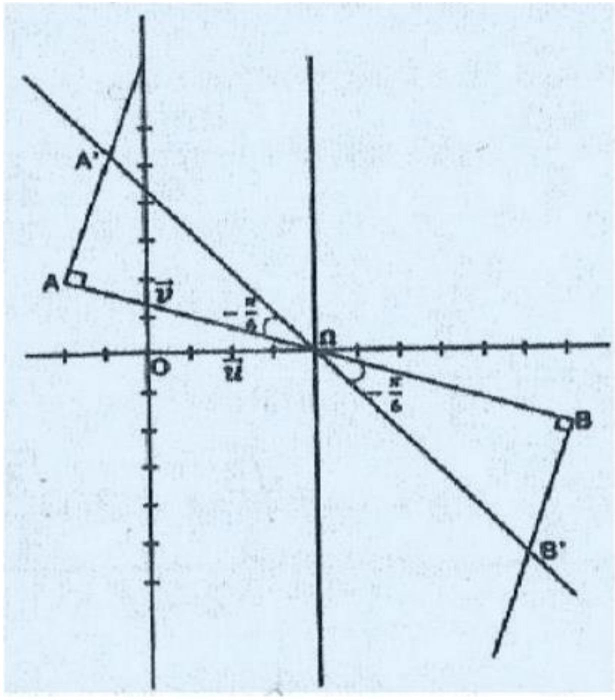
$\mathrm{mes}(\overline{\overline{M\Omega}, \overline{MM'}}) = \arg\left(\frac{z'-z}{2-z}\right) = \frac{\pi}{2}$ donc $\overline{M\Omega} \perp \overline{MM'}$

On en déduit que le triangle $\mathrm{M}\Omega\mathrm{M}'$ est rectangle en M.
c) Donnons un programme de construction de l'image M' par $\boldsymbol{S}$ d'un point M donné. On sait que: $S(M) = M' \Rightarrow \mathrm{mes}(\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'}) = -\frac{1}{6}\ \mathrm{mes}(\overline{\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM}}) = \frac{\pi}{2}$

Donc pour construire M', on peut suivre le programme de construction suivant :

- Tracer le segment $[M\Omega]$.
- Tracer la droite (Δ) passant par M et perpendiculaire à $(M\Omega)$.
- Tracer la demi-droite $[\Omega P)$ telle que : $\mathrm{mes}(\overline{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega P}}) = -\frac{\pi}{6}$
- $[\Omega P$) coupe (Δ) en M'.

8. a) Plaçons les points A et B et construisons leurs images respectives A' et B' par S.



b) Démontrons que : $Z_{A'} - Z_A = Z_B - Z_B$

On a : $S(A) = A'$ donc $\frac{z_{A'}-z_A}{2-z_A} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$ (d'après la question 2.a))

De même: $S(B) = B'$ donc $\frac{z_{B'}-z_B}{2-z_B} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$

D'où $\frac{z_{A'}-z_A}{2-z_A} = \frac{z_{B'}-z_B}{2-z_B}$

or $2 - z_A = -(2 - z_B)$ donc $z_{A'} - z_A = z_{B'} - z_B$

c) En déduisons la nature du quadrilatère $AA'BB'$.

On a: $Z_{A'} - Z_A = Z_{B'} - Z_B \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{B'B}$

Donc $AA'BB'$ est un parallélogramme.

PROBLEME

PARTIE A

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -1 + (2 - 2x)e^{-2x+3}$

1. Calculons les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

- $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} -1 + (2 - 2x)e^{-2x+3} = +\infty$

car $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty}(2 - 2x) = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} e^{-2x+3} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$

(on pose $X = -2x + 3$ quand $\to -\infty; x \to +\infty$)

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} -1 + (2-2x)e^{-2x+3} = -1$

on pose $x = -2x + 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$

quand $x \to +\infty\ ;\ x \to -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} -1 + (-1+x)e^{x} = \lim_{x\to-\infty} -1 - e^{x} + xe^{x} = -1$

car $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} xe^{x} = 0 \end{cases}$

2. a) Justifions que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (4x-6)e^{-2x+3}$

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = [-1 + (2-2x)e^{-2x+3}]'$

$g'(x) = (-1)' + (2-2x)'e^{-2x+3} + (2-2x)(e^{-2x+3})'$

$g'(x) = -2e^{-2x+3} - 2(2-2x)e^{-2x+3}$

$g'(x) = (-2-4+4x)e^{-2x+3}$

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (4x-6)e^{-2x+3}$

b) Etudions le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-2x+3} > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $4x-6$ $g'(x) < 0 \Leftrightarrow 4x - 6 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{6}{4} \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$

donc $\forall x \in]-\infty; \frac{3}{2}[,\ g'(x) < 0$

$\forall x \in]\frac{3}{2}; +\infty[,\ g'(x) > 0$

c) Justifions que : $g\left(\frac{3}{2}\right) = -2$

$g\left(\frac{3}{2}\right) = -1 + \left(2 - 2\times\frac{3}{2}\right)e^{-2\times\frac{3}{2}+3} = -1 + (2-3)e^{-3+3}$

$g\left(\frac{3}{2}\right) = -1 - e^{0} = -1 - 1 = -2$

d) Dressons le tableau de variations de g.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1

3. a) Démontrons que $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique notée α

- $\forall x \in]-\infty; \frac{3}{2}[, g'(x) < 0$

g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{3}{2}[$

et $g(]-\infty; \frac{3}{2}[) = [-2; +\infty[$ or $0 \in [-2; +\infty[$

donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans $]-\infty; \frac{3}{2}[$

- $\forall x \in]\frac{3}{2}; +\infty[, g'(x) > 0$

g est continue et strictement croissante sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$

et $g(]\frac{3}{2}; +\infty[) =]-2; -1[$ or $0 \notin]-2; -1[$

donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]\frac{3}{2}; +\infty$ l Finalement: l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique notée α.

b) Vérifions que : $0{,}86 < \alpha < 0{,}87$.

$g(0{,}86) = -1 + (2 - 2 \times 0{,}86)e^{-2\times 0{,}86+3} \simeq 0{,}007$

$g(0{,}87) = -1 + (2 - 2 \times 0{,}87)e^{-2\times 0{,}87+3} \simeq -0{,}083$

$g(0{,}86) \times g(0{,}87) < 0 \Rightarrow 0{,}86 < \alpha < 0{,}87$

c) Justifions que : $\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$. - $g(]-\infty; \alpha[) =]0; +\infty[$

donc $\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) \in]0; +\infty[$ donc $g(x) > 0$

- $g(]\alpha; +\infty[) = [-2; 0[$

donc $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) \in [-2; 0[$ donc $g(x) < 0$

D'où

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$$

PARTIE B

Soit la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = -x + \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}$

1. a) Calculons $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x + \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3} = -\infty$

on pose $x = -2x + 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$

quand $x \to -\infty; x \to +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x + \left(1 - \frac{1}{2}x\right)e^{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(-\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}+\left(1-\frac{x}{2}\right)\frac{e^x}{x}\right) = -\infty$$

car $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{2x}+\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{x}{2} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \end{cases}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -1+\left(1-\frac{1}{2x}\right)e^{-2x+3}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

car $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{2x} = 1 \\ \lim_{x\to-\infty} e^{-2x+3} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \text{ (on pose } = -2x+3\text{)} \end{cases}$

b) En déduisons que (C) admet une branche parabolique de direction (O)) en $-\infty$.

$$\lim_{\to\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Donc (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$.

2. a) Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x+\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-2x+3} = -\infty$

on pose $x = -2x+3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}-\frac{1}{2}x$

quand $x \to -\infty; x \to +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x+\left(1-\frac{1}{2}x\right)e^x$

$= \lim_{x\to-\infty} -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x+e^x-\frac{1}{2}xe^x = -\infty$

car $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x = -\infty \\ x \to -\infty \\ \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \end{cases}$

b) Démontrons que la droite (D) d'équation $y = -x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(-x)] = \lim_{x\to+\infty} \left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-2x+3} = -\infty$

on pose $x = -2x+3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}-\frac{1}{2}x$

quand $x \to +\infty; x \to -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(-x)] = \lim_{x\to-\infty} \left(1-\frac{1}{2}x\right)e^x = \lim_{x\to-\infty} e^x - \frac{1}{2}xe^x$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x)] = 0$ car $\begin{cases}\lim_{x\to-\infty} e^x = 0\\ \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0\end{cases}$. c) Etudions la position de (*C*) par rapport à (D).

$$f(x)-(-x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}$$

$e^{-2x+3} > 0$ donc le signe de $f(x)-(-x)$ est celui de $x-\frac{1}{2}$

$$f(x)-(-x) < 0 \Leftrightarrow x-\frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

donc $\begin{cases}\forall x \in]-\infty;\frac{1}{2}[, f(x)-(-x) < 0 & \Rightarrow f(x) < -x\\ \forall x \in]\frac{1}{2};+\infty[, f(x)-(-x) > 0 & \Rightarrow f(x) > -x\end{cases}$

D'où

{ (*C*) est au-dessous de (D) sur $]-\infty;\frac{1}{2}[$

(*C*) est au-dessus de (D) sur $]\frac{1}{2};+\infty[$

3.a) Calculons $f'(x)$ et démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$

$$f(x) = -x + \left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}$$

$$f'(x) = (-x)' + \left(x-\frac{1}{2}\right)' e^{-2x+3} + \left(x-\frac{1}{2}\right)(e^{-2x+3})'$$

$$f'(x) = -1 + 1\times e^{-2x+3} + \left(x-\frac{1}{2}\right)(-2xe^{-2x+3})$$

$$f'(x) = -1 + e^{-2x+3} - 2xe^{-2x+3} + e^{-2x+3}$$

$$f'(x) = -1 + 2e^{-2x+3} - 2xe^{-2x+3}$$

$$f'(x) = -1 + (2-2x)e^{-2x+3} = g(x)$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$

b) En déduisons les variations de f.

D'après la question 3.c)de la partie A, on a: $\begin{cases}\forall x \in]-\infty;\alpha[, & g(x) > 0\\ \forall x \in]\alpha;+\infty[, & g(x) < 0\end{cases}$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$

On en déduit que :

f est strictement croissante sur $]-\infty;\alpha[$

f est strictement décroissante sur $]\alpha;+\infty[$

c) Dressons le tableau de variations de f (On ne calculera pas (α)).

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

4. Construction de (D) et (C) sur le même graphique. (voir figure)

5. Soit t un nombre réel strictésment supérieur à $\frac{3}{2}$.

$A(t)$ est l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = \frac{3}{2}$ et $x = t$. On pose : $l_t = \int_{\frac{3}{2}}^{t}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, justifions que : $I_t = \frac{3}{4} - \frac{t}{2}e^{-2t+3}$ $t_t = \int_{\frac{3}{2}}^{t}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}dx$

On pose $u(x) = x - \frac{1}{2}$ et $v'(x) = e^{-2x+3}$

$u'(x) = 1$ et $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+3}$

$$I_t = \left[-\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}\right]_{\frac{3}{2}}^{t} - \int_{\frac{3}{2}}^{t} -\frac{1}{2}e^{-2x+3}dx$$

$$I_t = \left[-\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}\right]_{\frac{3}{2}}^{t} - \left[\frac{1}{4}e^{-2x+3}\right]_{\frac{3}{2}}^{t}$$

$$t_t = \left[\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)e^{-2x+3}\right)_{\frac{3}{2}}^{t} = \left[\left(-\frac{1}{2}x\right)e^{-2x+3}\right]_{\frac{3}{2}}^{t}$$

$$I_t = -\frac{t}{2}e^{-2t+3} + \frac{3}{4}e^{-2\times\frac{3}{2}+3} = -\frac{t}{2}e^{-2t+3} + \frac{3}{4}e^{0}$$

$$I_t = -\frac{t}{2}e^{-2t+3} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} - \frac{t}{2}e^{-2t+3}$$

b) Déduisons $A(t)$.

$$A(t) = UA \times \int_{\frac{3}{2}}^{t}[f(x) - (-x)]dx = UA \times \int_{\frac{3}{2}}^{t}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}dx$$

$$A(t) = UA \times I_t = 4\ \mathrm{cm}^2 \times I_t = 4 \times \left(\frac{3}{4} - \frac{t}{2}e^{-2t+3}\right)\mathrm{cm}^2$$

$$A(t) = (3 - 2te^{-2t+3})\mathrm{cm}^2$$

c) Calculons $\lim_{t\to+\infty} A(t)$.

$\lim_{t\to+\infty} A(t) = \lim_{t\to+\infty}(3 - 2te^{-2t+3})\text{cm}^2 = 3\ \text{cm}^2$

Car $\lim_{t\to+\infty} - 2te^{-2t+3} = 0$

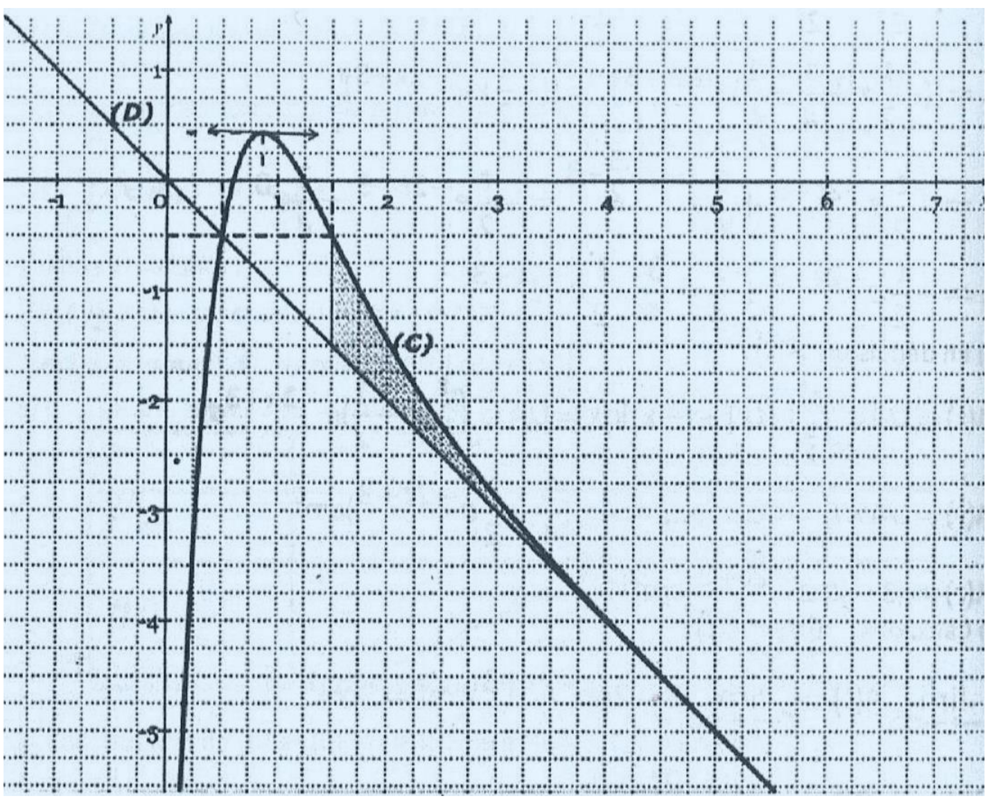
On pose $T = -2t + 3 \Rightarrow t = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}T$

quand $t \to +\infty; T \to -\infty$

$$\lim_{t\to+\infty} - 2te^{-2t+3} = \lim_{T\to-\infty} - 2\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}T\right)e^T = \lim_{T\to-\infty}(-3 + T)e^T$$
$$\lim_{t\to+\infty} - 2te^{-2t+3} = \lim_{T\to-\infty}(-3e^T + Te^T) = 0$$

En effet, $\lim_{T\to-\infty} - 3e^T = 0$ et $\lim_{T\to-\infty} Te^T = 0$

figure



CORRECTION SESSION NORMALE 2015 SERIE D

EXERCICE 1
PARTIE I
Soit la fonction p définie sur $\mathbb{C}$ par: $\forall z \in \mathbb{C}, p(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i$

1. a) Calculons $p(i)$.

$p(i) = i^3 - (3+2i)i^2 + (1+5i)i + 2 - 2i = -i - (3+2i) \times (-1) + i - 5 + 2 - 2i$

$p(i) = -i + 3 + 2i + i - 5 + 2 - 2i = -i + 3 + 2i + i - 5 + 2 - 2i$

$p(i) = 3 + 2 - 5 - i + i - 2i + 2i = 0$

b) Déterminons deux nombres a et b tels que : $p(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$

$p(z) = (z-i)(z^2 + az + b) = z^3 + az^2 + bz - iz^2 - iaz - ib$

$p(z) = z^3 + az^2 - iz^2 + bz - iaz - ib$

$p(z) = z^3 + (a-i)z^2 + (b - ia)z - ib$

Or $p(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i$

Par identification:

$\begin{cases} a - i = -(3+2i) \\ -ib = 2 - 2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 - 2i + i = -3 - i \\ b = (2-2i) \times i = 2i - 2i \times i = 2i + 2 = 2 + 2i \end{cases}$

Donc $a = -3 - i$ et $b = 2 + 2i$

2. Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - (3+i)z + 2 + 2i = 0$

$z^2 - (3+i)z + 2 + 2i = 0$

$\Delta = [-(3+i)]^2 - 4 \times 1 \times (2+2i) = (3+i)^2 - 4 \times (2+2i)$

$\Delta = 3^2 + 2 \times 3 \times i + i^2 - 8 - 8i = 9 + 6i - 1 - 8 - 8i$

$\Delta = -2i$

$|\Delta| = |-2i| = 2$

Soit $d = x + iy$ une racine carrée de $\Delta = -2i$, on a:

$\begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(\Delta) \\ 2xy = \mathrm{Im}(\Delta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ x^2 - y^2 = 0 & (2) \\ 2xy = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 & (1)+(2) \\ 2y^2 = 2 & (1)-(2) \\ xy < 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \\ xy < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ y = 1 \text{ ou } y = -1 \\ x \text{ et } y \text{ sont de signe contraire} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 - i \\ d' = -1 + i \end{cases}$$

Les racines carrées de $\Delta = -2i$ sont $d = 1 - i$ et $d' = -1 + i$ Les solutions de l'équation sont:

$$z_1 = \frac{(3+i)+(1-i)}{2} = \frac{3+i+1-i}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$z_2 = \frac{(3+i)+(-1+i)}{2} = \frac{3+i-1+i}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$$

$s_{\mathbb{C}} = \{2; 1+i\}$

3. En déduisons les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $(E): p(z) = 0$.

$$\begin{aligned} p(z) = 0 &\Leftrightarrow (z-i)(z^2 - (3+i)z + 2 + 2i) = 0 \\ &\Leftrightarrow z - i = 0 \text{ ou } z^2 - (3+i)z + 2 + 2i = 0 \\ &\Leftrightarrow z = i \text{ ou } z = 2 \text{ ou } z = 1+i \end{aligned}$$

$\Sigma_C = \{2; i; 1+i\}$

PARTIE II

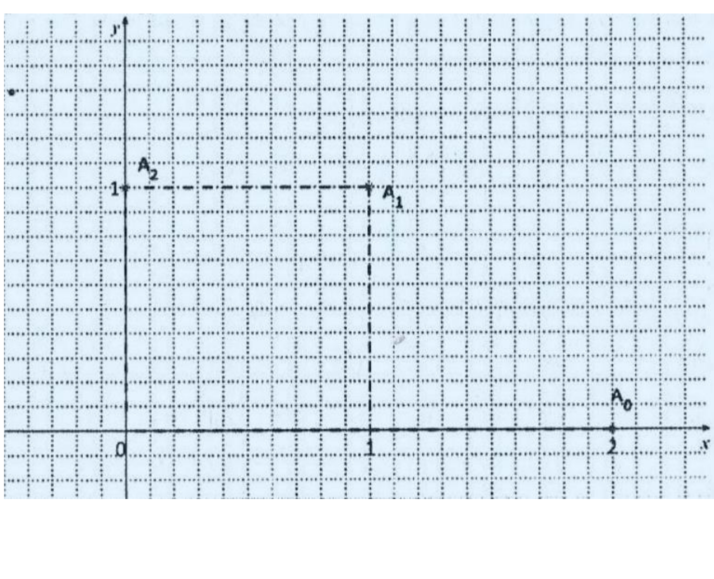
1. a) Calculons z_1 et z_2.

$$k_1 = \frac{1+i}{2} z_0 = \frac{1+i}{2} \times 2 = 1+i$$

$$z_2 = \frac{1+i}{2} z_1 = \frac{1+i}{2} \times (1+i) = \frac{(1+i)(1+i)}{2} = \frac{1+2i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

b) Plaçons les points A_0, A_1 et A_2 dans le plan complexe.

Les points A_0, A_1 et A_2 ont pour coordonnées : $A_0(2; 0)$; $A_1(1; 1)$; $A_2(0; 1)$



2. On considère la suite U définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a) Justifions que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$

$U_n = |z_{n+1} - z_n| = \left|\frac{1+i}{2}z_n - z_n\right| = \left|\left(\frac{1+i}{2} - 1\right)z_n\right| = \left|\frac{1+i}{2} - 1\right||z_n|$
$= \left|\frac{1+i-2}{2}\right||z_n| = \left|\frac{-1+i}{2}\right||z_n| = \left|\frac{1}{2}(-1+i)\right||z_n| = \left|\frac{1}{2}\right|-1+i||z_n|$
$= \frac{1}{2}|-1+i||z_n| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+1^2}|z_n| = \frac{1}{2}\sqrt{1+1}|z_n| = \frac{1}{2}\sqrt{2}|z_n|$
$U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$

b) Montrons que U est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de 1^{er} terme $\sqrt{2}$

$$U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n| \Rightarrow U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_{n+1}|$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}|z_{n+1}|}{\frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|} = \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \frac{\left|\frac{1+i}{2}z_n\right|}{|z_n|} = \frac{\frac{1+i}{2}||z_n|}{|z_n|} = \left|\frac{1+i}{2}\right|\frac{|z_n|}{|z_n|}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$

et de premier terme $U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_0| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2}$

c) Exprimons U_n en fonction de n.

U est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et de 1^{er} terme $U_0 = \sqrt{2}$ donc ona :

$U_n = U_0 \times q^n = \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{2^n} = \frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{\left(\sqrt{2}^2\right)^n} = \frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{(\sqrt{2})^{2n}} = (\sqrt{2})^{n+1-2n}$ $U_n = (\sqrt{2})^{1-n}$

3. On désigne par $A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$ la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n (n \in \mathbb{N}^*)$
On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ell n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$

a) Calculons $\ln$

$\ell = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$

$\ell n = |z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + \cdots + |z_n - z_{n-1}|$

$\ell n = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1}$

$$\ell n = U_0 \times \frac{1-q^{\text{nombre determes}}}{1-q} = \sqrt{2} \times \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

b) En déduisons $\lim_{n\to+\infty} \ell n$

$$\ell n = \sqrt{2} \times \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \ell_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2} \times \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$\lim_{n\to+\infty} \ln = \sqrt{2} \times \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ car $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$ (en effet $\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$)

$$\lim_{n\to+\infty} \ln = \frac{\sqrt{2}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}\frac{2}{2-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{2}{\sqrt{2}-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{2-1} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{1} = 2(\sqrt{2}+1)$$

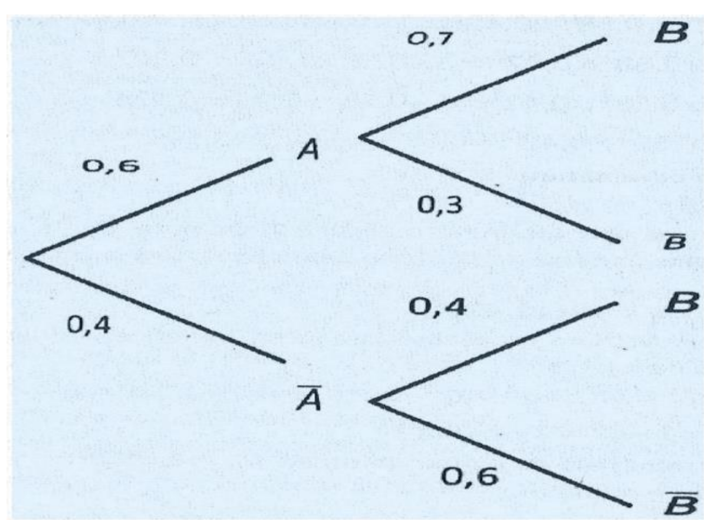
EXERCICE 2

Pour un jour donné, la probabilité qu'il y ait une affluence de clients est 0,6;

- Lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,7 ;
- Lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,4 .

On désigne par A l'évènement «il y a affluence de clients» et B l'évènement "Mariam réalise un bénéfice ".

Arbre de probabilités :



1. On choisit un jour au hasard.

a) Calculons la probabilité de l'évènement **E** : « il y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice ".

$p(E) = p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}42$

b) Démontrons que la probabilité $p(B)$ de l'évènement B est 0,58 .

$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A}) = 0{,}6 \times 0{,}7 + 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}42 + 0{,}16 = 0{,}58$

c) Mariam a réalisé un bénéfice. Calculons la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour-là. On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat. $p = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0{,}42}{0{,}58} = 0{,}72$

2. Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs donnés.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où elle réalise un bénéfice sur les 3 jours successifs.

a) Déterminons les valeurs prises par X. $X = \{0; 1; 2; 3\}$

b) Déterminons la loi de probabilité de X.

$X = xi$	0	1	2	3	Total
$P(X = xi)$	0,074	0,307	0,424	0,195	1

$p(X = k) = C_n^k p^k \times q^{n-k}$ avec $p = 0{,}58; q = 1 - p = 0{,}42$ et $n = 3$

$p(X = 0) = c_3^0 \times p^0 \times q^3 = c_3^0 \times 0,58^0 \times 0,42^3 = 1 \times 0,58^0 \times 0,42^3 = 0,42^3 = 0{,}074$

$p(X = 1) = C_3^1 p^1 \times q^2 = C_3^1 \times 0,58^1 \times 0,42^2 = 3 \times 0{,}58 \times 0,42^2 = 0{,}307$

$p(X = 2) = c_3^2 p^2 \times q^1 = c_3^2 \times 0,58^2 \times 0,42^1 = 3 \times 0,58^2 \times 0{,}42 = 0{,}424$

$p(X = 3) = C_3^3 p^3 \times q^0 = 1 \times 0,58^3 \times 0,42^0 = 0,58^3 = 0,58^3 = 0{,}195$

c) Calculons l'espérance mathématique $\mathrm{E(X)}$ de X.

$E(X) = np = 3 \times 0{,}58 = 1{,}74$

3. Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 . On note p_n la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours.

a) Justifions que $\forall n \geq 2 : p_n = 1 - (0{,}42)^n$.

Soit q_n la probabilité que Mariam ne réalise jamais de bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours.

$q_n = p(X = 0) = c_n^n p^0 \times q^n = 1 \times 1 \times q^n = q^n$ avec $q = 1 - p = 0{,}42$

$q_n = (0{,}42)^n$ donc $p_n = 1 - q^n = 1 - (0{,}42)^n$

b) Déterminons la valeur minimale de n pour qu'on ait $p_n \geq 0{,}9999$.

Résolvons l'équation $p_n \geq 0{,}9999$

$$\begin{aligned} p_n \geq 0{,}9999 &\Leftrightarrow 1 - (0{,}42)^n \geq 0{,}9999 \Leftrightarrow -(0{,}42)^n \geq 0{,}9999 - 1 \\ &\Leftrightarrow -(0{,}42)^n \geq -0{,}0001 \Leftrightarrow (0{,}42)^n \leq 0{,}0001 \\ &\Leftrightarrow \ln(0{,}42)^n \leq \ln(0{,}0001) \Leftrightarrow n\ln(0{,}42) \leq \ln(10^{-4}) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{-4\ln(10)}{\ln(0{,}42)} \text{ car } \ln(0{,}42) < 0 \ \left(\text{en effet : } 0{,}42 < 1\right) \end{aligned}$$

$p_n \geq 0{,}9999 \Leftrightarrow n \geq 10{,}6 \Leftrightarrow n \geq 11$

La valeur minimale de n est 11.

PROBLEME

PARTIE A

Soit r la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $r(x) = xe^{-x}$

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = r$

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par: $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$

1. Démontrons que **g** est une solution de l'équation (**E**).

$$g'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2e^{-x}\right)' = \frac{1}{2}(2xe^{-x} - x^2e^{-x}) = xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x} = \left(1 - \frac{1}{2}x\right)xe^{-x}$$

$$g'(x) + g(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x} + xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x} = xe^{-x} = r(x)$$

Donc g est une solution de l'équation (E)

2. Soit l'équation différentielle (F) : $y' + y = 0$.

a) Démontrons qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est une solution de (F).

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si } \varphi \text{ est solution de } (E) \text{ alors} & \varphi' + \varphi = r \\ \text{Or} g \text{ est solution de } (E) \text{ alors} & g' + g = r \end{array}\right\} \Rightarrow (\varphi' + \varphi) - (g' + g) = r - r = 0$$ On en déduit que: $(\varphi' - g') + (\varphi - g) = 0$ donc $\varphi - g$ est solution de (F) Réciproquement: Si $\varphi - g$ est solution de (F) alors $(\varphi' - g') + (\varphi - g) = 0$ On en déduit que: $(\varphi' + \varphi) - (g' + g) = 0 \Rightarrow \varphi' + \varphi = g' + g$ Orgest solution de (E)alors $g' + g = r$ donc $\varphi' + \varphi = r$ Donc φ est solution de (E)

b) Résolvons l'équation différentielle (F).

Les solutions de l'équation différentielle (F) sont de la forme : ke^{-x} avec $k \in \mathbb{R}$ c) En déduisons la solution φ de (E) qui vérifie $\varphi(0) = -\frac{3}{2}$.

$\varphi - g$ est une solution de (F) donc $\varphi - g$ est de la forme ke^{-x} avec $k \in \mathbb{R}$

$\varphi(x) - g(x) = ke^{-x} \Rightarrow \varphi(x) = g(x) + ke^{-x} = \frac{1}{2}x^2e^{-x} + ke^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$

$$\varphi(0) = \frac{1}{2}0^2e^{-0} + ke^{-0} = 0 + k \times 1 = k$$

$\varphi(0) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}$ donc $\varphi(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x} - \frac{3}{2}e^{-x} = \frac{x^2-3}{2}e^{-x}$

PARTIE B

1. a) Calculons $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{2}e^{-x} = +\infty$$

$\text{car}_{x\to-\infty} \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{2} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

b) Démontrons que la courbe (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (O).

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2-3}{2}e^{-x}}{x} = \frac{x^2-3}{2x}e^{-x} = \frac{1}{2} \times \frac{x^2-3}{x} \times e^{-x} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{x}\right)e^{-x}$$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ Donc (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (O)).

2. Calculons la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

3.a) Soit f' ' la fonction dérivée de f.

Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-3}{2}e^{-x}\right)' = \left(\frac{x^2-3}{2}\right)' e^{-x} + \frac{x^2-3}{2}(e^{-x})'$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}\right)' e^{-x} + \frac{x^2-3}{2}(-e^{-x}) = \left(\frac{1}{2}2x\right)e^{-x} - \frac{x^2-3}{2}(e^{-x})$$

$$f'(x) = xe^{-x} - \frac{x^2-3}{2}(e^{-x}) = \left(x - \frac{x^2-3}{2}\right)(e^{-x}) = \left(\frac{2x - x^2 + 3}{2}\right)(e^{-x})$$

$$f'(x) = \frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x}$$

b) Etudions les variations de f.

$$f'(x) = \frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}(-x^2+2x+3)e^{-x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2}e^{-x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $P(x) = -x^2 + 2x + 3$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

$$x_1 = \frac{-2+4}{2(-1)} = \frac{2}{-2} = -1 ; x_2 = \frac{-2-4}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

- Signe de $f'(x)$

$f'(x) = 0 \ \forall x \in \{-1; 3\}$

$f'(x) > 0 \ \forall x \in]-1; 3[$

$f'(x) < 0 \ \forall x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$

- Variations de $f(x)$

f est strictement croissante sur $]-1; 3[$

f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1$ [et sur $]3; +\infty[$

c) Dressons le tableau de variations de f.

x	0		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$3e^{-3}$	$\searrow$	0

4. Démontrons qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 est : $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

$f'(0) = \frac{3}{2}; f(0) = -\frac{3}{2}$

(T): $y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

5. Etudions les positions relatives de (C) par rapport à l'axe des abscisses.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3}{2}e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3}{2} = 0 \text{ ou } e^{-x} = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{3}^2 = 0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$$
$$\Leftrightarrow x - \sqrt{3} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3} = 0$$

- (C) coupe la droite (OI) aux points d'abscisses $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$
- (C) est au dessus de la droite (OI) sur les intervalles $]-\infty; -\sqrt{3}[$ et $]\sqrt{3}; +\infty[$
- (C) est en dessous de la droite (OI) sur l'intervalle $]-\sqrt{3}; \sqrt{3}$ [

6. Représentation graphique de (T) et (C).

(Voir la courbe)

PARTIE C

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculons: $\int_0^1 xe^{-x}dx$

On pose : $u = x \Rightarrow u' = 1$

$$v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$\int_0^1 xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1$

$\int_0^1 xe^{-x}dx = [-1 \times e^{-1} - (0 \times e^0)] - [e^{-1} - e^{-0}] = -e^{-1} - (e^{-1} - 1)$

$\int_0^1 xe^{-x}dx = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}$

2.a) Vérifions que f est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.

$f(x) = \frac{x^2-3}{2}e^{-x}; f'(x) = \frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x}$

$f(x) + f'(x) = \frac{x^2-3}{2}e^{-x} + \frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x} = \frac{x^2-3+3+2x-x^2}{2}e^{-x}$

$f(x) + f'(x) = \frac{2x}{2}e^{-x} = xe^{-x} = r(x)$

Dọnc f est une solution de l'équation différentielle (E).

b) En déduisons que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f'(x) + xe^{-x}$

D'après la question 2.a), $f(x) + f'(x) = xe^{-x} \Rightarrow f(x) = -f'(x) + xe^{-x}$

c) Er Utilisant la question précédente, calculons en cm2 l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

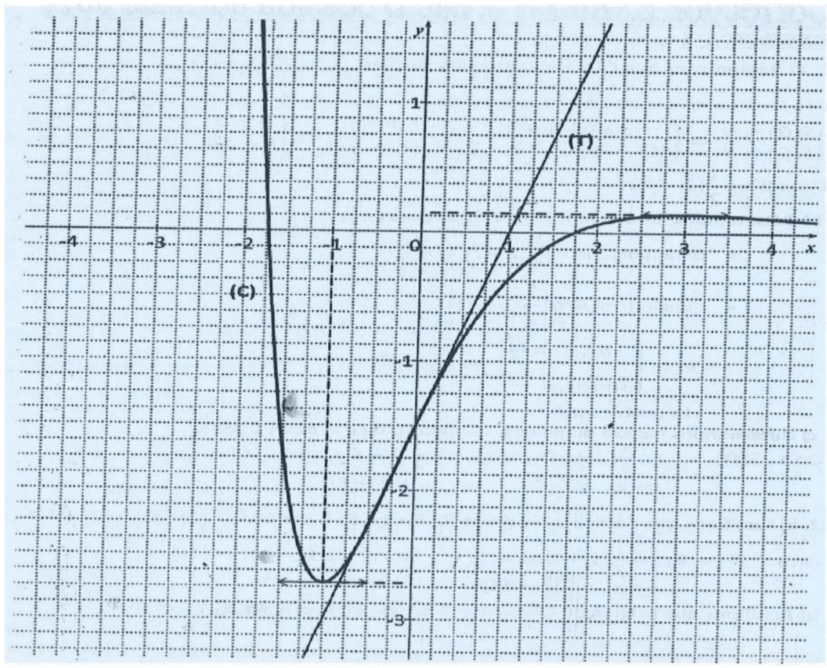
$f(x) < 0$ sur l'intervalle $]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$ et en particulier sur l'intervalle $[0; 1]$

$A = \int_0^1 -f(x)dx \times UA = \int_0^1 [f'(x) - xe^{-x}]dx \times UA$

$A = \left(\int_0^1 f'(x)dx - \int_0^1 xe^{-x}dx\right) \times UA = \left([f(x)]_0^1 - \left(1 - \frac{2}{e}\right)\right) \times UA$

$A = \left(-e^{-1} + \frac{3}{2} - 1 + \frac{2}{e}\right) \times UA = \left(-e_1^{-1} + \frac{3}{2} - 1 + 2e^{-1}\right) \times UA = \left(\frac{1}{2} + e^{-1}\right) \times UA$ $A = \left(\frac{1}{2} + e^{-1}\right) \times 8\ \mathrm{cm}^2 = (4 + 8e^{-1})\mathrm{cm}^2$

Figure (représentation graphique de (T) et (C))



CORRECTION SESSION NORMALE 2014 SERIE D

EXERCICE 1

1. a) Démontrons que l'écriture complexe de S est : $z' = \frac{1}{2}(1-i)z$.

L'écriture complexe de S est sous la forme $z' = az + b, a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} S(O) = 0 \\ S(C) = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 0 + b = 0 \\ a(5+i) + b = 3 - 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \dfrac{3-2i}{5+i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \dfrac{1-i}{2} \end{cases}$$

Donc $z' = \frac{1}{2}(1-i)z$.

b) Déterminons les éléments caractéristiques de S.

- Le rapport: $k = \left|\frac{1}{2}(1-i)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- L'angle $\theta = \mathrm{Arg}\left(\frac{1}{2}(1-i)\right)$

On a: $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$

- Le centre est 0

c) Déterminons l'affixe du point D qui pour image le point C par S.

On a : $S(D) = C \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-i)z_D = z_C \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-i)z_D = 5 + i$

$$\Leftrightarrow z_D = \frac{10+2i}{1-i} \Leftrightarrow z_D = 4 + 6i$$

2. a) Justifions que l'affixe z_1 du point B_1, image de B par S est $\frac{1}{2}(1-5i)$

On a: $S(B) = B_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-i)z_B = z_1 \Leftrightarrow z_1 = \frac{1}{2}(1-i)(3-2i)$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{1}{2}(1-5i)$$

b) Justifions que le triangle OBB_1 est rectangle et isocèle en B_1.

On a: $\frac{z_B - z_{B_1}}{z_O - z_{B_1}} = \frac{z_B - z_1}{z_O - z_1} = \frac{5+i}{-1+5i} = -i$ donc le triangle OBB_1 est rectangle et isocèle en B_1

3. a) Démontrons par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-i)^n z_0$.

Soit la proposition $P(n): \forall n \in \mathbb{N}, z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-i)^n z_0$

- Vérifions que $P(0)$ est vraie

Pour $n = 0$, on a $z_0 = z_B = \left(\frac{1}{2}\right)^0 (1-i)^0 z_0$ donc $P(0)$ est vraie .

- Supposons que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrons que $P(n+1)$ est vraie.

$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)(1-i)z_n$ or $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-i)^n z_0$

Donc $z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)(1-i) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-i)^n z_0$

$z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (1-i)^{n+1} z_0$ et $P(n+1)$ est vraie.

· Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-i)^n z_0$

b) Calculons la distance OB_n en fonction de n.
On a :

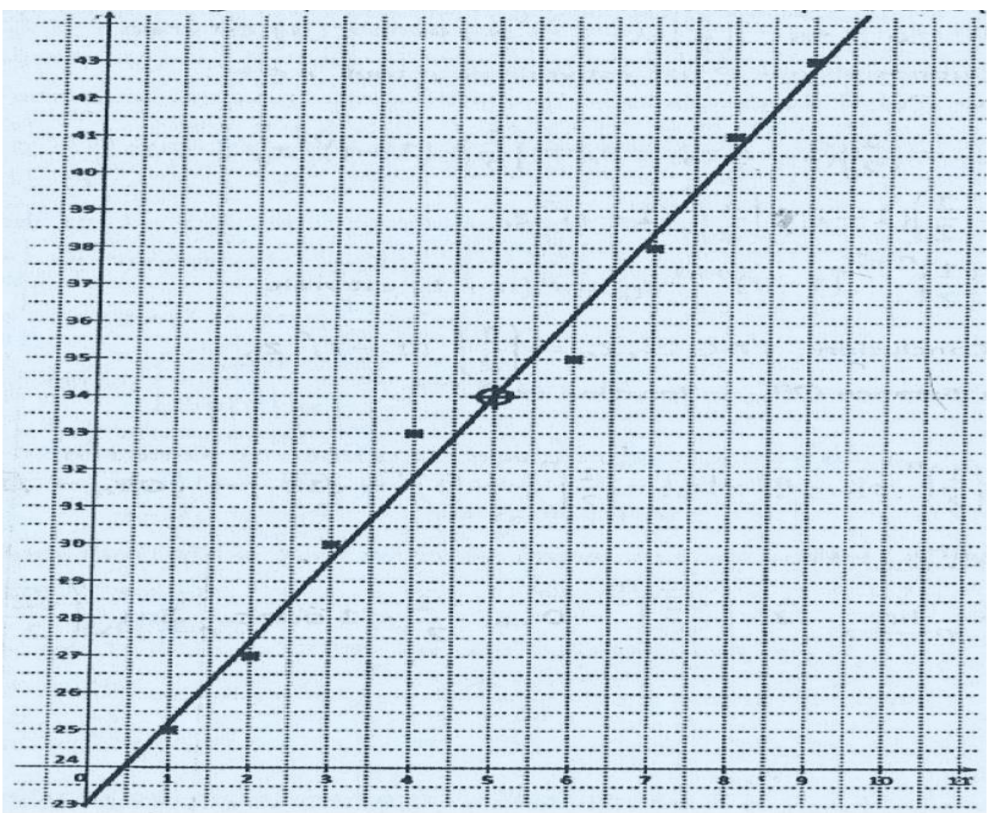
$OB_n = |z_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times |1-i|^n \times |z_0| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (\sqrt{2})^n \times \sqrt{13} \Rightarrow OB_n = \sqrt{13} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

c) Calculons $\lim_{n\to+\infty} OB_n$.

$\lim_{n\to+\infty} OB_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0 \text{car} \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$

EXERCICE 2

1. Représentons le nuage de points associé à la série statistique double (X, Y).



2. Déterminons les coordonnées du point moyen G de la série (X, Y).

Calculons $\bar{X}$.

$\bar{X} = \frac{1+2+3+4+5+7+7+8+9}{9} = \frac{45}{9} \Rightarrow \bar{X} = 5$

Calculons $\bar{Y}$

$$\bar{Y} = \frac{25+27+30+33+34+35+38+41+43}{9} = \frac{306}{9} \Rightarrow \bar{Y} = 34$$

Donc le point moyen est : $G(5;34)$.

3. a) justifions que la variance $V(X) = \frac{20}{3}$

$$V(x) = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2}{9} - 5^2$$

$$V(x) = \frac{285}{9} - 25 = \frac{285-225}{9} = \frac{60}{9} \Rightarrow V(x) = \frac{20}{3}$$

b) Justifions que la covariance de X et V est $\frac{44}{3}$.

$$\operatorname{cov}(x,y) = \frac{1\times25+2\times27+3\times30+4\times33+5\times34+6\times35+7\times38+8\times41+9\times43}{9} - 5\times34$$

$$\operatorname{cov}(x,y) = \frac{1662}{9} - 170 = \frac{1662-1530}{9} = \frac{132}{9} \Rightarrow \operatorname{cov}(x,y) = \frac{44}{3}$$

4. a) Déterminons la valeur du coefficient de corrélation linéaire.

$$r = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{\frac{44}{3}}{\sqrt{\frac{20}{3}\times\frac{98}{3}}} = \frac{44}{\sqrt{1960}} \Rightarrow r = 0{,}99$$

b) $|r| > 0{,}87$ donc on peut envisager un ajustement linéaire.

5. a) Déterminons une équation de (D).

On a $(D): y = ax + b$

$$a = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{v(X)} = \frac{44}{3}\times\frac{3}{20} \Rightarrow a = \frac{11}{5}$$

$$b = \bar{Y} - a\bar{X} = 34 - \frac{11}{5}\times 5 \Rightarrow b = 23$$

Donc $(D): y = \frac{11}{5}x + 23$

b) Traçons (D). (Voir figure)

x	5	10
y	34	45

6. Donnons une estimation du nombre de bacheliers qui accéderont aux études supérieures en 2020.

- 2020 correspond à $x = 18$
- Donc $y = \frac{11}{5}\times 18 + 23 \Rightarrow y = 62{,}6$

Le nombre de bacheliers qui accéderont aux études supérieures en 2020 est estimé à 62600 .

PROBLEME

PARTIE A

1. a) Déterminons la valeur de b.

$g(0) = 0 + (a \times 0 + b)e^0 = b$

$g(0) = 1 \Leftrightarrow b = 1$

b) Déterminons la valeur de a.

(T) est parallèle à (D) donc $g'(0) = 1$

Pour tout $x \in \mathbb{R}, g'(x) = 1 + (-ax + a - b)e^{-x}$

$g'(0) = 1 \Leftrightarrow 1 + (-a \times 0 + a - 1)e^0 = 1$

$\Leftrightarrow a = 1$

2. a) Calculons $h'(x)$, pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

pour tout X élément de $\mathbb{R}, h'(x) = e^X - 1$

b) Dressons le tableau de variation de h.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

$\forall x \in]-\infty; 0[, h'(x) < 0$ Donc h est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$

$\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) > 0$ Donc h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation de h

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$+$	
$h(x)$		↘	1	↗	

c) Déduisons que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) > 0$.

1 est le minimum de h sur $\mathbb{R}$ et $1 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) > 0$

PARTIE B

1. a) Calculons la limite de f en $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + (x+1)e^{-x} = -\infty$

car $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty, \lim_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

b) Justifions que : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+(x+1)e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 + \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x} = +\infty$

car $\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

c) Interprétation graphique

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$.

2. a) Calculons la limite de f en $+\infty$

$$f(x) = x + (x+1)e^{-x} = x + \frac{x+1}{e^x} = x + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

b) Démontrons que (D) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

$f(x) - x = x + (x+1)e^{-x} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{e^x} = \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Donc la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Etudions les positions relatives de (C) et (D).

Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) - x = (x+1)e^{-x}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ donc le signe de $[f(x) - x]$ dépend de $x + 1$

Pour tout $x \in]-\infty; -1[, f(x) - x < 0 \Rightarrow f(x) < x$

Pour tout $x \in]-\infty; -1[, f(x) - x > 0 \Rightarrow f(x) > x$

- (C) est au-dessous de (D) sur $]-\infty; -1[$
- (C) est au-dessus de (D) sur $]-1; +\infty[$

3. a) Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x}h(x)$
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 + e^{-x} - (x+1)e^{-x} = 1 + e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x}$

$= 1 - xe^{-x} = e^{-x}(e^x - x)$ or $h(x) = e^x - x$

donc $f'(x) = e^{-x}h(x)$

b) Déterminons le sens de variation de f

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x}h(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ et $h(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Construisons (C) et (D) et (T).

Voir figure

5. a) Démontrons que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable sur $\mathbb{R}$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

b) Calculons $(f^{-1})'(1)$

- On a $f(0) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 0$
- $f'(f^{-1}(1)) = f'(0) = 1$
- Donc $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = 1$

c) Construction (Γ) voir figure

(Γ) et (C) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

PARTIE C

1. A l'aide d'une intégration par parties, démontrons que :

$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = (-2-n)e^{-n} + e.$

$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_{-1}^{n} (t+1)e^{-t}dt$

Posons: $u(t) = t + 1$ et $v'(t) = e^{-t}$

$u'(t) = 1 \; v(t) = -e^{-t}$

donc $I_n = [-(t+1)e^{-t}]_{-1}^{n} - \int_{-1}^{n} - e^{-t}dt$

$I_n = [-(t+1)e^{-t} - e^{-t}]_{-1}^{n}$

$I_n = [(-t-2)e^{-t}]_{-1}^{n}$

$I_n = (-2-n)e^{-n} - (1-2)e$

$I_n = (-2-n)e^{-n} + e$

2. Calculons l'aire A_n en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = n$

On a: $A_n = \int_{-1}^{n} (f(x) - x)dx \cdot cm^2 = \int_{-1}^{n} (x+1)e^{-x}dx \cdot \mathrm{cm}^2$

$A_n = I_n \cdot \mathrm{cm}^2$

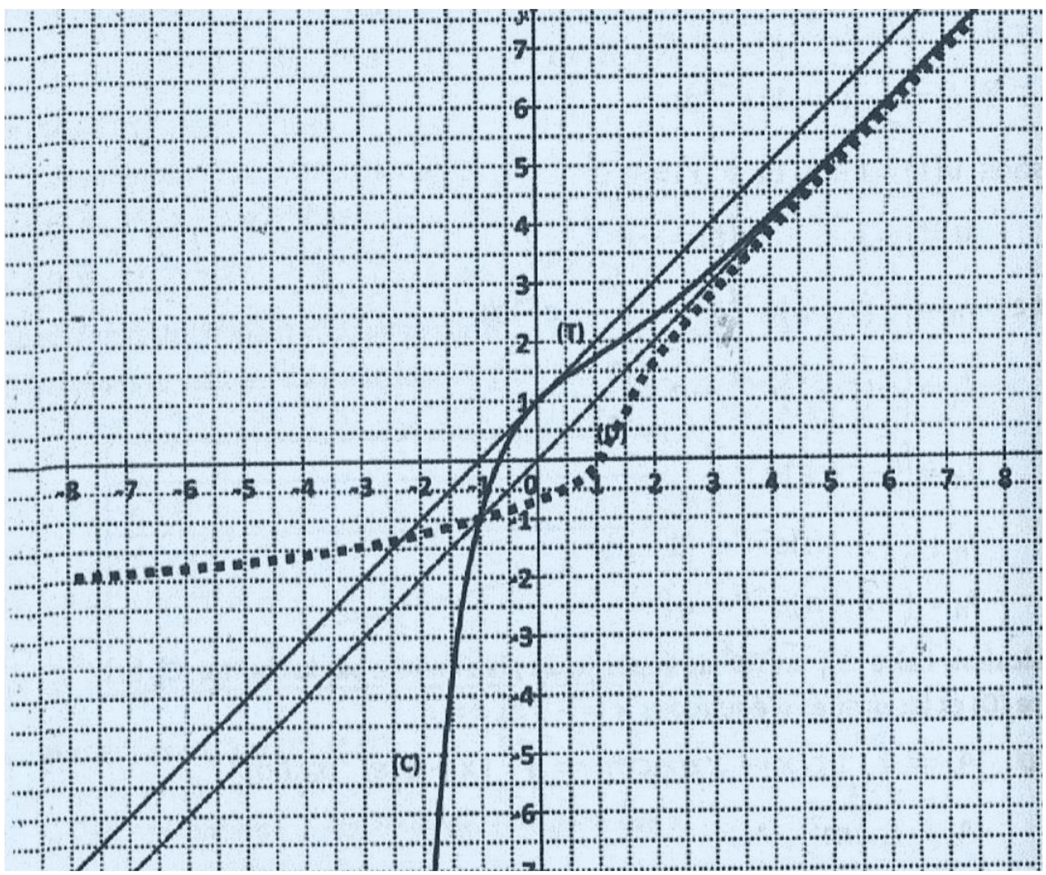
$A_n = [(-2-n)e^{-n} + e] \cdot \mathrm{cm}^2$

3. Calculons $\lim_{n\to+\infty} A_n$.

$$\mathrm{A}_n = (-2-n)e^{-n} + e = \frac{-2-n}{e^n} + e = \frac{-2}{e^n} - \frac{n}{e^n} + e$$

$\lim_{n\to+\infty} A_n = e$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{-2}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n}{e^n} = 0$

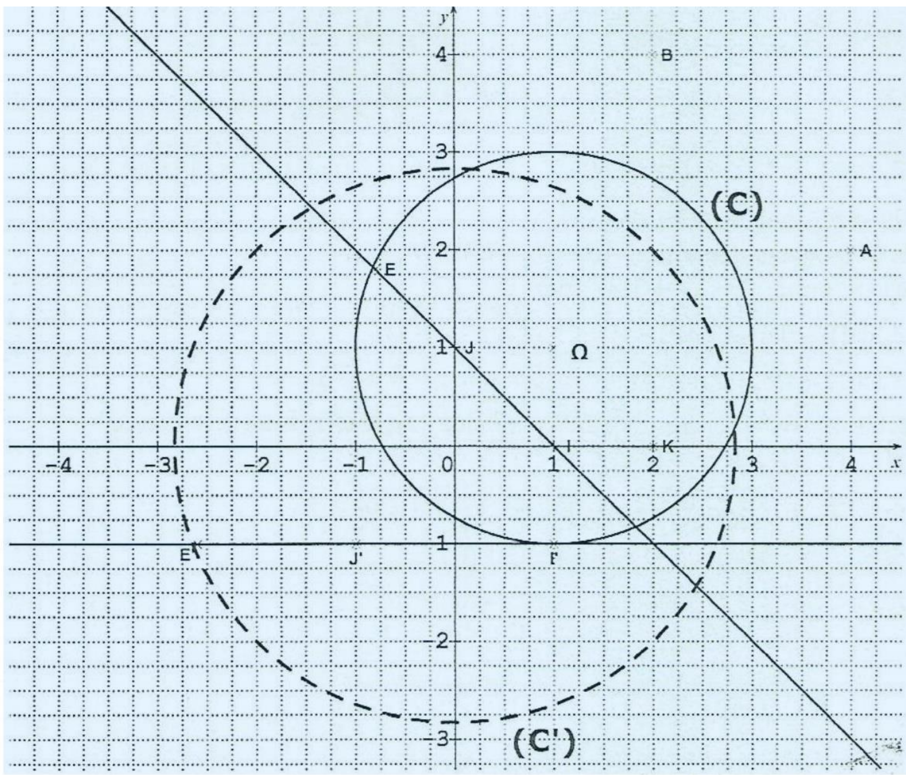
Figure (Construction de (C) et (D) et (T) et construction de (Γ)).



CORRECTION SESSION NORMALE 2013 SERIE D

EXERCICE 1

1. a. Figure



b. Déterminons la forme algébrique du nombre complexe $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$.

$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} = \frac{(2+4i)-2}{4+2i-2} = \frac{4i}{2+2i} = \frac{2\times 2i}{2(1+i)} = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i+2}{1^2+1+1y^2}$

$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} = \frac{2+2i}{2} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i$

2. On note S la similitude directe de centre K qui transforme A en B.

S	
K	K
A	B

a. Démontrons que l'écriture complexe de S est $z' = (1+i)z - 2i$:

L'écriture complexe de S est de la forme : $z' = az + b$:

$S(K) = K \Leftrightarrow z_K = az_K + b \Leftrightarrow z_1 = az_1 + b$

$S(A) = B \Leftrightarrow z_B = az_A + b \Leftrightarrow z_3 = az_2 + b$

(2) - (1) $\Leftrightarrow z_3 - z_1 = a(z_2 - z_1) \Leftrightarrow a = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = 1 + i$

$z_1 = az_1 + b \Leftrightarrow b = z_1 - az_1 = z_1(1 - a) = 2(1 - (1 + i)) = 2(-i) = -2i$

On déduit que : $z' = (1 + i)z - 2i$

b. Déterminons les affixes respectives des points I' et J'.

$I(1,0)$ donc $z_I = 1; J(0,1)$ donc $z_J = i$

$z_{I'} = (1 + i)z_I - 2i = (1 + i) \times 1 - 2i = 1 + i - 2i = 1 - i$

$z_{J'} = (1 + i)z_J - 2i = (1 + i) \times i - 2i = i - 1 - 2i = -1 - i$

3. Déterminons le rapport et une mesure de l'angle orienté de la similitude S.

$z' = (1 + i)z - 2i$

Soit k le rapport de $S: k = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Soit θ l'angle de $S: \theta = \arg(1 + i)$

$$\cos\theta = \frac{1}{|1 + i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{|1 + i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

4. Soit (C) le cercle de centre $\Omega(1; 1)$ et de rayon 2 .

a. Tracé de (C) (voir figure).

b. Déterminons le centre et le rayon de (C'), image de (C) par S.

NB: l'image d'un cercle par une similitude est un cercle dont le centre est l'image du centre du premier cercle par la similitude et son rayon est le rayon du premier cercle multiplié par le rapport de la similitude.

Le rayon de (C') est: $R' = k \times R = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$

Le centre de (C') est Ω' image de $\Omega(1; 1)$ par la similitude S.

$z_{\Omega'} = (1 + i)z_\Omega - 2i = (1 + i)(1 + i) - 2i = 1 + i + i - 1 - 2i = 2i - 2i = 0$

On en déduit que: $\Omega'(0; 0)$ soit $\Omega' = 0$

c. Construction de (C') (voir figure).

5. a. Déterminons l'image par S de la droite (IJ).

L'image de la droite (IJ) est le droite ($(I'J')$.

I' et J' étant les images respectives des points I et J (voir 2.b).

Construction de ((1 '

b. On désigne par E le point d'intersection de (C) et la droite (IJ) d'abscisse négative.

Plaçons E et l'image E' de E par S (voir figure).

Justifions la position du point E'.

E étant le point d'intersection de (C) et de la droite (I), on en déduit que E'est le point d'intersection de (C') et de la droite ($(I'J')$

De plus, $S(E) = E'$ donc $\mathrm{Mes}(\widehat{\overline{KE},\overline{KE}}) = \frac{\pi}{4}$

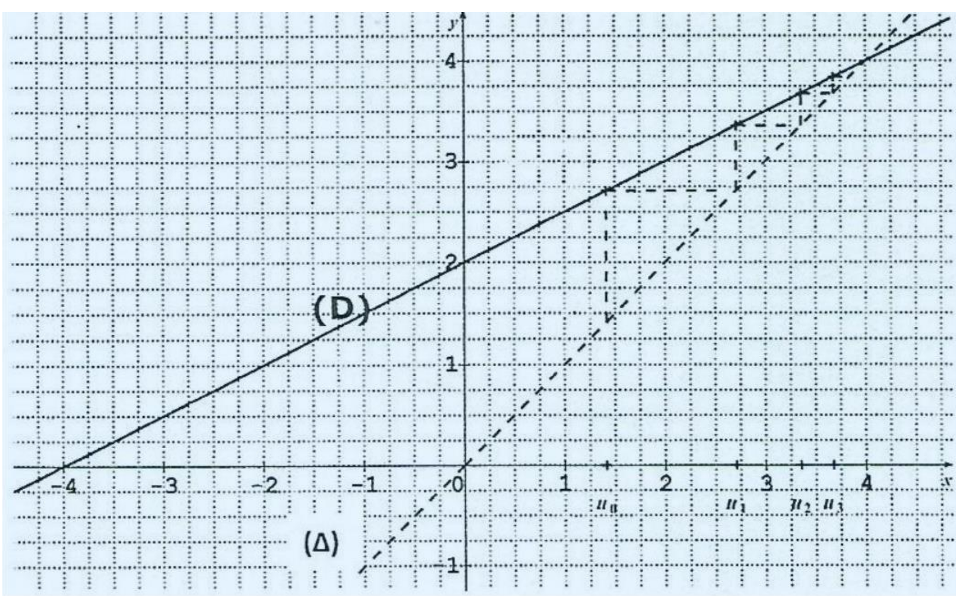
EXERCICE 2

1. Déterminons les valeurs exactes de u_1 et u_2.

$$u_1 = 2 + \frac{1}{2}u_0 = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$u_2 = 2 + \frac{1}{2}u_1 = 2 + \frac{1}{2}\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} = 3 + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

2. a. b. et c. (Voir figure)



3. a. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n, u_n \leq 4$.

$u_0 = \sqrt{2} < 4 \Rightarrow u_0 \leq 4$ donc la propriétéest vraie à l'ordre 0.

Supposons qu'il existe un entier naturel k quelconque tel que : $u_k \leq 4$.

Démontrons que $u_{k+1} \leq 4$

$u_k \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{2} \times u_k \leq \frac{1}{2} \times 4 \Rightarrow 2 + \frac{1}{2} \times u_k \leq 2 + \frac{1}{2} \times 4 \Rightarrow 2 + \frac{1}{2} \times u_k \leq 4$
$\Rightarrow u_{k+1} \leq 4$

Conclusion : pour tout entier naturel $n, u_n \leq 4$.

b. Démontrons que la suite (u) est croissante.

$$u_{n+1} - u_n = 2 + \frac{1}{2}u_n - u_n = 2 + u_n\left(\frac{1}{2} - 1\right) = 2 - \frac{1}{2}u_n$$

or $u_n \leq 4 \Rightarrow -\frac{1}{2}u_n \geq -\frac{1}{2} \times 4 \Rightarrow -\frac{1}{2}u_n \geq -2 \Rightarrow 2 - \frac{1}{2}u_n \geq 0$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$

On en déduit que la suite (u) est croissante.

c. En déduisons que la suite (u) est convergente.

$u_n \leq 4 \Rightarrow (u)$ est majorée.

$u_{n+1} - u_n \geq 0 \Rightarrow (u)$ est croissante.

(u) étant croissante et majorée, elle est donc convergente.

4. Soit $v_n = u_n - 4$, pour tout nombre entier naturel n.

Démontrons que (v) est une suite géométrique.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = 2 + \frac{1}{2}u_n - 4 = \frac{1}{2}u_n - 2 = \frac{1}{2}(u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$ Donc (v) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = \sqrt{2} - 4$

5. On pose, pour tout nombre entier naturel n :

a. Déterminons une expression de T_n en fonction de n.

$$T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$T_n = (\sqrt{2} - 4) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = (\sqrt{2} - 4) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$

$$T_n = 2(\sqrt{2} - 4) \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2(\sqrt{2} - 4) \times \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

b. Justifions que : $S_n = 2(\sqrt{2}-4)\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)+4(n+1)$

$v_n = u_n - 4 \Rightarrow u_n = v_n + 4$

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots. + u_n = v_0 + 4 + v_1 + 4 \ldots. + v_n + 4$
$S_n = v_0 + v_1 \ldots + v_n + (4 + 4 + \cdots + 4) = T_n + 4(n+1)$

$$S_n = 2(\sqrt{2}-4)\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)+4(n+1)$$

c. Déterminons la limite de S_n.

$S_n = T_n + 4(n+1) \Rightarrow \lim S_n = \lim T_n + \lim 4(n+1)$

Or T_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim T_n = 0$ Donc $\lim S_n = \lim 4(n+1) = +\infty$

PROBLEME

1. a. Caculons $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 - 1 + \ln(1-x) = +\infty$

Car $\lim_{x\to-\infty} x^2 - 1 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \ln(1-x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

b. Calculons $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis en donnons une interprétation graphique.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = {}_{x\to-\infty} \frac{x^2-1+\ln(1-x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x - \frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x} = -\infty$ Car $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1-x)}{x} = 0$

$\lim\ _{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$: (C) admet une branche parabolique de direction (O)).

c. Calculons la limite de f à gauche en 1 puis en interprétons le résultat.

$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} x^2 - 1 + \ln(1-x) = -\infty$

Car $\lim_{x\to1} x^2 - 1 = 0$ et $\lim_{x\to1} \ln(1-x) = \lim_{x\to0} \ln(x) = -\infty$

2. a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\infty;1[$, calculons $f'(x)$.

$f'(x) = (x^2 - 1 + \ln(1-x))' = 2x + \frac{(1-x)'}{1-x} = 2x + \frac{-1}{1-x}$
$f'(x) = \frac{2x(1-x)-1}{1-x} = \frac{2x-2x^2-1}{1-x} = \frac{2x^2-2x+1}{x-1}$

b. Démontrons que f est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$.

$f'(x) = \frac{2x^2-2x+1}{x-1}$

Soit $P(x) = 2x^2 - 2x + 1$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 4 - 8 = -4 < 0$

$\forall x \in]-\infty;1[, 2x^2 - 2x + 1 > 0$ et $\forall x \in]-\infty;1[, x - 1 < 0$

Donc $\forall x \in]-\infty; 1[, f'(x) < 0$

D'où f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$

c. Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$	1
$f'(x)$	$-$	||
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	||

3. a. Démontrons que $(E): x \in]-\infty; 1[, f(x) = 0$ admet une solution unique α.

f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$

$f(]-\infty; 1[) =]-\infty; +\infty[$

$0 \in]-\infty; +\infty[$

donc $(E): f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]-\infty; 1[$

b. Justifions que $-0{,}7 < \alpha < -0{,}6$.

f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$ et en particulier sur $]-0{,}7; -0{,}6[$

$\left.\begin{array}{l} f(-0{,}7) = 0{,}02 \\ f(-0{,}6) = -0{,}17 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-0{,}7) \times f(-0{,}6) < 0$ d'où $-0{,}7 < \alpha < -0{,}6$

4. a. Démontrons qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est :

$y = -x - 1$

$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$f'(0) = \frac{2 \times 0^2 - 2 \times 0 + 1}{0 - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$f(0) = 0^2 - 1 + \ln(1 - 0) = -1 + \ln 1 = -1 + 0 = -1$

$(T): y = -1(x - 0) + (-1) = -x - 1$

b. Traçons (T) et (C) (voir figure).

5. I est l'aire de la partie du plan délimitée par (C), la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$.

a. Calculons $\int_{\alpha}^{0} \ln(1 - x)dx$ à l'aide d'une intégrale par parties.

$u' = 1 \qquad v = \ln(1 - x)$

$u = x \qquad v' = \dfrac{-1}{1 - x}$

$\int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)dx = [x \cdot \ln(1-x)]_{\alpha}^{0} - \int_{\alpha}^{0} \frac{-x}{1-x} dx$
$\int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)dx = [x \cdot \ln(1-x)]_{\alpha}^{0} - \int_{\alpha}^{0} 1 + \frac{-1}{1-x} dx$
$= [x \cdot \ln(1-x)]_{\alpha}^{0} - [x + \ln(1-x)]_{\alpha}^{0}$
$= [x \cdot \ln(1-x) - x - \ln(1-x)]_{\alpha}^{0}$
$= [0 \cdot \ln(1-0) - 0 - \ln(1-0)] - [\alpha \cdot \ln(1-\alpha) - \alpha - \ln(1-\alpha)]$

$\int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)dx = -\alpha \cdot \ln(1-\alpha) + \alpha + \ln(1-\alpha) = \alpha + (1-\alpha) \cdot \ln(1-\alpha)$

b. Démontrons que la valeur de $\mathbb{H}$ en unités d'aire est $A = \frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)$.

$A = -\int_{\alpha}^{0} f(x)dx \cdot UA = -\int_{\alpha}^{0} x^2 - 1 + \ln(1-x)dx \cdot UA$

$A = -\left(\int_{\alpha}^{0} x^2 - 1dx + \int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)dx\right) \cdot UA = -\left(\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{\alpha}^{0} + \int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)dx\right) \cdot UA$

$A = -\left(\left(\frac{0^3}{3} - 0\right) - \left(\frac{\alpha^3}{3} - \alpha\right) + \int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)dx\right) \cdot UA = -\left(-\frac{\alpha^3}{3} + \alpha + \int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)dx\right) \cdot \cup A$

$A = -\left(-\frac{\alpha^3}{3} + \alpha + \alpha + (1-\alpha) \cdot \ln(1-\alpha)\right) \cdot UA = -\left(-\frac{\alpha^3}{3} + 2\alpha + (1-\alpha) \cdot \ln(1-\alpha)\right) \cdot UA$

$A = \left(\frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha) \cdot \ln(1-\alpha)\right) \cdot UA$

c. Déterminons en cm^2 l'arrondi d'ordre 2 de la valeur de $\mathbb{A}$ pour $\alpha = -0{,}65$.

$A = \left(\frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha) \cdot \ln(1-\alpha)\right) \cdot UA = \left(\frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha) \cdot \ln(1-\alpha)\right) \cdot 4 \text{ cm}^2$

$A = \left(\frac{(-0{,}65)^3}{3} - 2 \times (-0{,}65) - (1-(-0{,}65)) \cdot \ln(1-(-0{,}65)) \cdot 4 \text{ cm}^2\right.$

$A = \left(\frac{(-0{,}65)^3}{3} + (1{,}30) - (1{,}65)\right) \cdot \ln(1{,}65)\Big) \cdot 4 \text{ cm}^2$

$A = 1{,}53 \text{ cm}^2$

6. a. Calculons $f(-1)$.

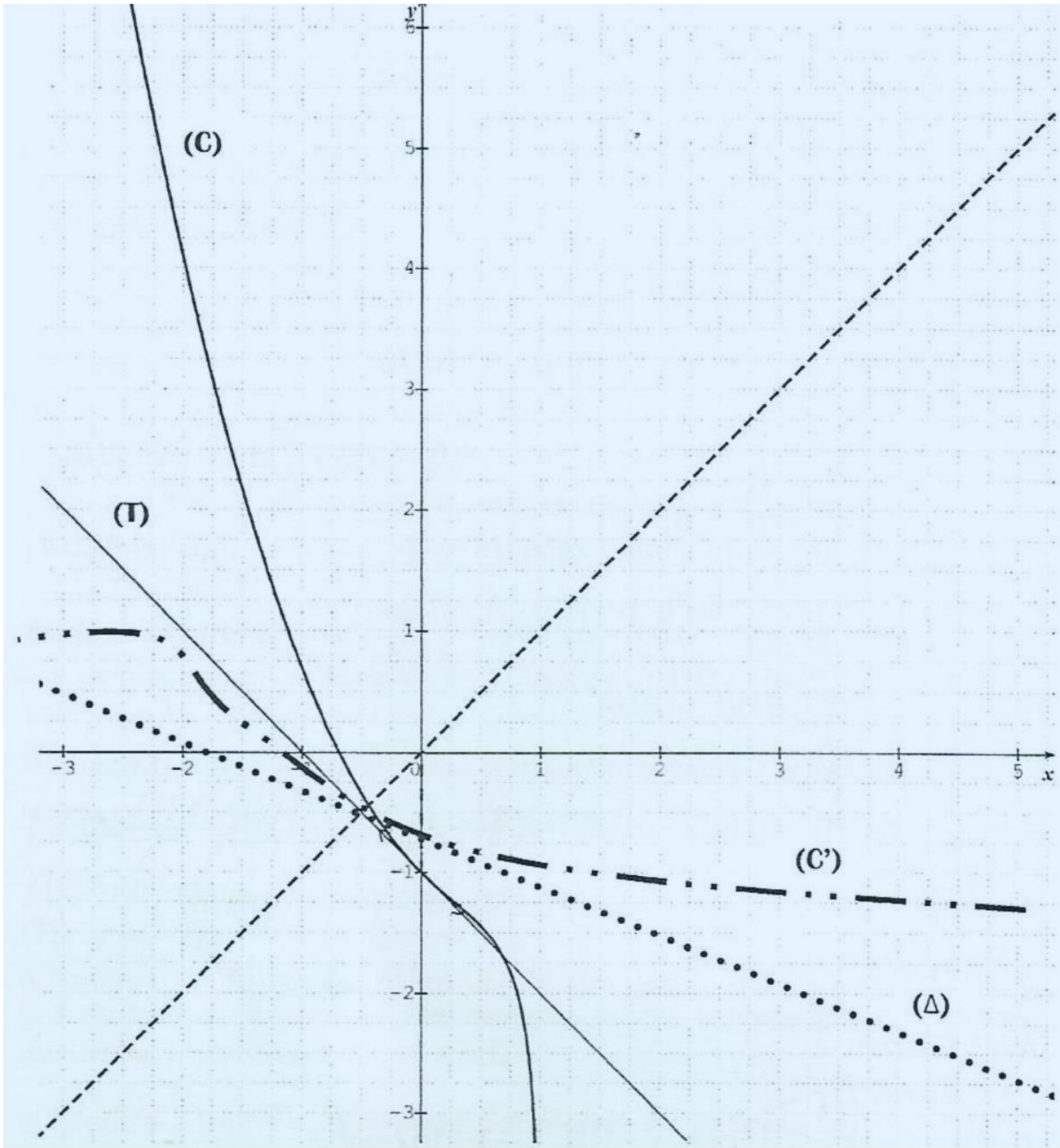
$f(-1) = (-1)^2 - 1 + \ln(1-(-1)) = 1 - 1 + \ln 2 = \ln 2$

b. Démontrons que le nombre dérivé de f^{-1} en $\ln 2$ existe puis le calculer.

$f'(-1) = \frac{2(-1)^2 - 2(-1) + 1}{(-1) - 1} = \frac{2 \times 1 + 2 + 1}{-2} = \frac{5}{-2} = \frac{-5}{2}$

$f'(-1) \neq 0$, on en déduit que f^{-1} est dérivable en $\ln 2$ et $(f^{-1})'(\ln 2) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{-5} = \frac{-2}{5}$

c. Construction de la courbe $(C')°$ et de sa tangente (Δ) au point d'abscisse $\ln 2$ sur la figure de la question $°4.b$.


(C)
(T)
(C')
(Δ)
y
x

CORRECTION SESSION NORMALE 2012 SERIE D

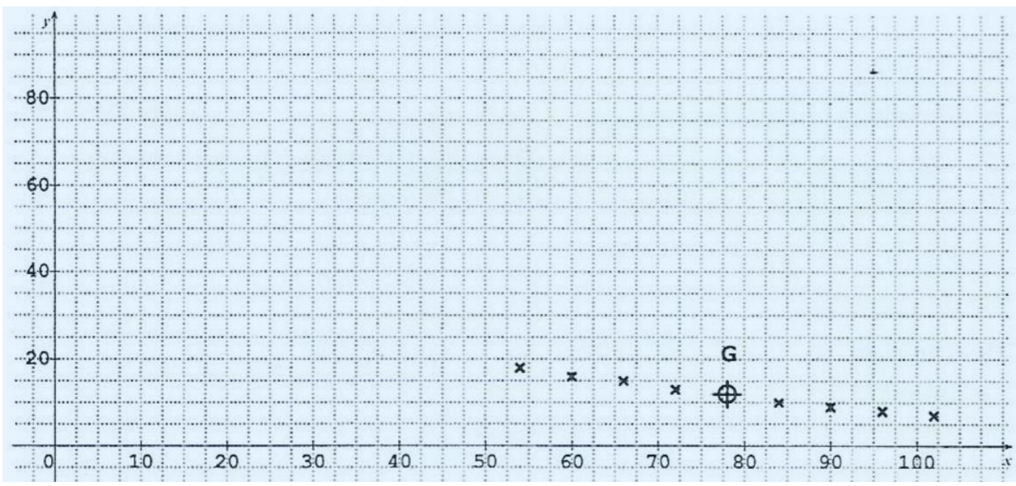
EXERCICE 1

1. Représentation graphique du nuage de points.

Echelle :

$2\ \mathrm{cm}$ pour 10 centaines de francs sur (OI)

$2\ \mathrm{cm}$ pour 2 dizaines de colliers sur (OJ).



2. Calculons les coordonnées du point moyen G du nuage.

$$\bar{X} = \frac{54+60+66+72+84+90+96+102}{8} = \frac{624}{8} = 78$$

$$\bar{Y} = \frac{18+16+15+13+10+9+8+7}{8} = \frac{96}{8} = 12$$

3. a. Calculons la variance $V'(X)$ de X.

$$V(X) = \frac{54^2+60^2+66^2+72^2+84^2+90^2+96^2+102^2}{8} - 78^2$$

$$V(X) = \frac{50832}{8} - 78^2 = 6354 - 6084 = 270$$

b. Calculons la covariance $\mathrm{COV}(X;Y)$.

$$\mathrm{COV}(X,Y) = \frac{54\times18+60\times16+66\times15+72\times13+84\times10+90\times9+96\times8+102\times7}{8} - 78\times12$$

$$\mathrm{COV}(X,Y) = \frac{6990}{8} - 936 = -62{,}25$$

c. On admet que $V(Y) = 14{,}50$.

Démontrons que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire est égal à $-0{,}99$.

$r = \frac{\text{COV}(X;Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}} = \frac{-62{,}25}{\sqrt{270 \times 14{,}5}} = \frac{-62{,}25}{\sqrt{3915}} = -0{,}994$

$r = -0{,}99$

4. Soit (D) la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.

a. Justifions que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient directeur de (D) est égal à -0,23.

$$a = \frac{\text{COV}(X;Y)}{V(X)} = \frac{-62{,}25}{270} = -0{,}23$$

b. Démontrons qu'une équation de la droite (D) est : $y = -0{,}23x + 29{,}94$. $y = ax + b \Rightarrow \bar{y} = a\bar{x} + b \Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x} = 12 - (-0{,}23) \times 78 = 29{,}94$ Donc (D) a pour équation: $y = -0{,}23x + 29{,}94$

5. Pour l'année 2011, Madame Kouamé souhaite fabriquer un nouveau type de collier qu'elle vendrait à 11500 francs CFA l'unité.

Déterminons le nombre de colliers de ce type qu'elle pourrait vendre selon l'ajustement linéaire réalisé.

11500 francs CFA $= 115$ centaines de francs CFA

Pour $X = 115$, déterminons y en utilisant l'équation de la droite d'ajustement.

$y = -0{,}23 \times 115 + 29{,}94 = 3{,}49$

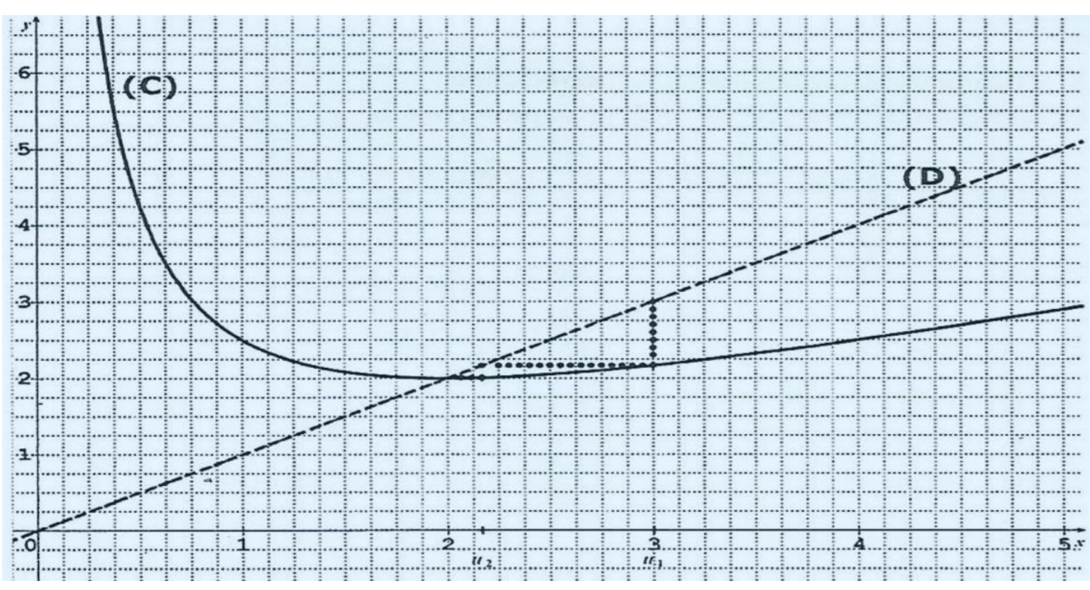
$y = 3{,}49$ dizaines de colliers or 3,49 dizaines sont égales à 34,9 soit 35 colliers.

Elle pourrait donc vendre 35 colliers au prix de 11500 francs CFA l'unité.

EXERCICE 2

On considère la suite numérique U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{4}{U_n}\right) \end{cases}$.

1. a. Représentons sur l'axe des abscisses (OI) les termes U_1, U_2 et U_3 de la suite Uen utilisant la courbe (C) et la droite ((D).



b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la convergence de la suite U ?

La représentation graphique des termes de la suite U permet de conjecturer que la suite U converge vers 2 .

2. On admet que f est continue et strictement croissante sur $[2;3]$.

a. Démontrons que $f([2;3]) \subset [2;3]$

f est continue et strictement croissante sur $[2;3]$.

$f([2;3]) = [f(2); f(3)] = \left[\frac{1}{2}\left(2+\frac{4}{2}\right); \frac{1}{2}\left(3+\frac{4}{3}\right)\right] = \left[2; \frac{13}{6}\right] \subset [2;3]$ donc $f([2;3]) \subset [2;3]$.

b. Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1, 2 \leq U_n \leq 3$

Pour $n = 1, U_1 = 3 \Rightarrow 2 \leq U_1 \leq 3$ la propriété est donc vraie à l'ordre 1 .

Pour $n > 1$, on suppose que $2 \leq U_n \leq 3 \Rightarrow 2 \leq f(U_n) \leq 3$.

d'après la question 2.a)

Donc $2 \leq U_{n+1} \leq 3$ la propriété est donc vraie à l'ordre $n+1$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq U_n \leq 3$

3. a. Démontrons que la suite U est décroissante.

Calculons la différence $U_{n+1} - U_n$ et montrons que $U_{n+1} - U_n \leq 0$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{4}{U_n}\right) - U_n = \frac{1}{2}U_n + \frac{2}{U_n} - U_n = \frac{1}{2}U_n - U_n + \frac{2}{U_n}$$
$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n - \frac{2}{2}U_n + \frac{2}{U_n} = -\frac{1}{2}U_n + \frac{2}{U_n} = \frac{-U_n^2+4}{2U_n} = \frac{4-U_n^2}{2U_n}$$
$$U_{n+1} - U_n = \frac{(2+U_n)(2-U_n)}{2U_n} = \frac{2+U_n}{2U_n} \times (2-U_n)$$
$$2 \leq U_n \leq 3 \Rightarrow U_n > 0 \Rightarrow \frac{2+U_n}{2U_n} > 0$$

Donc le signe de $U_{n+1} - U_n = \frac{2+U_n}{2U_n} \times (2-U_n)$ est celuide $(2-U_n)$

Etudions le signe de $(2-U_n)$

$$\begin{aligned} 2 \leq U_n \leq 3 &\Rightarrow -2 \geq -U_n \geq -3 \Rightarrow -3 \leq -U_n \leq -2 \\ &\Rightarrow -3+2 \leq -U_n + 2 \leq -2+2 \Rightarrow -1 \leq 2 - U_n \leq 0 \\ &\Rightarrow 2 - U_n \leq 0 \text{ Donc } U_{n+1} - U_n \leq 0 \end{aligned}$$

On en déduit que U est décroissante.

b. En déduisons que la suite U est convergente.

La suite U est décroissante.

U est minorée par 2 ($\text{car } 2 \leq U_n \leq 3$).

Donc U est convergente.

4. On considère la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \frac{U_n-2}{U_n+2}$

a. Démontrons que pour tout entier $n \geq 1, v_{n+1} = (v_n)^2$

$$v_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 2}{U_{n+1} + 2}$$

Or $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{4}{U_n}\right) = \frac{1}{2}U_n + \frac{2}{U_n} = \frac{U_n}{2} + \frac{2}{U_n} = \frac{U_n^2+4}{2U_n}$

Donc $V_{n+1} = \frac{\frac{U_n^2+4}{2U_n}-2}{\frac{U_n^2+4}{2U_n}+2} = \frac{\frac{U_n^2+4-4U_n}{2U_n}}{\frac{U_n^2+4+4U_n}{2U_n}} = \frac{2U_n}{\frac{(U_n+2)^2}{2U_n}}$

$$V_{n+1} = \frac{(U_n - 2)^2}{2U_n} \times \frac{2U_n}{(U_n + 2)^2} = \frac{(U_n - 2)^2}{(U_n + 2)^2} = \left(\frac{U_n - 2}{U_n + 2}\right)^2 = (V_n)^2$$

b. Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1, v_n = (V_1)^{2^{n-1}}$

$\forall n \geq 1, v_{n+1} = (v_n)^2$

On en déduit, $V_{1+1} = (V_1)^2 \Leftrightarrow V_2 = (V_1)^2 = (V_1)^{2^{2-1}}$

Donc la propriété énoncé est vraie pour $n = 2$.

On suppose que $\forall n \geq 1, v_n = (V_1)^{2^{n-1}}$

Montrons que $V_{n+1} = (V_1)^{2^{n+1-1}} = (V_1)^{2^n}$

$V_{n+1} = (V_n)^2$

$\Rightarrow V_{n+1} = \left[(V_1)^{2^{n-1}}\right]^2 = (V_1)^{2\times 2^{n-1}} = (V_1)^{2^{1\times 2^{n-1}}} = (V_1)^{2^{n-1+1}} = (V_1)^{2^n}$

Donc $\forall n \geq 1, v_n = (v_1)^{2^{n-1}}$

c. Calculons V_1 puis exprimer V_n en fonction de n.

$v_n = \frac{u_n-2}{U_n+2} \Rightarrow v_1 = \frac{u_1-2}{U_1+2} = \frac{3-2}{3+2} = \frac{1}{5}$

$v_n = (v_1)^{2n-1} \Rightarrow v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1}$

d. Exprimons U_n en fonction de n.

$v_n = \frac{u_n-2}{U_n+2} \Rightarrow v_n \times (U_n + 2) = u_n - 2 \Rightarrow v_n \times U_n + 2v_n = u_n - 2$

$\Rightarrow V_n \times U_n - U_n = -2 - 2V_n \Rightarrow U_n(V_n - 1) = -2 - 2V_n$

$\Rightarrow U_n = \frac{-2-2V_n}{V_n-1} \Rightarrow U_n = \frac{2+2V_n}{1-V_n}$

$\Rightarrow U_n = \frac{2+2\left(\frac{1}{5}\right)^{2^{n-1}}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1}}$

e. Démontrons que $\lim V = 0$.

$\lim V_n = \lim \left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1} = 0$ car $-1 < \frac{1}{5} < 1$

En déduisons la limite de U.

$$\lim U_n = \lim \frac{2+2V_n}{1-V_n} = \lim \frac{2+0}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$$

PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction g dérivable et définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = e^x + 2\ln x$

1. a. Déterminons $\lim_{x\to 0} g(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x)$.

$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} e^x + 2\ln x = -\infty$

car $\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$ et $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$
$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} e^x + 2\ln x = +\infty$ car $\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

b. Calculons $g'(x)$

$$g'(x) = (e^x + 2\ln x)' = (e^x)' + 2(\ln x)' = e^x + 2\left(\frac{1}{x}\right) = e^x + \frac{2}{x}$$

c. Etudions le sens de variation de g puis dressons son tableau de variation.

$$g'(x) = e^x + \frac{2}{x}$$

$\forall x \in]0;+\infty[, e^x > 0$ et $\frac{2}{x} > 0$

Donc $g'(x) = e^x + \frac{2}{x} > 0 \ \forall x \in]0;+\infty[$.

On en déduit que: g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. a. Démontrons que $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$.

g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$g(]0;+\infty[) =]-\infty;+\infty[$.

$0 \in]-\infty; +\infty[$.

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$.
b. Vérifions que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

g est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et en particulier sur $[0{,}4; 0{,}5]$

$g(0{,}4) = e^{0{,}4} + 2\ln 0{,}4 = -0{,}34$

$g(0{,}5) = e^{0{,}5} + 2\ln 0{,}5 = 0{,}26$

$g(0{,}4) \times g(0{,}5) < 0$

Donc $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

c. Démontrons que : $\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, \ g(x) < 0; \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, \ g(x) > 0. \end{cases}$

Tableau de signe

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

On en déduit:

$\forall x \in]0; \alpha[, \ \ g(x) \in]-\infty; 0[$ donc $g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[, \ g(x) \in]0; +\infty[$ donc $g(x) > 0$

PARTIE B

1. a. Déterminons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

- $f(x) = e^x + 2x\ln x - 2x = x\left(\frac{e^x}{x} + 2\ln x - 2\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} + 2\ln x - 2\right) = +\infty$

car $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty; \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty; \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} + 2\ln x - 2 = +\infty$

car $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

b. Interprétons graphiquement les résultats.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe (OJ).

2. a. Démontrons que f est continue en 0 .

$f(0) = 1$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ car $\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1; \lim_{x\to 0} x\ln x = 0$ et $\lim_{x\to 0} 2x = 0$ $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

b. Démontrons que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{e^x + 2x\ln x - 2x - 1}{x} = \frac{e^x - 1 + x(2\ln x - 2)}{x}$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{e^x - 1}{x} + 2\ln x - 2$$

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$ car $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} 2\ln x - 2 = -\infty$

c. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifions la réponse.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$$

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} n'$ est pas finie donc f n'est pas dérivable en 0.

d. Interprétons graphiquement le résultat de la question 2.b.

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$ donc (C) admet en 0 une tangente verticale.

3. On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

a. Démontrons que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.

$f'(x) = (e^x + 2x\ln x - 2x)' = (e^x)' + (2x\ln x)' - (2x)' = e^x + 2\ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} - 2$ $f'(x) = e^x + 2\ln x + 2 - 2 = e^x + 2\ln x = g(x)$

b. Etudions les variations de f puis dressons son tableau de variation. $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$

Donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $g(x)$.

Or d'après Partie A, 2.c.: $\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[,\ g(x) < 0; \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0. \end{cases}$

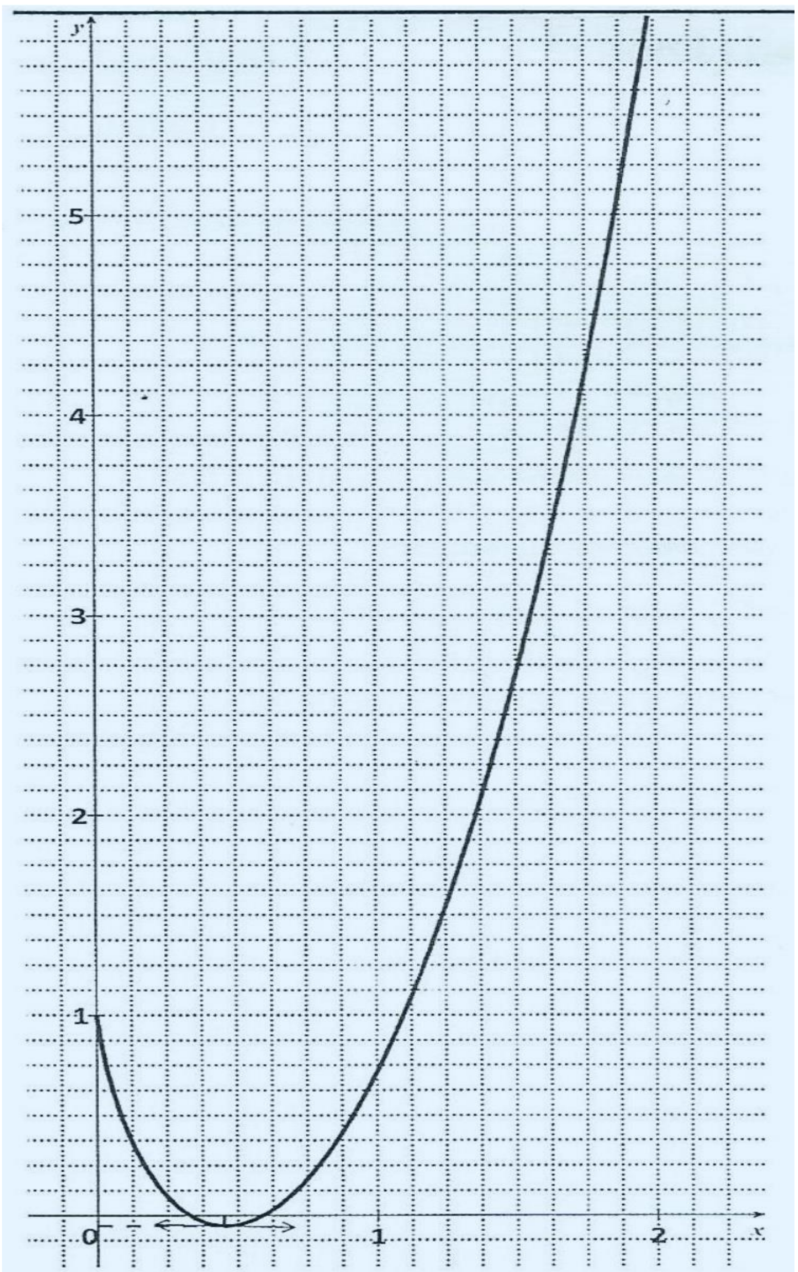
Donc: $\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[,\ f'(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[,\ f'(x) > 0. \end{cases}$

On en déduit que: $\begin{cases} f \text{ est strictement décroissante sur }]0; \alpha[, \\ f \text{ est strictement croissante sur }]\alpha; +\infty[. \end{cases}$

Tableau de variation

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Traçons la courbe ($(\mathbf{C})$ sur l'intervalle $[0;2]$.



CORRECTION SESSION NORMALE 2011 SERIE D

EXERCICE 1

1. a. Démontrons que la suite (v_n) est convergente.

$$\lim v_n = \lim \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \lim \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} = \lim \frac{n^2}{n^2} = 1$$

$\Rightarrow \lim v_n = 1$

$\lim v_n$ existe et est finie doncla suite (v_n) est convergente.

b. Démontrons que la suite (v_n) est croissante.

$$v_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)+2)}{((n+1)+1)^2} = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} - \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^3(n+3)}{(n+2)^2(n+1)^2} - \frac{n(n+2)^3}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1)^3(n+3) - n(n+2)^3}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1)^2(n+1)(n+3) - n(n+2)(n+2)^2}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n^2+2n+1)(n^2+4n+3) - (n^2+2n)(n^2+4n+4)}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n^4+6n^3+12n^2+10n+3) - (n^4+6n^3+12n^2+8n)}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2n+3}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2n+3 > 0 et (n+2)^2(n+1)^2 > 0 \Rightarrow \frac{2n+3}{(n+2)^2(n+1)^2} > 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n > 0$.

On en déduit que la suite (v_n) est croissante.

<u>Autre méthode</u>

$v_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$ et $v_{n+1} = \frac{(n+1)^2+2(n+1)}{(n+2)^2}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1)^2+2(n+1)}{(n+2)^2} - \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2+2(n+1)+1-1}{(n+2)^2} - \frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}$$
$$= \frac{(n+1+1)^2-1}{(n+2)^2} - \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = \frac{(n+2)^2-1}{(n+2)^2} - \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+2)^2} - \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2}$$

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2}$ or $n+1 < n+2 \Leftrightarrow (n+1)^2 < (n+2)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{1}{(n+2)^2}$ donc $\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} > 0$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n > 0$.
On en déduit que la suite (v_n) est croissante.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{1}{(n+2)^2}$$

c. Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{3}{4} \leq v_n < 1$
$\lim v_n = 1 \Rightarrow v_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

La suite (v_n) est une suite croissante.

Son terme le plus petit est son premier terme v_1.

C'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_1 \leq v_n$.

or $v_1 = \frac{1^2+2\times 1}{(1+1)^2} = \frac{1+2}{(2)^2} = \frac{3}{4}$ d'où $\frac{3}{4} \leq v_n$.

Finalement: $\frac{3}{4} \leq v_n < 1$

2. On pose pour tout entier naturel non nul $n, a_n = v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n$

a. Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on $a: a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$

$$a_n = v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n \Rightarrow a_1 = v_1 = \frac{3}{4}$$

$$a_n = \frac{n+2}{2(n+1)} \Rightarrow a_1 = \frac{1+2}{2(1+1)} = \frac{3}{2(2)} = \frac{3}{4}$$

La propriété est donc vraie à l'ordre 1.

Supposons que pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_k = \frac{k+2}{2(k+1)}$

Et montrons que $a_{k+1} = \frac{(k+1)+2}{2((k+1)+1)}$

$$a_k = v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_k$$
$$a_{k+1} = \frac{v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_k \times v_{k+1}}{a_k}$$
$$a_{k+1} = a_k \times v_{k+1} = \frac{k+2}{2(k+1)} \times \frac{(k+1)^2+2(k+1)}{((k+1)+1)^2}$$
$$a_{k+1} = \frac{k+2}{2(k+1)} \times \frac{(k+1)((k+1)+2)}{(k+2)^2}$$

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{2(k+1)} \times \frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}$$
$$a_{k+1} = \frac{(k+2)\times(k+1)(k+3)}{2(k+1)(k+2)^2} = \frac{(k+3)}{2(k+2)}$$
$$a_{k+1} = \frac{(k+1)+2}{2((k+1)+1)}$$

On a supposé que $a_k = \frac{k+2}{2(k+1)}$

et on a montré que $a_{k+1} = \frac{(k+1)+2}{2((k+1)+1)}$.

Finalement, on conclue que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$

b. En déduisons la limite de la suite (a_n).

$$a_n = \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{n+2}{2n+2} \Rightarrow \lim a_n = \lim \frac{n+2}{2n+2} = \lim \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

3. On pose pour tout entier naturel $n: b_n = \ln(v_1) + \ln(v_2) + \cdots + \ln(v_n)$

a. Démontrons que (b_n) est une suite à termes négatifs.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{3}{4} \leq v_n < 1 \Rightarrow v_n < 1 \Rightarrow \ln v_n < \ln 1 \Rightarrow \ln v_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\text{Donc}(b_n)$ est une suiteàtermes négatifs

(car somme de valeurs toutes négatives)

b. Calculons la limite de la suite (b_n).

$$a_n = v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n$$
$$\text{In}\, a_n = \ln(v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n)$$
$$\text{In}\, a_n = \ln(v_1) + \ln(v_2) + \cdots + \ln(v_n) = b_n$$
$$\Rightarrow \lim b_n = \lim(\ln a_n) = \ln \lim(a_n) = \ln \tfrac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \lim b_n = \ln \tfrac{1}{2} = -\ln 2$$

EXERCICE 2

1. a. Calculons $E(X)$ l'espérance mathématique de X en fonction de a et b.

$E(X) = 220 \times 0{,}08 + 230 \times 0{,}10 + 240 \times a + 250 \times b + 260 \times 0{,}16 + 270 \times 0{,}15 + 280 \times 0{,}04$

$E(X) = 17{,}6 + 23 + 240a + 250b + 41{,}6 + 40{,}5 + 11{,}2$

$E(X) = 133{,}9 + 240a + 250b$

b. Sachant que $E(X) = 250$, justifions que $a = 0{,}14$ et $b = 0{,}33$.

$$E(X) = 250 \Leftrightarrow 133{,}9 + 240a + 250b = 250$$

De plus, $\sum_{i=1}^{7} Pi = 1 \Leftrightarrow 0{,}08 + 0{,}1 + a + b + 0{,}16 + 0{,}15 + 0{,}04 = 1$

$$\Leftrightarrow 0{,}53 + a + b = 1$$

On en déduit le système: $\begin{cases} 133{,}9 + 240a + 250b = 250 \\ 0{,}53 + a + b = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 133{,}9 + 240a + 250b = 250 \text{ (1)} \\ 132{,}5 + 250a + 250b = 250 \text{ (2)} \end{cases}$$

$(1)-(2) \Rightarrow 1{,}4-10a=0 \Rightarrow -10a=-1{,}4 \Rightarrow a=\frac{-1{,}4}{-10}=0{,}14$
$0{,}53+a+b=1 \Rightarrow b=1-0{,}53-a=0{,}47-a=0{,}47-0{,}14=0{,}33$

Finalement: $a=0{,}14$ et $b=0{,}33$

2. Calculons la probabilité pour que la masse de ce sachet de lait caillé soit au moins de 250 g.

$P(X \geq 250)=b+0{,}16+0{,}15+0{,}04=0{,}33+0{,}16+0{,}15+0{,}04$ $P(X \geq 250)=0{,}68$

3. Calculons la probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220 g.

Chaque choix conduit à 2 éventualités : soit le sachet a 220 g ou non.

Chaque évènement est donc une épreuve de Bernoulli de paramètres 5 et 0,08 .

Ces épreuves de Bernoulli se répètent de manière indépendante.

La probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220 g se calcule à l'aide de la loi binomiale :

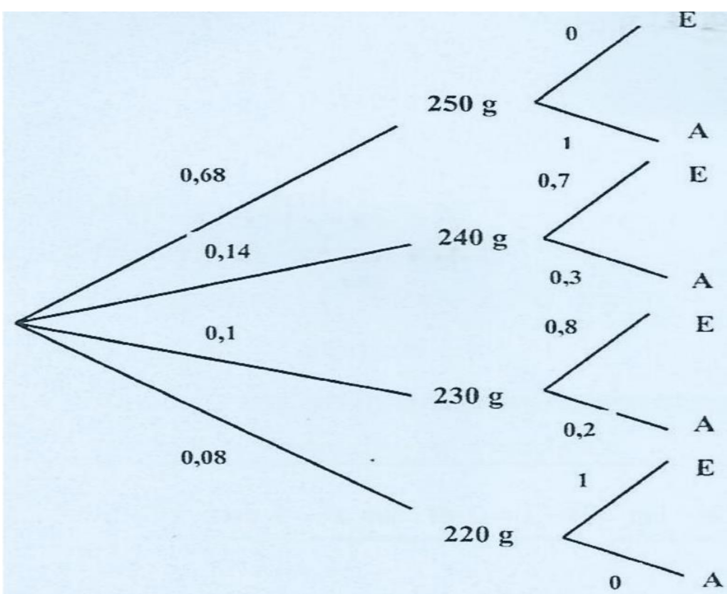
$P(X=3)=C_5^3(0{,}08)^3 \times (0{,}92)^2=10 \times (0{,}00051) \times (0{,}8464)$
$P(X=3)=0{,}00432$

4. Arbre de probabilité

On note :

A : l'évènement «le sachet est accepté ».

E : l'évènement «le sachet est éliminé ».



a. Justifions que la probabilité qu'un sachet de lait caillé de 240 g soit éliminé est de 0,098 .

Soit les évènements G : « le sachet a 240 g » et E : « le sachet est éliminé».

$P(G \cap E) = P(G) \times P_G(E)$

$P(G \cap E) = 0{,}14 \times 0{,}7 = 0{,}098$

b. Calculons la probabilité pour qu'un sachet de lait caillé de cette société soit éliminé.

$P(E) = 0{,}14 \times 0{,}7 + 0{,}1 \times 0{,}8 + 0{,}08 \times 1 = 0{,}098 + 0{,}08 + 0{,}08$
$P(E) = 0{,}258$

PROBLEME
PARTIE A

Soit la fonction numérique dérivable sur $]0;+\infty[$et définie par : $g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x$.

1. a. Calculons $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

$$\text{car}\begin{cases}\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \dfrac{-2x+1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{-2x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{x} = 0\end{cases}$$

b. Calculons $\lim_{x\to0} g(x)$

$\lim_{x\to0} g(x) = -\infty$

$$\text{car}\begin{cases}\lim_{x\to0} \ln(x) = -\infty \\ \quad > \\ \lim_{x\to0} -\dfrac{2x+1}{x^2} = -\infty \text{ car } \lim_{x\to0}(2x+1) = 0 \text{ et } \lim_{x\to0} x^2 = 0 \text{ avec } x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\end{cases}$$

2. a. Démontrons que : $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$

$$\begin{aligned}g'(x) &= \left(-\frac{2x+1}{x^2} + \ln x\right)' = \left(\frac{-2x-1}{x^2}\right)' + (\ln x)' \\ &= \frac{-2x^2-(2x)\cdot(-2x-1)}{(x^2)^2} + \frac{1}{x} = \frac{-2x^2+4x^2+2x}{x^4} + \frac{1}{x} \\ &= \frac{2x^2+2x}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+2x}{x^4} + \frac{x^3}{x^4} = \frac{x^3+2x^2+2x}{x^4} \\ &= \frac{x(x^2+2x+2)}{x\cdot x^3} = \frac{x^2+2x+2}{x^3}\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in 0;+\infty \Big| \, g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$

b. En déduisons le sens de variation de g.

$$\forall x \in]0;+\infty[\ , g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$$

$\forall x \in]0;+\infty[, x^3 > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est le même que celui de $x^2 + 2x + 2$.

Etudions le signe de $x^2 + 2x + 2$.

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4 < 0$.

Le signe de $x^2 + 2x + 2$ est le même que celui du coefficient de x^2 qui est 1 .

On en déduit que: $x^2 + 2x + 2 > 0 \ \forall x \in 0; +\infty$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[\ , g'(x) > 0$

Finalement, g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

c. Dressons le tableau de variation de la fonction g.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. a. Démontrons que $x \in]0; +\infty[\ , g(x) = 0$ admet une solution unique α.

g est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$g(]0; +\infty[\ ) =]-\infty; +\infty[$.

$0 \in]-\infty; +\infty[$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $0; +\infty$.
b. Justifions que : $2{,}55 < \alpha < 2{,}56$.

g est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$

et en particulier sur $2{,}55; 2{,}56$.

$$\left.\begin{array}{l} g(2{,}55) = -0{,}002 < 0 \\ g(2{,}56) = 0{,}006 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(2{,}55) \times g(2{,}56) < 0$$

Donc $2{,}55 < \alpha < 2{,}56$.

c. Démontrons que :

$$\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $g(x)$		-	0	+	

g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$,

$\forall x \in]0;\alpha[\ x < \alpha \Longrightarrow g(x) < g(\alpha)\ or\ g(\alpha) = 0\ \text{ donc }\ g(x) < 0$
$\forall x \in]\alpha;+\infty[,\ x > \alpha \Longrightarrow g(x) > g(\alpha)\ or\ g(\alpha) = 0\ \text{ donc }\ g(x) > 0$

On en déduit: $\begin{cases} \forall x \in]0;\alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

PARTIE B

1. a. Calculons $\lim_{x\to 0} f(x)$ puis en donnons une interprétation graphique.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \ln x\right| \ e^{-x} = +\infty$$

car

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty \ \Rightarrow \ \lim\limits_{x\to 0} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} e^{-x} = e^{-0} = 1 \end{cases}$$

La droite (OJ)d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C)
b. Calculons $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ puis en donnons une interprétation graphique.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to +\infty} f(x) &= \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) e^{-x} \\ &= \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{xe^x} - \frac{\ln x}{e^x}\right) \end{aligned}$$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

$\text{car} \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{xe^x} = 0$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$

(croissance comparée des fonctions $\ln x et e^x$)

La droite(OI) d'équation $y = 0$ estasymptotehorizontaleà(C)en $+\infty$

2. Démontrons que : $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha}$

$$f(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} - \ln \alpha\right) e^{-\alpha}$$

Or $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow -\frac{2\alpha+1}{\alpha^2}+\ln\alpha=0 \Leftrightarrow \ln\alpha=\frac{2\alpha+1}{\alpha^2}$

$$\Rightarrow f(\alpha)=\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{2\alpha+1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha}=\left(\frac{\alpha}{\alpha^2}-\frac{2\alpha+1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha}=\left(\frac{\alpha-2\alpha-1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha}$$

$$\Rightarrow f(\alpha)=\left(\frac{-\alpha-1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha}=\left(-\frac{\alpha+1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha}$$

donc $f(\alpha)=-\frac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}$

3. a. Démontrons que : $\forall x\in]0;+\infty[\,, f'(x)=e^{-x}\cdot g(x)$

$$f'(x)=\left[\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)e^{-x}\right]'=\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)'e^{-x}+\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)(e^{-x})'$$

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)e^{-x}+\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)(-e^{-x})=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+\ln x\right)e^{-x}$$

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+\ln x\right)e^{-x}=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\ln x\right)e^{-x}$$

$$f'(x)=\left(-\frac{1+2x}{x^2}+\ln x\right)e^{-x}=g(x)\cdot e^{-x}$$

Donc $\forall x\in]0;+\infty[\,, f'(x)=e^{-x}\cdot g(x)$
b. En utilisant la partie A, déterminons les variations de f.

$\forall x\in]0;+\infty[, f'(x)=e^{-x}\cdot g(x)$

$\forall x\in]0;+\infty[\,, e^{-x}>0$ donc le signede $f'(x)$ est le mêmeque celuide $g(x)$

or $\begin{cases}\forall x\in\,]0;\alpha[, g(x)<0\\ \forall x\in\,]\alpha;+\infty[, g(x)>0\end{cases}$ donc $\begin{cases}\forall x\in\,]0;\alpha[, f'(x)<0\\ \forall x\in\,]\alpha;+\infty[, f'(x)>0\end{cases}$

On en déduit que:

Sur $]0;\alpha[$, f est strictement décroissante

Sur $]\alpha;+\infty[$, f est strictement croissante

c. Dressons le tableau de variation de f.

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}$	↗	0

4. Démontrons qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est : $y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$.

$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$f'(1) = \left(-\frac{1+2\times 1}{1^2} + \ln 1\right)e^{-1} = (-3+0)\frac{1}{e} = \frac{-3}{e}$$

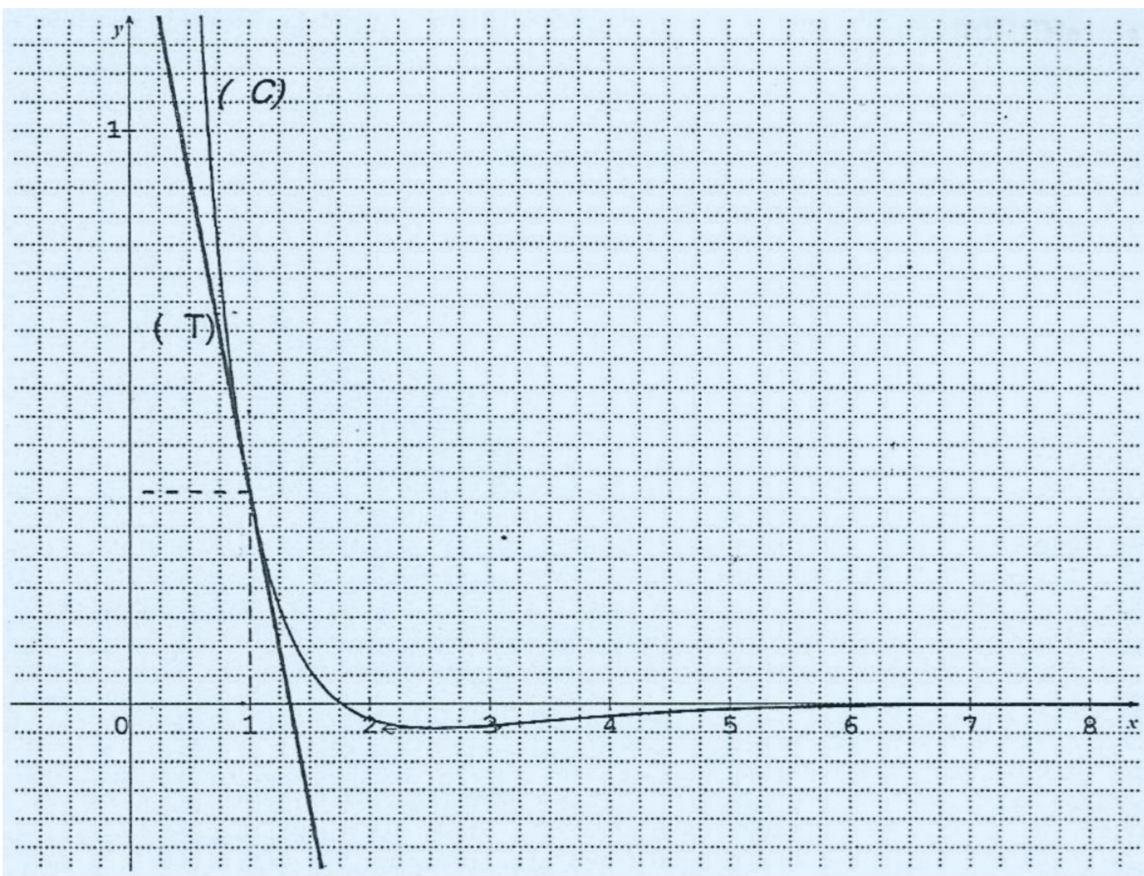
$$f(1) = \left(\frac{1}{1} - \ln 1\right)e^{-1} = (1-0)\frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

$$(T): y = \frac{-3}{e}(x-1) + \frac{1}{e} = -\frac{3}{e}x + \frac{3}{e} + \frac{1}{e} = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$$

$$(T): y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$$

5. Construisons la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère $(0,1,\mathrm{J})$.

On prendra $\alpha = 2{,}6$.



PARTIE C

1. Soit h la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$et définie par: $h(x)=e^{-x}\cdot\ln x$

Démontrons que h est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

En d'autres termes, il s'agit de montrer que : $h'(x)=f(x)$

$h'(x)=(e^{-x}\cdot\ln x)'=(e^{-x})'\times(\ln x)+(e^{-x})\times(\ln x)'$

$h'(x)=(-e^{-x})\times(\ln x)+(e^{-x})\times\left(\frac{1}{x}\right)=(e^{-x})\times\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)$

$h'(x)=\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)(e^{-x})=f(x)$

Donc h est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

2. Soit λ un nombre réel tel que $\lambda>3$.

a. Calculons, en cm^2 et en fonction de λ, l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (C), (OI) et les droites d'équation $x=3$ et $x=\lambda$.

Sur $|3;+\infty|,(C)$ est en dessous de (OI), donc

$A(\lambda)=-\int_3^\lambda\ (f(x)-0)dx\cdot\cup A=-\int_3^\lambda\ f(x)dx\cdot UA$

avec $UA=2\ \mathrm{cm}\times 10\ \mathrm{cm}=20\ \mathrm{cm}^2$

$A(\lambda)=-|h(x)|_3^\lambda\times 20\ \mathrm{cm}^2$ (car hest une primitive de f sur $0;+\infty$ |)
$A(\lambda)=-|h(\lambda)-h(3)|\times 20\ \mathrm{cm}^2=-\left(e^{-\lambda}\cdot\ln\lambda-e^{-3}\cdot\ln 3\right)\times 20\ \mathrm{cm}^2$
$A(\lambda)=-\left(\frac{1}{e^\lambda}\ln\lambda-\frac{1}{e^3}\ln 3\right)\times 20\ \mathrm{cm}^2=\left(\frac{\ln 3}{e^3}-\frac{\ln\lambda}{e^\lambda}\right)\times 20\ \mathrm{cm}^2$

b. Calculons $\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{\ln 3}{e^3}-\frac{\ln\lambda}{e^\lambda}\right)\times 20\ \mathrm{cm}^2=\frac{\ln 3}{e^3}\times 20\ \mathrm{cm}^2$
car $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\ln\lambda}{e^\lambda}=0$ (croissance comparéedes fonctions $\ln x ete^x$)

CORRECTION SESSION NORMALE 2010 SERIE D

EXERCICE 1

PARTIE A

1. Les racines carrées de $6+6i\sqrt{3}$

Soit $\Delta = 6+6i\sqrt{3}$

$$|\Delta| = |6+6i\sqrt{3}| = \sqrt{6^2+(6\sqrt{3})^2} = \sqrt{36+36\times 3} = \sqrt{36+108} = \sqrt{144} = \sqrt{12}$$

Soit $d = x+iy$ une racine carrée de $\Delta = 6+6i\sqrt{3}$, On a :

$$\begin{cases} x^2+y^2 = |\Delta| \\ x^2-y^2 = \mathrm{R\,e}(\Delta) \\ 2xy = \mathrm{l\,m}(\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 12 & (1) \\ x^2-y^2 = 6 & (2) \\ & 2xy = 6\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 & (1)+(2) \\ 2y^2 = 6 & (1)-(2) \\ & xy = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 3 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ou } x = -3 \\ y = \sqrt{3} \text{ ou } y = -\sqrt{3} \\ x \text{ et } y \text{ sont de même signe} \end{cases}$$

On en déduit que les racines carrées de $\Delta = 6+6i\sqrt{3}$ sont:

$d = 3+\sqrt{3}i$ et $d' = -3-\sqrt{3}i$

2. Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4=0$.

$$\Delta = (1+3i\sqrt{3})^2 - 4\times 2\times(-4) = 1+2\times 1\times(3i\sqrt{3})+(3i\sqrt{3})^2+32$$
$$\Delta = 1+6i\sqrt{3}-27+32 = 6+6i\sqrt{3}$$

Les racines carrées de $\Delta = 6+6i\sqrt{3}$ sont $d = 3+\sqrt{3}$ iet $d' = -3-\sqrt{3}i$ (voir 1.)

$$z_1 = \frac{-b-d}{2a} = \frac{(1+3i\sqrt{3})-3-\sqrt{3}i}{2\times 2} = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{4} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_2 = \frac{-b+d}{2a} = \frac{(1+3i\sqrt{3})+3+\sqrt{3}i}{2\times 2} = \frac{4+4\sqrt{3}i}{4} = 1+\sqrt{3}i$$
$$S_{\mathbb{C}} = \left\{1+\sqrt{3}i; -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

3.a. Développons, réduisons et ordonnons : $(2z+1)\left[2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4\right]$

$$\begin{aligned}(2z+1)\left[2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4\right] &= 4z^3-2(1+3i\sqrt{3})z^2-8z+2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4 \\ &= 4z^3-2(1+3i\sqrt{3}-1)z^2-(8+1+3i\sqrt{3})z-4 \\ &= 4z^3-2(3i\sqrt{3})z^2-(9+3i\sqrt{3})z-4 \\ &= 4z^3-6i\sqrt{3}z^2-3(3+i\sqrt{3})z-4\end{aligned}$$

b. En déduisons les solutions de (E).

$$4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4 = 0 \Leftrightarrow (2z+1) \mid \left[z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow 2z + 1 = 0 \text{ ou } 2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} \text{ ou } 2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$$
$$z_0 = -\frac{1}{2}; z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; z_2 = 1 + \sqrt{3}i$$
$$S_{\mathbb{C}} = \left\{-\frac{1}{2}; 1 + \sqrt{3}i; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

4. Expression de $z_0; z_1$ et z_2 sous forme trigonométrique

$$\cdot\, z_0 = -\frac{1}{2}$$
$$|z_0| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\arg(z_0) = \arg\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi$$
$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$|z_1| = \left|\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)\right| = \left|\frac{1}{2}\right| \times |-1 + \sqrt{3}i| = \left|\frac{1}{2}\right| \times \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{4} = \frac{2}{2} = 1$$

Soit $\theta = \arg(z_1)$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$z_1 = 1 \times \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

- $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

$$|z_2| = |1 + \sqrt{3}| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

Soit $\theta' = \arg(z_1)$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta' = \frac{1}{2} \\ \sin\theta' = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \theta' = \frac{\pi}{3}$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

PARTIE B

S similitude directe de centre O , d'angle $\theta = -\frac{\pi}{3}$ et de rapport $k = 2$.

1. a. Ecriture complexe de S.

$z' = az + b$

$$a = ke^{i\theta} = 2e^{i\left|\frac{-\pi}{3}\right|} = 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 1 - \sqrt{3}i$$

$$\omega = \frac{b}{1-a} \Rightarrow b = \omega(1-a) = 0 \times (1-a) = 0$$

$z' = (1-\sqrt{3}i)z$

b. Justifions que $S(M_0) = M_1$ et $S(M_1) = M_2$

- $z_0' = (1-\sqrt{3}i)z_0 = (1-\sqrt{3}i)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = z_1$

$z_0' = z_1 \Rightarrow S(M_0) = M_1$

- $z_1{}' = (1-\sqrt{3}i)z_1 = (1-\sqrt{3}i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2}$

$$z_1' = \frac{2}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{2}i = 1 + \sqrt{3}i = z_2$$

$z_1' = z_2 \Rightarrow S(M_1) = M_2$

2. Justifions que $Z_{n+1} = (1-\sqrt{3}i)z_n$

$M_{n+1} = S(M_n) \Leftrightarrow z_{n+1} = f(z_n) \Leftrightarrow z_{n+1} = (1-\sqrt{3}i)z_n$

3. Soit (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = |z_n|$

a. Démontrons que (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

$U_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1-\sqrt{3}i)z_n| = |1-\sqrt{3}i||z_n| = \sqrt{4} \times |z_n| = 2 \times |z_n| = 2 \times U_n$ $U_{n+1} = 2 \times U_n \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = 2$

Donc (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $U_0 = |z_0| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

b. Justifions que la distance $OM_{12} = 2048$

$OM_{12} = |z_{M_{12}} - z_O| = |z_{M_{12}}| = |z_{12}| = U_{12}$

Or $U_n = U_0 q^n = \frac{1}{2} \times 2^n$ car (U_n) est une suite géométrique $U_{12} = \frac{1}{2} \times 2^{12} = \frac{1}{2} \times 4096 = 2048$

Donc $OM_{12} = U_{12} = 2048$.

EXERCICE 2

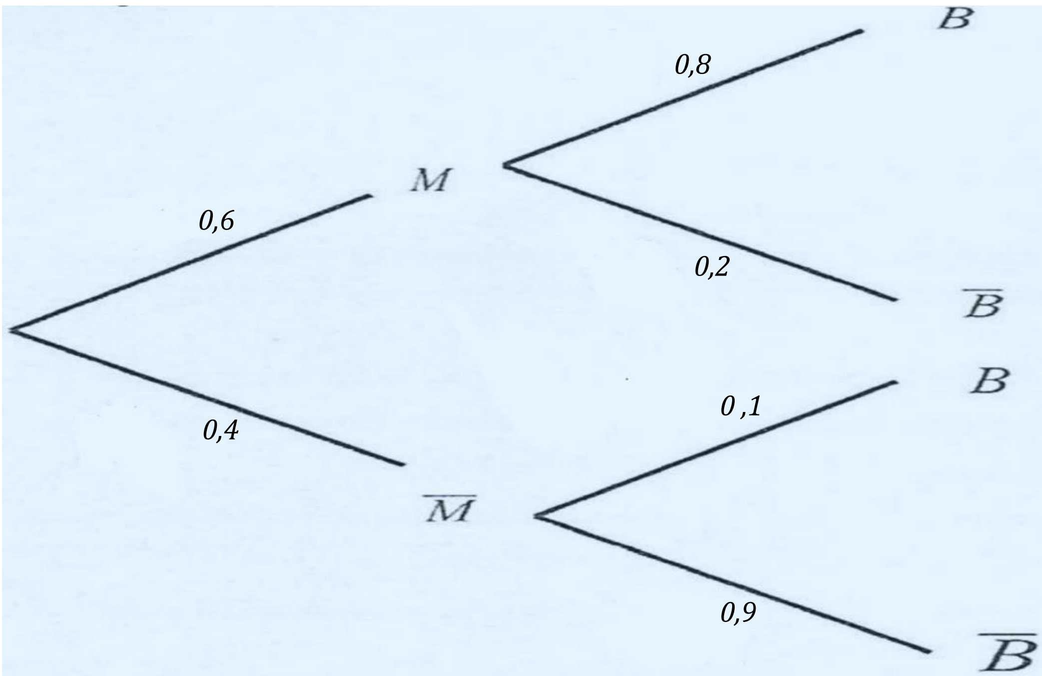
M: Prise du médicament

$\bar{M}$: Pas de prise du médicament

B: Baisse du taux de glycémie

$\bar{B}$: Pas de baisse du taux de glycémie

Arbre de probabilité



1. La probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament : $P_M(B) = 0{,}8$

2. Démontrons que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est 0,52 .

$$\begin{aligned} P(B) &= P(M \cap B) + P(M \cap B) \\ &= P(M) \times P_M(B) + P(M) \times P_M(B) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}52 \end{aligned}$$
$$P(B) = 0{,}52$$

3. Probabilité que l'individu ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie.

$$P_B(M) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} = \frac{P(M) \times P_M(B)}{P(B)} = \frac{0{,}6 \times 0{,}8}{0{,}52}$$

$$P_B(M) = 0{,}93$$

4. Soit p la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie :

$p = 0{,}52;\ q = 1 - p = 0{,}48.$

Le contrôle sur un individu conduit à 2 éventualités :

- une baisse du taux de glycémie de probabilité $p = 0{,}52$
- ou une absence de baisse du taux de glycémie de probabilité $q = 0{,}48$.

C' est donc une épreuve de Bernoulli.

On répète 5 fois cette épreuve.

On calculera les probabilités à l'aide de la loi binomiale $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

a. La probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé : $P(X = 2) = C_5^2 p^2 q^3 = 10 \times (0{,}52)^2 \times (0{,}48)^3 = 0{,}299$

b. La probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_5^0 p^0 q^5 = 1 - q^5 = 1 - (0{,}48)^5 = 0{,}975$

5. Déterminons n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieur à 0,98 .

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_n^0 p^0 q^n = 1 - q^n = 1 - (0{,}48)^n$
$P(X \geq 1) > 0{,}98 \Leftrightarrow 1 - (0{,}48)^n > 0{,}98 \Leftrightarrow -(0{,}48)^n > 0{,}98 - 1$
$\Leftrightarrow -(0{,}48)^n > -0{,}02 \Leftrightarrow (0{,}48)^n < 0{,}02$
$\Leftrightarrow \ln(0{,}48)^n < \ln(0{,}02) \Leftrightarrow n\ln(0{,}48) < \ln(0{,}02)$
$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}48)} \Leftrightarrow n > 5{,}33$
$P(X \geq 1) > 0{,}98 \Leftrightarrow n = 6$

PROBLEME
PARTIE A

1. a. Justifions que $\forall x \in]0; +\infty[,\ g'(x) = 1 + \ln x$

$$g'(x) = (1 + x\ln x)' = (x\ln x)' = (x)' \times (\ln x) + x \times (\ln x)' = 1 \times (\ln x) + x \times \frac{1}{x}$$

$g'(x) = \ln x + 1 = 1 + \ln x$

b. Etude des variations puis tableau de variation de g

$g'(x) = 1 + \ln x.$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\mathrm{e}}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

$\forall x \in \left]0;\frac{1}{e}\right[$, $g'(x) < 0$

$\forall x \in \left]\frac{1}{e};+\infty\right[$, $g'(x) > 0$

On en déduit : $\begin{cases} \text{Sur } \left]0;\frac{1}{e}\right[, g \text{ est strictement décroissante.} \\ \text{Sur } \left]\frac{1}{e};+\infty\right[, g \text{ est strictement croissante.} \end{cases}$

Tableau de variation

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\frac{e-1}{e}$	$\nearrow$	

2. g admet sur $]0;+\infty[$, , $\frac{e-1}{e} > 0$ comme minimum absolu

Donc $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) > 0$

PARTIE B

$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{x}{1 + x\ln x} \end{cases}$

1. a. Etude de la continuité de f en 0

$f(0) = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+x\ln x} = \frac{0}{1+0} = 0$ car $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$

$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) \Rightarrow f$ est continue en 0 .

b. Etude de la dérivabilité de f en 0

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x}{1+x\ln x}-0}{x}=\frac{x}{1+x\ln x}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{1+x\ln x}$$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x\ln x}=1$ car $\lim_{x\to 0}x\ln x=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe et est finie donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=1$

c. Tangente au point d'abscisse 0

$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)=1\times(x-0)+0$

$(T): y=x$

d. Position relative de (C) et (T)

$f(x)-x=\frac{x}{1+x\ln x}-x=\frac{x-x-x^2\ln x}{1+x\ln x}=\frac{-x^2\ln x}{1+x\ln x}=\frac{x^2}{1+x\ln x}\times(-\ln x)$ $\forall x\in\,]0;+\infty[, g(x)=1+x\ln x>0$ et $x^2>0$

Donc le signe de $f(x)-x$ dépenddusignede $(-\ln x)$

$f(x)-x>0 \Leftrightarrow -\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<0 \Leftrightarrow x<e^0 \Leftrightarrow x<1$

On en déduit :

Sur $]0;1[$, (C) est au dessus de (T).

Sur $]1;+\infty[, (C)$ est en dessous de (T).

2. Démontrons que (OI) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

$$f(x)=\frac{x}{1+x\ln x}=\frac{x}{x\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)}=\frac{1}{\frac{1}{x}+\ln x}=0$$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+\ln x}=0$ car $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0\Rightarrow(OI): y=0$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

3.a. Démontrons que : $f'(x)=\frac{1-x}{(1+x\ln x)^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{x}{1+x\ln x}\right)'=\frac{(x)'\times(1+x\ln x)-(x)\times(1+x\ln x)'}{(1+x\ln x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1\times(1+x\ln x)-(x)\times\left(0+1x\ln x+x\times\frac{1}{x}\right)}{(1+x\ln x)^2}=\frac{1+x\ln x-x\times(\ln x+1)}{(1+x\ln x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1+x\ln x-x-x\ln x}{(1+x\ln x)^2}=\frac{1-x}{(1+x\ln x)^2}$$

b. Etude des variations puis tableau de variation de f

$$f'(x) = \frac{1-x}{(1+x\ln x)^2}$$

$(1+x\ln x)^2 > 0 \Rightarrow$ le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		+	0	-	

$\forall x \in]0;1[,\ f'(x) > 0$ et $\forall x \in]1;+\infty[,\ f'(x) < 0$

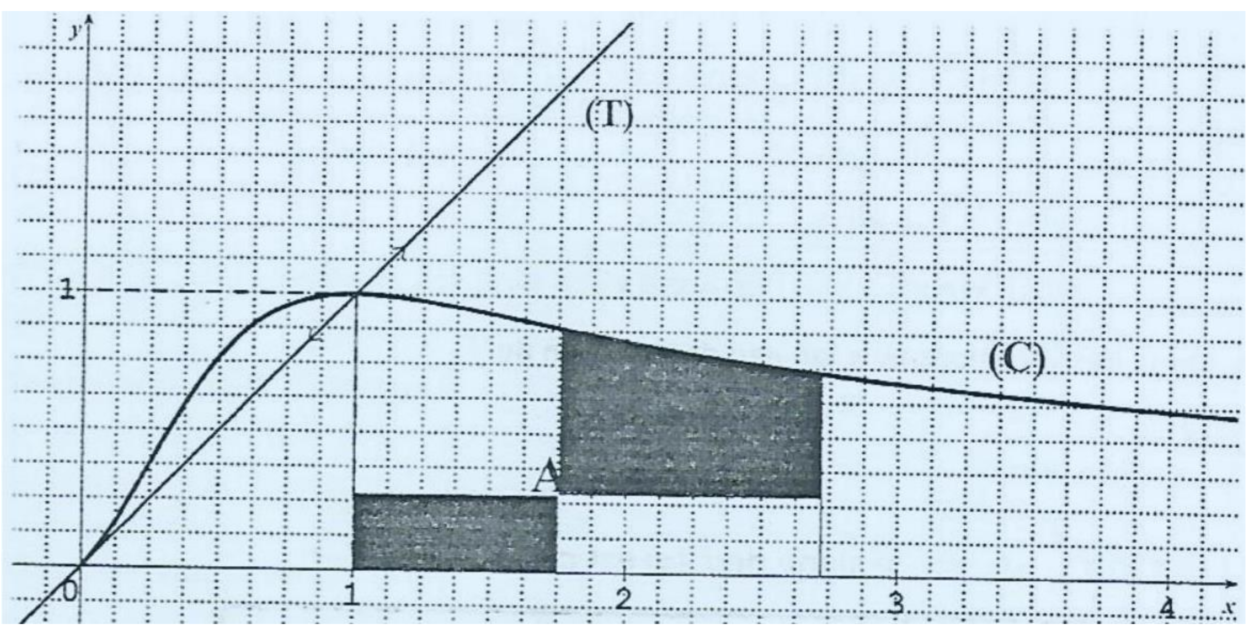
On en déduit :

Sur $]0;1[$, f est strictement croissante.   Sur $]1;+\infty[, f$ est strictement décroissante.

Tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

4. Construction de la droite (T) et de la courbe (C) dans le plan muni du repère $(0,1,J)$



PARTIE C

1.a. Justifions que : $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) \leq 1$

f admet sur $]0;+\infty$ [,1 comme maximum absolu et $f(1) = 1$.

Donc $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) \leq 1$

b. Démontrons que : $\forall x \in [1;e], 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$

$x \in [1;e] \Leftrightarrow 1 \leq x \leq e \Leftrightarrow \ln 1 \leq \ln x \leq \ln e \text{car} \, x \mapsto \ln x$ est strictement croissante

$$\Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x\ln x \leq x \Leftrightarrow 1 + x\ln x \leq 1 + x$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+x\ln x} \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} \leq \frac{x}{1+x\ln x} \Leftrightarrow \frac{1+x-1}{1+x} \leq \frac{x}{1+x\ln x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} \leq \frac{x}{1+x\ln x} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1+x} \leq \frac{x}{1+x\ln x}$$
$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$$

2. A est l'aire de la partie du plan limitée par $(C), (OI)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Démontrons que : $16(e-1) + 16\ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e-1)$

$A = \int_1^e (f(x) - 0)dx \times \text{U} A = \int_1^e f(x)dx \times \text{U} A = \int_1^e \frac{x}{1 + x\ln x}dx \times \text{U} A$

$UA = 4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$

On a montré:

en 1.a. que $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) \leq 1$

en $1.b.$ que $\forall x \in [1;e], 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$

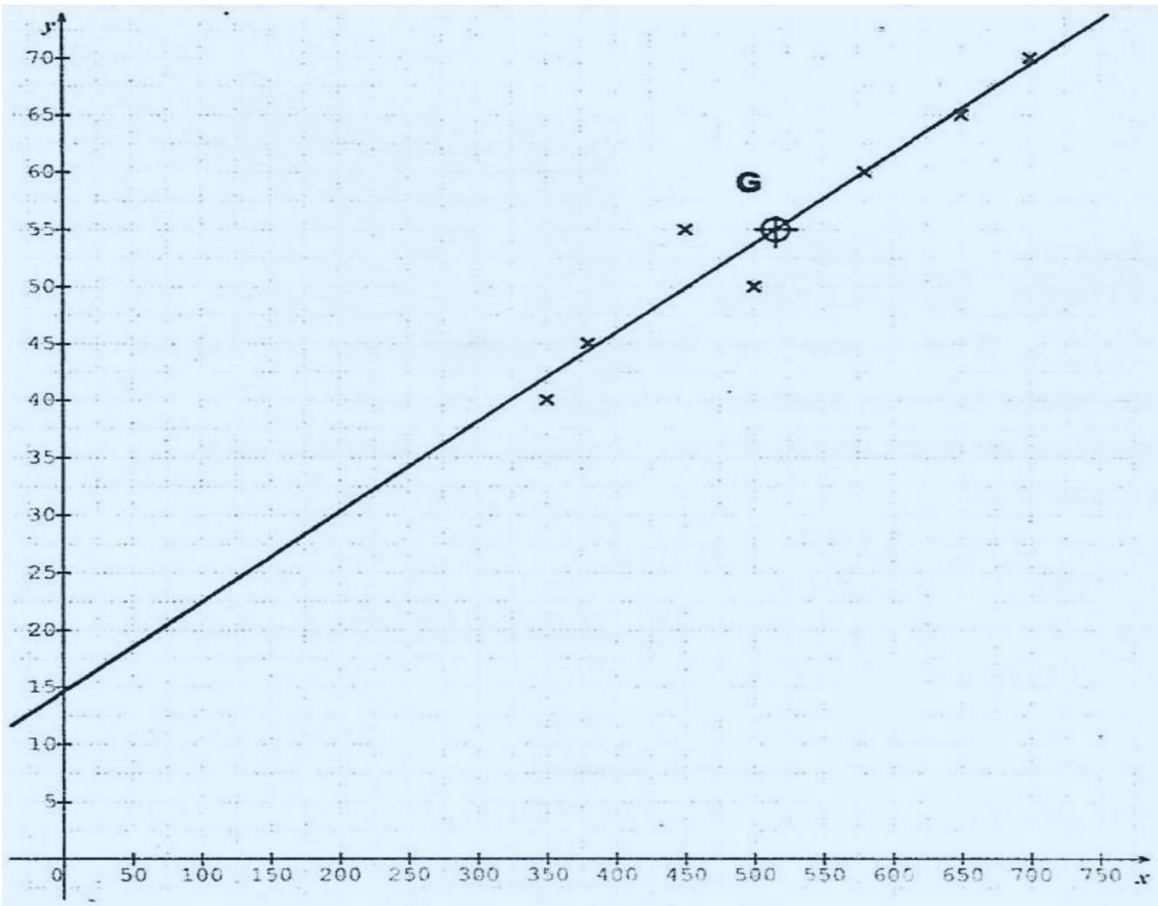
Donc $\forall x \in [1;e], 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x) \leq 1$

$$1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \int_1^e \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx \leq \int_1^e f(x)dx \leq \int_1^e 1dx$$
$$\Leftrightarrow \int_1^e \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx \times UA \leq \int_1^e f(x)dx \times UA \leq \int_1^e 1dx \times UA$$
$$\Leftrightarrow [x - \ln|1+x|]_1^e \times 16 \leq A \leq| [x]_1^e \times 16$$
$$\Leftrightarrow 16[e - \ln|1+e| - (1 - \ln|1+1)] \leq A \leq (e-1) \times 16$$
$$\Leftrightarrow 16(e - \ln(1+e) - 1 + \ln 2 | \leq A \leq 16(e-1) \cdot$$
$$\Leftrightarrow 16\left[e - 1 + \ln\frac{2}{1+e}\right] \leq A \leq 16(e-1)$$
$$\Leftrightarrow 16(e-1) + 16\ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e-1)$$

CORRECTION SESSION NORMALE 2009 SERIE D

EXERCICE 1

1. Représentation graphique du nuage de points associé à la série double (X, Y).



2. a. Calcul de $\bar{X}$ le chiffre d'affaires moyen.

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{N} = \frac{350 + 380 + 500 + 450 + 580 + 650 + 700}{7} = \frac{3610}{7} = 515{,}714$$

b. Calcul de $\bar{Y}$ le coût moyen de production.

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{N} = \frac{40 + 45 + 50 + 55 + 60 + 65 + 70}{7} = \frac{385}{7} = 55$$

3. a. Vérifions qu'un arrondi à l'entier de $\operatorname{cov}(X, Y)$ est égal à 1193.

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{\sum\ Y_i \cdot X_i}{N} \bar{X} \cdot \bar{Y}$$
$$= \frac{350 \times 40 + 380 \times 45 + 500 \times 50 + 450 \times 55 + 580 \times 60 + 650 \times 65 + 700 \times 70}{7} - 515{,}714 \times 55$$

$$\operatorname{cov}(X, Y) = 1192{,}86 \simeq 1193$$

b. Justifions l'existence d'un ajustement linéaire entre X et Y.

$$r = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)\cdot V(Y)}}$$

$$V(X) = \frac{\sum X_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{350^2 + 380^2 + 500^2 + 450^2 + 580^2 + 650^2 + 700^2}{7} - 515,714^2$$

$$V(X) = 15224{,}6$$

$$V(Y) = \frac{\sum Y_j^2}{N} - \bar{Y}^2 = \frac{40^2 + 45^2 + 50^2 + 55^2 + 60^2 + 65^2 + 70^2}{7} - 55^2$$

$$V(Y) = 100$$

$$r = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)\cdot V(Y)}} = \frac{1193}{\sqrt{15224{,}6 \times 100}} = 0{,}967$$

$0{,}87 \leq |r| \leq 1$: il existe alors une forte corrélation linéaire entre les variables X et Y. L'on peut donc faire un ajustement linéaire entre X et Y.

4. a. Equation de la droite (D) d'ajustement de Y en fonction de X.

$$(D): y = ax + b$$

$$a = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(X)} = \frac{1193}{15224{,}6} = 0{,}078$$

$$\bar{y} = a\bar{x} + b \Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x} = 55 - 0{,}078 \times 515{,}714 = 14{,}593$$

$$(D): y = 0{,}078x + 14{,}593$$

b. Construction de (D) (voir repère ci dessus).

((D) passe par le point moyen $(515{,}714; 55)$)

Tableau de valeurs

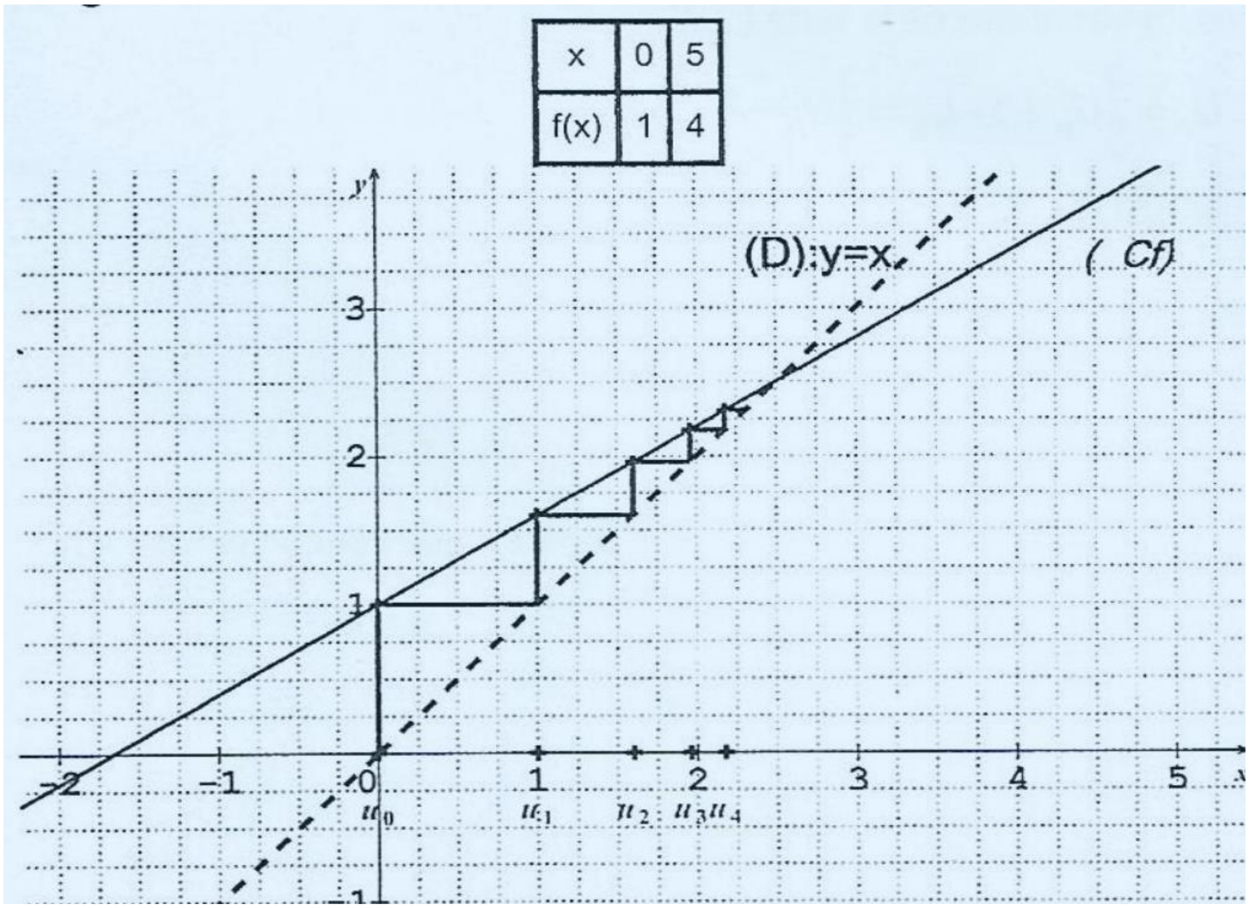
X	515,714	0
Y	55	14,593

5. Coût de production Y de l'entreprise Ivoirbois de l'année 2007 si le chiffre d'affaires de l'année 2007 est de $X = 800$ millions de francs.

$y = 0{,}078 \times 800 + 14{,}593 = 76{,}993$ millions

EXERCICE 2

1. Représentation sur l'axe des abscisses des termes $U_0; U_1; U_2$ et U_3. $U_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1$ on en déduit: $f(x) = \frac{3}{5}x + 1$



2. a. Démontrons par récurrence que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{5}{2}$. $U_0 = 0 < \frac{5}{2}$ donc U_0 est majorée par $\frac{5}{2}$: la propriété est vraie à l'ordre 0. Supposons que pour tout k élément de $\mathbb{N}, U_k$ est majorée par $\frac{5}{2}$ On a: $U_k < \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3}{5}U_k < \frac{3}{5}\times\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3}{5}U_k < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{5}U_k + 1 < \frac{3}{2} + 1 \Rightarrow \frac{3}{5}U_k + 1 < \frac{5}{2} \Rightarrow U_{k+1} < \frac{5}{2}$ donc U_{k+1} est également majorée par $\frac{5}{2}$.

Finalement, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}, (U_n)$ est majorée par $\frac{5}{2}$

b. Démontrons que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(U_n) est majorée par $\frac{5}{2}$ donc (U_n) converge si est elle croissante.

Etudions les variations de la suite (U_n).

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3}{5}U_n + 1 - U_n = \frac{3}{5}U_n + 1 - \frac{5}{5}U_n = \frac{-2}{5}U_n + 1$$
$$U_n < \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{-2}{5}U_n > \frac{-2}{5}\times\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{-2}{5}U_n > -1 \Rightarrow \frac{-2}{5}U_n + 1 > -1 + 1 \Rightarrow \frac{-2}{5}U_n + 1 > 0$$

Donc $U_{n+1} - U_n > 0$; par suite (U_n) est croissante.

(U_n) est croissante et majorée donc elle converge.

3. Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - \frac{5}{2}$

a. Démontrons que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géometrique dont on précisera la raison et le premier terme.

$$V_n = U_n - \frac{5}{2} \Rightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - \frac{5}{2}$$
$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1 - \frac{5}{2} \text{car } U_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1$$
$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{3}{5}U_n - \frac{3}{2} = \frac{3}{5}\left(U_n - \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{5}V_n \Rightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{3}{5}$$

$\Rightarrow (V_n)$ est une suite géometrique de raison $q = \frac{3}{5}$ et de premier terme $V_0 = \frac{-5}{2}$ b. Exprimons V_n puis U_n en fonction de n.

(V_n) est une suite géometrique de raison $q = \frac{3}{5}$ et de premier terme $V_0 = \frac{-5}{2}$

$\Rightarrow V_n = V_0 q^n \Rightarrow V_n = \frac{-5}{2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$
$V_n = U_n - \frac{5}{2} \Rightarrow U_n = \frac{5}{2} + V_n$

$\Rightarrow U_n = \frac{5}{2} + \left|\frac{-5}{2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \Rightarrow U_n = \frac{5}{2}\right| - \left(\frac{3}{5}\right)^n \Big|$

c. Déterminons la limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(V_n) est une suite géometrique de raison $q = \frac{3}{5}$.

$-1 < q < 1 \Rightarrow \lim V_n = 0$

or $U_n = \frac{5}{2} + V_n \Rightarrow \lim U_n = \frac{5}{2} + \lim V_n$

Donc $\lim U_n = \frac{5}{2} + 0 = \frac{5}{2}$

PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par: $g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1$

1. a. Justifions que la limite de g en $+\infty$ est -1 .

On pose $X = 1 - X$

Quand x tend vers $+\infty$; X tend vers $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^X - 1 = -1 \; (\text{car}_{x\to-\infty} \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0)$

b. Déterminons la limite de g en $-\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

car $\lim_{x\to-\infty} 1-x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{1-x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$

2. a. Démontrons que, pour tout x élément de $\mathbb{R}, g'(x) = (x-2)e^{1-x}$.

$g'(x) = [(1-x)e^{1-x} - 1]' = (1-x)'e^{1-x} + (1-x)(e^{1-x})' - 1'$

$g'(x) = -e^{1-x} + (1-x)(-e^{1-x}) = (1+1-x)(-e^{1-x}) = (2-x)(-e^{1-x})$

$g'(x) = (x-2)e^{1-x}$

b. Etudions les variations de g et dressons son tableau de variation.

$g'(x) = (x-2)e^{1-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{1-x} > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est le même que celui de $(x-2)$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

On en déduit que:

· $\forall x \in]-\infty; 2[, g'(x) < 0$. Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$

· $\forall x \in]2; +\infty[, g'(x) > 0$. Donc g est strictement croissante sur $]2; +\infty[$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		2		$+\infty$
g '(x)		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-(e^{-1}+1)$	$\nearrow$	-1

3. a. Démontrons que l'équation $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une solution unique α.

- g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$

$g(]-\infty; 2[) =]-(e^{-1}-1); +\infty[$ or $0 \in]-(e^{-1}-1); +\infty[$

donc l'équation $\mathrm{g}(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]-\infty; 2[$

· $\forall x \in]2; +\infty[, g(x) < -1 < 0$.

Donc l'équation $\mathrm{g(x)} = 0$ n'admet pas de solution sur $|2; +\infty|$

Finalement, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

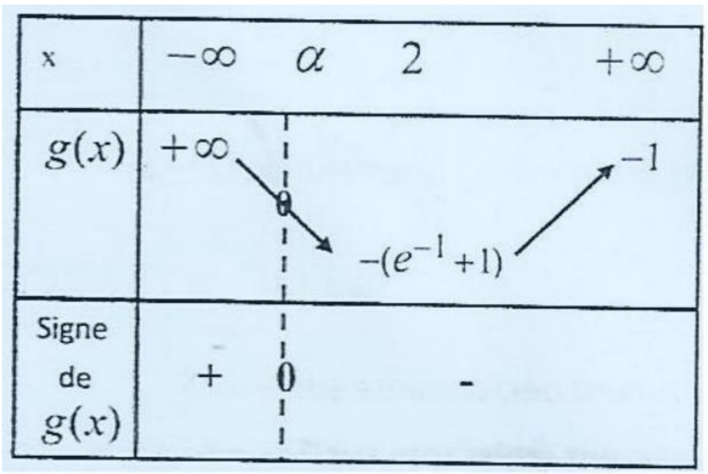
b. Justifions que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$

et en particulier sur 0,$4; 0{,}5$

$\left.\begin{array}{l} g(0{,}4) = 0{,}04 \\ g(0{,}5) = -0{,}1 \end{array}\right\}$ $g(0{,}4) \times g(0{,}5) < 0$ donc $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

5. Signe de $g(x)$



On déduit du tableau ci-contre que :

$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[,\ g(x) \in]0; +\infty[\ \ donc\ \ g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[,\ g(x) \in]-(e^{-1}+1); 0[\ \ donc\ \ g(x) < 0 \end{cases}$

PARTIE B

1. Déterminons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$f(x) = xe^{1-x} - x + 2 = x\left(e^{1-x} - 1 + \frac{2}{x}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

car $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty; \lim_{x\to+\infty} e^{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e}{e^x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} -1 + \frac{2}{x} = -1$

$f(x) = xe^{1-x} - x + 2 = x\left(e^{1-x} - 1 + \frac{2}{x}\right)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

car $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty; \lim_{x\to-\infty} e^{1-x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} -1 + \frac{2}{x} = -1$

2. a. Démontrons que f est une primitive de g.

$f'(x) = [xe^{1-x} - x + 2]' = (xe^{1-x})' + (-x+2)'$

$f'(x) = (x)'e^{1-x} + x(e^{1-x})' + (-x+2)' = e^{1-x} + x(-e^{1-x}) - 1$

$f'(x) = (1-x)e^{1-x} - 1 = g(x)$

$f'(x) = g(x)$ donc f est une primitive de g

b. Etudions les variations de f et dressons son tableau de variation.

$f'(x) = g(x)$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de g

or $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0; \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, f'(x) > 0 \text{ donc } f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty; \alpha[; \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) < 0 \text{ donc } f \text{ est strictement décroissante sur }]\alpha; +\infty[\end{cases}$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

3. a. Démontrons que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

$f(x) - (-x+2) = (xe^{1-x} - x + 2) - (-x+2) = xe^{1-x}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (-x+2) = \lim_{x\to+\infty} xe^{1-x} = \lim_{x\to+\infty} e\dfrac{x}{e^x} = 0$

donc la droite d'équation (D): $y = -x + 2$ est asymptote à (C) en $+\infty$

b. Etudions la position relative de (D) et (C).

$f(x) - (-x+2) = xe^{1-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{1-x} > 0$ donc le signe de $f(x) - (-x+2)$ est le même que celui de x $f(x) - (-x+2) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ donc (C) est au dessus de (D) sur $]0; +\infty[$ $f(x) - (-x+2) < 0 \Leftrightarrow x < 0$ donc (C) est en dessous de (D) sur $-\infty; 0$

4. Démontrons que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ). $\frac{f(x)}{x} = \frac{xe^{1-x}-x+2}{x} = \frac{x\left(e^{1-x}-1+\frac{2}{x}\right)}{x} = e^{1-x} - 1 + \frac{2}{x}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{car}_{x\to-\infty} \lim e^{1-x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} -1 + \frac{2}{x} = -15.$ donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe (OJ) en $-\infty$.

Déterminons une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 .

$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f'(1) = g(1) = (1-1)e^{1-1} - 1 = -1$ et $f(1) = (1)e^{1-1} - 1 + 2 = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2$

$(T): y = -1 \times (x-1) + 2 = -x + 3$

6. Démontrons que $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$

$f(\alpha) = \alpha e^{1-\alpha} - \alpha + 2$

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (1-\alpha)e^{1-\alpha} - 1 = 0 \Leftrightarrow (1-\alpha)e^{1-\alpha} = 1 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

d'où: $f(\alpha) = \alpha \times \frac{1}{1-\alpha} - \alpha + 2 = \frac{\alpha+(1-\alpha)(-\alpha+2)}{1-\alpha} = \frac{\alpha-\alpha+2+\alpha^2-2\alpha}{1-\alpha}$

$$= \frac{2+\alpha^2-2\alpha}{1-\alpha} = \frac{1+\alpha^2-2\alpha+1}{1-\alpha} = \frac{(1-\alpha)^2+1}{1-\alpha}$$

donc $f(\alpha) = \frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$

7. Justifions que pour tout nombre réel $x, f(-x+2) = e^{x-1}f(x)$

$f(x) = xe^{1-x} - x + 2$

$f(-x+2) = (-x+2)e^{1-|-x+2} - (-x+2) + 2 = (-x+2)e^{1+x-2} + x - 2 + 2$

$$f(-x+2) = (-x+2)e^{-1+x} + x = e^{-1+x}(-x+2) + \frac{x}{e^{-1+x}}]$$

$f(-x+2) = e^{x-1}|x + 2 + xe^{1-x}| = e^{x-1}|xe^{1-x}\ x + 2| = e^{x-1}f(x)$

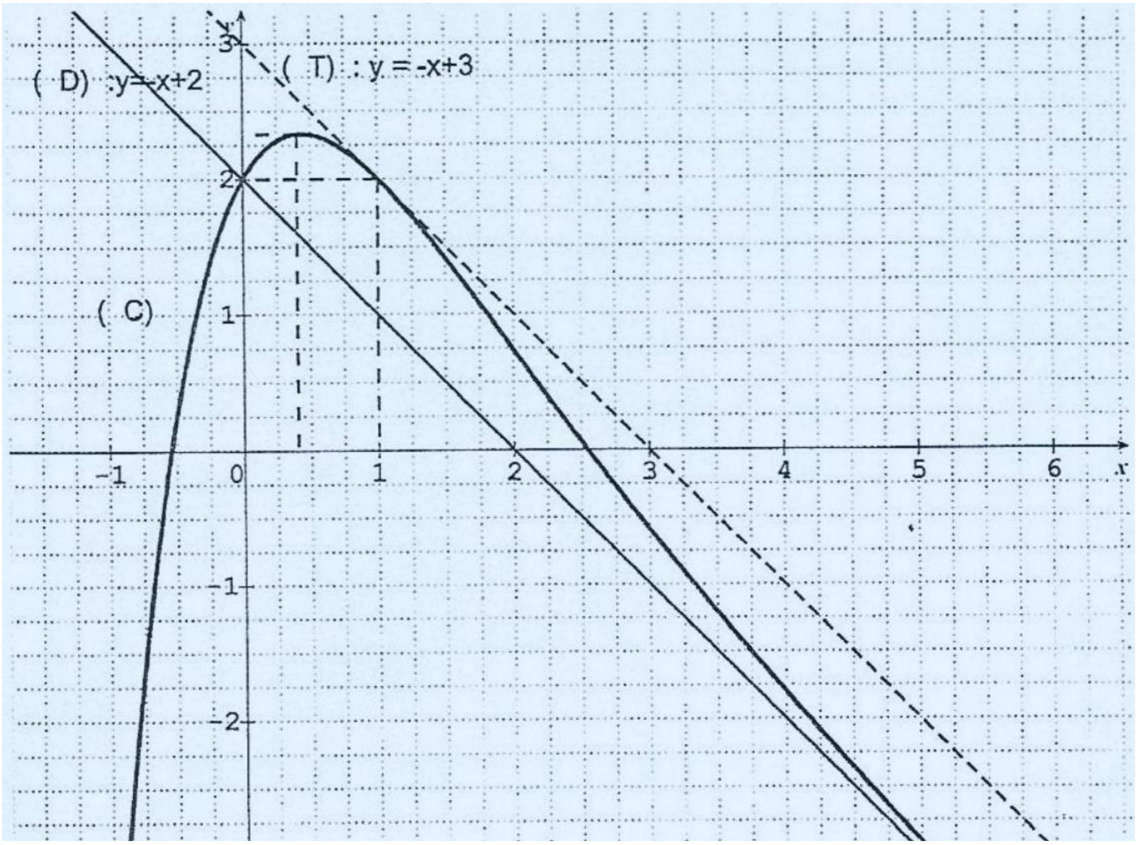
$\Rightarrow f(-x+2) = e^{x-1}f(x)$

8. Démontrons que si β est l'une des solutions de l'équation $f(x) = 0$ alors $-\beta + 2$ est l'autre solution.

On sait que: $f(-x+2) = e^{x-1}f(x)$

β est solution de $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(\beta) = 0 \Leftrightarrow e^{\beta-1}f(\beta) = 0 \Leftrightarrow f(-\beta+2) = 0 \Leftrightarrow -\beta + 2$ est solution de $f(x) = 0$

9. Construction de (D), (T) et (C). (On prendra $\alpha = 0{,}4$ et $= 2{,}5$).



PARTIE C

1. Calcul de $A(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.

$f(x) - (-x+2) = xe^{1-x}$

$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} [f(x) - (-x+2)]dx \times \text{U}\,A$

$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} [xe^{1-x})dx \times \text{U}\,A$

On pose:

$u(x) = x\; u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{1-x}\; v(x) = -e^{1-x}$

$\int_0^{\lambda} (xe^{1-x})dx = [-xe^{1-x}]_0^{\lambda} - \int_0^{\lambda} (-e^{1-x})dx$

$= [-xe^{1-x}]_0^{\lambda} - [e^{1-x}]_0^{\lambda} = [-xe^{1-x} - e^{1-x}]_0^{\lambda}$

$= [(-x-1)e^{1-x}]_0^{\lambda}[= \left[(-\lambda-1)e^{1-\lambda}\right] - [(-0-1)e^{1-0}]$

$= (-\lambda-1)e^{1-\lambda} + e$

$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} (xe^{1-x})dx \times UA$

$A(\lambda) = \left[(-\lambda-1)e^{1-\lambda} + e\right] \times UA$ avec $UA = 2\text{ cm} \times 2\text{ cm} = 4\text{ cm}^2$

$A(\lambda) = \left[(-\lambda-1)e^{1-\lambda} + e\right] \times 4\text{ cm}^2$

2. Déterminons la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

$$A(\lambda) = \left[(-\lambda - 1)e^{1-\lambda} + e\right] \times UA = \left[(-\lambda - 1)e^{-\lambda} \times e + e\right] \times UA$$
$$A(\lambda) = e \times \left[(-\lambda - 1)e^{-\lambda} + 1\right] \times UA = e \times \left[-\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1\right] \times UA$$

$\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = e \times UA = e \times 4 \text{ cm}^2 = 4e \text{ cm}^2 = 10{,}872 \text{ cm}^2$

Car $\begin{cases} \lim_{\lambda \to +\infty} - \lambda e^{-\lambda} = \lim_{\lambda \to -\infty} X e^{X} \\ \lim_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda} = \lim_{\lambda \to -\infty} e^{X} = 0 \end{cases}$

CORRECTION SESSION NORMALE 2008 SERIE D

EXERCICE 1

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Soit l'équation $(E): Z \in \mathbb{C}, z^3 + (6-5i)Z^2 + (1-20i)Z - 14 - 5i = 0$

1. a. Vérifions que i est une solution de l'équation (E).

$i^3 + (6-5i)i^2 + (1-20i)i - 14 - 5i = -20 + 20 = 0$

i est une solution de l'équation ((E).

b. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 + (6-4i)Z + 5 - 14i = 0$

$\Delta = (6-4i)^2 - 4(5-14i) = 8i$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 2y^2 = 8 \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 4 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ou } x = -2 \\ y = 2 \text{ ou } y = -2 \\ xy > 0 \end{cases}$$

$d = 2 + 2i$ ou $d' = -2 - 2i$

$$x_1 = \frac{-6 + 4i + 2 + 2i}{2} = \frac{-4 + 6i}{2} = -2 + 3i$$

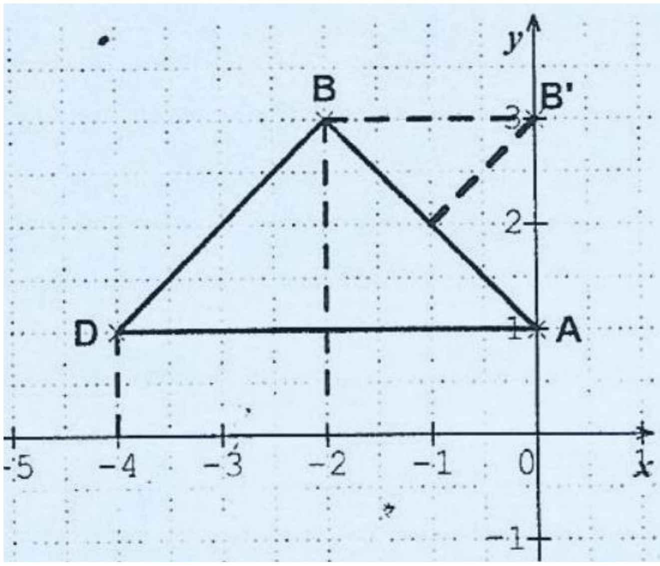
$$x_2 = \frac{-6 + 4i - 2 - 2i}{2} = \frac{-8 + 2i}{2} = -4 + i$$

$S_{\mathbb{C}} = \{-2 + 3i; -4 + i\}$

c. Résolvons à l'aide des questions qui précèdent l'équation (E).

$$z^3 + (6-5i)Z^2 + (1-20i)z - 14 - 5i = (z - i)(z^2 + (6-4i)Z + 5 - 14i)$$
$$S_{\mathbb{C}} = \{i; -2 + 3i; -4 + i\}$$

2. a. Plaçons les points A, B et D d'affixes $u = i; v = -2 + 3i$ et $t = -4 + i$ dans le repère.



b. Ecriture du nombre complexe $Z = \frac{u-v}{t-v}$ sous forme trigonométrique.

$$z = \frac{u - v}{t - v} = \frac{i - (-2 + 3i)}{-4 + i - (-2 + 3i)} = \frac{2 - 2i}{-2 - 2i} = \frac{1 - i}{-1 - i} = \frac{(1 - i)(-1 + i)}{(-1 - i)(-1 + i)} = \frac{2i}{2} = i$$

$$|Z| = 1 \arg Z = \frac{\pi}{2} \Rightarrow Z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

c. Déduisons que le triangle ABD est rectangle isocèle en B.

$Z = \frac{u-v}{t-v} = \frac{z_A - z_B}{z_D - z_B} = i$. Donc le triangle ABD est rectangle isocèle en B.

3. S est la similitude directe de centre A qui transforme D en B.

B' est l'image de B par S.

a. Justifions que le triangle ABB' est rectangle isocèle en B'.

$S(A) = A; S(D) = B; S(B) = B'$ donc $S(ADB) = ABB'$.

Or ADB est rectangle isocèle en B donc ABB' est rectangle isocèle en B'.

(Car toute similitude directe conserve les angles)

b. Déduisons la construction du point B' (voir figure ci-dessus).

ABB' est isocèle en B' donc B' appartient à la médiatrice de [AB].

ABB' est rectangle en B' donc B' appartient au cercle de centre le milieu de [AB].

4. a. Déterminons l'écriture complexe de S.

$S(A) = A;\ S(D) = B$
$z' = az + b$
$S(A) = A \Leftrightarrow z_A = az_A + b$
$S(D) = B \Leftrightarrow z_B = az_D + b| \Rightarrow z_A - z_B = az_A - az_D = a|z_A{}^{-z_D})$
$\Rightarrow a = \frac{z_A - z_B}{z_A - z_D} = \frac{i-(-2+3i)}{i-(-4+i)} = \frac{2-2i}{4} = \frac{1}{2}(1-i)$
$z_A = az_A + b \Leftrightarrow b = z_A - az_A = z_A(1-a)$
$\Leftrightarrow b = i\left(1 - \frac{1}{2}(1-i)\right) = i\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

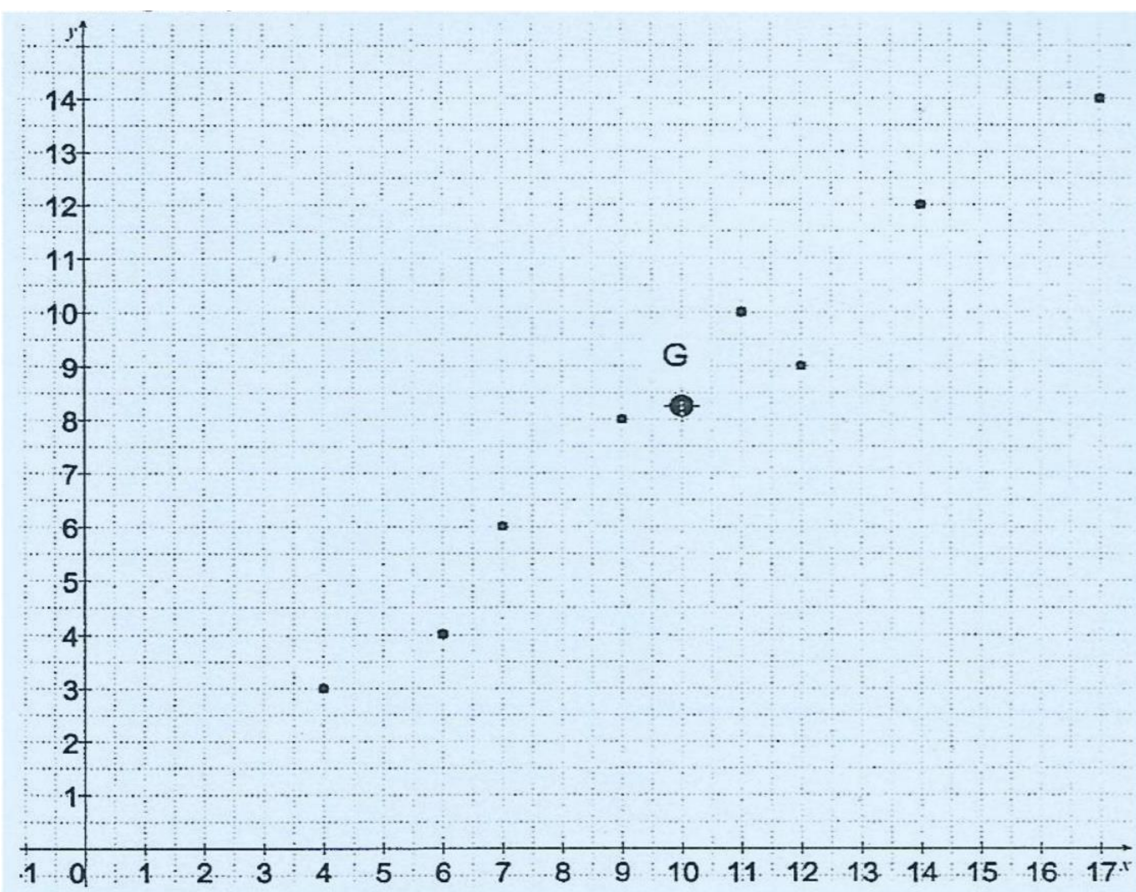
D'où $z' = \frac{1}{2}(1-i)z + \frac{1}{2}(-1+i)$

b. Calculons l'affixe de B'.

$B' = S(B) \Leftrightarrow Z_{B'} = \frac{1}{2}(1-i)Z_B + \frac{1}{2}(-1+i) = \frac{1}{2}(1-i)(-2+3i) + \frac{1}{2}(-1+i)$
$\Leftrightarrow Z_{B'} = \frac{1}{2}(-2+3i+2i+3) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1+5i) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
$\Leftrightarrow Z_{B'} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{6}{2}i = 3i$

EXERCICE 2

1. Le nuage de points associé à la série statistique.



2. Les cordonnées du point moyen G du nuage.

$$\left.\begin{array}{l} X_G = \bar{X} = \dfrac{4+6+7+9+11+14+12+17}{8} = \dfrac{80}{8} = 10 \\ Y_G = \bar{Y} = \dfrac{3+4+6+8+10+12+9+14}{8} = \dfrac{66}{8} = 8{,}25 \end{array}\right\} \Rightarrow G(10; 8{,}25)$$

3. a. Vérifions que la covariance $\operatorname{cov}(x, y)$ de la série statistique est égale à $\frac{57}{4}$

$$\operatorname{COV}(X;Y) = \sum_{i=1}^{8} x_i \times y_i - \bar{X} \times \bar{Y}$$

$$\operatorname{COV}(X;Y) = \frac{4\times3+6\times4+7\times6+9\times8+11\times10+14\times12+12\times9+17\times14}{8} - 10 \times \frac{66}{8}$$

$$\operatorname{COV}(X;Y) = \frac{774}{8} - \frac{660}{8} = \frac{114}{8} = \frac{57}{4}$$

b. Soit r le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

$$V(X) = \frac{4^2+6^2+7^2+9^2+11^2+14^2+12^2+17^2}{8} - 10^2 = \frac{33}{2} = 16{,}5$$

$$V(Y) = \frac{3^2+4^2+6^2+8^2+10^2+12^2+9^2+14^2}{8} - \left(\frac{33}{4}\right)^2 = \frac{203}{16} = 12{,}68$$

$$\operatorname{COV}(X;Y) = \frac{57}{4} = 14{,}25 \Rightarrow r = \frac{\operatorname{COV}(X;Y)}{\sqrt{V(X)\cdot V(Y)} = 0{,}98}$$

4. Déterminons une équation de la droite (D) de régression de Y en X.

$$y = ax + b \text{ avec } a = \frac{\operatorname{COV}(X;Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{Y} - a\bar{X}$$

$$a = \frac{\operatorname{COV}(X;Y)}{V(X)} = \frac{4}{33} = \frac{19}{22}$$

$$b = \bar{Y} - a\bar{X} = \frac{66}{2} - 19 \times 10 = \frac{66}{8} - \frac{190}{22} = \frac{1452-1520}{22} = -\frac{68}{176} = -17$$

$$y = ax + b = \frac{19}{22}x + \left(-\frac{17}{44}\right) \Rightarrow y = \frac{19}{22}x - \frac{17}{44}$$

5. Sur la base de cet ajustement linéaire, calculons la note probable de mathématiques d'un candidat qui a obtenu 15 sur 20 en sciences physiques.

$$y = \frac{19}{22}x - \frac{17}{44} \Rightarrow \frac{19}{22}x = y + \frac{17}{44} \Rightarrow x = \frac{22}{19}\left(y + \frac{17}{44}\right)$$

Pour $y = 15$, on obtient: $x = \frac{22}{19}\left(15 + \frac{17}{44}\right) = \frac{22}{19}\left(\frac{660+17}{44}\right) = \frac{22}{19}\left(\frac{677}{44}\right)$

Soit $X = \frac{677}{38} = 17{,}81 \simeq 18$

PROBLEME

PARTIE A

1. Les variations de g et son tableau de variation.

$$g'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x} = \frac{(2x)^2 - 1}{x} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{x} = (2x-1) \times \frac{(2x+1)}{x}$$

Sur $0; +\infty, \frac{(2x+1)}{x} > 0$ donc le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $(2x - 1)$

Or, $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

et $2x - 1 < 0 \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

On en déduit que:

$g'(x) < 0$ si $x < \frac{1}{2}$ donc g est strictement décroissante sur $\left|0; \frac{1}{2}\right|$

$g'(x) > 0$ si $x > \frac{1}{2}$ donc g est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right.$

$g'(x) = 0$ si $x = \frac{1}{2}$

Tableau de variation de g

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
g '(x)		-	0	+	
g (x)		↘	$\frac{3}{2} + \ln 2$	↗	

2. Justifions que : $\forall x \in |0; +\infty|, g(x) > 0$

Le minimum de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$ est $\frac{3}{2} + \ln 2 > 0$ donc $\forall x \in| 0; +\infty], g(x) > 0.$

PARTIE B

1. a. Calcul de la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x - 3 + \frac{\ln x}{x} = +\infty \text{car} \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} 2x - 3 = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

b. Déterminons $\lim_{x\to 0} f(x)$ puis interprétons graphiquement le résultat.

$$f(x) = 2x - 3 + \frac{\ln x}{x} = 2x - 3 + \frac{1}{x} \times \ln x$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2x - 3 + \frac{1}{x} \times \ln x = -\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x\to 0} 2x - 3 = -3 \\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \end{cases}$ $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C).

2. a. Démontrons que (D) : $y = 2x - 3$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

$f(x) - (2x - 3) = \frac{\ln x}{x}$

$\lim_{x\to +\infty} |f(x) - (2x - 3)| = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Donc la droite (D) d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote oblique à (C). b. Position relative de (C) par rapport à (D).

$f(x) - (2x - 3) = \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x$

Sur $]0; +\infty[\Big| , \frac{1}{x} > 0$ donc le signe de $[f(x) - (2x - 3)]$ dépend de celui de $\ln x$ Or, $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

et $\ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$

On en déduit que:

$[f(x) - (2x - 3)] < 0$ si $x < 1$ donc (C) est en dessous de (D) sur $]0; 1[$.

$[f(x) - (2x - 3)] > 0$ si $x > 1$ donc (C) est au dessus de (D) sur $]1; +\infty[$

$f(x) - (2x - 3)$ |= 0 si $x = 1$ donc $0; 1(C)$ et (D) se coupent au point d'abscisse 1.

3. a. Démontrons que pour tout nombre réel strictement positif $x, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \left(2x - 3 + \frac{\ln x}{x}\right)' = (2x - 3)' + \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = 2 + \frac{(\ln x)'x - x'\ln x}{x^2}$$
$$f'(x) = 2 + \frac{1 \cdot x - \ln x}{x^2} = 2 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{2x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. Les variations de f et son tableau de variation.

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

$x^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$. Or, $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$ alors $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variation de f.

x	0		$+\infty$
f '(x)		+	
f (x)	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

c. Equation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 3(x-1) + (-1) = 3x - 3 - 1 = 3x - 4$ $y = 3x - 4$ est une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 .

4. a. Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$f(]0;+\infty[) =]-\infty;+\infty[$ et $0 \in]-\infty;+\infty[$

donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$

b. Justifions que : $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$.

f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et en particulier sur $]1{,}3;1{,}4[$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1{,}3) \simeq -0{,}208 \\ f(1{,}4) \simeq 0{,}014 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1{,}3) \times f(1{,}4) < 0$$

donc la solution unique α de l'équation $f(x) = 0$ est tel que: $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$

PARTIE C

On pose $\varphi(x) = f(x) - (3x - 4)$ et $h(x) = -x^2 + 1 - \ln x$

1. a. Déterminons le sens de variation de h sur $]0;+\infty[$.

$$h'(x) = (-x^2 + 1 - \ln x)' = (-x^2 + 1)' - (\ln x)' = -2x - \frac{1}{x} = -\frac{2x^2 + 1}{x}$$

$h'(x) = -\frac{2x^2+1}{x} < 0 \forall x \in]0;+\infty[$, donc h est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

b. Calcul de $h(1)$

$h(1) = -1^2 + 1 - \ln 1 = -1 + 1 + 0 = 0$

Justifions que : $\begin{cases} \forall x \in 0;1,\ h(x) > 0; \\ \forall x \in 1;+\infty,\ h(x) < 0. \end{cases}$

x	0		1		$+\infty$
h '(x)			+		
h (x)	$-\infty$		0		$-\infty$
Signe de h(x)		+	0	-	

h est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$,

$$\begin{cases} \forall x \in]0;1[,\ \ x < 1\ \ h(x) > h(1) \text{ or } h(1) = 0\ donc\ h(x) > 0\,; \\ \forall x \in]1;+\infty[,\ \ x > 1\ \ h(x) < h(1) \text{ or } h(1) = 0\ donc\ \ h(x) < 0 \end{cases}$$

2. a. Démontrons que : $\forall x \in |0;+\infty|, \varphi'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$

$$\varphi'(x) = [f(x) - (3x-4)]' = f'(x) - (3x-4)' = \frac{g(x)}{x^2} - 3 = \frac{g(x) - 3x^2}{x^2}$$

$$\varphi'(x) = \frac{2x^2 + 1 - \ln x - 3x^2}{x^2} = \frac{-x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$$

b. Les variations de φ

$\varphi'(x) = \frac{h(x)}{x^2}; x^2 > 0$ donc le signe de $\varphi'(x)$ dépend du signe de $h(x)$.

Or, $\forall x \in 0;1, h(x) > 0 \Rightarrow \varphi'(x) > 0$ donc p est strictement croissante sur | $0;1;$

$Et, \forall x \in 1;+\infty$ |, $h(x) < 0 \Rightarrow \varphi^1(x) < 0$ donc φ est strictement décroissante sur $1;+\infty$ |.

- Le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

$\varphi(1) = f(1) - (3 \times 1 - 4) = f(1) - (3 \times 1 - 4) = -1 - (-1) = -1 + 1 = 0$

x	0		1		$+\infty$
φ '(x)		+	0	-	
φ (x)			0		
Signe de φ(x)			−		

c. Position relative de (C) par rapport à la tangente (T).

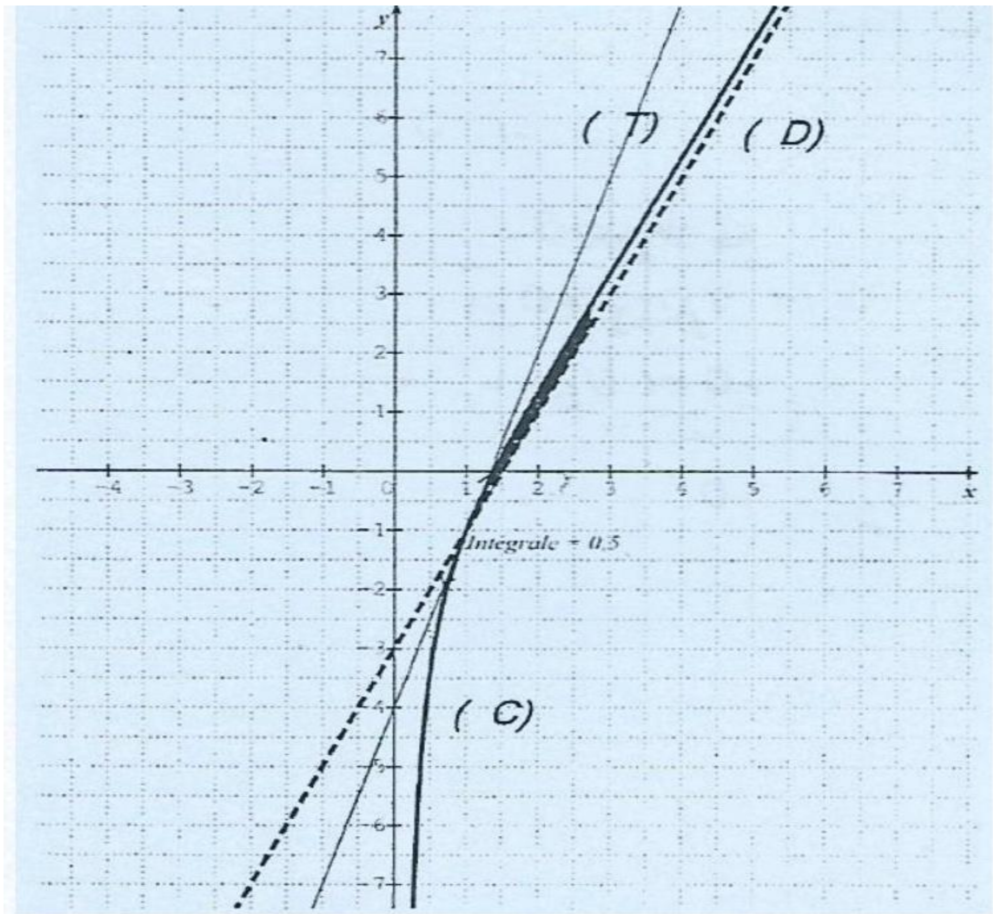
$$\forall x \in]0;+\infty[, \varphi(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in]0;+\infty[, f(x) - (3x-4) < 0$$
$$\Rightarrow \forall x \in]0;+\infty[\,, f(x) < (3x-4)$$

Donc sur $]0;+\infty[$, (C) est en dessous de sa tangente (T)

au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y = 3x - 4$

PARTIED

1. Tracé de la courbe de (C), de la droite (D) et de la tangente (T).



2. Calcul de l'aire de la partie du plan délimitée par (C), (D) et les droites $x = 1$ et $x = e$.

Soit B l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

$$B = \left(\int_1^e f(x) - (2x-3)\right)dx \cdot UA = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx \cdot UA = \int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx \cdot UA = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e \cdot UA$$

$$B = \left[\frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2}\right].UA = \left[\frac{(1)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right] \cdot UA = \frac{1}{2} \cdot UA$$

On a : $UA = 2 \times 2 \text{ cm}^2 = 4 \text{ cm}^2$

$$B = \frac{1}{2} \cdot UA = \frac{1}{2} \times 4 \text{ cm}^2 = 2 \text{ cm}^2$$

CORRECTION SESSION NORMALE 2007 SERIE D

EXERCICE 1

On a: $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} \end{cases}$ et $\begin{cases} V_0 = 9 \\ V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + V_n) \end{cases}$

1. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$ et $V_n > 0.$

$\left.\begin{matrix} U_0 = 4 > 0 \\ V_0 = 9 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ la propriété est vraie à l'ordre 0

On suppose que: $\forall p \in \mathbb{N}, U_p > 0$ et $V_p > 0$

Montrons alors que $U_{p+1} > 0$ et $V_{p+1} > 0$

$U_p > 0$ et $v_p > 0 \Rightarrow U_p + V_p > 0$ et $U_p \times V_p > 0$

d'où $\frac{2U_p \times V_p}{U_p+V_p} > 0$ donc $U_{p+1} > 0$

$U_p > 0$ et $V_p > 0 \Rightarrow U_p + V_p > 0$

d'où $\frac{1}{2}\left(U_p + V_p\right) > 0$ donc $V_{p+1} > 0$

On conclue: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$ et $V_n > 0$

2. a. Démontrons que: $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(V_n-U_n)^2}{2(U_n+V_n)}$

$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + V_n) - \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} = \frac{(U_n+V_n)^2-4U_nV_n}{2(U_n+V_n)}$

$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{U_n^2+V_n^2+2U_nV_n-4U_nV_n}{2(U_n+V_n)} = \frac{U_n^2+V_n^2-2U_nV_n}{2(U_n+V_n)}$

$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(U_n-V_n)^2}{2(U_n+V_n)}$

b. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$

$\left.\begin{matrix} U_0 = 4 \\ V_0 = 9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow U_0 \leq V_0$ donc la propriété est vraie à l'ordre 0

On suppose que $\forall p \in \mathbb{N}, U_p \leq V_p$

Montrons alors que $\forall p \in \mathbb{N}, U_{p+1} \leq V_{p+1}$

$$\forall p \in \mathbb{N}, v_{p+1} - U_{p+1} = \frac{\left(v_p - U_p\right)^2}{2\left(U_p + v_p\right)} \geq 0$$

$\Rightarrow V_{p+1} - U_{p+1} \leq 0$ donc $U_{p+1} \leq V_{p+1}$

On conclue: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$

- Montrons que : $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(V_n - U_n)^2}{2(U_n + V_n)} = \frac{1}{2}(V_n - U_n)\frac{(V_n - U_n)}{(U_n + V_n)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n \Rightarrow V_n - U_n \geq 0$

cependant $\forall n \in \mathbb{N}, V_n - U_n \leq V_n + U_n$

d'où $\frac{(V_n - U_n)}{(U_n + V_n)} \leq 1$

donc $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{1}{2}(V_n - U_n)\frac{(V_n - U_n)}{(U_n + V_n)} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n) \times 1$

Finalement: $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$
c. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n - U_n \leq \frac{5}{2^n}$

$V_0 - U_0 = 9 - 4 = 5 \leq \frac{5}{2^0}$ donc la propriété est vraie à l'ordre 0

On suppose que $\forall p \in \mathbb{N}, v_p - U_p \leq \frac{5}{2^n}$

Montrons alors que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{p+1} - U_{p+1} \leq \frac{5}{2^{p+1}}$

$$v_{p+1} - U_{p+1} \leq \frac{1}{2}\left(v_p - U_p\right) \Rightarrow v_{p+1} - U_{p+1} \leq \frac{1}{2} \times \frac{5}{2^p}$$

(car on a supposé que: $V_p - U_p \leq \frac{5}{2^p}$)

$\Rightarrow V_{p+1} - U_{p+1} \leq \frac{5}{2^{p+1}}$ la propriété est vraie à l'ordre $n+1$

On conclue : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n - U_n \leq \frac{5}{2^n}$

3. a. Démontrons que la suite (U_n) est croissante

$U_{n+1} - U_n = \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} - U_n = \frac{2U_nV_n - U_n^2 - U_nV_n}{U_n+V_n}$
$= \frac{U_nV_n - U_n^2}{U_n+V_n} = \frac{U_n(V_n - U_n}{U_n^- + V_n}\Big)$
$V_n > U_n \Rightarrow V_n - U_n > 0$
$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{U_n+V_n}(V_n - U_n) > 0$ donc $U_{n+1} - U_n > 0$

Finalement, U_n est croissante.

- Démontrons que la suite (V_n) est décroissante

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2}(U_n + V_n) - V_n = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{2}V_n - V_n = \frac{1}{2}U_n - \frac{1}{2}V_n = \frac{1}{2}(U_n - V_n)$$

Or $U_n \leq V_n \Rightarrow U_n - V_n \leq 0$

Donc $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2}(U_n - V_n) \leq 0$

Finalement, (V_n) est décroissante.
b. Montrons que la suite (U_n) converge.

La suite (V_n) est décroissante d'où $\forall n \in \mathbb{N}, V_n \leq V_0$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n \Rightarrow U_n \leq V_0 \Rightarrow (U_n)$ est majorée par V_0.

(U_n) est croissante et majorée par v_0 donc (U_n) converge.

- Montrons que la suite (V_n) converge.

La suite (U_n) est croissante d'où $\forall n \in \mathbb{N}, U_0 \leq U_n$.

or $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n \Rightarrow U_0 \leq V_n \Rightarrow (V_n)$ est minorée par U_0.

(V_n) est décroissante et minorée par U_0 donc (V_n) converge.

c. Démontrons que les suites (U_n) et (V_n) ont la même limite ℓ

$V_n - U_n \leq \frac{5}{2^n}$ or $\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{2^n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} V_n - U_n = 0$.

Par suite, $\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} U_n$.

Donc les suites (U_n) et (V_n) ont la même limite notée ℓ.

4. a. Démontrons que pour tout entier naturel $\mathrm{n}, U_{n+1} \cdot V_{n+1} = U_n \cdot V_n$

$$U_{n+1} \cdot V_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n} \cdot \frac{1}{2}(U_n + V_n) = \frac{zU_nV_n(U_n + V_n)}{z(U_n + V_n)} = U_n \cdot V_n$$

b. Déterminons la valeur exacte de ℓ.

$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \cdot V_{n+1} = U_n \cdot V_n$

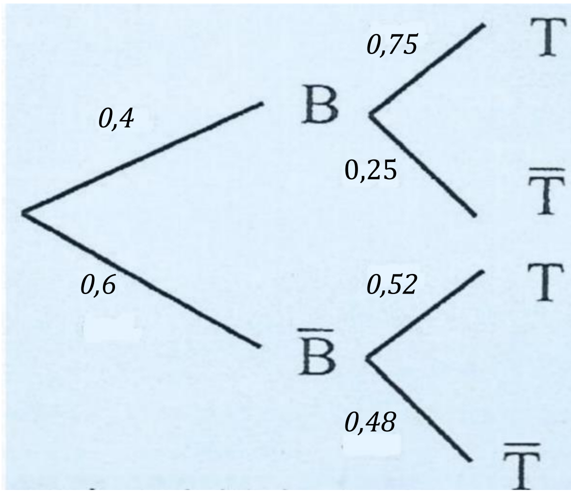
d'où $U_n \cdot V_n = U_{n-1} \cdot V_{n-1} = \cdots = U_1 \cdot V_1 = U_0 \cdot V_0 = 4 \times 9 = 36 \ \lim U_n \cdot V_n = 36$

Or $\lim U_n \cdot V_n = \lim U_n \cdot \lim V_n = \lim U_n \cdot \lim U_n = (\lim U_n)^2 = \ell^2$

Donc $\ell^2 = 36 \Rightarrow \ell = \sqrt{36} = 6(\text{car}\, U_n > 0$ et $V_n > 0)$

Finalement, $\lim U_n = \lim V_n = \ell = 6$

EXERCICE 2
PARTIE A



1. Précisons chacune des probabilités suivantes :

a. $P(B) = 0{,}4$

b. $P_B(T) = \frac{P(B\cap T)}{P(B)} = \frac{0{,}75\times 0{,}40}{0{,}40} = 0{,}75$

c. $P_B(T) = \frac{P(\bar{B}\cap T)}{P(\bar{B})} = \frac{0{,}6\times 0{,}52}{0{,}6} = 0{,}52$

2. $P(A) = P(B) \times P_B(T) = 0{,}4 \times 0{,}75 = 0{,}3$

3. $P(T) = P(B \cap T) + P(\bar{B} \cap T) = P(B) \times P_B(T) + P(\bar{B}) \times P_B(T)$

$= 0{,}3 + 0{,}5 \times 0{,}52 = 0{,}612$

4. $\left.\begin{array}{l} P_B(T) = 0{,}75 \\ P(T) = 0{,}612 \end{array}\right|$ $P_B(T) \neq \mathrm{P}(T)$ donc les évènements B et T ne sont pas indépendants.

5. Soit C:"un élève admis au test est bachelier"

$$P(C) = \frac{P(A)}{P(T)} = \frac{0{,}3}{0{,}612} = \frac{300}{612} = \frac{25 \times 12}{51 \times 12} = \frac{25}{51}$$

PARTIE B

1. Il s'agit d'une loi binomiale telle que $n = 5; p = 0{,}3$ et $q = 0{,}7$

$P(x = 3) = C_5^3(0{,}3)^3(0{,}7)^2 = 0{,}1323$

2. L'espérance mathématique de X est :

$E(X) = n \times p = 5 \times 0{,}3 = 1{,}5$

PROBLEME

PARTIE A

1. $f(x) = \frac{x-3}{x+1} = \frac{x+1-4}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{4}{x+1} = 1 - \frac{4}{x+1}$

a. $\forall x \in D_g$ et $x \neq 0, g(x) = f(\ln x) = 1 - \frac{4}{(\ln x)+1}$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(e^x) = 1 - \frac{4}{e^x+1}$.

2. a. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-3}{x+1} = \frac{1}{1} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-3}{x+1} = \frac{1}{1} = 1$

b. $\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$ car sur $]-\infty;-1[$, $x+1<0$ et $\lim_{x\to-1} x-3 = -4 < 0$ $\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty$ car sur $]-1;+\infty[, x+1>0$ et $\lim_{x\to-1} x-3 = -4 < 0$

3. $f'(x) = \left(\frac{x-3}{x+1}\right)' = \frac{1\times1-1\times(-3)}{(x+1)^2} = \frac{1+3}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}, f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2} > 0$

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f '(x)		+	‖	+	
f (x)	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

PARTIE B

1. a. $g(0) = 1$

$\lim\limits_{x\to0} g(x) = 1$ car $\lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0} \frac{4}{(\ln x)+1} = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to0} g(x) = g(0)$ donc g est continue en 0 .

b. $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{1-(\ln x)^{-1}+1^{-1}}{x} = \frac{-\frac{4}{(\ln x)+1}}{x} = \frac{-4}{x\ln x + x}$

$\lim\limits_{x\to0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0} \frac{-4}{x\ln x+x} = -\infty$

$$\lim_{x\to0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = -\infty$$

donc (Cg) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

2. a. $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{4}{(\ln x|+1} = 1$ car $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{(\ln x|+1} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à (Cg) en $+\infty$
b. $\lim_{x\to\frac{1}{e}} g(x) = \lim_{x\to\frac{1}{e}} 1 - \frac{4}{(\ln x)+1} = +\infty$

car $\begin{cases} \lim_{x\to\frac{1}{e}} (\ln x) + 1 = 0 \\ \lim_{x\to\frac{1}{e}} \dfrac{4}{(\ln x) + 1} = -\infty \text{ car } (\ln x) + 1 < 0 \text{ si } x < \dfrac{1}{e} \end{cases}$

$$\lim_{x\to\frac{1}{e}} g(x) = \lim_{x\to\frac{1}{e}} 1 - \frac{4}{(\ln x) + 1} = -\infty$$

car $\begin{cases} \lim_{x\to\frac{1}{e}} (\ln x) + 1 = 0 \\ \lim_{x\to\frac{1}{e}} \dfrac{4}{(\ln x) + 1} = +\infty \text{car} (\ln x) + 1 > 0 \text{ si } x > \dfrac{1}{e} \end{cases}$

$\lim_{x\to\frac{1}{e}} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to\frac{1}{e}} g(x) = -\infty$

$\Rightarrow$ la droite d'équation $x = \frac{1}{e}$ est asymptote verticale à (Cg)

3. $g'(x) = \left(1 - \frac{4}{(\ln x)+1}\right)' = \left(-\frac{4}{(\ln x)+1}\right)' = -4 \times \frac{-(\ln x+1)'}{(\ln x+1)^2}$

$$g'(x) = -4 \times \frac{-\left(\frac{1}{x}\right)}{(\ln x + 1)^2} = 4 \times \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{(\ln x + 1)^2} = \frac{4}{x(\ln x + 1)^2}$$

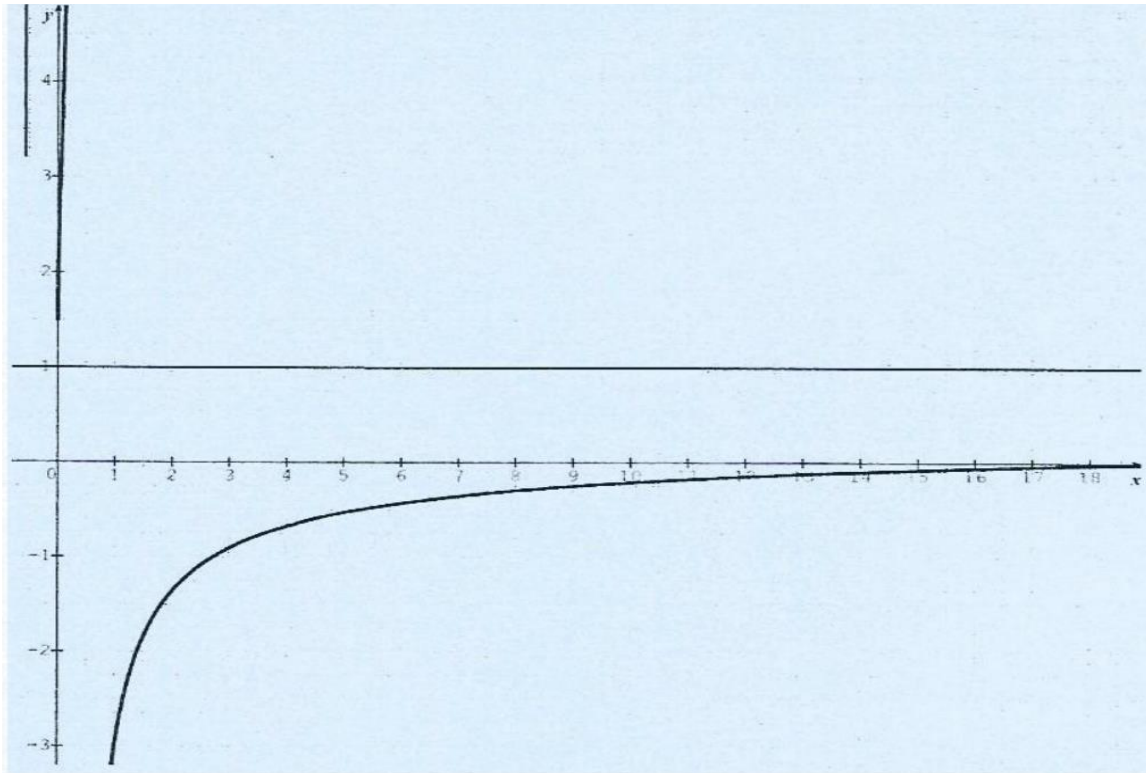
$$\forall x \in \left]0; \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}; +\infty\right[\text{ , } g'(x) = \frac{4}{x(\ln x + 1)^2} > 0$$

Donc g est strictement croissante sur $\left]0; \frac{1}{e}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$

Tableau de variation

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
g '(x)	||	+	||	+	
g (x)	|| 1	↗ $+\infty$	|| $-\infty$	↗	1

4. Tracé de (C_g) et ses asymptotes dans le repère R_1.



PARTIE C

1. $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \infty^{1-\frac{4}{e^x+1}} = -3$ car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{4}{e^x+1}=4}{} x \to \lim_x h(x) = -3 \Rightarrow$ la droite d'équation $y = -3$ est asymptote horizontale à (c_h)

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{4}{e^x+1} = 1$ car $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{e^x+1} = 0$ $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1 \Rightarrow$ la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à (c_h)

2. $h'(x) = \left(1 - \frac{4}{e^x+1}\right)' = \left(-\frac{4}{e^x+1}\right)' = -4 \times \frac{-(e^x+1)'}{(1+e^x)^2} = \frac{4e^x}{(1+e^x)^2}$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \frac{4e^x}{(1+e^x)^2} > 0$ donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de h.

x	$-\infty$		$+\infty$
h'(x)		+	
h(x)	-3	↗	1

4. a. Déterminons les coordonnées de chacun des points A et B.

- A point d'intersection de (C_h) avec la droite $(OI) \Leftrightarrow h(x_A) = 0$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{4}{e^{x_A}+1}=0 \Leftrightarrow \frac{4}{e^{x_A}+1}=1 \Leftrightarrow e^{x}A+1=4 \Leftrightarrow e^{x_A}=3 \Leftrightarrow x_A=\ln 3$$

$x_A=\ln 3$ et $h(x_A)=0 \Rightarrow A(\ln 3;0)$

- B point d 'intersection de (C_h) avec la droite $(OJ) \Leftrightarrow x_B=0$

$$y_B=h(x_B)=h(0)=1-\frac{4}{e^0+1}=1-\frac{4}{1+1}=1-\frac{4}{2}=1-2=-1$$

$x_B=0$ et $h(x_B)=-1 \Rightarrow B(0;-1)$

b. Equation de la tangente (T) à (C_h) en B.

$y=h'(x_B)\cdot(x-x_B)+h(x_B)$ avec $h(x_B)=y_B=-1$ et $h'(x_B)=h'(0)=2$

D'où (T): $y=2(x-0)+(-1)=2x-1$

c. Démontrons que $\mathrm{B}(0;1)$ est un centre de symétrie de (C_h).

$\forall x\in\mathbb{R}, 0-x=-x\in D_h=\mathbb{R}$ et $0+x=x\in D_h=\mathbb{R}$

$$h(0+x)=h(x)=1-\frac{4}{e^x+1}=\frac{e^x+1-4}{e^x+1}=\frac{e^x-3}{e^x+1}$$

$$h(0-x)=h(-x)=1-\frac{4}{e^{-x}+1}=\frac{e^{-x}+1-4}{e^{-x}+1}=\frac{e^{-x}-3}{e^{-x}+1}$$

$$h(0+x)+h(0-x)=\frac{e^x-3}{e^x+1}+\frac{e^{-x}-3}{e^{-x}+1}=\frac{e^0+e^x-3e^{-x}-3+e^0+e^{-x}-3e^x-3}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}$$

$$=\frac{1-2e^{-x}-3+1-2e^x-3}{e^0+e^x+e^{-x}+1}=\frac{-2e^{-x}-2e^x-4}{1+e^x+e^{-x}+1}=\frac{-2(e^{-x}+e^x+2)}{(2+e^x+e^{-x})}$$

$h(0+x)+h(0-x)=-2$

$\frac{h(0+x)+h(0-x)}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \Rightarrow B(0;-1)$ est centre de symétrie de (C_h)

5. a. h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

donc h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $h(]-\infty;+\infty[)=]-3;1[$

b. Pour déterminer l'expression explicite de la bijection réciproque h^{-1} de h, on résoud l'équation: $h(x)=y$

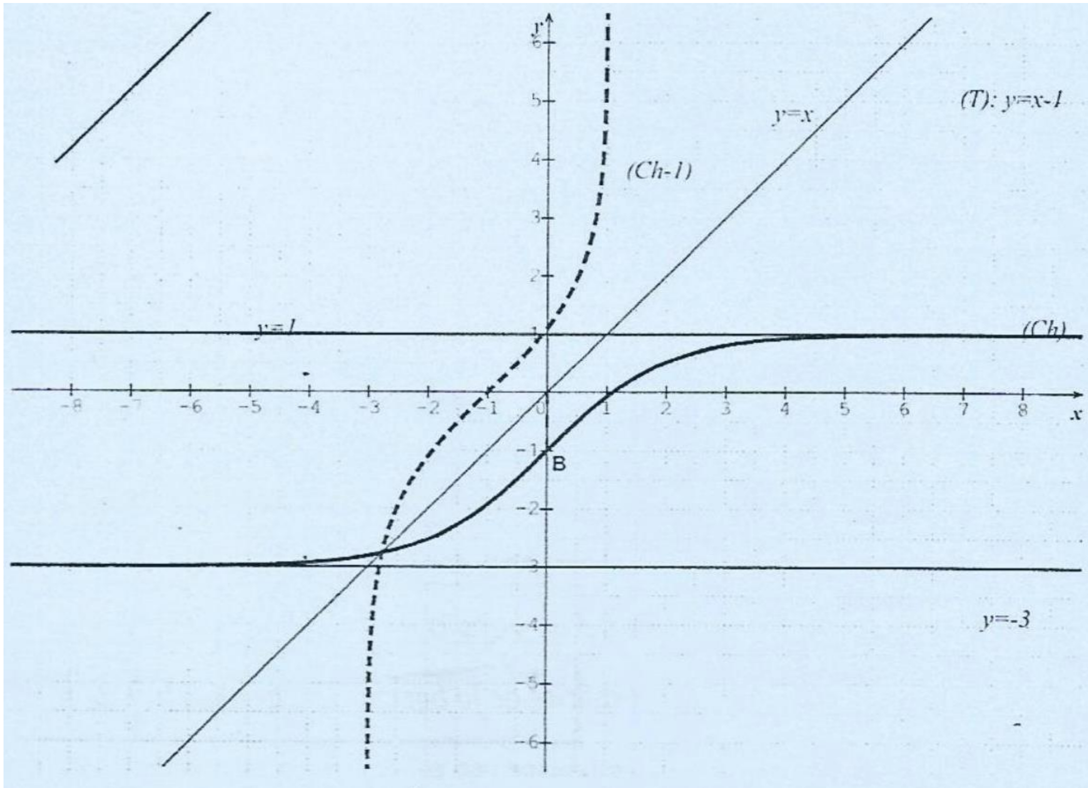
$h(x)=y \Leftrightarrow 1-\frac{4}{e^x+1}=y \Leftrightarrow \frac{4}{e^x+1}=1-y \Leftrightarrow \frac{e^x+1}{4}=\frac{1}{1-y}$

$\Leftrightarrow e^x+1=\frac{4}{1-y} \Leftrightarrow e^x=\frac{4}{1-y}-1 \Leftrightarrow e^x=\frac{3+y}{1-y}$

$\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{3+y}{1-y}\right)$ d'où $\forall x\in]-3;1[, h^{-1}(x)=\ln\left(\frac{3+x}{1-x}\right)$

6. Tracé de $(\mathrm{T}), (C_h)$ et ses asymptotes dans le repère R_2.

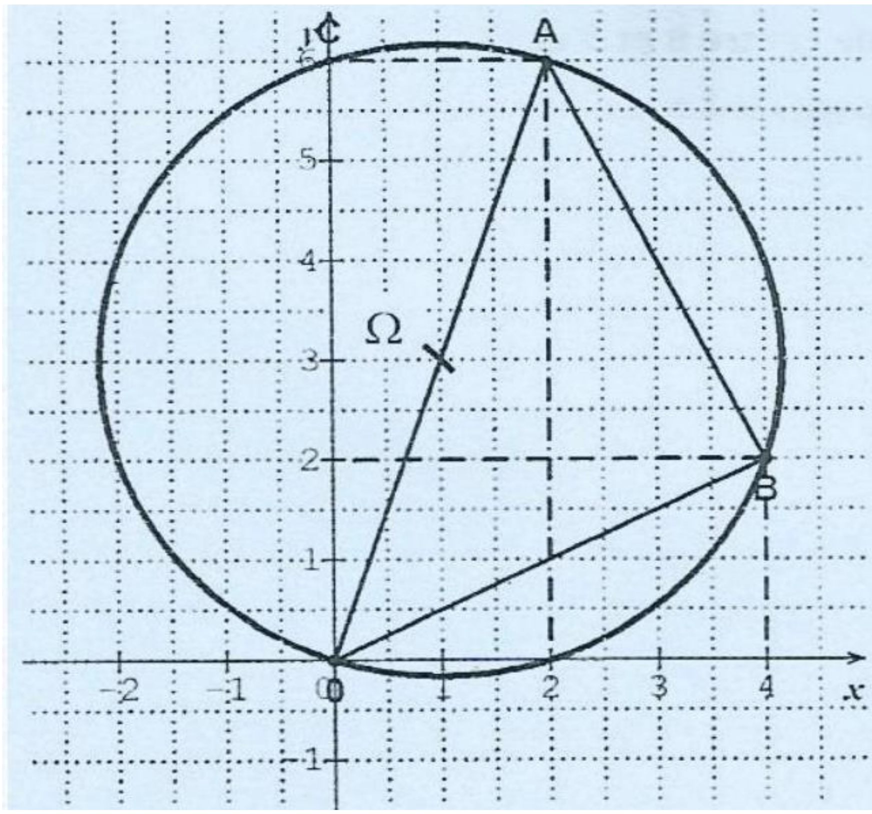
Représentation graphique de (Γ) courbe de la fonction h^{-1} dans le repère R_2.



CORRECTION SESSION NORMALE 2006 SERIE D

EXERCICE 1

1. Placé des points A, B et C tels que $Z_A = 2 + 6i; Z_B = 4 + 2i; Z_C = 6i$.



2. a. Forme algébrique de $Z = \frac{Z_O - Z_A}{Z_B - Z_A}$.

$$Z = \frac{Z_O - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{0 - (2 + 6i)}{(4 + 2i) - (2 + 6i)} = \frac{-2 - 6i}{4 + 2i - 2 - 6i} = \frac{-2 - 6i}{2 - 4i}$$
$$Z = \frac{(-2 - 6i)(2 + 4i)}{(2 - 4i)(2 + 4i)} = \frac{(-2 - 6i)(2 + 4i)}{20} = \frac{20 - 20i}{20} \Rightarrow Z = 1 - i$$

b. Forme trigonométrique de Z.

$$Z = 1 - i \Rightarrow |Z| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Soit θ unargument de Z. ona:

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \theta = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow Z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

c. Mesure de l'angle orienté $(\widehat{AB, AO})$.

$\text{mes}(\widehat{AB,AO}) = \arg\left(\frac{Z_O - z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg Z = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$

3. Soit r la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

a. Ecriture complexe de r.

$f(z) = az + b$

$a = ke^{-\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$ (eneffet, pour une rotation, $k = 1$)

$f(z_B) = z_B \Leftrightarrow az_B + b = z_B$ (Bétant le centre dela rotation,Best invariant par r)

$$\Leftrightarrow b = z_B - az_B = z_B(1-a) = (4+2i)(1-(-i)) \mid\Leftrightarrow b = (4+2i)(1+i) = 2+6i$$

Finalement: $\cdot\, f(z) = -iz + 2 + 6i$

b. L'image de O par r.

$$f(z) = -iz + 2 + 6i \Rightarrow f(z_O) = -iz_O + 2 + 6i = -i \times 0 + 2 + 6i = 2 + 6i = z_A$$

On en déduit que l'image de O par la rotation r estle point $A(2+6i)$

c. En déduire que le triangle OAB est rectangle et isócèle en B.

r est la rotation de centre B qui transforme le point O en le point $A \Rightarrow BO = BA$ donc OAB est un triangle isocèle en B. (1) r une rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme le point O en le point $A \Rightarrow$ mes $(\overrightarrow{BO,BA}) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow (BO) \perp (BA)$ donc OAB est un triangle rectangle en B.

Finalement, le triangle OAB est rectangle et isocèle en B.

4. a. Le centre et le rayon du cercle (C) circonscrit au triangle OAB.

Le triangle OAB étant rectangle en B, son hypoténuse [OA] est le diamètre du cercle circonscrit.

Le centre du cercle (C) est donc le milieu de [OA].

Soit Ω le centre du cercle (C) et z_Ω son affixe.

$$z_\Omega = \frac{z_0 + z_A}{2} = \frac{0 + 2 + 6i}{2} = 1 + 3i \Rightarrow \Omega(1;3)$$

Soit R le rayon de (C).

R est la moitié de la longueur OA puisque [OA] est le diamètre de (C).

$R = \frac{OA}{2} = \frac{|z_A - z_O|}{2} = \frac{|2+6i|}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$

Construction de (C). (Voir figure précédente)

b. Démontrer que les points O, A, B et C appartiennent à un même cercle.

$1^{ère}$ méthode :

On montre que le point C appartient également au cercle (C) circonscrit au triangle OAB.

Vérifions pour cela que la distance ΩC est égale à $\sqrt{10}$, le rayon du cercle (C).

$\Omega C = |z_C - z_\Omega| = |(6i) - (1 + 3i)| = |-1 + 3i| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$

Le point C appartient au cercle (C) circonscrit au triangle OAB donc les points O, A, B et C sont cocycliques.

2ème méthode: On montre que $\frac{z_O - Z_B}{Z_A - Z_B} : \frac{z_O^* - z_C}{Z_A - Z_C} \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{Z_O - Z_B}{Z_A - Z_B} = \frac{0 - (4 + 2i)}{(2 + 6i) - (4 + 2i)} = \frac{-4 - 2i}{-2 + 4i} = \frac{-2 - i}{-1 + 2i}$$

$$\frac{Z_O - Z_B}{Z_A - Z_B} = \frac{(-2 - i)(-1 - 2i)}{(-1 + 2i)(-1 - 2i)} = \frac{5i}{5} = i$$

$$\frac{Z_O - Z_C}{Z_A - Z_C} = \frac{0 - (6i)}{(2 + 6i) - (6i)} = \frac{-6i}{2} = -3i$$

$$\frac{Z_O - Z_B}{Z_A - Z_B} : \frac{Z_O - Z_C}{Z_A - Z_C} = i : (-3i) = \frac{-1}{3} \in \mathbb{R}^*$$

Donc les points O, A, B et C sont cocycliques.

EXERCICE 2
PARTIE A

1. Nombre de cartes magnétiques que la banque peut distribuer à ses clients. Dans un numéro de cartes magnétiques, l'ordre est important et on peut répéter les chiffres.

Il s'agit donc d'une liste de 4 éléments pris parmi les 10 chiffres du système décimal. card $\Omega = 10^4$ cartes.

2. Probabilité pour que le code d'une carte magnétique commence par 0.

Un code peut commencer par un des 10 chiffres du système décimal.

Le tirage étant équiprobable, il y a une chance sur 10 que le code commence par 0. D'où la probabilité $\frac{1}{10}$.

3. Probabilité pour que le code d'une carte magnétique soit composée des chiffres $2; 4; 5; 7$.

Le nombre de cartes dont le code est constitué uniquement des chiffres $2; 4; 5;$ et 7 est card $A = 4! = 24$. Car il s'agit d'une permutation des 4 chiffres.

La probabilité est donc : $P = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{24}{10^4} = \frac{3}{1250}$

PARTIE B

1. Calcul de la probabilité de chacun des évènements suivants :

a. E: «Monsieur KONE réussit à retirer de l'argent au premier essai »

Le nombre de codes possibles est : card $\Omega' = 4! = 24$ codes.

La probabilité de retirer de l'argent au premier essai est donc : $P(E) = \frac{\text{card}\, E}{\text{card}\, \Omega} = \frac{1}{24}$

b. F : « Monsieur KONE échoue au premier essai et réussit au deuxième essai ».

Il échoue au premier essai avec une probabilité $P_1 = \frac{23}{24}$

Au second essai, il réussit avec une probabilité $P_2 = \frac{1}{23}$

Finalement, on a : $P(F) = P_1 \times P_2 = \frac{23}{24} \times \frac{1}{23} = \frac{1}{24}$ (théorème de la multiplication).

2. G: «Monsieur KONE retire de l'argent ».

$G = E \cup F$ avec E et F incompatibles donc $P(G) = P(E) + P(F) = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$

3. Calcul de la probabilité qu'il ait effectué le retrait au premier essai.

Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle de faire un retrait au premier essai sachant que le retrait a eu lieu.

$$P_G(E) = \frac{P(E \cap G)}{P(G)} = \frac{P(E)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{24} \times \frac{12}{1} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

4. Valeurs prises par la variable aléatoire X, qui détermine la taxe totale à payer sur l'ensemble des essais faits par Monsieur KONE.

- 30 francs : retrait dès le premier essai.
- 90 francs : échec au premier essai (60frs) et retrait au deuxième essai (30frs).
- 120 francs : échec aux deux essais ($60\text{frs} + 60\text{frs}$).

Les valeurs prises par X sont donc : $X = \{30; 90; 120\}$

a. La loi de probabilité de X.

$P(X = 30) = P(E) = \frac{1}{24}$
$P(X = 90) = P(F) = \frac{1}{24}$
$P(X = 120) = 1 - P(G) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} = \frac{22}{24}$

X	30	90	120	Total
$\mathbf{P(X = x_i)}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{22}{24}$	1

b. Espérance mathématique de X.

$E(X) = 30 \times \frac{1}{24} + 90 \times \frac{1}{24} + 120 \times \frac{22}{24}$
$E(X) = \frac{30+90+2640}{24}$
$E(X) = \frac{2760}{24} = 115$

PROBLEME
PARTIE A
Soit la fonction g dérivable et définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - \ln x - 1$.

1. Les limites de g en 0 et en $+\infty$.

$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x^2 - \ln x - 1 = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \\ \lim_{x\to 0} -\ln x = +\infty \end{cases}$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} x^2 - \ln x - 1 = \lim_{x\to +\infty} x\left(x - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right) = +\infty$

car $\begin{cases} \lim_{x\to +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$

2. Calcul de $g'(x)$:

$\forall x \in]0; +\infty[\ , g'(x) = (x^2 - \ln x - 1)' = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$

3. Etude des variations de g et tableau de variation.

$g'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x} = \frac{(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1)}{x} = \frac{(\sqrt{2}x + 1)}{x}(\sqrt{2}x - 1)$

$\forall x \in]0; +\infty[, \frac{(\sqrt{2}x+1)}{x} > 0$ doncle signe deg' $'(x)$ estle mêmequele signe de $(\sqrt{2}x - 1)$.

Or, $(\sqrt{2}x - 1) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

On en déduit que :

$\forall x \in \left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $\left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

$\forall x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$, $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$.

$\forall x \in \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}, g'(x) = 0$

D'où le tableau de variation ci-dessous :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}\ 1-\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

4. a. Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions sur $]0; +\infty[$.

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}(1 - \ln 2) \approx -0{,}1534$$

- g est continue et strictement décroissante sur$\left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$,

$g\left(\left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[\right) = \left]g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right); +\infty\right[$ et $0 \in \left]g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right); +\infty\right[$ $\text{car}\, g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$

donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution sur$\left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

- g est continue et strictement croissante sur$\left]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$,

$g\left(\left]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[\right) = \left]g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right); +\infty\right[$ et $0 \in \left]g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right); +\infty\right[$ car $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$ doncl'équation $g(x) = 0$ admet une solution sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$,

Finalement, l'équation $g(x) = 0$ admet 2 solutions sur $]0; +\infty[$.

α est la solution appartenant à $\left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$
b. Démontrons que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

g est continue et strictement décroissante sur $\left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et en particulier sur $]0{,}4; 0{,}5[$

$$\left.\begin{matrix} g(0{,}4) = 0{,}076 \\ g(0{,}5) = -0{,}057 \end{matrix}\right| \Rightarrow g(0{,}4) \times g(0{,}5) < 0$$

donc $0{,}4 < \dot{\alpha} < 0{,}5$

c. Calcul de $g(1)$: $g(1) = 1^2 - \ln 1 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0.$

d. Signe de $g(x)$

x	0		α		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}-\ln 2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $g(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	

$\forall x \in]0;\alpha[\ , x < \alpha \Longrightarrow g(x) > g(\alpha)$ car g est strictement décroissante. Or $g(\alpha) = 0$.
Donc $\forall x \in]0;\alpha[,\ g(x) > 0$
$\forall x \in]\alpha;1[, g(x) \in \left]-\frac{1}{2} - ln2; 0\right[\Longrightarrow g(x) < 0$
$\forall x \in]1;+\infty[, x > 1 \Longrightarrow g(x) > g(1)$ car g est strictement croissante. Or $g(1) = 0$
donc $\forall x \in]1;+\infty[, g(x) > 0$.

On en déduit que $\begin{cases} \forall x \in]0;\alpha[\cup]1;+\infty[,\ g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha;1[, g(x) < 0 \end{cases}$

PARTIE B

1. a. La limite de f en 0 . Interprétation graphique du résultat.

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(x^2 + 2 + \ln x) = -\infty$ car $\begin{cases}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x\to 0}\ln x = -\infty\end{cases}$ $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty \Rightarrow$ la droite (OJ) d'équation $x = 0$ est asymptoteverticaleà (C).

b. La limite de f en $+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ car $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0 \\ x\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0\end{cases}$

2. Calcul de $f'(x)$

$$\forall x \in]0;+\infty[\,, f'(x) = 1 + \left(-\frac{2}{x^2}\right) + \left(\frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x}{x^2}\right) = 1 - \frac{2}{x^2} + \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right) = \frac{x^2 - 2 + 1 - \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - 1 - \ln x}{x^2} \text{ or } g(x) = x^2 - \ln x - 1 \text{ donc } f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

3. a. Calcul de $f(\alpha)$.

$f(\alpha) = \alpha + \frac{2}{\alpha} + \frac{\ln\alpha}{\alpha}$

or $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha^2-\ln\alpha-1=0 \Leftrightarrow \ln\alpha=\alpha^2-1$

donc $f(\alpha)=\alpha+\frac{2}{\alpha}+\frac{\alpha^2-1}{\alpha}=\alpha+\frac{2}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}=\alpha+\frac{2}{\alpha}+\alpha-\frac{1}{\alpha}=2\alpha+\frac{1}{\alpha}$

Finalement: $f(\alpha)=2\alpha+\frac{1}{\alpha}$

b. Etude des variations de f et tableau de variation.

$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

$\forall x\in]0;+\infty[, x^2>0$ donc $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe sur $]0;+\infty[$.

- si $x\in]0;\alpha[\cup]1;+\infty[$ alors $g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0$

donc f est strictement croissante sur $]0;\alpha[$ et sur $]1;+\infty[$.

- si $x\in]\alpha;1[$ alors $g(x)<0\Rightarrow f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante sur $]\alpha;1[$.

Tableau de variation

x	0		α		1		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$2\alpha+\frac{1}{\alpha}$	↘	3	↗	$+\infty$

4. Démontrer que la droite (D) d'équation $y=x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

$f(x)-x=x+\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln x}{x}-x=\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=0$ car $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\end{cases}$ doncladroite (D) d'équation $y=x$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

5. Position de (D) par rapport à (C).

$f(x)-x=x+\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln x}{x}-x=\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{2+\ln x}{x}$

sur $]0;+\infty[, x>0$ doncle signe de $f(x)-x$ dépend de celui $2+\ln x$

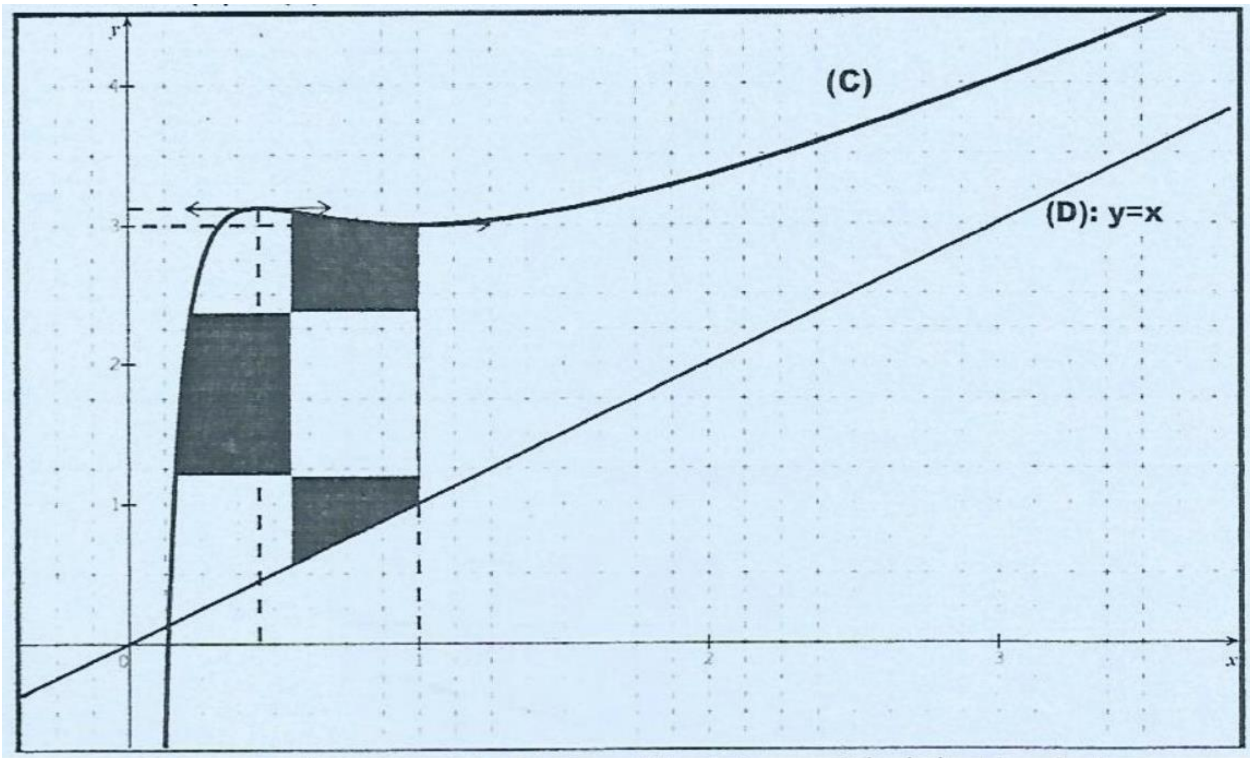
- $f(x)-x>0\Leftrightarrow\frac{2+\ln x}{x}>0\Leftrightarrow 2+\ln x>0\Leftrightarrow\ln x>-2\Leftrightarrow x>e^{-2}$

(C)est au-dessus de (D) sur $]e^{-2};+\infty[$

- $f(x)-x<0\Leftrightarrow\frac{2+\ln x}{x}<0\Leftrightarrow 2+\ln x<0\Leftrightarrow\ln x<-2\Leftrightarrow x<e^{-2}$

(C) est en dessous de (D) sur $]0;e^{-2}[$

6 . Tracé de (D) et (C).



7. A est l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C), (D) et les droites d'équations respectives $x = e^{-2}$ et $x = 1$. Calccul de A.

$$A = \int_{e^{-2}}^{1} (f(x) - y)dx = \int_{e^{-2}}^{1} \left(\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) dx \cdot UA = \int_{e^{-2}}^{1} \left(x^2 + \frac{1}{x} x\ln x\right) dx \cdot UA$$
$$A = \left[2\ln x + \frac{1}{2}\ln^2 x\right]_{e^{-2}}^{1} \cdot UA = \left[2\ln 1 + \frac{1}{2}(\ln 1)^2 - \left(2\ln e^{-2} + \frac{1}{2}(\ln e^{-2})^2\right)\right] \cdot UA$$
$$A = \left[0 + 0 - \left(2 \times (-2) + \frac{1}{2}(-2)^2\right)\right] \cdot UA = [-(-4 + 2)] \cdot UA = 2 \times UA$$
$$A = 2 \times 8 \text{ cm}^2 = 16 \text{ cm}^2$$

CORRECTION SESSION NORMALE 2005 SERIE D

EXERCICE 1

1.a.

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow |(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 6 \Leftrightarrow |(1 - i\sqrt{3})| \left(z - \frac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}\right)\Big| \ = 6$$

$$\Leftrightarrow |(1 - i\sqrt{3})|z - \frac{(\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}| = 6 \Leftrightarrow |(1 - i\sqrt{3})\ \left|\left(z - \frac{4i}{4}\right)\right| = 6$$

$$\Leftrightarrow |(1 - i\sqrt{3})|(z - i) = 6 \Leftrightarrow |1 - i\sqrt{3}||z - i| = 6$$

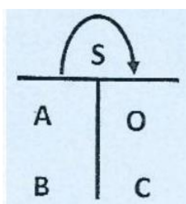
$$\Leftrightarrow 2 \times |z - i| = 6 \Leftrightarrow |z - i| = \frac{6}{2}$$

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow |z - i| = 3$

b. $|z - i| = 3 \Leftrightarrow |z_M - z_A| = 3 \Leftrightarrow AM = 3$

Donc (Γ) est le cercle de centre A d'affixe i et de rayon 3.

2.



a. $z' = az + b$

$$s(A) = 0 \ \Leftrightarrow \ az_A + b = z_O$$

$$s(B) = C \ \Leftrightarrow \ \frac{az_B + b = z_C}{az_A - az_B = z_O - z_C}$$

$$a(z_A - z_B) = z_O - z_C$$

$$a = \frac{z_O - z_C}{z_A - z_B} = \frac{z_C - z_O}{z_B - z_A} = \frac{-4i - 0}{\sqrt{3} - i} = \frac{-4i}{\sqrt{3} - i} = \frac{-4i(\sqrt{3} + i)}{(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)}$$

$$a = \frac{-4i\sqrt{3} + 4}{3 + 1} = \frac{4 - 4i\sqrt{3}}{4} = 1 - i\sqrt{3}$$

$$az_A + b = z_O \Leftrightarrow b = z_O - az_A = 0 - (1 - i\sqrt{3}) \times i = -(1 - i\sqrt{3}) \times i$$

$$\Leftrightarrow b = -(i + \sqrt{3}) = -i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} - i$$

Donc $z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i$

b. $z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i$

$$|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

S est une similitude plane directe

- de rapport $k = |1 - i\sqrt{3}| = 2$

- d'angle $\theta = \arg(1 - i\sqrt{3})$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \theta = -\frac{\pi}{3}$$

- de centre $E(\varpi)$

$$\varpi = \frac{b}{1-a} = \frac{-\sqrt{3}-i}{1-(1-i\sqrt{3})} = \frac{-\sqrt{3}-i}{i\sqrt{3}} = \frac{(-\sqrt{3}-i)(-i\sqrt{3})}{(i\sqrt{3})(-i\sqrt{3})} = \frac{3i-\sqrt{3}}{3} = \frac{-\sqrt{3}+3i}{3}\ \varpi = \frac{-\sqrt{3}}{3} + i$$

3.a. Nature et éléments caractéristiques de (C).

(C) est un cercle.

- de rayon $R = k \times r = 2 \times 3 = 6$
- de centre O l'image de A par S (en effet, $(A) = 0$)

b. Construction de (C) et (Γ) (voir figure)

(C) : Cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 6.

(Γ) : Cercle de centre A $(0;1)$ et de rayon 3.

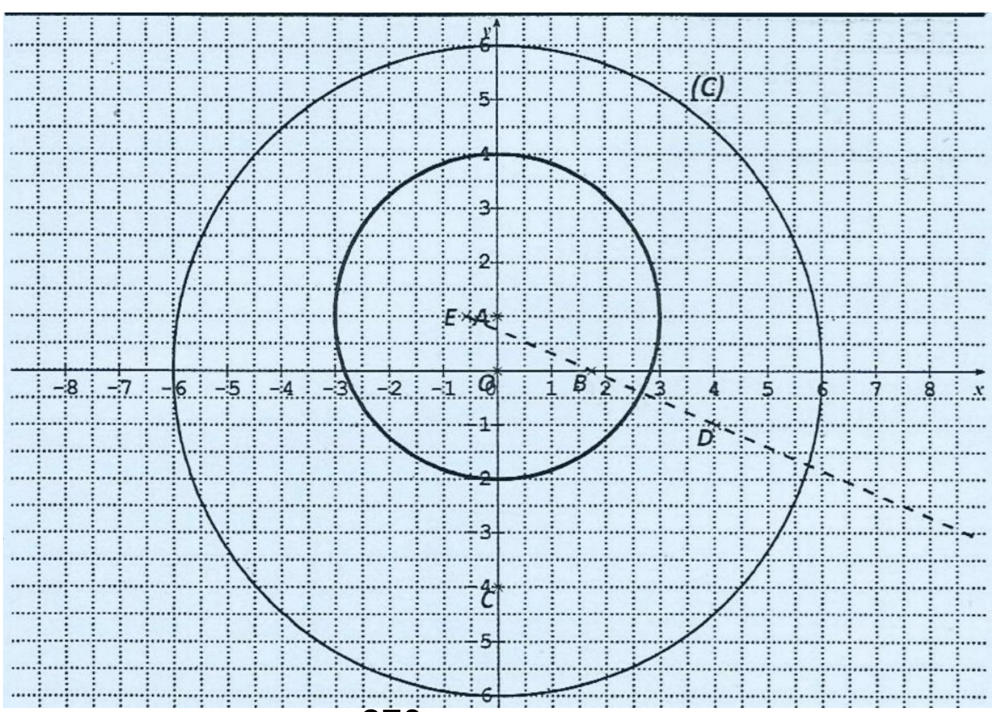
4.a. Construction des points E et D.(voir figure)

b. Le triangle ECD est un triangle équilatéral car : $\mathrm{EC} = \mathrm{ED}$ et $mes\widehat{DEC} = \frac{\pi}{3}$

c. $D \in [EB)$ et $ED = 2EB \Rightarrow \overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{EB} \Rightarrow z_D - z_E = 2(z_B - z_E)$

$$\Rightarrow z_D = 2(z_B - z_E) + z_E = 2z_B - 2z_E + z_E = 2z_B - z_E = 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} - i$$

$$\Rightarrow z_D = \frac{7\sqrt{3}}{3} - i$$



5. $z' = az + b$

$s(E) = E \ \Leftrightarrow \ az_E + b = z_E$

$$s(C) = D \Leftrightarrow \frac{az_C + b = z_D}{az_E - az_c = z_E - z_D}$$

$a(z_E - z_C) = z_E - z_D$

$$a = \frac{z_E - z_D}{z_E - z_C} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\varpi = \frac{b}{1-a} \Rightarrow b = \varpi \times (1-a) = z_E \times (1-a) = \frac{\sqrt{3}}{3} + i$$

Donc $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) z + \frac{\sqrt{3}}{3} + i$

EXERCICE 2

A. $f(x) = \frac{6x^2+22x+20}{x^2+5x+6}$

1. $f(2) = \frac{22}{5} = 4{,}4$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2 + 22x + 20}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2}{x^2} = 6$$

2. $f(x) = 6 - \frac{8x+16}{x^2+5x+6}$ obtenu après division euclidienne.

3.a. $f'(x) = \left(6 - \frac{8x+16}{x^2+5x+6}\right)' = (6)' - \left(\frac{8x+16}{x^2+5x+6}\right)' \Rightarrow f'(x) = \frac{8(x+2)^2}{(x^2+5x+6)^2}$

b. Tableau de variation:

$f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.

x	2	$+\infty$
f '(x)	+	
f (x)	4,4 $\nearrow$	6

B. La variable aléatoire X ne dépend pas de n dans la question 1.a)

1. a. $X \in \{3; 4; 5; 6\}$.

b. Loi de probabilité

Le nombre total de jeton dans l'urne étant $+3$, on a :

$$P(X=3)=\frac{C_1^1\times C_2^1}{C_{n+3}^2}=\frac{2}{\frac{(n+3)!}{2!\,(n+3-2)!}}=\frac{2}{\frac{(n+3)!}{2!\,(n+1)!}}=\frac{4(n+1)!}{(n+3)!}=\frac{4(n+1)!}{(n+3)(n+2)(n+1)!}=\frac{4}{n^2+5n+6}$$

$$P(X=4)=\frac{C_1^1\times C_n^1+C_2^2}{C_{n+3}^2}=\frac{n+1}{\frac{(n+3)!}{2!\,(n+3-2)!}}=\frac{2(n+1)(n+1)!}{(n+3)!}=\frac{2(n+1)(n+1)!}{(n+3)(n+2)(n+1)!}=\frac{2n+2}{n^2+5n+6}$$

$$P(X=5)=\frac{C_2^1\times C_n^1}{C_{n+3}^2}=\frac{2n}{\frac{(n+3)!}{2!\,(n+3-2)!}}=\frac{4n(n+1)!}{(n+3)!}=\frac{4n(n+1)!}{(n+3)(n+2)(n+1)!}=\frac{4n}{n^2+5n+6}$$

$$P(X=6)=\frac{C_n^2}{C_{n+3}^2}=\frac{\frac{n!}{2!\,(n-2)!}}{\frac{(n+3)!}{2!\,(n+3-2)!}}=\frac{n!}{2!\,(n-2)!}\times\frac{2!\,(n+1)!}{(n+3)!}=\frac{n!\,(n+1)!}{(n-2)!\,(n+3)!}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)!\,(n+1)!}{(n-2)!\,(n+3)(n+2)(n+1)!}=\frac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}=\frac{n^2-n}{n^2+5n+6}$$

x_i	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{n^2+5n+6}$	$\frac{2n+2}{n^2+5n+6}$	$\frac{4n}{n^2+5n+6}$	$\frac{n^2-n}{n^2+5n+6}$

2.a. Déterminons $E(X)$ |'espérance mathématique de X :

$$E(X)=3\times\frac{4}{n^2+5n+6}+4\times\frac{2n+2}{n^2+5n+6}+5\times\frac{4n}{n^2+5n+6}+6\times\frac{n^2-n}{n^2+5n+6}$$

$$E(X)=\frac{12+8n+8+20n+6n^2-6n}{n^2+5n+6}=\frac{6n^2+22n+20}{n^2+5n+6}$$

b. Déterminons n pour que $E(X)$ égale à 5 .

$$E(X)=5\Leftrightarrow\frac{6n^2+22n+20}{n^2+5n+6}=5\Leftrightarrow 6n^2+22n+20=5(n^2+5n+6)$$

$$\Leftrightarrow n^2-3n-10=0\Leftrightarrow n=-2 \text{ ou } n=5$$

$n=-2$ ou $n=5$ et $n\in[2;+\infty[$, on retient donc $n=5$.

c. $4{,}4\leq E(X)\leq 6$

En moyenne, on peut espérer obtenir une somme de points comprise entre 4,4 et 6.

PROBLEME

PARTIE A

1.a. Vérifions que : $\forall x\in]0;+\infty\left[, g'(x)=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x}\right.$.

$$g'(x) = \left(\frac{2}{3}x^3 + 1 - 2\ln x\right)' = 2x^2 - \frac{2}{x} = \frac{2x^3 - 2}{x} = \frac{2(x^3 - 1)}{x} = \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x}$$

b.

$\forall x \in]0; +\infty[, x > 0$ et $x^2 + x + 1 > 0$

le signe de $g'(x)$ dépend dusigne de $(x - 1)$ or $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

donc $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

d. g est strictement décroissante sur $]0; 1[$

g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$

2.a. Tableau de variation de g.

x	0		1		$+\infty$
g'(x)	‖	-	0	+	
g (x)	‖ $+\infty$	↘	$\frac{5}{3}$	↗	$+\infty$

b. Déterminons le signe de $g(x)$.

$\frac{5}{3}$ est le minimum absolu de g sur $]0; +\infty[$.

Donc $\forall x \in]0; +\infty \Big|, g(x) \geq \frac{5}{3} > 0$ d'où $g(x) > 0$

PARTIE B

1.a. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

car $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3}x - 1 = +\infty$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3}x - 1 + \frac{1}{x^2}x\ln x = -\infty$$

b. la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale car $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

2. a. $(f(x) - y) = \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x}$ donc $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x} = 0$ donc (D): $y = \frac{2}{3}x - 1$ est asymptote oblique à (C)

b. $(f(x) - y) = \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x}$ le signe de $(f(x) - y)$ dépenddusigne deln x or $\ln x < 0$ sur $]0; 1[$ et $\ln x > 0$ sur $]1; +\infty[$.

(C) est en dessous de (D) sur]0; ; $1[$

(C) est au dessus de (D) sur $]1; +\infty[$

3.a. $f'(x) = \frac{2}{3} + \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \frac{\frac{2}{3}x^4 + x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{\frac{2}{3}x^3 + 1 - 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$ b) $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ donc $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$ car on a montré que $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

c. Tableau de variation de f.

x	0	$+\infty$
g'(x)	||	+
g (x)	|| $-\infty$ ↗	$+\infty$

4.a. Justification de la solution unique.

f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

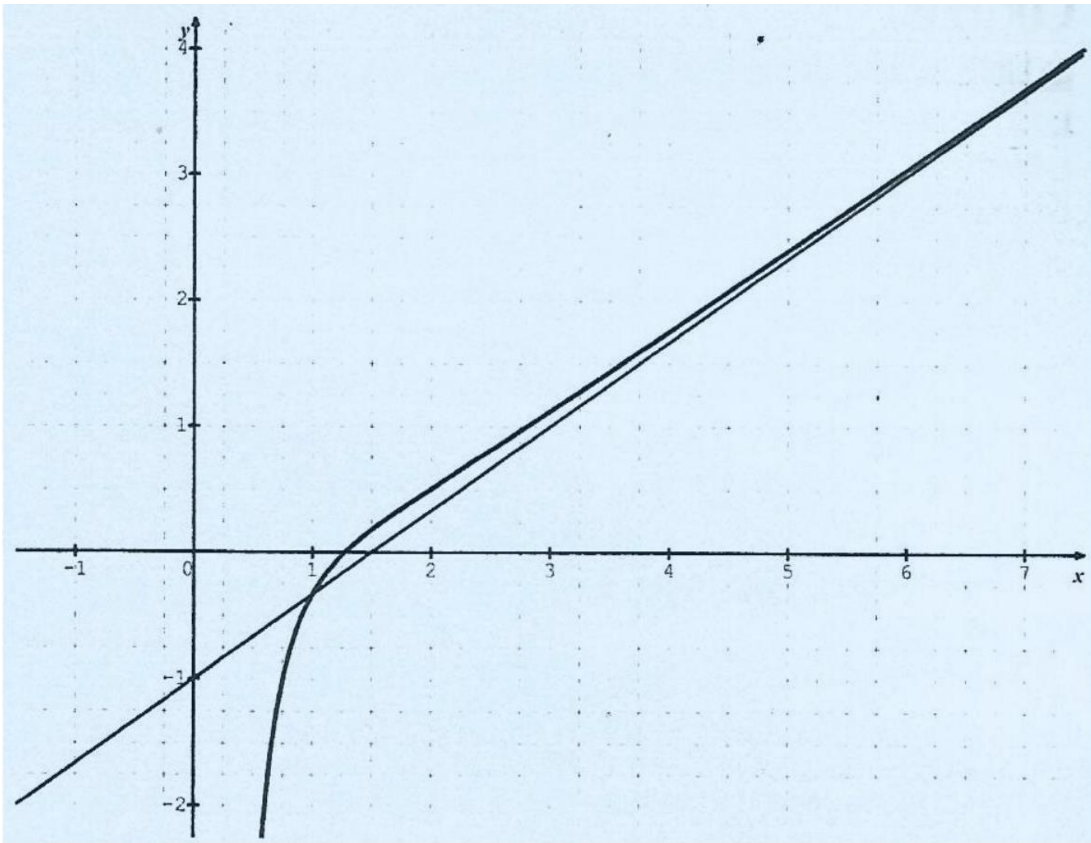
$0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0; +\infty[$.

b. $]1,15; 1,3[\subset |0; +\infty|$

$f(1,15) \simeq -0,13$ et $f(1,3) \simeq 0,02$

$f(1,15) \times f(1,3) < 0$ donc $1,15 < \alpha < 1,3$.

c. Construction de (D) et (C).



5.a. $\int_1^{\lambda} \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{-\ln \lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} + 1$

$\mathrm{A}(\lambda) = 4\left(-\frac{\ln \lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} + 1\right) \mathrm{cm}^2$

b. $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = 4 \text{ cm}^2$ ou 4 .

CORRECTION SESSION NORMALE 2004 SERIE D

EXERCICE 1

I.

1. On choisit 5 sacs parmi les 60 sacs du chargement.

$\text{card}\,\Omega = C_{60}^{5} = 5461512.$

Soit A l'évènement : «Exactement 2 sacs contiennent le produit non déclaré ».

$\text{card}\,A = C_{10}^{2} \times C_{50}^{3} = 882000 \Rightarrow P(A) = \dfrac{\text{card}\,A}{\text{card}\,\Omega} = \dfrac{882000}{5461512} \simeq 0{,}2$

2. Soit B : " l'un au moins des 5 sacs contrôlés contient le produit non déclaré " L'évènement contraire est $\bar{B}$: « aucun des 5 sacs contrôlés ne contient le produit non déclaré "

On a: $P(\bar{B}) = \frac{\text{card}\,\bar{B}}{\text{card}\,\Omega} = \frac{C_{50}^{5}}{C_{60}^{5}} \approx 0{,}4$ D'où: $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$

II.

1. a. Sur le trajet, il y a trois barrages.

A chaque barrage, si le produit non déclaré est saisi, le camionneur paie 10000 F.

D'où : $X = \{0; 10000; 20000; 30000\}.$

L'expérience conduit à 2 éventualités : le produit non déclaré est saisi ou non.

Il s'agit donc d'une expérience de Bernoulli.

L'expérience étant répétée 3 fois (il y a 3 barrages), la variable aléatoire suit la loi binômiale suivante :

$P(X = k) = C_{n}^{k} p^{k} q^{n-k} = \dot{C}_{3}^{k} (0{,}6)^{k} (0{,}4)^{3-k}$

Car $n = 3; k \in \{0; 1; 2; 3\}, p = 0{,}6$ et $q = 0{,}4.$

Si $k = 0$: $P(X = 0) = C_{3}^{0} (0{,}6)^{0} (0{,}4)^{3-0} = (0{,}4)^{3} = 0{,}064$

Si $k = 1$: $P(X = 1) = C_{3}^{1} (0{,}6)^{1} (0{,}4)^{2} = 0{,}288$

Si $k = 2$: $P(X = 2) = C_{3}^{2} (0{,}6)^{2} (0{,}4)^{1} = 0{,}432$

Si $k = 3$: $P(X = 3) = C_{3}^{3} (0{,}6)^{3} (0{,}4)^{0} = (0{,}6)^{3} = 0{,}216$

La loi de probabilité de X est :

x_i	0	10000	20000	30000
$PX = x_i$	0,064	0,288	0,432	0,216

b. L'espérance mathématique $E(X)$.

$E(X) = 0 \times 0{,}064 + 10000 \times 0{,}288 + 20000 \times 0{,}432 + 30000 \times 0{,}216 = 18000.$

2. On suppose que le camionneur ne peut payer la taxe.

Le produit est saisi dans les cas suivants :

- le produit est détecté dès le 1^{er} barrage.
- le produit n'est pas détecté au 1^{er} barrage mais est détecté au $2^{\text{ème}}$ barrage.
- le produit n'est pas détecté aux 2 barrages précédents mais est détecté au 3ème barrage.

La probabilité de saisir le chargement est : $p = 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}6 + (0{,}4)^2 \times 0{,}6 = 0{,}936.$

EXERCICE 2

$Z_A = 4i, Z_B = 2\sqrt{3} + 2i$ et $Z_C = -2\sqrt{3} + 2i.$

1. $|z_A| = \sqrt{4^2} = 4$ soit θ_A un argument de z_A, on a :

$\begin{cases} \cos\theta_A = \frac{0}{4} = 0 \\ \sin\theta_A = \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$ d' où $A_{rg} z_A = \theta_A = \frac{\pi}{2}$

$|z_B| = \sqrt{4 \times 3 + 4} = 4$ soit θ_B un árgument de z_B, on a :

$\begin{cases} \cos\theta_B = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_B = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$ d'où $\operatorname{Arg} z_B = \theta_B = \frac{\pi}{6}$

$|z_c| = \sqrt{4 \times 3 + 4} = 4$ soit θ_c un argument de z_c, on a :

$\begin{cases} \cos\theta_C = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_C = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$ d'où $Arg z_C = \theta_C = \frac{5\pi}{6}$

2. On a: $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 4 \Leftrightarrow OA = OB = OC$

Donc les points A, B et C appartiennent au cercle $C(0; 4)$.

3. Démontrons que le triangle OBA est équilatéral.

$$AB = |z_{AB}| = |z_B - z_A| = |2\sqrt{3} - 2i|^* = 4$$

Comme $AB = OA = OB$ alors le triangle OBA est équilatéral.

4. Démontrons que OBAC est un losange.

$$CA = |z_{CA}| = |z_A - z_C| = |2i + 2\sqrt{3}| = 4$$

Comme $OB = BA = CA = CO = 4$ et de plus (OB) est parallèle à (CA) ($\text{car}\, z_{OB} = z_{CA}.$) Donc le quadrilatère OBAC est un losange.

5. K est le milieu de $[OA]$; S est la similitude directe de centre O telle que $S(B) = K$.

a. Détermination de l'écriture complexe de S.

Méthode 1

$\frac{\text{St}}{O}$ Le rapport k de S: $k = \frac{OK}{OB} = \frac{|z_K|}{|z_B|} = \frac{|2i|}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$\text{Car}\, z_k = \frac{z_O + z_A}{2} = \frac{z_A}{2} = 2i$$

L'angle orienté θ de S :

$$\theta = \text{Arg}\left(\frac{z_{OK}}{z_{OB}}\right) = \text{Arg}\left(\frac{z_K}{z_B}\right) = \text{Arg}(z_k) - \text{Arg}(z_B) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Le centre de S st le point O tel que $z_0 = 0$.

L'écriture complexe est donc: $z' = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot z$.

On en déduit : $z' = \frac{1}{2}\left(\frac{i\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) z = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z$

Méthode 2

L'écriture complexe de S est de la forme : $z' = az + b$ avec a et b des nombres complexes et $|a| \neq 1$.

$S(O) = O$ et $S(B) = K$ d'où :

$$\begin{cases} 0 = 0 \times a + b \\ 2i = a(2\sqrt{3} + 2i) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \dfrac{2i}{2(\sqrt{3} + i)} = \dfrac{i(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \dfrac{1 + \sqrt{3}i}{4} \end{cases}$$

d'où $z' = \frac{1+\sqrt{3}i}{4} z$

b. L milieu de $[AC]$ donc $z_L = \frac{z_C + z_A}{2} = -\sqrt{3} + 3i$

$$z'_L = \frac{1 + \sqrt{3}i}{4}(-\sqrt{3} + 3i) = \frac{1}{4}(-\sqrt{3} - 3i + 3i - 3\sqrt{3}) \Rightarrow z'_L = -\sqrt{3}$$

c. (LO) est la médiatrice du segment [AC]. Or $S(O) = O$ et $S(L) = L'$.

$z'_L = -\sqrt{3}$ alors $L' \in (OI)$. Donc $((O\ L)) = (OI)$.

L'image de la médiatrice (LO) est (OI).

PROBLEME

PARTIE A

$P(x) = e^{2x} - 5e^x + 4$

1. Résolvons l'équation $x \in \mathbb{R}, P(x) = 0$.

$P(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 5e^x + 4 = 0.$

On pose $X = e^X$ avec $e^X > 0$. L'équation devient: $X^2 - 5X + 4 = 0$

$$\Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2$$
$$X_1 = \frac{5-3}{2} = 1; x_2 = \frac{5+3}{2} = 4$$
$$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0; e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$$

Les solutions de l'équation sont : $\{0; \ln 4\}$.

2. $P(x) = (e^x - 1)(e^x - 4)$

Signe de $P(x)$

x	$-\infty$		0		ln4		$+\infty$
P(x)		+	0	-	0	+	

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]\ln 4; +\infty[; P(x) > 0$
$\forall x \in]0; \ln 4[, P(x) < 0$

PARTIE B

$f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{e^x - 2}$

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R}/e^x - 2 \neq 0\}$

$$e^x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \ln 2 \Rightarrow D_f =]-\infty; \ln 2[\cup]\ln 2; +\infty[$$

2. Calcul des limites

$\lim_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x - 1 = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x-2} = -\frac{1}{2}$ donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to\ln 2} e^x - 2 = 0$ et $e^x - 2 > 0$ si $x > \ln 2$; $e^x - 2 < 0$ si $x < \ln 2$

d'où $\lim_{x \to \ln 2} \frac{1}{e^x-2} = -\infty$ et $\lim_{x \to \ln 2} \frac{1}{e^x-2} = +\infty$.

donc $\lim_{x \to \ln 2} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to \ln 2} f(x) = +\infty$

3. a. Vérifions que : $f'(x) = \frac{P(x)}{(e^X-2)^2}$

$$\forall x \in Df, f'(x) = (x-1)' + \left(\frac{1}{e^x-2}\right)' = 1 - \frac{e^x}{(e^x-2)^2} = \frac{(e^x-2)^2 - e^x}{(e^x-2)^2}$$
$$f'(x) = \frac{e^{2x} - 4e^x + 4 - e^x}{(e^x-2)^2} = \frac{P(x)}{(e^x-2)^2}$$

b. Le signe de $f'(x)$.

$\forall x \in D_{f'} (e^x-2)^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $P(x)$.D'où :

Si $x \in]-\infty; 0[\cup]\ln 4; +\infty$ |, $f'(x) > 0$

Si $x \in 0; \ln 2[\cup \ln 2; \ln 4$ |, $f'(x) < 0$

Si $x \in \{0; \ln 4\}$, $f'(x) = 0$

c. Tableau de variation de f.

x	-∞		0		ln2		ln4		+∞
f '(x)		+	0	-	‖	-	0	+	
f(x)	-∞	↗	-2	↘ -∞	‖	+∞ ↘	$\ln 4 - \frac{1}{2}$	↗	+∞

4. Démontrons que la droite (D): $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$

$[f(x) - y] = \frac{1}{e^x-2}$ or $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x-2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = 0$

D'où la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

5. Sur $]\ln 2; +\infty[, (e^x - 2) > 0$ donc $[f(x) - y] > 0$ alors (C) est au dessus de l'asymptote (D).

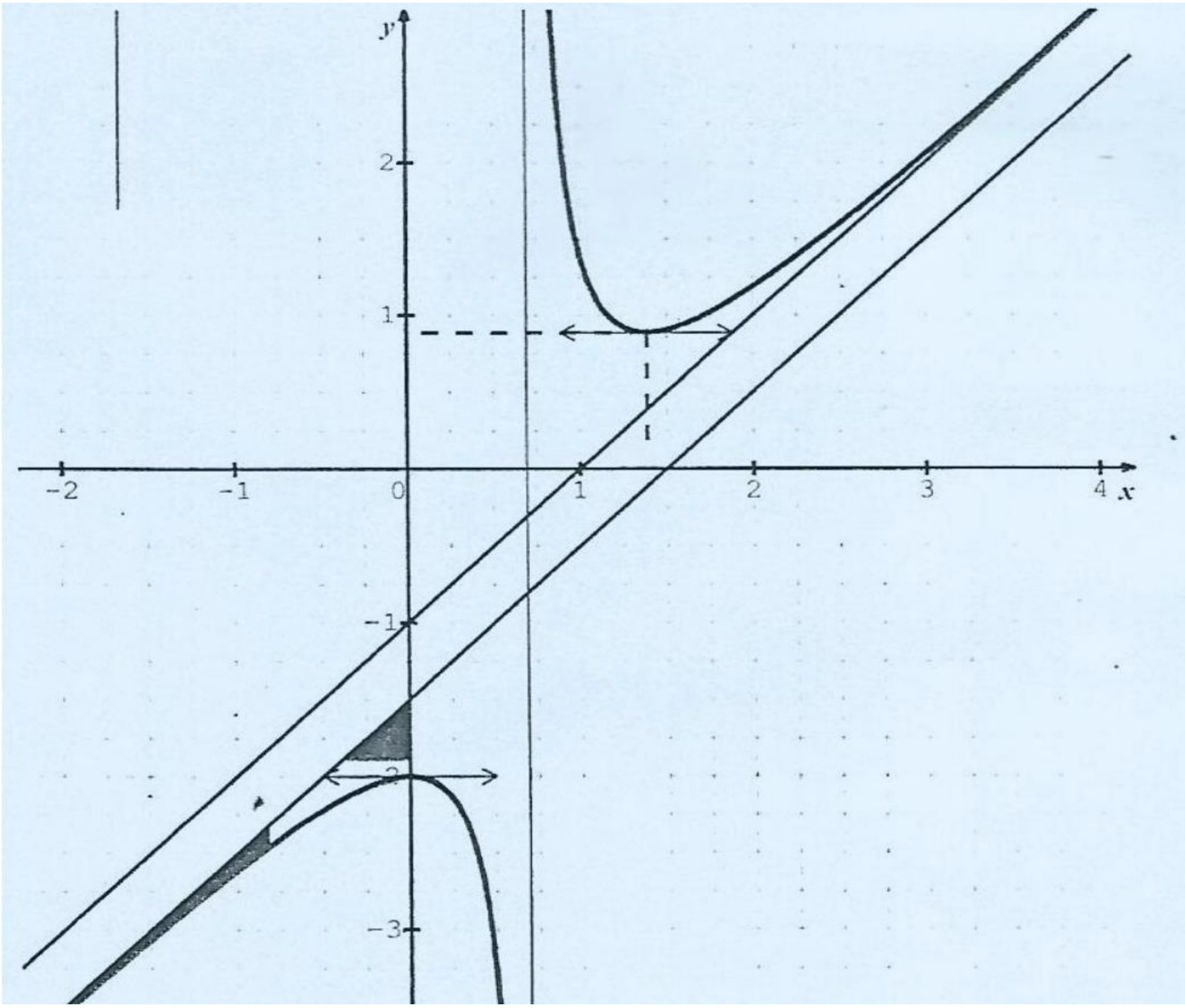
6. $\forall x \in D_{f'} f(x) = x - 1 + \frac{1}{e^x-2} = x - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x-2} + \frac{1}{2} = x - \frac{3}{2} + \frac{1\times2+e^x-2}{2(e^x-2)}$ D'où $f(x) = x - \frac{3}{2} + \frac{e^x}{2(e^x-2)}$

7. $[f(x) - y] = \frac{e^x}{2(e^x-2)}$ or $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{2(e^x-2)} = 0$ car $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) - y = 0$

D'où la droite (Δ) d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

8. Sur $]-\infty; \ln 2[$, $(e^x - 2) < 0$ et $e^x > 0$ donc $[f(x) - y] < 0$ alors (C) est en dessous de l'asymptote (Δ)

9. Construction de (C).



PARTIE C

Soit λ un nombre réel strictement négatif.

1. $\mathrm{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^{0} -(f(x) - y)dx.4\ \mathrm{cm}^2 = \int_{\lambda}^{0} -\frac{e^x}{2(e^x-2)}dx.4\ \mathrm{cm}^2$

$$= -2\int_{\lambda}^{0} \frac{e^x}{(e^x-2)}dx \cdot 4cm^2 = -2\left[\ln|e^x - 2|\right]_{\lambda}^{0} \cdot cm^2$$

$\mathrm{A}(\lambda) = -2[\ln 1 - \ln|e^{\lambda} - 2| \cdot\cdot \mathrm{cm}^2 = 2\ln(2 - e^{\lambda}) \cdot \mathrm{cm}^2$

2. a. $\lim_{\lambda \to -\infty} A(\lambda) = 2\ln(2).\mathrm{cm}^2 = \ln 4\ \mathrm{cm}^2$ car $\lim_{\lambda \to -\infty} e^{\lambda} = 0$ b. Voir figure.

   b. Voir figure

CORRECTION SESSION DE REMPLACEMENT 2003 SERIE D

EXERCICE 1

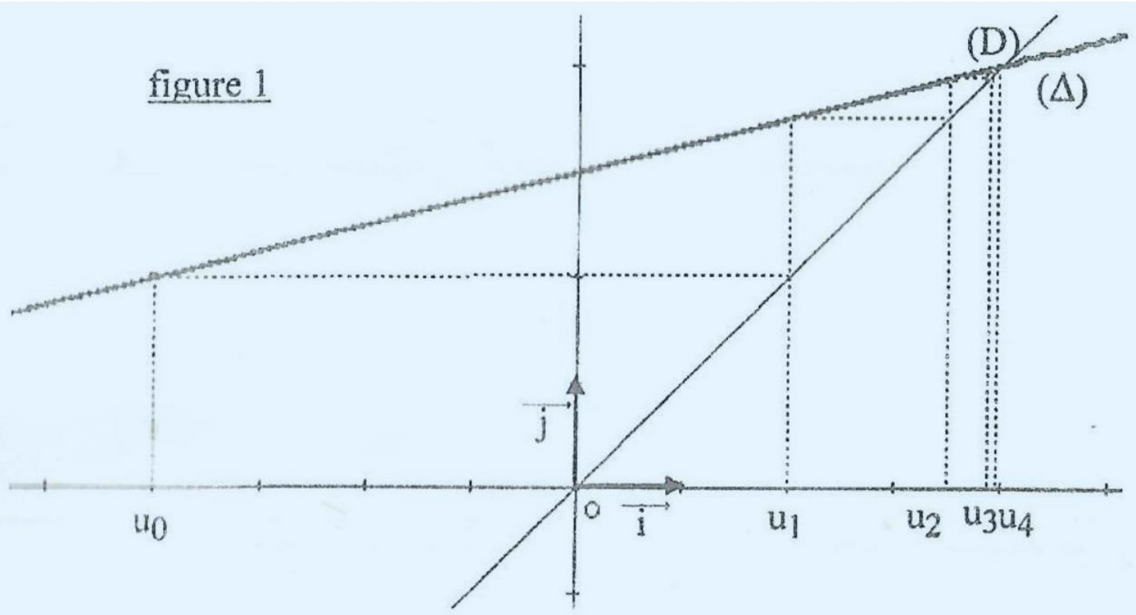
1. Calculons u_1

On a : $u_1 = f(u_0) = \frac{1}{4}u_0 + 3 = 2.$

2. a. Les droites (D) et (A) sont tracées sur la figure

   b. Plaçons u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 sur la figure

On a: $u_0 = -4, u_1 = f(u_0), u_2 = f(u_1), u_3 = f(u_2), u_4 = f(u_3).$



c. Conjecturons la convergence de la suite u

Graphiquement, la suite u semble converger vers le nombre réel 4.

3. a. Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 4.$

On a : $u_0 = -4$, donc $u_0 < 4$

Soir k, un entier naturel quelconque.

Supposons que $u_k < 4$ et montrons que $u_{k+1} < 4.$

On a $u_{k+1} = f(u_k) = \frac{1}{4}u_k + 3,$

donc $u_k < 4 \Rightarrow \frac{1}{4}u_k < \frac{4}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}u_k + 3 < 1 + 3 \Rightarrow u_{k+1} < 4;$
d'où $u_k < 4 \Rightarrow u_{k+1} < 4.$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 4.$

b. Démontrons que la suite u est strictement croissante

On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + 3 - u_n = -\frac{3}{4}u_n + 3 = -\frac{3}{4}(u_n - 4)$.

Or d'après la question 3.a., $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 4$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 4 < 0$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ car $-\frac{3}{4} < 0$.

La suite u est donc strictement croissante.

c. Justifions que la suite est convergente

D'après les questions 3.a. et 3.b., la suite u est strictement croissante et majorée par 4. Donc la suite u est convergente.

4. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 4$

a. Démontrons que v est une suite géométrique

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \left(\frac{1}{4}u_n + 3\right) - 4 = \frac{1}{4}u_n - 1 = \frac{1}{4}(u_n - 4) = \frac{1}{4}v_n.$

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n,$

donc la suite v est géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme $\mathrm{v}_0 = \mathrm{u}_0 - 4 = -8$

b. Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{-2}{4^{n-1}}$

v est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = -8,$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 q^n = -8.\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{-8}{4^n} = \frac{-2\times 4}{4^n} = \frac{-2}{4^{n-1}}.$

La formule étant vraie pour tout entier n, elle l'est aussi pour tout entier non nul, donc
$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{-2}{4^{n-1}}.$

c. Déterminons la limite de la suite v

$\mathbf{1^{re}}$ **méthode** : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{-2}{4^{n-1}}$ ef $\lim_{n\to+\infty} 4^{n-1} = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0.$

$\mathbf{2^{\theta}}$ **méthode** : v est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ avec $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$; donc la suite v converge vers 0 d'où $\lim v_n = 0.$

d. Déduisons la limite de la suite u

On a: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 4$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + 4$, or $\lim v_n = 0, n \to +\infty$

donc $\lim u_n = 4.$

5. a. Exprimons u_n en fonction de n

$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{-2}{4^{n-1}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = v_n + 4$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{-2}{4^{n-1}} + 4.$

b. Trouvons une valeur de l'entier naturel k telle que $|u_k - 4| < 10^{-10}$ On a : $|u_k - 4| = \left|\frac{-2}{4^{k-1}+4-4}\right| = \frac{2}{4^{k-1}}$.

$$\begin{aligned}
|u_k - 4| < 10^{-10} &\Leftrightarrow \frac{2}{4^{k-1}} < 10^{-10};\\
&\Leftrightarrow \frac{4^{k-1}}{2} > 10^{10};\\
&\Leftrightarrow 4^{k-1} > 2.10^{10};\\
&\Leftrightarrow \ln\left(4^{k-1}\right) > \ln(2.10^{10});\\
&\Leftrightarrow (k-1)\ln 4 > \ln(2.10^{10});\\
&\Leftrightarrow k - 1 > \ln\frac{(2.10^{00})}{\ln 4}, \text{car} \ln 4 > 0;\\
&\Leftrightarrow k > \frac{\ln\left(2.10^{10}\right)}{\ln 4} + 1;\\
&\Leftrightarrow k > 18{,}11.
\end{aligned}$$

Toute valeur de l'entier naturel k supérieur ou égale à 19 convient. On choisit la plus petite valeur de l'ensemble, d'où $k = 19$.

EXERCICE 2

1. Vérifions que :

$\forall Z \in \mathbb{C}, Z^3 - 2iZ^2 + 4(1+i)z + 16 + 16i = (z+2)[Z^2 - 2(1+1)z + 8(1+1)]$

$\forall Z \in \mathbb{C},\ (Z+2)[Z^2 - 2(1+i)Z + 8(1+i)]$

$$\begin{aligned}
&= z^3 - 2(1+i)z^2 + 8(1+i)z + 2z^2 - 4(1+i)z + 16(1+i)\\
&= z^3 + (-2 - 2i + 2)z^2 + 4(1+i)z + 16 + 16i\\
&= z^3 - 2iz^2 + 4(1+i)z + 16 + 16i
\end{aligned}$$

d'où: $\forall Z \in \mathbb{C}, Z^3 - 2iZ^2 + 4(1+i)Z + 16 + 16i = (Z+2)[Z^2 - 2(1+i)Z + 8(1+i)]$.

2. a. Déterminons les racines carrées du nombre complexe -8-6i

Résolvons l'équation: $(E_2): z \in \mathbb{C}, z^2 = -8 - 6\mathrm{i}$.

Posons $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels. On a : $|-8-6i| = \sqrt{64+36} = 10$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_2 z^2| = |-8-6i| \\ (x+iy)^2 = -8-6i \end{cases}$$

$$(\quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 - 8 - 8 \\ 2xy = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = -8(2) \\ xy = -3(3) \end{cases}$$

(1)+ (2) donne $2x^2 = 2$ d'où $x = 1$ ou $x = -1$.

(1) - (2) donne $2y^2 = 18$ d'où $y = 3$ ou $y = -3$.

L'équation (3) nous permet de déterminer les couples solutions $(-1; 3)$ et $(1; -3)$. Les solutions de l'équation (E_2), c'est-à-dire les racines carrées de $-8 - 6i$ sont $-1 + 3i$ et $1 - 3i$.

b. Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E_1): Z^2 - 2(1+i)Z + 8(1+i) = 0$

Calculons le discriminant de (E_1).

$$\begin{aligned}
\Delta &= [-2(1+i)]^2 - 4 \times 8(1+i); \\
&= 4(1+i)^2 - 32(1+i); \\
&= 8i - 32 - 32i; \\
&= -32 - 24i; \\
&= 4(-8-6i);
\end{aligned}$$

$\Delta = 4(1-3i)^2$ d'après la question $2.a$.

Les racines carrées de Δ sont donc $2(1-3i)$ et $2(-1+3i)$.

Les solutions de (E_1) sont donc :

$$\frac{2(1+i)+2(1-3i)}{2} = 1+i+1-3i \text{ et } \frac{2(1+i)+2(-1+3i)}{2} = 1+i-1+3i$$

$$= 2-2i$$
$$= 4i$$

donc $S_c = \{4i, 2-2i\}$.

c. Déduisons les solutions de l'équation (**E**)

(E) $\Leftrightarrow Z + 2 = 0$ ou $Z^2 - 2(1+i)Z + 8(1+i) = 0$

$\Leftrightarrow Z = -2$ ou $Z = 4i$ ou $Z = 2 - 2i$

$S_c = \{-2, 4i, 2-2i\}$.

3. Soit $A(-2), B(4i)$ et $C(2-2i)$

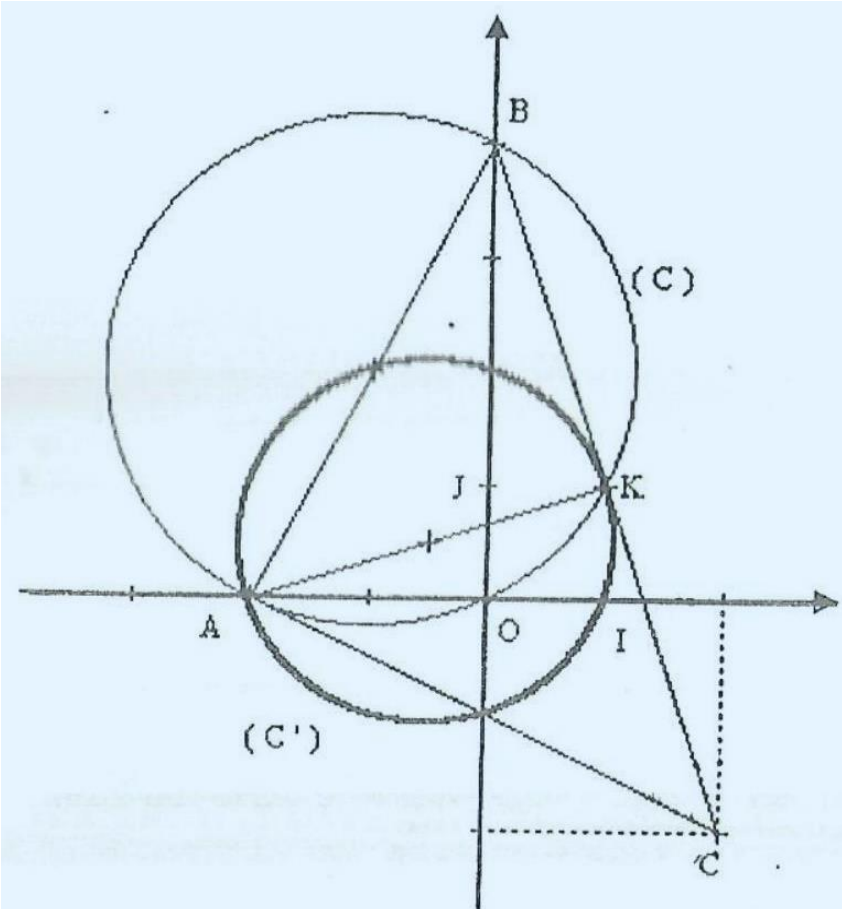
   a. (Voir figure 2).

   b. Déterminons et construisons l'image (C') du cercle (C) de diamètre $[AB]$

S est la similitude directe de centre A qui transforme B en K;

donc S transforme le segment $[AB]$ en le segment $[AK]$.

Ainsi le cercle (C) de diamètre [AB] est. transformé en cercle de diamètre [AK]; donc (C_1) est le cercle de diamètre $[AK]$.



c. Déterminons l'écriture complexe de S

L'écriture complexe de S est de la forme : $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Le milieu K de $[BC]$ a pour affixe $Z_K = \frac{Z_B+Z_C}{2} = \frac{4i+2-2i}{2} = 1+i$.

On a : $S(A) = A \Leftrightarrow -2a + b = -2$ et $S(B) = K \Leftrightarrow 4ia + b = 1 + i$.

Résolvons dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le système (S) : $\begin{cases} -2a + b = -2 \text{ (1)} \\ 4ia + b = 1 + i(2) \end{cases}$

(2) $-(1) \Leftrightarrow (2+4i)a = 3 + i \Leftrightarrow a = \frac{3+4}{2+4i} = \frac{(3+i)(2-4i)}{20} = \frac{1-i}{2}$, donc, $a = \frac{1-i}{2}$.

En remplaçant a par $\frac{1-i}{2}$ dans l'équation (1),

on a: $\mathrm{b} = -2 + 2\mathrm{a} = -2 + 1 - \mathrm{i} = -1 - \mathrm{i}$, donc $\mathrm{b} = -1 - \mathrm{i}$.

L'écriture complexe de S est donc : $z' = \frac{1-i}{2}z - 1 - i$.

d. Déterminons l'angle et le rapport de S

On a: $z' = az + b$ avec $a = \frac{1}{2}(1-i)$. Or $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$,

Donc $\mathrm{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

Le rapport de S est $|\, a \,\Big| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et l'angle S est $\mathrm{Arg}(a) = -\frac{\pi}{4}$.

PROBLEME

f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f(x) = \frac{e^x-2}{e^x-2x}$.

1. a Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x - 2x > 0$

La fonction $u: x \mapsto e^x - 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = e^x - 2$. $u'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$ et $u(\ln 2) = 2(1 - \ln 2)$;

d'où le tableau de variation de u.

x	$-\infty$		ln2		$+\infty$
u'(x)		$-$	0	$+$	
u(x)		$\searrow$	$2(1 - \ln 2)$	$\nearrow$	

D'après l'étude ci-dessus, $2(1 - \ln 2)$ est le minimum de u sur $\mathbb{R}$. Or $2(1 - 1{,}2) > 0$ donc pour tout nombre réel $x, u(x) > 0$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x - 2x > 0$.

b. Déduisons l'ensemble de définition de f.

D'après 1.a., $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \neq 0$, donc $D_{\mathrm{f}} = \mathbb{R}$.

c. Déterminons les limites de fi en $-\infty$ êt en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, car lorsque $x \to -\infty, \begin{cases} e^x \to 0 \\ (e^x - 2) \to -2 \\ (e^x - 2x) \to +\infty \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x\left(1-\frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{2x}{e^x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1-2e^{-x}}{1-2xe^{-x}} = 1$$

car lorsque $x \to +\infty, \begin{cases} e^{-x} \to 0 \\ xe^{-x} \to 0 \end{cases}$

d. Donnons une interprétation graphique des résultats précédents

(Γ) admet respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$ lẹs droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$ pour asymptote.

2. g est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $g(x) = (2 - x)e^x - 2$

a. Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (1 - x)e^x$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -e^x + (2 - x)e^x$;

$$= (-1 + 2 - x)e^x;$$

$$= (1 - x)e^x.$$

Donc: $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x): (1 - x)e^x$.

b. Étudions les variations de g sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (1-x)e^x$.

le signe de $g'(x)$ est celui de $1-x$ car $e^x > 0$.

Donc : $\forall x \in]-\infty; 1[, g'(x) > 0$,

$\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) < 0$

et $g(1) = e - 2$.

On en déduit que la fonction g est strictement croissante sur]- $\infty, 1$] et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

c. Dressons le tableau de variation de g

x	$-\infty$		1		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	
g(x)		↗	$e-2$	↘	

d. Déterminons la limite de g en $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ car lorsque : $x \to +\infty, \begin{cases}(2-x) \to -\infty \\ e^x \to +\infty\end{cases}$.

Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $[1; +\infty[$.

La fonction g est continue et strictement décroissante sur :

$[1; +\infty[$ et $g([1, +\infty[) =]\lim_{x\to+\infty} g(x); g(1)] =]-\infty; e-2]$.

La fonction g réalise donc une bijection de $[1; +\infty[$ sur $]-\infty; e-2]$. Or e > 2, donc $e - 2 > 0$, d'où $0 \in]-\infty; e-2]$. Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $[1; +\infty[$.

e. Calculons $g(0)$ et démontrons que

$\forall x \in]-\infty, 0[, g(x) < 0$

$\forall \in]0, \alpha[, \ g(x) > 0$

$\forall x \in]\alpha, +\infty[, g(x) < 0$.

On a : $g(0) = 0$.

Complétons le tableau de variation de g.

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$g(x)$		↗	0	↗	$e-2$	↘	0	↘	$-\infty$

g est strictement croissante sur $]-\infty;1]$ et $g(0)=0$,

donc $\forall x \in]-\infty;0[, g(x)<0$ et $\forall x \in]0;1]; g(x)>0$,

g est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$ et $g(\alpha)=0$,

donc $\forall x \in [1;\alpha[; g(x)>0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[; g(x)<0$.

On déduit donc que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty,0[, g(x)<0 \\ \forall x \in]0,\alpha[, g(x)>0 \\ \forall x \in]\alpha,+\infty[, g(x)<0. \end{cases}$

3. a. Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x-2x)^2}$

$7x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x(e^x-2x)-(e^x-2)(e^x-2)}{(e^x-2x)^2} = \frac{-2xe^x+4e^x-4}{(e^x-2x)^2}$

$$= \frac{2[(2-x)e^x-2]}{(e^x-2x)^2}$$

$$= \frac{2g(x)}{(e^x-2x)^2}$$

b. Dressons le tableau da variation de f.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{2}{(e^x-2x)^2} > 0$.

D'après la question 2.e., on déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	$f(\alpha)$	↘	1

4. a. Démontrons que : $e^\alpha = \frac{2}{2-\alpha}$

On a : $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow (2-\alpha)e^\alpha - 2 = 0;$

$\Leftrightarrow (2-\alpha)e^\alpha = 2$

$\Leftrightarrow e^\alpha = \frac{2}{2-\alpha}$, car $\alpha \neq 2$.

Déduisons un encadrement de α par deux entiers consécutifs.

On a : $e^{\alpha} > 0$ donc $\frac{2}{2-\alpha} > 0$,

c'est-à-dire $2-\alpha > 0$, d'où $\alpha < 2$. De plus $\alpha \in]1;+\infty[$ c'est-à-dire $\alpha > 1$.
On déduit donc que $1 < \alpha < 2$.

b. Déduisons que : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$

On a : $f(\alpha) = \frac{e^{\alpha}-2}{e^{\alpha}-2\alpha} = \frac{\frac{2}{2-\alpha}-2}{\frac{2}{2-\alpha}-2\alpha} = \frac{2-4+2\alpha}{2-4\alpha+2\alpha^2}$

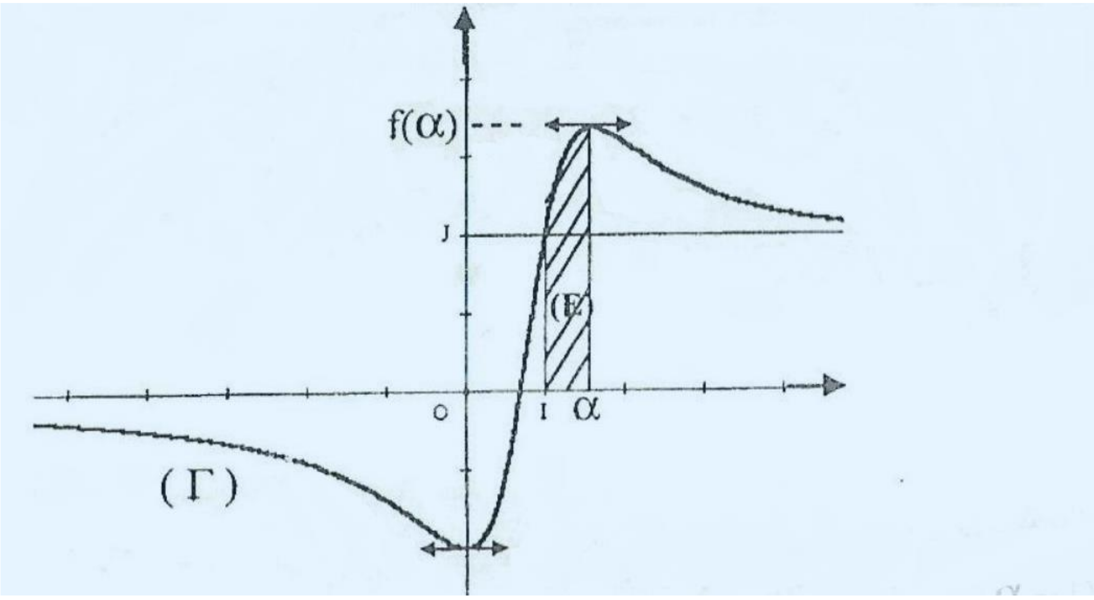
$f(\alpha) = \frac{2(\alpha-1)}{2(\alpha-1)^2} = \frac{1}{\alpha-1}$

c. Démontrons que 1,68 est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à $2 \cdot 10^{-2}$ près :

1,60 est une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès ;

donc $1{,}59 < \alpha < 1{,}60$ d'où $0{,}59 < \alpha < -1 < 0{,}60$ donc $\frac{1}{0{,}60} < \frac{1}{\alpha-1} < \frac{1}{0{,}59}$, d'où $1{,}67 < f(\alpha) < 1{,}69$. Or $1{,}69 - 1{,}67 = 2.10^{-2}$ et $1{,}68 \in]1{,}67;1{,}69[$. Donc 1,68 est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 2.10^{-2} près.

d. Tracons (Γ)



5.Demontrons que l'aire en cm^2 de (E) est égale à $\left(\frac{2(\alpha-1)^2}{(2-\alpha)(e-2)}\right)$

$\mathcal{A}(E) = \left(\int_1^{\alpha} f(x)dx\right) \cdot$ *ua, avec ua* $= 2 \times 4\ cm^2 = 8\ cm^2$

or $\int_1^{\alpha} f(x)dx = \int_1^{\alpha} \frac{e^x-2}{e^x-2x}dx$

$$= \ln[(e^x-2x)]_1^{\alpha} = [\ln(e^x-2x)]_1^{\alpha} \text{car}\, e^x - 2x > 0$$

$= \ln(e^{\alpha} - 2\alpha) - \ln(e-2), \text{car } e^{\alpha} = \frac{2}{2-\alpha}$

$= \ln\left(\frac{2}{2-\alpha} - 2\alpha\right) - \ln(e-2)$

$= \ln\left(\frac{2-4\alpha+2\alpha^2}{2-\alpha}\right) - \ln(e-2)$

$= \ln\left[\frac{2(\alpha-1)^2}{(2-\alpha)(e-2)}\right]$

donc : $\mathcal{A}(E) = 8ln\left[\frac{2(\alpha-1)^2}{(2-\alpha)(\theta-2)}\right] cm^2.$

CORRECTION SESSION NORMALE 2003 SERIE D

EXERCICE 1

1. a. Calculons la probabilité d'obtenir le numéro 2 avec le dé A

Soit E l'événement : "Obtenir le numéro 2 avec le dé A."

On a $p(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

b. Calculons la probabilité d'obtenir le nombre 421 avec le dé A

Soit F l'événement: "Obtenir le nombre 421 avec le dé A. "

On a : $p(F) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{108}$

2. Vérifions que la probabilité d'obtenir le nombre 421 avec le dé B est égate à $\frac{1}{54}$

Soit G l'événement " Obtenir le nombré 421 avec le dé B".

On a: $p(G) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{54}$.

3. a. Démontrons que la probabilité d'obtenir lo nombre 421 dans cette expérience est égale à $\frac{2}{135}$

Désignons par M l'événement : "Obtenir le nombre 421."

N l'événement: "Tirer un dé A."

L'événement " Tirer le dé B " correspond donc à $\bar{N}$.

On a:
$$\begin{aligned} & M = (M \cap N) \cup (M \cap \bar{N}) \\ & \text{d'où } p(M) = p(M \cap N) + p(M \cap \bar{N}); \\ & \quad = \frac{4}{10} \times \frac{1}{108} + \frac{6}{10} \times \frac{1}{54} \\ & \quad = \frac{1}{270} + \frac{1}{190} = \frac{4}{270}. \text{ Donc: } P(M) = \frac{2}{135} \end{aligned}$$

b. Calculons la probabilité qu'Egny ait joué avec un dé de type A sachant qu'il a obtenu 421

On a : $p_M(N) = \frac{p(M \cap N)}{p(M)} = \frac{\frac{1}{270}}{\frac{4}{270}}$, donc $p_M(N) = \frac{1}{4}$.

EXERCICE 2

I)

1. Démontrons que la suite (V) est constante et donnons sa valeur :

Comme $\mathrm{a} = 1$ on a :
$$\begin{aligned} V_{n+1} &= 2U_{n+1} - U_n - U_{n+1} \\ &= U_{n+1} - U_n \\ &= V_n \end{aligned}$$

d'où: $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = \mathrm{V_n}$, donc la suite (V) est une suite constante. On peut donc dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = V_0 = U_1 - U_0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = 2.$$

2. Déduisons que (U) est une suite arithmétique ef que sa raison est égale à 2

D'après la question . ., on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = 2$

La suite (U) est donc une suite arithmétique de raison 2.

3. Exprimons U_n puis S_n en fonction de n

(U_n) est le suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison 2.

On a: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 + 2n;$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 3 + 2n.$

S_n étant la somme des $n+1$ premiers termes de la suite arithmétique (U) on a :
$S_n = \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n) = (n+1)(n+3).$

II)

1. Démontrons que (V) est une suite géométrique de raison 7

Comme $a = -5$ on a: $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = 7U_{n+1} - 7U_n = 7V_n$. La suite (V) est donc une suite géométrique de raison 7.

2. Exprimons V_n en fonction de n

$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = V_0 \times 7^n = 2 \times 7^n$

3. Exprimons la somme T_n en fonctian de n

On a : $T_n = V_0 \times \frac{1-7^n}{1-7} = \frac{7^n - 1}{3}.$

4. Exprimons U_n en fonction de T_n

On a: $V_0 = U_1 - U_0.$

$V_1 = U_2 - U_1$

$V_2 = U_3 - U_2.$

$V_{n-2} = U_{n-1} - U_{n-2}.$

$V_{n\cdot 1} = U_n - U_{n\cdot 1}.$

En effectuant la somme membre à membre de ces n égalités, on obtient: $T_n = U_n - U_0$ d'où $U_n = T_n + 3.$

5. Déduisons que la suite (U) est divergente

On a: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{7^n - 1}{3} + 3.$

$\lim_{n\to 1} U_n = +\infty$ d'où la suite (U) est divergente.

PROBLEME

PARTIE A

1. Calculons les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$

On a :

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}(3 + (x-1)e^{-x}) = 3;$

car $\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = 0.$

$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}(3 + (x-1)e^{-x}) = -\infty;$

car $\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{-x} = -\infty.$

2. Démontrons que pour tout x élément de $\mathbb{R}, h'(x) = (2-x)e^{-x}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = e^{-x} - (x-1)e^{-x} = (2-x)e^{-x}.$

3. Étudions les variations de h et dressons son tableau de variation

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$; le signe de $h'(x)$ est donc celui de $(2-x)$,

d'où $\forall x \in]-\infty;$ 2[, $h'(x) > 0;$

$\forall x \in]2;+\infty[, h'(x) < 0;$

$h'(2) = 0.$

La fonction h est strictement croissante sur $]-\infty;2]$ et strictement décroissante sur $[2;+\infty[$.

Tableau de variation de h :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
h'(x)		+	0	—	
h(x)	$-\infty$	$\nearrow$	h(2)	$\searrow$	3

$h(2) = 3 + e^{-2}.$

4. a. Démontrons que sur l'intervalle]- ∞; 2] l 'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α

Sur l'intervalle]- ∞; 2] h est continue et strictement croissante.

Elle réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty;2]$ vers $h(]-\infty;2]) = 1-\infty; h(2)]$ $(h(2) > 0)$.

Comme $0 \in h(1-\infty;2])$ alors il existe un unique réel $\alpha \in]-\infty;2]$ tel que $h(\alpha) = 0.$

b. Démontrons que $-1 < \alpha < 0$

On a : $h(-1) = 3 - 2e$ $(h(-1) < 0)$.

$h(0) = 2$ $(h(0) > 0)$

$O \in]h(-1); h(0)[$ d'où $\alpha \in]-1; 0[$.

5. Déduisons que $\forall x \in \mathbb{R}$, si $x < \alpha$ alors $h(x) < 0$ et si $x > \alpha$ alors $h(x) > 0$

Complétons le tableau de variation de h :

x	$-\infty$	α		2		$+\infty$
h'(x)		+		0	−	
h(x)	$-\infty$	0 ↗		h(2)	↘	3

h est continue et strictement croissante sur $]-\infty; \alpha[$;

d'où : $\forall x \in]-\infty; \alpha[, h(x) < h(\alpha)$, c'est-à-dire $\forall x \in]-\infty; \alpha[, h(x) < 0$;

h est continue et strictement croissante sur $]\alpha; 2[$;

d'où: $\forall x \in]\alpha; 2[, h(x) > h(\alpha)$ c'est-à-dire $\forall x \in]\alpha; 2[, h(x) > 0$;

h est continue et strictement décroissante sur] 2;+oo[et $h(])2; +\infty 0[$) est l'intervalle $]3; 3 + e^{-2}[$;
d'où $\forall x \in]2; +\infty[h(x) > 3$.

Finalement, $\forall x \in]-\infty; \alpha[, h(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, h(x) > 0$.

PARTIE B

1. Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

On a :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(3x + 1 - xe^{-x}) = +\infty$. Car lorsque

$x \to +\infty, -xe^{-x} \to 0$ et $(3x+1) \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(3x + 1 - xe^{-x}) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(3 + \frac{1}{x} - e^{-x}\right) = +\infty$,
car lorsque $x \to -\infty, -e^{-x} \to -\infty$ et $\left(3 + \frac{1}{x}\right) \to 3$

2. Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = h(x)$

On a : $f'(x) = 3 - e^{-x} + xe^{-x}$

$= 3 + (x-1)e^{-x}$

donc : $f'(x) = h(x)$.

3. Étudions le sens de variation de f et dressons son tableau de variation

Le signe de $f'(x)$ est celui de $h(x)$.

D'après la question .5). on a :

$f'(x) < 0$ pour $x \in]-\infty;\alpha[$, donc f est décroissante sur $]-\infty;\alpha[$ et

$f'(x) > 0$ pour $x \in]\alpha;+\infty[$, donc f est croissante sur $]\alpha;+\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
f(x)	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4. Démontrons que la droite (Δ) d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote à (e) en $+\infty$

Calculons $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (3x+1)]$.

On a : $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (3x+1)] = \lim_{x\to+\infty}(-xe^{-x}) = 0$,

d'où la droite (Δ) d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote à (e) en $+\infty$.

5. Étudions la position relative de (C) et de (Δ)

On a : $f(x) - (3x+1) = -xe^{-x}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $-xe^{-x}$	$+$	0	$-$
Position de ($\mathcal{C}$) par rapport à (Δ)	($\mathcal{C}$) est au-dessus de (Δ)		($\mathcal{C}$) est en dessous de (Δ)

(C) et (Δ) se coupent en J.

6. Démontrons que ($\mathcal{C}$) admet en - - une branche parabolique de direction (OJ)

Calculons $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$.

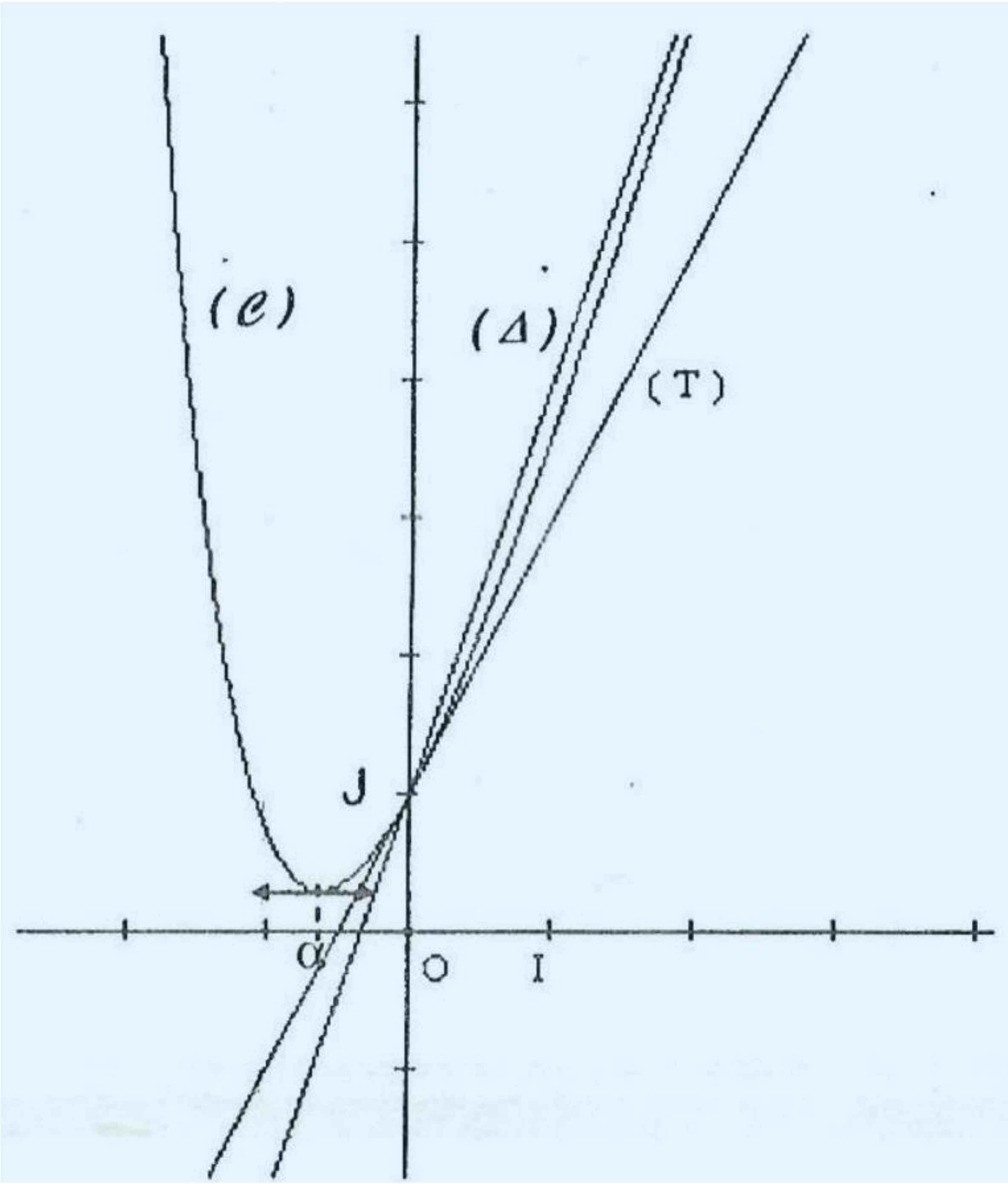
On a : $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(3 + \frac{1}{x} - e^{-x}\right) = -\infty$.
Donc la courbe (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

(7) Déterminons une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

On a : (T): $y = f'(0)x + f(0)$ or $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$;

donc (T) a pour équation $y = 2x + 1$.

8. Traçons (Δ), (T) et (C)



9. a. Calculons $\int_0^\lambda xe^{-x}dx$ à l'aide d'une intégration par parties Posons : $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$; d'où : $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$.

On a : $\int_0^\lambda xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^\lambda + \int_0^\lambda e^{-x}dx$;

$= [-xe^{-x}]_0^\lambda + [-e^{-x}]_0^\lambda$

$= -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$;

d'où $\int_0^{\lambda} xe^{-x}dx = 1-(\lambda+1)e^{-\lambda}$.

b. Calculons l'aire $A(\lambda)$

Sur l'intervalle $[0;\lambda]$ la droite (Δ) est au dessus de la courbe ((C),

d'où $A(\lambda) = \int_0^{\lambda}[(3x+1)-f(x)]dx$;

$= \int_0^{\lambda} xe^{-x}dx$;

$= 1-(\lambda+1)e^{-\lambda}$

Ou $A(\lambda) = 4\left[1-(\lambda+1)e^{-\lambda}\right]\mathrm{cm}^2$.

c. Calculons $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

On a : $\lim_{\lambda\to+\infty} q(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty}\left[1-(\lambda+1)e^{-\lambda}\right] = 1$;

ou $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} 4\left[1-(\lambda+1)e^{-\lambda}\right] = 4\ \mathrm{cm}^2$, car l'unité d'aire est $4\ \mathrm{cm}^2$

CORRECTION SESSION DE REMPLACEMENT 2002 SERIE D

EXERCICE 1

1. a. Étudions les variations de f

On a : $\forall x \in]0;+\infty\left[, f(x) = \frac{4x-3}{x}\right.$.

Donc $\forall x \in]0;+\infty\left[, f'(x) = \frac{4x-4x+3}{x^2}\right.$, d'où $f'(x) = \frac{3}{x^2}$.

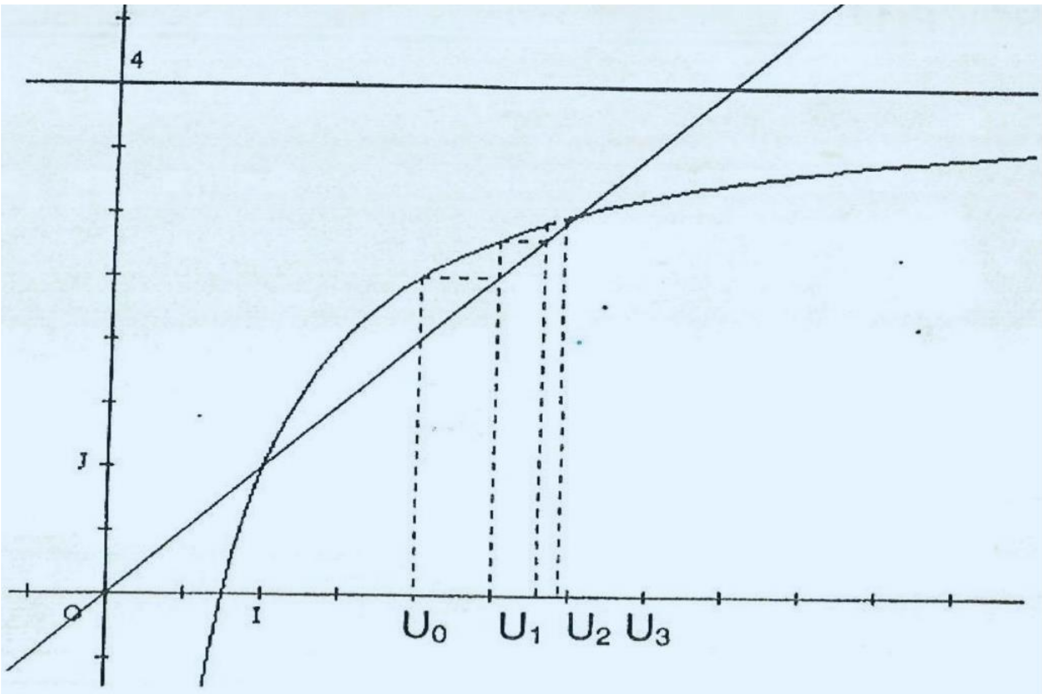
On a $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $]\,0;+\infty[$.

Dressons le tableau de variation de f

On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$ et $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

x	0	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
f '(x)	||	+	
f (x)	|| $-\infty$	0	4

b. Traçons (C) et la droite (D) d'équation $y = x$



c. Construisons U_0, U_1, U_2 et U_3

$\forall n = N, U_{n+1} = \frac{4U_n-3}{U_n}$.

$U_{n+1} = f(U_n)$, donc $U_1 = f(U_0), U_2 = f(U_1), U_3 = f(U_2)$.

(Voir figure ci-dessus).

2. a. Démontrons que : $f([2;3[) \subset [2;3[$

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui contient l'intervalle $[2;3[$;

donc $f([2;3[) = [f(2);f(3)[$. Or $f(2) = \frac{5}{2}$ et $f(3) = 3$;

donc $[f(2);f(3)[\subset [2;3[$.

b. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $2 \leq U_n < 3$

On a : $\mathrm{U}_0 = 2$ donc $\mathrm{U}_0 \in [2;3[$
Soit k un entier naturel quelconque tel que $2 \leq U_k < 3$.

Comme $f([2;3[) \subset [2;3[$ on déduit que $2 \leq f(U_k) < 3$; or $f(U_k) = U_{k+1}$, donc si $2 \leq U_k < 3$ alors $2 \leq U_{k+1} < 3$,

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq U_n < 3$.

c. Démontrons que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement crolssante

1^{re} **méthode : étude de signe :**

$\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N},\ \mathrm{U}_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2+4U_n-3}{U_n} = \frac{(U_n-1)(3-U_n)}{U_n}$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq U_n < 3$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, U_n - 1 > 0$ et $3 - U_n > 0$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n > 0$. On en déduit que la suite $(U_n)_{n\in IN}$ est strictement croissante.

2^{eme} **méthode : par récurrence :**

On a $\mathrm{U}_0 = 2$ et $\mathrm{U}_1 = \frac{5}{2}$, donc $\mathrm{U}_0 < \mathrm{U}_1$.

Soit un entier naturel quelconque k tel que $0 < \mathrm{U_k} < \mathrm{U_{k+1}}$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui contient tous les termes de la suite.

Donc $f(U_k) < f(U_{k+1})$ c'est-à-dire $U_{k+1} < U_{k+2}$,

d'où si $U_k < U_{k+1}$ alors $U_{k+1} < U_{k+2}$,

donc: $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{U}_n < U_{n+1}$. D'où la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{IN}}$ est strictement croissante.

d. Déduisons que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq U_n < 3$, donc la suite est majorée par 3.

D'après la question précédente, la suite est strictement croissante.

On en déduit que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. a. Démontrons que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique

On a : $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N},\ \mathrm{V}_n = \frac{U_n-3}{U_n-1}$

La suite V_n est bien définie car $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \neq 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{V}_{n+1} = \frac{\frac{4U_n-3}{U_n}-3}{\frac{4U_n-3}{U_n}-1} = \frac{4U_n-3-3U_n}{4U_n-3-U_n} = \frac{\mathrm{U}_n-3}{3(U_n-1)};$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n$$

Donc la suite $(V_n)_{n\in IN}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

b. Déduisons la limite de la suite $(V_n)_{n\in IN}$

On a $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ donc la suite géométrique $(V_n)_{n\in IN}$ de raison $\frac{1}{3}$ converge vers 0 , d'où: $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$.

c. Déterminons la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On a: $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{V_n} = \frac{U_n-3}{U_n-1}$. D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, (U_n-1)V_n = U_n - 3$ et $\mathrm{V_n} \neq 1$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U_n} = \frac{V_n-3}{V_n-1}$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{V}_n = 0$; donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = 3$.

EXERCICE 2

Désignons par : A l'événement : "Le car choisi est révisé ";

B l'événement : "Le car choisi tombe en panne";

On a alors

$\bar{A}$ l'événement : "Le car choisi n'est pas révisé ";

$\bar{B}$ l'événement : "Le car choisi ne tombe pas en panne ".

1. a. Calculons la probabilité de l'événement A

On a : $\mathrm{p(A)} = \frac{8}{10} = 0.8$.

b. Calculons la probabilité pour qu'un car choisi ait été révisé et qu'il tombe en panne

Cela correspond à la probabilité de l'événement $A \cap B$.

Nous savons que : $p(B/A) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)}$ d'où $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$.

On a alors $p(A \cap B) = 0.8 \times 0.1 = 0.08$.

c. Calculons la probabilité pour qu'un car choisi n'aî pas été révisé ê qu'il tombe en panne

Cela correspond à la probabilité de l'événement $\bar{A} \cap B$.

On a: $p(B/\bar{A}) = \frac{p(\bar{A}\cap B)}{p(\bar{A})}$ d'où $p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) \cdot p(B/\bar{A})$;

d'où $p(\bar{A} \cap B) = 0.2 \times 0.6 = 0.12$.

d. Déduisons que la probabilité pour qu'il tombe en panne est 0,2 On a $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$,

donc $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A}) = 0.08 + 0.12 = 0.2$.

2. Calculons la probabilité pour qu'un car choisi ait été révisé sachant qu'il est tombé en panne

On a $p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{0.08}{0.2} = 0.4$.

3. Calculons la probabilité pour que huit cars au moins sur les dix ne tombent pas en panne

Désignons par X la variable aléatoire donnant le nombre de cars sur les dix qui ne tombent pas en panne, et calculons la probabilité de l'événernent $(x \geq 8)$.

On a :
$$\begin{aligned} p(X \geq 8) &= \sum_{k=8}^{10} C_{10}^{k}(0.8)^k \cdot (0.2)^{10-k}; \\ &= C_{10}^{8}(0.8)^8 \cdot (0.2)^2 + C_{10}^{9}(0.8)^9 \cdot (0.2) + (0.8)^{10} \\ p(X \geq 8) &= 0.68 \end{aligned}$$

PROBLEME

PARTIE A

g est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par: $g(x) = (x-1)^2 - 1 + \ln(|x-1|)$

1. a. Calculons $g'(x)$

On a : $g'(x) = 2(x-1) + \frac{1}{x-1} = \frac{2(x-1)^2+1}{x-1}$.

b. Étudions les variations de g et dressons son tableau de variation

Étudions les variations de g

Le signe de $g'(x)$ est celui de $(x-1)$.

Ainsi, pour $x \in]-\infty, 1[, g'(x) < 0$; et pour $x \in]1, +\infty[, g'(x) > 0$;
donc g est strictement décroissante

et strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

Calculons les limites de g aux bornes de son ensemble de définition

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)^2\left(1 - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{\ln(|x-1|)}{(x-1)^2}\right) = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{(x-1)^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(|x-1|)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ avec $x = |x-1|$

$\lim\limits_{x\to1} g(x) = \lim\limits_{x\to1} |(x-1)^2 - 1 + \ln(|x-1|)| = -\infty$

car $\lim\limits_{x\to1} (x-1)^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to1} |x-1| = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)^2\left(1 - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{\ln(|x-1|)}{(x-1)^2}\right) = +\infty$

Dressons le tableau de variation de g :

X	- ∞	1	+ ∞
g'(x)	-	‖	+
g(x)	+ ∞ ↘ - ∞	‖	- ∞ ↗ + ∞

2. a. Calculons $g(0)$ et $g(2)$

On a : $g(0) = 0$ et $g(2) = 0$.

b. Démontrons que : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[, g(x) > 0$ et $x \in]0; 1[\cup]1; 2[, g(x) < 0$.

g est strictement décroissante sur] - o; $1[$ et $g(0) = 0;$

d'où : $\forall x \in]-\infty; 0[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]0; 1[, g(x) < 0.$

g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et $g(2) = 0;$

donc: $\forall x \in]1; 2[; g(x) < 0$ et $\forall x \in]2; +\infty[, g(x) > 0.$

Finalement : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[, g(x) > 0$ et $bx \in]0; 1[\cup]1; 2[, g(x) < 0$

PARTIE B

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par: $f(x) = x - \frac{\ln(x-1)}{x-1}.$

a. Déterminons $\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)$

$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = -\infty$ car lorsque $x \to 1, \begin{cases} (x-1) \to 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ et $\ln(|x-1|) \to -\infty.$

$\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = +\infty$ car lorsque $x \to 1, \begin{cases} (x-1) \to 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$ et $\ln(|\, x-1) \to -\infty.$

On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$.

b. Déterminons $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \lim_{X\to+\infty} 1 - X + \frac{\ln X}{X}$ avec $X = 1 - x$;

car $\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ et $\lim_{X\to+\infty}(1 - X) = + + \infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - \frac{ln(x-1)}{x-1} = \lim_{X\to+\infty} X + 1 - \frac{\ln X}{X}$ avec $X = 1 + x$; $x \to +\infty$

car $\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ et $\lim_{X\to+\infty}(X + 1) = +\infty$.

2. Démontrons que la droite (D) d'équation $y = x$ est 'asympiote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$

Posons : $h(x) = f(x) - x = -\frac{\ln(|x-1|)}{x-1}$.

On a : $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$$\text{et } \lim_{x\to+\infty} h(x) = -\frac{\ln(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0.$$

On en déduit que la droite (D) est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. a. Démontrons que $\forall x \in/R - \{1\}; f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

On a: $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x-1}\times(x-1)-\ln(|x-1|)}{(x-1)^2}$;

$= \frac{(x-1)^2-1+\ln(|x-1|)}{(x-1)^2}$

On a bien : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$.

b. Étudions les variations de f

D'après la question A.2) b., on a :

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[g(x) > 0$ et $\forall x \in]0; 1[u]1; 2[g(x) < 0$.

Or le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$; donc $\forall x \in]-\infty; 0[u]2; +\infty[$,

$f'(x) > 0$ et $\forall x \in]0; 1[\cup]1; 2[, f'(x) > 0$.

On en déduit que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $\} - \infty$ of et $]2; +\infty$ [et que f est strictement décroissante sur les intervalles] 0; 1[et] $1; 2$[.

Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	‖	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$

4. Démontrons que le point $\Omega(1;1)$ est un centre de symérrie de (C)

On a $\forall x \in \mathbb{R}*; (1-x) \in \mathbb{R}-\{1\}$ et $(1+x) \in \mathbb{R}-\{1\}$. $f(1-x) = 1-x-\frac{\ln(|1-x-1|)}{1-x-1} = 1-x+\frac{\ln|x|}{x}$

et $f(1+x) = 1+x-\frac{\ln(1+x-1|)}{1+x-1} = 1+x-\frac{\ln|x|}{x}$,

d'où: $\frac{f(1-x)+f(1+x)}{2} = 1.$

On en déduit que le point $\Omega(1;1)$ est un centre de symétrie de ($\mathcal{C}$).

5. a. Démontrons que pour tout nombre réel x différent de 1

$$\ln(|x-1|) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[.$$

On a : $\forall x \neq 1, \ln(|x-1|) > 0 \Leftrightarrow |x-1| > 1;$

$$\Leftrightarrow x-1 > 1 \text{ ou } x-1 < -1;$$
$$\Leftrightarrow x > 2 \text{ ou } x < 0.$$

Nous avons bien $\forall x \in \mathbb{R} = \{1\}; \ln(x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[u]2, +\infty[.$

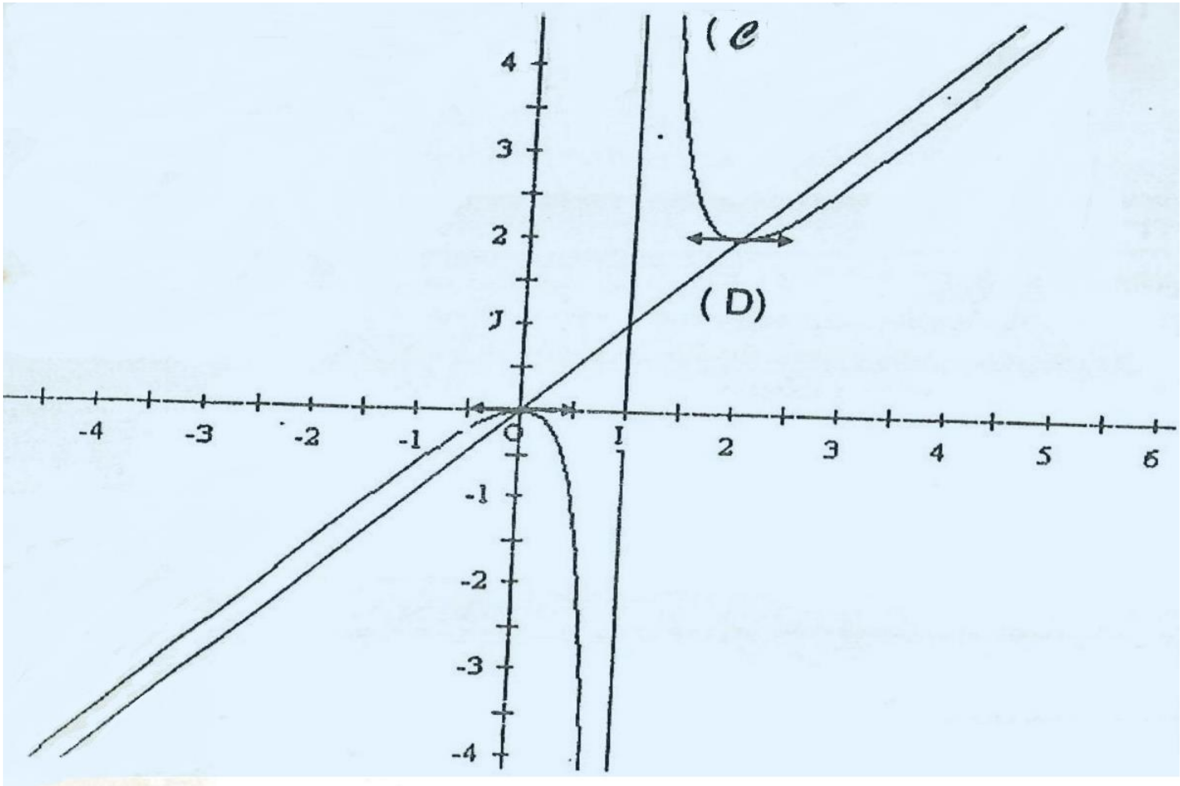
b. Déduisons la position de (C) par rapport à (D)

La position de ($\mathcal{C}$) par rapport à (D) est donnée par le signe de $h(x)$ où $h(x) = f(x) - x = -\frac{\ln(|x-1)}{x-1}$.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
signe de $-\ln(\|x-1\|)$		−	0	+	‖	+	0	−	
signe de (x−1)		−		−	‖	+		+	
signe de h(x)		+	0	−	‖	+	0	−	
position de ($\mathcal{C}$) par rapport à (D)		($\mathcal{C}$) est au-dessus de (D)		($\mathcal{C}$) est en dessous de (D)	‖	($\mathcal{C}$) est au-dessus de (D)		($\mathcal{C}$) est en dessous de (D)	

(C) et (D) se coupent aux points d'abscisses 0 et 2.

6. Construisons (C) or (D)



7. Calculons l'aire A de la partie du plan limité par (C), (D) ê les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$

On a $1 - \frac{1}{e} \in [0,1[$; et (D) est au-dessus de (e) sur cet intervalle ;

donc $A = 4K\ \mathrm{cm}^2$ avec $K = \int_0^{1-\frac{1}{8}}(x - f(x))dx$.

$K = \int_0^{1-\frac{1}{e}}(x - f(x))dx$

$K = \int_0^{1-\frac{1}{e}} \frac{\ln(|x-1|)}{x-1}dx$

$\mathrm{K} = \int_0^{1-\frac{1}{e}} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}\mathrm{dx} = \int_0^{1-\frac{1}{e}} \frac{-1}{1-\mathrm{x}} \times \ln(1-\mathrm{x})\mathrm{dx} = \left[\frac{1}{2}(\ln(1-\mathrm{x}))^2\right|\Big]_0^{1-\frac{1}{e}}$;

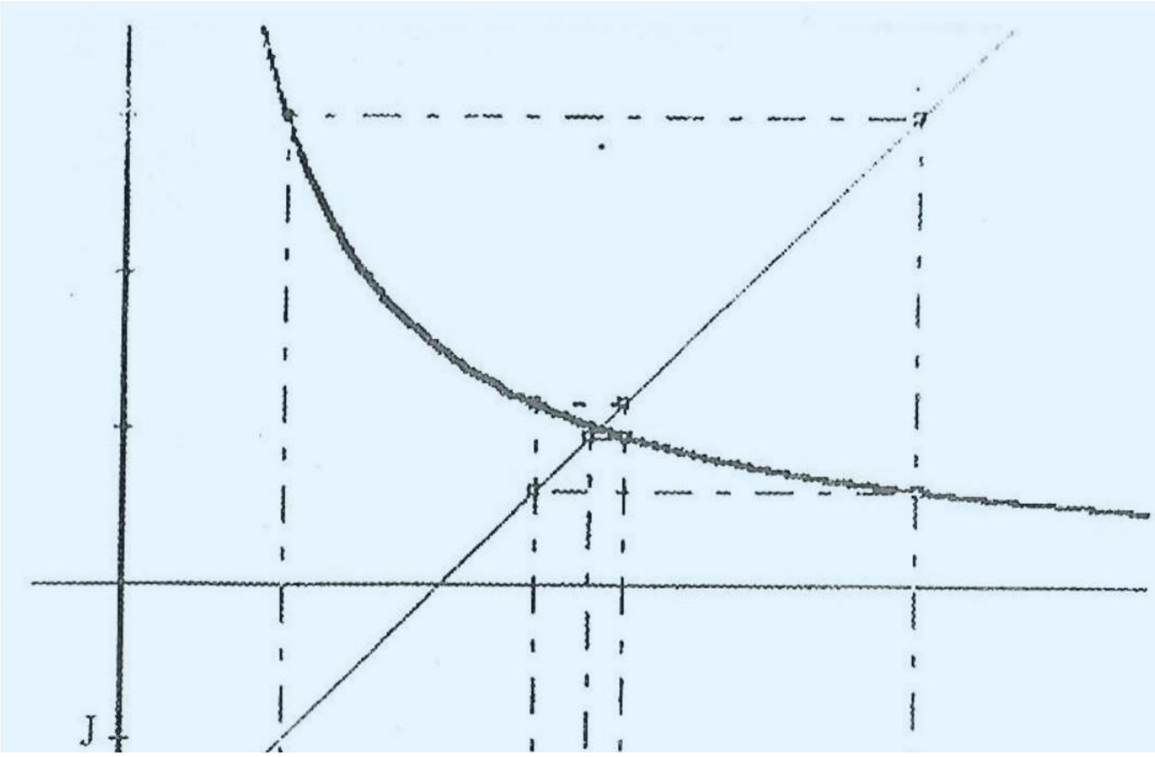
$\mathrm{K} = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}$

donc : $A = 2\ \mathrm{cm}^2$.

CORRECTION SESSION NORMALE JUIN 2002 SERIE D

EXERCICE 1

1. a. Représentons sur l'axe (OI) les termes u_0, u_1, u_2, u_3, et u_4 de la suite u.



b. Conjecturons la convergence de la suite u

On peut conjecturer que la suite u converge vers 3.

2. a. Démontrons que $f([1;5]) \subset [1;5]$

La fonction f est définie, continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ telle que $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$.
$\forall x \in ,10;+\infty[; f'(x) < 0;$ la fonction f est donc continue et stricteme décroissante sur $]0;+\infty[$ or $[1;5] \subset]0;+\infty[;$

donc $f([1;5]) = [f(5); f(1)]$ et $f(5) = \frac{13}{5}; f(1) = 5;$

d'où $f([1;5]) = \left[\frac{13}{5};5\right]$ on a $\left[\frac{13}{5};5\right] \subset [1;5]$ car $1 < \frac{13}{5} < 5$.

On en déduit que $f([1;5]) \subset [1;5]$.

b. Déduisons au moyen d'un raisonnement par récurrence

$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 5$
On a : $u_0 = 1$ donc $u_0 \in [1;5]$.

Soit k un entier quelconque tel que $u_k - 1;5]$. D'après $_2$.a. on a :

$f(u_k) \in [1;5]$ or $f(u_k) = u_{k+1}$ donc $u_{k+1} \in [1;5]$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 5$.

3. a. Démontrons que v est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$

$\forall r: \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{2u_n+3}{u_n}-3}{\frac{2u_n+3}{u_n}+1} = \frac{\frac{2u_n+3-3u_n}{u_n}}{\frac{2u_n+3+u_n}{u_n}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 3}{3u_n + 3} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{u_n - 3}{u_n + 1} = -\dfrac{1}{3}v_n;$

on a: $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = -\frac{1}{3}v_n;$

donc v est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

b. Déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1)^{n+1} \times \frac{1}{3^h}$

V est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme V_0,

donc: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n \cdot v_0 = \frac{u_0-3}{u_0+1} = \frac{1-3}{1+1} = -1;$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -1 \times (-1)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = (-1)^{n+1} \times \frac{1}{3^n}$.

4. a. Exprimons u_n en fonction de v_n puis en fonction de n

On a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n-3}{u_n+1}$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}, v_n(u_n + 1) = u_n - 3;$

c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, v_n u_n + v_n = u_n - 3$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{v_n+3}{1-v_n}, \text{car}\, v_n \neq 1$.

Exprimons u_n en fonction de n: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{v_n+3}{1-v_n} = \frac{3^{n+1}+(-1)^{n+1}}{3^n-(-1)^{n+1}};$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3^{n+1}+(-1)^{n+1}}{3^n-(-1)^{n+1}}$.

b. Déduisons la limite de la suite u

v est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et on a $-1 < -\frac{1}{3} < 0;$

donc v converge vers 0 , c'est-à-dire $\lim v_n = 0;$

or $u_n = \frac{v_n+3}{1-v_n}$ donc $\lim u_n = 3$.

EXERCICE 2

1. Représentons le nuage de points correspondant à la série double (X, Y) (**voir figure**).

2. a. Calculons le salaire moyen $\bar{Y}$ du personnel de l'entreprise en milliers de francs

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_1^2
1	30	30	1
2	15	30	4
2	25	50	4
3	45	135	9
3	60	180	9
4	45	180	16
4	75	300	16
5	80	400	25
5	90	450	25
5	105	525	25
6	150	900	36
6	100	600	36
6	120	720	36
7	105	735	49
7	130	910	49
$\sum x_i = 66$	$\sum y_i = 1175$	$\sum x_i y_i = 6145$	$\sum x_i^2 = 340$
$\bar{X} = 4{,}4$	$\bar{Y} = 78{,}33$	$v(X_i Y) = 65{,}00$	$V(X) = 3{,}31$

On a : $\bar{Y} = \frac{\sum y_1}{N} = \frac{1175}{15} = 78{,}33$ en milliers ($= 15$ effectif total) le salair moyen du personnel de l'entreprise est 78333,33 Francs.

b. Calculons le nombre moyen $\bar{X}$ de personnes à charge par agent

On a: $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{66}{15}$

c. Plaçons dans le repère R^R le point moyen G

Voir nuage de points. On a $G(4{,}4; 78{,}33)$ c'est-à-dire $G(\bar{X}; \bar{Y})$.

3. Calculons la covariance $\mathrm{Cov}(X; Y)$

On a : $\mathrm{Cov}', X; Y) = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i y_i}{15} - \bar{X}\bar{Y} = \frac{6145}{15} - 4{,}4 \times 78{,}33 = 65$

4. a. Déterminons une équation de la droite d'ajustement (D) de Y en X par la méthode des moindres carrés

(D) a pour équation $y = ax + b$, avec $a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \bar{Y} - a\bar{X}(G \in (D))$. $V(X) = \frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{X}^2 = \frac{340}{15} - (4{,}4)^2 = 3{,}31$

D'où $\mathrm{a} = \frac{65{,}01}{3{,}31} = 19{,}64$ et $\mathrm{b} = 78{,}33 - 19{,}64 \times 4{,}4 = -8{,}09$.

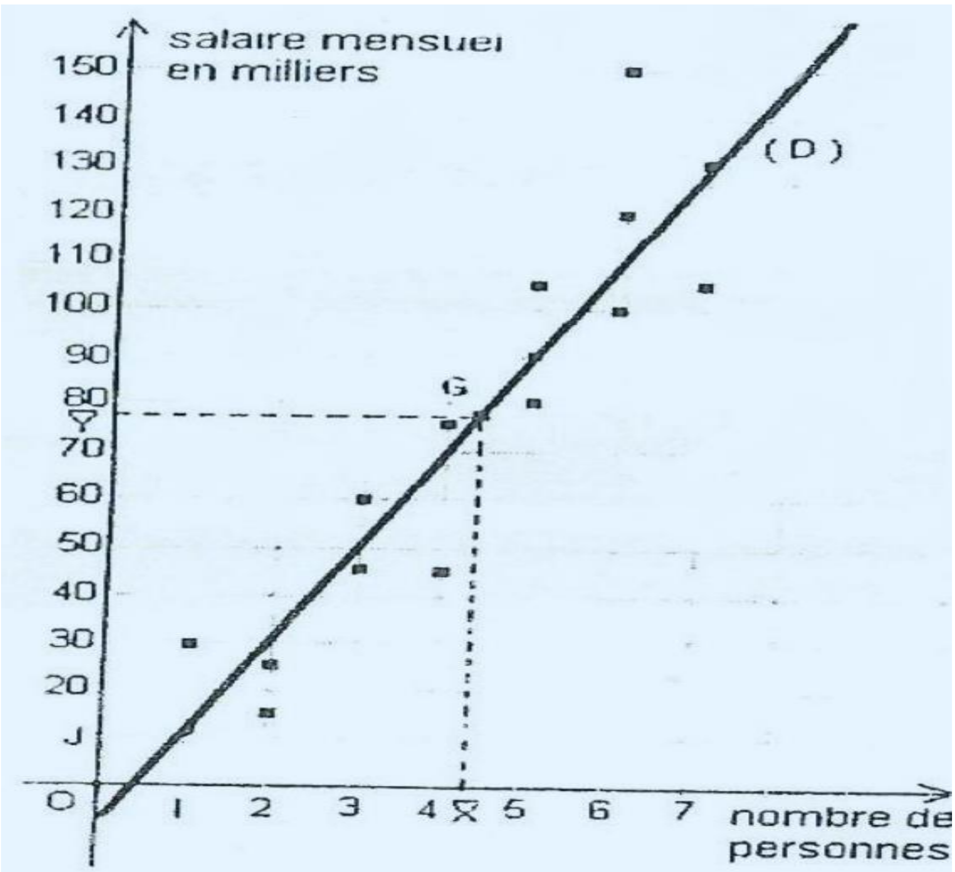
(D) : $y = 19{,}64x - 8{,}09$.

b. Traçons (D) (**voir figure**)

5. Estimons le nombre de personnes de la famille d'un agent de l'entreprise qui gagne 80000 Francs

Belon cet ajustement si un agent gagne 80000 Francs (80 en milliers) par mois on a : $80 = 19{,}66x - 8{,}17$; d'où $x = \frac{80+8{,}17}{19{,}66} = 4{,}48$.

Le nombre de personnes de la famille d'un agent de cette entreprise qui gagne 10000 Francs par mois est de l'ordre de 5.



PROBLEME

PARTIE A

1. Démontrons que la fonction g est solution de (E)

La fonction affine $g: x \mapsto x-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x)=1$;

d'où $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x)+2g(x)=1+2(x-1)=2x-2+1=2x-1$;

Donc la fonction g est solution de (E)

2. a Résolvons (E')

$(E'): f'(x)+2f(x)=0$

1^{re} **méthode :**

$(E') \Leftrightarrow (f'(x)+2f(x))e^{2x}=0$;

$\Leftrightarrow (f(x)e^{2x})'=0$;

$\Leftrightarrow f(x)e^{2x}=k$ avec $k \in \mathbb{R}$;

$\Leftrightarrow f(x)=ke^{-2x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

2^{e} **méthode :**

(E') est une équation différentielle du type $f'(x)+af(x)=0$, avec $a=2$. Ses solutions sont donc les fonctions : $x \mapsto ke^{-2x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

b. Démontrons que les fonctions f_k sont solutions de (E)

Soit $k \in \mathbb{R}$ et $f_k(x)=ke^{-2x}+x-1$.

Les fonctions f_k sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f_k'(x)=-2ke^{-2x}+1$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, f_k'(x)+2f_k(x) &= -2ke^{-2x}+2(ke^{-2x}+x-1)\\ &= -2ke^{-2x}+1+2ke^{-2x}+2x-2;\end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f_k'(x))+2f_k(x)=2x-1$.

donc les fonctions $f_k, (k \in \mathbb{R})$ sont solutions de (E).

3. a. Démontrons que si f est solution de (E), alors $f-g$ est solution de (E')

f est une fonction dérivable sur IR. Si f est solution de (E) alors:

$f'(x)+2f(x)=2x-1$ or $g'(x)+2g(x)=2x-1$;

d'où $f'(x)-g'(x)+2[f(x)-g(x)]=0$;

c'est-à-dire $[f(x)-g(x)]'+2[f(x)-g(x)]=0$;

d'où si f est solution de (E) alors $f-g$ est solution de (E').

b. Déduisons les solutions de (E).

Soit f une solution de (E). $f-g$ est alors solution de (E') donc il existe un nombre réel k tel que $f(x)-g(x)=ke^{-2x}$, c'est-à-dire $f(x)=ke^{-2x}+g(x)$, d'où $f(x)=ke^{-2x}+x-1, k\in\mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions :

$f_k: x\mapsto ke^{-2x}+x-1$ avec $k\in\mathbb{R}$

PARTIE B

1. a. Déterminons la limite de f en $-\infty$.

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}e^{-2x}(1+xe^{2x}-e^{2x})=+\infty$

car quand $x\to-\infty\begin{cases}e^{-2x}\to+\infty\\ xe^{2x}\to 0\\ e^{2x}\to 0.\end{cases}$

b. Déterminons la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^{2x}}+1-\frac{1}{x}=-\infty$, car quand $x\to-\infty\begin{cases}\frac{1}{x}\to 0\\ xe^{2x}\to 0\\ xe^{2x}<0.\end{cases}$

c. Interprétons graphiquement ces résultats.

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et $x\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

donc (e) admet une branche parabolique de direction (OJ).

2. a. Déterminons la limite de f́ en $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, car quand $x\to+\infty\begin{cases}\mathrm{e}^{-2x}\to 0\\ x-1\to+\infty.\end{cases}$

b. Démontrons que la droite (D): $y=x-1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$

On a : $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim_{x\to+\infty}e^{-2x}=0;$

donc (D) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

c. Etudions la position de (C) par rapport à (D)

On a $f(x)-(x-1)=e^{-2x}$ et $e^{-2x}>0$, donc (e) est au dessus de (D) sur $\mathbb{R}$.

3. a. Calculons la dérivée de f

$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=-2e^{-2x}+1.$

b. Étudions le sens de variation de f

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow e^{-2x}\leq\frac{1}{2}.\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{2}\ln 2;$

donc f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\ln 2\right]$

c. Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

5. a. Démontrons que l'équation : $x \in \left[\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right[, f(x)=0$ admet une solution unique α

La restriction de f à $\left[\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right[$ est continue et strictement croissante. Donc f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right[$ sur $\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right[$.
Comme $0 \in \left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right[, \Rightarrow il$ existe alors un unique $\alpha \in \left[\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right[$ solution de l'équation $f(x)=0$.

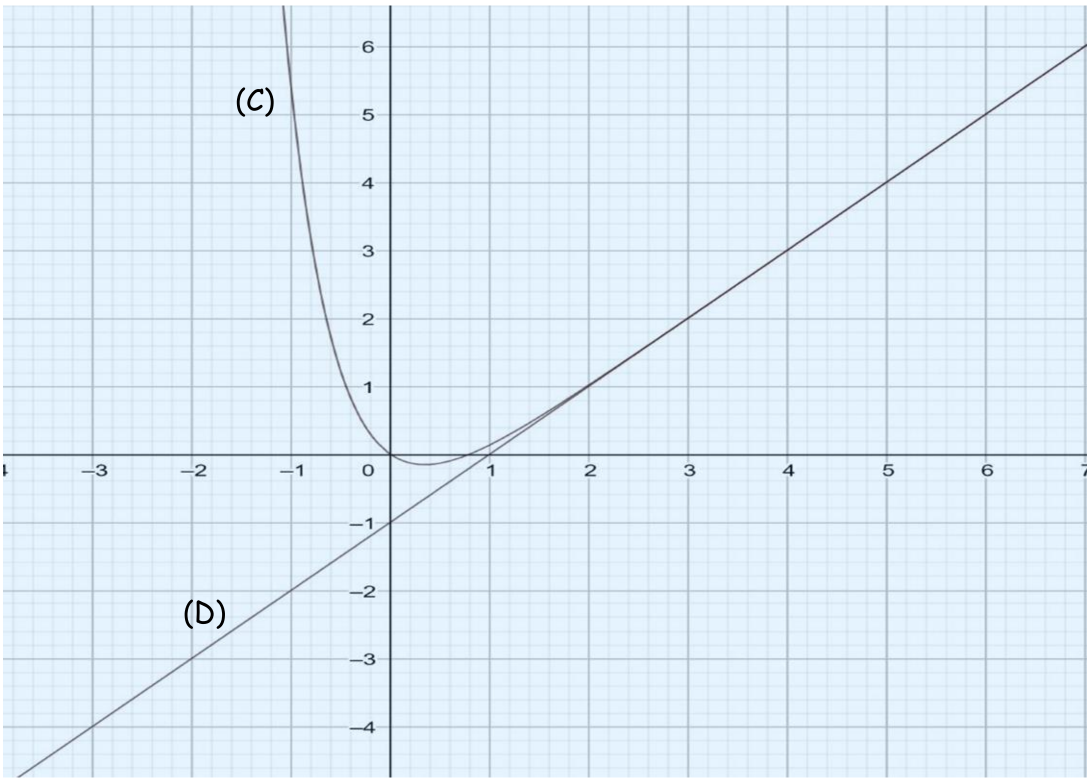
b. Démontrons que $\alpha \in]0{,}79;0{,}8[$

$]0{,}79;0{,}8[\subset \left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right[$;

$f(0{,}79) \approx -0{,}00402$ et $f(0{,}8) \approx 0{,}0018$

d'où $f(0{,}79) \times f(0{,}8) < 0$ donc $\alpha \in \}0{,}79;0{,}8[$.

c. Construisons (D) et (C)



5. a. Calculons l'aire $\mathrm{A}(t)$

$\mathrm{A}(t)=\int_{\alpha}^{t}[f(x)-(x-1)]dx\times UA=\int_{\alpha}^{t}e^{-2x}dx\times UA=9\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{\alpha}^{t}$

$\mathrm{A}(t)=\frac{9}{2}\ (e^{-2\alpha}-e^{-2t})cm^{2}$

b. Calculons $\lim_{t\to+\infty}A(t)$

$\lim_{t\to+\infty}A(t)=\frac{9}{2}e^{-2\alpha}$

$\text{car}\lim_{t\to+\infty}e^{-2t}=0$

CORRECTION SESSION DE REMPLACEMENT 2001 SERIE D

EXERCICE 1

1. Déterminons sous forme trigonométrique, les racines cubiques du nombre complexe $U = 32\sqrt{2}(1+i)$

Posons $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$.

On a: $z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\mathrm{si}\, 33\theta)$.

$z^3 = U \Leftrightarrow r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 32\sqrt{2}(1+i)$;

$\Leftrightarrow r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 64\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

D'où: $\begin{cases} r^3 = 64 \\ 3\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 4 \\ \theta = \frac{\pi}{12} + 2k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Les racines cubiques de U sont donc :

$$z_0 = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right); z_1 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right); z_2 = 4\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$

ou $z_2 = 4\left[\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)\right]$.

2. Démontrons que les racines cubiques de U peuvent s'écrire sous la forme $4p, 4pe^{\frac{2i\pi}{3}}, 4pe^{\frac{-2i\pi}{3}}$

On a: $p = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$;

$4p = 4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$,

donc $4\mathrm{p} = \mathrm{z}_1$.

$$4pe^{\frac{21\pi}{3}} = 4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 4\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right];$$

$= 4\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$,

Donc : $4\mathrm{p}e^{\frac{2i\pi}{3}} = \mathrm{z}_2$.

$$4pe^{-\frac{2,\pi\pi}{3}} = 4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$4pe^{\frac{-2i\pi}{3}} = 4\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$4pe^{\frac{-2/\pi}{3}} = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

donc $4\mathrm{p}e^{\frac{-2i\pi}{3}} = \mathrm{z}_0$.

3. Déduisons des questions précédentes que : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

D'après et on a: $z_0 = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

$= 4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

$= 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

$= \sqrt{2} + \sqrt{6} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

4. Donc $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Remarque: pour cet exercice, on aurait pu utiliser la forme exponentiel pour aboutir à la forme trigonométrique.

$$U = 32\sqrt{2}(1+i) = 64\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$$

On en déduit que les racines cubiques de U sont les nombres complexes de forme: : $z_k = 4\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$ où $\mathrm{k} \in \{0; 1; 2\}$.

On obtient : $z_0 = 4\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{12}}; z_1 = 4\mathrm{e}^{\frac{3j\pi}{4}}; z_2 = 4\mathrm{e}^{\frac{17i\pi}{12}}$

EXERCICE 2

1. Déterminons les fonctions g définies sur IR, solutions de l'équatio différentielle $g' = ag$

L'équation différentielle $g' = \mathrm{ag}$ a pour solutions les fonctions définies sur If par: $g_c: x \mapsto ce^{ax}$ où $c \in \mathbb{R}$. a. Déduisons de l'expression de $f(t)$ en fonction de x_0, k et t

La fonction f est une solution de l'équation différentielle $\mathrm{g}' = \mathrm{ag}$, avec $a = -k$. D'oü $f(t) = ce^{-kt}$ avec $c \in \mathbb{R}$. Or $f(0) = x_0$, donc $c = x_0$. Finalement $f(t) = x_0\mathrm{e}^{-kt}$.

b. Déterminons le nombre d'années au bout duquel le nombre d'atomes de radium aura diminué de moitié

Recherchons t pour que $f(t) = \frac{x_0}{2}$.

On a : $x_0e^{-kt} = \frac{x_0}{2} \Leftrightarrow e^{-4t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -kt = -\ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{k}$.

$\frac{\ln 2}{k} \approx 149{,}064$. Donc le rombre d'années recherché est 150.

PROBLEME

PARTIE A

1. Étudions le sens de variation de g

Pour tout nombre réel strictement positif x, on a :

$$g'(x) = -x + 2 - \frac{1}{x} = -\frac{(x-1)^2}{x}$$

On en déduit que : $\forall x \in]0;+\infty[\setminus \{1\}, g'(x) < 0$ et $g'(1) = 0$.

D'où la fonction g est strictement décroissante sur $]0;+\infty \circ$.

2. Calculons $g(1)$

$$g(1) = -\frac{1}{2} + 2 - \frac{3}{2} = 0$$

3. Déduisons que $\forall x \in]0;1[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]1;+ +\infty[, g(x) < 0$

La fonction g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ et $g(1) = 0$; donc: $\forall x \in]0;1[g(x) > 0$ et $\forall x \in]1;+\infty[, g(x) < 0$.

PARTIE B

1. Étudions la continuité de f à droite en 0.

On a: $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(-\frac{x^3}{6} + x^2 - \frac{x}{2} - x\ln x + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$
car $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(-\frac{x^3}{6} + x^2 - \frac{x}{2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln x = 0$;

or $f(0) = \frac{2}{3}$, donc f est continue à droite en 0 .

2. a. Calculons $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x}$

On a : $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(-\frac{x^2}{6} + x - \frac{1}{2} - \ln x\right) = +\infty$,

car $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(-\frac{x^2}{6} + x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x = -\infty$.

b. D'après la question

a., $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$ donc f n'est pas

dérivable à droite en 0 .

c. Interprétons graphiquement le résultat de 2 a

On a : $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$; donc $(\mathcal{C})$ admet une demi-tangent

verticale au point d'abscisse 0.

3. a. Démontrons que pour tout nombre réel strictement positif x, $f'(x) = g(x)$

$\forall x \in]0;+\infty\Big[, f'(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2} - \ln x - x \times \frac{1}{x}$;

$$= -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2} - \ln x$$
$$= g(x)$$

b. Déduisons de A) le sens de variation de f

$f'(x)$ est du signe de $g(x)$ car $f'(x) = g(x)$.

D'après les résultats de la question $A.3)$. ;

on a: $\forall x \in]0;1[, f'(x) > 0; \forall x \in]1;+\infty[, f'(x) < 0$ et $f'(1) = 0$.

f est donc strictement croissante sur $]0;1[$ et strictement décroissante su $[1;+\infty[$.

4. a. Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x^3} - \frac{\ln x}{x^2}\right) = -\infty$, car $\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{in } x}{x^2} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x^3}\right) = -\frac{1}{6}$

b. Dressons le tableau de variation de f.

x	0		1		α		+∞
f '(x)		+	0	−	⋮		
f(x)	$\frac{2}{3}$	↗	1	↘	0	↘	− ∞

c. Calculons $\lim_{x\to+\infty} v'(x)$ et interprétons graphiquement le résultat On a:
$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = x\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{2}{3x^3}\right) = -\infty$.

On en déduit que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction $(0.J)$ en $+\infty$. a. Llémontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans l'intervalle $[1;++o[$

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$,

donc elle réalise une bijection de $[1;+\infty[\text{sur } f([1;+\infty[) =]-\infty;1]$. Or $0 \in]-\infty$; 1]; donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans l'intervalie $[1;+\infty[$.

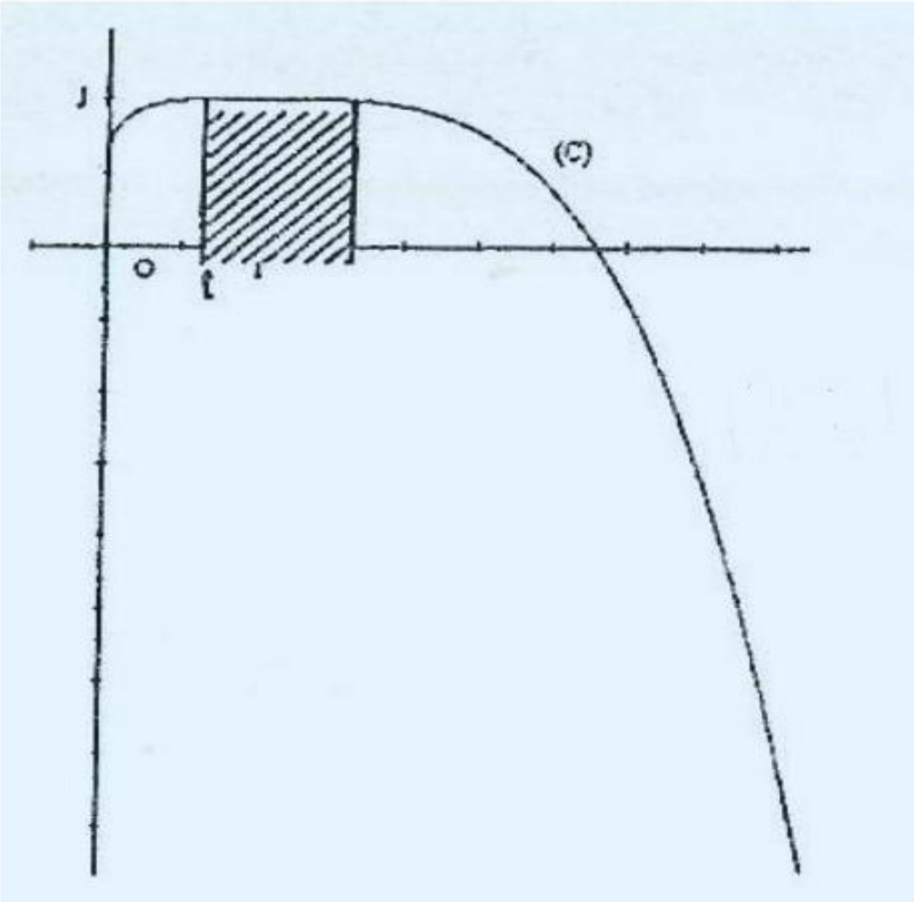
b. Vérifions que $3{,}2 < \alpha < 3{,}3$

Déterminons le signe de $f(3{,}2) \times f(3{,}3)$.

On a : $f(3{,}2) \approx 0{,}12$ et $f(3{,}3) \approx -0{,}02$, d'où $f(3{,}2) \times f(3{,}3) < 0$.

On déduit que $3{,}2 < \alpha < 3{,}3$.

c. Traçons $(\mathcal{C})$



PARTIE C

1. Calculons $I(t)$.

On a :

$$I(t) = \int_t^2 \left(-\frac{x^3}{6} + x^2 - \frac{x}{2} + \frac{2}{3}\right) dx$$
$$= \left[-\frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{2}{3}x\right]_t^2$$
$$I(t) = \frac{t^4}{24} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{4} - \frac{2t}{3} + \frac{7}{3}$$

2. Calculons $J(t)$ à l'aide d'une intégration par parties.

On a $: J(t) = \int_t^2 x \ln x dx$.

Posons : $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$.

On a: $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^2}{2}$, d'où $J(t) = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_t^2 - \int_t^2 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_t^2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_t^2 = \frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{2}\ln t + 2\ln 2 - 1.$

3. Déduisons en cm^2 l'expression en fonction de t de l'aire $A(t)$ On a:

$$A(t) = 9\int^{2} t\, t(x)dx = 9[1(t) - J(t)];$$
$$= \left[\frac{7}{3} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{4} - \frac{2t}{3} - \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{2}\ln t + 2\ln 2 - 1\right)\right] \times 9$$
$$A(t) = \left(\frac{10}{3} - 2\ln 2 + \frac{t^4}{24} - \frac{t^3}{3} - \frac{2t}{3} + \frac{t^2}{2}\ln t\right) \times 9\ \mathrm{cm}^2$$

4. Déterminons $\lim_{t\to 0} A(t)$

On a : $\lim_{t\to 0} A(t) = 9\left(\frac{10}{3} - 2\ln 2\right) = 30 - 18\ln 2$;

car. $\lim_{t\to 0}\left[\frac{t^4}{24} - \frac{t^3}{3} - \frac{2t}{3}\right] = 0$ et $\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{2}\ln t = 0$

CORRECTION SESSION NORMALE JUIN 2001 SERIE D

EXERCICE 1

1. Déterminons le nombre réel a pour que -2i soit une solution de (E)

   $-2i$ est une solution de (E) signifie que

$(-2i)^3-(ia+2\sqrt{3})(-2i)^2+(2ia\sqrt{3}+4)(-2i)-4ai=0$
$8i+4ai+8\sqrt{3}+4a\sqrt{3}-\varepsilon\cdot\cdots 4ai=0$
$4a\sqrt{3}=-8\sqrt{3}$
$a=-2$

2. Déterminons le polynôme q tel que

$\forall Z\in\mathbb{C}, Z^3+(2i-2\sqrt{3})z^2+(4-4\sqrt{3})z+8i=q(Z)(z-\sqrt{3}-i)$

1^{re} méthode: par la division euclidienne:

$$\begin{array}{l|l}
Z^3+(2i-2\sqrt{3})\,Z^2+(4-4i\sqrt{3})\,Z+8i & Z-\sqrt{3}-i \\
\hline
\underline{-Z^3+(i+\sqrt{3})\,Z^2} & Z^2+(3i-\sqrt{3})z-(2+2i\sqrt{3}) \\
\quad (3i-\sqrt{3})\,Z^2+(4-4i\sqrt{3})\,Z+8i & \\
\quad \underline{(-3i+\sqrt{3})\,Z^2+(3i-\sqrt{3})(i+\sqrt{3})\,Z} & \\
\qquad (-2-2i\sqrt{3})\,Z+8i & \\
\qquad \underline{(2+2i\sqrt{3})\,Z-8i} & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

On en déduit que:

$\forall Z\in\mathbb{C}, Z^3+(2i-2\sqrt{3})Z^2+(4-4i\sqrt{3})z+8i=(Z-\sqrt{3}-i)\left[z^2+(3i-\sqrt{3})z-2-2i\sqrt{3}\right]$ d'où $q(z)=z^2+(3i-\sqrt{3})z-2-2i\sqrt{3}$.

2^{eme} méthode : par identification :

Le coefficient complexe de z^3 étant égal à $1; q(z)=z^2+bz+C$ où $(b;c)\in\mathbb{C}\mathrm{x}\mathbb{C}$. On a donc:

$\forall Z\in\mathbb{C}, z^3+(2i-2\sqrt{3})z^2+(4-4i\sqrt{3})Z+8i=(Z^2+bZ+c)(Z-\sqrt{3}-i)$

$$=z^3+(b-\sqrt{3}-i)z^2+[c-b(\sqrt{3}+i)]z-(\sqrt{3}+i)c$$

On en déduit que : $\begin{cases} b-\sqrt{3}-i=2i-2\sqrt{3} \\ c-b(\sqrt{3}+i)=4-4i\sqrt{3} \\ -(\sqrt{3}+i)c=8i. \end{cases}$

D'où $b=3i-\sqrt{3}$ et $c=2i\sqrt{3}-2$.

Donc $\forall z\in\mathbb{C}, q(Z)=Z^2+(3i-\sqrt{3})z-2-2i\sqrt{3}$.

3. Résolvons (E) pour $a=-2$

(E) $\Leftrightarrow z^3+(2i-2\sqrt{3})z^2+(4-4i\sqrt{3})z+8i=0;$

$\Leftrightarrow \left[z^2+(3i-\sqrt{3})z-2-2i\sqrt{3}\right](z-\sqrt{3}-i)=0:$

$\Leftrightarrow \begin{cases} Z=\sqrt{3}+i\ (1) \\ \text{ou} \\ Z^2+(3i-\sqrt{3})Z-2-2\sqrt{3}=0 \end{cases}$

Résolvons l'équation (2)

Son discriminant est :

$\Delta=(3i-\sqrt{3})^2+8+8i\sqrt{3};$
$\Delta=2+2i\sqrt{3}=3-1+2i\sqrt{3};$
$\Delta=(\sqrt{3})^2+i^2+2(\sqrt{3})\times i;$
$\Delta=(\sqrt{3}+i)^2.$

On a donc: $z_1=\frac{-3i+\sqrt{3}-\sqrt{3}-i}{2}$; $z_2=\frac{-3i+\sqrt{3}+\sqrt{3}+i}{2}$

$z_1=-2i;\ z_2=\sqrt{3}-i$

$S_{\mathbb{C}}=\{-2i;\sqrt{3}-i;\sqrt{3}+i\}.$

Autre méthode :

$a=2$, donc $-2i$ est un zéro de q;

donc $-2\mathrm{i}z_{\mathrm{e}}=-2-2\mathrm{i}\sqrt{3}$;

$z_2=\sqrt{3}-i.$

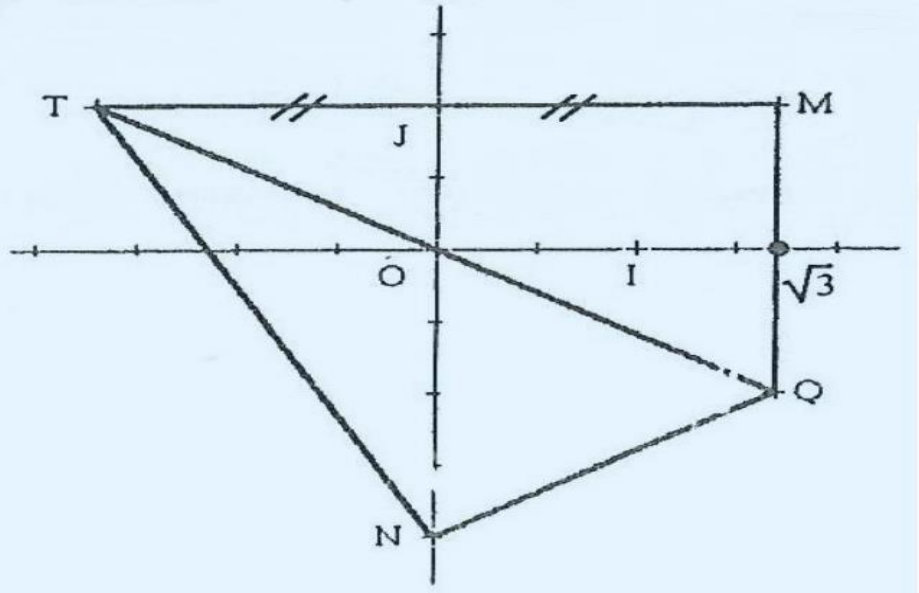
Remarque:

On pourrait chercher un nombre complexe $x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

tel que $(x+iy)^2=\Delta$. C'est-à-dire : $\begin{cases} x^2-y^2=2 \\ x^2+y^2=4 \\ xy>0. \end{cases}$

La résolution du système ci-dessus donne $x=\sqrt{3}$ et $y=1$ ou $x=-\sqrt{3}$ et $y=-1$.

4. a. Représentons les points M, N et Q dans le repère (O, I, J).



b. Démontrons que le triangle TMQ est rectangle en M

1^re^ méthode :

Les points M et T sont symétriques par rapport à ($\mathrm{O}J$) donc (MT) $\perp$ (OJ). Les points M et Q ont la même abscisse; donc (MQ) // (OJ).

Il en résulte que $(MQ) \perp (MT)$ c'est-à-dire que le triangle TMQ est rectangle en. M.

2° méthode :

Déterminons I' affixe du point T. Les points M et T sont symétriques par rapport à (OJ) donc $\mathrm{z_T} = -\overline{\mathrm{z}}_{\mathrm{M}} = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$.

On a alors $TM^2 = |-\sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i|^2 = 12$.

$$MQ^2 = |\sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i|^2 = 4$$
$$TQ^2 = |-\sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i|^2 = 4|-\sqrt{3} + i|^2 = 16$$

D'où $TQ^2 = TM^2 + MQ^2$. Le triangle TMQ est donc rectangle en M.

c. Démontrons que les points M, Q, N et T sont cocycliques

Il nous suffit pour cela de démontrer que le triangle QMT est rectangle en N. On a : $\overrightarrow{NQ}(\sqrt{3}; 1), \overrightarrow{NT}(-\sqrt{3}; 3)$ d'où $\overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{NT} = (\sqrt{3})(-\sqrt{3}) + 1 \times 3 = 0$, Donc $(\mathrm{NQ}) \perp (\mathrm{NT})$; le triangle QNT est donc rectangle en N. On en déduit que les points M, Q, N et T sont situés sur le cercle de diamètre [TQ]. D'où la conclusion.

EXERCICE 2

1. Calculons la probabilité P_1 pour que le joueur récupère sa mise Le joueur : scupère sa mise lorsqu'il tire le médaillon $n°4$ de probabilité $\frac{1}{6}$ ou s tire le médaillon $n°3$ de probabilité $\frac{1}{6}$.

On a : $P_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

2. Calculons la probabilité P_2 pour qu'il perde 1500 F et qu'il perde sa mise

Le joueur perd 1500 F et aussi sa mise, lorsqu'il tire le médaillon $n°5$, d probabilité $\frac{1}{6}$ et retire un médaillon autre que le $n°5$, de probabilité $\frac{5}{6}$.

On a : $P_2 = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$.

3. a. Complétons le tableau définissant la loi de probabilité de ,variable aléatoire X

Déterminons d'abord le résultat financier associé à chaque partie.

S'il tire M_4, on a : $R_1 = (S + 3000 \text{ F}) - S = 3000 \text{ F}$.

S'il tire M_1, M_2 oü M_6, on a : $R_2 = 0 - S = -S$.

S'il tire M_3, on a : $R_3 = (S + 0) - S = 0$.

S'il tire M_5 et M_5, on a: $R_4 = 2000 \text{ F} - S$.

S'il tire M_5 et M_1 ou M_2 ou · M_3 ou M_4 ou M_6, on a: $R_5 = -S - 1500F$.
On en déduit donc que :

$P(X = 3000) = \frac{1}{6}; P(X = -S) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
$P(X = 0) = \frac{1}{6}; P(X = -S + 2000) = \frac{1}{36}$ et $P(X = -S - 1500) = \frac{5}{36}$

La loi de probabilité de la variable X est donc définie par le tableau ci-dessous :

x_i	$-s$	$-s - 1500$	0	$-S + 2000$	3000
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$

b. Démontrons que l'espérance mathématique de X est

$E(X) = -\frac{2}{3}s + \frac{3125}{9}$

$E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_1 p_i$

$$E(X) = \frac{-18S - 5S - 7500 + 0 + 2000 - S + 18000}{36};$$

$$E(X) = \frac{-24S + 12500}{36}$$

$E(X) = -\frac{2}{3}S + \frac{3125}{9}$.

c. Déterminons la somme à miser par le joueur pour que son résultat financier moyen soit nul

Le résultat financier moyen du joueur est nul si et seulement si $E(X) = 0$.

C'est-à-dire : $S = \frac{3125}{6}$. La somme à miser est donc de 521 F.

PROBLEME

On a : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x(x+2)e^{x+2}$

1. a. Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Posons $u = x + 2$; quand x tend vers $+\infty$; u tend vers $+\infty$.

On a : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{u \to +\infty} u(u-2)e^{u} = +\infty$.

car $\lim_{u \to +\infty} ue^{u} = +\infty$ et $\lim_{u \to +\infty} (u-2) = +\infty$.

b. Calculons $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} (x+2)e^{(x+2)};$$
$$= \lim_{u \to +\infty} ue^{u} \text{ où } u = x+2;$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

c. Interprétons graphiquement les résultats précédents

D'après a. et b. on a : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Donc $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (OJ).

2. a. Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Posons $u = x + 2$. quand $x \to -\infty; u \to -\infty$:

On a : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{u \to -\infty} u(u-2)e^{u} = 0$, car $\lim_{u \to -\infty} u^2 e^{u} = 0$ et $\lim_{u \to -\infty} ue^{u} = 0$.

b. Interprétons graphiquement le résultat précédent

D'après 2a. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$; on en déduit que la droite (OI) est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$,

3. Vérifions que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x^2 + 4x + 2)e^{x+2}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (2x+2)e^{x+2} + (x^2+2x)e^{x+2};$$
$$= e^{x+2}(x^2 + 4x + 2)$$
d'où : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x^2 + 4x + 2)e^{x+2}$

4. a. Etudions le sens de variation de f

$\forall x \in \mathrm{IR}, \mathrm{e}^{x+2} > 0$; donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 + 4x + 2$.

En résolvant l'équation $x^2 + 4x + 2 = 0$, on obtient :

$x_1 = -2 - \sqrt{2}$ et $x_2 = -2 + \sqrt{2}$.

On en déduit que :

$\forall x \in]-\infty; -2-\sqrt{2}[U]-2+\sqrt{2}; +\infty[; f'(x) > 0.$

$\forall x \in]-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}[; f'(x) < 0.$

$f'(-2-\sqrt{2}) = f'(-2+\sqrt{2}) = 0$

f est donc strictement croissante sur $]-\infty; -2-\sqrt{2}[$ et sur $]-2+\sqrt{2}; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}[$.

b. Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	0	↗	$f(-2-\sqrt{2})$	↘	$f(-2+\sqrt{2})$	↗	$+\infty$

$$f(-2-\sqrt{2}) = 2(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$$
$$f(-2+\sqrt{2}) = 2(1-\sqrt{2})e^{2}$$

5. a. Déterminons une équation de chacune des tangentes ( ), (T') à (C) aux points d'abscisses respectives -2 et 0

Equation de (T)

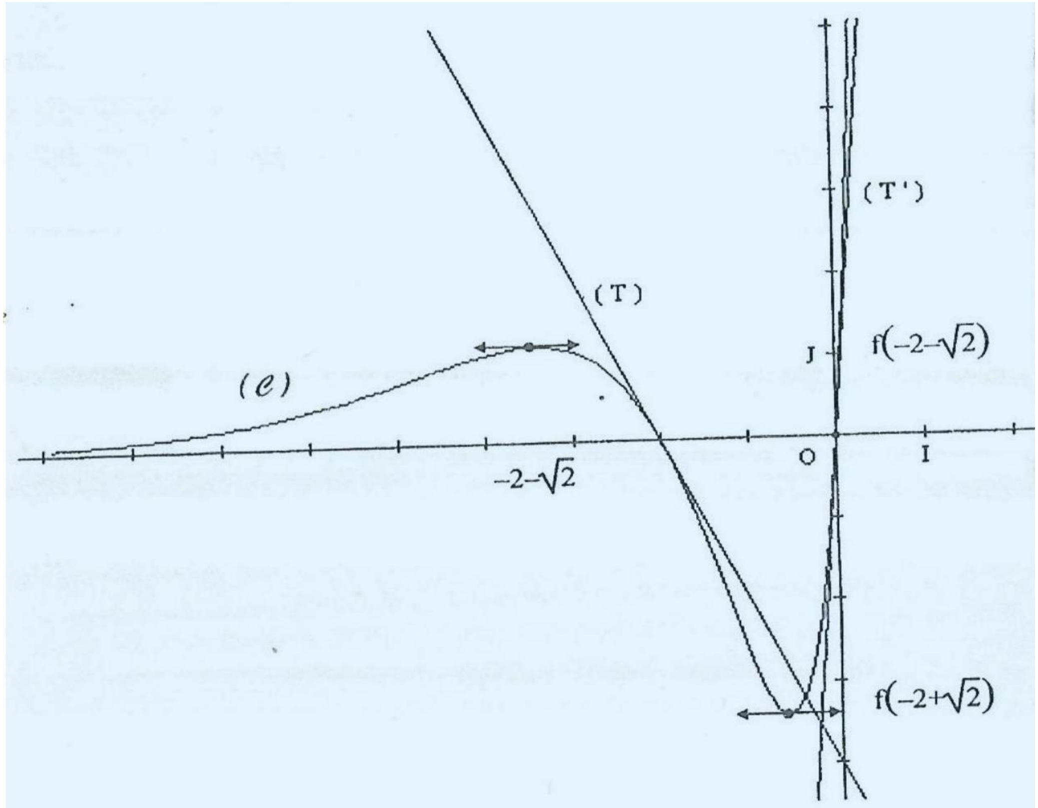
$(T): y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$ avec $f'(-2) = -2$ et $f(-2) = 0$; d'où $(T): y = -2x - 4$.

Equation de (T')

$(T'): y = f'(0)x + f(0)$, avec $f'(0) = 2e^2$ et $f(0) = 0$;

d'où $(T'): y = 2e^2 x$.

b. Traçons (T) , (T ') et (C)



6. a. Démontrons à l'aide de deux intégrations par parties que $A_\lambda = 4 - \lambda^2 e^{\lambda+2}$

$$A_\lambda = \int_\lambda^{-2} f(x)dx = \int_\lambda^{-2} (x^2 + 2x)e^{x+2}dx$$

Posons

$$u(x) = x^2 + 2x \text{ et } v'(x) = e^{x+2}$$

on a : $u'(x) = 2x + 2$, et $v(x) = e^{x+2}$.

D'où : $A_\lambda = [(x^2 + 2x)e^{x+2}]_\lambda^{-?} - \int_\lambda^{-2} (2x + 2)e^{x+2}dx$

Intégrons $\int_\lambda^{-2} (2x + 2)\mathrm{e}^{x+2}\mathrm{dx}$ par parties

Posons $t(x) = 2x + 2$ et $y'(x) = e^{x+2}$;

on a: $t'(x) = 2$ et $y(x) = e^{x+2}$;

Jonc : $\int_\lambda^{-2} (2x + 2)e^{x+2}dx = [(2x + 2)e^{x+2}]_\lambda^{-2} - 2\int_\lambda^{-2} e^{x+2}dx$;

d'où, on a :

$$\mathcal{A}_\lambda = 0 - (\lambda^2 + 2\lambda)\mathrm{e}^{\lambda+2} + 2 + (2\lambda + 2)\mathrm{e}^{\lambda+2} + 2[\mathrm{e}^{x+2}]_\lambda^{-2}$$
$$\mathcal{A}_\lambda = -\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda+2} + 2 + 2\mathrm{e}^{\lambda+2} + 2(1 - \mathrm{e}^{\lambda+2})$$
$$\mathcal{A}_\lambda = 4 - \lambda^2\mathrm{e}^{\lambda+2}$$

b. Calculons $\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda$

On a: $\lim_{\lambda\to-\infty}\mathcal{A}_\lambda = \lim_{\lambda\to-\infty}\left(4-\lambda^2e^{\lambda+2}\right) = 4$, car $\lim_{\lambda\to-\infty}\lambda^2e^{\lambda+2} = 0$.

7. a. Déterminons les nombres réels u et v pour que F définie par $F(x) = (x^2+ux+v)e^{x+2}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ si st seulement si : $\forall x \in \mathbb{R};\ F'(x) = f(x);$

c'est-à-dire: $\forall x \in \mathbb{R}; [x^2+(2+u)x+u+v]e^{x+2} = (x^2+2x)e^{x+2}$.

Ce qui équivaut à $\begin{cases}2+u=2\\u+v=0\end{cases}$ d'où $\begin{cases}u=0\\v=0\end{cases}$ et F définie par $F(x) = x^2e^{x+2}$ est donc une primitive de f sur IR.

b. Retrouvons le résultat de 6.a

On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\lambda &= \int_\lambda^{-2} f(x)dx \int_\lambda^{-2} f(x)dx = [F(x)]_\lambda^{-2}\\ &= F(-2)-F(\lambda)\\ A_\lambda &= 4-\lambda^2e^{\lambda+2}\end{aligned}$$

On retrouve ainsi le résultat de la question 6.a.

CORRECTION SESSION DE REMPLACEMENT 2000 SERIE D

EXERCICE 1

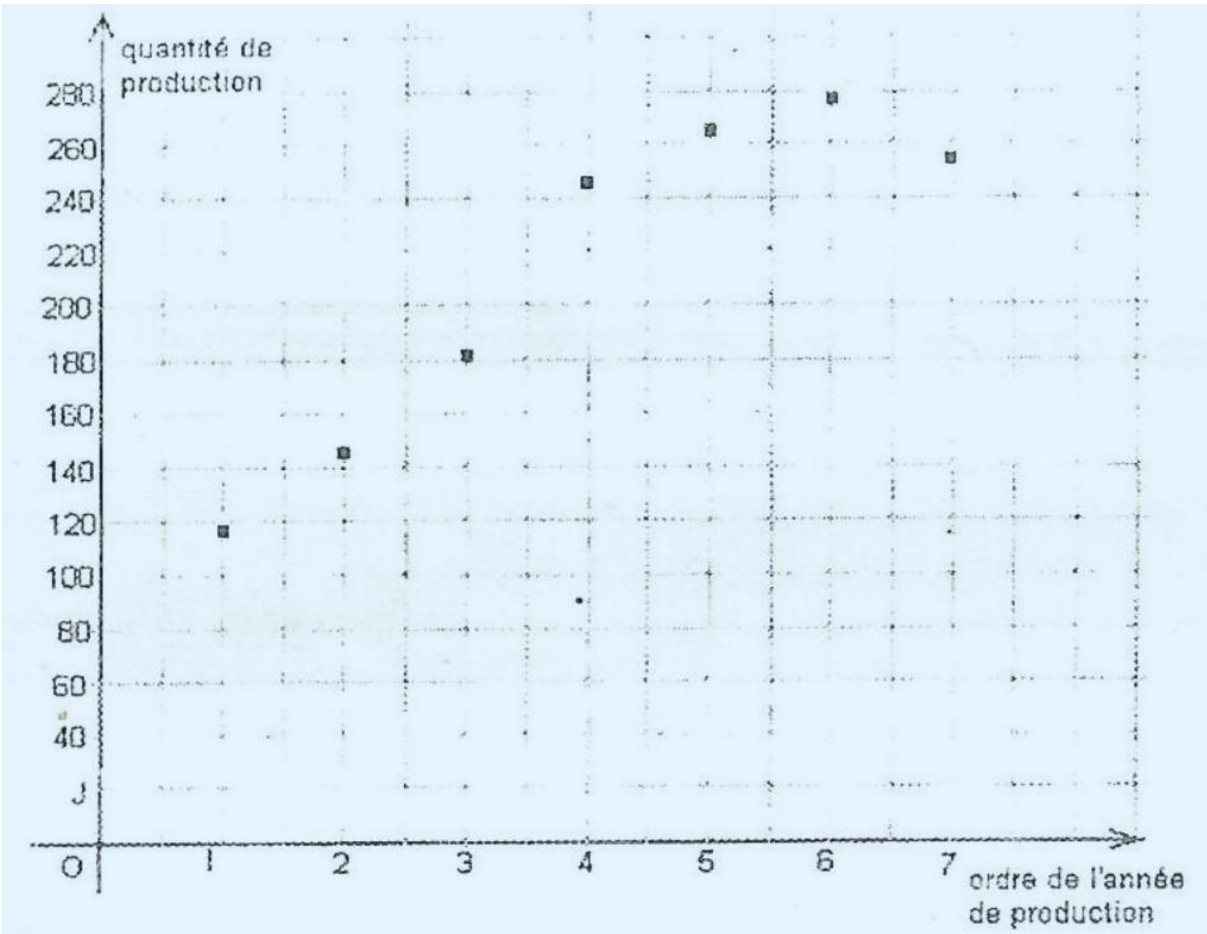
1. Déterminons l'année où la production est de 278 tonnes

278 tonnes est la production de l'année de rang 6. L'année de rang 3 étant 1996, la coopérative a donc obtenu 278 tonnes d'anacarde en 1999.

2. Complétons le tableau statistique

Ordre x_i de l'année de production	1	2	3	4	5	6	7
Année de production	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Production y_i (en tonnes)	118	146	184	247	267	278	255

3. Représentons le muge de points de la série statistique double ($x; y$)



4. Déterminons l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire r de la distribution statistique (x, y)

Complétons le tableau statistique. On a :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	Total
y_i	118	146	184	247	267	278	255	1495
x_1y_i	118	292	552	988	1335	1668	1785	6738
x_i^2	1	4	9	16	25	36	49	140
y_i^2	13924	21316	33856	61009	71289	77284	65025	343703

Calculons les moyennes

$\bar{x} = \frac{\sum x_1}{N} = \frac{28}{7} = 4$
$\bar{y} = \frac{\sum y_1}{N} = \frac{1495}{7} = 213{,}57$

Calculons les variances

$V(x) = \frac{\sum x_1^2}{N} - \vec{x}^2 = 4$
$V(y) = \sum\ y_1^2 - \ddot{y}^2 = 3488{,}28$

Calculons la covariance de x et y

$\mathrm{Cov}(x; y) = \frac{\sum x_i y_i}{N} - \bar{x}\bar{y} = 108{,}29,$
d'où $r = \frac{\mathrm{Cov}(x;y)}{\sqrt{V(x)V(y)}} \approx 0{,}92.$

5. Interprétons le coefficient de corrélation linéaire

$|r| \geq 0{,}87$ donc la corrélation est bonne.

6. Déterminons par la méthode des moindres carrés une équation de la droite de régression de x en y

Son équation est : $x - \bar{x} = a(y - \bar{y})$ avec $a = \frac{\mathrm{Cov}(x;y)}{V(y)}$.

On a : $\mathrm{a} \approx 0{,}031$ donc l'équation cherchée est : $x = 0{,}031y - 2{,}621.$

7. Déterminons l'année où la production sera de 350 tonnes

Pour $y = 350$ on obtient dans l'équation précédente $x = 8{,}22$. Donc la production atteindra 350 tonnes à la 9° année ; d'où la coopérative produira 350 tonnes en l'an 2002.

EXERCICE 2

1. Calculons V_0

On a $\mathrm{V}_0 = \ln\left(\frac{3}{2}\mathrm{U}_0\right) = -\ln 2.$

2. Démontrons que (V_n) est une suite géométrique de raison 2

Remarquons que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0;$ donc V_n existe et on a :

$$V_{n+1} = \ln\left(\frac{3}{2}U_{n+1}\right) = \ln\left[\left(\frac{3}{2}U_n\right)^2\right] = 2\ln\left(\frac{3}{2}U_n\right) = 2V_n$$

(V_n) est donc une suite géométrique de raison 2.

3. Exprimons V_n en fonction de n

(V_n) est la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $V_0 = -\ln 2$ donc pour tout entier naturel $n, V_n = -2^n \ln 2.$

4. Calculons la limite de (V_n)

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \left\lfloor \lim_{n\to+\infty} 2^n \right\rfloor (-\ln 2)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et $-\ln 2 < 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty.$

5. Exprimons U_n en fonction de V_n et déduisons la limite de (U_n) $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \ln\left(\frac{3}{2}U_n\right) \Leftrightarrow \frac{3}{2}U_n = e^{V_n} \Leftrightarrow U_n = \frac{2}{3}e^{V_n}.$

Comme $\lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty$ on a $\lim_{n\to+\infty} e^{V_n} = 0.$ Ainsi $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0.$

6. a. Démontrons que $S_n = (1 - 2^n)\ln 2$

(V_n) étant la suite géométrique de raison 2 et de premier terme

$V_0 = -\ln 2$, on a : $S_n = (-\ln 2)\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right) = (1 - 2^n)\ln 2.$

b. Justifions que $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$

1^{ro} méthode

On a $T_n = U_0 U_1 U_2\ U_n \cdot 1$ or $U_n = \frac{2}{3}e^{V_n};$

donc $T_n = \frac{2}{3}e^{v_0} \times \frac{2}{3}e^{v_1} \times \ldots \times \frac{2}{3}e^{v_n}:$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)e^{v_0+v_1+\cdots+v_{n-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{s_n}$$

2^0 méthode :

On a $\ln(T_n) = \ln(U_0) + \ln(U_1) + \cdots + \ln(U_{n-1})$ or $\ln(U_n) = V_n + \ln\frac{2}{3};$

d' ou $\ln(T_n) = \left(V_0 + \ln\frac{2}{3}\right) + \left(V_1 + \ln\frac{2}{3}\right) + \cdots + \left(V_{n-1} + \ln\frac{2}{3}\right)$;

$= n\ln\frac{2}{3} + (V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1})$

$= \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n + S_n$

donc $T_n = e^{\ln\frac{2}{3}+S_n} = \left(\frac{2}{3}\right)e^{S_n}$.

c. Exprimons T_n en fonction de n

D'après la question précédente on a $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ or $S_n = (1-2^n)\ln 2$, donc $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{(1-2^n)\ln 2}$ ou $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times 2^{(1-2^n)}$

PROBLEME

PARTIE A

On a: $f: [0; +\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = -x + x\ln x \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

1. Calculons $f(1)$ ef $f(e)$
   $f(1) = -1 + 1 \times 0 = -1$ et $f(e) = -e + e \times 1 = 0$.

2. *Étude des branches infinies* de f

   a. Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(-1+\ln x) = +\infty \text{ car quand } x \to +\infty, (-1+\ln x) \to +\infty$$

   b. Calculons $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(-1+\ln x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (-1+\ln x) = +\infty$$

   c. Interprétons graphiquement ces résultats

$\lim_{\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc (Γ) admet une branche arabolique de direction (OJ).

3. *Étude de la dérivabilité de f à droite en 0.*

a. Démontrons que f est continue à droite en 0

$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}(-x + x\ln x) = 0$ car quand $x \to 0$, $-x \to 0$ et $x\ln x \to 0$.

Or $f(0) = 0$ donc f est continue à droite en 0 .

b. Étudions la dérivabilité de f à droite en 0

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} (-1 + \ln x) = -\infty$

donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

c. Précisons la tangente à (Γ) en O

D'après 3. b., $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$, donc (Γ) admet une demi tangente verticale en O.

4. a. Déterminons $f'(x)$ pour fou x élément de $]0; +\infty[$.

$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = -1 + \ln x + 1 = \ln x$.

b. Dressons le tableau de variation de f

Étudions le signe de $f'(x)$ et le sens de variation de f

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

donc f est strictement croissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$ et stricteme décroissante sur l'intervalle $]0; 1[$.

Tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
f '(x)		$-$	0	$+$	
f(x)	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

c. Donnons une équation de la tangente (D) à (Γ) aus point d'abscisse e

(D) : $y = f'(e)(x - e) + f(e)$ avec $f(e) = 0$ et $f'(e) = 1$; D'où (D) : $y = x - e$.

5. Construisons (D) et (Γ) (voir figure).

6. a. Démontrons à l'aide d'une intégration par parties que $A(t) = \frac{1}{4}e^2 + \left[-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln(t)\right]t^2$

Sur l'intervalle $[t;$ e $]$, (Γ) est en dessous de la droite (OI). on a donc :

$h(t) = -\int_t^e f(x)dx = \int_t^e (x - x\ln x)dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_t^e - \int_t^e x\ln x dx.$

Intégrons $\int_t^e x\ln x dx$ par parties

Posons

$u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$; $\cdots$

on a

$u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{1}{2}x^2$

On obtient $\int_t^e x\ln x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_t^e - \int_t^e \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}t^2\ln(t) - \left[\left[\frac{1}{4}x^2\right]\right]_t^e.$

On a donc $\mu(t) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}t^2\ln(t) + \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t^2\ln($

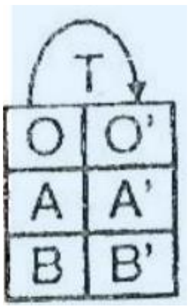
$A(t) = \frac{1}{4}e^2 + \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln(t)\right)t^2$

b. Calculons $\lim_{t\to 0} A(t)$

$\lim_{t\to 0} A(t) = \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t^2\ln t\right] = \frac{1}{4}e^2.$

PARTIE B

1. Calculons les affixes des points O', A' et B'



On a donc $z_{O'} = z_O + 1 + 2i$
$z_{A'} = z_A + 1 + 2i$
$z_{B'} = z_B + 1 + 2i$

Soit $z_0 = 1 + 2i$
$z_{A'} = 2 + i$
$z_{B'} = e + 1 + 2i$

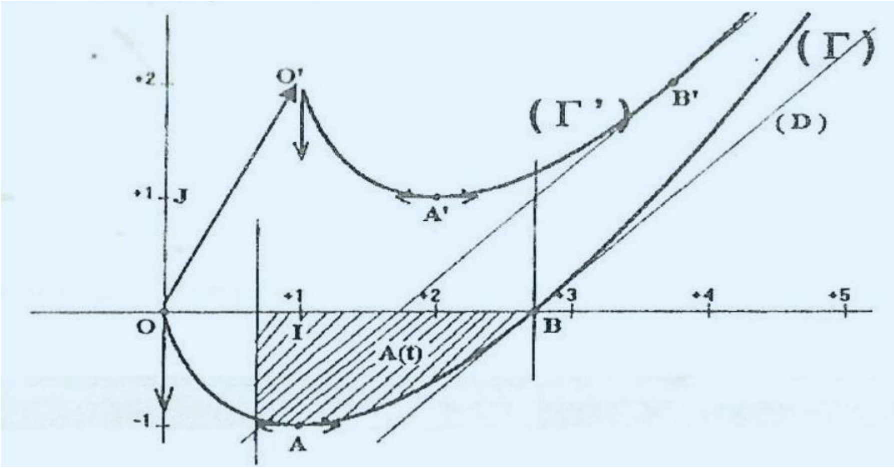
donc les points O', A' et B' ont pour affixes respectives $1 + 2i, 2 + i$ et $1 + e + 2i$.

2. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de T

L'application complexe associée à T est du type : $z \mapsto az + b$ avec $a = 1$ et $b = 1 + 2i$

T est donc la translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe $1 + 2i$ c'est-à-dire le vecteur $\overrightarrow{OO'}$.

3. Construisons (Γ')



CORRECTION SESSION NORMALE 2000 SERIE D

EXERCICE 1

1. Déterminons $S(O)$ et $S(A)$

$S(O)$ a pour affixe $\frac{3-i\sqrt{3}}{2} \times 0 - \sqrt{3} + i = -\sqrt{3} + i$. Donc $S(O) = B$.

$S(A)$ a pour affixe $\frac{3-i\sqrt{3}}{2} \times (\sqrt{3} + i) - \sqrt{3} + i = \sqrt{3} + i$. Donc $S(A) = A$.

On remarque que le point A est invariant par S.

2. Déterminons les éléments caractéristiques de S

Soit k le repport de S et θ son angle. On a :

$$k = \left|\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{3} \text{ et } \theta = Arg\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right) \text{ tel que } \begin{cases} \cos\theta = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} \\ \sin\theta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$c' \text{ est - à - dire } \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases}; \text{ donc } \theta = -\frac{\pi}{6}.$$

3. a. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}')$

1^{re} méthode :

$(\mathcal{C}')$ est l'image du cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 2 par la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$, or $S(O) = B$ donc $(\mathcal{C}')$ est le cercle de centre B et de rayon $2\sqrt{3}$.

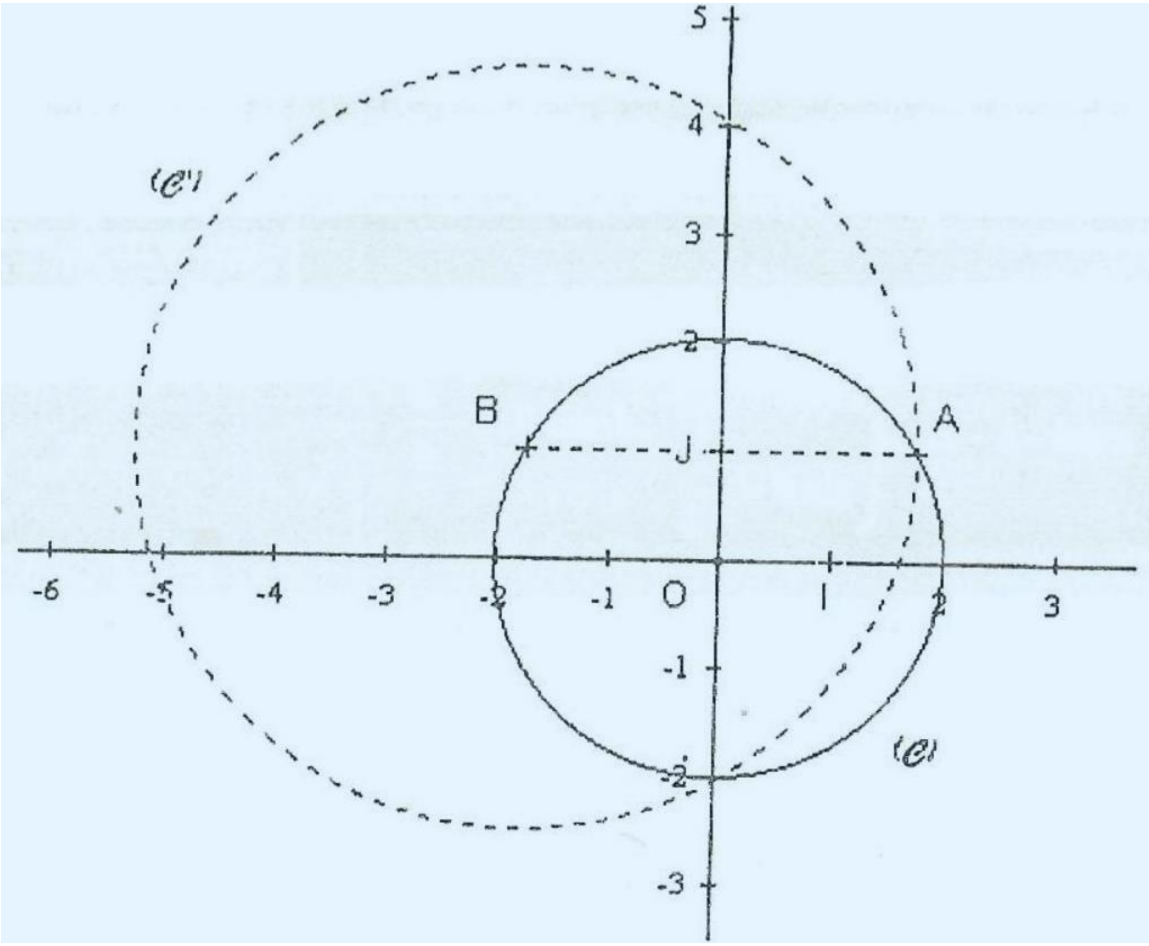
2^{eme} méthode :

On a : $OA = |\sqrt{3} + i| = 2$ donc le point A appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

Or $S(O) = B$ et $S(A) = A$ donc (e') est le cercle de centre B et de rayon BA

où $BA = |\sqrt{3} + i + \sqrt{3} - i| = 2\sqrt{3}$.

b. Construisons $(\mathcal{C}')$:



EXERCICE2

1. Déterminons l'année du début d'étude

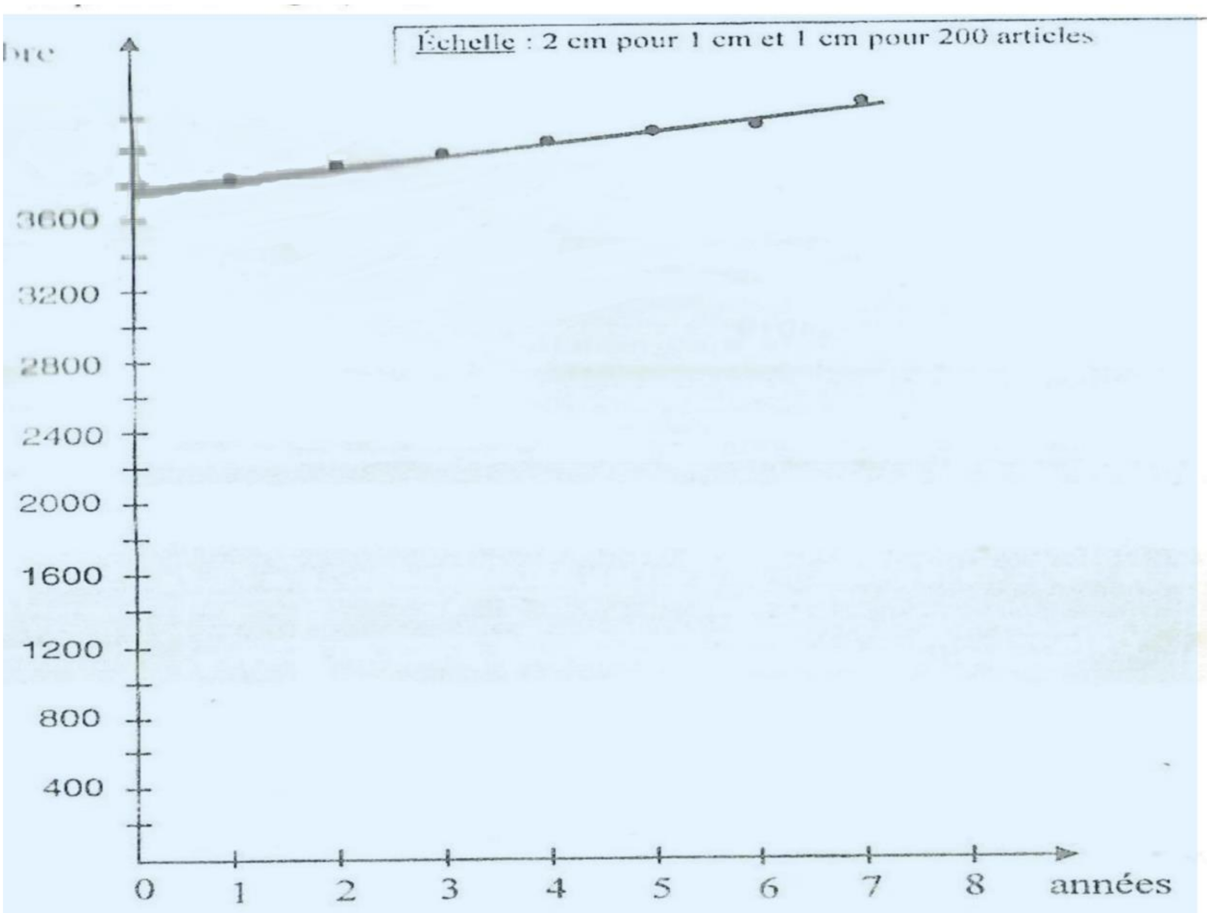
1^{ere} méthode : par comptage direct.

En complétant le tableau des données sachant que 1999 est la septième année, on obtient 1993 pour la première année

2^{eme} méthode : par calcul.

Soit x l'année du début d'étude. Le nombre d'années entre x et 1999 est $1999 - x + 1$. Donc $1999 - x + 1 = 7$, d'où $x = 1993$. C'est donc à partir de anneo 1993 que l'entreprise s'est intéressée à ses stocks.

2. Représentons graphiquement le nuage de points



3. Calculons les coordonnées du point moyen G.

On a: $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = 4;$

Et $\bar{y} = \frac{3810+3860+3940+4020+4100+4180+4220}{7} = 4019.$

D'où $G(4; 4019)$.

4. Déterminons une équation de la droite de régression de y en x

Calculons la variance de x :

$$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} x_1{}^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{7}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2) - 4^2 = 4$$

Calculons la covariance de x et y :

$$\text{Cov}(x; y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} x_1 y_1 - \bar{x}\bar{y}$$
$$= \frac{1}{7}(1 \times 3810 + 2 \times 3860 + 3 \times 3940 + 4 \times 4020 + 5 \times 4100 + 6 \times 4180$$
$$7 \times 4220) - 4 \times 4019$$
$$= 288{,}28$$

Calculons le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b de la droite régression de y en x :

$a = \frac{\text{Cov}(x;y)}{V(x)} = 72{,}1$ et $b = \bar{y} - a\bar{x} = 4019. - 72{,}1 \times 4 = 3730{,}6.$

Donc la droite de régression de y en x a pour équation : $y = 72{,}1x + 3730{,}6.$

5. Déterminons le nombre d'articles en stock en 2004

L'année 2004 correspond à la 12^e année.

Donc pour $x = 12$, on $a: y = 72{,}1 \times 12 + 3730{,}6 = 4595{,}9.$

Le nombre d'articles en stock prévu pour l'année 2004 est 4596.

PROBLEME

PARTIE A ÉTUDE D'UNE FONCTION AUXILIAIRE

1. Calculons les limites de g en 0 et en $+\infty$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = +\infty \text{ car lorsque } x \to 0, (x-1) \to -1 \text{ et } -\ln \to +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - 1 - 2\frac{\ln x}{x}\right) = -\cdots$$

$$\text{car lorsque } x \to +\infty, \left(1 - \frac{1}{x}\right) \to 1 \text{ et } \frac{\ln x}{x} \to 0$$

2. a. Déterminons g'et étudions son signe

$$\forall x \in]0;+\infty\left[, g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}\right.$$

$g'(x) = 0$ pour $x = 2;$

$g'(x) < 0$ pour $x \in]0;2[$

$g'(x) > 0$ pour $x \in]2;+\infty[$

b. Déduisons le sens de variation de g et dressons son tableau de variation

D'après les résultats du a. on déduit que la fonction g est strictement crolssante sur $]2;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]0;2]$. D'où le tableau de var!ation qui suit :

x	0		2		$+\infty$
g'(x)		−	0	+	
g(x)	$+\infty$	↘	1-ln4	↗	$+\infty$

3. Vérifions que $g(1) = 0$

On: $g(1) = 1 - 1 - 2\ln 1 = 0$.

4. Démontrons qu'il existe un unique réel $\alpha \in]3;4[$ tel que $g(\alpha) = 0$

La fonction g est continue sur $]2;+\infty[$ car elle y est dérivable ; elle es strictement croissante sur $]2,+\infty[$.

Or $]3;4[\subset]2;+\infty[$. Donc g réalise une bijection de l'intervalle $]3;4[$ su l'intervalle

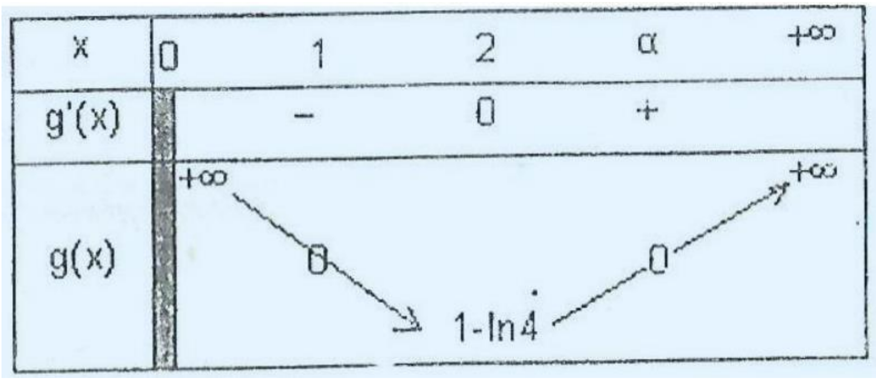
$]g(3);g(4)[; 0 \in]g(3);g(4)[\text{car } g(3).g(4) < 0$

$(g(3) \approx -0{,}19$ et $g(4) \approx 0{,}22)$.

Il existe donc un unique réel α appartenant à l'intervalle $]3;4[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

5. Déduisons des questions précédentes, le signe de $g(x)$ suivant le valeurs de x

Complétons le tableau de variation de g



D'après le tableau de variation de g, on déduit que :

$\forall x \in]0;1[\cup]\alpha;+\infty[, g(x) > 0;$

$\forall x \in]1;a[, g(x) < 0$ et

$\forall x \in \{1;\alpha\}, g(x) = 0.$

PARTIE B

Détermination d'une valeur approchée de α.

1. Démontrons que $\forall x \in [3;4], h(x) \in [3;4]$.

La fonction h est continue sur $]0\,;+\infty[$ car elle y est dérivable. On a : $h'(x) = {}^{2}/_{x}$

donc h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ qui contient $[3;4]$. Ainsi $\forall x \in [3;4]$, on a : $h(x) \in [h(3);h(4)]$. Or $h(3) \approx 3.19 > 3$ et $h(4) \approx 3.77 < 4$, donc: $[h(3);h(4)] \subset [3;4]$ d'où $\forall x \in [3;4],\ h(x) \in [3;4]$.

2. a. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [3;4]$ On a $U_0 = 3{,}5$ donc $U_0 \in [3;4]$.

Soit k un entier naturel quelconque tel que $U_k \in [3;4]$; d'après la question précédente, si $x \in [3;4]$ alors $h(x) \in [3;4]$.

On a $U_k \in [3;4]$ donc $h(U_k) \in [3;4]$. Comme $h(U_k) = U_{k+1}$, on en déduit donc que si $U_k \in [3;4]$ alors $U_{k+1} \in [3;4]$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [3;4]$.

b. Calculons l'arrondi d'ordre 3 de U_1

On a $\mathrm{U}_1 = \mathrm{h}(3{,}5) = 3{,}506$.

c. Démontrons par récurrence que la suite $(U_n)_{n\in IN}$ est croissante

$U_0 = 3{,}5$ et $U_1 = 3{,}506$ donc $U_0 \leq U_1$.

Soit k un entier naturel quelconque tel que $U_k \leq U_{k+1}$.

La fonction h est continue et strictement croissante sur $[3;4]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_1 \in [0;4]$

Or $U_k \leq U_{k+1}$ donc $h(U_k) \leq h(U_{k+1})$, c'est-à-dire $U_{k+1} \leq U_{k+2}$;

$\mathrm{car}\, h(U_k) = U_{k+1}$ et $h(U_{k+1}) = U_{k+2}$.

Ainsi, si $\mathrm{U_k} \leq \mathrm{U_{k+1}}$ alors $\mathrm{U_{k+1}} \leq \mathrm{U_{k+2}}$.

Donc la suite $(U_n)_{n\in IN}$ est croissante.

d. Déduisons que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergenie

On a $\forall n \in \mathbb{N}, 3 \leq U_n \leq 4$.

L. a suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par 4.

Par conséquent elle est convergente.

PARTIE C Étude de la fonction f

1. Démontrons que f est continue à droite en 0

On a :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(\frac{x^2}{2} + x\right)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln x = 0$

ef $f(0) = 0$

donc f est continue à droite en 0 .

2. Étudions la dérivabilité de f à droite en 0 On a :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}} \left(\frac{x}{2}+1-2\ln x\right) = +\infty$$

car $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{x}{2}+1\right) = 1$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -2\ln x \to +\infty$.

La fonction f n'est donc pas dérivable à droite en 0.

3. Donnons une interprétation graphique du précédent résultat

Nous déduisons du résultat précédent que la courbe (C) admet une démi-tangente verticale on 0.

4. Calculons la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}-\frac{2\ln x}{x}\right) = +\infty$

Car lorsque: $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$ et $\frac{\ln x}{x} \to 0$ et $x^2 \to +\infty$.

5. Calculons la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers too puis interpréton, graphiquement ce résultấ

On a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}-\frac{2\ln x}{x}\right) = +\infty$.

On en déduit que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (O.J).

6. a. Démontrons que : $\forall x \in J0; + + 0 / f'(x) = g(x)$

$\forall x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{2} + 1 - 2(\ln x + 1) \\ &= x + 1 - 2(\ln x + 1) \\ &= x - 1 - 2\ln x \\ &= g(x). \end{aligned}$$

D'où, $\forall x > 0, f'(x) = g(x)$.

b. Etudions le signe de $f'(x)$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$. Donc d'après la question on a :

$\forall x \in]0;1[\cup]a; +\infty[, f'(x) > 0$

$\forall x \in]1;\alpha[, f'(x) < 0$ et

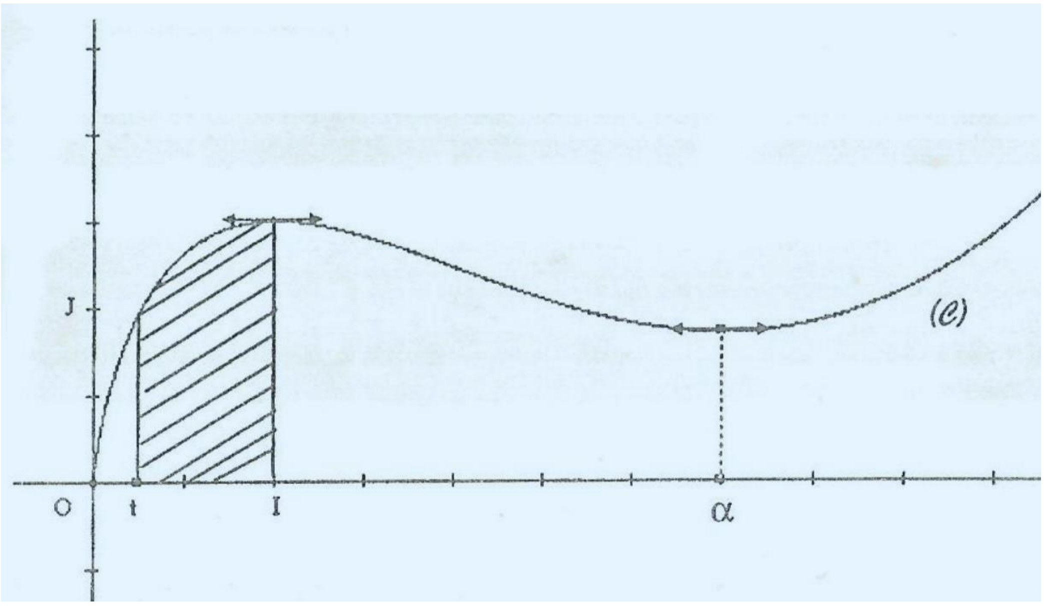
$\forall x \in \{1;\alpha\}, f'(x) = 0$.

c. Dressons le tableau de variation ce f

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

On a $f(a) \approx 0{,}8$.

7. Tracons la courbe $(\mathcal{C})$



8. a Utilisons une intégration par parties pour calculer l'aire $A(t)$

D'après la représentation graphique de f, on a $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) \geq 0$, donc $A(t) = \int_t^1 f(x)dx$.

$$A(t) = \int_t^d \left(\frac{x^2}{2} + x - 2x\ln x\right)dx = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)_t^1 - 2\int_t^1 x\ln x dx$$

Calculons $\int_t^1 x\ln x dx$.

Posons: $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$.

On a: $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{1}{2}x^2$.

D'où $\int_t^1 x\ln x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_t^1 - \frac{1}{2}\int_t^1 xdx$;

$$= -\frac{1}{2}t^2\ln t - \frac{1}{4}[x^2]_1^1$$
$$= -\frac{1}{2}t^2\ln t + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}$$

donc $A(t) = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right) - 2\left(-\frac{1}{2}t^2\ln t + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}\right)$;

$A(\mathrm{t}) = -\frac{1}{6}t^3 - t^2 + t^2 \ln t + \frac{7}{6}$

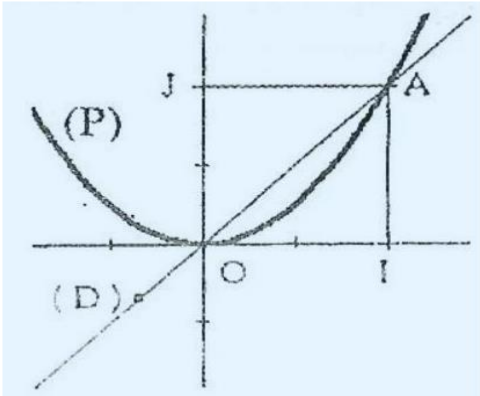
b. Calculons la limite de $A(t)$ quand t tend vers 0.

$\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} A(t) = \frac{7}{6}$ car lorsque $t \underset{t>0}{\to} 0$, $t^2 \ln t \to 0$ et $\left(\frac{t^3}{6} + t^2\right) \to 0$

CORRECTION SESSION DE REMPLACEMENT 1999 SERIE D

EXERCICE 1

1. Calculons les aires A_1 de R_1, A_2 de R_2 et A_3 de R_3



R_1 est le triangle AJO rectangle en J.

On a donc: $A_1 = \frac{1}{2} OJ \times JA$

$OJ = JA = 1$ (car OIAJ carré de côté 1)

$A_1 = \frac{1}{2}$.

R_2 est la portion du plan limitée par la droite (D) et la parabole (P).

(D) ;'tant au-dessus de (P) sur l'intervalle $[0; 1]$. On a donc:

$A_2 = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1;$

$A_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$A_2 = \frac{1}{6}$.

A_3 est la portion du plan limitée par (P) et les droites (OJ); (OI) el (IA) ;

d'où $A_3 = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$A_3 = \frac{1}{3}$.

2. a Calculons p_4

Ici, la fléchette étant lancée, il n'y a que 2 possibilités : ou bien, elle atteint la cible où bien elle ne l'atteint pas. La probabilité d'atteindre la cible est de $\frac{5}{6}$ donc la probabilité de ne pas l'atteindre est $q = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$.

b. Démontrons que $p_1 = \frac{5}{12}, p_2 = \frac{5}{36}$ et $p_3 = \frac{5}{18}$

Remarquons que R_1, R_2, et R_3 selon l'énoncé, sont trois régions disjointes du carré OIAJ.

On a donc : $R_1 \cup R_2 \cup R_3 =$ OIAJ et la probabilité d'atteindre OIA.J est égale à la probabilité d'atteindre R_1 ou bien R_2 ou bien R_3 : On a : $p_1 + p_2 + p_3 = \frac{5}{6}$ $\quad (1)$

car p_1, p_2 et p_3 sont respectivement proportionnelles à A_1, A_2, et A_3;

on a donc:

$$\frac{p_1}{A_1} = \frac{p_2}{A_2} = \frac{p_3}{A_3} = k \ (k > 0) \qquad (2)$$

Il résulte de (1) et (2) ce qui suit : $\begin{cases} p_1 = kA_1 \\ p_2 = kA_2 \\ p_3 = kA_3 \\ (A_1 + A_2 + A_3)k = \frac{5}{6} \end{cases}$

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1 \text{ on a donc : } k = \frac{5}{6} \ d'où$$
$$p_1 = \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12},\ p_2 = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36} \text{ et } p_3 = \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$$

3. a. Calculons la probabilité p_a pour que le joueur ne marque aucun point

S'il ne marque aucun point, c'est qu'il a manqué la cible au 1^{er} lancer et au 2^{e} lancer. On a donc: $p_a = p_4 \times p_4$ (ou $(p_4)^2$) d'où $p_a = \frac{1}{36}$.

b. Démontrons que la probabilité p_b pour que le joueur marque 2 points est $\frac{5}{54}$

Ici, il n'y a que 2 éventualités : au 1^{er} lancer, le joueur manque la cible et atteint la région R_3 du carré au 2^{e} lancer, de probabilité : $\frac{1}{6} \times \frac{5}{18}$.

Ou, au 1^{er} lancer, le joueur atteint la région R_3 du carré et manque la cible au $2^{ème}$ lancer, de probabilité : $\frac{5}{18} \times \frac{1}{6}$.

Ainsi $\mathrm{p_b} = \frac{1}{6} \times \frac{5}{18} + \frac{5}{18} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{54}$.

ENRICHISSEMENT DE L'EXERCICE

4. a. Définissons la loi de probabilité de X

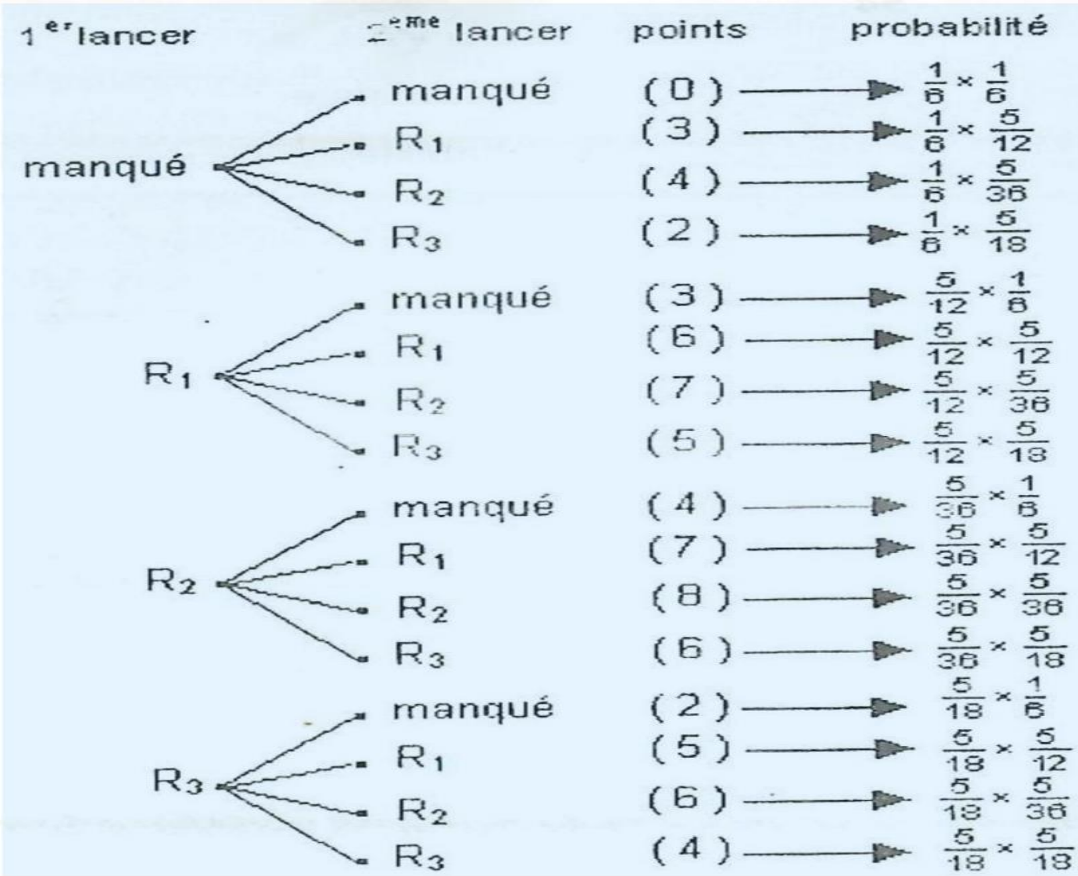
Déterminons les valeurs prises par X :

les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0,2,3,4,5,6,7 et 8

1^{ro} méthode : À partir d'un tableau à double entrée :

1^er lancer → / 2^e lancer ↓	Manqué (0) $\frac{1}{6}$	R_1 (3) $\frac{5}{12}$	R_2 (4) $\frac{5}{36}$	R_3 (2) $\frac{5}{18}$
Manqué (0) $\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{5}{216}$	$\frac{5}{108}$
R_1 (3) $\frac{5}{12}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{432}$	$\frac{25}{216}$
R_2 (4) $\frac{5}{36}$	$\frac{5}{216}$	$\frac{25}{432}$	$\frac{25}{1296}$	$\frac{25}{648}$
R_3 (2) $\frac{5}{18}$	$\frac{5}{108}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{25}{648}$	$\frac{25}{324}$

2^e méthode : À partir d'un arbre de choix.



Il résulte du tableau à double entrée ou de cet arbre de choix que :

$X(\Omega) = \{0; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

Déterminons la loi de probabilité de X

De même l'une ou l'autre de ces deux méthodes nous permet d'obtenir ce qui suit :

$$p(X=2) = \left(\frac{5}{72}\right)$$
$$p(X=4) = \left(\frac{5}{216}\times 2\right) + \left(\frac{5}{18}\right) = \frac{5}{108} + \frac{25}{324} = \frac{40}{324} = \frac{10}{81}$$
$$p(X=5) = \left(\frac{5}{12}\times\frac{5}{18}\right)\times 2 = \frac{25}{108}$$

$$p(X=6) = \left(\frac{5}{12}\right)^2 + \left(\frac{5}{18}\times\frac{5}{18}\right)\times 2 = \frac{25}{144} + \frac{25}{324} = \frac{25\times 13}{1296} = \frac{325}{1296}$$
$$p(X=7) = \frac{5}{12}\times\frac{5}{36}\times 2 = \frac{5}{12}\times\frac{5}{18} = \frac{25}{216}$$
$$p(X=8) = \left(\frac{5}{36}\right)^2$$

D'où la loi de probabilité de X est döfinie par le tableau ci-dessous

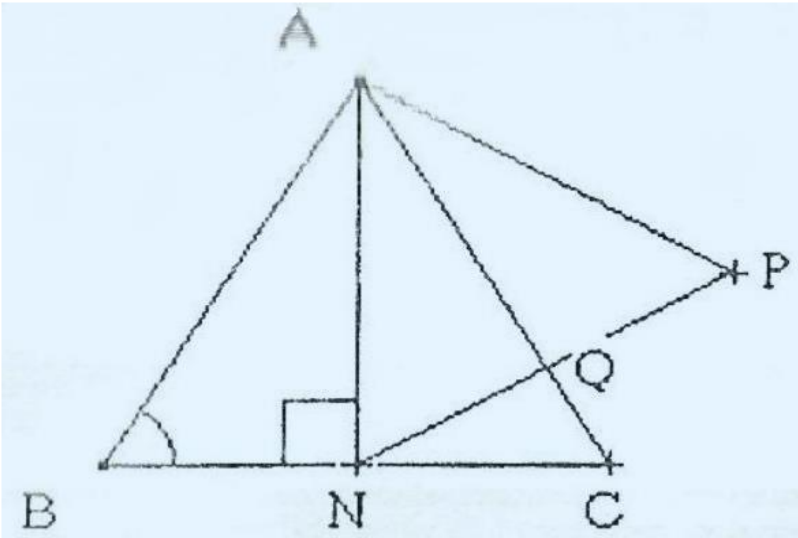
x_i	0	2	3	4	5	6	7	8
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{54}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{25}{108}$	$\frac{325}{1296}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{25}{1296}$

b. Calculons l'espérance mathématique $E(X)$ du joueur.

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{5}{54} + 3 \times \frac{5}{36} + 4 \times \frac{10}{81} + 5 \times \frac{25}{108} + 6 \times \frac{325}{1296} + 7 \times \frac{25}{216} + 8 \times \frac{25}{1296} =$$

EXERCIGE 2

1. Figure



Données

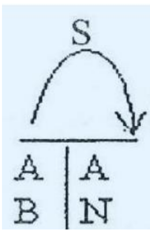
ABC triangle équilatéral

ANP triangle équilatéral

N milieu de $[BC]$

Q milieu de $[NP]$

S similitude directe telle que :



2. Déterminons le rapport de S

Soit k ce rapport. Comme $S(A) = A$ et $S(B) = N$ donc $k = \frac{AN}{AB}$ (1)

On sait que ABC est un triangle équilatéral et N milieu de [BC] ;

on a donc :

$$AN = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \qquad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow k = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Déterminons la mesure principale de l'angle de S

Soit $\hat{\alpha}$ l'angle orienté de S. On a : mes $(\hat{\alpha}) = \mathrm{mes}(\widehat{AB}, \widehat{AN})$. ABC est un triangle équilatéral direct et (AN) la bissectrice de l'angle. $\widehat{BAC}$ (car N est milieu de [BC]). On en déduit que mes $(\widehat{AB}, \widehat{AN}) = \frac{\pi}{6}$. Donc l'angle orienté de S a pour mesure principale $\frac{\pi}{6}$.

4) Justifions que $S(C) = P$

ABC et ANP sont des triangles équilatéraux et Q est le milieu de [NP],

on a : $\begin{cases} AC = AB \\ AP = AN \end{cases}$

Or on a : $AN = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$ donc $AP = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$ **(a)**

Justifions que mes $(\widehat{AC}, AP) = \frac{\pi}{6}$.

Il suffit pour cela de démontrer que $(AQ) = (AC)$.

En effet, appelons R le point d'intersection de (AC) et (NP).

On a : mes $(\widehat{NR}, NA) = \frac{\pi}{3}$ car ANP est un triangle équilatéral et mes $(\overline{AN}, \overline{AR}) = \frac{\pi}{6}$ car (AN) est une bissectrice du triangle équilatéral ABC.

On en déduit que : mes $(\widehat{\mathrm{RA}}, \overrightarrow{\mathrm{RN}}) = \frac{\pi}{2}$. c'est-à-dire : $(AR) \perp (\mathrm{RN})$.

$\mathrm{Or}(AR) = (AC)$ et $(RN) = (PN)$ $(R \in (AC) \cap (NP))$ d'où $(AC) \perp (NP)$;

(AC) est donc la hauteur de ANP passant par A.

ANP étant un triangle équilatéral, (AC) passe par le milieu Q de [NP].

Donc $(AQ) = (AC)$ par suite mes $(\widehat{AC}, \widehat{AP}) = \mathrm{mes}(\widehat{\mathrm{AQ}}\mathrm{AP}) = \frac{\pi}{6}$;

$(\mathrm{car}(\mathrm{AQ})$ bissectrice de $(\widehat{\mathrm{AN}}, \widehat{\mathrm{AP}})$) **(b)**

(a) et $(\boldsymbol{b}) \Rightarrow S(C) = P$.

5. Justifions que $S(N) = Q$

1^{re} **méthode :**

ANP étant un triangle équilatéral tel que Q milieu de [NP],

on a: $\begin{cases} AQ = \frac{\sqrt{3}}{2} AN \\ \mathrm{Mes}(\widehat{AN}, \overline{AQ}) = \frac{\pi}{6} \end{cases}$;

on en déduit que $S(N)=Q$.

2° **méthode**

ANP est un triangle équilatéral et Q est le milieu de [NP] ;

D'où $AQ=\frac{\sqrt{3}}{2}AN$

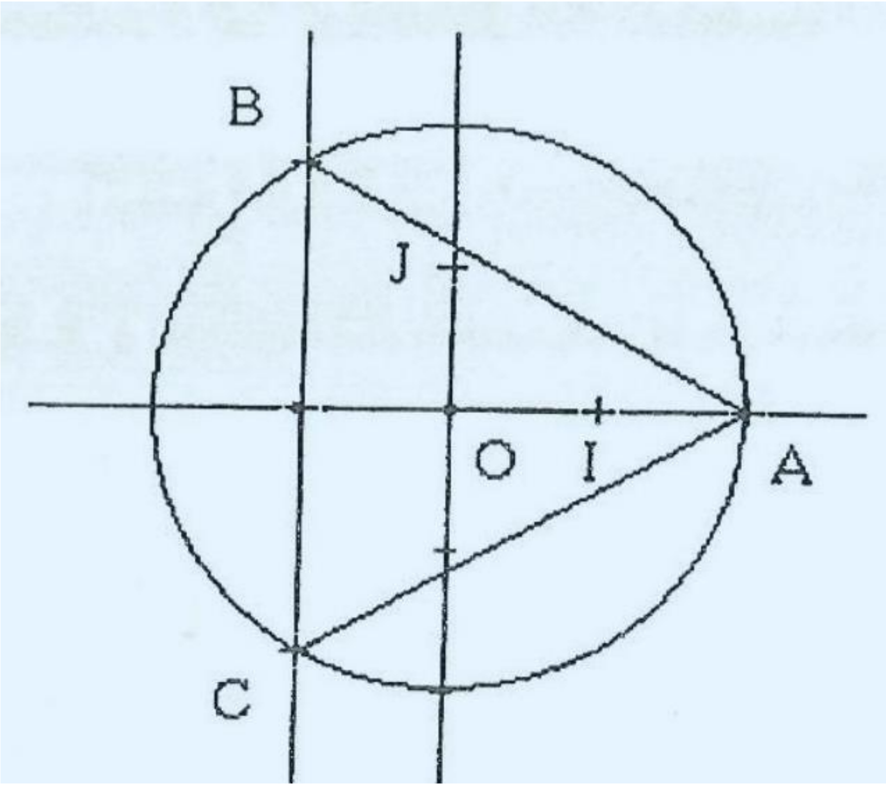
Justifions que mes $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}})=\frac{\pi}{6}$

On a : mes $(\widehat{AN},\overline{AC})=\frac{\pi}{6}\text{car}$ (AN) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et mes $(\mathrm{AN},\widehat{AQ})=\frac{\pi}{6},\text{car}(AQ)$ est la bissectrice de $\widehat{NAP}$; donc $(AC)=(AQ)$

d'où mes $(\widehat{\mathrm{AN},\widehat{AP}})=\frac{\pi}{6}$

(a) et $(b)\Rightarrow S(N)=Q$.

6 a. Figure



b. Calculons l'affixe de N

N est le milieu de $[BC]$ donc $z_N=\frac{z_B+z_C}{2}$ d'où $z_N=-1$.

c. Déterminons la transformation complexe f associée à S

$f:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$

$z\longmapsto z'$

telle que $z'=\alpha z+\beta$ où $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

$\alpha = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\beta = (1-\alpha)z_A$ d'où $\beta = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

D'où $\begin{cases} f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \longmapsto \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

PROBLEME

PARTIEA

$f{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{x+3}{x+1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R};\ x+1 \neq 0\}$;

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ ou bien $D_f = \left]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty\right[$.

1. Calculons les limites de f aux bornes de D_f

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$

$\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty, \text{car}\, x \to -1 > \begin{matrix} x+3 \to 2 \\ x+1 > 0. \\ x+1 \to 0 \end{matrix}$

$\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty, \text{car}\, x \to -1 < \begin{cases} x+3 \to 2 \\ x+1 < 0. \\ x+1 \to 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = 1$

2. Calculons la dérivée $f\,'$ de f.

Pour tout nombre réel x différent de -1 ;

$f'(x) = \frac{x+1-(x+3)}{(x+1)^2} = -\frac{2}{(x+1)^2}$.

PARTIE B

$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \begin{cases} \frac{\boldsymbol{3+lnx}}{\boldsymbol{1+lnx}} \ \ si\ x \neq 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$

1. $D_h = \{x \in \mathbb{R}; x > 0 \text{ et } 1 + \ln(x) \neq 0\} \cup \{0\}$;
or $1 + \ln(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq e^{-1}$, donc $D_h = \{x \in \mathbb{R}; x > 0 \text{ et } x \neq e^{-1}\} \cup \{0\}$; d'où $D_h = [0; e^{-1}[\cup]e^{-1}; +\infty[$.

2. Calculons $\lim_{x\to\frac{1}{e}} h(x)$:

Posons $u = 1 + \ln x$ lorsque $x \to \frac{1}{e}, u \to 0$:

$\lim_{x\to\frac{1}{e}} h(x) = \lim_{u\to 0} \frac{2}{u} + 1 = -\infty.$

$\lim_{x\to\frac{1}{e}} h(x) = \lim_{u\to 0} \frac{2}{u} + 1 = +\infty.$

1^{re} **méthode** :

$h(x) = \frac{3+\ln x}{1+\ln x} = \frac{2}{1+\ln x} + 1.$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+\ln x} = 0.$

$\underline{2}^{\text{eme}}$ **méthode** :

Posons $\mathrm{u} = \ln x$ lorsque $\mathrm{x} \to +\infty, \mathrm{u} \to +\infty.$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{u\to+\infty} \frac{3+u}{1+u} = 1$

On en déduit que la droite d'équation $\mathrm{y} = 1$ est une asymptote à (Γ).

3. Démontrons que h est continue à droite en 0

Calculons la limite à droite en 0 :

Posons $u = \ln x$. Lorsque $x \to 0, u \to -\infty.$

$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{u\to-\infty} \frac{3+u}{1+u} = \lim_{u\to-\infty} \frac{u}{u} = 1.$

Or $h(0) = 1$, on en déduit que h est continue à droite en 0 .

4. Démontrons que (Γ) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0

Étudions pour cela la dérivabilité de h à droite en 0 .

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3+\ln x}{1+\ln x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x(1+\ln x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x\ln x} = -\infty$$

On en déduit que h n'est pas dérivable en 0 mais (Γ) admet une demitangente verticale au point d'abscisse 0.

5. Calculons la dérivée h ' de h

Pour tout nombre réel x appartenant à $]0;\frac{1}{\mathrm{e}}[\cup]\frac{1}{\mathrm{e}};+\infty[$.

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+\ln x)-\frac{1}{x}(3+\ln x)}{(1+\ln x)^2} = \frac{-2}{x(1+\ln x)^2}$$

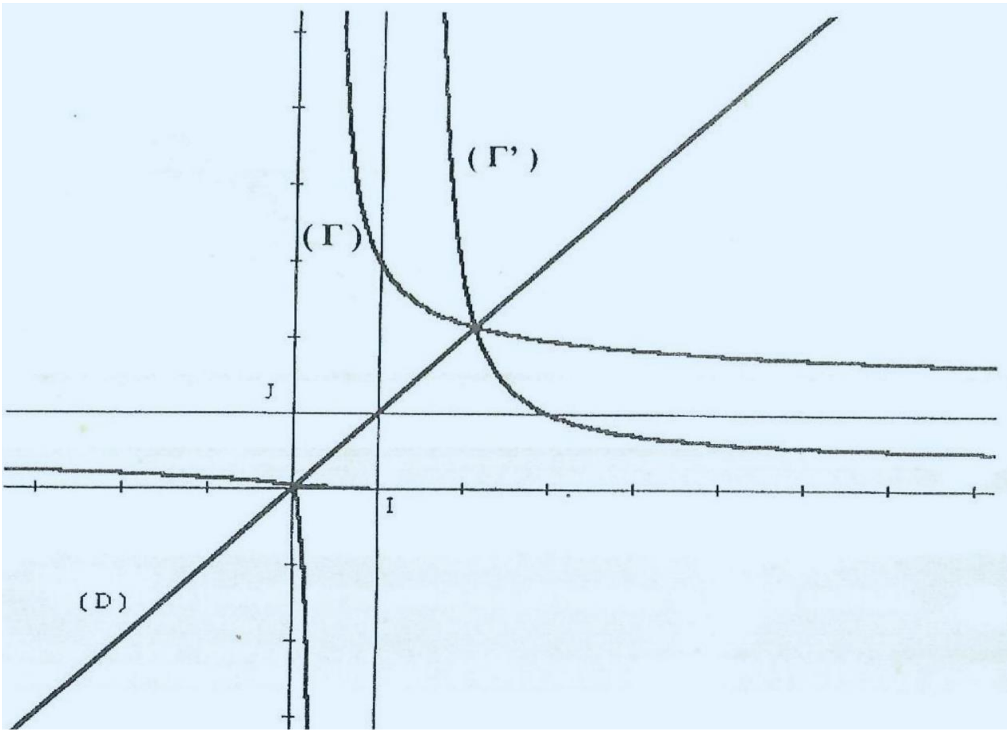
6. Étudions le sens de variation de h et dressons son tableau de variation

$\forall x \in]0;\frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e};+\infty[, x(1+\ln x)^2 > 0$, donc $h'(x)$ est négative sur chacun des intervalles $]\,0;\frac{1}{\mathrm{e}}\,[$ et $]\,\frac{1}{\mathrm{e}};+\infty\,[$ et par suite, h est strictement décroissante sur $]0;\frac{1}{\mathrm{e}}[$ et sur $]\frac{1}{\mathrm{e}};+\infty[$.

Tableau de variation de h

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$h'(x)$	||	$-$	||	$-$	
$h(x)$	||	$1 \searrow +\infty$	||	$+\infty \searrow 1$	

7. Traçons (T), les asymptotes à (Γ) et (Γ')



PARTIE C

$\varphi: \left[0;\frac{1}{e}\right[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto h(x)$ si $x \neq 0$ et $\varphi(0) = 0$

1. Démontrons que φ est une bijection de l'intervalle [0; $\frac{1}{e}$ I sur un intervalle K à préciser

De par la définition de φ et des résultats de la question B) 6 , nous pouvons dire que φ est une fonction continue et strictement décroissante sur [$0;\frac{1}{e}$ [et $p\left(\left[0;\frac{1}{e}\right[\right) = \left]-\infty;1\right]$

Donc φ réalise une bijection de $\left[0;\frac{1}{e}\right[$ sur $K =]-\infty;1]$.

2. Déterminons $\varphi^{-1}(1)$

$\varphi(0) = 1 \Leftrightarrow \varphi^{-1}(1) = 0$

3. Démontrons que pour tout nombre réel x appartenant à $K \setminus \{1\}$ $\varphi^{-1}(x) = \exp\left(\frac{3-x}{x-1}\right)$

Soit $y \in]-\infty; 1[$ et $x \in]0; \frac{1}{e}[$ tel que $\varphi^{-1}(y) = x$.

On a alors $y = \varphi(x)$, c'est-à-dire $y = \frac{3+\ln x}{1+\ln x}$;

$$\begin{aligned} y + y\ln x &= 3 + \ln x \\ (y-1)\ln x &= 3 - y \\ \ln x &= \frac{3-y}{y-1} \\ x &= \exp\left(\frac{3-y}{y-1}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que: $\forall x \in \left]-\infty; 1\right[, \varphi^{-1}(x) = \exp\left(\frac{3-x}{x-1}\right)$.

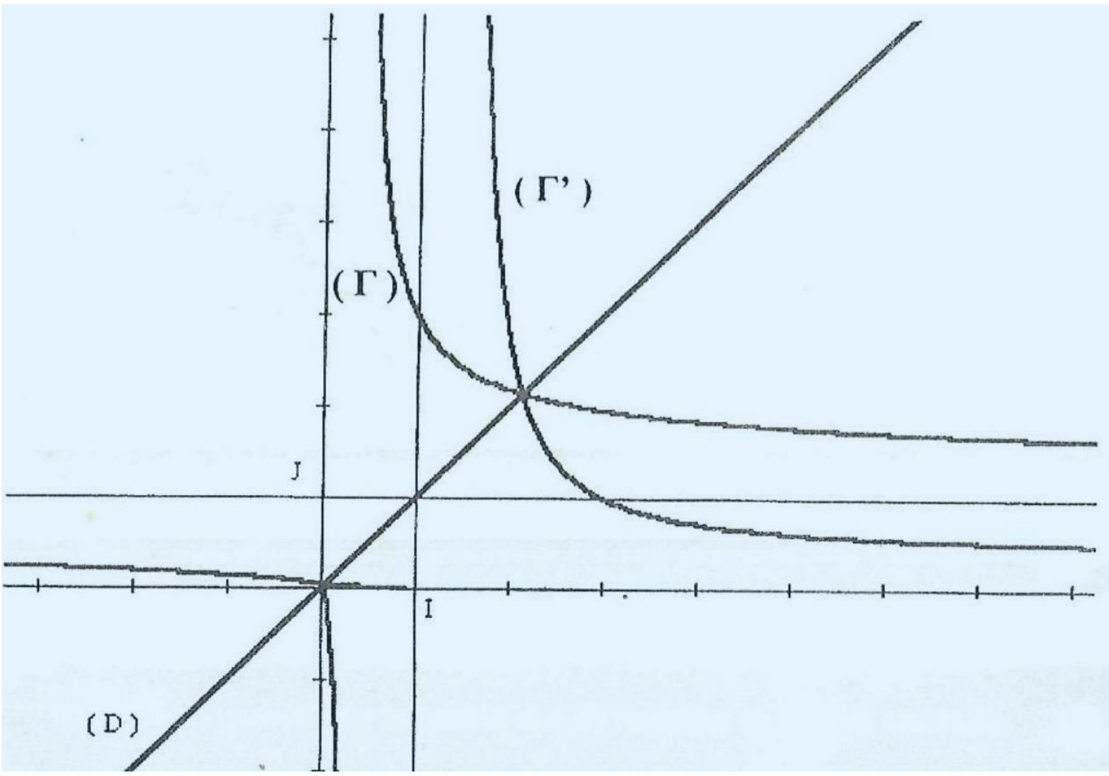
Autre méthode:

On sait que φ est une bijection et $\forall x < 1, \left(\frac{3+\ln(x)}{1+\ln(x)}\right) 0 \exp\left(\frac{3-x}{x-1}\right) = \frac{3+\frac{3-x}{x-1}}{1+\frac{3-x}{x-1}} = x$;

donc $\varphi^{-1}(x) = \exp\left(\frac{3-x}{x-1}\right)$

4) Traçons la courbe $(\underline{H})$

Dans le repère (O, I, J), $(\underline{H})$ est la courbe symétrique de (Γ) par rapport à la première bissectrice (D) d'équation $y = x$.



CORRECTION SESSION NORMALE 1999 SERIE D

EXERCICE 1

1. Calculons $\bar{x}$ et $\bar{y}$

On a: $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6}$;

$\bar{x} = 3{,}5.$

$$\bar{y} = \frac{12 + 13 + 15 + 19 + 21 + 22}{6} = \frac{102}{6};$$

$\bar{y} = 17.$

2. Représentons graphiquement le nuage de points ainsi que le point moyen G (**voir figure 1**)

On a $\mathrm{G}(\bar{\mathrm{x}}; \bar{\mathrm{y}})$ d'où $\mathrm{G}(3{,}5; 17)$.

3. Calculons la variance $V(x)$ de x et la covariance $\mathrm{Cov}(x; y)$ de x ei y

$$V(x) = \left(\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i^2\right) - \vec{x}^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

$$\mathrm{Cov}(x; y) = \left(\frac{1}{6}\sum x_i y_i\right) - \bar{x}\bar{y} = \frac{13}{2}$$

4. Démontrons que $y = \frac{78}{35}x + 9{,}2$ est une équation de (D)

La droite (D) de régression de y en x par la méthode des moindres carrés a pour équation $y = ax + b$ avec $a = \frac{\mathrm{cov}(x;y)}{v(x)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}\mathrm{car}(D)$ passe par G.

Or $a = \frac{\mathrm{cov}(x;y)}{v(x)} = \frac{13}{2} \times \frac{12}{35} = \frac{78}{35}$;

$$b = 17 - \frac{78}{35} \times \frac{7}{2} = \frac{46}{5} = 9{,}2;$$

donc (D) : $y = \frac{78}{35}x + 9{,}2.$

5. Traçons (D) (Voir figure 1).

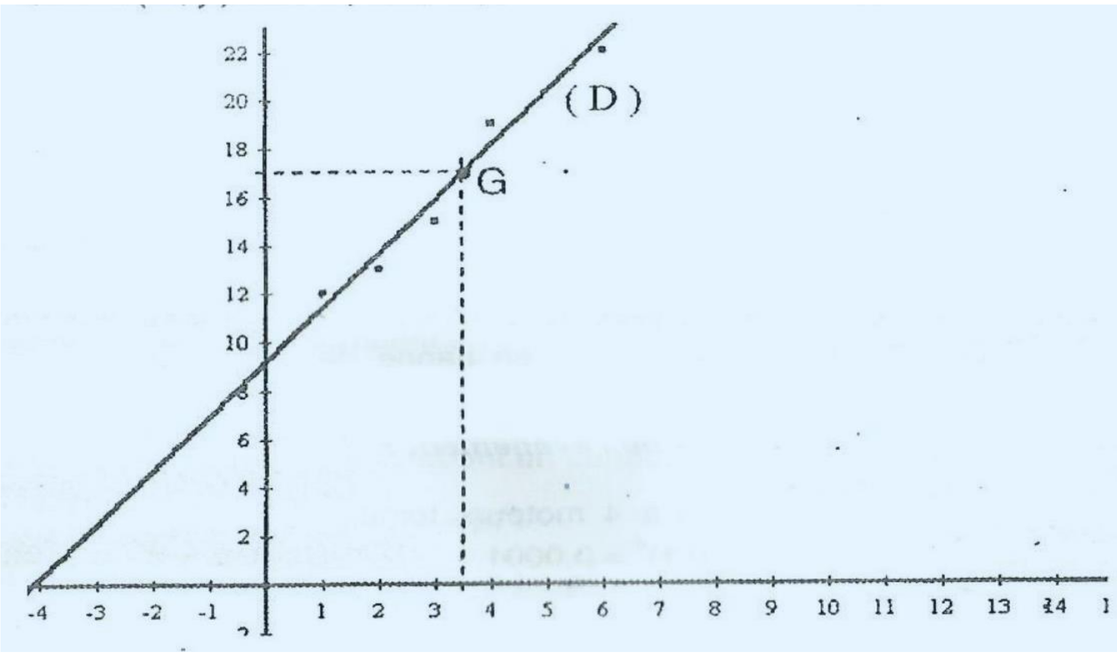
Estimons le chiffre d'affaires du pharmacien à la fin du $7°$ mois

Pour $x = 7$ on a $y = \frac{78}{35} \times 7 + 9{,}2 = 24{,}8$

Le chiffre d'affaires du pharmacien est estimé à 24,8 millions de francs CFA à la fin du $7°$ mois.

On a $\mathrm{G}(\bar{\mathrm{x}}; \bar{\mathrm{y}})$ d'où $\mathrm{G}(3{,}5; 17)$.

On a $G(\overline{x}; \overline{y})$ d'où $G(3{,}5; 17)$.



EXERCICE 2

PARTIE A

1. Calculons la probabilité de l'événement E : "un avion à 2 moteurs s'écrase"

Étant donné que les moteurs tombent en panne de manière indépendante, on a: $p(E) = 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$.

2. Calculons la probabilité de l'événement F : « les 4 moteurs tombent en panne"

Les quatre moteurs d'un avion à 4 moteurs tombent en panne de manière indépendante donc: $p(F) = (0{,}1)^4 = 0{,}0001$.

3. Calculons la probabilité de l'événement G : "pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne"

1^{ere} méthode :

L'expérience qui consiste à examiner un moteur d'avion est une épreuve de Bernoulli dont les issues sont :

- le moteur tombe en panne, de probabilité $p = 0{,}1$. (succès);
- le moteur est en marche, de probabilité $1 - p = 0{,}9$. (échec).

On a un schéma dé Bernoulli à 4 épreuves. Pour obtenir exactement trois succès on a : $p(G) = C_4^3 \times (0{,}1)^3 \times 0{,}9 = 4 \times 0{,}001 \times 0{,}9 = 3{,}610^{-3}$.

2^{θ} méthode :

Trois exactement des 4 moteurs tombent en panne avec la probabilité 0,1 et un fonctionne avec la probabilité 0,9 . Mais celui qui fonctionne peut être l'un des 4 moteurs.

D'où $p(G) = C_4^1 \times 0{,}9 \times (0{,}1)^3 = 3{,}610^{-3}$.

4. Déduisons la probabilité de l'événement H : «un avion à 4 moteurs s'écrase"

Un avion à 4 moteurs s'écrase s'il a 3 ou 4 moteurs en panne. On a donc $H = F \cup G$. D'où $p(H) = p(F \cup G) = p(F) + p(G) = 3{,}7 \cdot 10^{-3}$ (car F et G sont deux événements incompatibles).

PARTIE B

Cas général

1. Démontrons que $f(p) = p^2$

D'après les explications de la question A) 3 . on a $f(p) = p \times p = p^2$.

2. Démontrons que $g(p) = p^2(-3p^2 + 4p)$

Un avion à 4 moteurs s'écrase si et seulement si :

- soit 3 moteurs tombent en panne, de probabilité

$$p(k = 3) = c_4^3 p^3 (1 - p)$$

- soit ses 4 moteurs tombent en panne, de probabilité

$$p(k = 4) = C_4^4 p^4 (1 - p)^0$$
$$g(p) = 4 \times p^3 \times (1 - p) + p^4$$
$$= p^2(-3p^2 + 4p)$$

3. a. Étudions le signe de $h(p)$

$$h(p) = f(p) - g(p) = p^2 - p^2(-3p^2 + 4p) = p^2(i + 3p^2 - 4p)$$

Dressons le tableau de signe de $h(p)$ avec $p \in [0; 1]$.

p	0		$\frac{1}{3}$		1
p^2	0	+		+	
$(p-1)(3p-1)$		+	0	−	0
$h(p)$	0	+	0	−	0

si $p \in \left\{0; 1; \frac{1}{3}\right\}$ on a $h(p) = 0$.

si $p \in]0; \frac{1}{3}[, h(p) > 0$.

si $p \in]\frac{1}{3}; 1[, h(p) < 0$.

b. Déduisons suivant les valeurs de p dans quels avions il vaut mieux monter :

Si $p \in \left\{0; 1; \frac{1}{3}\right\}$, on peut monter dans l'un ou l'autre des avions puisque tous les deux ont la même chance de s'écraser $(f(p) = g(p)$.

Si $p \in]0; \frac{1}{3}[, f(p) > g(p)$ donc il faut monter dans un avion à 4 moteurs car il a moins de chance de s'écraser.

Si $p \in]\frac{1}{3}; 1[, f(p) < g(p)$ donc il faut monter dans le bimoteur car il a moins de chance de s'écraser.

PROBLEME

PARTIE A

1. Déterminons D_f et calculons $f(\sqrt{e})$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}/x > 0$ et $x^2 \neq 0\}$, donc $D_f =]0; +\infty\left[; f(\sqrt{e}) = \frac{5}{2e}\right.$.

2. Calculons les limites de f en 0 et en $+\infty$ et interprétons graphiquement ces résulìats

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 5\frac{\ln x}{x^2} = -\infty; \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

donc l'axe des ordonnées est asymptote à (e_{f}).

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 5\frac{\ln x}{x^2} = 0$$

$\lim_{\to\to+\infty} f(x) = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote à (e_1) en $+\infty$.

3. Déterminons la dérivée f' de f et étudions le sens de variation de f

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{5x(1-2\ln x)}{x^4}$;

d'où $\forall x \in]0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{5(1-2\ln x)}{x^3}$.

Sens de variation de f :

le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - 2\ln x \text{car} \forall x \in]0; +\infty[, x^3 > 0$,

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \sqrt{e}$.

On en déduit que: f est strictement croissante sur $]0; \sqrt{e}[$; f est strictement décroissante sur $]\sqrt{e}; +\infty[$.

4. Dressons le tableau de variation de f.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{5}{2e}$	$\searrow$	0

PARTIE B

1. Déterminons les limites de g en 0 et en $+\infty$:

On a $g(x) = \frac{5}{x^2} \times (\ln x)^2$ et $\lim_{x\to 0} \frac{5}{x^2} = +\infty; \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$;

Donc $\lim_{x\to 0} (\ln x)^2 = +\infty$, d'où $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

2. Vérifions que $g'(x) = \frac{10(1-\ln x)\ln x}{x^3}$

g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x \in]0;+\infty[$;

$g'(x) = \frac{10x\ln x - 10x(\ln x)^2}{x^4} = \frac{10(1-\ln x)\ln x}{x^3}$.

3. Étudions le sens de variation de g

Le signe de $g'(x)$ est celui de $(1-\ln x)\ln x, \text{car} \, \forall x \in]0;+\infty\Big[,\ \frac{10}{x^3} > 0.$

or $1 - \ln x - 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e.$

Tableau de signe :

x	0		1		e		$+\infty$
$1 - \ln x$		+		+	0	−	
$\ln x$		−	0	+		+	
$(1 - \ln x)\ln x$		−	0	+	0	−	

g est strictement croissante sur $]1;e[$.

g est strictement décroissante sur] 0; 1 [et sur] e; $+\infty$[.

4. Dressons le tableau de variation de g

x	0		1		e		$+\infty$
g'(x)		−	0	+	0	−	
g(x)		$+\infty$ ↘	0	↗	$\frac{5}{e^2}$	↘	0

PARTIE C

1. Étudions le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x

$\forall x \in]0;+\infty\Big[, h(x) = g(x) - f(x) = \frac{5(\ln x)^2}{x^2} - \frac{5\ln x}{x^2} = \frac{5\ln x}{x^2}(\ln x - 1)$, donc le signe de $h(x)$ est le signe contraire de celui de $(1-\ln x)\ln x$.
Le tableau de signe de $(1-\ln x)$ I nx fait plus haut permet d'obtenir les résultats suivants :

$\forall x \in]0;1[\cup]e;+\infty[, h(x) > 0$

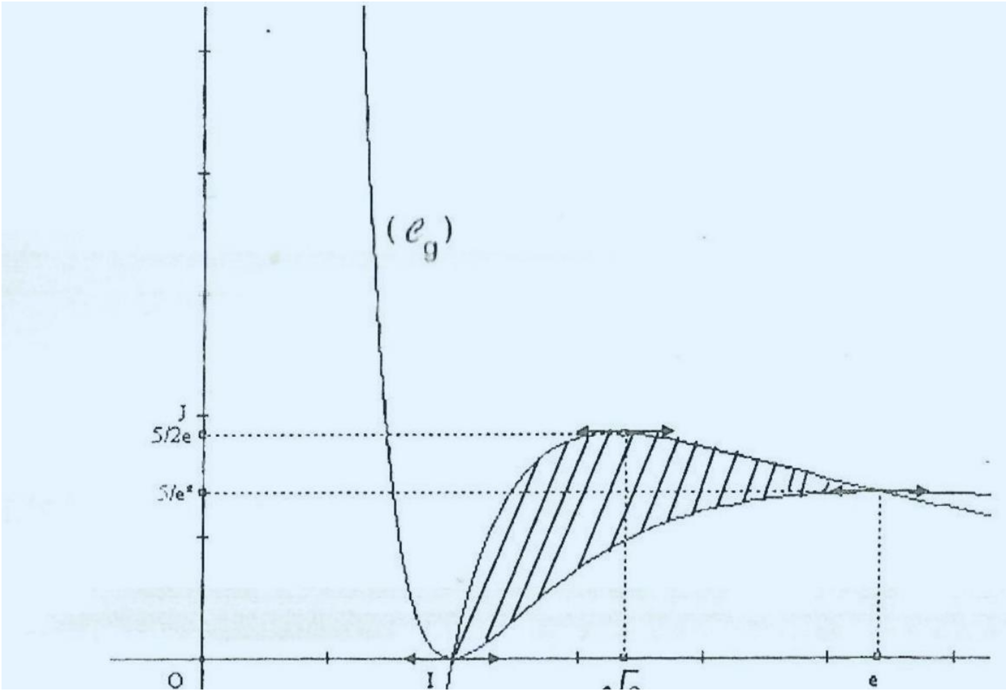
2. Déduisons la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$

$(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ se coupent aux points d'abscisses 1 et e ;

$(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_g)$ sur] 1; e [;

$(\mathcal{C}_f)$ est en dessous de $(\mathcal{C}_g)$ sur] 0; 1[et sur] e; $+\infty$[.

3. Traçons $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.



PARTIE D

1. Calculons I, à l'aide d'une intégration par parties

$I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

Posons $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$.
on a $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = -\frac{1}{x}$

d'où $l_1 = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{e} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^e = -\frac{2}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$.

2. Démontrons que : $\forall n \geq 2,\ I_n = -\frac{1}{e} + nl_{n-1}$

Posons $p(x) = (\ln x)^n$ et $q'(x) = \frac{1}{x^2}$;

on a : $p'(x) = n\frac{(\ln x)^{n-1}}{x}$ et $q(x) = -\frac{1}{x}$;

d'où $\forall n \geq 2, I_n = \left[-\frac{(\ln x)^n}{x}\right]_1^e + n\int_1^e \frac{(\ln x)^{n-1}}{x^2} dx$.

$\forall n \geq 2,\ i_n = -\frac{1}{e} + nl_{n-1}$.

3. Déduisons que : $I_2 = 2 - \frac{5}{e}$

$\forall n \geq 2; I_n = -\frac{1}{e} + nI_{n-1}$ donc $l_2 = -\frac{1}{e} + 2l_1$ or $l_1 = 1 - \frac{2}{e}$;

d'où $I_2 = -\frac{1}{e} + 2 - \frac{4}{e} = 2 - \frac{5}{e}$ donc $I_2 = 2 - \frac{5}{e}$.

4. Interprétons graphiquement $I_1 - I_2$ et calculons $I_1 - I_2$

$I_1 = \frac{1}{5}\int_1^e f(x)dx,\ I_2 = \frac{1}{5}\int_1^e g(x)dx$, donc $I_1 - l_2 = \frac{1}{5}\int_1^e f(x) - g(x)dx$,

or $\forall x \in [1; e], f(x) - g(x) \geq 0$ on en déduit que :

$l_1 - l_2$ représente en unités d'aire, le cinquième de l'aire de la partie du plan comprise entre $(e_1), (e_9)$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

$I_2 - I_1 = -\frac{1}{e} + I_1, \mathrm{car}\, I_2 = -\frac{1}{e} + 2I_1;$

donc $\mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_1 = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{2}{e} = 1 - \frac{3}{e}$.

D'où $\mathrm{l}_1 - \mathrm{l}_2 = \frac{3}{e} - 1$.

EXERCICE 1

1. a. Calculons la solution réelle

Soit x_0 la solution réelle de l'équation

(E) : $z^3-(7+6i)z^2+(10+26i)z+6-24i=0$.

On a : $x_0^3-(7+6i)x_0^2+(10+26i)x_0+6-24i=0$;

$x_0^3-7x_0^2+10x_0+6+i(-6x_0^2+26x_0-24)=0$

ce qui équivaut à (S) : $\begin{cases} x_0^3-7x_0^2+10x_0+6=0 \\ -6x_0^2+26x_0-24=0 \end{cases}$.

Résolvons l'équation (E_1): $-6x_0^2+26x_0-24=0$.

On a :

$(E_1) \Leftrightarrow -3x_0^2+13x_0-12=0$
$\Delta=13^2-4\times3\times12=25=5^2$.

Donc l'équation (E_1) admet deux solutions :

$\frac{-13-5}{-6}=3$ et $\frac{-13+5}{-6}=\frac{4}{3}$.

D'où $x_0=3$ oú $x_0=\frac{4}{3}$.

Or 3 est solution de l'équation: $x^3-7x^2+10x+6=0$.

Donc $x_0=3$.

b. Résolvons l'équation (E)

On sait que 3 est une solution de l'équation (E) ;

donc le polynôme complexe $z^3-(7+6i)z^2+(10+26i)z+6-24i$ est divisible par $z-3$.

En effectuant la division euclidienne de :

$z^3-(7+6i)z^2+(10+26i)z+6-24i$ par $z-3$, on obtient:

$z^3-(7+6i)z^2+(10+26i)z+6-24i=(z-3)[z^2+(-4-6i)z+8i-2]$.

On en déduit que l'équation (E) est équivalente à l'équation :

$(z-3)\cdot[z^2+(-4-6i)z+8i-2]=0$.

Résolvons l'équation (E'): $z^2+(-4-6i)z+8i-2=0$.

On a : $\Delta = (-4-6i)^2 - 4(8i-2) = 4(4i-3)$,

$\Delta \neq 0$, donc l'équation (E ') admet deux solutions.

Déterminons d'abord les racines carrées du nombre complexe $4i-3$.

Soit $\mathrm{z} = \mathrm{x} + \mathrm{iy}$ un nombre complexe, x et y étant des nombres réels, z est une racine carrée de Δ si et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = -3 \\ \quad xy > 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $x = 1$ et $y = 2$ ou $x = -1$ et $y = -2$.

On en déduit que les racines carrées de Δ sont les nombres complexes: $2 + 4\mathrm{i}$ et $-2 - 4\mathrm{i}$.

Les solutions de l'équation (E ') sont donc les nombres complexes :

$\frac{4+6i-2-4i}{2} = 1 + i$ et $\frac{4+6i+2+4i}{2} = 3 + 5i$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$\{3; 1+i; 3+5i\}$$

2. a. Plaçons les points A, B et C dans le repère $(0, \vec{w}, \vec{v})$ et démontrons que le triangle ABC est rectangle en A

Voir figure 1 pour les points A, B et C.

Démontrons que $BC^2 = AB^2 + AC^2 c'$ est-à-dire :

$$|z_C - z_B|^2 = |z_B - z_A|^2 + |z_C - z_A|^2$$

où z_A, z_B et z_C sont les affixes respectives des points A, B et C.

On a : $|z_C - z_B|^2 = 25; |z_B - z_A|^2 = 5; |z_C - z_A|^2 = 20;$

donc $|z_C - z_B|^2 = |z_B - z_A|^2 + |z_C - z_A|^2$.

On en déduit, par la propriété réciproque de Pythagore, que le triangle ABC est rectangle en A.

b. Déterminons le rapport et la mesure principale de l'angle orienté de la similitude directe S de centre A qui transforme B en C

On a : $S(A) = A$ et $S(B) = C$.
Donc le rapport de S est égal à : $\frac{AC}{AB} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2$ et la mesure principale de l'angle orienté de S est égale à :

$\mathrm{Mes}(\widehat{AB}, \widehat{AC}) = \mathrm{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \mathrm{Arg}\left(\frac{2+4i}{2-i}\right) = \mathrm{Arg}(2i) = \frac{\pi}{2}$

3. a. Déterminons l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABDC$ soit un rectangle

Le point D est tel que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; d'où $z_D - z_C = z_B - z_A$ où z_D est l'affixe du point D.

On en déduit que $z_D = z_C + z_B - z_A = 3 + 5i + 3 - 1 - i = 5 + 4i$.

b. Déterminons l'affixe Ω du centre du rectangle $ABDC$

Le centre Ω du rectangle $ABDC$ est le milieu de la diagonale $[BC]$.

L'affixe du point Ω est donc égale à: $\frac{z_B+z_C}{2} = 3 + \frac{5}{2}$ i.

c. Construisons l'image par S du cercle circonscrit au rectangle $ABDC$

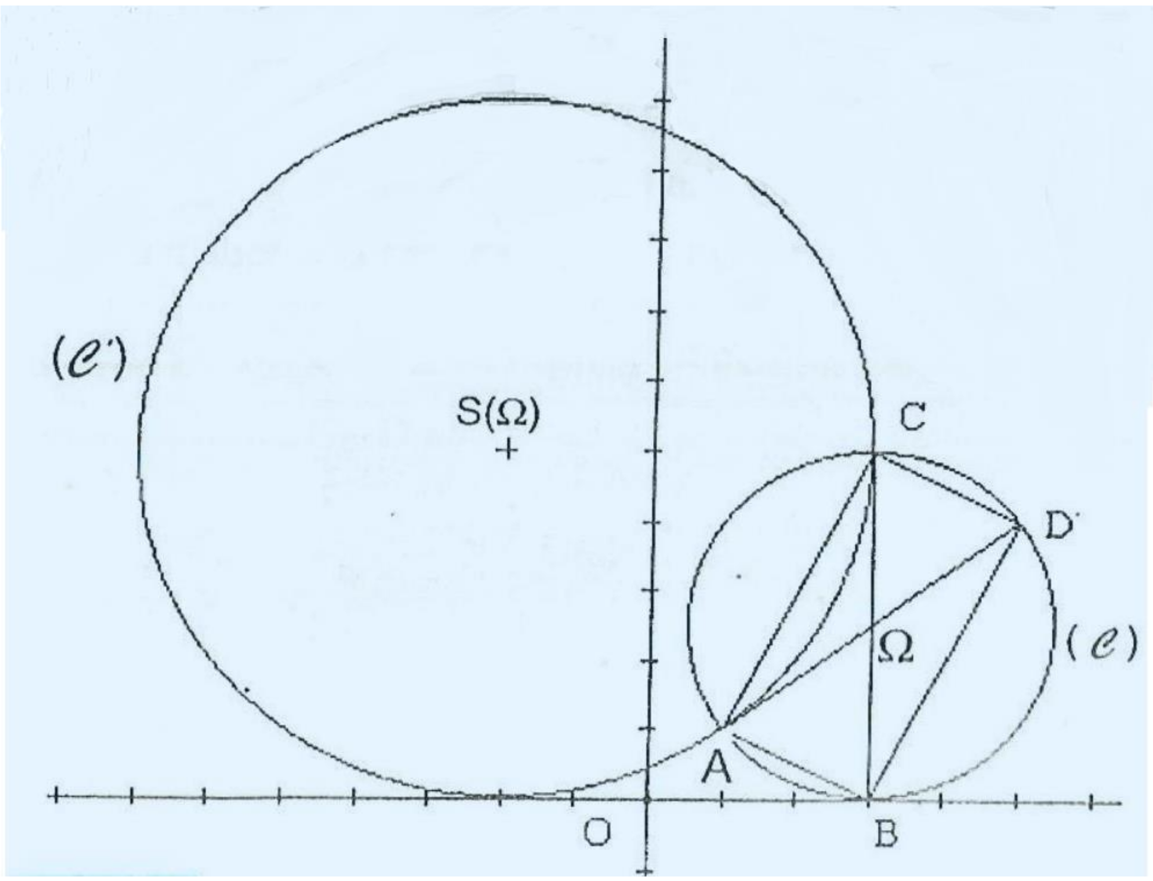
Désignons par $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au rectangle $ABDC$.

$(\mathcal{C})$ est le cercle de centre Ω et de rayon $r = \frac{BC}{2} = \frac{5}{2}$.

L'image (C') de (C) par la similitude directe S de rapport 2 est donc le cercle de centre $S(\Omega)$ et de rayon $r' = 2r = 5$.

Remarquons que : $\mathrm{B} \in (\mathcal{C})$ et $\mathrm{S(B) = C}$; donc $\mathrm{C} \in (\mathcal{C}')$.

On démontre de même que $A \in (C')$.



EXERCICE 2

1. Calculons la probabilité pour que le dé se pose sur une face donnée

Désignons par Ω l'ensemble des cas possibles.

On a : $\Omega = \{1;3;7;10\}$.

Le dé étant régulier et homogène, les éventualités sont équiprobables. On en déduit que la probabilité pour que le dé se pose sur une face donnée est égale à $\frac{1}{4}$.

2. a. Donnons l'ensemble des valeurs prises par X

Dressons le tableau suivant donnant les valeurs prises par X.

Numéro caché	Numéros visibles	Somme des nombres visibles
1	$3;7;10$	20
3	$1;7;10$	18
7	$1;3;10$	14
10	$1;3;7$	11

On en déduit que l'ensemble des valeurs prises par X est $\{11;14;18;20\}$.

b. Calculons la probabilité de l'événement $(X \geq 14)$

On a : l'événement contraire de l'événement $(x \geq 14)$ est l'événement $(X = 11)$.

$$p(X = 11) = p(\{10\}) = \frac{1}{4}$$

donc $p(X \geq 14) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Autre méthode : $p(X \geq 14) = p(X = 14) + p(X = 18) + p(X = 20)$,

$$= p(\{7\}) + p(\{3\}) + p(\{1\})$$
$$= \frac{3}{4}$$

3. a. Calculons la probabilité p_n pour que l'événement $(X \geq 14)$ se réalise au moins une fois au cours des n lancers

Soit A l'événement: " $(X \geq 14)$ se réalise au moins une fois au cours des n lancers ". $\bar{A}$ est donc l'événement: " $(X \geq 14)$ ne se réalise pas au cours des n lancers ".

$$\text{On a } p(\bar{A}) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ d'où } p_n = p(A) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Donc la probabilité pour que l'événement $(x \geq 14)$ se réalise au moins une fois au cours des n lancers est égale à $p_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

b. Calculons la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0{,}999$:

$$\text{On a} : p_n \geq 0{,}999 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \geq 0{,}999$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq 0{,}001$$
$$\Leftrightarrow n\ln\frac{1}{4} \leq \ln(0{,}001)$$
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}001)}{\ln\frac{1}{4}} \text{car} \ln\frac{1}{4} < 0;$$
$$\Leftrightarrow n \geq 4{,}98, \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

Donc la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0{,}999$ est 5 .

PROBLEME

PARTIE A

a. Calculons les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 1-(1+x)e^x$.

$$\lim_{x\to+\infty}(1+x)e^x = +\infty; \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$
$$, R, g(x) = 1 - e^x - xe^x$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0; \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$$

b. Calculons $g'(x)$ pour tous nombre réel x

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ on a} : g'(x) = -e^x - (1+x)e^x = (-2-x)e^x$$

c. Étudions le signe de $g'(x)$ et dressons le tableau de variation de g Pour tout nombre réel $x, g'(x)$ a le - me signe que $(-2-x)$ d'après ie résultat de ia question 1. b.

On en déduit que : $\forall x \in]-\infty; -2[, g'(x) > 0$

$$\forall x \in]-2; +\infty[, g'(x) < 0$$

D'ou la fonction g est strictement croissante sur $]-\infty; -2]$ et strictement décroissante sur $[-2; +\infty[$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0		$-$		
$g(x)$	1	$\nearrow$	$g(-2)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$$g(-2) = 1 + e^{-2} \approx 1{,}1$$

a. Calculons $g(0)$

$$g(0) = 1-(0+1)e^0 = 0$$

b. Déduisons que : $\forall x \in]-\infty; 0[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]0; +\infty[g(x) < 0$

La fonction g est strictement croissante sur]- $-\infty; 2[$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$, donc

$\forall x \in]-\infty; -2[, g(x) > 0.$

La fonction g est strictement décroissante sur $]-2; +\infty[$ et $g(0) = 0$, donc : $\forall x \in]-2; 0[, g(x) > 0;$

$$\forall x \in]0; +\infty[, g(x) < 0$$

On en déduit que : $\forall x \in]-\infty; 0[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) < 0$.

PARTIE B

1. a. Calculons les limites de $f(x)$ quand x tend vers too et vers $-\infty$

Pour tout nombre réel x, on a : $f(x) = x + 2 - xe^x$;

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} (x+2) = -\infty; \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Pour tout nombre réel x, on a : $f(x) = 2 + x(1 - e^x)$;

$$\lim_{x\to+\infty} x(1 - e^x) = -\infty; \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

b. Étudions le sens de variation de f en utilisant la question A)2.

Pour tout nombre réel x, on a:

$$f'(x) = 1 - e^x - xe^x = 1 - (1+x)e^x = g(x)$$

On déduit de ce résultat et du résultat de la question A2)b. que :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) > 0$$
$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) < 0$$

D'où f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

2. a. Démontrons que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (e) en $-\infty$

Pour tout nombre réel x, on a : $f(x) - (x+2) = -xe^x$ et $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$; donc la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.

b. Étudions la position de (D) par rapport à (e)

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - (x+2) = -xe^x$, donc :

$$\forall x \in]-\infty; 0], f(x) - (x+2) \geq 0$$
$$\forall x \in [0; +\infty[, f(x) - (x+2) \leq 0$$

On en déduit que (C) est au dessus de (D) sur $]-\infty; 0]$ et en dessous de (D) sur $[0; +\infty[$.

3. a. Calculons la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers +o

On a : $\forall x \in]0; +\infty\left[, \frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{2}{x} - e^x\right.$.

$$\lim_{x \to +\infty} (-e^x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 1$$

donc: $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

On en déduit que (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$.

b. Traçons (C) (Voir figure 2)

4. a. Démontrons que la courbe (C) coupe (D) en deux points A et B

Le nombre de points d'intersection de (C) et la droite (OI) est égal au nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Déterminons le nombre de solutions de cette équation

On a : f esi continue et strictement croissante sur $]-\infty; 0], \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $f(0) = 2$; donc f réalise une bijection de $]-\infty; 0]$ sur $]-\infty; 2]$. Or $0 \in]-\infty; 2]$; donc l'équsition $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans l'intervalle $]-\infty; 0]$.
On démontre de même que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans l'intervalle] $0; +\infty[$.

On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admiet deux solutions ;

Donc (C) coupe la droite (OI) en deux points A et B.

b. Démontrons que α appartient à l'intervalle $]-2{,}3; -2{,}2[$

Déterminons le signe de $f(-2{,}3) \times f(-2{,}2)$.

On a $f(-2{,}3) \approx -0{,}069$ et $f(-2{,}2) \approx +0{,}043$.

D'où $f(-2{,}3) \times f(-2{,}2) < 0$.

On en déduit que $-2{,}3 < \alpha < -2{,}2$.

c. Démontrons que $\mathrm{e}^\alpha = \frac{\alpha+2}{\alpha}$

On sait que α est une solution de l'équation $f(x) = 0$, donc : $f(\alpha) = \alpha + 2 - \alpha e^\alpha = 0$,

$$\text{d'où: } e^\alpha = \frac{\alpha + 2}{\alpha}.$$

5.a. Démontrons que h est une bijection de $]-\infty;0]$ sur un intervalle K que l'on précisera

D'après le résultat obtenu à la question 4a., f réalise une bijection de $]-\infty;0]$ sur $]-\infty;2]$; donc la restriction h de f à $]-\infty;0]$ est une bijection de $]-\infty;0]$ sur $]-\infty;2]$.

b. Traçons la demi-tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 2

(voir figure 2).

c. Traçons (Γ) (Voir figure 2).

PARTIE C

1. Calculons l'aire, A(t) de la partie du plan limitée par (C) , la droite

(D) et les droites d'équations respectives $x = t$ et $x = \alpha$

On a : $A(t) = \int_t^\alpha -xe^x dx = -\int_1^\alpha xe^x dx.$

Calculons $\int_t^\alpha xe^x dx$ en utilisant une intégration par parties ;

Posons: $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$.

On a: $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$.

D'où:

$\int_t^\alpha xe^x dx = [xe^x]_t^\alpha - \int_t^\alpha e^x dx;$

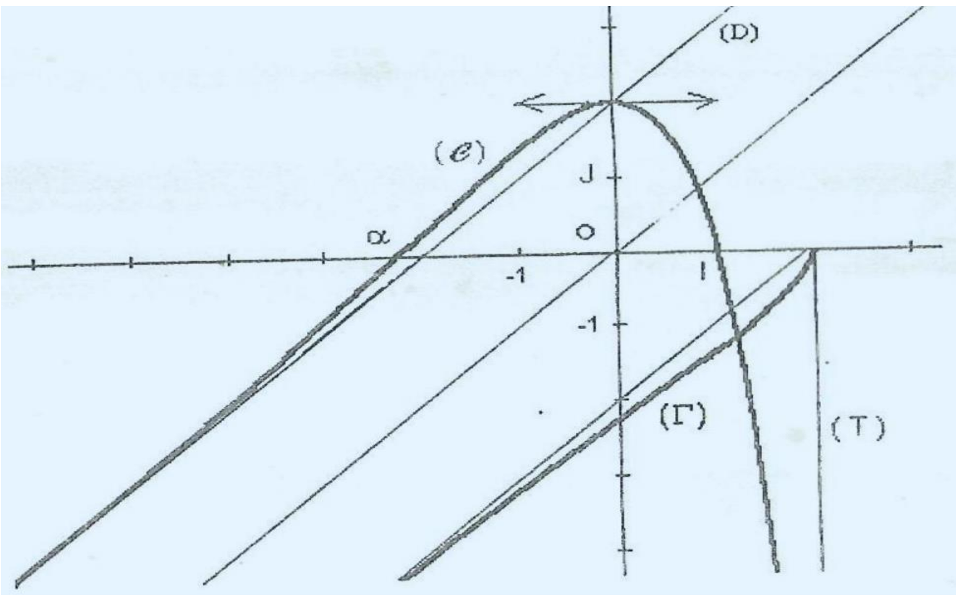
$= \alpha e^\alpha - te' - [e^x]_t^\alpha;$

$= \alpha \cdot e^\alpha - te^t - e^\alpha + e^t$. Donc : $A(t) = te^t - e^t + (1-\alpha)e^\alpha$.

2. Calculons la limite quand t tend vers $-\infty$ de $A(t)$

On a: $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$ et $\lim_{t\to-\infty} te^t = 0$; donc $\lim_{t\to-\infty} \mathcal{A}(t) = (1-\alpha)e^\alpha$.

Figure 2



CORRECTION SESSION NORMALE 1998 SERIE D

EXERCICE 1

1. Calculons a_1 et b_1
   $a_1 = \frac{2a_0+b_0}{3} = \frac{10}{3}$ et $b_1 = \frac{a_0+3b_0}{4} = \frac{25}{4}$.

2 a. Démontrons que (d_n) est une suite géométrique

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= b_{n+1} - a_{n+1} \\ &= \frac{a_n + 3b_n}{4} - \frac{2a_n + b_n}{3} \\ &= \frac{3a_n + 9b_n - (8a_n + 4b_n)}{12} \\ &= \frac{5}{12}(b_n - a_n) \\ d_{n+1} &= \frac{5}{12} d_n \text{ et } d_0 = b_0 - a_0 = 7 \end{aligned}$$

(d_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{5}{12}$ et de premier terme d_0 égal à 7 . On a donc pour tout entier naturel $n, d_n = 7 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n$ qui est un nombre réel strictement positif.

b. Calculons la limite de la suite (d_n).

(d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{12}$. Or $0 < \frac{5}{12} < 1$; donc $\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$.

a. Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n = \frac{d_n}{3}$ ê $b_{n+1} - b_n = -\frac{d_n}{4}$ $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n+b_n}{3} - a_n$;

$$\begin{aligned} &= \frac{b_n - a_n}{3} \\ &= \frac{d_n}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n &= \frac{a_n + 3b_n}{4} - b_n \\ b_{n+1} - b_n &= \\ &= -\frac{d_n}{4} \end{aligned}$$

(d_n) étant strictement positive, (a_n) est une suite strictement croissante et (b_n une suite strictement décroissante.

b. Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$ *, $a_0 < a_n < b_n < b_0$

Pour tout entier naturel non nul n,

$a_0 < a_n$ car la suite (a_n) est strictement croissante.

$a_n < b_n$ car d_n est strictement positive (d'après 2).

$b_n < b_0$ car la suite (b_n) est strictement décroissante.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_0 < a_n < b_n < b_0$.

c. Déduisons que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes

La suite (a_n) est croissante et majorée par b_0, donc convergente.

La suite (b_n) est décroissante et minorée par a_0, donc convergente.

a. Déduisons que pour tout entier $n > 1, a_n - a_0 = \frac{1}{3}(d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1})$ D'après 3.a. on a : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n = \frac{d_n}{3}$

d'où :

$$a_1 - a_0 = \frac{d_0}{3}$$
$$a_2 - a_1 = \frac{d_1}{3}$$
$$a_{n-1} - a_{n-2} = \frac{d_{n-2}}{3}$$
$$a_n - a_{n-1} = \frac{d_{n-1}}{3}$$

en sommant membre à membre ces n égalités, on obtient:

$$a_n - a_0 = \frac{1}{3}(d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1})$$

b. Déduisons la limite de la suite (a_n) puis celle de la suite (b_n)

$d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1}$ est la somme des n premiers termes de la suite ométrique (d_n) de raison $\frac{5}{12}$ et de premier terme do qui est égal à 7 . On en déduit que pour tout entier naturel non nul n,

$$a_n - a_0 = \frac{1}{3} \times 7 \times \frac{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^n}{1 - \frac{5}{12}} = 4 \times \left[1 - \left(\frac{5}{12}\right)^n\right]$$

Puisque la suite de terme général $\left(\frac{5}{12}\right)^n$ converge vers 0 , la suite (a_n) converge vers 5 . Aussi de l'égalité $d_n = b_n - a_n$ et du 2. b., on déduit que la luite (b_n) converge vers 5.

EXERCICE 2

1. a. Pour tout nombre complexe z, on a :

$(1 + i\sqrt{3})z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = z \Leftrightarrow -i\sqrt{3}z = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\Leftrightarrow z = -\frac{3+i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow z = -\frac{i\sqrt{3}(3+i\sqrt{3})}{(-i\sqrt{3})(2i\sqrt{3})}$
$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

S a donc un point J invariant d'affixe $\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

b. La transformation complexe associée à S est de la forme $z' = az + b$ où a est un nombre complexe non nul et b un nombre complexe.

S est donc une similitude directe.

Eléments caractéristiques de S

- Le rapport de S est : $|1+\mathrm{i}\sqrt{3}|$

$|1+\mathrm{i}\sqrt{3}| = 2, S$ est donc de rapport 2.

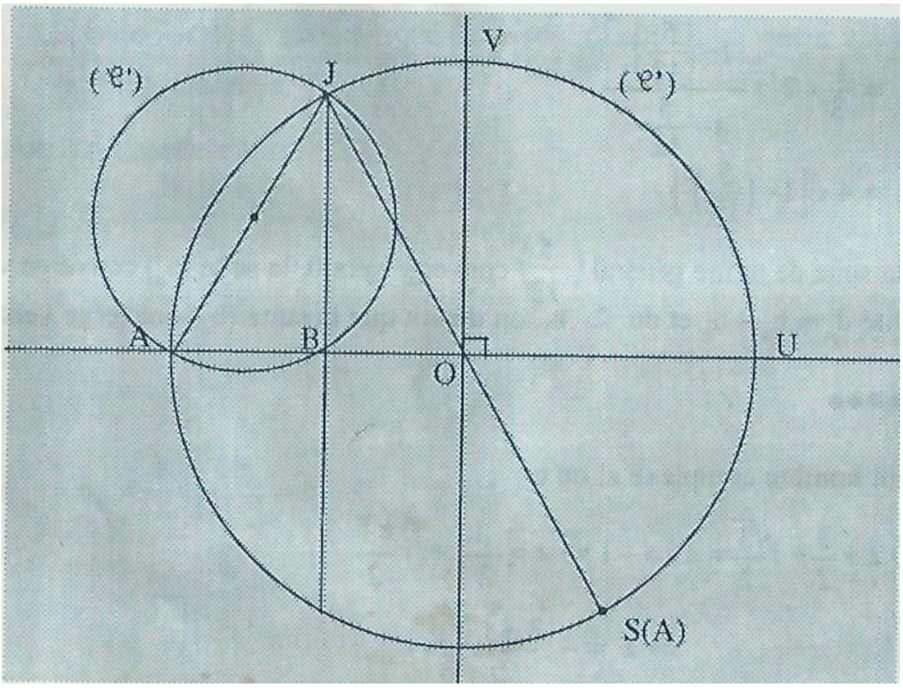
- J est invariant par S. J est l'unique point invariant par S car le rapport de S est différent de 1.

J est donc le centre de la similitude S.

- La mesure principale de l'angle orienté de S est ARG $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})$

ARG $(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$. S est donc la similitude directe de centre J, de rapport 2 et

2. a. d'angle orienté de mesure principale $\frac{\pi}{3}$.



Une méthode de construction du point J**.**

OJ est égal à 1 donc J appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

L'abscisse de J est égale à $-\frac{1}{2}$. J appartient à la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

L'ordonnée de J est positive. J appartient donc au demi plan de bord (OU) et contenant V.

Une méthode de construction du point $S(A) = A'$

$$\begin{aligned} z_{A'} &= (1+\mathrm{i}\sqrt{3})z_A + \frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -z_J. \end{aligned}$$

b. $(\mathcal{C})$ étant le cercle de diamètre [JA], $(\mathcal{C}')$ l'image de $(\mathcal{C})$ par S est le cercle de diamètre [JA'], car la similitude transforme un cercle de diamètre [AB] en un cercle de diamètre [A'B'].

3. Pour tout nombre complexe z,

$$\left|(1+i\sqrt{3})z+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1 \Leftrightarrow |z'| = 1$$

$$\Leftrightarrow OM' = 1$$
$$\Leftrightarrow M' \in (\mathcal{C}')$$
$$\Leftrightarrow M \in (\mathcal{C})$$

PROBLEME

PARTIE A

1.Limite de g en $+\infty$

Pour tout réel x strictement positif,

$$g(x) = x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{e^x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{e^x}{x}\right) = -\infty \left(\text{car} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} -\frac{e^x}{x} = -\infty.\right)$$

d'où : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.'

Limite de g en $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, d'où : $\lim_{x\to\cdot\infty} g(x) = -\infty$.

2. Pour tout réel $x, g'(x) = 1 - e^x$.

3. Pour tout réel x :

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Tableau de variations de g

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'(x)	+	0	−
g(x)	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$

g, étant strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, admet en 0 un maximun absolu qui est 0 . Donc pour tout réel $x, g(x)$ est négatif ou nul.

PARTIE B

1. a. · Limite de f en $+\infty$

Pour tout réel $x, f(x)=\frac{3x^2}{e^x}+\frac{3x}{e^x}$.

On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$, donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

b. · Limite de f en $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}3(x^2+x)=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$, donc $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

Pour tout réel x strictement négatif

$$\frac{f(x)}{x}=3(x+1)e^{-x}$$

$\lim_{x\to-\infty}3(x+1)=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$, d'où :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$$

c. De $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, on déduit que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
De $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$, on déduit que $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2. a. Dérivée de f

Pour tout réel x, on a : $f'(x)=3[(2x+1)e^{-x}+(x^2+x)(-e^{-x})]$

$$=3(-x^2+x+1)e^{-x}$$

b. Signe de f'

$f'(x)$ est du signe de $-x^2+x+1$ car $3e^{-x}$ est strictement positif. D'où pour tout réel x,

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Tableau de variations de f

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
f'(x)	$-$	0	$+$	0	$-$	
f(x)	$+\infty$ ↘	$f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$	↗	$f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	↘	0

3. a. Une équation de (T) est : $y = (x - 0)f'(0) + f(0)$

$$y = 3x (\text{car } f'(0) = 3 \text{ et } f(0) = 0)$$

b. Pour tout réel x, on a :

$f(x) - 3x = 3(x^2 + x)e^{-x} - 3x$

$$= 3(x^2 + x)e^{-x} - 3xe^{-x}xe^{x} (\text{car } e^{-x}xe^{x} = 1)$$

$$= 3xe^{-x}(x + 1 - e^{x})$$
$$= 3xe^{-x}g(x)$$

c. Le signe de $f(x) - 3x$ est celui de $xg(x)$ car e^{-x} est strictement positif.

D'après partie A 3., $g(x)$ est négatif ou nul pour tout réel x, on en déduit que :

si $x > 0$ alors $(\mathcal{C})$ est au-dessous de (T)
si $x < 0$ alors $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (T)
si $x = 0$ alors $(\mathcal{C})$ coupe (T).

4. Tracé de $(\mathcal{C})$ et de (T) (voir figure).

PARTIE C

1. Pour tout réel $x, F'(x) = (2ax + b)e^{-x} + (ax^2 + bx + c)(-e^{-x})$

$$= [-ax^2 + (2a - b)x + (b - c)]e^{-x}$$

F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ équivaut à $F'(x) = f(x)$

équivaut à $F'(x) = (3x^2 + 3x)e^{-x}$
équivaut à $-ax^2 + (2a - b)x + b - c = 3x^2 + 3x$
équivaut à $\begin{cases} -a = 3 \\ 2a - b = 3 \\ b - c = 0 \end{cases}$
équivaut à $\begin{cases} a = -3 \\ b = -9 \\ c = -9 \end{cases}$

donc $F(x) = (-3x^2 - 9x - 9)e^{-x}$

2. $A(t) = \int_0^t f(x)dx$ car f est une fonction continue positive sur $[0, t](t > 0)$. $A(t) = [\mathrm{F(x)}]_0^{\mathrm{t}}$ car F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

$= \mathrm{F(t)} - \mathrm{F(0)}$ par définition.

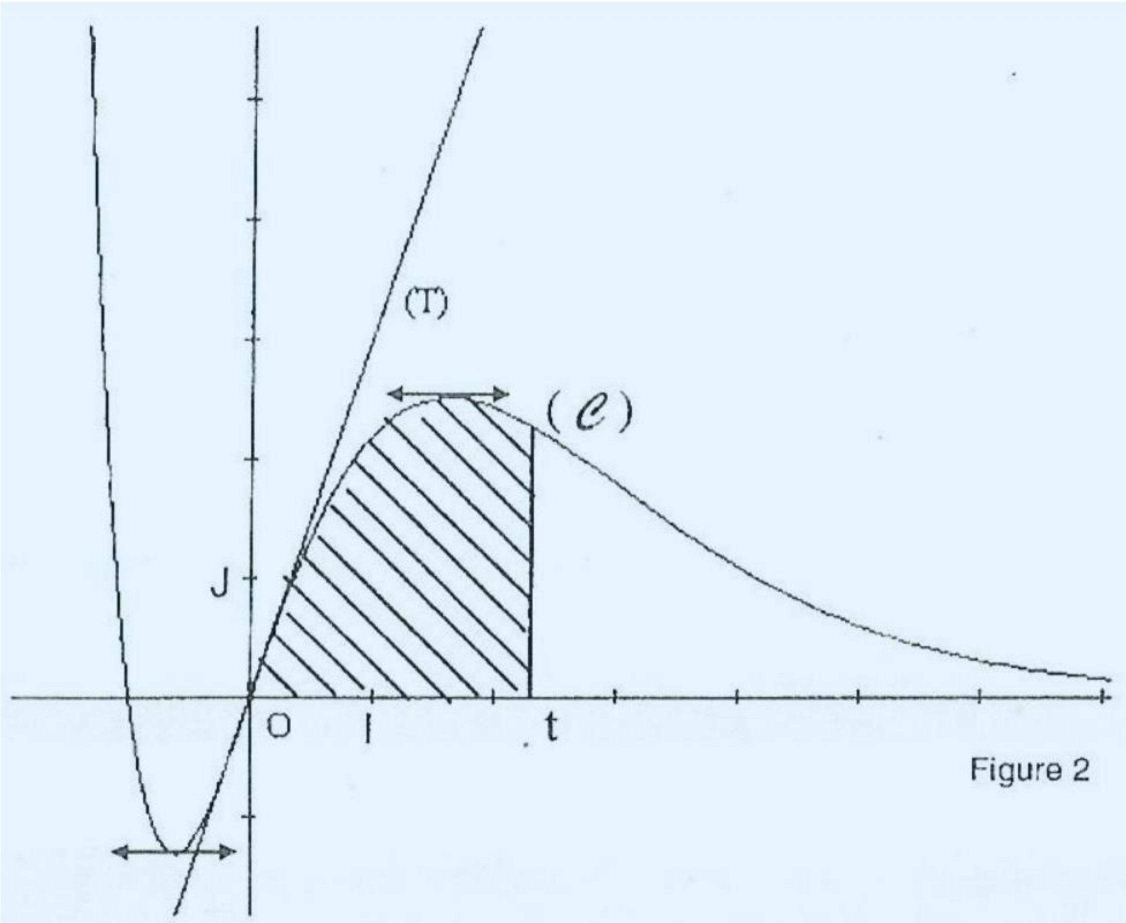
$= 9 - (3\mathrm{t}^2 + 9\mathrm{t} + 9)\mathrm{e}^{-t}$.

3. $(3t^2 + 9t + 9)e^{-t} = 3t^2e^{-t} + 9te^{-t} + 9e^{-t}$

$$= \frac{3t^2}{e^t} + \frac{9t}{e^t} + \frac{9}{e^t}$$

$\mathrm{Lim}_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0, \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = 0$ donc $\lim_{t\to+\infty} A(t) = 9$.

Courbe ($\mathcal{C}$)et (T)



CORRECTION SESSION DE REMPLACEMENT 1997 SERIE D

EXERCICE 1

1. a. Pour tout nombre complexe z, on a :

$(z-\sqrt{3}+i)(z^3-i)=z^4+(i-\sqrt{3})z^3-iz+1+i\sqrt{3}.$

b. (E) équivaut à $z=\sqrt{3}-\mathrm{i}$ ou $\mathrm{z}^3=\mathrm{i}$.

Résolvons : $\mathrm{z}\in\mathbb{C}, \mathrm{z}^3=\mathrm{i}$ (1).

Les solutions de (1) sont les racines cubiques de i. Comme i vaut $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$, les racines cubiques de i sont les $z_k=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right), k=0,1,2$. $\mathrm{z}_0=\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ $z_1=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$$z_2=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$$

L'ensemble solution de (E) est donc $S_{\mathbb{C}}=\left\{\sqrt{3}-i;z_0;z_1;z_2\right\}$.

2. a. voir figure

b. A, B, C étant les points images des racines cubiques d'un nombre complexe, le triangle ABC est équilatéral.

3. a. Le rapport de φ est $\frac{\Omega\mathrm{B}}{\Omega\mathrm{A}}$ et l'angle orienté de φ est $(\widehat{\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}},\overrightarrow{\Omega B}})$. ($\Omega\mathrm{A}$) est la médiane issue de B du triangle équilatéral ABC, elle est donc la médiatrice de [AC]. Par conséquent :
   $\frac{\Omega\mathrm{B}}{\Omega\mathrm{A}}=\tan\hat{A}$
   $=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

Le triplet $(\Omega,\mathrm{A},\mathrm{B})$ étant de sens direct, la mesure principale de $\left(\overrightarrow{\Omega_{\mathrm{A}},\Omega B}\right)$ est $\frac{\pi}{2}$. φ est donc la similitude directe de centre Ω, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b.

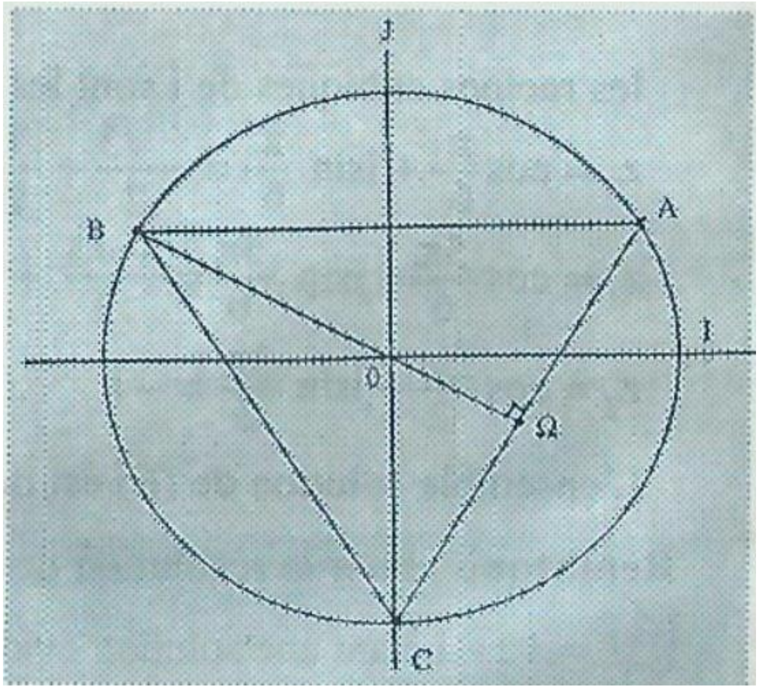
O est le point de concours des médiatrices du triangle ABC. Comme $(\Omega,\mathrm{O},\mathrm{C})$ est de sens direct, on a :

$$\mathrm{Mes}(\overrightarrow{\Omega O},\overrightarrow{\Omega C})=\frac{\pi}{2}$$

d'où : $\frac{\Omega\mathrm{C}}{\Omega\mathrm{O}}=\tan\widehat{\Omega OC}$

$=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\ \left(\text{car mes}\,\widehat{\Omega CO}=\frac{\pi}{6}\right)$

C est donc l'image du point O par φ.



EXERCICE 2

1. Placer 4 pions sur le damier, c'est choisir 4 cases parmi 16. Il ya donc $C_{16}^{4} = 1820$ possibilités.

2. a. L'événement A est réalisé lorsque 4 cases sont choisies parmi les 10 autorisées (celles dont les numéros vont de 1 à 10). $\text{CardA} = \text{C}_{10}^{4} = 210.$

L'univers Ω de l'expérience est constitué des dispositions issues des tirages.

D'après 1. Card $\Omega = 1820$.

Comme il y a équiprobabilité, la probabilité cherchée est :

$$\text{p(A)} = \frac{\text{card A}}{\text{card}\,\Omega} = \frac{210}{1820} = \frac{3}{26}$$

b. Il y a 9 possibilités pour former un carré avec 4 cases voisines : $\{1,2,5,6\}, \{2,3,6,7\}$, $\{3,4,7,8\}, \{5,6,9,10\}, \{6,7,10,11\}, \{7,8,11,12\}, \{9,10,13,16\}, \{11,12,15,16\}$. La probabilité cherchée est : $p(B) = \frac{\text{card}\,B}{\text{card}\,\Omega}$

$= \frac{9}{1820}$

3. a. L'ensemble des valeurs possibles prises par X est : $\{0,1,2,3,4\}$.
   b. $(X = 0)$ est l'événement "aucun des 4 pions n'est disposé sur la première ligne".

$$p(X = 0) = \frac{C_4^0 \times C_{12}^4}{1820} = \frac{495}{1820}$$

$(\text{X} = 1)$ est l'événement "un seul des 4 points tirés est sur la première ligne".

$$\text{p(X} = 1) = \frac{\text{C}_4^1 \times \text{C}_{12}^3}{1820} = \frac{880}{1820}$$

de même $p(X = 2) = \frac{C_4^2 \times C_{12}^2}{1820} = \frac{396}{1820}$.

$p(X=3)=\frac{C_4^3 \times C_{12}^1}{1820}=\frac{48}{1820}$

$p(X=4)=\frac{C_4^4 \times C_{12}^0}{1820}=\frac{1}{1820}$

k	0	1	2	3	4
p(X = k)	$\frac{495}{1820}$	$\frac{880}{1820}$	$\frac{396}{1820}$	$\frac{48}{1820}$	$\frac{1}{1820}$

PROBLEME

PARTIE A

1. $\forall x>0, f(x)=x^2(3-2\ln 2x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-2\ln 2x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$\forall x>0,\ \frac{f(x)}{x}=x(3-2\ln(2x))$, d'où : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$. $(\mathcal{C})$ admet donc une branche parabolique de direction (OJ).

2. $\forall x>0, \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=3x-2x\ln 2x$

$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 3x=0$; $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2x\ln 2x=0$ car $\lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} u\ln u=0$

donc : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

f est donc dérivable à droite en 0 et le nombre dérivé de f à droite en 0 est 0 . (OI) est donc la demi-tangente à $(\mathcal{C})$. au point d'abscisse 0 .

3.

a. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$.

$f'(x)=6x-\left(4x\ln 2x+2x^2 x\frac{1}{x}\right)$

$=4\mathrm{x}-4\mathrm{x}\ln 2\mathrm{x}=4\mathrm{x}(1-\ln 2\mathrm{x})$

b. le signe de f' dépend de celui de $1-\ln 2x$; car $4x>0$. Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln 2x=1$

$\Leftrightarrow x=\frac{e}{2}$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow ln\, 2x<1$

$\Leftrightarrow 0<x<\frac{\mathrm{e}}{2}\ -\ln 2x<1$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x>\frac{e}{2}$

x	0		$\frac{e}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$\frac{e^2}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

4. Pour tout x de D_f,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \begin{cases} x \neq 0 \\ 3x^2 - 2x^2\ln 2x = 0 \quad x(3 - 2\ln 2x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \begin{cases} x \neq 0 \\ x = 0 \\ 3 - 2\ln 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2}e^{3/2}$$

Les coordonnées cherchées sont : $(0,0), \left(\frac{1}{2}e^{3/2}; 0\right)$.

PARTIE B

1. (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ x \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3x - 2x\ln 2x = 1 \\ x \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln 2x - \dfrac{3x - 1}{2x} = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (E') \\ x \neq 0 \end{cases}$$

2. a. Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} = \frac{2x-1}{2x^2}$$

x	0		$\frac{1}{2}$		
$\varphi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

b. Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{1}{2}$

3. φ est continue et strictement décroissante sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$. La restriction de φ à $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ est donc une bijection de $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ sur $\left(\left]0;\frac{1}{2}\right[\right) = \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$. Or $0 \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, donc φ s'annule une seule fois sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$. Soit α cette valeur. $\varphi(0{,}2) = \ln(0{,}4) - \frac{0{,}6-1}{0{,}4} \approx 0{,}08 > 0$

$\varphi(0{,}245) = \ln(0{,}5) - \dfrac{0{,}75-1}{0{,}5} \approx -0{,}19 < 0$

α est donc élément de l'intervalle] 0,2; $0{,}245$[.

4. Pour tout x appartenant à D_f,

$f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $\varphi(x) = 0$

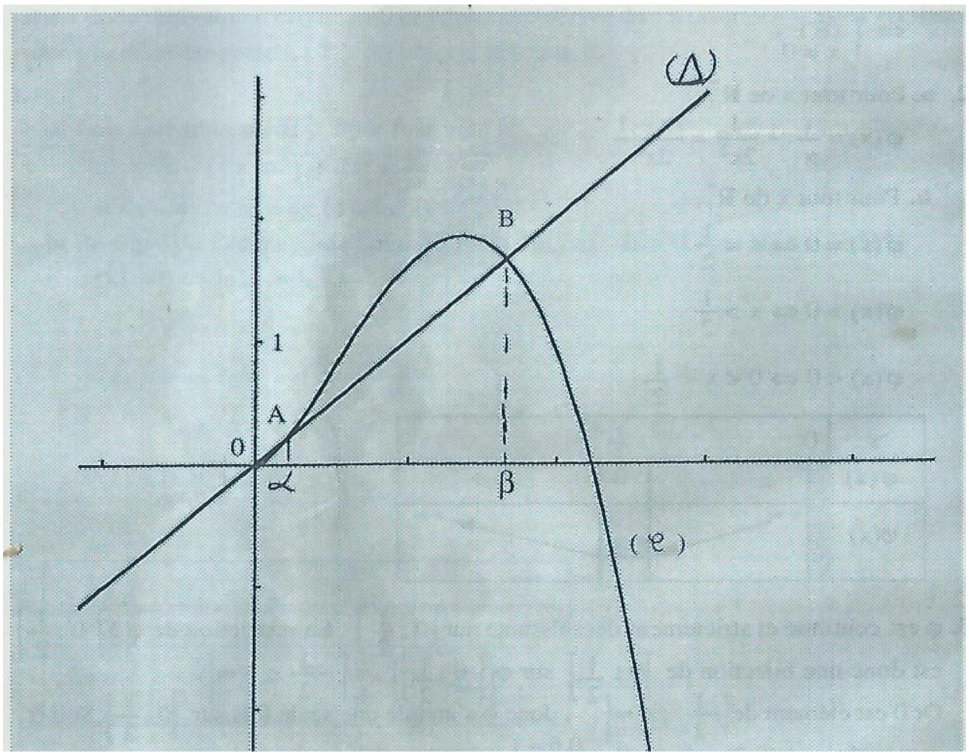
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \alpha$ ou $x = \beta$

avec $\alpha \in \left]0;\frac{1}{2}\right]$, $\beta \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

D'autre part, $D_f = \left]0;\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2};+\infty\right[= \mathbb{R}_+^*$.

Le nombre de point d'intersection de (∡) avec (Δ) est 3 . Ce sont en effet les points de coordonnées $(0{,}0)$, (α,α) et (β,β).

5. voir courbe ci-dessous.



PARTIE C

1. Puisque f est continue et positive sur $[0;1]$, I (a) vaut $\int_a^1 \mathrm{f(x)dx}$.

$I(a) = \int_a^1 (3x^2 - 2x^2 \ln 2x)dx$

$= \int_a^1 3x^2 dx - 2\int_a^1 x^2 \ln 2x dx$
$= [x^3]_a^1 - 2\int_a^1 x^2 \ln 2x dx$
$= 1 - a^3 - 2J(a)$ avec $J(a) = \int_a^1 x^2 \ln 2x dx$

Calcul de $J(a)$

Posons $u(x) = \ln 2x$ et $v'(x) = x^2$

On a $u'(x) = \frac{1}{x}$ et on peut prendre $v(x) = \frac{1}{3}x^3$

$J(a) = \left[\frac{x^3}{3}\ln 2x\right]_a^1 - \frac{1}{3}\Big|_a^1 x^2 dx$
$= \left[\frac{x^3}{3}\ln 2x - \frac{1}{9}x^3\right]_a^1$
$= \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{9} - \frac{a^3}{3}\ln 2a + \frac{a^3}{9}$

$I(a) = 1 - a^3 - 2\left(\frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{9} - \frac{a^3}{3}\ln 2a + \frac{a^3}{3}\right)$

2. $\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} I(a) = 1 - \frac{2}{3}\ln 2 + \frac{2}{9} \cdot \text{car } \lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} a^3 \ln 2a = \lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \frac{a^2}{2} \times 2a\ln 2a = 0 \left(\lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} u\ln u = 0\right)$

$\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} I(a) = \frac{11}{9} - \frac{2}{3}\ln 2$

CORRECTION SESSION NORMALE 1997 SERIE D

EXERCICE 1

1. Première méthode

Il y a 6 doubles possibles. Il y a une chance sur 6 d'avoir un double. La probabilité cherchée est $\frac{1}{6}$.

deuxième méthode

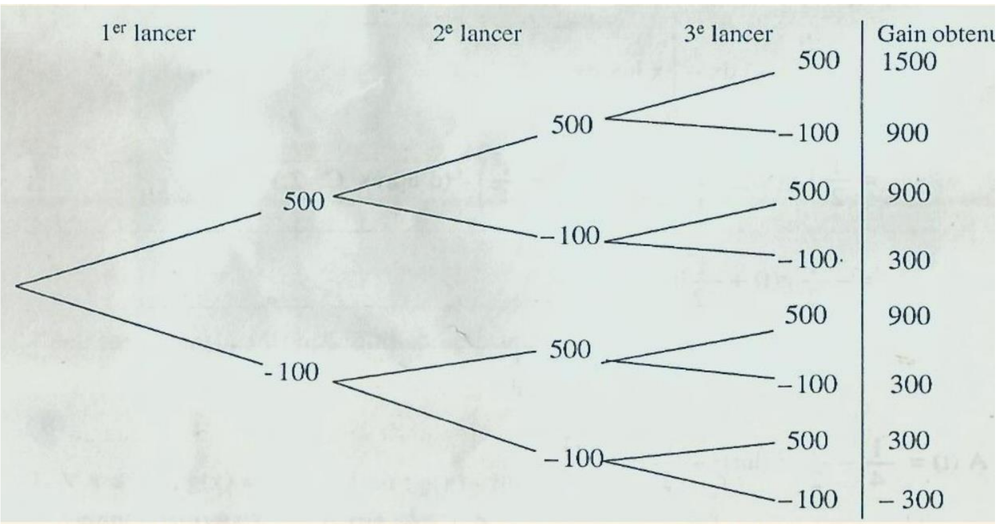
L'univers Ω de l'expérience est $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \times \{1; 2; 4; 5; 6\}$.

Les événements élémentaires étant équiprobables, la probabilité de chaque événement élémentaire est : $\frac{1}{\operatorname{card}\Omega} = \frac{1}{36}$

L'événement A "gagner un double" est : $\{(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5), (6; 6)\}$. La probabilité cherchée est donc $\frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card}\Omega} = \frac{1}{6}$.

2.

a. arbre de choix



L'ensemble des valeurs prises par X est $\{-300; 300; 900; 1500\}$.

b. Loi de probabilité de X

A chaque lancer, nous avons deux éventualités exclusives : "faire un double" et "ne pas faire un double" avec des probabilités respectives $\frac{1}{6}$ et $\frac{5}{6}$.

L'expérience est donc un enchaînement d'épreuves de Bernoulli répétées 3 fois dont le succès est d'avoir un double.

La probabilité d'avoir 0 succès est $\mathrm{P}(\mathrm{X} = -300) = \mathrm{C}_3^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$

La probabilité d'avoir 1 succès exactement est $\mathrm{P}(\mathrm{X}=300)$.

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=300)=\mathrm{C}_3^1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{75}{216}$$

La probabilité d'avoir 2 succès exactement est $P(X=900)$.

$$P(X=900)=C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{15}{216}$$

La probabilité d'avoir 3 succès exactement est $P(X=1500)$.

$$P(X=1500)=C_3^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{216}$$

Ce que l'on peut résumer dans le tableau :

k	-300	300	900	1500
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k})$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

3. a. Les expériences sont répétées n fois dans des conditions indépendantes avec une probabilité égale à $\frac{5}{6}$ à chaque fois. On a $\mathrm{q_n}=\left(\frac{5}{6}\right)^n$.
   b. $\mathrm{P_n}$ est la probabilité de l'événement contraire de l'événement "n'obtenir aucun succès"
   $p_n=1-q_n$
   $P_n=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

c. Pour tout entier naturel n,

$$p_n \geq 0{,}8 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}8$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}2$$

$$p_n \geq 0{,}8 \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln 0{,}2$$
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(5/6)} (\text{car} \ln(5/6)<0)$$
$$\Leftrightarrow n \geq 8{,}47$$

La valeur minimale de n est 9 .

EXERCICE 2

1.

a. Soit a un nombre réel.

a solution de $(E) \Leftrightarrow a^3+(4-2i)a^2+(8-6i)a+8-4i=0$

$$\Leftrightarrow (a^3+4a^2+8a+8)+i(-2a^2-6a-4)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3+4a^2+8a+8=0(E_1) \\ -2a^2-6a-4=0(E_2) \end{cases}$$

Les solutions de (E_2) sont -1 et -2 .

Seul - 2 est solution de $(E_1), z_0$ vaut donc -2 .

Remarque : En lisant attentivement le sujet, le candidat peut être conduit à vérifier que z_θ vaut +2 . Cette demarehe est aussi correcte que la première cat ief il n'est pas fait mention de l'unicité de z_0.

b. Pour tout nombre complexe z,

$z^3 + (4-2i)z^2 + (8-6i)z + (8-4i) = (z+2)(z^2 + \alpha z + 4 - 2i)$

Par identification, on trouve $\alpha = 2 - 2\mathrm{i}$

Résolvons : $z \in \mathbb{C}, z^2 + (2-2i)z + (4-2i) = 0 (E_3)$

$$\begin{aligned}\Delta' &= (1-i)^2 - 4 + 2\\ &= -4\\ &= (-1) \times 4\\ &= (2i)^2\end{aligned}$$

Les solutions de (E_3) sont : $z_1 = -1 - i$ et $z_2 = -1 + 3i$.

L'ensemble solution de (E) dans $\mathbb{C}$ est $\{-2; -1+3i; -1-i\}$.

2. a. Voir figure page 109

b. La transformation complexe f associée à r est définie par :

$$f(z) - z_\Omega = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)(z - z_\Omega)$$

d'où : $\mathrm{f(z) = iz + 1 + i.}$

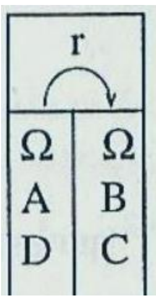
On a $\mathrm{f(z_A) = f(-1+3i) = -2}$

$\mathrm{f(z_A) = z_B}$

B est donc l'image de A par r.

c. $\mathrm{f(z_D) = z_c \Leftrightarrow iz_D + 1 + i = -1 - i} \Leftrightarrow z_D = -2 + 2i$

D est le point d'affixe $-2 + 2\mathrm{i}$ ou de coordonnées $(-2{,}2)$.



On déduit que $\Omega A = \Omega B$ et $\Omega D = \Omega C$

or $\Omega B = |-2-\mathrm{i}| = \sqrt{5}$ et $\Omega D = |-2+2\mathrm{i}-\mathrm{i}| = \sqrt{5}$,

donc $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.

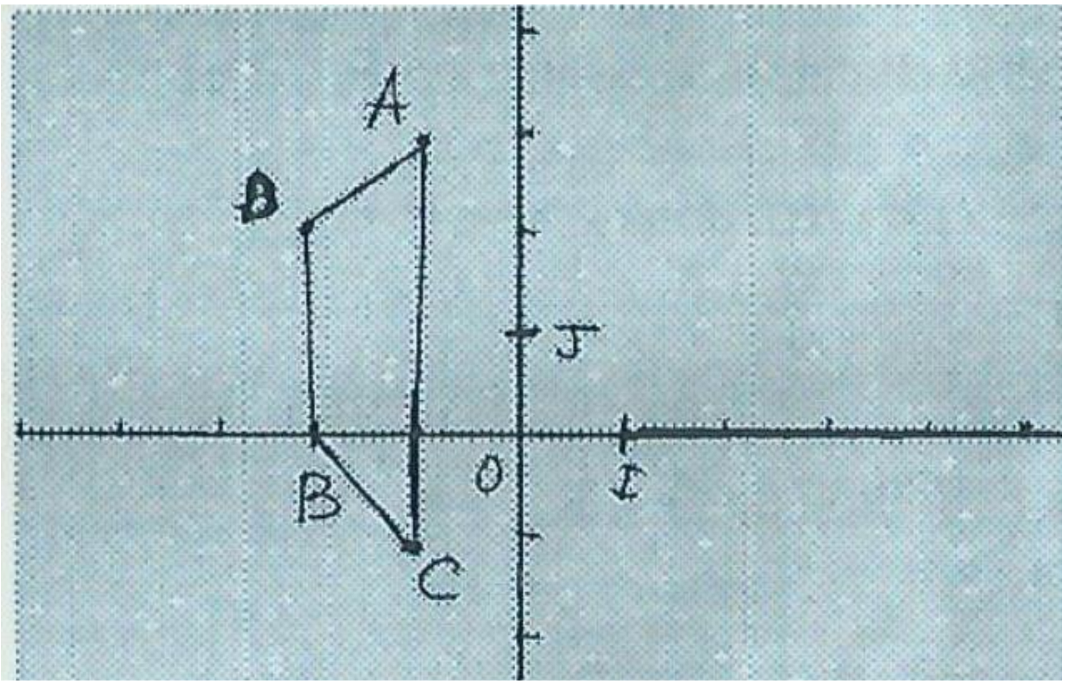
Les quatre points $\mathrm{A, B, C}$ et D appartiennent donc au cercle de centre Ω de rayon $\sqrt{5}$.,

b. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AC}$ est $z_c - z_A = -4i$,

celle du vecteur $\overrightarrow{DB}$ est $z_B - z_D = -2i$;

d'où : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{\mathrm{DB}}$

Les droites (AC) et (DB) sont donc parallèles et puisque (AD) et (BC) sont sécantes, alors le quadrilatère $ADBC$ est un trapèze. $AD = BC$ (car $r(A) = B$ et $\mathrm{r(D) = C}$). Le quadrilatère ADBC est donc un trapèze isocèle.



PROBLEME

PARTIE A

1. L'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}$.

Limite de g en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x/2} = +\infty \left(\text{car } \lim_{u\to+\infty} e^{u} = +\infty \right)$$
$$\lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty, \text{ d'où } \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

Limite de g en $+\infty$:

$\lim_{x\to+\infty} e^{-x/2} = 0$ car $\lim_{u\to+\infty} e^{-u} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$, d'où $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

2. g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $x, g'(x) = -1 - \frac{1}{2}e^{-x/2}$ qui est un nombre réel strictement négatif. g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de g

x	$-\infty$	$+\infty$
g'(x)	—	
g(x)	$+\infty$ ↘	$-\infty$

3. g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, g est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

L'équation $g(x) = 0$ admet donc une seule solution α car 0 appartient à $\mathbb{R}$.

De $\mathrm{g}(0{,}7) > 0$ et $\mathrm{g}(0{,}71) < 0$, on conclut que α est compris entre 0,70 et 0,71 .

4. $\mathrm{g}(\alpha) = 0$ et g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$; d'où :

$\forall x \in]-\infty, \alpha[, g(x) > g(\alpha)$, donc $g(x) > 0$.

$\forall \mathrm{x} \in]\alpha, +\infty[, \mathrm{g}(\mathrm{x}) < \mathrm{g}(\alpha)$, donc $g(x) < 0$.

PARTIE B

1. a. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

Limite de f en $-\infty$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x-2)\left(1-2e^{x/2}\right)$$
$$\lim_{x\to-\infty}(x-2) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty}\left(1-2e^{x/2}\right) = 1\left(\text{ car } \lim_{u\to-\infty} e^{u} = 0\right)$$
$$\text{d'où } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Limite de $\boldsymbol{f}$ en $+\infty$:

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x-2)\left(1-2e^{x/2}\right)$

$\lim_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(1-2e^{x/2}\right) = -\infty(\text{car} \lim_{v\to+\infty} e^{u} = 0)$

d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

b. $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x}\left(1-2e^{x/2}\right)\right) = -\infty$

ou bien $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{2}{x}\right)+\left(\frac{4}{x}-2\right)e^{x/2}\right] = -\infty$

$(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (OJ) au voisinage de $+\infty$.

c. $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-2)] = \lim_{x\to-\infty}(4-2x)e^{x/2}$

$$\lim_{x\to-\infty}(4-2x)e^{x/2} = \lim_{x\to-\infty} 4e^{x/2} - \lim_{x\to-\infty} 4\left(\frac{x}{2}\right)e^{x/2} = 0$$

car $\lim_{x\to-\infty} e^{x/2} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{2}\right)e^{x/2} = \lim_{u\to-\infty} ue^{u} = 0$

La droite (D) d'équation $y = x-2$ est donc asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$.

d. $f(x) - y = (4 - 2x)e^{x/2}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x) - y$		$+$	0	$-$	
position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D)		$(\mathscr{C})$ est au-dessus de (D)		$(\mathscr{C})$ est au-dessous de (D)	

Au point d'abscisse $x = 2$, $(\mathcal{C})$ et (D) coïncident.

2. a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 + \left(-2e^{x/2}\right) + (4 - 2x) \times \frac{1}{2}e^{x/2}$$
$$= 1 - xe^{x/2}$$

b. Pour tout réel $x, f'(x) = e^{x/2}\left(e^{-x/2} - x\right) = e^{x/2}g(x)$.

c. Puisque $e^{x/2}$ est toujours strictement positif, on a :

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, \alpha[$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow g(x) < 0$
$\Leftrightarrow x \in]\alpha, +\infty[.$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

3. a. $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha/2} = \frac{1}{\alpha}$

$f(\alpha) = \alpha - 2 + (4 - 2\alpha)e^{\alpha/2}$

$= (\alpha - 2) + (4 - 2\alpha)\frac{1}{\alpha} = -4 + \alpha + \frac{4}{\alpha}$

$0{,}70 < \alpha < 0{,}71 \Leftrightarrow \frac{1}{0{,}71} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0{,}7} \Leftrightarrow 0{,}7 + \frac{4}{0{,}71} - 4 < f(\alpha) < 0{,}71 + \frac{4}{0{,}7} - 4$
$\Leftrightarrow 2{,}33 < f(\alpha) < 2{,}425$
$\Leftrightarrow 2{,}3 < f(\alpha) < 2{,}5.$

2,3 est donc une valeur approché par défaut de $f(\alpha)$ à 2×10^{-1} près.

b.

x	$-1{,}4$	0	2
arrondi d'ordre 2 de $f(x)$	$-0{,}02$	2	0

4. a. Une équation de (T) est $y = x + 2$. $(car\ f'(0) = 1\ et\ f(0) = 2)$

b. Voir figure ci-dessous

5. Sur $[0,2], (C)$ est au dessus de (D). D'où : $A = \int_0^2 [f(x) - (x - 2)]dx$

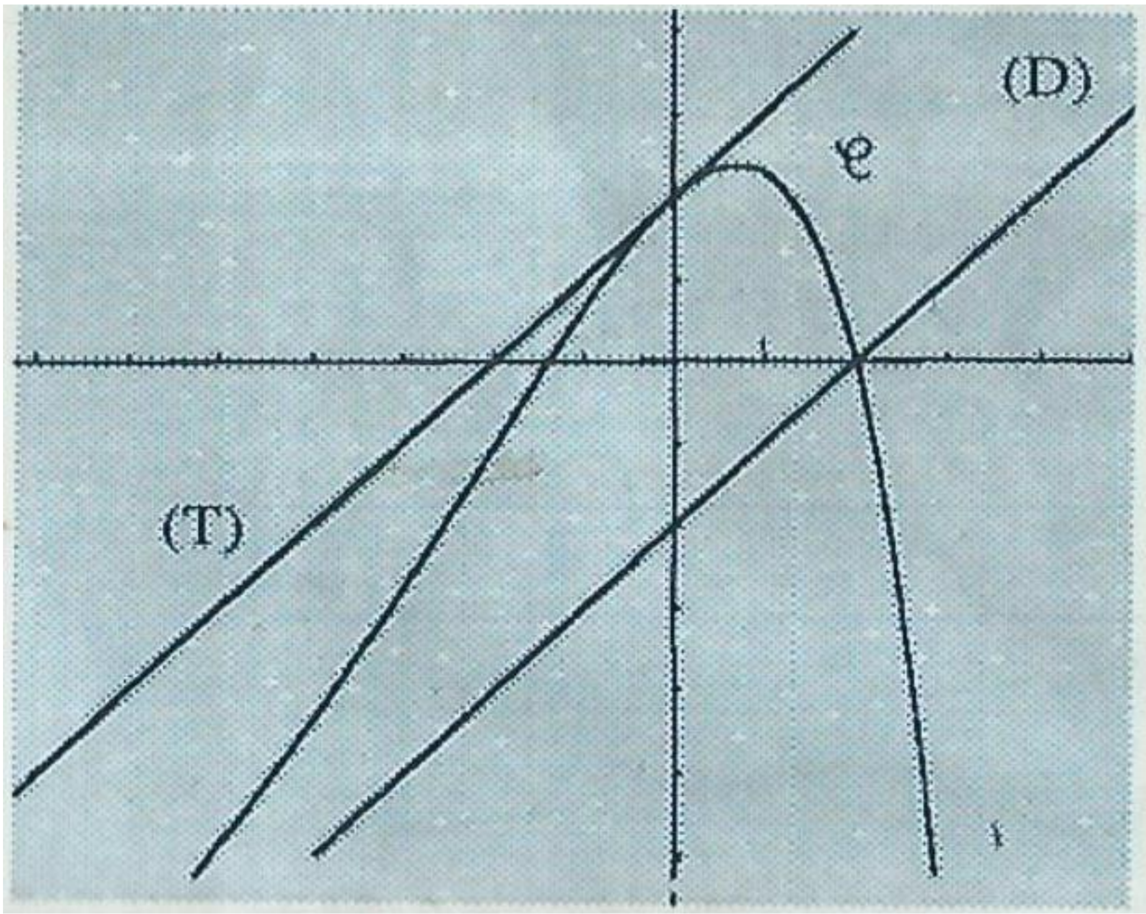
$$A = \int_0^2 (4 - 2x)e^{x/2}dx$$

Posons $u(x) = 4 - 2x$ et $v'(x) = e^{x/2}$

On a $u'(x) = -2$ et on peut prendre $v(x\cdot) = 2e^{x/2}$

$$A = \left[2(4 - 2x)e^{x/2}\right]_0^2 + 4\int_0^2 e^{x/2}dx$$
$$= \left[2(4 - 2x)e^{x/2}\right]_0^2 + 8\left[e^{x/2}\right]_0^2 = -8 + 8e - 8$$

$A = 8\mathrm{e} - 16.$



CORRECTION SESSION DE REMPLACEMENT 1996 SERIE D

EXERCICE 1

1. a. Pour tout entier naturel n,

$\omega_{n+1} = \frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+2} = \frac{\frac{2}{1+a_n}-1}{\frac{2}{1+a_n}+2}$ (par définition de la suite (a_n))

$$\omega_{n+1} = \frac{2-1-a_n}{2+2+2a_n} = \frac{1-a_n}{4+2a_n}$$

$$\omega_{n+1}\frac{-(a_n-1)}{2(a_n+2)} = -\frac{1}{2}\omega_n$$

(ω_n) est donc une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

$\left|-\frac{1}{2}\right|$ étant strictement inférieur à 1, $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de limite nulle.

b. Expression de $\mathbf{a_n}$ en fonction de ω_n

Pour tout entier naturel n,

$$\omega_n = \frac{a_n-1}{a_n+2} \Leftrightarrow \omega_n(a_n+2) = a_n - 1$$
$$\Leftrightarrow \omega_n a_n + 2\omega_n = a_n - 1$$
$$\Leftrightarrow a_n(1-\omega_n) = 1 + 2\omega_n$$

ω_n étant le terme général d'une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $\frac{1}{4}$, est égal à $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

ω_n ne pouvant jamais être à 1 , on déduit que $a_n = \frac{1+2\omega_n}{1-\omega_n}$.

calcul de la limite de (a_n)

De la limite nulle de $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ établie au a. ; on déduit que la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 1 .

2. a. On a $a_0 = \frac{1}{4}$, d'où $a_0 \neq \frac{-1}{2}$. La propriété est vraie au rang 0 .

Supposons qu'elle soit vraie au rang n et démontrons qu'elle est vérifiée au rang $n+1$,

c'est à dire $a_{n+1} \neq \frac{-1}{2}$

$a_n \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow 4a_n \neq -2$ (d'aprés l'hypothèse de recurrence).

$$\Rightarrow 4 + 4a_n \neq 2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4+4a_n} \neq \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{-1}{4+4a_n} \neq -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow a_{n+1} \neq -\frac{1}{2}$$

Conclusion : pour tout entier naturel $n, a_n \neq -\frac{1}{2}$

b. Pour tout entier naturel n,

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{a_{n+1}+\frac{1}{2}} - \frac{1}{a_n+\frac{1}{2}}$

Or $a_{n+1} + \frac{1}{2} = \frac{-1}{4+4a_n} + \frac{1}{2}$

$= \dfrac{-1 + 2 + 2a_n}{4 + 4a_n}$

$= \dfrac{1 + 2a_n}{4 + 4a_n}$

D'où $v_{n+1} - v_n = \frac{4+4a_n}{1+2a_n} - \frac{2}{1+2a_n}$

$= \dfrac{4 + 4a_n - 2}{1 + 2a_n}$

$= \dfrac{2(1 + 2a_n)}{1 + 2a_n}$

$= 2$

$$v_0 = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{2}} = 4$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 4.

c. Expression de $\boldsymbol{a_n}$ en fonction de $\boldsymbol{v_n}$.

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} v_n = \frac{1}{a_n+\frac{1}{2}} &\Leftrightarrow v_n\left(a_n + \frac{1}{2}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow v_n a_n + \frac{1}{2} v_n = 1 \\ &\Leftrightarrow 2v_n a_n = 2 - v_n \\ &\Leftrightarrow a_n = \frac{2-v_n}{2v_n} \ \left(\text{car } v_n \neq 0\right) \end{aligned}$$

Expression de a_n en fonction de n :

$(\mathrm{v_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ étant une suite arithmétique de premier terme 4 et de raison 2 d'après 2 . b., alors pour tout entier naturel $n, v_n = 2n + 4$. On en déduit avec l'expression de a_n établie ci-dessus que $a_n = \frac{2-(2n+4)}{2(2n+4)} = -\frac{n+1}{2n+4}$.

d. $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{n+1}{2n+4}\right) = -\frac{1}{2}$.

EXERCICE 2

1.

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{e^x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{e^x} dx$

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{e^x} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} dx \left(\text{car} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ et } \frac{1}{e^x} = e^{-x}\right)$

$= [-e^{-x}]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - e^{-\pi/2}$

$I + J = 1 - e^{-\pi/2}$

2. Calcul de K

Posons : $u(x) = e^{-x}$ et $v'(x) = \cos 2x dx$

alors on a $u'(x) = -e^{-x}$ et $v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$

$K = \left[\frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin 2x dx$ Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin 2x dx$

Posons $u(x) = e^{-x}$ et $v^j = \sin 2x$

alors on a $u' = -e^{-x}$ et $v = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin 2x dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos 2x dx$

$= \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}} + 1\right) - \frac{1}{2} K$

D'où : $K = \frac{1}{4}\left(e^{-\pi/2} + 1\right) - \frac{1}{4} K$ et donc $K = \frac{1 + e^{-\pi/2}}{5}$.

3.

$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{e^x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{e^x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x - \sin^2}{e^x} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{e^x} dx (\text{car} \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \forall x \in \mathbb{R})$

4. On a à résoudre

$\begin{cases} I + J = 1 - e^{-\pi/2} \\ I - J = K \end{cases}$

D'où : $I = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\pi/2} \cdot + K\right)$ et $J = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\pi/2} - K\right)$

$$\mathrm{I} = \frac{3 - 2\mathrm{e}^{-\pi/2}}{5} \text{ et } \mathrm{J} = \frac{2 - 3\mathrm{e}^{-\pi/2}}{5} \quad (d'après 2.)$$

PROBLEME

PARTIE A

1. L'ensemble de définition de f est $[0, +\infty[$.

$\forall x > 0, \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = (ln\, x)^2$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$, d'où $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (\ln x)^2 = +\infty$ et donc $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$

f n'est donc pas dérivable à droite en 0 mais la courbe de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0 .

2. $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, d'où $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\forall x > 0, \dfrac{f(x)}{x} = (\ln x)^2$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

La courbe de f admet une branche parabolique de direction (OJ).

3. a. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = (\ln x)^2 + x\left[2(\ln x)x\frac{1}{x}\right] = (\ln x)^2 + 2\ln x$

b. Posons $X = \ln x$

d'où $(\ln x)^2 + 2\ln x = X^2 + 2X = X(X+2)$

$X^2 + 2X = 0 \Leftrightarrow (X = 0$ ou $X = -2)$

$X^2 + 2X > 0 \Leftrightarrow (X < -2$ ou $X > 0)$

$\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} < 0 \Leftrightarrow -2 < \mathrm{X} < 0$

D'où pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (ln\, x = 0$ ou $ln\, x = -2)$

$\Leftrightarrow \left(x = 1 \textit{ ou } x = \mathrm{e}^{-2}\right)$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow (\ln x < -2$ ou $\ln x > 0)$

$\Leftrightarrow \left(0 < x < e^{-2} \textit{ ou } x > 1\right)$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow e^{-2} < x < 1$

f est strictement croissante sur $]0; \mathrm{e}^{-2}$ [et sur $]1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]\ \mathrm{e}^{-2}; 1[$.

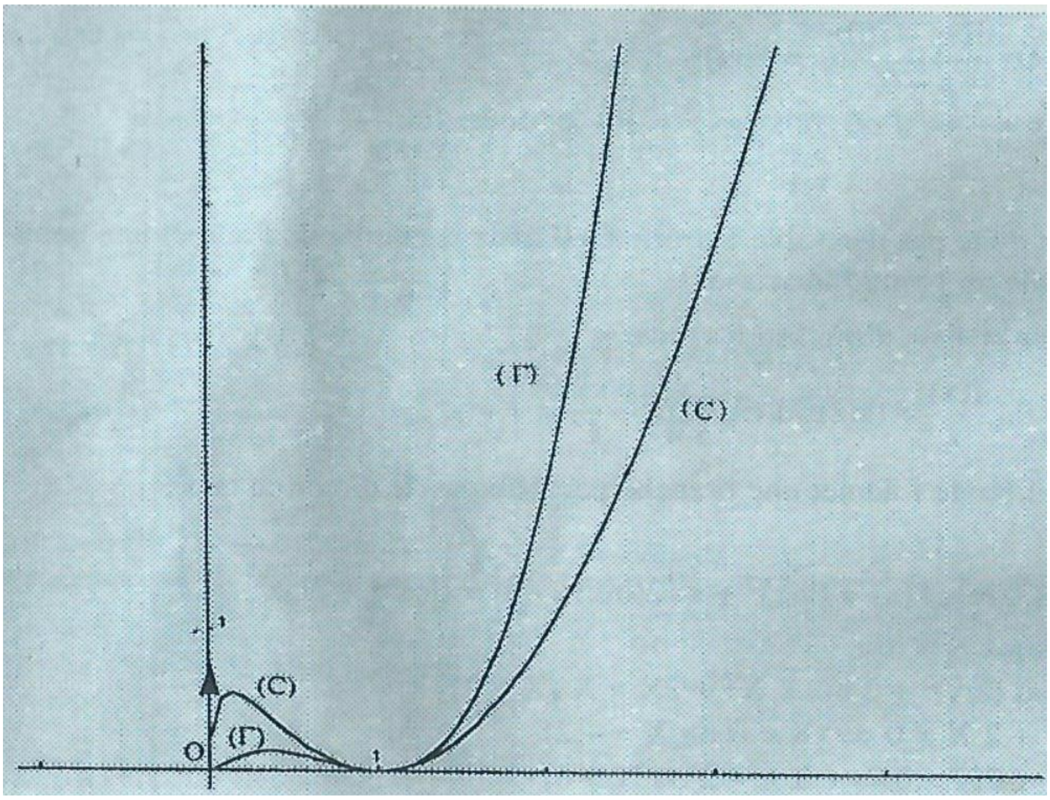
Tableau de variations de f.

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. a.

x	e^{-2}	1	2	3
arrondi d'ordre 2 de $f(x)$	0,54	0	0,95	3,63

b.



PARTIE B

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = xf(x)$, d'où : $g(x) - f(x) = (x-1)f(x)$ f étant positive d'après partie A 3. b., on a :

$\forall$x $\in]0,1[$, g(x) < f(x) et (Γ) est au-dessous de (C) $\forall x \in]1, +\infty[, g(x) > f(x)$ et (Γ) est au dessus de (C) (Γ) et (C) coïncident en 0 et 1

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{g(x) = xf(x)}$, d'où :

$g'(x) = f(x) + xf'(x) = 2f(x) + 2x\ln x$ d'après partie A 3. a. par suite pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{2}g'(x) = f(x) + x\ln x$.

2. Calcul de $\int_t^1 x\ln x dx$

Posons $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$

alors on a $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^2}{2}$

$\int_t^1 \ x\ln x dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_t^1 - \frac{1}{2}\int_t^1 \ x dx = \frac{-t^2}{2}\ln t - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_t^1$

$= -\frac{t^2}{2}\ln t - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{t^2}{2}\right) = -\frac{t^2}{2}\ln t - \frac{1}{4} + \frac{t^2}{4}$

3. f est continue positive sur $[t;1]$, d'où : $A(t) = \int_t^1 f(x)dx$. $\int_t^1 f(x)dx = \int_t^1 \left(\frac{1}{2}g'(x) - x\ln x\right)dx$ (d'après Partie C. 1.) $= \frac{1}{2}\int_t^1 g'(x)dx - \int_t^1 x\ln x dx$

$= \frac{1}{2}[g(x)]_t^1 - \left(-\frac{t^2}{2}\ln t - \frac{1}{4} + \frac{t^2}{4}\right)$ (d'après C. 2.)

$= -\frac{1}{2}g(t) + \frac{t^2}{2}\ln t + \frac{1}{4} - \frac{t^2}{4}$

$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}t^2(\ln t)^2 + \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}$

$$A(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t^2(\ln t)^2 + \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}$$

4. $\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} t^2(\ln t)^2 = 0$ et $\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{t^2}{2}\ln t = 0$; d'où : $\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} A(t) = \frac{1}{4}$.

CORRECTION SESSION NORMALE 1996 SERIE D

EXERCICE 1
PARTIE A

1. a. L'univers Ω de l'expérience est l'ensemble des paires d'éléments de l'ensemble des 10 boules de l'urne. Card $(\Omega) = C_{10}^2 = 45$. Soit p la probabilité sur $\Phi(\Omega)$ définie : pour tout ω de Ω par $p(\omega) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$. Cela est possible car les boules sont indiscernables au toucher.

L'univers image de X est $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$.

$(X = 0)$ est l'événement "les deux boules tirées sont blanches".

$\mathrm{p(X = 0)} = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

($X = 1$) est l'événement "les deux boules tirées sont de couleurs différentes".

$p(X = 1) = \frac{C_6^1 \times C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{6 \times 4}{45} = \frac{8}{15}$.

$(X = 2)$ est l'événement "les deux boules tirées sont rouges".

$$\mathrm{p(X = 2)} = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

La loi de probabilité de X est donc donnée par le tableau :

k	0	1	2
$p(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

b. $\mathrm{E(X)} = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{2}{15} = \frac{4}{5}$.

2. 1^{ere} méthode

Les deux boules tirées sont de même couleur si elles sont toutes les deux blanches ou toutes les deux rouges. L'événement "les deux boules tirées sont de même couleur" est $(X = 0) \cup (X = 2)$. $(X = 0)$ et $(X = 2)$ étant incompatibles, on a :

$p\left[(X = 0) \cup (X = 2)\right] = p(X = 0) + p(X = 2) = \frac{7}{15}$.

$2^{\text{ème}}$ méthode

L'événement "les deux boules tirées sont de même couleur" est l'événement contraire de l'événement "les deux boules tirées sont de couleurs différentes" qui est ($X = 1$). La probabilité cherchée est donc $1 - p(X = 1) = \frac{7}{15}$. B

1. Les deux boules tirées sont soit blanches soit rouges. Il faut donc tirer 2 boules blanches parmi n, soit C_n^2 tirages ou bien 2 boules rouges parmi (10-n), soit C_{10-n}^2. tirages.

$\frac{C_n^2+C_{10\cdot n}^2}{C_{10\cdot n}^2} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(10-n)(9-n)}{2}}{45} = \frac{2n^2-20n+90}{90}$

2. Soit la fonction :

$f: [2;8] \to \mathbb{R}_+^*$

$x \mapsto \frac{2x^2-20x+90}{90}$; f coïncide avec P sur $[2;8] \cap \mathbb{N}$

$\forall x \in [2{,}8], f'(\mathrm{x}) = \frac{2\mathrm{x}-10}{45}$. f étant strictement décroissante sur $]2;5[$ et

strictement croissante sur $]5;8[$, atteint son minimum en 5 qui est un entier naturel.

Le nombre cherché est donc 5 ; ce minimum est $f(5); f(5) = P(5) = \frac{4}{9}$.

EXERCICE 2

PARTIE A

1. Soit a une solution réelle de (E). On a donc

$a^3 - (3i+2)a^2 + (5i-1)a - 2i + 2 = 0$

$(1) \Leftrightarrow (a^3 - 2a^2 - a + 2) + i(-3a^2 + 5a - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 2a^2 - a + 2 = 0 & (2) \\ -3a^2 + 5a - 2 = 0 & (3) \end{cases}$$

Résolvons (3) :

$\Delta = 5^2 - 24; \Delta = 1$; les solutions de (3) sont : 1 et $\frac{2}{3}$. Seul 1 est solution de (2) (E) admet donc une seule solution réelle qui est 1.

2. Posons pour tout complexe z, $p(z) = z^3 - (3i+2)z^2 + (5i-1)z - 2i + 2$

Cherchons deux complexes b et c tels que pour tout z de $\mathbb{C}$,

$p(z) = (z-1)(z^2 + bz + c)$

$p(z) = z^3 + (b-1)z^2 + (c-b)z - c$, d'où par identification, on obtient :

$\begin{cases} b - 1 = -3i - 2 \\ c - b = 5i - 1 \\ -c = -2i + 2 \end{cases}$ ce qui équivaut à $\begin{cases} b = -3i - 1 \\ c = 2i - 2 \end{cases}$

Par suite pour tout complexe $z, p(z) = (z-1)[z^2 - (3i+1)z + 2i - 2]$

Résolvons : $\mathrm{z} \in \mathbb{C}, \mathrm{z}^2 - (\mathrm{i}+1)\mathrm{z} + 2\mathrm{i} - 2 = 0$;

$\Delta = (3i+1)^2 - 4(2i-2) = -2i = (1-i)^2$

Les solutions sont : $1 + \mathrm{i}$ et 2 i. L'ensemble solution de (E) est donc $\{1, 1+\mathrm{i}, 2\mathrm{i}\}$.

PARTIE B

1. O étant différent de A_1 et de A_2, il existe une (seule) similitude plane directe S de centre O qui transforme A_1 en A_2. Il faut maintenant montrer que $\mathrm{S(A_2) = A_3}$

Méthode géométrique.

$(\mathrm{OA_2})$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{IOA_3}}$ car O et $\mathrm{A_2}$ appartiennent à la première bissectrice du repère $(\mathrm{O, I, J})$. Par suite $(\widehat{\mathrm{OA_1}}, \widehat{\mathrm{OA_2}}) = (\overrightarrow{\mathrm{OA_2}, \mathrm{OA_3}})$ de plus, $\frac{\mathrm{OA_2}}{\mathrm{OA_1}} = \sqrt{2} = \frac{\mathrm{OA_3}}{\mathrm{OA_2}}$, donc $S(\mathrm{~A_2}) = \mathrm{A_3}$.

Éléments caractéristiques de S

Le centre de S est O, son rapport est $\frac{\mathrm{OA_2}}{\mathrm{OA_1}} = \sqrt{2}$, son angle orienté est $(\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}, \overrightarrow{\mathrm{OA_2}})$ de mesure principale $\frac{\pi}{4}$.

Méthode algébrique

Soit f la transformation complexe associée à S.

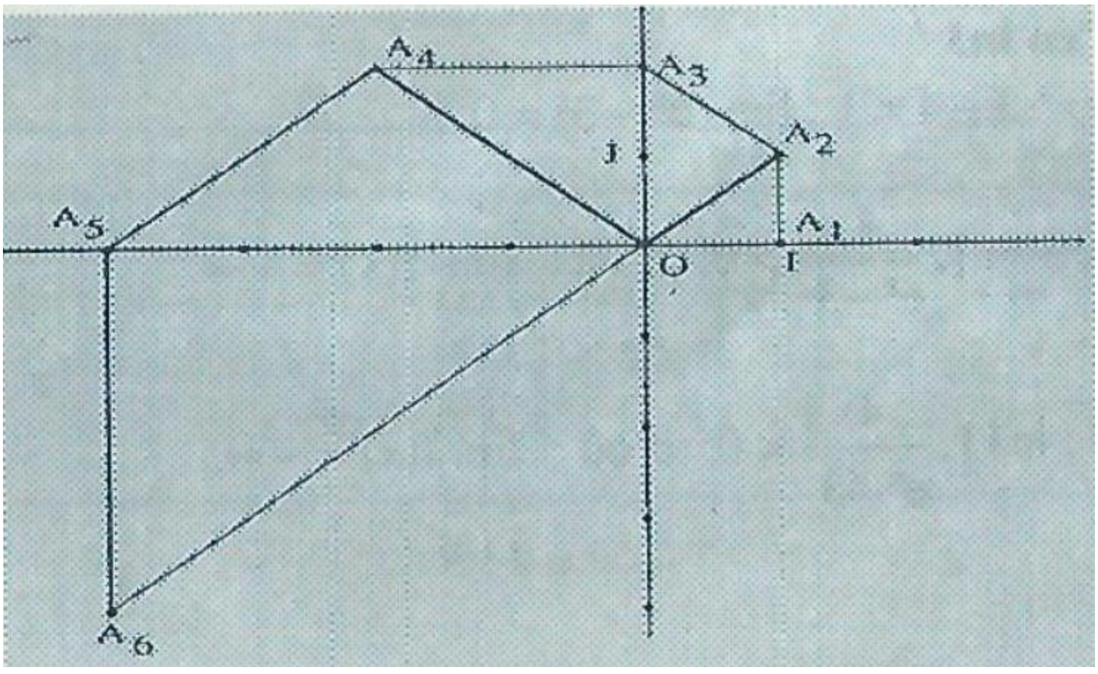
Il existe donc un complexe non nul a tel que pour tout complexe $\mathrm{z, f(z) = az}$.

$S(A_1) = A_2 \Leftrightarrow a = 1 + i$. On a: $f(z_{A_2}) = f(1 + i) = (1 + i)^2 = 2i = z_{A_3}$; d'où $S(A_2) = A_3$. Éléments caractéristiques de S

Le centre de S est O, son.rapport est $|1 + i|$ qui vaut $\sqrt{2}$, son angle orienté a pour mesure principale ARG $(1 + \mathrm{i})$ qui vaut $\frac{\pi}{4}$.

Suggestions : On pourrait démontrer qu'il existe une (seule) similitude directe S qui applique A_1 sur A_2 et A_2 sur A_3, et en protuerait ensuite que son centre est O. La méhhode géométrique est quelque peu délicate pour la série D.

2.



3. Puisque S est une similitude de rapport $\sqrt{2}$ qui applique A_n sur A_{n+1} et A_{n+1} sur A_{n+2},
on a: $d(A_{n+1}, A_{n+2}) = \sqrt{2}d(A_n, A_{n+1})$.

Posons $V_n = d(A_n, A_{n+1})$, $(V_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\sqrt{2}$. Pour tout entier naturel non nul $\mathrm{n}, \mathrm{V_n} = (\sqrt{2})^{\mathrm{n}}$; [1]

d'où $L_n = V_1 + V_2 + \cdots V_{n-1} = \frac{1-(\sqrt{2})^{n-1}}{1-\sqrt{2}} = (\sqrt{2}+1)\left[(\sqrt{2})^{n-1} - 1\right]$.

PROBLEME

PARTIE A

1. $D_{\mathrm{f}} = \mathbb{R} - \{\ln 3\} =]-\infty; \ln 3[\cup]\ln 3; +\infty[$.

2. Première méthode

$\forall x \in D_f, e^{x-4} + \frac{4}{e^x-3} = \frac{(e^x-4)(e^x-3)+4}{e^x-3} = \frac{e^{2x}-7e^x+16}{e^x-3} = f(x)$.

Deuxième méthode

Posons $X = e^x$,

$\frac{X^2-7X+16}{X-3} = X - 4 + \frac{4}{X-3}$ (*d*ivision euclidienne ou poser $= X - 3$)

$= \mathrm{e^x} - 4 + \frac{4}{\mathrm{e^x}-3}$

3. a. Limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{e^x-3} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - 4) = +\infty \Big($ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\Big)$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - 7e^x + 16) = 16$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - 3) = -3 \Big($ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0.\Big)$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{16}{3}$

Limite de f en $\ln 3$

$\lim_{x\to\ln 3} (\mathrm{e}^x - 4) = 3 - 4 = 1; \lim_{x\to\ln 3} (x^x - 3) = 0$

$\forall x \in]\ln 3\,; +\infty[\,, \frac{4}{\mathrm{e}^x-3} > 0$, d'où : $\lim\limits_{\substack{x\to\ln 3\\ x\ln 3}} f(x) = +\infty$

f $\forall x \in]-\infty; \ln 3\left[, \frac{4}{\mathrm{e}^x-3} < 0\right.$, d'où : $\lim_{\substack{x\to\to\ln 3\\ x>\ln 3}} f(x) = -\infty$.

b. $\forall x \in D_f, \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x} - \frac{4}{x} + \frac{1}{x} \times \frac{4}{e^x-3}$

On sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et puisque $\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{4}{x} + \frac{1}{x} \times \frac{4}{e^x-3}\right) = 0$

alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

$(\mathcal{C})$ admet donc une branche parabolique de direction (OJ) au voisinage de $+\infty$.

c. De $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{16}{3}$ et $\lim_{x\to h_3} |f(x)| = +\infty$ établies au 3. a.,

on déduit quel les droites d'équation $y = -\frac{16}{3}$ et $x = \ln 3$ sont asymptotes à $(\mathcal{C})$.

4. a. En utilisant le 2. on a :

$$\forall x \in D_f, f'(x) = e^x - \frac{4e^x}{(e^x-3)^2} = e^x \frac{(e^x-3)^2-4}{(e^x-3)^2} = \frac{e^x(e^x-1)(e^x-5)}{(e^x-3)^2}$$

b. $\frac{e^x}{(e^x-3)^2}$ étant toujours strictement positif pour tout x de D_f, le signe de $f(x)$ est

donc celui de $(e^x-1)(e^x-5)$.

Pour tout élément de x de D_f,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0$ ou $e^x - 5 = 0$.

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \ln 5$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - 1 > 0 \\ e^x - 5 > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} e^x - 1 < 0 \\ e^x - 5 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x > 1 \\ e^x > 5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} e^x < 1 \\ e^x < 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow e^x > 5$ ou $e^x < 1$

$\Leftrightarrow x > \ln 5$ ou $x < 0$

$\Leftrightarrow x \in [-\infty; 0[\cup]\ln 5, +\infty[$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0, \ln 3[\cup]\ln 3, \ln 5[$.

Tableau de variations de f.

x	$-\infty$	0		ln3		ln5	$+\infty$
f (x)	+	0	−		−	0	+
f(x)	$\frac{-16}{3}$ ↗	− 5	↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘	3	↗ $+\infty$

5. L'asymptote parallèle à l'axe des abscisses ou asymptote horizontale a pour équation $y = \frac{-16}{3}$ d'après 3. c.

Pour tout éléments x de D_f,

$$f(x) = -\frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 7e^x + 16}{e^x - 3} = \frac{-16}{3}$$

$\Leftrightarrow 3e^{2x} - 21e^x + 48 = -16e^x + 48$

$\Leftrightarrow 3e^{2x} - 5e^x = 0$

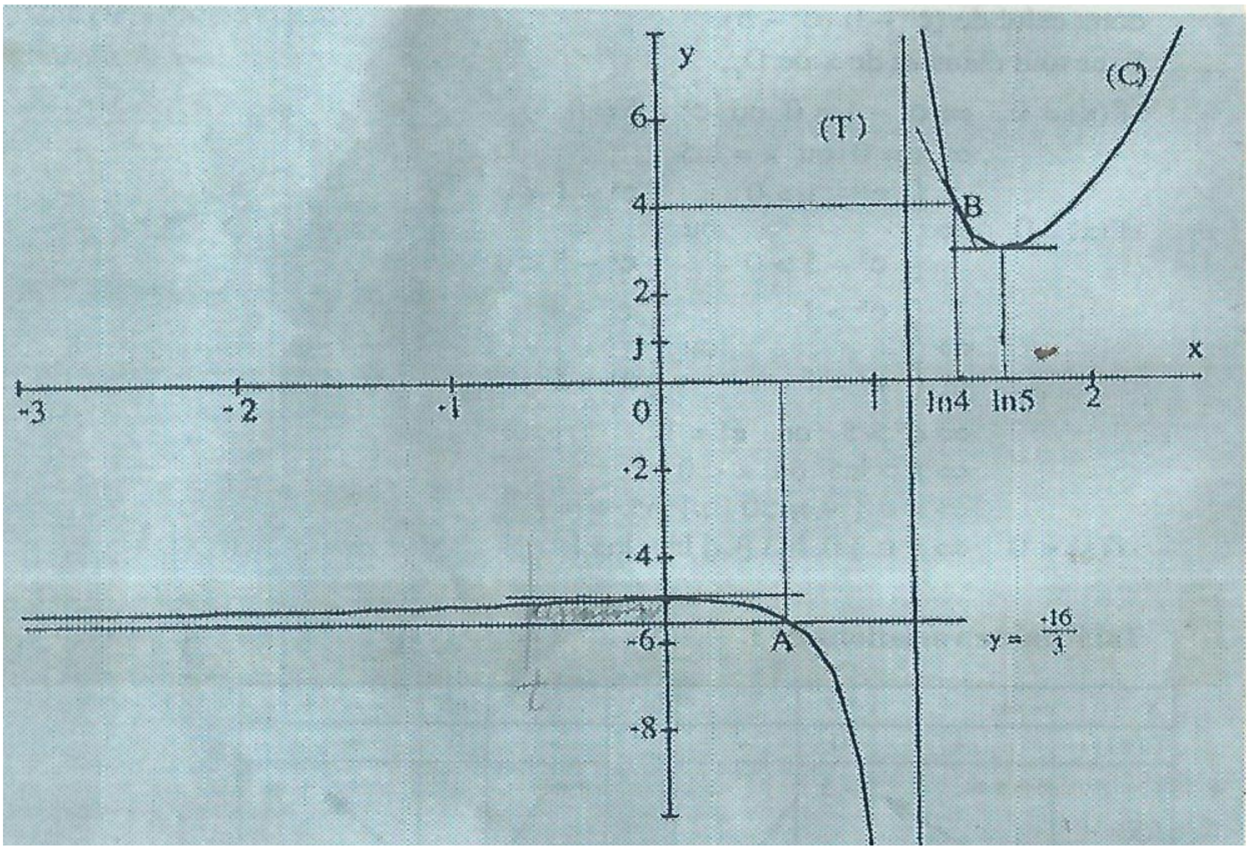
$\Leftrightarrow 3e^x - 5 = 0$ *car* $e^x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

Le point A a pour coordonnés $\left(\ln\left(\frac{5}{3}\right); \frac{-16}{3}\right)$; car $\ln\left(\frac{5}{3}\right) \in D_f$.

6. Une équation de la tangente (T) en $\ln 4$ est de la forme $y = f'(ln\, 4)(x - ln\, 4) + f(ln\, 4)$. Puisque $f'(\ln 4) = -12$ et $f(\ln 4) = 4$, une équation de (T) est $y = -12x + 12\ln 4 + 4$.

7. Courbe



PARTIE B

1. Première méthode

$$\forall x \in D_f, e^x - \frac{16}{3} + \frac{4e^x}{3(e^x-3)} = \frac{3(e^x-3)\left(e^x - \frac{16}{3}\right) + 4e^x}{3(e^x-3)}$$
$$= \frac{3e^{2x} - 16e^x - 9e^x + 48 + 4e^x}{3(e^x-3)}$$
$$= \frac{3(e^{2x} - 7e^x - 16}{3(e^x-3)}$$
$$= f(x).$$

Deuxième méthode

$\forall \mathrm{x} \in \mathrm{D_f}, \mathrm{f(x)} = \mathrm{e^x} - 4 + \frac{4}{(\mathrm{e^x}-3)}$ d'après partie A 2.

$$= \mathrm{e^x} - 4 - \frac{16}{3} + \frac{4}{\mathrm{e^x}-3} + \frac{16}{3} = \left(\mathrm{e^x} - \frac{16}{3}\right) + \left(\frac{4}{\mathrm{e^x}-3} + \frac{16}{3} - 4\right)$$
$$= \left(\mathrm{e^x} - \frac{16}{3}\right) + \frac{12 + 4\mathrm{e^x} - 12}{3(\mathrm{e^x}-3)} = \mathrm{e^x} - \frac{16}{3} + \frac{4\mathrm{e^x}}{3(\mathrm{e^x}-3)}$$

2. Pour $\mathrm{t} < 0$, la courbe est donc au-dessus de l'asymptote d'après le tableau de variations de f. D'où :

$$A(t)=\int_t^0\left(f(x)+\frac{16}{3}\right)dx=\int_t^0\left(e^x+\frac{4}{3}\frac{e^x}{e^x-3}\right)dx=\left[e^x+\frac{4}{3}\ln|e^x-3|\right]_t^0$$

$=1-e^t+\frac{4}{3}\ln 2-\frac{4}{3}\ln(3-e^t)($ car pour $t<0$ on a $e^t<1)$. D'où $|e^t-3|=3-e^t$

3. $\lim_{t\to+\infty}A(t)=1+\frac{4}{3}\ln 2-\frac{4}{3}\ln 3=1+\frac{4}{3}\ln\frac{2}{3}$

(car $\lim_{t\to-\infty}(3-e^t)=3$ et $\lim_{u\to 3}\ln u=\ln 3.)$

CORRECTION SESSION DE REMPLACEMENT 1995

EXERCICE 1

1. a. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+e^x} = \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

Remarque : on peut partir de $1 - \frac{e^x}{1+e^x}$ pour remonter le calcth.

b. f étant une fonction continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet des primitives.

Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est la somme des primitives M et N sur $\mathbb{R}$ des fonctions m et n définies pour tout x réel par $m(x) = 1$

et $n(x) = \frac{-e^x}{1+e^x}$.

On peut prendre $M(x) = x$ et $N(x) = -\ln(1+e^x)\left(\text{car}\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{u'(x)}{u(x)}\right)$

avec $u(x) = 1 + e^x$. On peut prendre pour tout réel $x, F(x) = x - ln(1+e^x)$
c. $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{(1+e^x)^2} = \frac{(1+e^x)-e^x}{(1+e^x)^2}$

$$= \frac{1}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$
$$= f(x) - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

Remarque : on peut partir de $f(x) - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ pour remonter le calcul.

d. Puisque $g(x) = f(x) - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, G$ est la somme de F et d'une primitive

de $x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$. En posant pour tout réel $x, v(x) = 1 + e^x$,

on a $\frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{v'(x)}{(v(x))^2}$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $-\frac{v'}{v^2}$ est $\frac{1}{v}$.

Par suite on peut prendre pour tout réel $x, G(x) = F(x) + \frac{1}{1+e^x}$.

2. a. $I_1 = \int_0^1 f(x)dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0)$

$$= 1 + \ln\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}}\right) + \ln(2) = 1 + \ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}}\right)$$
$$\mathrm{I}_2 = \int_0^1 g(x)dx = [G(x)]_0^1 = [F(x)]_0^1 + \left[\frac{1}{1+e^x}\right]_0^1$$
$$= 1 + \ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}}\right) + \frac{1}{1+\mathrm{e}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+\mathrm{e}} + \ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}}\right)$$

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1], \frac{1}{(1+e^x)^{n+1}} = \frac{(1+e^x)-e^x}{(1+e^x)^{n+1}} = \frac{1}{(1+e^x)^n} - \frac{e^x}{(1+e^x)^{n+1}}$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = I_n - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^{n+1}} dx$.

3. a. $\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{e^x}{(1+e^x)^{n+1}} \geq 0$.

Par suite, on a pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^{n+1}}dx \geq 0$ (propriétés des intégrales des fonctions continues positives sur un intervalle).

$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^{n+1}}dx \geq 0$. La suite I est donc décroissante.

b. $\forall x \in [0;1], e^x \geq 1 \Rightarrow 1+e^x \geq 2$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{1+e^x} < \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < \frac{1}{(1+e^x)^n} \leq \frac{1}{2^n}$$
$$\Rightarrow 0 < \int_0^1 \frac{dx}{(1+e^x)^n} \leq \int_0^1 \frac{1}{2^n}dx$$
$$\Rightarrow 0 < I_n \leq \frac{1}{2^n}$$

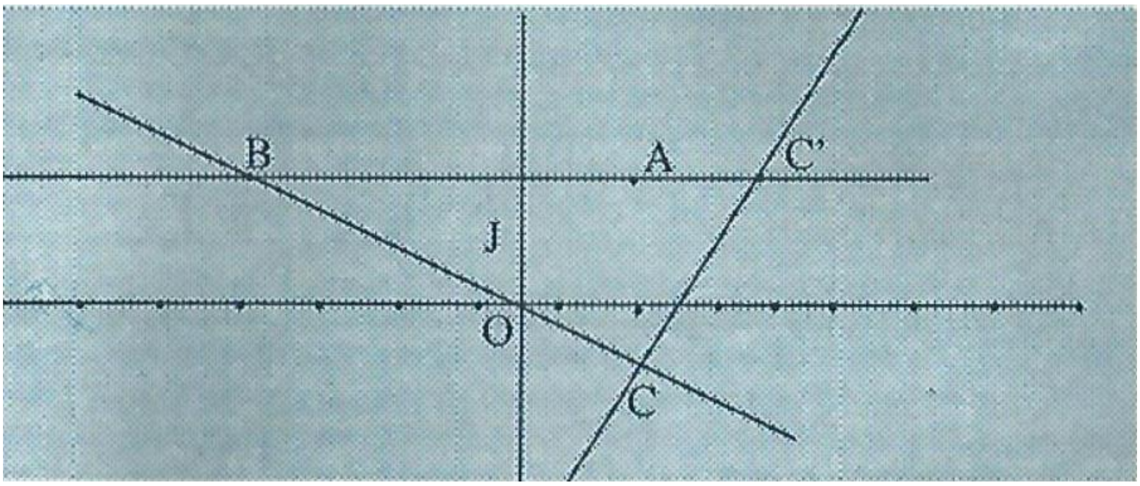
c. La suite I est décroissante et minorée d'après 3. a. et 3.c..

I est donc convergente.

On a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$; d'où $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

EXERCICE 2

1.



Première méthode

Le repère (O, I, J) étant orthonormé, on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$. Le triangle ABC est donc rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

Deuxième méthode

Puisque les points A et B ont la même ordonnée alors (AB) est parallèle à (OI). Et puisque les points A et C ont la même abscisse alors (AC) est parallèle à (OJ). Les droites (OI) et (OJ) sont orthogonales car le repère (O, I, J) est orthonormé. On déduit que les droites (AB) et (AC) sont orthogonales. Le triangle ABC est donc rectangle en A.

Autres méthodes

On démontre que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ou $\text{ARG}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$.

2.

a. La transformation de $\mathbb{C}$ associée à S est telle qu'à tout z de $\mathbb{C}$ associe

$\mathrm{z}' = \mathrm{az} + \mathrm{b}, \mathrm{a} \in \mathbb{C}^*, \mathrm{b} \in \mathbb{C}$

$S(A) = A \Leftrightarrow 2 + 2i = a(2 + 2i) + b.$

$\mathrm{S(B) = C \Leftrightarrow 2 - i = a(-4 + 2i) + b.}$

On a: $\mathrm{a} = \frac{1}{2}\mathrm{i}$ et $\mathrm{b} = 3 + \mathrm{i}.$

Cette transformation de $\mathbb{C}$ associe à tout complexe z le complexe $\frac{1}{2}\mathrm{i} + 3 + \mathrm{i}.$
b. $C' = S(C) \Leftrightarrow z_{C'} = \frac{1}{2}\mathrm{i}(2 - i) + 3 + i$

$\Leftrightarrow \mathrm{z_{C'}} = \frac{7}{2} + 2\mathrm{i}$

Le point C' a pour couple de coordonnées $\left(\frac{7}{2}; 2\right)$.

c. Le rapport de S est $\left|\frac{\mathrm{i}}{2}\right|$ qui vaut $\frac{1}{2}$, le centre de S est A, l'angle de S est ARG $\left(\frac{1}{2}\text{ i}\right)$ qui vaut $\frac{\pi}{2}$. S est donc la similitude de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
3. a. Les points $\mathrm{A, B}$ et $\mathrm{C'}$ ont la même ordonnée, donc ils sont alignés.

Première méthode

S(B)=C et S(C)=C'. On en déduit que $\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{C'C}}$ est l'angle orienté de S dont la mesure principale est $\frac{\pi}{2}$. Le triangle BCC ' est donc rectangle en C.

Deuxième méthode
On a : $\mathrm{BC}^2 = 45$ d'après $1. \mathrm{CC'}^2 = \left(\frac{7}{2} - 2\right)^2 + (2+1)^2 = \frac{45}{4}$ $\mathrm{BC'}^2 = \left(-\frac{7}{2} - 4\right)^2 + (2-2)^2 = \frac{225}{4}$. On a $\mathrm{BC'}^2 + \mathrm{CC}^2 = \mathrm{BC}^2$.

Le triangle ACC ' est rectangle en C.

b. Les points B et C appartiennent à la droite (D). (D) est donc la droite (BC).

Comme $S(B) = C$ et $S(C) =$ C'alors la droite (D') est (CC') car la similitude transforme une droite en une droite.

c. Un vecteur directeur de (D') est $\overrightarrow{CC}$ ' de coordonnées $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

Soit M un point du plan de coordonnées ($\mathrm{x, y}$).

$M \in (D') \Leftrightarrow$ dét $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CC})') = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 2 & \frac{3}{2} \\ y + 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x - y - 5 = 0$$

Une équation cartésienne de (D') est donc $2x - y - 5 = 0$

PROBLEME
PARTIE A

1. $\mathrm{Dg} = \mathbb{R}_+$.

Étude de la continuité à droite de g en 0.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (1 + x) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x ln x = 0$ d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = g(0)$

g est donc continue à droite en 0 .

Étude de la dérivabilité de g en 0

$\forall x > 0, \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{1+x-x\ln x-1}{x} = 1 - \ln x$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (1 - \ln x) = +\infty$, car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$

Donc g n'est pas dérivable en 0 .

2. Dérivée de g

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{g}'(x) = 1 - \left(ln\, x + x \times \frac{1}{x}\right) = -ln\, x$

Signe de g'

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0$

$\Leftrightarrow x \in]0; 1[$

$\mathrm{g}'(\mathrm{x}) < 0 \Leftrightarrow \ln \mathrm{x} > 0$

$\Leftrightarrow x \in]1; +\infty[$

Sens de variations de g

g est strictement croissante sur $]0; 1[$ et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

Limite de g en $+\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = 1 + x(1 - ln\, x)$

On a : $\lim_{x \to +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$, car $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$;

par suite $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Tableau de variations de g

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

3. a. g est continue et strictement croissante sur $[0;1]$.1 est minimum de g sur $[0,1]$ atteint en 0. g ne sannule donc pas sur $[0;1]$.

g est continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$. La restriction de g à $[1;+\infty[$ est donc une bijection de $[1;+\infty[$ sur $\mathrm{g}([1;+\infty[)$ qui est $]-\infty;2]$.

Comme 0 est élément de $]-\infty;2]$ alors l'équation : $x \in \mathbb{R}, g(x)=0$ admet une seule solution β dans $[1;+\infty[$.

Conclusion : l'équation : $x \in \mathbb{R}, g(x)=0$ admet une seule solution dans $[0;+\infty[$,

b. On a $g(3{,}5) \approx 0{,}09$ qui est strictement positif et $g(3{,}6) \approx -0{,}01$ qui est strictement négatif. Par suite β appartient à $]\,3{,}5;3{,}6[$.

4. Courbe de g (voir figure)

PARTIE B

1. $\mathrm{D_f} =]0;+\infty[$.

Limite à droite en 0 de f

$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{1}{1+x}\right) = 1$ d'où : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$

Limite en $+\infty$ de f

On a : $\forall x > 0, f(x) = 2 + \frac{1}{x\left(\frac{1}{x}+1\right)}\ln x = 2 + \frac{1}{\frac{1}{x}+1} \times \frac{\ln x}{x}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{x}+1}\right) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

2. a. $\forall x \in]0;+\infty\Big[, f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x)-\ln x}{(1+x)^2} = \frac{1+x-x\ln x}{x(1+x)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$.

Comme $x(1+x)^2$ est strictement positif pour tout x de $]0;+\infty[$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

b. Étude du signe de $f'(x)$

Il résulte du tableau de variation de g et de partie A 3 . a. et b. que :

$\forall x \in]0,+\infty[,\ \ g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \beta$

$g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [0; \beta[$

$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]\beta; +\infty[$

3. Soit M un point élément de $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisse x.

$\mathrm{M} \in (\mathrm{D}) \Leftrightarrow f(x) = 2$

$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{1+x} = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

Le point d'intersection A de $(\mathcal{C}_f)$ et (D) a pour couple coordonnées $(1; 2)$,

4. Courbe de f (voir figure)

La droite (OJ) est asymptote à (φ_f) car $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

La droite d'équation $\mathrm{y} = 2$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ d'après partie B. 1 .

PARTIE C

1. a. On a $1 + \beta - \beta \ln \beta = 0$ d'après partie A, 3. a.. D'où : $\beta \ln \beta = \beta + 1$.

Par suite $\ln \beta = \frac{\beta+1}{\beta}$.

b. Posons $I = \int_1^\beta x \ln x dx$.

Posons : $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$, on a $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^2}{2}$.

$$I = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^\beta - \int_1^\beta \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^\beta - \frac{1}{4}[x^2]_1^\beta = \frac{\beta^2}{2} \ln \beta - \frac{1}{4}(\beta^2 - 1)$$

$= \frac{\beta^2}{2}\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right) - \frac{1}{4}\beta^2 + \frac{1}{4}$ (d'après partie C. 1.)

$= \frac{\beta^2+2\beta+1}{4} = \frac{(\beta+1)^2}{4}$

2. Comme g est continue positive sur $[1; \beta]$ d'après partie A. 2., on a :

$A = \int_1^\beta g(x) dx$

$A = \int_1^\beta (1 + x) dx - \int_1^\beta x \ln x dx$

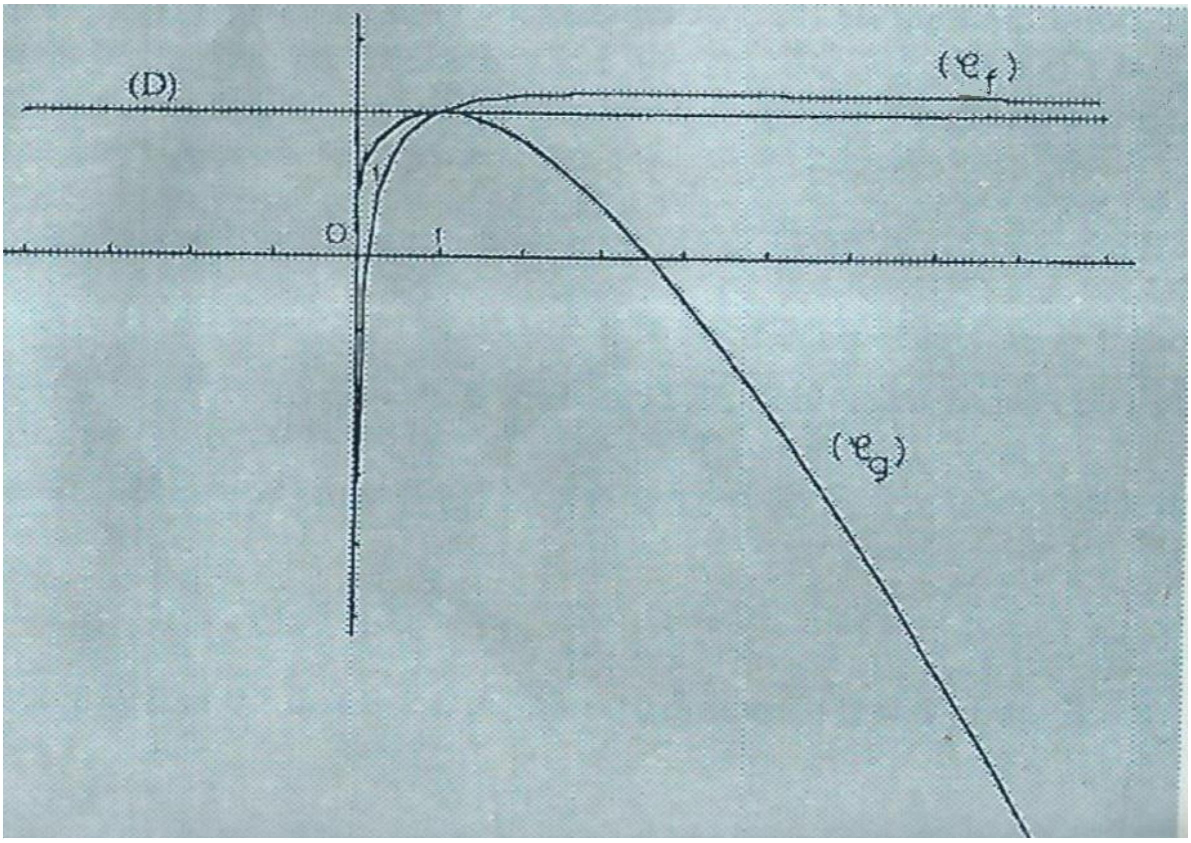
$= \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_1^\beta - \frac{(\beta+1)^2}{4}$ (d'après C 1. b.)

$= \beta + \frac{\beta^2}{2} - \frac{3}{2} - \frac{\beta^2+2\beta+1}{4}$

$= \frac{\beta^2+2\beta-7}{4}$

Soit $A = \frac{\beta^2+2\beta-7}{4}$

Courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$



CORRECTION SESSION NORMALE 1995 SERIE D

EXERCICE 1

1. Soit Ω l'univers des éventualités. Ω est l'ensemble des paires de boules prises parmi 10. D'où : $\mathrm{Card}(\Omega) = C_{10}^{2}$. On a $C_{10}^{2} = 45$. La probabilité p définie sur $P(\Omega)$ est telle que $p(\omega) = \frac{1}{\mathrm{card}(\Omega)}$ où $\{\omega\}$ est un événement élémentaire. Appelons A l'événement : "Tirer 2 boules de même couleur". Pour que A soit réalisé il faut tirer 2 boules jaunes parmi 6, soit C_6^2 tirages, ou tirer 2 boules vertes parmi 3 , soit C_3^2 tirages . Il y a donc $\mathrm{C}_6^2 + \mathrm{C}_3^2$ cas favorables à la réalisation de A. On a

$C_6^2 = \frac{6\times5}{2} = 15$ et $C_3^2 = \frac{3\times2}{2} = 3$

d'où $C_6^2 + C_3^2 = 15 + 3 = 18$. La probabilité cherchée est donc

$$\mathrm{p(A)} = \frac{\mathrm{card(A)}}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

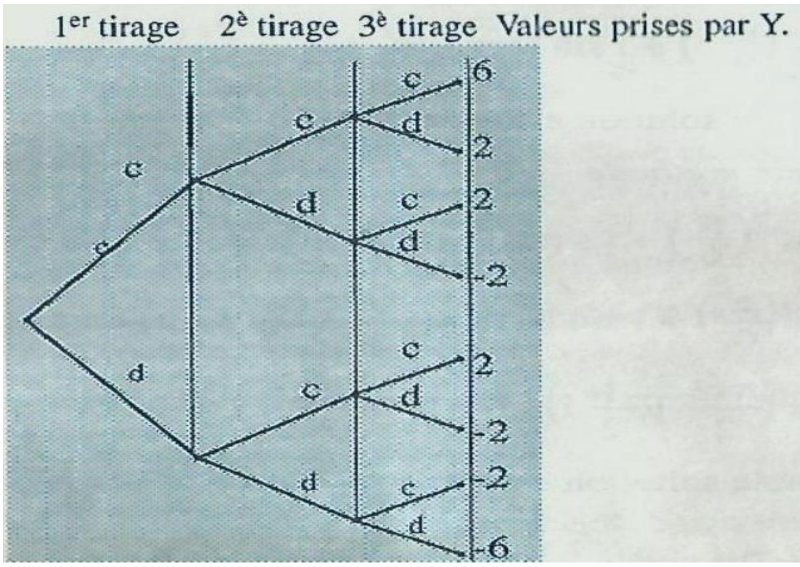
2. a. L'univers image de X est $X(\Omega) = \{-2; 2\}$. On a : $p(X = 2) = 0{,}4$.

d'après 1. et $p(X = -2) = 1 - p(X = 2) = 0{,}6$.

b. Par suite $E(X) = -2 \times (0{,}6) + 2 \times (0{,}4) = -0{,}4$.
3. a. Pour trouver l'univers image de Y, utilisons un arbre de choix avec la convention suivante :

c. les boules tirées sont de même couleur.

d. les 2 boules tirées sont de couleurs différentes.



L'univers image de Y est donc $\{-6; -2; 2; 6\}$

Comme on remet la boule dans l'urne avant le tirage suivant, nous avons un schéma de Bernoulli. A l'aide de l'arbre on obtient :

$\mathrm{p(Y = -6)} = (0{,}6)^3 = 0{,}216; \mathrm{p(Y = -2)} = \mathrm{C}_3^1(0{,}4) \times (0{,}6)^2 = 0{,}432$

$\mathrm{p(Y = 2)} = \mathrm{C}_3^2(0{,}4)^2 \times (0{,}6) = 0{,}288$

$\mathrm{p(Y = 6)} = (0{,}4)^3 = 0{,}64$. La loi de probabilité de Y est donnée par le tableau ci-dessous :

k	-6	-2	2	6
$p(Y = k)$	0,216	0,432	0,288	0,064

b. $E(Y) = (-6) \times (0{,}216) + (-2) \times (0{,}432) + 2 \times (0{,}288) + 6 \times (0{,}064) = -1{,}2$.
c. $E(Y) = 3E(X)$ car l'expérience est répétée trois fois et Y est la variable aléatoire égale à la somme des trois valeurs obtenues par X.

EXERCICE 2

1. Les solutions z_k de l'équation sont les racines cubiques de i. Puisque i est le nombre complexe de module 1 et d'argument principal $\frac{\pi}{2}$, on a pour $k \in \{0; 1; 2\}$: $z_k = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)$.

Première méthode

$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; z_1 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\ z_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{6}\right) = -i$

L'ensemble solution est donc $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}; \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}; -i\right\}$.

Deuxième méthode

$z_k = \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] \times \left[\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right]$.

$$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; z_1 = z_0 \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = z_0 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \times \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -i$$

L'ensemble solution est donc $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}; -i\right\}$

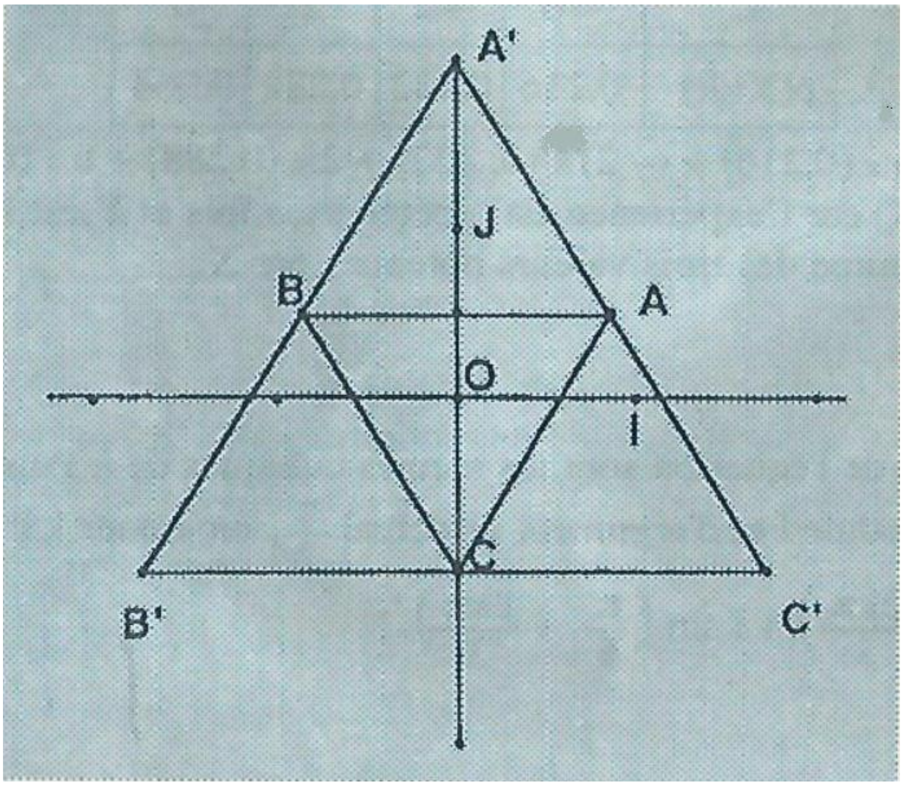
2. a. $z' = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \times z = (1 + i\sqrt{3}) \times z$.
   b. $z_{A'} = (1 + i\sqrt{3}) \times z_A = (1 + i\sqrt{3}) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2i$

Le point A' a pour coordonnées $(0; 2)$.

$z_{B'} = (1 + i\sqrt{3}) \times z_B = (1 + i\sqrt{3}) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i$; le point B' a pour coordonnées $(-\sqrt{3}; -1)$.

$z_{C'} = (1 + i\sqrt{3}) \times z_C = (1 + i\sqrt{3})(-i) = \sqrt{3} - i$; le point C' a pour coordonnées $(\sqrt{3}; -1)$.

3. La similitude multipliant les aires par le carré de son rapport, on a : aire $(A'B'C') = 2^2$ aire $(ABC) = 4$ aire (ABC).



4.

Première méthode

En s'aidant de la figure et des coordonnées des points, on constate que $z_{A'} = -2z_{C'}$
$z_{B'} = -2z_A$; $z_{C'} = -2z_B$

Par suite l'homothétie de centre O et de rapport - 2 transforme globalement ABC en $A'B'C'$.

Deuxième méthode

Le triangle ABC est équilatéral car A, B, C sont les points images d'une racine cubique d'un complexe non nul. Le triangle $A'B', C'$ est équilatéral de centre de gravité O comme image du triangle équilatéral ABC de centre de gravité O par une similitude. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 2 et r la rotation de çentre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$S = roh = h$ or. La rotation r' de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ applique donc A' sur B'; B' sur C' et C' sur A'.

On a r'oS = r'o (roh) = (r'or)oh = S_0 oh car r'or' = S_0 du fait que $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$

S_0 est l'homothétie de centre O et de rapport - 1 .

S_0 oh est donc l'homothétie de centre O et de rapport - 2 .

S transforme ABC en $A'B'C'$ et r' laisse $A'B'C'$ globalement invariant. S_0 oh transforme donc globalement le triangle ABC en le triangle $A'B'C'$.

PROBLEME

PARTIE A

1. $D_f = \mathbb{R}_+^*$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a :
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x}$

Signe de $\mathbf{f}'(x)$. Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1.$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$

f est strictement croissante sur $]\,1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]\,0; 1[$.

2. D'après les variations de $f, f(1)$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Or $f(1) = 3$ qui est strictement positif, d'où f est strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$

PARTIE B

1. $\mathrm{Dg} = \mathbb{R}_+^*$.

Limite en $+\infty$ de g.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ d'où $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

Limite de g à droite en 0.

$\lim_{x\to 0} x = 0;\ \lim \ln x = -\infty$

$x \to 0\ x \to 0$

$x > 0\ x > 0$

$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ d'où $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ par suite $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty$

2. a. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = 1 + 2x\left(\frac{1}{x} \times x - \ln x\right)\frac{1}{x}$
   b. $g'(x) = 1 + \frac{2(1-\ln x)}{x^2} = \frac{x^2+2-2\ln x}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$.

3. D'après partie A. 2. et compte tenu du fait que $x \mapsto x^2$ est strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$, $g'(x)$ est strictement positif, g est donc strictement croissante sur D_g.

Tableau de variations de g

x	0		$+\infty$
g'(x)	‖	+	
g(x)	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4. a. $\forall x > 0, g(x) - x = 2\frac{\ln x}{x}$; on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

d'où $\lim_{x\to+\infty} [g(x) - x] = 0$

La droite (Δ) est donc asymptote à $(\mathcal{C})$.
b. $\forall x > 0, g(x) - x = \frac{2\ln x}{x}$

x	0		1	
$g(x) - x$	-	0	+	
position $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ)	$(\mathcal{C})$ est au-dessous de (Δ)	B	$(\mathcal{C})$ est au-dessus de (Δ)	

B est le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse 1
5. a. Une équation de (T) est : $y - g(1) = (x - 1)g'(1)$; on a $g(1) = 1$ et $g'(1) = 3$ Une équation de (T) est donc $y = 3x - 2$.

b. Soit A le point d'intersection de (T) avec l'axe (OI),

$(x_A; y_A)$ les coordonnées de A: $y_A = 3x_A - 2$ et $y_A = 0$ d'où $x_A = \frac{2}{3}$ et $y_A = 0$. le couple de coordonnées de A est donc $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$

c. Comme $(\mathcal{C})$ est entièrement située au-dessous de (T), l'ordonnée du point de $(\mathcal{C})$ d'abcisse $\frac{2}{3}$ est inférieure à celle de A. Puisque l'ordonnée de A est nulle, alors $\mathrm{g}\left(\frac{2}{3}\right)$ est négatif.
d. g est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$, a fortiori sur $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$. De plus g est strictement croissante sur $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$ et puisque $g\left(\frac{2}{3}\right)$ et $g(1)$ sont de signes contraires, alors il existe un unique réel α appartenant à $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

6. Tracé de (ʕ) (voir figure ci-dessous)

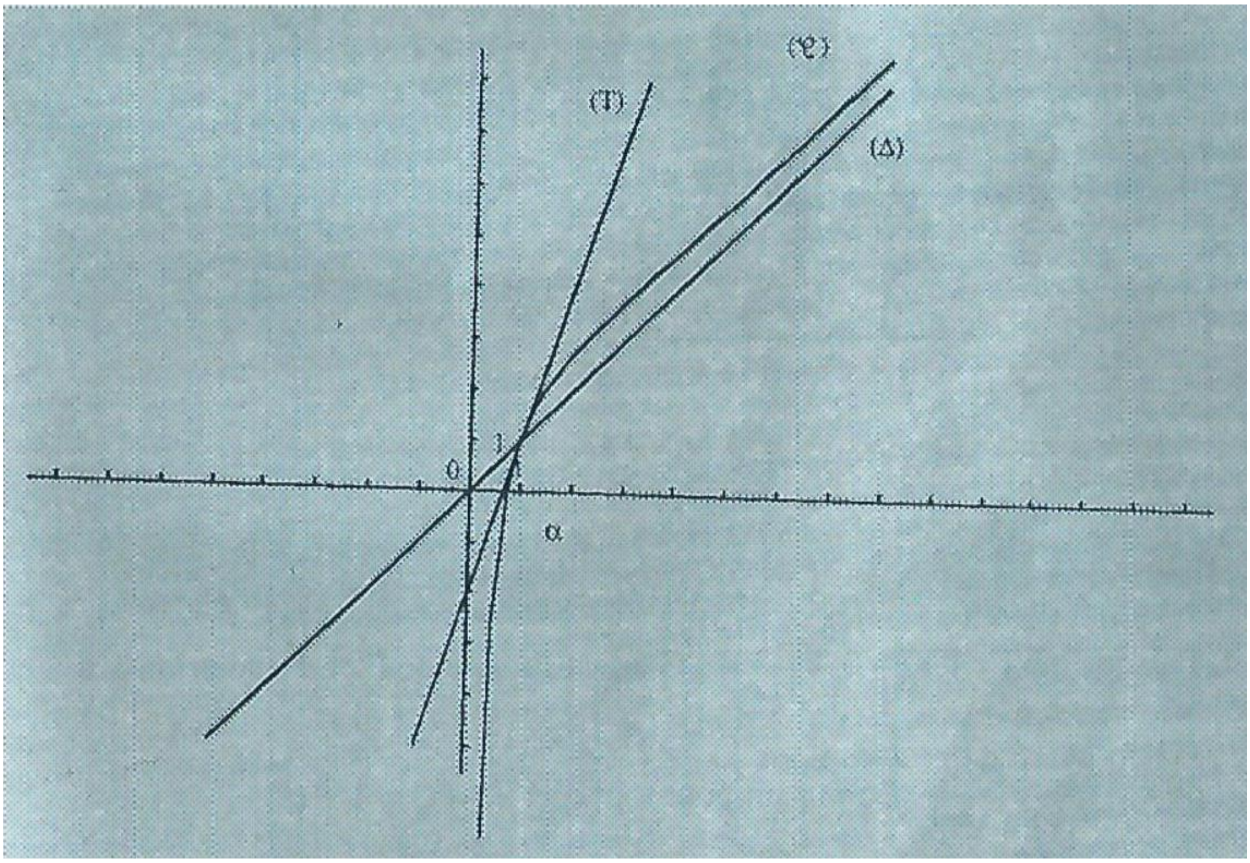
7. $A = \int_1^e \frac{2\ln x}{x} dx$

Posons : $\mathrm{u(x)} = \ln \mathrm{x}$, on a $\mathrm{u'(x)} = \frac{1}{\mathrm{x}}$; on a : $\forall \mathrm{x} \in [1; \mathrm{e}], \frac{2\ln \mathrm{x}}{\mathrm{x}} = 2\mathrm{u(x)} \times \mathrm{u'(x)}$.

Une primitive de $x \mapsto 2u(x) \times u'(x)$ sur $[1; e]$ est la fonction $x \mapsto [u(x)]^2$.

Par suite $A = [(\ln x)^2]_1^{\mathrm{e}} = ((\ln e)^2 - (\ln 1)^2) = 1$; d'où : $A = 1$.

Courbe $(\mathcal{C})$



EXERCICE 1

1. $\forall z \in \mathbb{C}, \varphi(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)z = \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right)z$

a. $z_0 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

b. $z_1 = \varphi(z_0) = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z_0, |z_1| = \left|\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right| \times |z_0| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Un argument de z_1 est la somme d'un argument de $\frac{3+i\sqrt{3}}{4}$ et d'un argument de z_0. Un argument de $\frac{3+i\sqrt{3}}{4}$ est $\frac{\pi}{6}$ et un argument de $1-i$ est $-\frac{\pi}{4}$. On a donc :

$\theta_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}$. Par suite $z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$.

3.

a. $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $1-i$ et de raison $\frac{3+i\sqrt{3}}{4}$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \left|\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right|^n z_0 = \left[\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right]^n (1-i)$

c. $\forall n \in \mathbb{N}, r_n = |z_n| = \left[\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right]^n |1-i| = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \times \sqrt{2}$.

Un argument de z_n est la somme d'un argument de $\left[\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right]^n$ et d'un argument de z_0. Or un argument de $\left[\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right]^n$ est $\frac{n\pi}{6}$.

On peut donc prendre $\theta_n = \frac{n\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$.

d. $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $\sqrt{2}$ et de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite arithmétique de premier terme $\frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{6}$.

EXERCICE 2

1. L'univers image de X est $\{10; 15; 20; 25; 30; 35\}$.

chiffres des dizaines \ chiffres des unités	0	0	0	5
1	10	10	10	15
1	10	10	10	15
2	20	20	20	25
3	30	30	30	35
3	30	30	30	35
3	30	30	30	35

D'après le tableau le nombre des éventualités est 24.

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant.

k	10	15	20	25	30	35
$p(X=k)$	$\frac{6}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{3}{24}$

2. Soit F la fonction de répartition de X.

$F(x) = p(X \leq x)$

$x < 10, F(x) = 0$

$10 \leq x < 15, F(x) = \frac{6}{24}$

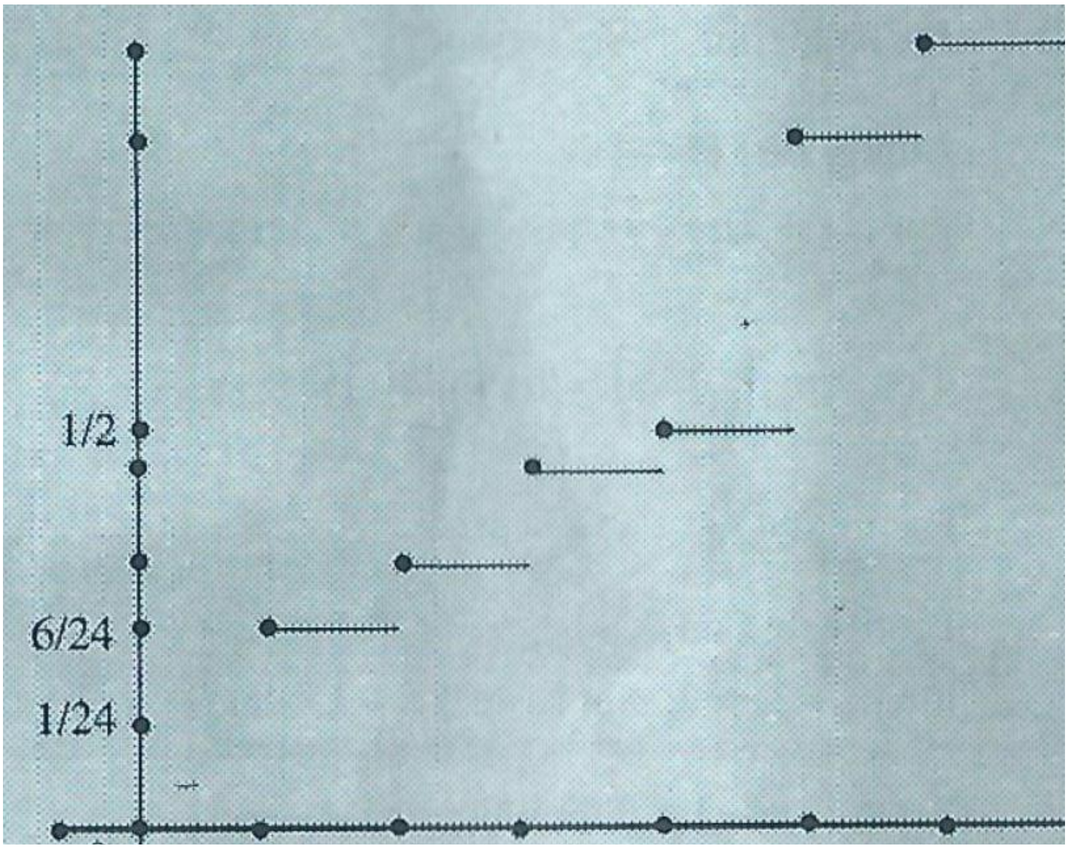
$15 \leq x < 20,\ F(x) = \frac{8}{24}$

$20 \leq x < 25,\ F(x) = \frac{11}{24}$

$25 \leq x < 30,\ F(x) = \frac{1}{2}$

$30 \leq x < 35,\ F(x) = \frac{21}{2}$

$35 \leq x,\ F(x) = 1$



3. $\mathrm{E(X)} = 10 \times \frac{6}{24} + 15 \times \frac{2}{24} + 20 \times \frac{3}{24} + 25 \times \frac{1}{24} + 30 \times \frac{9}{24} + 35 \times \frac{3}{24} = \frac{550}{24}\ \mathrm{E(X)} \approx 22{,}92$

PROBLEME

PARTIE A

$f(x) = (x-2)e^x - x - 2$

1. a. $D_f = \mathbb{R}^*$.
   b. $\forall x \in D_f, f(x) = \frac{x(e^x-1)+2(e^x-1)-4e^x}{e^x-1} = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x-1} = \frac{e^x(x-2)-x-2}{e^x-1}$

   D'où : $\forall x \in \mathrm{D_f}, \mathrm{f(x)} = \mathrm{x} + 2 - \frac{4\mathrm{e^x}}{\mathrm{e^x} - 1}$

Remarque : On pourra aussi écrire :

$f(x) = \frac{(ax+b)(e^x-1)+ce^x}{e^x-1} = \frac{(ax+b-c)e^x-(ax+b)}{e^x-1}$

D'où $(ax+b+c)e^x - ax - b = (x-2)e^x - x - 2$. En donnant a x trois valeurs, on obtient

$\begin{cases} a = 1 \\ b = - \\ c = -4 \end{cases}$

2.

a. Limite de f en $+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty}(x+2) = +\infty$, posons $u = e^x$, on a : $\lim_{x\to+\infty} u = +\infty$,

d'où $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-4e^x}{e^x-1}\right) = \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{-4u}{u-1}\right) = -4$

Par suite $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Limite de f en $-\infty$.

$\lim_{x\to-\infty}(x+2) = -\infty$, posons $u = e^x$, on a $\lim u = 0$,

d'où $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-4e^x}{e^x-1}\right) = \lim_{u\to0}\left(\frac{-4u}{u-1}\right) = 0$

Par suite $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Limite de f en 0.

$\lim_{x\to0}(x+2) = 2, \lim_{x\to0}(-4e^x) = -4, \lim_{x\to0}(e^x-1) = 0$

$\forall \mathrm{x} > 0, \mathrm{e^x} - 1 > 0$ d'où $\mathrm{lim f(x)} = -\infty$

et $\forall x < 0, e^x - 1 < 0$, d'où $\lim_{\substack{x\to0 \\ x<0}} f(x) = +\infty$

b. $\forall x \in D_f, f(x) - (x-2) = x + 2 - \frac{-4e^x}{e^x-1} - (x-2) = \frac{-4}{e^x-1}$; on a $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-4}{e^x-1}\right) = 0$
(voir question précédente)

La droite (Δ_1) est donc asymptote à (φ).
c. $\forall x \in D_f, f(x) - (x+2) = \frac{-4e^x}{e^x-1}$, on a : $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-4e^x}{e^x-1}\right) = 0$

La droite (Δ_2) est donc asymptote à (() .

3. a. (Δ_1) et (Δ_2) sont parallèles car elles ont le même coefficient directeur.

La symétrique par rapport à 0 du point de coordonnées $(0,-2)$ de (Δ_1) est le point de coordonnées $(0,2)$ de (Δ_2). Comme la symétrie centrale transforme une droite en une droite qui lui est parallèle alors $S[(\Delta_1)] = (\Delta_2)$

b. Démontrons que f est impaire.

Soit x un réel non nul, $-x$ est aussi un réel non nul. On a :

$$f(-x) = \frac{(-x-2)e^{-x} + x - 2}{e^{-x} - 1} = \frac{e^{-x}[(-x-2) + (x-2)e^x]}{e^{-x}(1-e^x)} = \frac{-(x-2)e^x - x - 2}{e^x - 1} = -f(x)$$

f est donc impaire.

Par suite $S[(\varphi)] = (\ell)$

4. a. $\forall x \in D_f, f'(x) = 1 - 4\left(\frac{e^x(e^x-1)-e^{2x}}{(e^x-1)^2}\right) = 1 + \frac{4e^x}{(e^x-1)^2}$

b. $\forall x \in D_f \;\; f'(x) > 0$; f est donc strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.
Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	+	‖	+
f(x)	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

PARTIE B

1. f est continue et strictement croissante sur $]-\infty;0[$ d'après Partie A. 4. f définit une bijection de $]-\infty;0[$ sur $f(]-\infty;0[)$ qui est $\mathbb{R}$ d'après Partie A. 4.b.;

0 est élément de $\mathbb{R}$, il admet un unique antécédent α dans $]-\infty;0[$. L'équation proposée admet donc la solution unique α.

2. a. $f(\ln 11) = \frac{(\ln 11 - 2)\times 11 - 2}{10}, f(\ln(11)) \approx -0{,}0021$

$$\text{et } f(\ln 12) = \frac{(\ln 12 - 2) \times 12 - 2}{11}, f(\ln(12)) \approx 0{,}1212$$

b. $\mathrm{f}(\ln(11)) < 0$ et $\mathrm{f}(\ln(12)) > 0$, par suite α appartient à $]\ln 11; \ln 12[$

3. Tracé de $(\mathcal{C})$. (voir figure)

4. a. $A_k = \int_3^k (x - 2 - f(x))dx$, (car (e) est au dessous de (Δ_1) sur $[0, k]$).

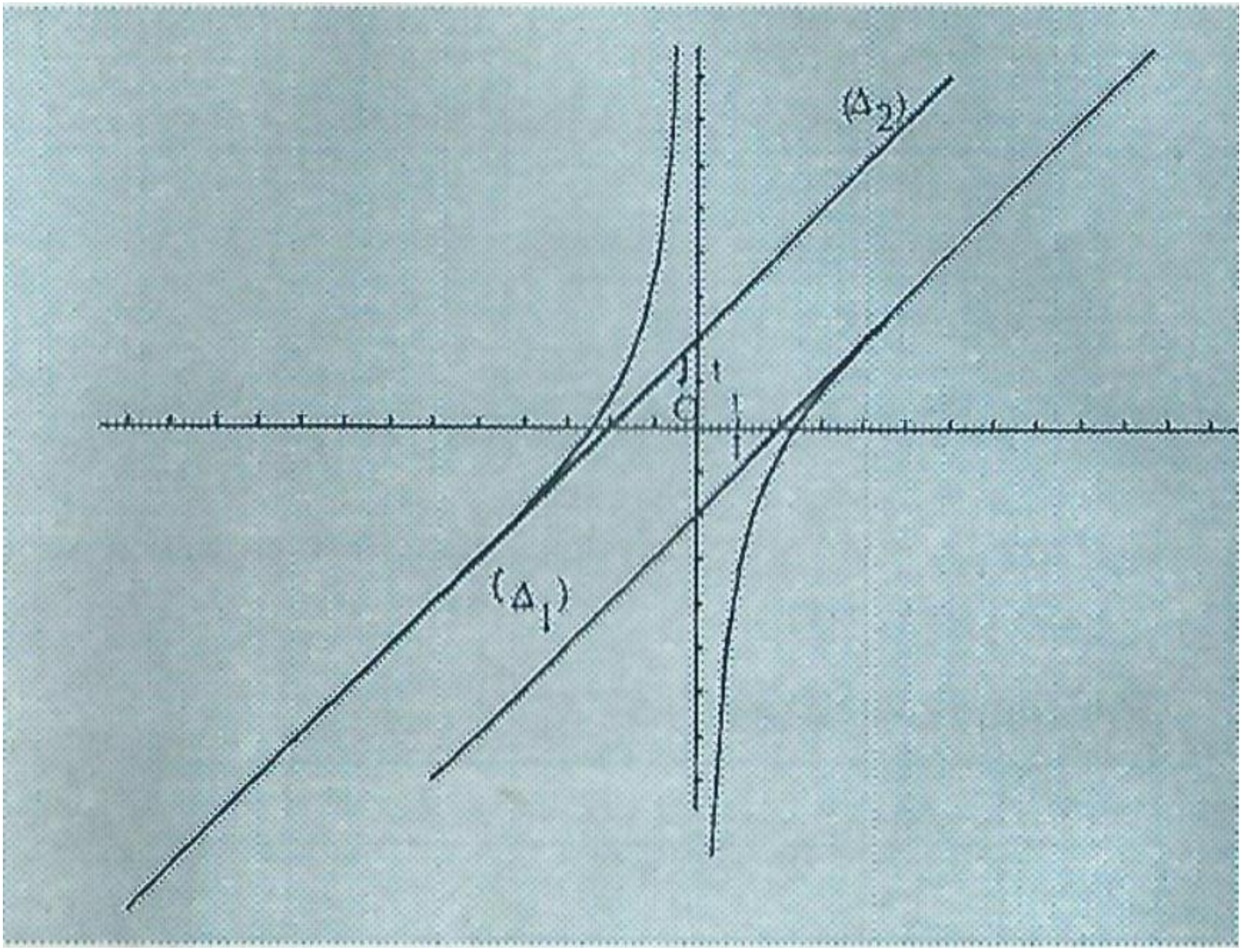
$$= \int_3^k \left(-4 + \frac{4e^x}{e^x - 1}\right) dx = 4[\ln(e^x - 1)]_3^k + (-4)[x]_3^k = 4\ln\left(\frac{e^k - 1}{e^3 - 1}\right) + 4(3 - k)$$

b. $A_k = 4\ln\left(\frac{e^k(1-e^k)}{e^3-1}\right) + 4(3 - k)$.

$$A_k = 4k + 4\ln\left(\frac{1 - e^k}{e^3 - 1}\right) + 12 - 4k = 4\ln\left(\frac{1 - e^{-k}}{e^3 - 1}\right) + 12$$

$\lim_{k\to+\infty} A_k = 12 - 4\ln(e^3 - 1)$

Tracé de $(\mathcal{C})$.



CORRECTION SESSION NORMALE 1994 SERIE D

EXERCICE 1

1. a. Soit Ω l'univers de l'expérience. Ω est l'ensemble des parties à 3 éléments dans un ensemble à 9 éléments. Car cela revient à choisir 3 cases parmi 9 et à les marquer d'un trèfle. Il y a donc C_9^3 cas possibles. On a $C_9^3 = 84$.

Soit G l'événement "le joueur achète un ticket gagnant". G est aussi l'événement "les trois trèfles sont alignés ". G est réalisé si les trois trèfles sont soit sur une des trois lignes soit sur une des trois colonnes soit sur une des deux diagonales. Il y a donc 8 cas favorables à la réalisation de G. La probabilité p sur $\mathrm{p}(\Omega)$ est telle que la probabilité d'un événement élémentaire est $\frac{1}{\mathrm{card}(\Omega)}$.

On a donc $p(G) = \frac{8}{84} = \frac{2}{21}$.

b. Soit A_1 l'événement "la case A_1 contient un trèfle".

La probabilité cherchée est : $p(G/A_1) = \frac{p(G \cap A_1)}{p(A_1)} = \frac{\mathrm{card}(G \cap A_1)}{\mathrm{card}(A_1)}$.

Puisque la case A_1 contient un trèfle, les trois trèfles sont alignés dans les seuls cas où ils sont soit sur la première ligne, soit sur la première colonne, soit sur la diagonale principale. Par suite card $(G \cap A_1) = 3$. Déterminons maintenant card (A_1). Comme la case A_1 contient un trèfle, il reste à choisir 2 cases parmi 8 .

Par suite card $(A_1) = C_8^2 = 28$. D'où $p(G/A_1) = \frac{3}{28}$.

c. **1^{ere} méthode**

$\overline{\mathrm{A}}_1$ est l'événement "la case A_1 ne contient pas de trèfles".

La probabilité cherchée est $p(G/\bar{A}_1)$. D'où : $p(G/\bar{A}_1) = \frac{p(G \cap \bar{A}_1)}{p(\bar{A}_1)} = \frac{\mathrm{card}(G \cap \bar{A}_1)}{\mathrm{card}(\bar{A}_1)}$
car il y a équiprobabilité.

Déterminons card $(G \cap \bar{A}_1)$. La case A_1 ne contenant pas de trèfles, les trois cas d'alignement du b. sont à écarter. Il reste donc 5 possibilités d'après 1. a.

Par suite card $(G \cap \bar{A}_1) = 5$.

$\mathrm{card}(\overline{\mathrm{A}}_1) = \mathrm{card}(\Omega) - \mathrm{card}(\mathrm{A}_1) = 84 - 28 = 56$. Par suite $\mathrm{p}(\mathrm{G}/\overline{\mathrm{A}}_1) = \frac{5}{56}$

2^e méthode

Comme la case A_1 ne contient pas de trèfles, il reste à choisir 3 cases parmi 8 et à les marquer d'un trèfle soit C_8^3 choix possibles. On a : $C_8^3 = 56$.

La case A_1 ne contient pas de trèfles, les cas favorables du b. sont donc à écarter ; il reste donc 5 cas favorables. On a donc $p(G/\bar{A}_1) = \frac{5}{56}$.

2. a. L'événement "le joueur achète un ticket perdant" est $\overline{\mathrm{G}}$.

On a : $p(\overline{\mathrm{G}}) = \frac{19}{21}$ $(\text{car}\, p(G) + p(\overline{\mathrm{G}}) = 1.)$ d'après 1. a. Comme le joueur achète ses n tickets dans des conditions indépendantes, la probabilité pour qu'il perde ses n tickets est $\left(\frac{19}{21}\right)^{\mathrm{n}}$. L'événement "le joueur a au moins un ticket gagnant sur les n tickets achetés" est l'événement contraire de l'vévénement "le joueur achète n tickets perdants".

D'où : $\mathrm{p_n} = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^{n}$

b. $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^{n} \geq 0{,}9 \Leftrightarrow \left(\frac{19}{21}\right)^{n} \leq 0{,}1$$

$$\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{19}{21}\right) \leq \ln(0{,}1) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{19}{21}\right)}; \text{car}\, \frac{19}{21} \in \left]0;1\right[$$

A l'aide de la calculatrice on obtient $\mathrm{n} \geq 23{,}0066$: n étant un entier, on a : $\mathrm{n} \geq 24$.

EXERCICE 2

1. Première méthode

On pose : $z = x + i\,y$ l'affixe de M.

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$

(Γ) est donc le cercle de centre $\mathrm{A}(1;-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Deuxième méthode

$\forall \mathrm{z} \in \mathbb{C}, (1-\mathrm{i})\mathrm{z} + 2\mathrm{i} = (1-\mathrm{i})\left(\mathrm{z} + \frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)$; or $\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{|1-\mathrm{i}|^2} = -1 + \mathrm{i}$

D'où : $\forall \mathrm{z} \in \mathbb{C}, (1-\mathrm{i})\mathrm{z} + 2\mathrm{i} = (1-\mathrm{i})(\mathrm{z} + (-1+\mathrm{i}))$

Soit M un point du plan d'affixe z.

$\mathrm{M} \in (\Gamma) \Leftrightarrow |(1-\mathrm{i})(\mathrm{z} + (-1+\mathrm{i}))| = 2 (\text{car}\, 2 = (1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}))$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow |1-i||z + (-1+i)| = 2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{2}|z + (-1+i)| = 2 \\
&\Leftrightarrow |z - (1-i)| = \sqrt{2} \\
&\Leftrightarrow MA = \sqrt{2} \text{ où } A \text{ est le point d'affixe } 1 - i.
\end{aligned}$$

(Γ) est le cercle de centre $\dot{A}$ et de rayon $\sqrt{2}$.

2. La transformation complexe associée à F est :

$$\begin{aligned}
f &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\
&\ \mathrm{z} \mapsto (1-\mathrm{i})\mathrm{z} + 2\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Comme f est de la forme $\mathrm{z} \mapsto \mathrm{az} + \mathrm{b}$ avec $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, alors F est la similitude directe de rapport $|1-i|$, de centre Ω_1 d'affixe ω_1 et d'angle θ tel que $\theta = \mathrm{ARG}(1-i)$.

On a : $|1-i| = \sqrt{2}, \omega_1 = \frac{2i}{1-(1-i)} = 2$ et $\mathrm{ARG}(1-i) = -\frac{\pi}{4}$.

F est donc la similitude directe de centre $\Omega_1(2;0)$, d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

3. $1^{\text{ère}}$ **méthode**

$\mathrm{F}(\odot)$ est le cercle de centre $\mathrm{F}(\Omega)$ èt de rayon $1\mathrm{x}\sqrt{2}$ car la similitude transforme un cercle en un cercle. $F(\text{ቲ})$ est donc le cercle de centre le point de couple coordonnées $(1;-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$. On a : $F(\Gamma) = (\Gamma)$.

$2^{\text{ème}}$ **méthode**

on a : $z' = (1-i)z + 2i$, d' où : $z = \frac{(1+i)(z'-2i)}{2}$

Soit M un point du plan d'affixe z.

$$
\begin{aligned}
M \in (\text{叉}) &\Leftrightarrow |z-(2-i)| = 1 \\
&\Leftrightarrow |(1+i)z' - 2| = 1 \\
&\Leftrightarrow |(1+i)(z'-(1-i))| = 2 (\operatorname{car} 2 = (1-i)(1+i)) \\
&\Leftrightarrow |1+i||z'-(1-i)| = 2 \Leftrightarrow |z'-(1-i)| = \sqrt{2} \\
&\Leftrightarrow AM' = \sqrt{2} \\
&\Leftrightarrow M' \in (\Gamma).
\end{aligned}
$$

Par suite $(\Gamma) = F(e)$.

PROBLEME
PARTIE A

1. a. $\mathrm{D_g} = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0;+\infty[$.

b. Calcul de la limite de $\boldsymbol{g}$ en $-\infty$

$\forall x < 0$, $g(x) = 1 + x(2ln(-x)+1)$; $\lim_{x\to-\infty} \ln(-x) = +\infty$

donc $\lim_{x\to-\infty}(2\ln(-x)+1) = +\infty$ d'où : $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

Calcul de la limite de g en $+\infty$

$\forall x > 0$, $g(x) = 1 + x(2ln\, x + 1)$

$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(2\ln(x)+1) = +\infty$ d'où $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

Calcul de la limite de g en 0

$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x = 0$ d'où $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x) = 1$; $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} x\ln(-x) = 0$ d'où $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} g(x) = 1$

$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x) = 1$ et $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} g(x) = 1$

Conclusion : $\lim_{x\to0} g(x) = 1$

2. a. La fonction $\mathrm{h}: \mathrm{x} \mapsto |\mathrm{x}|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $h(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}^*$, alors g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = 2\ln|x| + 1 + x\left(\frac{2}{x}\right)\left(\text{Car}\, \forall x \in \mathbb{R}^*, \left(\ln(|x|)' = \frac{1}{x}\right)\right.$

$= 2\ln|x| + 3$

b. $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow ln\,|x| = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow |x| = e^{-3/2}$
$\Leftrightarrow\; x = e^{-3/2}$ ou $x = -e^{-3/2}$

$-\mathrm{e}^{-3/2}$ et $\mathrm{e}^{-3/2}$ sont des éléments de Dg.

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln|x| > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow |x| > e^{-3/2}$

car la fonction exponentielle est strictement croissante.

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -\mathrm{e}^{-3/2}[\cup]\mathrm{e}^{-3/2}; +\infty[.$

g est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty; -\mathrm{e}^{-3/2}[$ et $]\mathrm{e}^{-3/2}; +\infty[$

et strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\mathrm{e}^{-3/2}; 0[$ et $]0; \mathrm{e}^{-3/2}[$.

Tableau de variations de g

x	$-\infty$	$-e^{-3/2}$		0		$e^{-3/2}$	$+\infty$
g'(x)	+	0	−	‖	−	0	+
g(x)	$-\infty$ ↗	$1+2e^{-3/2}$	↘ 1	‖	1 ↘	$1-2e^{-3/2}$	↗ $+\infty$

3. a. $g(-1) = 1 + (-1)(2\ln(|-1|) + 1) = 0.$
   b. g est continue et strictement croissante sur I, d'après 2 . b. $g(\mathrm{I}) =]-\infty; 1 + 2\mathrm{e}^{-3/2}]$

c. g étant continue et strictement croissante sur I, sa restriction h à I l'est également; h est donc une bijection de I sur $\mathrm{h(I)}, \mathrm{h(I)} = \mathrm{J}$.

d. D'après son tableau de variations, g est strictement décroissante sur $]0; \mathrm{e}^{-3/2}[$ et strictement croissante sur $]\mathrm{e}^{-3/2}; +\infty[$. g atteint donc en $\mathrm{e}^{-3/2}$ son minimun sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui est $1 - 2e^{-3/2}$. On a : $1 - 2e^{-3/2} \approx 0{,}553$, d'où : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$. L'équation proposée n'admet pas de solution dans $]0; +\infty[$. g étant strictement décroissante sur $]-\mathrm{e}^{-3/2}; 0[$ et puisque $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$,

alors : $\forall \mathrm{x} \in]-\mathrm{e}^{-3/2}; 0[, \mathrm{g(x)} > 1$ donc l'équation : $\mathrm{x} \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]-\mathrm{e}^{-3/2}; 0[$.

D'après 3. c., l'équation : $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une seule solution dans I. Comme $\mathrm{g}(-1) = 0$ d'après 3 . a., cette solution est donc -1 .

Conclusion : l'ensemble solution de l'équation proposée est $\{-1\}$.

4. D'après la question 3. d.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[; g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$.

PARTIE B

1. $f(x) = \begin{cases} x(x\ln x + 1) & \text{si } x > 0 \\ x(x\ln(-x) + 1) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Continuité de f en 0

On a vu (partie A 1. b.) que $\lim_{x\to 0} x\ln|x| = 0$. D'où $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

f est donc continue en 0 .

2. a. $D_f = \mathbb{R}$.

Limite en $+\infty$ et limite en $-\infty$ de f

D'après partie A 1. b, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

b. Étude de la dérivabilité en 0 .

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x\ln x + 1$

$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} (x\ln x + 1) = 1$, par suite $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$

donc f est dérivable à droite en 0 .

$$\forall x < 0, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x\ln(-x) + 1; \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} (x\ln(-x) + 1) = 1$$

Par suite $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$

f est donc dérivable à gauche en 0 et par suite dérivable en 0 (car la dérivée à droite est égale à la dérivée à gauche).

La fonction $\mathrm{h}: \mathrm{x} \mapsto |\mathrm{x}|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; la fonction In est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ Comme $h(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}_+^*$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$; f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

c. $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = x\ln|x| + 1 + x\left(\ln|x| + xx\frac{1}{x}\right)$

$= x\ln|x| + 1 + x\ln|x| + x$
$= 1 + x(2\ln|x| + 1) = g(x)$

D'après Partie A 4., f est strictement croissante sur $]-1; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$.

Tableau de variations de f

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
f(x)	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

3. a. Une équation de la tangente (D) à (C) en 0 est de la forme $y = xf'(0) + f(0)$.

Or $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ d'après partie B 2. a.

Une équation de (D) est donc $y = x$.
b. $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = x \Leftrightarrow x(xln|x| + 1) = \mathrm{x}$ (car x est non nul)

$\Leftrightarrow x\ln|x| + 1 = 1$
$\Leftrightarrow x\ln|x| = 0$
$\Leftrightarrow \ln|x| = 0($ car $x \neq 0)$
$\Leftrightarrow |x| = 1$
$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$

La droite (D) coupe (C) aux points E et F de coordonnées respectives $(-1;-1)$ et $(1;1)$.

c. Étudions le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) - x = x(x\ln|x| + 1) - x = x^2\ln|x|$. Le signe de $x^2\ln|x|$ est celui de $\ln|x|$ car x^2 est strictement positif sur $\mathbb{R}^*$,

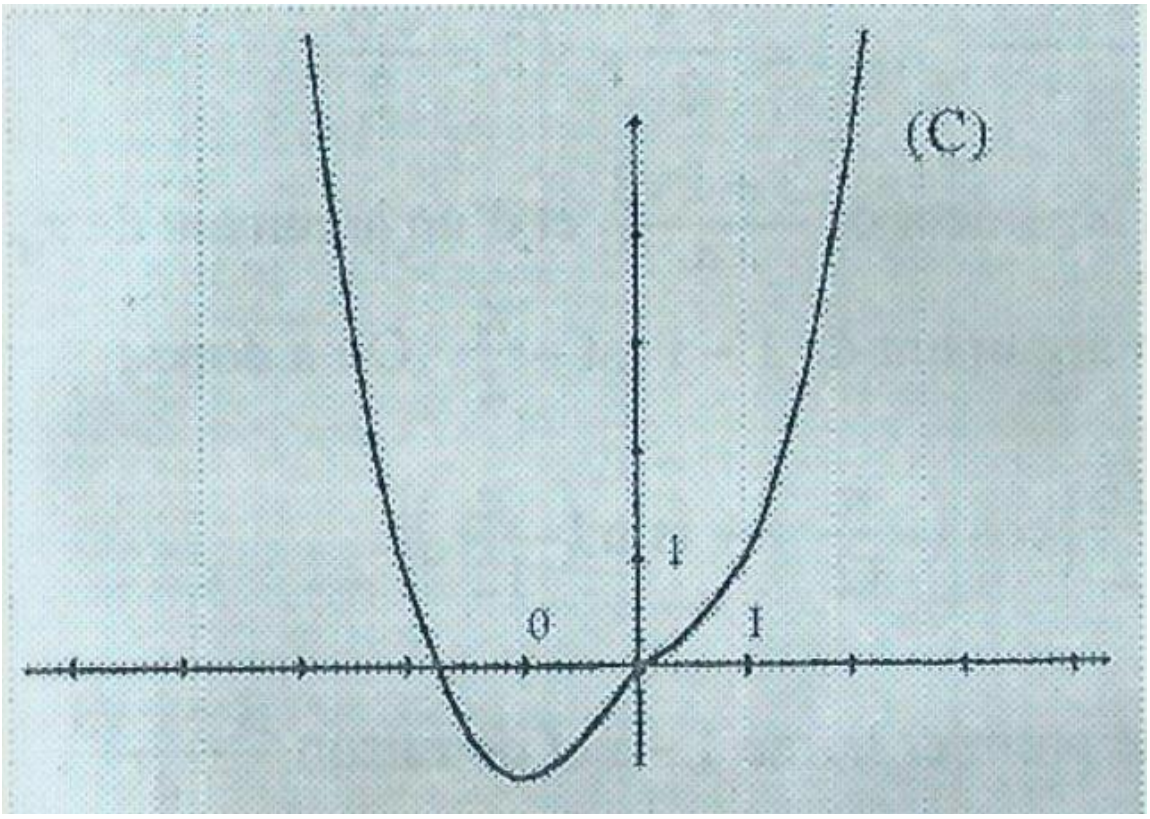
$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ln|x| > 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 1; \ln|x| < 0 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ (C) est au-dessus de (D) sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$;

(C) est au-dessous de (D) sur $]-1;1[$.
4. f est continue et strictement décroissante sur] - 1,8; $-1,7$ [d'après le tableau varia tions de f. De plus on a : $\mathrm{f}(-1,8) \approx 0,1$ et $\mathrm{f}(-1,7) \approx -0,166$.

On conclut que (C) coupe (OI) en un point K dont l'abscisse est élément de $]-1,8;-1,7[$.

5.

Tracé de (C)



PARTIE C

1. Posons $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x^2$, -

d'où : $u'(x) = \frac{1}{x'}$ et $v(x) = \frac{x^3}{3}$.

Posons $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} x^2 \ln x dx$, on a :

$$I(\alpha) = \frac{1}{3}\Big| \; x^3 \ln x \Big]_{\alpha}^{1} - \frac{1}{3}\Big|_{\alpha}^{1} x^2 dx$$

I $(\alpha) = \frac{1}{3}\left[x^3 \ln x |_{\alpha}^{1} - \frac{1}{9} |x^3|_{\alpha}^{1} = \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{1}{3}\alpha^3 \ln \alpha - \frac{1}{9}\right.$

2. a. $A(\alpha) = \int^{1} (x - f(x))dx$ car (C) est au-dessus de (D) sur $[\alpha; 1]$;

(d'après partie B. 3. a.)

$A(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} (x - f(x))dx = -I(\alpha) = -\frac{1}{9}\alpha^3 + \frac{1}{9}\alpha^3 \ln \alpha + \frac{1}{9} (d'$ après partic C. 1.)

b. $\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \alpha^3 = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \alpha^3 \ln \alpha = 0$ D'où $\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} A(\alpha) = \frac{1}{9}$.

CORRECTION SESSION DE REMPLACEMENT 1993 SERIE D

EXERCICE 1

1. $z_0 = u_0 + iv_0; |z_0|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$, d'où $|z_0| = 1$

$|z_{n+1}|^2 = u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2$

$= \dfrac{1}{3}u_n^2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}u_n v_n + v_n^2 + u_n^2 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}u_n v_n + \dfrac{1}{3}v_n^2$

$= \dfrac{4}{3}(u_n^2 + v_n^2)$

$= \frac{4}{3}|z_n|^2.$

donc $|z_{n+1}| = \frac{2\sqrt{3}}{3}|z_n|$.

La suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $|z_0|$ et de raison $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ On a :
$\forall n \in N, |z_n| = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n$

2. a. $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = u_{n+1} + \mathrm{i}v_{n+1}$

$z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}u_n - v_n\right) + i\left(u_n + \frac{\sqrt{3}}{2}v_n\right)$

$z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\right)(u_n + iv_n)$

$z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\right)z_n.$

b. $\left|\frac{\sqrt{3}}{3} + \mathrm{i}\right| = \frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3} + \mathrm{i} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right);\ \ \mathrm{ARG}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \mathrm{i}\right) = \frac{\pi}{3}$

c. Un argument de $\mathbf{z}_{n+1}$ est la somme d'un argument de $\frac{\sqrt{3}}{3} + \mathrm{i}$ et d'un argument de $\mathbf{z}_n$. Un argument de z_{n+1} est donc $\frac{\pi}{3} + \theta_n$.
d. $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ et de raison $\frac{\pi}{3}$. Par suite pour tout n de $\mathrm{N},\ \theta_n = nr + \theta_0 = \frac{\pi}{3}(n+1)$.

3. On a : d'après 2.

$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n\left(cos\left[(n+1)\frac{\pi}{3}\right] + isin\left[(n+1)\frac{\pi}{3}\right]\right) = u_n + iv_n$. *Par* identification des parties réelles et imaginaires, on a :

$u_n = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n \cos\left[(n+1)\frac{\pi}{3}\right]$

$v_n = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n \sin\left[(n+1)\frac{\pi}{3}\right].$

EXERCICE 2

1. Soit A l'événement "le feu A est vert" et B l'événement "le feu B est vert" On a $p(A) = \frac{3}{4}, p(\bar{A}) = \frac{1}{4}$ et $p(B) = p(\bar{B}) = \frac{1}{2}$.

a. L'événement C "l'automobiliste rencontre deux feux verts" est $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$. Commę B est indépendant de A par hypothèse, on a: $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = \frac{3}{8}$.

b. L'événement "l'automobiliste rencontre au moins un feu vert" est $A \cup B$.

On a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

2. a. L'univers image de X est $\{0; 1; 2; 3; 4\}$. Pour Chaque passage, il y a deux éventualités exclusives : le feu est vert ou non.

Ces 4 passages étant supposés indépendants, on a un schéma de Bernouilli. Pour k élément de $\{0; 1; 2; 3; 4\}$,

on a : $\mathrm{p(X = k)} = \mathrm{C}_4^{\mathrm{k}} \left(\frac{3}{4}\right)^{\mathrm{k}} \left(\frac{1}{4}\right)^{4-\mathrm{k}}$

k	0	1	2	3	4
$\mathrm{P(X = k)}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{81}{256}$

b. $\mathrm{E(X)} = 0 \times \frac{1}{256} + 1 \times \frac{12}{256} + 2 \times \frac{54}{256} + 3 \times \frac{108}{256} + 4 \times \frac{81}{256} = 3$

La moyenne de X est 3. L'automobiliste rencontre donc en moyenne 3 fois sur 4 le feu vert. Cela est prévisible car la probabilité de A est $\frac{3}{4}$.

PROBLEME

1. $\mathrm{D_f} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e^x} - 1) - \mathrm{e^x}(\mathrm{e^x} - 3)}{(\mathrm{e^x} - 1)^2} = \frac{2\mathrm{e^x}}{(\mathrm{e^x} - 1)^2}$$

La fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

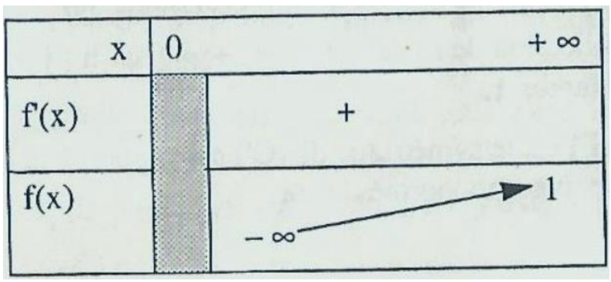
Limite de f en $+\infty$ et en 0

Posons : $\mathrm{u} = \mathrm{e}^x$; on a : $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{u} = +\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{u-3}{u-1}\right) = 1$

$lim_{x\to0}(e^x - 3) = -2, lim_{x\to0}(e^x - 1) = 0$ ***et*** $\forall x \in]0; +\infty[, e^x - 1 > 0.$

d'où $lim_{x\to0} f(x) = -\infty.$

Tableau de variations de f :



2.

a. $\forall x \in D_f, f(x) = 0 \Leftrightarrow x = ln\,3$

Le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses est le point de couple de

coordonnées $(\ln 3; 0)$.

b. Une équation de (T) est : $y - f(\ln 3) = f'(\ln 3)(x - \ln 3)$.

$$f'(\ln 3) = \frac{2e^{\ln 3}}{(e^{\ln 3} - 1)^2} = \frac{2 \times 3}{(3-1)^2} = \frac{3}{2}$$

Une équation de (T) est donc : $y = \frac{3}{2}(x - ln\,3) \qquad (car\; f(ln\,3) = 0)$

c. La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe (C') au voisinage de l'infini et la droite d'équation $\mathrm{x} = 0$ est asymptote à la courbe (C') d'après 1 .

Tracé de la courbe (C') (voir page 69).

3. $\forall x \in D_f, f(0+x) + f(0-x) = \frac{e^x-3}{e^x-1} + \frac{e^{-x}-3}{e^{-x}-1} = \frac{e^x-3}{e^x-1} + \left(\frac{e^{-x}-3}{e^{-x}-1}\right)\frac{e^x}{e^x}$

$$= \frac{e^x - 3}{e^x - 1} + \frac{1 - 3e^x}{1 - e^x} = \frac{e^x - 3 + 3e^x - 1}{e^x - 1}$$
$$= 4 = 2 \times 2$$

Le point $\mathrm{A}(0; 2)$ est donc centre de symétrie de (C). $(C) = (C') \cup S_A(C')$. 4. Tracé de (C) (voir page 69)

5.

a. $\forall x \in D_f, f(x) = \frac{e^x-3}{\mathrm{e}^x-1} = \frac{(3\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x)-3}{\mathrm{e}^x-1} = \frac{3(\mathrm{e}^x-1)-2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1} = 3 - \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}$

b. L'aire D cherchée en unité d'aires est $D = \int_{\ln 2}^{\ln 9} |f(x)|dx$. Comme f est négative sur $[\ln 2; \ln 3]$ et positive sur $[\ln 3; \ln 9]$.

$$D = \int_{\ln 2}^{\ln 3} (-f(x))dx + \int_{\ln 3}^{\ln 9} [f(x)dx$$
$$D = [-3x + 2\ln(e^x - 1)]_{\ln 2}^{\ln 3} + \left(3x - 2\ln(e^x - 1)\right)_{\ln 3}^{\ln 9}$$

$D = \ln 2$

6.

a. h est continue strictement croissante sur $]0; +\infty[$(d'après 1.). h est donc une bijection de l'intervalle $]0; +\infty[\mathrm{sur\,h}(]0; +\infty[). \mathrm{K} = \mathrm{h}(]0; +\infty[) =]-\infty; 1[$ d'après 1 .

b. (Γ) est le symétrique de (C') par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$ dans le repère orthonormé donné. c. Soit x un élément de l'intervalle $]-\infty; 1$ [et u un élément de l'ntervalle $]0; +\infty[$.

$h(u) = x \Leftrightarrow \dfrac{e^u - 3}{e^u - 1} = x$

$\Leftrightarrow e^u - 3 = x(e^u - 1)$

$\Leftrightarrow e^u(x - 1) = x - 3$

$\Leftrightarrow e^u = \frac{x-3}{x-1}$, *car* x *est distinct de 1 .*

$\Leftrightarrow u = ln\left(\frac{x-3}{x-1}\right)$, *car pour tout* $x \in]-\infty; 1[$ *, on a :* $\frac{x-3}{x-1} > 0$

$g:]-\infty; 1[\to]0; +\infty[$

$x \mapsto \ln\left(\frac{x-3}{x-1}\right)$
2.

d. Cette portion du plan est le symétrique de celle de 5 . b. par la symétrie ortogonale d'axe (Δ). *Ces* deux surfaces ont la même aire car la symétrie orthogonale étant une isométrie conserve les aires.

7.

a. $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) + 1 = \frac{e^x-3+e^x-1}{e^x-1} = \frac{2e^x-4}{e^x-1}$

Posons $u = e^x$, l'inéquation s'écrit : $\frac{2u-4}{u-1} \geq 0$

ce qui équivaut à u élément de $]-\infty; 1[\cup [2; +\infty[$

D'où : $f(x) \geq -1 \Leftrightarrow e^x < 1$ ou $e^x \geq 2$

$\Leftrightarrow x < 0$ ou $x \geq \ln 2$

l'ensemble solution de l'inéquation proposée est $]-\infty; 0[\cup [\ln 2; +\infty[$

b. L'ensemble de validité de cette équation est $\mathrm{D_f}$.

Pour m strictement négatif, $[f(x)]^2 \geq 0$, alors il n'y a pas de solution.

Pour les autres valeurs de m nous donnons une solution graphique et une solution géométrique.

A Solution graphique

Premier cas : $\mathrm{m} > 0$

$\forall x \in D_f, \left([f(x)]^2 = m \Leftrightarrow f(x) \in \{-\sqrt{m}, \sqrt{m}\}\right)$

- Résolvons l'équation : $\mathrm{f(x)} = \sqrt{\mathrm{m}}$

Soit (D_m) la droite d'équation $y = \sqrt{\mathrm{m}}$

Toute solution de cette équation est l'abscisse du point d'intersection, lorsqu'il existe, des droites (D_m) et (C).

$0 < \sqrt{\mathrm{m}} < 1$ équivaut à $0 < \mathrm{m} < 1$. $(\mathrm{D_m})$ rencontre (*C*) en un seul point. Il y a donc une seule solution.

$1 \leq \sqrt{m} \leq 3$ équivaut à $1 \leq m \leq 9, (D_m)$ ne rencontre pas (*C*), il n'y a donc pas de solution.
$3 < \sqrt{\mathrm{m}}$ équivaut à $9 < \mathrm{m}, (\mathrm{D_m})$ rencontre (*C*) en un seul point, il a donc une seule solution.

- Résolvons l'équation : $\mathrm{f(x)} = -\sqrt{\mathrm{m}}$

Soit (Δ_m) la droite d'équation $\mathrm{y} = -\sqrt{\mathrm{m}}$

Comme $-\sqrt{m}$ est strictement négatif, alors (Δ_m) rencontre (C) en un seul point il y a une seule solution dans ce cas.

Deuxième cas : $m = 0$

(C) rencontre l'axe des abscisses en un seul point. Il y a donc une seule solution dans ce cas.

B Solution algébrique

Premier cas $\mathrm{m} > 0$

Appelons (E) l'équation proposée

(E) $\Leftrightarrow \left(\frac{\mathrm{e}^x-3}{\mathrm{e}^x-1} = \sqrt{\mathrm{m}}\right.$ ou $\left.\frac{\mathrm{e}^x-3}{\mathrm{e}^x-1} = -\sqrt{\mathrm{m}}\right)$

$$\Leftrightarrow \left((1-\sqrt{m})e^x = 3-\sqrt{m}(E_1) \text{ ou } (1+\sqrt{m})e^x = 3+\sqrt{m}(E_2)\right)$$

Résolvons $(\mathbf{E}_1)$

Pour $\mathrm{m} = 1, (\mathrm{E}_1)$ n'a pas de solution

pour m distinct de 1 :

$(E_1) \Leftrightarrow (1-\sqrt{m})e^x = 3-\sqrt{m}$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{3-m}{1-\sqrt{m}}$

Le signe de $\frac{3-\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}$ est déduit du tableau ci-contre :

$\sqrt{\mathrm{m}}$	0		1		3		$+\infty$
m	0		1		9		
$\frac{3-\sqrt{\mathrm{m}}}{1-\sqrt{\mathrm{m}}}$		+	‖	-	0	+	

$0 < \mathrm{m} < 1, (\mathrm{E}_1)$ a une seule solution.

$1 \leq m \leq 9, (E_1)$ n'a pas de solution.

$9 < \mathrm{m}, (\mathrm{E}_1)$ a une seule solution.

Résolvons $(\mathbf{E}_2)$

$$(E_2) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \frac{3+\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}, \text{car } 1+\sqrt{\mathrm{m}} \neq 0$$

Comme $\frac{3+\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} > 0$ alors (E_2) a une seule solution.

Deuxième cas $\mathrm{m} = 0$

$\forall x \in D_{\mathrm{f}}, (\mathrm{f(x)} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \ln 3)$. Il y a une seule solution qui est $\ln 3$

Conclusion

$\mathrm{m} < 0$, zéro solution

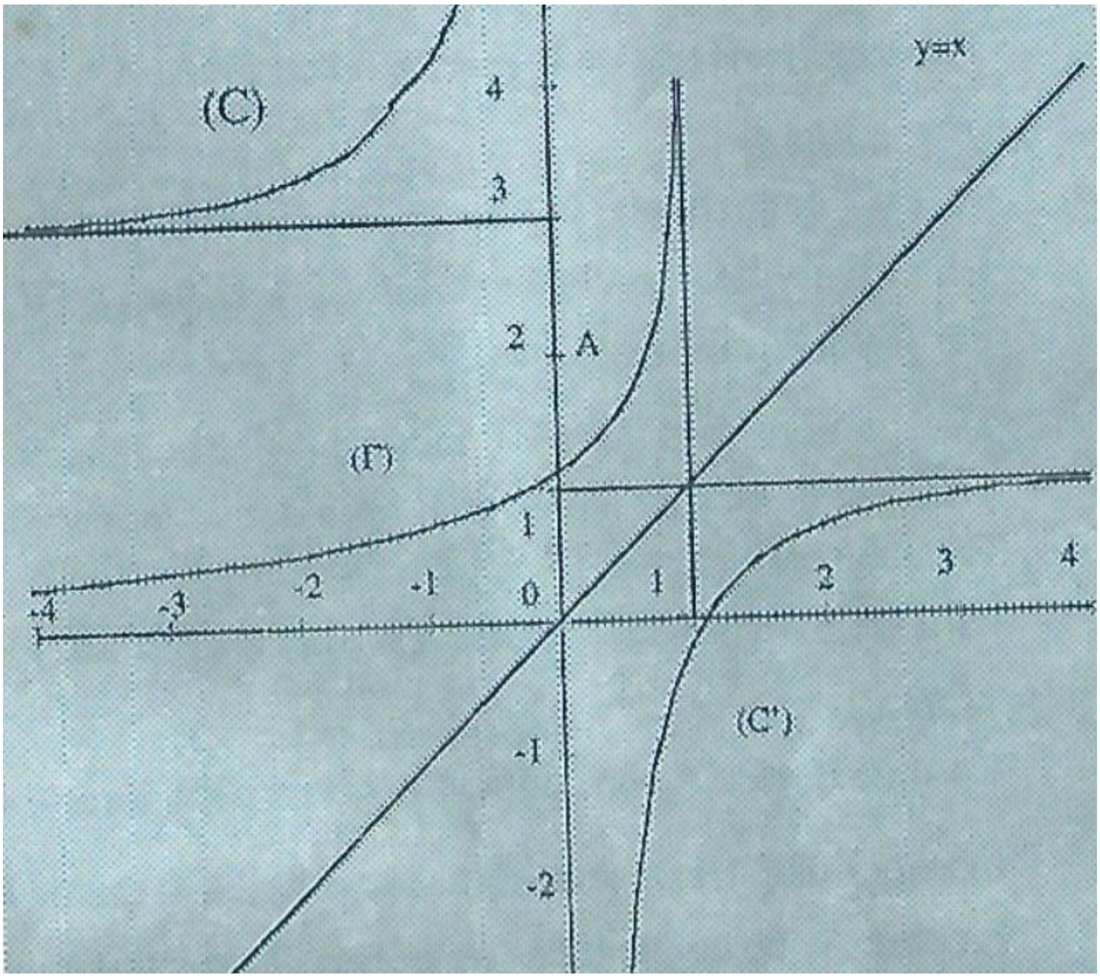
$\mathrm{m} = 0$, une seule solution

$0 < \mathrm{m} < 1$, exactement deux solutions

$1 \leq \mathrm{m} \leq 9$, une seule solution

$9 < \mathrm{m}$, exactement deux solutions.

Courbes (C'), (Γ), (C).



CORRECTION SESSION NORMALE 1993 SERIE D

EXERCICE 1

L'univers Ω de l'expérience est l'ensemble des 50 billets numérotés de 1 à 50 . On a card $(\Omega) = 50$. La probabilité p définie sur $p(\Omega)$ est telle que pour tout ω de Ω,
$p(\omega) = \frac{1}{\text{card }(\Omega)} = \frac{1}{50}$.

1. a. Il y a 15 billets qui sont dans Ω dont le numéro se termine par 3,6 , ou 9 . Ces billets portent les numéros : $3,6,9,13,16,19,23,26,29,33,36,39,43,46,49$. Soités.

D'où : $card(A) = 15$ et donc $(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$.

b. Il y a 10 billets qui sont dans Ω dont le numéro se termine par 0 ou 5 . Ces billets portent les numéros : $5,10,15,20,25,30,35,40,45,50$. Soit B l'événement "le client gagne 2000F "; les éléments de B sont ceux qui portent les numéros de la liste précédente. On a : $\text{card(B)} = 10$.

$$p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

c. Soit C l'événement " le client ne gagne rien".

Il y a 25 billets qui ne gagnent rien, d'où $p(C) = \frac{1}{2}$

On pourra aussi remarquer que : $p(C) = 1 - [p(A) + p(B)]$

$X(\Omega) = \{0; 1000; 2000\}$. Suggestions : pour aider à faire le calcul de l'espérance mathématique, nous donnons le tableau de la loi de probabilité.

$$(X = 1000) = A, (X = 2000) = B, (X = 0) = C$$

k	0	1000	2000
p(X = k)	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

D'où $E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1000 \times \frac{3}{10} + 2000 \times \frac{2}{10} = 700$

2. Il y a maintenant $50 - n$ billets en vente dont $10 - n$ terminés par 0 ou 5 .

15 billets terminés par 3, 6 ou 9 et les 25 billets qui ne gagnent rien.

a. Soit Ω_{n} l'ensemble des $50\ - n$ billets restants. $\text{X}_\text{n}(\Omega_\text{n}) = \{0; 1000; 2000\}$.

La loi de probabilité de X_n est donnée par le tableau ci-dessous :

k	0	1000	2000
p(X = k)	$\frac{25}{50-n}$	$\frac{15}{50-n}$	$\frac{10-n}{50-n}$

$$E(X_n) = 0 \times \left(\frac{25}{50-n}\right) + 1000 \times \left(\frac{15}{50-n}\right) + 2000 \times \left(\frac{10-n}{50-n}\right) = \frac{35000-2000n}{50-n}$$

b. Soit n un entier naturel élément de $]0;10]$.

$$\begin{aligned} E(X_n) \leq 500 &\Leftrightarrow \frac{35000-2000n}{50-n} \leq 500 \\ &\Leftrightarrow 35000-2000n \leq (50-n) \times 500 \text{car} (50-n) > 0 \\ &\Leftrightarrow 15n \geq 100; n \geq 6{,}6 \end{aligned}$$

Le nombre minimal de billets à retirer est 7

3. Il reste maintenant 43 billets en vente dont 3 terminés par 0 ou $5; 15$ terminés par 3, 6 ou 9 et 25 billets qui ne gagnent rien.

a. Soit D l'événement "le client gagne $4000\ \mathrm{F}$ avec ses 2 billets". Un tirage possible est une paire d'éléments de l'ensemble des 43 billets.

Il y a donc C_{43}^2 cas possibles. $C_{43}^2 = \frac{43 \times 42}{2} = 903$.

Un cas favorable à la réalisation de l'événement D est une paire d'éléments de l'ensemble des 3 billets terminés par 0 ou 5 .

Le nombre de cas favorables est C_3^2. On a : $C_3^2 = 3$.

D'où $p(D) = \frac{C_3^2}{C_{43}^2} = \frac{3}{903} = \frac{1}{301}$

b. Soit E l'événement "le client ne gagne rien avec ses 2 billets tirés".

Un cas favorable à la réalisation de E est une paire d'éléments de l'ensemble des 25 billets perdants.

Il y a donc C_{25}^2 cas favorables. $C_{25}^2 = \frac{25 \times 24}{2} = 300$.

D'où : $p(E) = \frac{C_{25}^2}{C_{43}^2} = \frac{300}{903} = \frac{100}{301}$.

EXERCICE 2

1. Cherchons un réel x tel que : $\frac{x^4}{8} - (1+i)x^3 + 6ix^2 + 8(1-i)x - 10 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow \left(\frac{x^4}{8} - x^3 + 8x - 10\right) + i(-x^3 + 6x^2 - 8x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\frac{x^4}{8} - x^3 + 8x - 10 = 0 \text{ et } -x^3 + 6x^2 - 8x = 0\right]$

$\Leftrightarrow [2)$

(1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left.\frac{x^4}{8} - x^3 + 8x - 10 = 0 \text{ et } x(x^2 - 6x + 8) = 0\right] \\ \qquad\qquad\qquad \text{ou} \\ \qquad \left[\frac{x^4}{8} - x^3 + 8x - 10 = 0 \text{ et } x = 0\right] (3) \\ \qquad \text{ou } \left.-10 = 0 \text{ et } x^2 - 6x + 8 = 0\right] \ (4) \end{array}\right.$

Puisque 0 n'est pas solution de $\frac{x^4}{8} - x^3 + 8x - 10 = 0$ alors (3) n'a pas de solution. Résolvons (4). Pour cela il faut résoudre : $x \in \mathbb{R}, x^2 - 6x + 8 = 0$ $\Delta' = 3^2 - 8 = 1, x_1 = 3 - 1 = 2$ et $x_2 = 3 + 1 = 4$

Examinons si 2 et 4 sont solutions de $\frac{x^4}{8} - x^3 + 8x - 10 = 0$. On a : $\frac{4^4}{8} - 4^3 + 8 \times 4 - 10 = 214; 214 \neq 0$ et $\frac{2^4}{8} - 2^3 + 8 \times 2 - 10 = 0$.

Seul 2 est solution de (4) donc $z_1 = 2$.

Cherchons maintenant un réel y tel que :

$$\frac{(iy)^4}{8} - (1+i)(iy)^3 + 6i(iy)^2 + 8(1-i)(iy) - 10 = 0$$

(5) $\Leftrightarrow \left[\frac{y^4}{8} - y^3 + 8y - 10 + i(y^3 - 6y^2 + 8y) = 0\right]$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{y^4}{8} - y^3 + 8y - 10 = 0 \text{ et } y^3 - 6y^2 + 8y = 0\right]$$

(6) est équivalent à (2), d'où $y = 2$; donc $z_2 = 2i$.
2. Factorisons $p(z)$ tel que $p(z) = \frac{z^4}{8} - (1+i)z^3 + 6iz^2 + 8(1-i)z - 10$

Cherchons alors trois complexes a, b et c tels que :

$\forall z \in \mathbb{C}, p(z) = (z-2)(z-2i)(az^2 + bz + c)$

$p(z) = az^4 + [b - a(2+2i)]z^3 + [c - b(2+2i) + 4ai]z^2 + [-c(2+2i) + 4ib]z + 4ic$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b - a(2+2i) = -(1+i) \\ c - b(2+2i) + 4ai = 6i \\ -c(2+2i) + 4ib = 8(1-i) \\ 4ic = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = -\frac{3}{4}(1+i) \\ c = \frac{5}{2}i \end{cases}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, p(z) = (z-2)(z-2i)\left[\frac{1}{8}z^2 \frac{3}{4}(1+i)z + \frac{5}{2}i\right]$$

$= \frac{1}{8}(z-2)(z-2i)[z^2 - 6(1+i)z + 20i]$

Résolvons : $z \in \mathbb{C}, z^2 - 6(1+i)z + 20i = 0$

$\Delta' = [-3(1+i)]^2 - 20i = -2i = (1-i)^2$

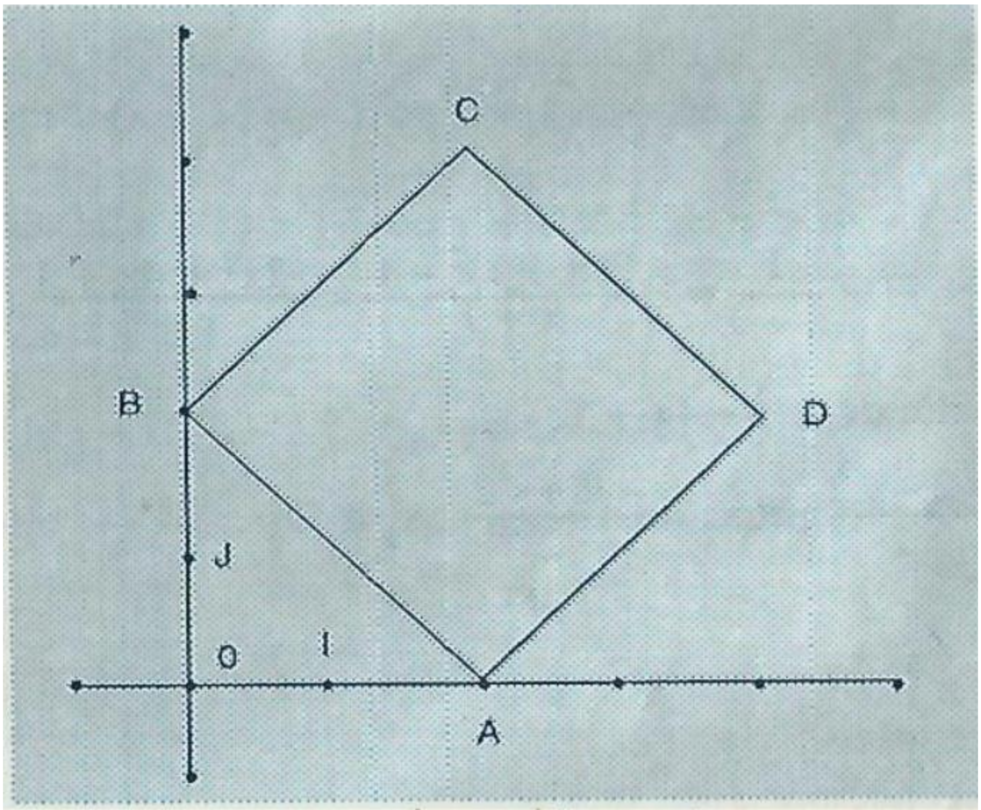
les solutions sont u et v telles que : $u = 3(1+i) + (1-i) = 4 + 2i$

et $v = 3(1+i) - (1-i) = 2 + 4i$

On a : $R_e(v) < R_e(u)$

d'où $z_3 = 2 + 4$ i et $z_4 = 4 + 2i; S_E = \{2; 2i; 2+4i; 4+2i\}$

3.



On a $\overrightarrow{AB}(-2;2), \overrightarrow{DC}(-2;2)$; d'où : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Comme A, B, C, D sont non alignés alors ABCD est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AC}(0;4), \overrightarrow{DB}(4;0); \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \times 4 + 4 \times 0 = 0$

ABCD est un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires. C'est donc un losange.
$\overrightarrow{AB}(-2;2), \overrightarrow{AD}(2;2), \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

$ABCD$ est un losange qui a un angle droit, c'est donc un carré.

4. Soit g la transformation complexe associée à S.

La transformation complexe g est de la forme $g(z) = az + b$.

$$S(A) = B \Leftrightarrow g(z_1) = z_2 \Leftrightarrow 2a + b = 2i$$
$$S(C) = D \Leftrightarrow g(z_3) = z_4 \Leftrightarrow a(2 + 4i) + b = 4 + 2i$$

$$\begin{cases} 2a + b & = 2i \\ a(2 + 4i) + b & = 4 + 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -i \\ b = 4i \end{cases}$$

Pour tout z de $C, g(z) = -iz + 4i$.

Le rapport de S est $|-i|$. Puisque $|-i| = 1$, S est un déplacement. Comme -i qui est le coefficient de z est différent de 1 alors S est une rotation. Son centre est son unique point invariant.

Pour tout z élément de $\mathbb{C}$,

$g(z) = z \Leftrightarrow -iz + 4i = z \Leftrightarrow 4i = (1 + i)z$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4i}{1+i} = \frac{4i(1-i)}{|1+i|^2} = 2 + 2i$$

Le centre de S est le point k de couples de coordonnées $(2;2)$ qui est le centre du carré ABCD.

L'angle de S a pour mesure principale $\mathrm{ARG}(-\mathrm{i})$. On a $\mathrm{ARG}(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2}$. S est donc la rotation de centre k et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

PROBLEME

PARTIE A

1. $\mathrm{D_g} =]-1;+\infty[$
$\forall x \in \mathrm{D_g},\ \mathrm{g}'(x) = 2(x+1) - \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)^2-1}{x+1} = \frac{2x^2+4x+1}{x+1}$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $2x^2 + 4x + 1$.

$\Delta' = 2^2 - 2 = 2; x_1 = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}; x_1 \notin \mathrm{D_g}$.

$\forall x \in \mathrm{D_g}$,

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_2$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]x_2;+\infty[$

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1;x_2[$

g est strictement croissante sur $]x_2;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-1;x_2[$.

2. De la question 1 ., on déduit que g admet un minimum en $\mathrm{x_2}$ qui est $\frac{1+\ln 2}{2}$.

Puisque $\frac{1+\ln 2}{2}$ est strictement positif, alors, pour tout x^2 de D_g, $g(x)$ est strictement positif.
a. $D_f =]-1;+\infty[$.
b. $\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}[1+\ln(x+1)] = -\infty$ et $\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{1}{x+1} = +\infty$, par suite $\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$

La droite d'équation $x = -1$ est asymptote à (C).
c. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right) = 0$ Posons $u = x+1$, d'où $\lim_{x\to+\infty} u = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{\ln u}{u}\right) = 0 \text{ d'où : } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Démontrons que la droite (D) est asymptote à (C).

$$\forall x \in D_f, f(x) - x = \frac{1}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

d'après ce qui précède, on a : $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = 0$

La droite (D) est donc asymptote à (C).

Étudions la position de (C) par rapport à (D).

Pour cela examinons le signe de $f(x) - x$ pour tout x de D_f.

On a : $f(x) - x = \frac{1+\ln(x+1)}{x+1}$

Comme $x+1$ est strictement positif sur D_f alors le signe de $f(x)-x$ est celui de $1+\ln(x+1)$

$\forall x \in \mathrm{D_f}$

$\mathrm{f(x)-x=0 \Leftrightarrow \ln(x+1)=-1 \Leftrightarrow x+1=\frac{1}{e} \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}-1.}$

$f(x)-x>0 \Leftrightarrow \ln(x+1)>-1 \Leftrightarrow x+1>\frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow x>\frac{1}{\mathrm{e}}-1.$

$f(x)-x<0 \Leftrightarrow -1<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1$

Sur l'intervalle $]-1;\frac{1}{\mathrm{e}}-1[, (C)$ est au-dessous de (D).

Sur l'intervalle $]\frac{1}{\mathrm{e}}-1;+\infty[, (\mathrm{C})$ est au-dessus de (D).

2. a. $\forall x \in \mathrm{D_f}$,

$f'(x)=1+\frac{\frac{1}{x+1}x(x+1)-(1+\ln(x+1))}{(x+1)^2}=1+\frac{1-1-\ln(1+x)}{(x+1)^2}$
$\quad=\frac{(x+1)^2-\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $g(x)$. D'après la partie A. 2., $g(x)$ est strictement positif sur D_f. Par suite f est strictement croissante sur D_f.

Tableau de variations de f

x	-1	$+\infty$
f'(x)		$+$
f(x)		$-\infty \nearrow +\infty$

b.

x	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{e}-1$
f(x)	1	$\frac{3}{2}-2\ln 2$	$\frac{1}{e}-1$

c. On a : $\mathrm{f}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1\right)<0<\mathrm{f}\left(-\frac{1}{2}\right)<\mathrm{f}(0).$

Comme f est continue et strictement croissante sur $]\frac{1}{\mathrm{e}}-1;-\frac{1}{2}[$ alors il existe un réel α appartenant à l'intervalle $]\frac{1}{\mathrm{e}}-1;-\frac{1}{2}[$ tels que $f(\alpha)=0.$

d. Soit $(x_A;y_A)$ les coordonnées du point A. Le coefficient directeur de (T) est $f'(x_A)$. Comme le coefficient directeur de (D) est 1 , alors (T) est parallèle à (D) si et seulement si $f'(x_A)=1.$

$f'(x_A) = 1 \Leftrightarrow \frac{g(x_A)}{(x_A+1)^2} = 1$

$\Leftrightarrow g(x_A) = (x_A + 1)^2$

$\Leftrightarrow (x_A + 1)^2 - \ln(x_A + 1) = (x_A + 1)^2$

$\Leftrightarrow \ln(x_A + 1) = 0 \Leftrightarrow x_A + 1 = 1 \Leftrightarrow x_A = 0$

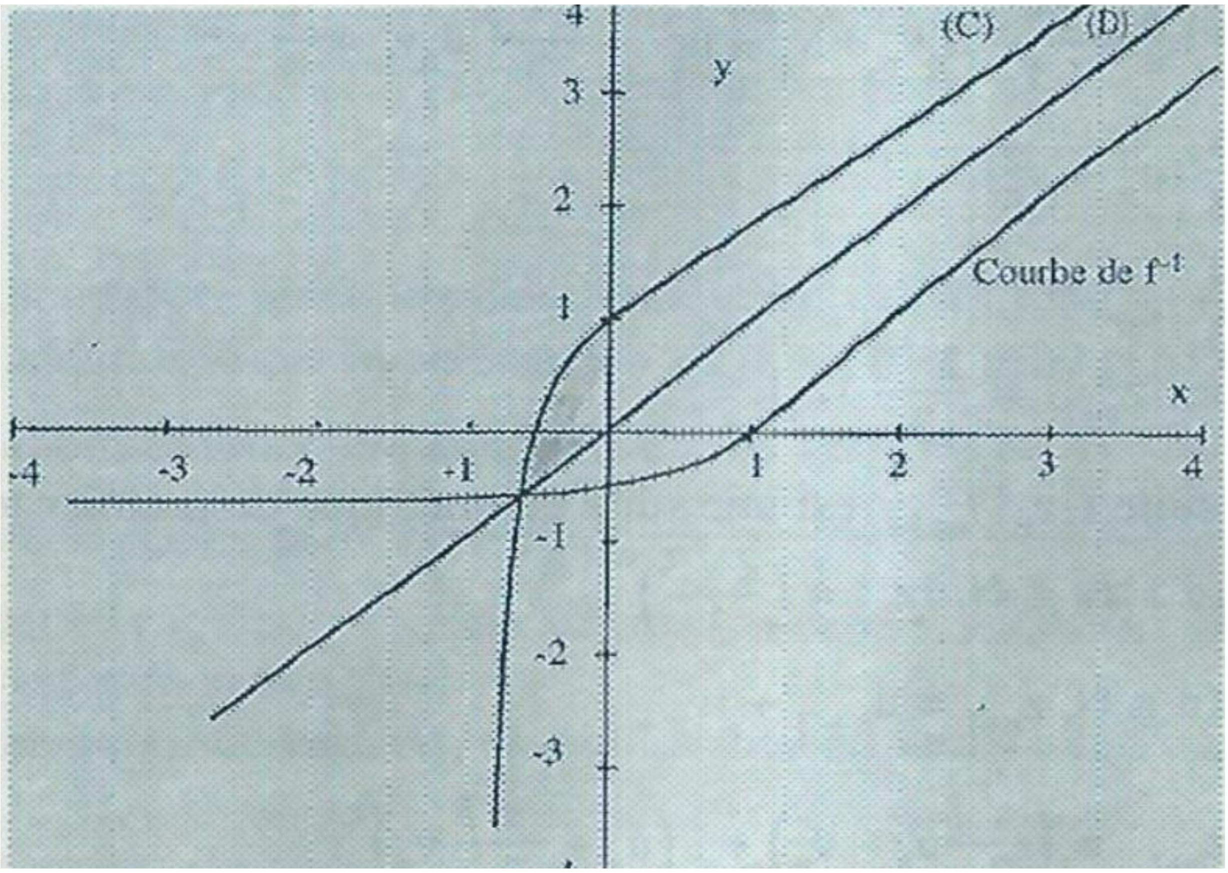
Le couple de coordonnées de A est $(0; 1)$.

3. a. Soit $(x_B; y_B)$ le couple de coordonnées de B.

$B \in (C) \cap (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = \frac{1}{e} - 1 \\ y_B = \frac{1}{e} - 1 \end{cases}$ (d'après partie B 1. c.)

Le couple de coordonnées de B est $\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-1}} - 1; \frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right)$.

b. Courbe (C)



c. Sur l'intervalle $\left[-1 + \frac{1}{e}; 0\right]$, (C) est au-dessus de (D) d'après partie B 1. L'aire cherchée est $\int_{-1+\frac{1}{\mathrm{e}}}^{0} [\mathrm{f(x)} - \mathrm{x}]\mathrm{dx}$

$\int_{-1+\frac{1}{e}}^{0} [f(x) - x]dx = \int_{-1+\frac{1}{e}}^{0^e} \frac{1+\ln(x^2+1)}{x+1} dx.$

Posons $u(x) = 1 + \ln(x + 1)$, on a $u'(x) = \frac{1}{x+1}$

Alors $\frac{1+\ln(x+1)}{x+1} = u(x)u'(x)$;

d'où $\int_{-1+\frac{1}{e}}^{0} \frac{1+\ln(x+1)}{x+1} dx = \left[\frac{(1+\ln(x+1))^2}{2}\right]_{-1+\frac{1}{e}}^{0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 + (-1))^2 = \frac{1}{2}$

,L'aire cherchée est $\frac{1}{2}$.

4. a. f est continue et strictement croissante sur]-1; $+\infty$[, f est donc une bijection de $]-1;+\infty[$ sur $f(]-1;+\infty[$). Puisque $f(]-1;+\infty[) = \mathbb{R}$; d'après partie B $1.\mathbf{b}$. et $\mathbf{c}$. alors f^{-1} est une bijection de $\mathbb{R}$, sur $]-1;+\infty[$.

b. Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à (D) dans le repère orthonormé donné.

CORRECTION SESSION NORMALE 1992 SERIE D

EXERCICE 1

1. Une disposition possible de ces 18 lettres est une bijection de l'ensemble des 18 jetons dans l'ensemble des 18 cases. Le nombre de dispositions possibles est 18 !.

a		b	c		

Voici ci-dessus l'exemple d'une disposition possible des trois jetons portant les lettre a, b, c. Pour avoir un cas favorable à la réalisation de l'événement E, il faut :

- Placer les trois lettres dans 3 des 6 cases de la première ligne. Cela revient à réaliser une application injective de l'ensemble des trois jetons $\{a, b, c\}$ dans l'ensemble des six cases de la première ligne, soit A_6^3 possibilités : $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$. Il y a 120 façons de placer ces trois premiers jetons.
- Placer les 15 lettres restantes dans les 15 autres cases, soit 15 ! possibilités. Il y a donc $A_6^3 \times 15$! façons de réaliser l'événement E.

Donc $p(E) = \frac{A_6^3 \times 15!}{18!} = \frac{120 \times 15!}{18!} = \frac{5}{204}$

3. La première case étant occupée par le jeton portant la lettre d, il reste 5 cases sur la première ligne sur lesquelles on place les jetons portant les lettres a, b, c; soit A_5^3 façons de placer.

On a : $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$. Il faut ensuite placer les 14 lettres restantes dans les 14 autres cases, soit 14 ! façons de les placer. Il y a donc $A_5^3 \times 14$! cas favorables à la réalisation de cet événement.

On a : $A_5^3 \times 14! = 60 \times 14$!

La probabilité cherchée est : $\frac{A_5^3 \times 14!}{18!} = \frac{60 \times 14!}{18!} = \frac{1}{1224}$.

EXERCICE 2

1. a. Posons : $\forall z \in \mathbb{C}, p(z) = z^3 + (2 + i)z^2 + (-3 + 4i)z - 10 + 5i$

D'où : $p(2 - i) = (2 - i)^3 + (2 + i)(2 - i)^2 + (-3 + 4i)(2 - i) - 10 + 5i$

$$= (2 - i)[(2 - i)^2 + (2 + i)(2 - i) + (-3 + 4i) - 5]$$

$$= (2 - i)[(3 - 4i) + 5 + (-3 + 4i) - 5] = 0$$

$(2 - i)$ est donc une solution de (E).
b. Cherchons deux complexes b, c tels que pour tout z de $\mathbb{C}$, on ait $p(z) = (z - 2 + i)(z^2 + bz + c)$

$\forall z \in \mathbb{C}, p(z) = z^3 + [b + (-2 + i)]z^2 + [c + b(-2 + i)]z + c(-2 + i)$ par identification, on $a: \begin{cases} b + (-2 + i) = 2 + i \\ c + b(-2 + i) = -3 + 4i \\ c(-2 + i) = -10 + 5i \end{cases}$ d'où $\begin{cases} b = 4 \\ c = 5 \end{cases}$

Par suite pour tout z de $\mathbb{C}$, on a : $p(z) = (z - 2 + i)(z^2 + 4z + 5)$.

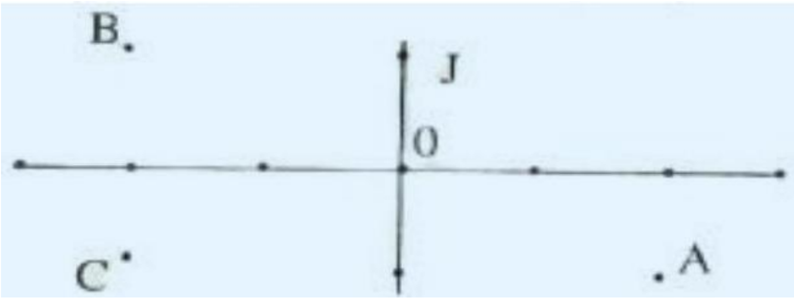
c. Résolvons : $z \in \mathbb{C}, z^2 + 4z + 5 = 0$.

$\Delta' = 4 - 5 = -1 = i^2$

$z_1 = -2 + i; z_2 = -2 - i$

L'ensemble des solutions de (E) est $\{2 - i; -2 + i; -2 - i\}$

2. a.



b. $\mathbf{1^{tre}}$ **méthode** : solution géométrique

Recherche du rapport de S

$S(B) = C$ et $S(C) = A$; Le rapport de cette similitude est égal à $\frac{AC}{BC}$. On a : $\frac{AC}{BC} = 2$.

Recherche de l'angle orienté de S

L'angle orienté de S est $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$. Comme le triangle ABC est rectangle en C, on a : Mes $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2}$ car le triplet (B, C, A) est de sens direct.

Recherche du centre de S (non demandée dans le sujet).

2ème méthode : solution algébrique

Soit g la transformation complexe associée à S.

$g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \mapsto az + b; (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \dot{C}$

$S(B) = C \Leftrightarrow g(-2 + i) = -2 - i$

$\Leftrightarrow a(-2 + i) + b = -2 - i$

$S(C) = A \Leftrightarrow g(-2 - i) = 2 - i$

$$\begin{cases} a(-2+i)+b=-2-i \\ a(-2-i)+b=2-i \end{cases} \text{on a:} \begin{cases} a=2i \\ b=3i \end{cases}$$

La transformation complexe g associée à S est telle que $g(z) = 2iz + 3i$

Le rapport de S est $|a|$. On a : $|a| = 2$. L'angle orienté de S a pour mesure principale $\mathrm{ARG}(2i)$. On a : $\mathrm{ARG}(2i) = \frac{\pi}{2}$

Le centre de S est son unique point invariant Ω d'affixe ω (non demandé)

$S(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow g(\omega) = \omega$

$\Leftrightarrow 2i\omega + 3i = \omega$
$\Leftrightarrow (1-2i)\omega = 3i$
$\Leftrightarrow \omega = \frac{3i}{1-2i} = \frac{3i(1+2i)}{|1-2i|^2} = -\frac{6}{5} + \frac{3}{5}i$

Le couple de coordonnées de Ω est $\left(-\frac{6}{5}; \frac{3}{5} \cdot\right)$
c. Soit A' l'image de A par S.

On a : Mes $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AA'}) = \frac{\pi}{2}$. Par suite les droites (CA) et (A') sont perpendiculaires. A' se trouve donc sur la perpendiculaire (D) à (AC) passant par A.

On a également Mes $(\widehat{BA', CA'}) = \frac{\pi}{2}$. Les droites (BA) et (CA') sont donc perpendiculaires. A' se trouve sur la perpendiculaire (D') à la droite (AB) passant par C.

Justification

Comme les droites (AC) et (AB) sont sécantes alors les droites (D) et (D') le sont également. On construit le point A' comme point d'intersection des droites (D) et (D').

PROBLEME

PARTIE A

1. $Dg = \mathbb{R}^*$. Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, -x est élément de $\mathbb{R}^*$.

$g(-x) = x^2 - 1 + \ln|-x| = x^2 - 1 + \ln|x| = g(x)$: g est donc paire. $g(1) = 0$.

2. Dérivée de g

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$$

Signe de $g'(x)$

$2x^2 + 1$ est toujours strictement positif, donc le signe de $g'(x)$ est celui de x.

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}^*, (\, g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[)$;

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, (\, g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[)$$

Sens de variations de g

g est strictement croissante sur $]\,0;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]\,-\infty;0[$.

Tableau de variations de g

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g'(x)		$-$			‖		$+$		
g(x)	↘		0	↘	‖	↗	0	↗	

3. Comme g est paire d'après 1 . on a : $g(-1)=0$. La lecture du tableau de variations de g permet d'écrire :

$\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$g(x)=0 \Leftrightarrow x \in \{-1;1\}$$
$$g(x)>0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$$
$$g(x)<0 \Leftrightarrow x \in]-1;0[\cup]0;+1[.$$

PARTIE B

1. $D_f=\mathbb{R}^*$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x+1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty;\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(x+1-\frac{\ln(-x)}{x}\right)=-\infty$$

Donc f n'a pas de limite en 0 . Cependant on peut conclure que (OJ) est asymptote à (C),

2. a. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$, par suite $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\forall x<0, f(x)=x+1+\dfrac{\ln(-x)}{(-x)}$

Posons $u=-x$; on a $\lim u=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(-x)}{(-x)}=\lim_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0; \lim_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty;$

donc $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$
b. $\forall x\in\mathbb{R}^*, f(x)-(x+1)=-\frac{\ln|x|}{x};$

d'après ce qui précède, on a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln|x|}{x}=0$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln|x|}{x}=0$

La droite (D) est donc asymptote à (C) en $+\infty$ en $-\infty$.

c. $\forall x\in\mathbb{R}^*$,

$$f(x)=x+1 \Leftrightarrow \frac{\ln|x|}{x}=0 \Leftrightarrow \ln|x|=0$$
$$\Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow (x=1 \text{ ou } x=-1)$$

Le couple de coordonnées de A est $(1; 2)$ et celui de B est $(-1; 0)$.

Position de (ℓ) par rapport à (D).

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$f(x) > x + 1 \Leftrightarrow \frac{ln\, x}{x} < 0\ f(x) > x + 1 \Leftrightarrow \ln x < 0$

$\Leftrightarrow x \in]0; 1[$

$f(x) < x + 1 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[$.

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*$,

$f(x) < x + 1 \Leftrightarrow \dfrac{ln(-x)}{x.} > 0$

$\Leftrightarrow ln(-x) < 0\ (car\ x\ est\ négatif)$

$\Leftrightarrow -x \in]0; 1[\Leftrightarrow x \in]-1; 0[$.

$f(x) > x + 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[$.

Sur] $-\infty, -1$ [et sur] 0,1 [, (C) est au dessus de (D) ; sur] $-1; 0$[et sur $]1, +\infty[$ (C) est au dessous de (D).
d. $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(0 + x) + f(0 - x) = f(x) + f(-x)$

$$= -x + 1 - \frac{\ln|-x|}{-x} + x + 1 - \frac{\ln|x|}{x}$$
$$= 2 = 2 \times 1$$

Le point $J(0; 1)$ est donc centre de symétrie de (ς).

3. $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \left(x + 1 - \frac{\ln|x|}{x}\right)' = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln|x|}{x^2} = 1 - \frac{1 - \ln|x|}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln|x|}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

x^2 étant strictement positif pour tout x de D_f, le signe de $f'(x)$ est donc celui de $g(x)$.

On déduit de la partie A 3) :

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 0[\cup]0; 1[$

f est donc strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$; f est donc strictement décroissante sur $]-1; 0[$ et sur $]0; 1[$

Tableau de variations de f

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$

4. a. $f(-e) = 1 - e + \left(\frac{1}{e}\right); f\left(-\frac{1}{e}\right) = 1 - e - \left(\frac{1}{e}\right)$

$-1{,}4$ est l'arrondi d'ordre 1 de $\mathrm{f}(-\mathrm{e})$; $-2{,}1$ est l'arrondi d'ordre 1 de $\mathrm{f}\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

b. Construction de $(\mathcal{C})$ (voir figure)

On construit la partie de $(\mathcal{C})$ correspondant aux abscisses positives puis on complète par symétrie par rapport à J.

PARTIE C

1. (voir courbe)

2 a. (voir courbe)

b. (voir courbe)

3. Comme (e) est au-dessus de (D) sur $[-\mathrm{e}; -1]$ et au dessous de (D) sur $\left[-1; -\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ d'après **Partie B 2. c.**, l'aire cherchée est. $\int_{-e}^{-1} [f(x) - (x+1)]dx = \int_{-e}^{-1} \left(\frac{\ln(-x)}{x}\right) dx$. Posons $u(x) = \ln(-x)$; on a : $\frac{\ln(-x)}{x} = u'(x)u(x)$; par suite

$$\int_{-\mathrm{e}}^{-1} [f(x) - (x+1)]dx = \left[\frac{-1}{2}(\ln(-x))^2\right]_{-\mathrm{e}}^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^{\frac{-1}{e}} [((x+1) - f(x))]dx = \left[\frac{11}{2}(\ln(-x))^2\right]_{-1}^{-1/e} = \frac{1}{2}.$$

L'aire cherchée est donc égale à 1 unité d'aire.