FOMESOUTRA

ÇA SOUTRA !!!

# COURS DE MATHS

TROISIEME

# 3ème

1ière édition

BY TEHUA

2025

**MATHÉMATIQUES__PROGRESSION 3e__2024-2025**
**Volume horaire annuel : 120 heures *(4 heures par semaine)***

| Trimestre | Mois | Sem | Leçons | Vol. hor. | Taux d'exécution |
|---|---|---|---|---|---|
| 1er Trimestre | Septembre | 1 | 1. Calcul littéral | 7 h | 3,57 % (4/112) |
| | | 2 | | | 6,25 % (7/112) |
| | | | *Régulation* | 1 h | 7,14 % (8/112) |
| | | 3 | 2. Propriétés de Thalès dans un triangle | 7 h | 10,71 % (12/112) |
| | Octobre | 4 | | | 13,39 % (15/112) |
| | | | *Régulation* | 1 h | 14,28 % (16/112) |
| | | 5 | 3. Racines carrées | 7 h | 17,85 % (20/112) |
| | | 6 | | | 20,53 % (23/112) |
| | | | *Régulation* | 1 h | 21,42 % (24/112) |
| | | 7 | 4. Triangle rectangle | 11 h | 25 % (28/112) |
| Devoir de niveau | Novembre | 8 | | | 28,57 % (32/112) |
| | | 9 | | | 31,25 % (35/112) |
| | | | *Régulation* | 1 h | 32,14 % (36/112) |
| | | 10 | 5. Calcul numérique | 9 h | 35,71 % (40/112) |
| | | 11 | | | 39,28 % (44/112) |
| 2e Trimestre | Décembre | 12 | | | 40,17 % (45/112) |
| | | | *Régulation* | 1 h | 41,07 % (46/112) |
| | | 13 | 6. Angles inscrits | 5 h | 42,85 % (48/112) |
| | | | | | 45,53 % (51/112) |
| | | | *Régulation* | 1 h | 46,42 % (52/112) |
| | | 14 | 7. Vecteurs | 7 h | 50 % (56/112) |
| | Janvier | 15 | | | 52,67 % (59/112) |
| | | | *Régulation* | 1 h | 53,57 % (60/112) |
| | | 16 | 8. Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$ | 5 h | 57,14 % (64/112) |
| | | 17 | | | 58,03 % (65/112) |
| | | | *Régulation* | 1 h | 58,92 % (66/112) |
| | | | 9. Coordonnées de vecteurs | 7 h | 60,71 % (68/112) |
| Devoir de niveau | | 18 | | | 64,28 % (72/112) |
| | Février | 19 | | | 65,17 % (73/112) |
| | | | *Régulation* | 1 h | 66,07 % (74/112) |
| | | | 10. Équations de droites | 7 h | 67,85 % (76/112) |
| | | 20 | | | 71,42 % (80/112) |
| | | 21 | | | 72,32 % (81/112) |
| | | | *Régulation* | 1 h | 73,21 % (82/112) |
| | | | 11. Statistique | 7 h | 75 % (84/112) |
| 3e Trimestre | Mars | 22 | | | 78,57 % (88/112) |
| | | 23 | | | 79,46 % (89/112) |
| | | | *Régulation* | 1 h | 80,35 % (90/112) |
| | | | 12. Équations et inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ | 7 h | 82,14 % (92/112) |
| | | 24 | | | 85,71 % (96/112) |
| | | 25 | *Régulation* | 1 h | 87,50 % (98/112) |
| | | | 13. Applications affines | 5 h | 89,28 % (100/112) |
| | Avril | 26 | | | 91,96 % (103/112) |
| | | | *Régulation* | 1 h | 92,85 % (104/112) |
| Devoir de niveau | | 27 | 14. Pyramides et cônes | 7 h | 96,42 % (108/112) |
| | | 28 | | | 99,10 % (111/112) |
| | | | *Régulation* | 1 h | 100 % (112/112) |
| | Mai | 29 | *Révisions* | 8 h | |
| | | 30 | | | |

<u>**NB**</u> : La régulation consiste à mener des activités de rémédiation relativement aux contenus de la leçon.
À cette occasion, le professeur mènera également des activités permettant d'évaluer et de renforcer les acquis des élèves.
C'est le cumul du temps de régulation qui fait 1h. Le professeur peut en faire des séances de travaux dirigés.

<u>***Remarque***</u> :

- ⇨ Le respect de la progression est obligatoire afin de garantir l'achèvement du programme dans le temps imparti et de permettre l'organisation des devoirs de niveau.
- ⇨ Les volumes horaires indiqués comprennent les cours, les exercices et les travaux dirigés (75%) et IE, DS et comptes rendus (25%)

M.E.N.A.
DIRECTION DE LA PÉDAGOGIE ET DE LA FORMATION CONTINUE
Coordination Nationale Disciplinaire de Mathématiques
Le Coordonnateur National

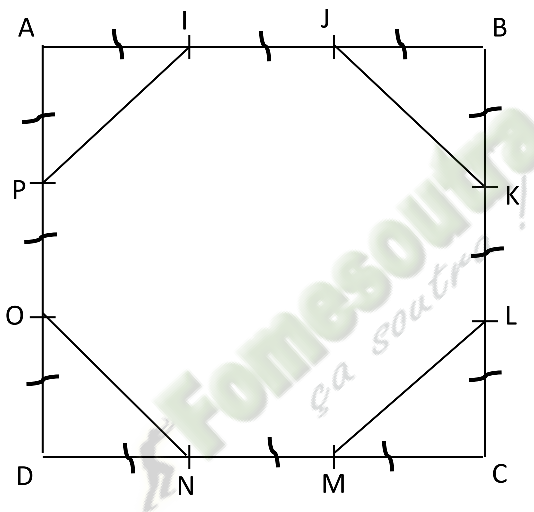
Jean-Marie KOFFI

**Thème : CALCULS ALGEBRIQUES**

# <u>LEÇON 1</u> : CALCUL LITTERAL — Durée : 8 heures

## A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le Lycée Alain Gauze de DALOA veut organiser une kermesse sur un terrain de forme carrée. Les principaux sponsors de la fête ont choisi chacun de bâtir leur stand dans un coin du terrain. Le Proviseur du Lycée souhaite que le reste du terrain ait la forme d'un octogone et qu'il soit réservé aux jeux. L'entrepreneur chargé d'aménager le terrain propose la maquette ci-dessous.




ABCD est un carré de côté $x$

Intéressés par le projet, les élèves de la troisième décident de calculer le périmètre et l'aire du terrain réservé aux jeux.

## B. CONTENU DE LA LEÇON

### I. <u>Quotient</u>

**<u>Egalité de deux quotients</u>**

**<u>Propriété</u>**

a, b, c et d sont des nombres tels que b $\neq 0$ et d $\neq 0$.
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$

**<u>Exercice de fixation</u>**

$a$ désigne un nombre différent de zéro. Détermine la valeur de $a$ lorsque $\frac{a}{3} = \frac{2}{5}$

**<u>Solution</u>**

$\frac{a}{3} = \frac{2}{5}$ équivaut à $5 \times a = 3 \times 2$ .
équivaut à $5a = 6$ .

équivaut à $a = \frac{6}{5} = 1{,}2$

$\frac{a}{3} = \frac{2}{5}$ , donc : $a = 1{,}2$.

## II. Calcul littéral

### 1. Puissance à exposant entier relatif

#### a. Notation

$a$ est un nombre rationnel différent de 0, $n$ est un nombre entier naturel différent de 0.
L'inverse de $a^n$ est noté $a^{-n}$. On a :

$$\boxed{\frac{1}{a^n} = a^{-n}} \qquad \boxed{a^{-n} \times a^n = 1}$$

**Exemple**

$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$.

#### b. Propriétés

$a$ et $b$ sont des nombres rationnels différents de 0 ; $m$ et $n$ sont des nombres entiers relatifs.

$a^n \times b^n = (a \times b)^n$ ; $a^n \times a^m = a^{n+m}$ ; $(a^m)^n = a^{m\times n}$ ; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

**Exercice de fixation**

Recopie et complète les pointillés.

$6^5 \times 6^2 = 6^{\cdots}$ ; $(-7)^3 \times (-7)^{-5} = (-7)^{\cdots}$ ; $(8^{-2})^3 = 8^{\cdots}$ ; $3^3 \times 8^3 = (\ldots\times\ldots)^{\cdots} = \ldots^{\cdots}$ ; $\frac{9^8}{9^5} = \ldots^{\cdots}$

**Corrigé**

$6^5 \times 6^2 = 6^7$ ; $(-7)^3 \times (-7)^{-5} = (-7)^{-2}$ ; $(8^{-2})^3 = 8^{-6}$; $3^3 \times 8^3 = (3 \times 8)^3 = 24^3$ ; $\frac{9^8}{9^5} = 9^3$ .

### 2. Développements et réductions

#### a) Règle de suppression de parenthèses

a , b et c sont des nombres ; on a :

$a + (b - c) = a + b - c$

$a - (b + c) = a - b - c$

$a - (b - c) = a - b + c$

#### b) Règles de priorité

La multiplication est prioritaire sur l'addition et sur la soustraction.
L'élévation à une puissance est prioritaire sur la multiplication.

#### c) Développement d'un produit

**Propriétés**
$a, b, x,$ et $y$ sont des nombres rationnels. On a :
$a(x+y) = ax + ay$
$a(x-y) = ax - ay$
$(a+b)(x+y) = ax + ay + b + by$

### d) Egalités remarquables

$a$ et $b$ sont des nombres rationnels. On a :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

**Exercice de fixation**
En utilisant les égalités remarquables ci-dessus, complète les pointillés:
1) $(1+x)^2 = \cdots + \cdots + \ldots .^{\cdots\cdots}$
2) $(3x+4)(3x-4) \quad = \ldots . .^{\cdots\cdots} - \ldots .^{\cdots\cdots}$
3) $(x-4)^2 = \ldots . .^{\cdots\cdots} - \cdots + \ldots .^{\cdots\cdots}$

**Corrigé**
1) $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$ .
2) $(3x-4)(3x+4) = (3x)^2 - 4^2$.
3) $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 4^2$.

## 3. Factorisations

### a) Mettre en évidence un facteur commun

**Exemple**

$3x(2x+1) - 17(2x+1) = (2x+1)(3x-17)$.

### b) Utiliser des égalités remarquables

**Exemple**

$9a^2 + 24a + 16 = (3a)^2 + 2\times 3a \times 4 + 4^2 = (3a+4)^2$.

### c) Utiliser plusieurs techniques

**Exemple**

$9a^2 + 24a + 16 - a(3a+4) = (3a)^2 + 2\times 3a \times 4 + 4^2 - a(3a+4)$

$= (3a+4)^2 - a(3a+4)$
$= (3a+4)[(3a+4) - a]$
$= (3a+4)(3a+4-a)$
$= (3a+4)(3a-a+4)$
$9a^2 + 24a + 16 - a(3a+4) = (3a+4)(2a+4) = 2(3a+4)(a+2)$.

## 4. Produit nul, nombres de même carré

### a) Produit nul

**Propriétés**

Un produit est égal à zéro lorsque l'un au moins de ses facteurs est égal à zéro.
Un produit est différent de zéro lorsque tous ses facteurs sont différents de zéro.
$a$ $et$ $b$ sont des nombres rationnels.

- $a \times b = 0$ équivaut à $a = 0$ $ou$ $b = 0$ .
- $a \times b \neq 0$ équivaut à $a \neq 0$ $et$ $b \neq 0$.

**Exercice de fixation**
$a$ est un nombre rationnel.
Détermine $a$ tel que : $(a-2)(a+3)=0$.

**Corrigé**

$(a-2)(a+3)=0$ équivaut à $a-2=0$ ou $a+3=0$.
équivaut à $a=2$ ou $a=-3$.

**b) Nombres de même carré**

**Propriété**

$a$ $et$ $b$ sont des nombres rationnels.
$a^2 = b^2$ équivaut à $a = b$ ou $a = -b$.

**Exercice de fixation**
$x$ est un nombre rationnel.
Détermine $x$ tel que : $x^2 = 49$.

$x^2 = 49$ équivaut à $x^2 = 7^2$ .
$x^2 = 49$ équivaut à $x = 7$ ou $x = -7$.

**Remarque**
$a$ $et$ $b$ sont des nombres rationnels positifs.
$a^2 = b^2$ équivaut à $a = b$.

## III. Expressions littérales

### 1. Polynômes

a. **Monôme**

**Présentation**
On considère l'expression littérale : $\mathbf{5x^2}$**.**
C'est un *monôme* en $x$.
5 est le *coefficient* du monôme.
2 est le *degré* du monôme.

b. **Polynôme**

**Présentation**
On considère l'expression littérale : $22x^9 + 76x^6 - 5$ .
C'est un polynôme en $x$ et 9 est le degré du polynôme.

**Exercices de fixation**

**Exercice 1**

Complète le tableau suivant.

| Monôme | Coefficient | Degré |
|---|---|---|
| $7x^2$ | | |
| $x^5$ | | |
| $-\frac{2}{3}x^4$ | | |
| $-x$ | | |

**Exercice 2**

Complète le tableau suivant.

| Monôme | Degré |
|---|---|
| $6x^2 - 3x^7 + 4$ | |
| $4x^5 - x + 2$ | |
| $-x^4 + x^3 + 2x^8$ | |

**Exercice 3**

Développe, réduis puis ordonne selon les puissances décroissantes de $x$, l'expression littérale suivante : $(2x^3 - 1)(3x + 2) - x(5x^2 - 7)$

**Corrigé**

**Exercice 1**

| Monôme | Coefficient | Degré |
|---|---|---|
| $7x^2$ | 7 | 2 |
| $x^5$ | 1 | 5 |
| $-\frac{2}{3}x^4$ | $-\frac{2}{3}$ | 4 |
| $-x$ | $-1$ | 1 |

**Exercice 2**

| Monôme | Degré |
|---|---|
| $6x^2 - 3x^7 + 4$ | 7 |
| $4x^5 - x + 2$ | 5 |
| $-x^4 + x^3 + 2x^8$ | 8 |

**Exercice 3**

$$(2x^3 - 1)(3x + 2) - x(5x^2 - 7) = (2x^3) \times (3x) + (2x^3) \times 2 - 1 \times (3x) - 1 \times 2 - x \times (5x^2) - x \times (-7)$$

$$= 6x^4 + 4x^3 - 3x - 2 - 5x^3 + 7x$$

$$= 6x^4 + 4x^3 - 5x^3 - 3x + 7x - 2$$

$(2x^3 - 1)(3x + 2) - x(5x^2 - 7) = 6x^4 - x^3 + 4x - 2.$

## 2. Fractions rationnelles

### a) Présentation

On considère l'expression littérale : $\frac{x^2+5x}{2x^2-1}$ .

C'est une ***fraction rationnelle .***

$x^2 + 5x$ est son ***numérateur.***

$2x^2 - 1$ est son ***dénominateur.***

### b) Valeurs pour lesquelles une fraction rationnelle existe

**Propriété**

Soit $\frac{A}{B}$ une fraction rationnelle.

$\frac{A}{B}$ existe si et seulement si $B \neq 0$.

**Exercice de fixation**

Soit la fraction rationnelle K telle que $K = \frac{x+6}{5x+2}$.

Détermine les valeurs de $x$ pour lesquelles K existe.

**Corrigé**

K existe si et seulement si : $5x + 2 \neq 0$.

Résolvons : l'équation $5x + 2 = 0$.

$5x + 2 = 0$ équivaut à $x = \frac{-2}{5}$ .

Donc, K existe si et seulement si : $x \neq -\frac{2}{5}$.



### c) Simplifier une fraction rationnelle

**Méthode**

Pour simplifier une fraction rationnelle

On peut procéder comme suit :

- on factorise le numérateur et le dénominateur ;
- on détermine la condition d'existence d'une valeur numérique de la fraction rationnelle ;
- on simplifie la fraction rationnelle pour chacun des facteurs communs figurant au numérateur et au dénominateur ;
- on écrit la fraction rationnelle simplifiée, précédée de la condition d'existence d'une valeur numérique de la fraction rationnelle.

**Exercice de fixation**

On donne la fraction rationnelle F suivante : $F = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-1)}$.

Simplifie F pour $x \neq -3$ et $x \neq 1$.

**Corrigé**

On simplifie par $(x + 3)$ le facteur commun figurant au numérateur et au dénominateur.

$$F = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-1)}$$

Pour $x \neq -3$ *et* $x \neq 1$; $F = \frac{x-3}{x-1}$ .

## C. SITUATION D'EVALUATION

Pendant les grandes vacances, un groupe d'élèves de 3ème d'un lycée décide de vendre au grand marché de la ville des objets fabriqués par une coopérative de femmes.
Cette coopérative envisage de vendre un article à 2000 F.
Le coût de fabrication journalier de $x$ objets est donné par la formule : $C = 2090x - x^2$, où $x > 0$.
Soucieuse et très prudente, la présidente de la coopérative souhaite connaitre le nombre d'articles pour lequel les dépenses et la recette s'équilibrent.
Ne sachant pas comment s'y prendre, elle te sollicite.

1) Exprime en fonction de $x$, la recette R de $x$ objets vendus.
2) Sachant que le bénéfice est $B = R - C$, démontre que : $B = x(x - 90)$.
3) Déduis-en le nombre d'articles pour lequel les dépenses et la recette s'équilibrent.

**Corrigé**

1) Chaque objet est vendu à 2000 F donc la recette R de $x$ objets vendus est :
   R = $2000x$.
2) $B = R - C$
   $= 2000x - 2090x + x^2$
   $= -90x + x^2$
   $= x(-90 + x)$
   $= x(x - 90)$.
3) Les dépenses et la recette s'équilibrent, équivaut à $B = 0$.
   Alors, $B = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x - 90 = 0$
   $x = 0$ ou $x = 90$ ;
   d'où le nombre d'articles pour lequel les dépenses et la recette s'équilibrent est 90.

## D. EXERCICES

### D-1 Exercices de fixation

**Exercice 1**

$a$ désigne un nombre différent de zéro.
Détermine la valeur de $a$ lorsque $\frac{7}{a} = \frac{2}{5}$.

**Exercice 2**

$a$ et $b$ sont des nombres rationnels différents de 0.
Ecris plus simplement : $a^{-4} \times b^{-4}$ ; $a^{-6} \times a^2$ ; $(a^{-2})^{-3}$ et $\frac{a^{-3}}{a}$.

Corrigé

$a^{-4} \times b^{-4} = (\mathrm{a} \times \mathrm{b})^{-4}$ ; $a^{-6} \times a^2 = \mathrm{a}^{-4}$ ; $(a^{-2})^{-3} = a^6$ ; $\frac{a^{-3}}{a} = a^{-4}$.

**Exercice 3**

Développe et réduis les expressions littérales suivantes :

a) $5x(x + 3) - 4x(x - 2)$ ; b) $(2x - 5)(3x + 1)$ ; c) $(x + 7)^2$.

Corrigé

a) $5x(x + 3) - 4x(x - 2) = 5x^2 + 15x - 4x^2 + 8x$
   $5x(x + 3) - 4x(x - 2) = x^2 + 23x$.
b) $(2x - 5)(3x + 1) = 6x^2 - 13x - 5$.
c) $(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$.

**Exercice 4**

Détermine les valeurs de $x$ pour lesquelles : $(x+2)(3x-4)=0$.

Corrigé

$x = \frac{4}{3}$ ou $x = -2$ .

**Exercice 5**

Détermine les valeurs de $x$ pour lesquelles : $x^2 = 25$.

Corrigé

$x = 5$ ou $x = -5$.

**Exercice 6**

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a ) $9x^5 - 48x^2 + 36x - 4$ est un polynôme : $\boxed{\phantom{Vrai}}$

b ) $\frac{23}{x^4} + 7x^3 - 1$ est un polynôme : $\boxed{\phantom{Faux}}$

**Corrigé**

a ) $9x^5 - 48x^2 + 36x - 4$ est un polynôme : $\boxed{\text{Vrai}}$

b ) $\frac{23}{x^4} + 7x^3 - 1$ est un polynôme : $\boxed{\text{Faux}}$

**Exercice 7**

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

a) $7x^3 - 15x^2 + 1$ est une fraction rationnelle.

b) $\frac{x^2-9}{x+3}$ est une fraction rationnelle.

Corrigé

a) $7x^3 - 15x^2 + 1$ est une fraction rationnelle : Faux.

b) $\frac{x^2-9}{x+3}$ est une fraction rationnelle : Vrai.

**Exercice 8**

On considère la fraction rationnelle B telle que : $B = \frac{x^3+5x^2}{x^2-x}$

Détermine les valeurs pour lesquelles B existe

Corrigé

B existe pour $x^2 - x \neq 0$ .

Résolvons l'équation $x^2 - x = 0$.

$x(x-1) = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x = 1$.

Donc B existe pour $x \neq 0$ et $x \neq 0$.

## Exercice 9

On donne la fraction rationnelle F telle que : $F = \frac{x^2 - 9}{(x+3)(x-1)}$.
Détermine les valeurs de $x$ pour lesquelles F existe.

Corrigé
F existe pour $(x+3)(x-1) \neq 0$ .
Résolvons l'équation $(x+3)(x-1) = 0$.
$(x+3)(x-1) = 0$ équivaut à $x = -3$ ou $x = 1$.
Donc F existe pour $x \neq -3$ et $x \neq 1$.

## Exercice 10

On donne la fraction rationnelle F telle que : $F = \frac{x^2 - 9}{(x+3)(x-1)}$.
Simplifie F pour $x \neq -3$ et $x \neq 1$.

Corrigé

$$\text{Pour } x \neq -3 \; et \; x \neq 1, \; F = \frac{x^2 - 9}{(x+3)(x-1)}$$
$$= \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-1)}.$$
$$F = \frac{x-3}{x-1)}.$$



## D-2 Exercices de renforcement

## Exercice 11

Q est un polynôme tel que $Q = (3x+4)^2 - (x+4)(5x+8) + 4x$.
1. a) Justifie que : $Q = 4x^2 - 16$ .
   b) Déduis-en la factorisation de Q.
2. Résous l'équation $4(x-2)(x+2) = 0$

## Exercice 12

On considère la fraction rationnelle P , telle que $P = \frac{4x^2-4x+1}{(x+1)(2x-1)}$.
1. Trouve les valeurs de $x$ pour lesquelles P existe.
2. a) Montre que : $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$.
   b) Simplifie P pour $x \neq -1$ et $x \neq \frac{1}{2}$.
3. Calcule la valeur numérique de P pour $x = -2$.

## Exercice 13

On donne les expressions littérales A et B suivantes :
$A = (x+1)^2 - 9$ ; $B = \frac{x-2}{(x+1)^2-9}$.
1. Justifie que : $A = (x-2)(x+4)$.
2. a) Détermine les valeurs de $x$ pour lesquelles B existe.
   b) Simplifie B pour $x \neq 2$ et $x \neq 4$.

## Exercice 14

On donne la fraction rationnelle F telle que : $F = \frac{(x-3)^2+(x-3)(2x+1)}{(x-5)(3x-2)}$.
1. Justifie que : $(x-3)^2 + (x-3)(2x+1) = (x-3)(3x-2)$.

2. a) Détermine les valeurs de $x$ pour lesquelles F existe.
   b) Justifie que pour $x \neq 5$ et $x \neq \frac{2}{3}$, $F = \frac{x-3}{x-5}$.
3. Calcule la valeur numérique de F pour $x = -3$.

**Exercice 15**

On donne les expressions littérales R et T suivantes :

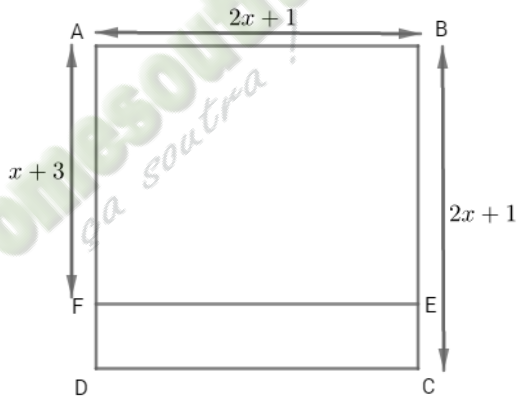
$R = (2x+3)^2 - 1$ ; $S = 4x^2 + 4x - 8$.

1. a) Vérifie que : $S = 4(x-1)(x+2)$ .
   b) Justifie que : $R = 4(x+1)(x+2)$.
2. On considère la fraction rationnelle $T = \frac{R}{S}$ .
   a) Détermine les valeurs de $x$ pour lesquelles T existe.
   b) Simplifie T, pour $x \neq 1$ et $x \neq -2$.
   c) Calcule la valeur numérique de T pour $x = \frac{1}{2}$.

## D-3 Exercices d'approfondissement

**Exercice 16**

Sur la figure dessinée ci-dessous, $ABCD$ est un carré et $ABEF$ est un rectangle.
On a $AB = BC = 2x + 1$ et $AF = x + 3$, où $x$ désigne un nombre supérieur à deux.
L'unité de longueur est le centimètre.




1. Exprime la longueur $FD$ en fonction de $x$.
2. Déduis-en que l'aire de $FECD$ est égale à $(2x+1)(x-2)$.
3. Exprime en fonction de $x$ les aires du carré $ABCD$ et du rectangle $ABEF$.
4. Déduis-en que l'aire du rectangle $FECD$ est : $(2x+1)^2 - (2x+1)(x+3)$.
5. Justifie que :$(2x+1)^2 - (2x+1)(x+3) = (2x+1)(x-2)$.

**Corrigé**

1. $FD = BC - AF$
   $= (2x+1) - (x+3) = 2x + 1 - x - 3 = x - 2$
   $FD = x - 2$ .
2. Aire $(FECD)$ = $CD$ x $FD$
   $= (2x+1)(x-3)$.
3. Aire $(ABCD)$ = $AB \times AB$ = $(2x+1)(2x+1)$ = $(2x+1)^2$.
   Aire $(ABEF)$ = $AB \times AF$ = $(2x+1)(x+3)$.
4. Aire $(FECD)$ = Aire $(ABCD)$ − Aire $(ABEF)$
   = $(2x+1)^2 - (2x+1)(x+3)$.

5. 1ère méthode :

D'après la question 2. l'aire de FECD est $(2x+1)(x-2)$.
D'après la question 4. L'aire de FECD est $(2x+1)^2-(2x+1)(x+3)$.
Donc, $(2x+1)^2-(2x+1)(x+3)=(2x+1)(x-2)$.

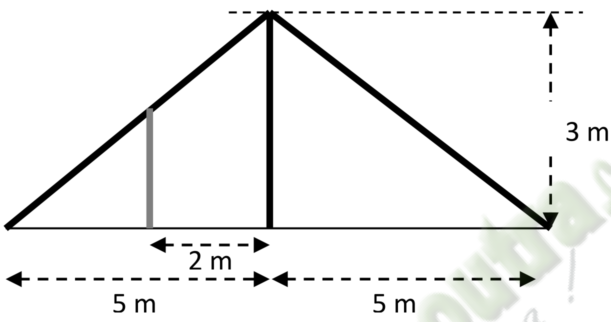
2ème méthode :

On a : $(2x+1)^2-(2x+1)(x+3)=(2x+1)(2x+1)-(2x+1)(x+3)$.
$(2x+1)^2-(2x+1)(x+3)=(2x+1)[(2x+1)-(x+3)]$.
$(2x+1)^2-(2x+1)(x+3)=(2x+1)(x-2)$.

**Thème : Géométrie du plan**
**LEÇON 2 : PROPRIÉTÉS DE THALES DANS LE TRIANGLE** **Durée :6 heures**

## A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Sur la représentation en coupe ci-dessous du toit de l'appâtâmes d'un lycée , on aperçoit le toit, une barre horizontale de 10 mètres et une barre verticale de 3 mètres.




Un côté du toit étant défectueux, un charpentier est chargé de le renforcer. Pour ce faire, il doit fixer une barre verticale dont le pied est situé à 2 mètres de la barre verticale initiale.
Malheureusement, il a oublié ses instruments de mesure à la maison.
Les élèves de la classe de troisième décident de l'aider à calculer la longueur de cette barre.

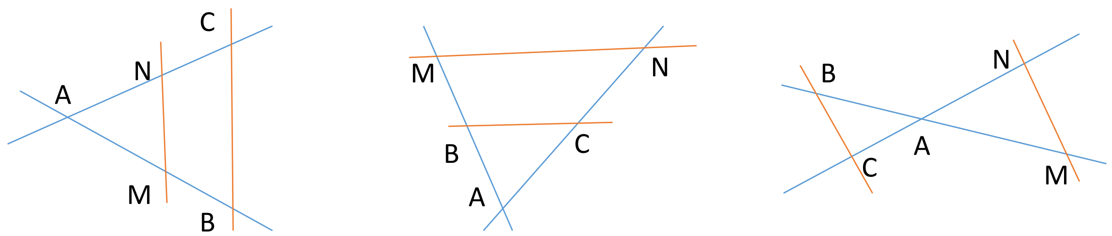
## B. CONTENU DE LA LEÇON

### I. PROPRIETE DE THALES – CONFIGURATIONS DE THALES.

Propriété
ABC est un triangle.
M est un point de droite (AB) et N un point de la droite (AC).
Si (MN)//(BC) alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ .

**Remarque**
On peut utiliser la propriété de Thalès pour calculer des distances ou justifier une égalité de quotients.

Configurations de Thalès
(BM) et (CN) sont deux droites sécantes en A.
Si (BC)//(MN), alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.



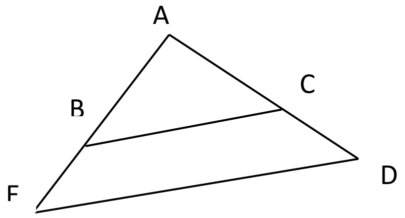
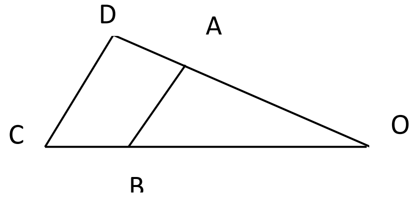
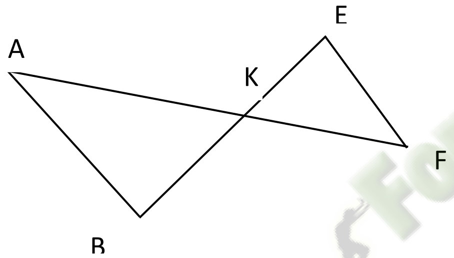

Ces trois figures sont dites configurations de Thalès.

Exercices de fixation

Exercice 1

Pour chaque ligne du tableau, une seule affirmation est vraie.

Ecris le numéro suivi de la lettre de l’affirmation vraie.

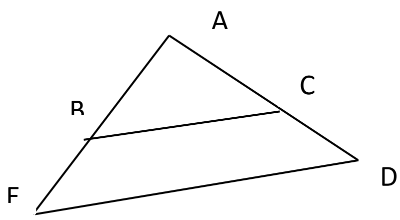
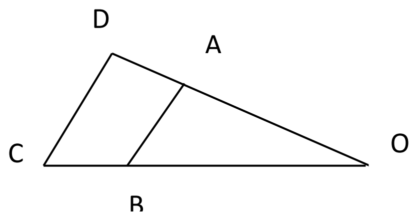
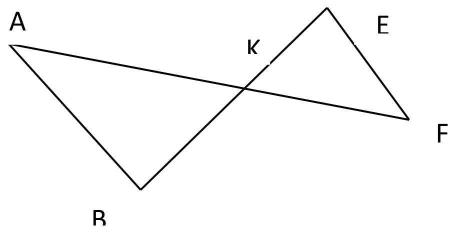
| **Propositions** | **A** | **B** | **C** |
|---|---|---|---|
| <br>(BC)//(ED).<br>La propriété de Thalès permet d’écrire : | $\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC}$ | $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}$ | $\frac{AE}{AB}=\frac{BC}{AD}$ |
| <br>(AB)//(CD).<br>La propriété de Thalès permet d’écrire : | $\frac{OA}{OD}=\frac{OB}{OC}$ | $\frac{OA}{OB}=\frac{OD}{OC}$ | $\frac{OA}{OD}=\frac{OC}{OB}$ |
| <br>(AB)//(EF).<br>La propriété de Thalès permet d’écrire : | $\frac{KE}{EB}=\frac{KF}{KA}$ | $\frac{KA}{KE}=\frac{KB}{KF}$ | $\frac{KE}{KB}=\frac{KF}{KA}$ |

**Corrigé**

1.B ; 2.A ; 3.C .

Exercice 2

Calcule $x$ dans chacun des cas ci-dessous.

| **1^er^ CAS** | **2^ème^ CAS** | **3^ème^ CAS** |
|---|---|---|
| <br>(BC) // (ED). | <br>(BA)// (CD) | <br>(BA)//(EF). |
| AE = 6 ; AD = 9 ; AB = 4 ; AC = $x$ | OC= $\frac{15}{4}$ ; OB = 3 ; OA = 8 ; OD = $x$ | KA = 7 ; KF = 3 ; KE= 6 ; KB = $x$ |

**Corrigé**

1er cas : D'après la propriété de Thalès, $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$ équivaut à $\frac{AB}{AE} = \frac{x}{AD}$

$$\frac{4}{6} = \frac{x}{9}$$
$$6x = 4 \times 9$$
$$x = \frac{36}{6} = 6.$$

2ème cas : D'après la propriété de Thalès, $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC}$ équivaut à $\frac{OA}{x} = \frac{OB}{OC}$

$$\frac{8}{x} = \frac{3}{\frac{15}{4}}$$
$$3x = 8 \times \frac{15}{4}$$
$$x = \frac{30}{3} = 10.$$

3ème cas : D'après la propriété de Thalès, $\frac{KF}{KA} = \frac{KE}{KB}$ équivaut à $\frac{KF}{kA} = \frac{KE}{x}$

$$\frac{3}{7} = \frac{6}{x}$$
$$3x = 7 \times 6$$
$$x = \frac{42}{3} = 14.$$

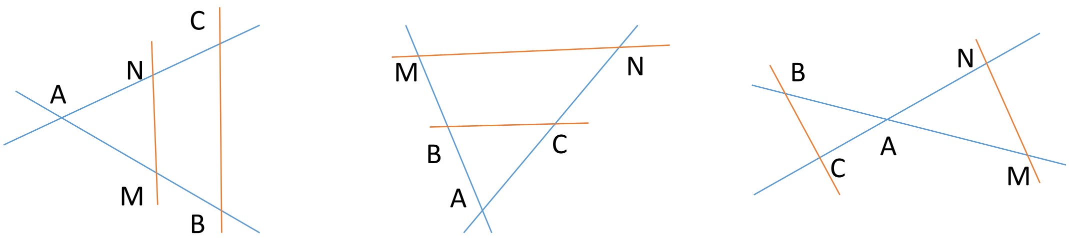
## II. RECIPROQUE DE LA PROPRIETE DE THALES

**Propriété**

ABC est un triangle, M est un point de la droite (AB) et N est un point de la droite (AC) tels que la position de M par rapport aux points A et B soit la même que celle de N par rapport aux points A et C.
Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ , alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

**Remarque**

La réciproque de la propriété de Thalès permet de montrer que deux droites sont parallèles et s'applique dans les différentes configurations suivantes appelées configurations de Thalès.




Exercice de fixation

L'unité de longueur est le centimètre. ABC est un triangle tel que AB = 15 ; AC = 5.
Les points M et N appartiennent respectivement aux côtés [AC] et [AB] et sont tels que AM = 3 ; AN =9.
Justifie que : (MN) // (CB).

**Corrigé**

Justifions que (MN) // (CB)
On calcule : $\frac{AM}{AC} = \frac{3}{5}$ ; $\frac{AN}{AB} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$. donc $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$ .
ABC est un triangle, M est un point du segment [AB], N est un point du segment [AC] et $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$.
D'après la réciproque de la propriété de Thalès, (MN) // (CB).

## III. CONSEQUENCE DE LA PROPRIETE DE THALES

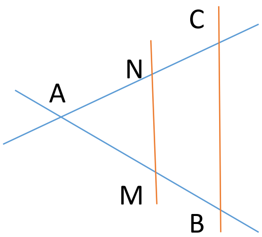
**Propriété :**

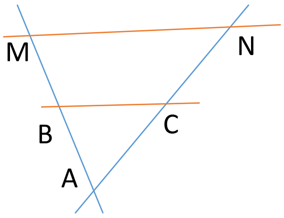
ABC est un triangle, M est un point de la droite (AB) et N est un point de la droite (AC).

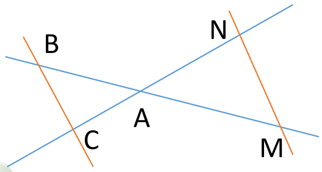
Si $(MN)//(BC)$ $alors$ $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

**Remarques**

- La conséquence de la propriété de Thales s'applique dans les configurations de la propriété directe de Thales.
- Elle permet de calculer des distances.



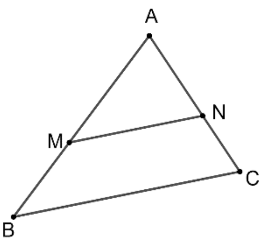




Exercices de fixation

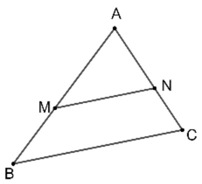
Exercice 1

Entoure la réponse juste parmi les trois réponses 1 ; 2 et 3 ci-dessous.

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
|  A N M C B Dans la figure ci-dessus, on a (BC)//(MN). D'après la conséquence de la propriété de Thalès, on a : | $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MB}{NC}$ | $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ | $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MB}{BN}$ |



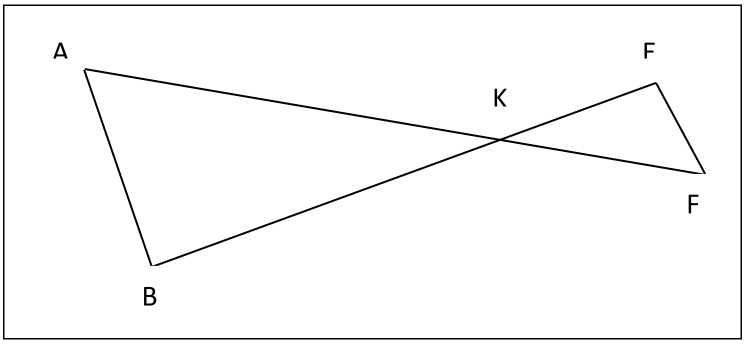
**Corrigé**

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
|  A N M C B Dans la figure ci-dessus, on a (BC)//(MN). | $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MB}{NC}$ | $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ | $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MB}{BN}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| D’après la conséquence de la propriété de Thalès, on a : | | | |

Exercice 2

On donne le triangle ABK ci-dessous.
F$\in [AK]$ et E $\in [BK]$ tel que AK = 8 ; KF = 3 ; EF = 6 et ( AB ) // ( EF ).
Calcule AB.




**Corrigé**
Calculons AB.
ABK est un triangle, F est un point de la droite (AK) et E est un point de la droite (BK) ;
et $(AB)//(EF)$ alors, d’après la conséquence de la propriété de Thalès on a : $\frac{KF}{KA} = \frac{KE}{KB} = \frac{EF}{AB}$.
D’où : $\frac{KF}{KA} = \frac{EF}{AB}$.

Ainsi : $AB \times KF = KA \times EF$.
$AB = \frac{KA \times EF}{KF}$.
$AB = \frac{8 \times 6}{3}$ = 16.



## IV. PARTAGER UN SEGMENT EN DES SEGMENTS DE MEME LONGUEUR

Point méthode :

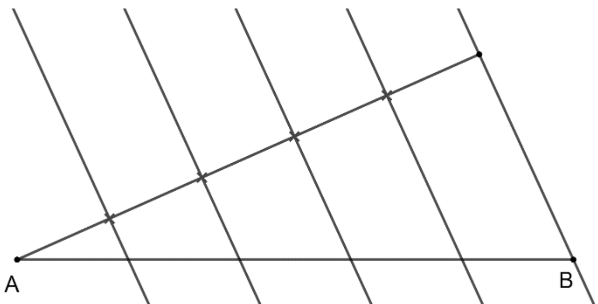
Pour partager un segment [AB] en $n$ segments de même longueur, on peut procéder comme suit :

- tracer une demi-droite [AX) (différente de [ AB)) ;
- choisir un écartement de compas et, en partant du point A, placer sur la demi droite [AX), $\boldsymbol{n}$ traits de graduation ;
- relier à la règle le dernier trait de la graduation et le point B ; puis tracer toutes les parallèles à cette droite qui passent par les traits de graduation.

Ces parallèles partagent le segment [AB] en $\boldsymbol{n}$ segments de même longueur.

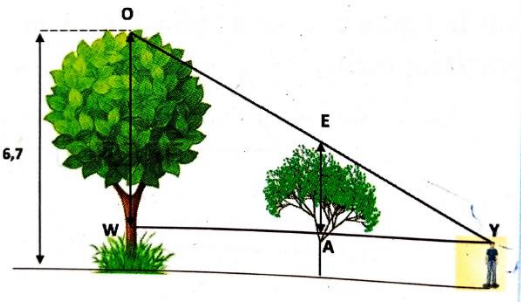
**Exercice de fixation**
Partage le segment [AB] en cinq parties égales à l’aide d’une équerre et d’un compas.


**Corrigé**



## C. SITUATION D'EVALUATION

Yéo a dans son jardin un anacardier et un manguier. Il se rappelle que lors de la visite de l'agent de l'agriculture, ce dernier avait déterminé les hauteurs de ces deux arbres mais il ne se rappelle que de la hauteur du manguier qui est 6,7 m. Son neveu qui est votre ami de classe vous sollicite afin de déterminer la hauteur de cet anacardier. Pour le faire, il se place à un endroit où ses yeux Y à 1,6 m du sol sont parfaitement alignés aves les cimes E et O des arbres. Les deux arbres sont distants de 30 mètres et la distance qui sépare le neveu de l'anacardier est de 20 mètres.
Sur la figure ci-dessous, les droites (OW) et (EA) sont perpendiculaires à (YW).




1) Justifie que les droites (OW) et (EA) sont parallèles.
2) Calcule la hauteur de l'anacardier.

**Corrigé**

1) Sur la figure, (OW)⊥ (YW) et (EA)⊥ (YW). Donc (OW) // (EA).

2) Calculons la hauteur EA de l'anacardier.
Considérons le triangle YOW.
E ∈ (YO) ; E ∈ (YW) et (OW) // (EA).
D'après la conséquence de la propriété de Thalès, on a :
$\frac{YA}{YW} = \frac{YE}{YO} = \frac{AE}{WO}$.
Par conséquent , $\frac{YA}{YW} = \frac{AE}{WO}$.
D'où $AE \times YW = YA \times WO$.
$AE = \frac{YA \times WO}{YW}$.
On a : $YA = 20\ m$ , $YW = YA + AW = 20 + 30 = 50\ m$ et $WO = 6,7 - 1,6 = 5,1\ m$.
Donc :
$$AE = \frac{20 \times 5,1}{50}$$
$AE = 2,04\ m$.

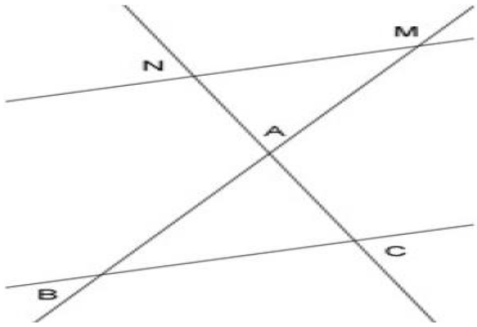


## D. EXERCICES

### D-1 Exercices de fixation

### Exercice 1

L’unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-dessous, les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On donne AM = 2, BM = 8 et AN = 3.
Calculer AC.




## Corrigé

ABC est un triangle, M ∈ (AB), N ∈ (AC) et (MN) // (BC).

D’après la propriété de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

On a : $AM \times AC = AN \times AB$.

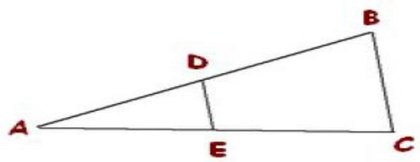
$AC = \frac{AN \times AB}{AM}$.

Or : $AB = BM - AM = 8 - 2 = 6$

Donc : $AC = \frac{AN \times AB}{AM} = \frac{3 \times 6}{2} = 9$.



**<u>Exercice 2</u>**
L’unité de longueur est le centimètre.
Soit ABC un triangle tel que AB = 6; AC = 9 et BC = 3.
On place un point D appartenant au segment [AB] tel que AD = 2.
et un point E appartenant au segment [AC] tel que AE = 3.
Montrons que (DE) et (BC) sont parallèles.




## Corrigé

Montrons que les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

ABC est un triangle. D ∈ (AB) et E ∈ (AC).

La position de D par rapport à A et B est la même que celle de E par rapport à A et C.

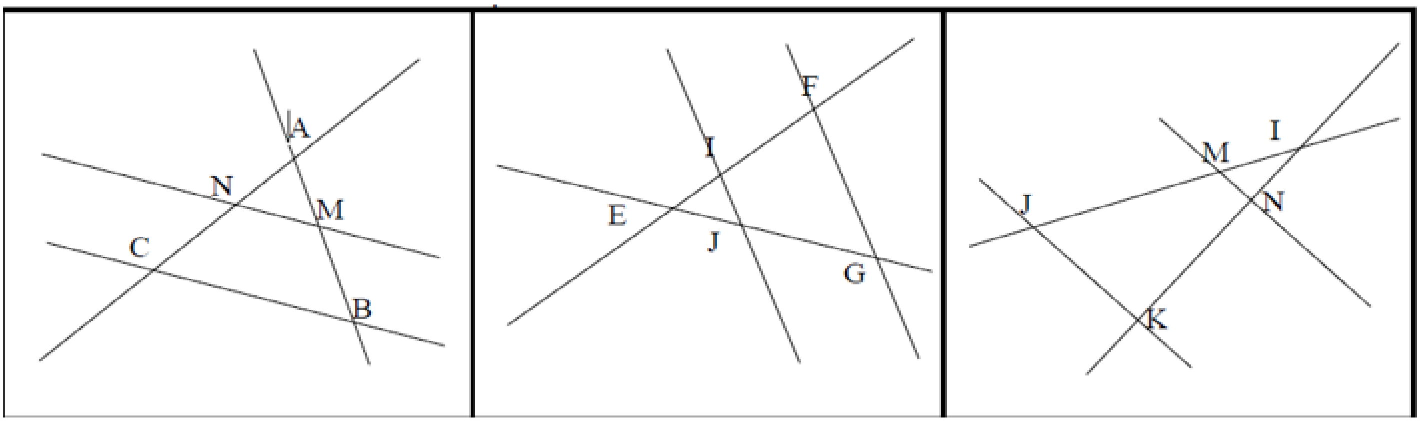
Calculons : $\frac{AD}{AB}$ et $\frac{AE}{AC}$

$\frac{AD}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $\frac{AE}{AC} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ , d’après la réciproque de la propriété de Thalès, (DE) // (BC).

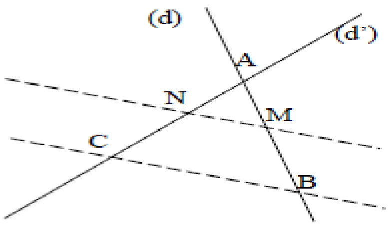
## Exercice 3

Utilise la propriété de Thalès pour écrire une égalité de quotients dans chacun des cas suivants :

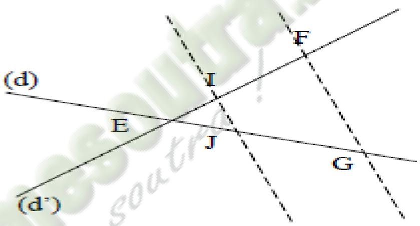



## Exercice 4

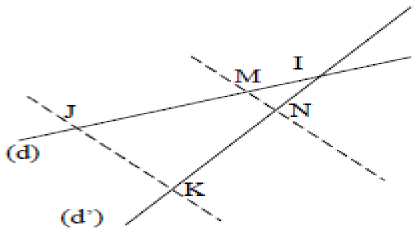
**1.** AM = 5 ; AB = 6 ; AC = 7,2
Calculer AN :



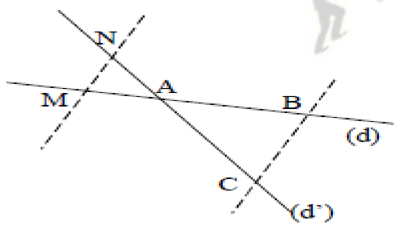

**2.** EI = 2,4 ; EF = 6 ; EJ = 3
Calculer EG :



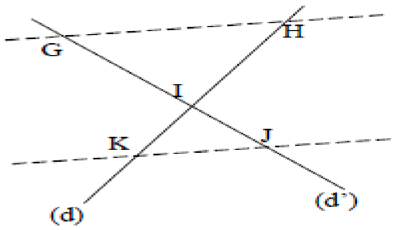

**3.** IM = 6,5 ; IJ = 15,6 ; JK = 8,4
Calculer MN :



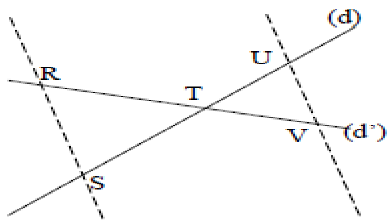

**4.** AM = 4,3 ; AB = 7,9 ; AC = 8,8
Calculer AN :




**5.** IJ = 3,1 ; IG = 7,2 ; IH = 7,3
Calculer IK :




**6.** UV = 7,6 ; TR = 10,5 ; RS = 9,8
Calculer TV :

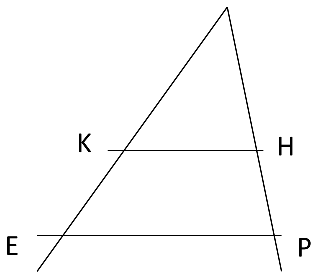



## D-2 Exercices de renforcement

## Exercice 5

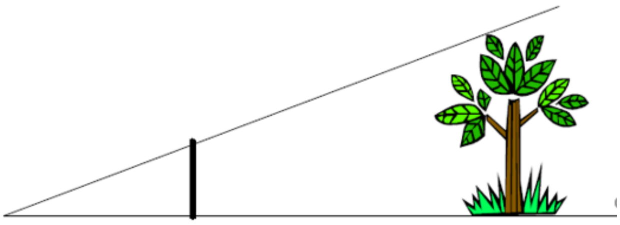
L'unité de longueur est le centimètre. Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, BEP est un triangle.
On donne : BE = 60 ; EP = 54 ; BK = 40 ; BH = 24 et HP = 12.

1. Justifie que les droites (KH) et (EP) sont parallèles.
2. Calcule la distance KH.




## Exercice 6

On tient un bâton verticalement à bout de bras de telle sorte que son extrémité supérieure soit alignée avec le haut de l'arbre et son extrémité inférieure avec le pied de l'arbre.



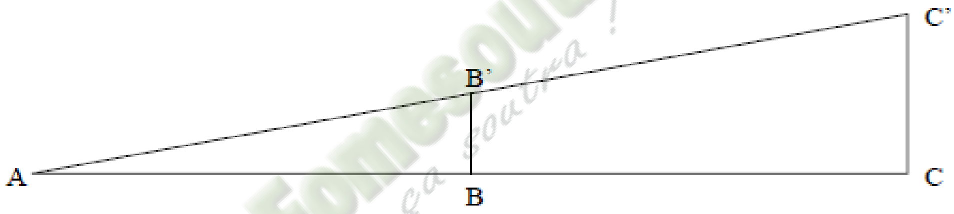
Longueur du bras : 1 m
Hauteur du bâton : 10 cm
Distance de l'arbre à l'observateur : 80 m

Indication : la hauteur des objets est proportionnelle à leur distance par rapport à l'observateur.

1. Placer les mesures sur le schéma

2. Calculer la hauteur de l'arbre

La hauteur du bâton est BB', la hauteur de l'arbre est ………., la longueur du bras est ……………, la distance de l'arbre à l'observateur est ……………..… .






Ecrire la relation qui vous a permis de trouver la hauteur de l'arbre :

## D-3 Exercice d'approfondissement

## EXERCICE 7

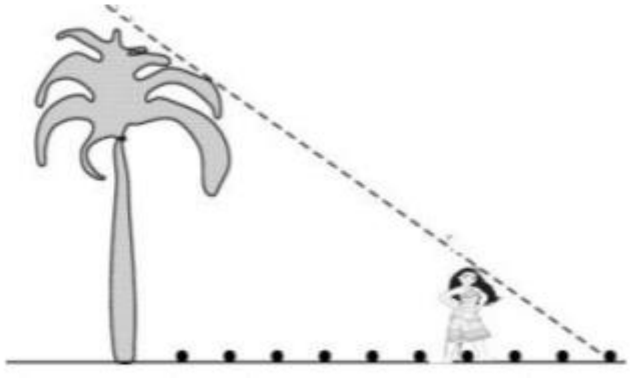
Document 1

Extrait de la liste alphabétique des élèves de la 3e F et d'informations relevées en E.P.S. pour préparer des épreuves d'athlétisme

| Prénom | Jour de naissance | Taille en m | Nombre de pas réalisés sur 100 m |
|---|---|---|---|
| Gary | 26/10 | 1,81 | 110 |
| Mattéo | 20/05 | 1,62 | 123 |
| Matthieu | 05/11 | 1,56 | 128 |
| Vaiana | 05/06 | 1,71 | 125 |
| William | 10/12 | 1,60 | 128 |
| Yohanna | 14/05 | 1,53 | 130 |

Document 2

Le croquis ci-dessous représente Vaiana élève de 3e F. Vaiana a d'abord posé sur le sol, à partir du cocotier, des noix de coco régulièrement espacées à chacun de ses pas, puis il s'est ensuite placé exactement comme indiqué sur le croquis, au niveau de la septième noix de coco et constate que le sommet de sa tête, la dixième noix de coco et le sommet de l'arbre sont alignés.



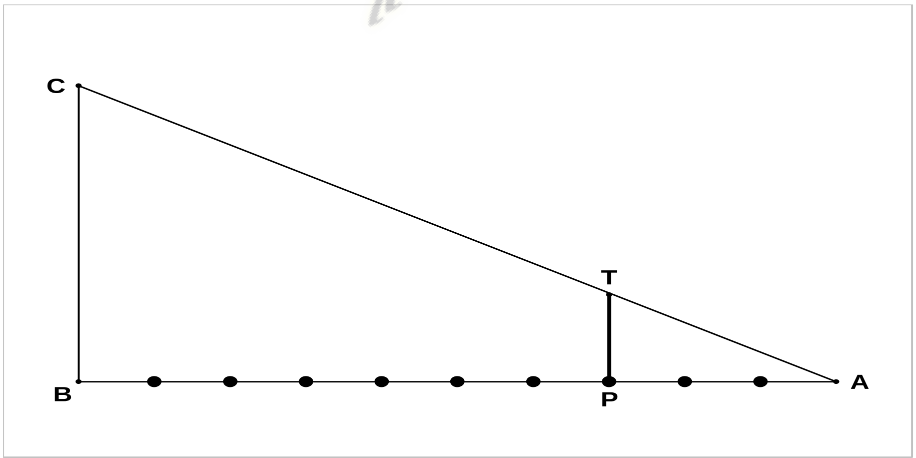
Il s'écrit : « je peux calculer la hauteur du cocotier »

A l'aide des informations qui proviennent des documents :

1. Représente la figure du document 2, en prenant :
- BC, la hauteur du cocotier ;
- PT la taille de Vaiana ;
- AB et AP représente respectivement 10 pas et 3 pas de Vaiana.
2. Justifie que la hauteur du cocotier est de 5,7 m.

Corrigé

1. BC représente la hauteur du cocotier, PT la taille de Vaiana, AB et AP représente respectivement 10 pas et 3 pas de Vaiana.




2. Dans le triangle ABC, on a (BC)// (PT). D'après la conséquence de la propriété de Thalès : $\frac{AP}{AB} = \frac{AT}{AC} = \frac{PT}{BC}$.

D'où $BC \times AP = AB \times PT$

$BC = \frac{AB \times PT}{AP}$

D’après le document 1, un pas de Vaiana mesure 1,25 m.

D’où $AB = 10 \times 1{,}25\text{m} = 12{,}5$ m et $AP = 3 \times 1{,}25$ m $= 3{,}75$ m.

PT désigne la taille de Vaiana d’où $PT = 1{,}71$ m.

Ainsi $BC = \frac{12{,}5 \text{ x } 1{,}71}{3{,}75} = 5{,}7$ m.

La hauteur du cocotier est de 5,7 m.

**THEME: CALCULS ALGEBRIQUES**

# LEÇON 3 : RACINES CARREES                Durée : 6 heures

## A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

La ferme d'un agriculteur dans le village de Foula est de forme carrée et d'aire égale à 500 $m^2$. Il veut savoir la longueur de grillage nécessaire pour clôturer sa ferme. Le grillage devra couvrir le portail. Il se confie au téléphone à son neveu qui est en classe de troisième au Collège Moderne de BOUNDIALI. Ce dernier collabore avec ses camarades de classe pour calculer la longueur du côté de la ferme et son périmètre.

## B- CONTENU DE LA LEÇON

### I- RACINES CARREES

1. **Définition**

***a*** désigne un nombre positif.

La racine carrée de ***a*** est le nombre positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est égal à $a$.

Le symbole '' $\sqrt{}$ '' est appelé radical.

**Exemples**

$5^2 = 25$ , d'où $\sqrt{25} = 5$.

$\sqrt{25}$ se lit racine carrée de 25 ou radical de 25.

**Conséquences**

Lorsque $a$ et $b$ sont deux nombres positifs, on a :

$\sqrt{a} \geq 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$

$\sqrt{a} = b$ équivaut à $a = b^2$

Exemple

$\sqrt{3} \geq 0$ ; $\sqrt{0} = 0$ ; $\sqrt{1} = 1$ ; $(\sqrt{7})^2 = 7$.

$\sqrt{36} = 6$ équivaut à $36 = 6^2$.

2. **Ensemble des nombres réels**

Définitions

- Les nombres qui ne sont pas rationnels sont appelés nombres irrationnels.
- L'ensemble formé de tous les nombres rationnels et irrationnels est appelé ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$.

Exemples

$\frac{2}{7}$ ; $-5$ ; $12$ ; $\sqrt{2}$ ; $-\sqrt{11}$ ; $2+\sqrt{5}$ ; $\pi$ sont des nombres réels.

3. **Valeur absolue d'un nombre réel**

Définition

$a$ désigne un nombre réel. On appelle valeur absolue de $a$, la distance à zéro du nombre $a$.

On la note : $|\ a\ |$

**Exemples**

| 21| = 21 ; |-5| = 5 ; | $-\sqrt{7}$| = $\sqrt{7}$ ; | 0 | = 0.

**Conséquences**

- Pour tout nombre réel $a$ positif, | $a$ | = $a$ .
- Pour tout nombre réel $a$ négatif, | $a$ | = $-a$ .

**Propriété**

La racine carrée du carré d'un nombre est égale à la valeur absolue de ce nombre.

Pour tout nombre réel $a$, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exercice de fixation

Donne une écriture sans radical de chacun des nombres ci-dessous :

a) $\sqrt{(-2{,}3)^2}$ b) $\sqrt{(6{,}1)^2}$ c) $\sqrt{(-\pi)^2}$

Corrigé

a) $\sqrt{(-2{,}3)^2} = |-2{,}3| = 2{,}3$ b) $\sqrt{(6{,}1)^2} = |6{,}1| = 6{,}1$ c) $\sqrt{(-\pi)^2} = |-\pi| = \pi$

## II- OPERATIONS ET RACINES CARREES

### 1. Produit et racines carrées

**Propriété**

$a$ et $b$ désignent des nombres positifs. On a : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ .

**Exercice de fixation**

Ecris chaque nombre ci-dessous sans le symbole $\sqrt{\ }$.

a) $\sqrt{49 \times 100}$ b) $\sqrt{25 \times 16}$ c) $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$ d) $\sqrt{12} \times \sqrt{3}$

**Corrigé**

a) $\sqrt{49 \times 100} = \sqrt{49} \times \sqrt{100} = 7 \times 10 = 70$.
b) $\sqrt{25 \times 16} = \sqrt{25} \times \sqrt{16} = 5 \times 4 = 20$.
c) $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$.
d) $\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{36} = 6$.

### 2. Quotient et racines carrées

**Propriété**

$a$ et $b$ désignent des nombres positifs et $b$ non nul. On a : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ .

**Exercice de fixation**

Ecris chaque nombre ci-dessous sans le symbole $\sqrt{\ }$.

a) $\sqrt{\frac{25}{9}}$ b) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$

Corrigé

a) $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$ b) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$

**Remarques**

En général, pour des réels positifs $a$ et $b$, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

De plus si $a > b, \sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

### 3. Puissances et racines carrées

**Propriété**

$a$ désigne un nombre réel strictement positif et $n$ un nombre entier relatif.

On a : $\sqrt{a^{2n}} = a^n$ et $\sqrt{a^{2n+1}} = a^n\sqrt{a}$.

**Exercice de fixation**

Complète les pointillés par les nombres qui conviennent.

$\sqrt{3^8} = \sqrt{3^{2\times\dots}} = 3^{\cdots}$ ; $\sqrt{7^{11}} = \sqrt{7^{2\times\dots+1}} = 7^{\cdots}\sqrt{7}$.

**Corrigé**

$\sqrt{3^8} = \sqrt{3^{2\times 4}} = 3^{4}$ ; $\sqrt{7^{11}} = \sqrt{7^{2\times 5+1}} = 7^{5}\sqrt{7}$.

### 4. Méthodes d'écriture d'un quotient sans radical au dénominateur

- Pour écrire un quotient de la forme $\frac{a}{\sqrt{b}}$ sans radical au dénominateur, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{b}$.

**Exemple**

Ecrivons $\frac{4}{\sqrt{15}}$ sans radical au dénominateur.

$\frac{4}{\sqrt{15}} = \frac{4\times\sqrt{15}}{\sqrt{15}\times\sqrt{15}} = \frac{4\sqrt{15}}{15}$ .

- Pour écrire un quotient de la forme $\frac{a}{b+c\sqrt{d}}$ sans radical au dénominateur, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $b - c\sqrt{d}$. On dit que $b - c\sqrt{d}$ est **l'expression conjuguée** de $b + c\sqrt{d}$.

**Exemple**

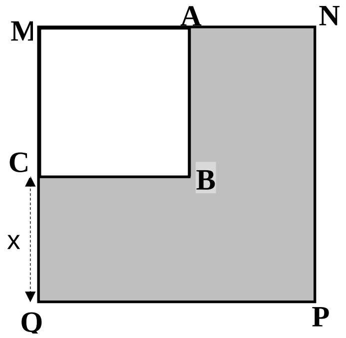
Ecrivons $\frac{3}{3+\sqrt{5}}$ sans radical au dénominateur.

$\frac{3}{3+\sqrt{5}} = \frac{3\times(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \frac{9-3\sqrt{5}}{9-5} = \frac{9-3\sqrt{5}}{4}$ .

## C- SITUATION D'EVALUATION

*L'unité de longueur est le mètre.*

Monsieur **TIENE** a un champ de forme carrée, de côté $30\sqrt{5}$ m, représenté par MNPQ comme l'indique la figure ci-contre.
Il a fait nettoyer une partie de forme carrée représentée par ABCM.
Il dispose de 32000 F CFA pour le nettoyage du reste du champ ***(partie coloriée sur la figure).***
Un manœuvre lui propose de nettoyer toute la partie restante à 10 F CFA le mètre carré.
Monsieur **TIENE** se demande si la somme dont il dispose sera suffisante pour le nettoyage du reste de son champ.




1) Justifie que MC = $(30\sqrt{5} - x)$
2) Démontre que l'aire en m² de la partie restante à nettoyer est : $A_r = \left(60\sqrt{5}x - x^2\right)$ m².
3) Sachant que $x$ = 30 m et $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$.
   Justifie qu'un encadrement de l'aire de la partie restante est :
   $3114^2 < A_r < 3132$ m².
4) En argumentant, réponds à la préoccupation de monsieur TIENE.

**Corrigé**

1) MC= MQ – MC = $(30\sqrt{5} - x)$m
2) Soit A l'aire de la partie nettoyée. A = MC² = $(30\sqrt{5} - x)^2$m² =$[(30\sqrt{5})^2 - 60\sqrt{5}x + x^2]$m²
   $A = \left(4500 - 60\sqrt{5}x + x^2\right)$m².

   On a : $A_r$ = aire(MNPQ) – A
   $= MN^2 - \left(4500 - 60\sqrt{5}x + x^2\right)$
   $= (30\sqrt{5})^2 - \left(4500 - 60\sqrt{5}x + x^2\right)$.

$= 4500 - \left(4500 - 60\sqrt{5}x + x^2\right)$

$A_r = \left(60\sqrt{5}x - x^2\right) m^2$

3) $x = 30m$, donc $A_r = 1800\sqrt{5} - 900 \ m^2$.

On a $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$

$1800\text{x } 2{,}23 < 1800\sqrt{5} < 1800\text{x}2{,}24$

$4014 - 900 < 1800\sqrt{5} - 900 < 4032 - 900$

$3114 < 1800\sqrt{5} - 900 < 3132$

D'où : $3114 \ m^2 < A_r < 3132 \ m^2$.

4) Un encadrement du montant qu'il faut pour nettoyer la partie restante est.

31140F < Montant < 31320F

M.TIENE dispose de 32000F qui est supérieur à 31320F. Donc il pourra nettoyer toute la partie restante.

## D- EXERCICES

### *D-1. Exercices de fixation*

*Exercice 1*

*Ecris les nombres réels ci-dessous sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers naturels avec b le plus petit possible.*

*1)* $\sqrt{125}$

*2)* $\sqrt{80}$

*3)* $\sqrt{164}$

*4)* $\sqrt{75} + \sqrt{48}$

*5)* $3\sqrt{8} - 5\sqrt{18}$

*6)* $3\sqrt{27} \times 2\sqrt{15}$

Corrigé

1) $\sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = 5\sqrt{5}$
2) $\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$
3) $\sqrt{164} = \sqrt{4 \times 41} = 2\sqrt{41}$
4) $\sqrt{75} + \sqrt{48} = 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$
5) $3\sqrt{8} - 5\sqrt{18} = 6\sqrt{2} - 15\sqrt{2} = -9\sqrt{2}$.
6) $3\sqrt{27} \times 2\sqrt{15} = 9\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{5} = 9 \times 3 \times 2\sqrt{5} = 54\sqrt{5}$.

*Exercice 2*

*Ecris plus simplement :*

*a.* $\sqrt{4 \times 64}$

*b.* $\sqrt{9 \times 16}$

c. $\sqrt{2} \times \sqrt{32}$

d. $\sqrt{3} \times \sqrt{27}$

e. $2\sqrt{7} \times 5\sqrt{28}$

Corrigé

*a.* $\sqrt{4 \times 64} = \sqrt{4} \times \sqrt{64} = 2 \times 8 = 16$

*b.* $\sqrt{9 \times 16} = \sqrt{9} \times \sqrt{16} = 3 \times 4 = 12$.

*c.* $\sqrt{2} \times \sqrt{32} = \sqrt{64} = 8$

*d.* $\sqrt{3} \times \sqrt{27} = \sqrt{81} = 9$.

e. $2\sqrt{7} \times 5\sqrt{28} = 10\sqrt{196} = 10 \times 14 = 140.$

*Exercice 3*

*Ecris plus simplement :*

- *a.* $\sqrt{\frac{16}{25}}$
- *b.* $\sqrt{\frac{49}{81}}$
- c. $\sqrt{5} \times \sqrt{\frac{5}{49}}$
- d. $\sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{100}{147}}$
- e. $\sqrt{\frac{49\times16}{25}}$

Corrigé

- a. $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$
- b. $\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \frac{7}{9}$
- c. $\sqrt{5} \times \sqrt{\frac{5}{49}} = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{25}}{7} = \frac{5}{7}$
- d. $\sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{100}{147}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{147}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{10}{7\sqrt{3}} = \frac{5}{7}.$
- e. $\sqrt{\frac{49\times16}{25}} = \frac{\sqrt{49}\times\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{7\times4}{5} = \frac{28}{5}$

## *D-2. Exercices de renforcement*

*Exercice 4*

*Développe, puis écris simplement :*

$a = \sqrt{3}(4 + 2\sqrt{3})$

$b = ( 2\sqrt{7} - 4)^2$

$c = ( 3\sqrt{2} -\sqrt{3}) ( 3\sqrt{2} + \sqrt{3})$

Corrigé

$a = \sqrt{3}(4 + 2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{9} = 4\sqrt{3} + 6.$

$b = ( 2\sqrt{7} - 4)^2 = (2\sqrt{7})^2 - 2 \times 2\sqrt{7} \times 4 + 4^2 = 28 - 16\sqrt{7} + 16 = 44 - 16\sqrt{7}.$

$c = ( 3\sqrt{2} -\sqrt{3}) ( 3\sqrt{2} + \sqrt{3}) = (3\sqrt{2})^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 18 - 3 = 15.$

*Exercice 5*

*Factorise les expressions littérales ci-dessous :*

- *a)* $x^2-25$
- *b)* $x^2- 11$
- *c)* $x^2- \frac{4}{9}$
- *d)* $4x^2-4\sqrt{3}x +3$
- *e)* $4x^2 + 4\sqrt{5}x + 5$
- *f)* $(x + 2)^2 - 4$
- *g)* $(x - 2)^2 - 5$

*Corrigé*

a) $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x-5)(x+5)$.

b) $x^2 - 11 = x^2 - \sqrt{11}^2 = (x-\sqrt{11})(x+\sqrt{11})$.

c) $x^2 - \frac{4}{9} = x^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = (x-\frac{2}{3})(x+\frac{2}{3})$.

d) $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = (2x)^2 - 2\times 2x \times \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = (2x-\sqrt{3})^2$

e) $4x^2 + 4\sqrt{5}x + 5 = (2x)^2 + 2\times 2x\times\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2 = (2x+\sqrt{5})^2$ .

f) $(x+2)^2 - 4 = (x+2)^2 - 2^2 = (x+2-2)(x+2+2) = x(x+4)$.

g) $(x-2)^2 - 5 = (x-2)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = (x-2-\sqrt{5})(x-2+\sqrt{5})$.

***D.3- <u>Exercices d'approfondissement</u>***

*<u>Exercice 6</u>*

*L'unité de longueur est le cm.*

*ABC est un triangle tel que : AB =3+2$\sqrt{3}$ ; AC = 3$\sqrt{3}$ - 2 et BC = 2$\sqrt{13}$ .*

*Démontre que le triangle ABC est rectangle.*

<u>Corrigé</u>

On a : $AB^2 = (3+2\sqrt{3})^2 = 3^2 + 2x3x2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 = 9 + 12\sqrt{3} + 2^2x3 = 21 + 12\sqrt{3}$ ;

$AC^2 = (3\sqrt{3}-2)^2 = (3\sqrt{3})^2 - 2x3\sqrt{3}x2 + 2^2 = 3^2x3 - 12\sqrt{3} + 4 = 31 - 12\sqrt{3}$ ;

$BC^2 = (2\sqrt{13})^2 = 2^2x13 = 52$

$AB^2 + AC^2 = 21 + 12\sqrt{3} + 31 - 12\sqrt{3} = 52$

On a : $AB^2+AC^2 = BC^2$.

D'après la réciproque de la propriété de Pythagore le triangle ABC est rectangle en A.

*<u>Exercice 7</u>*

*Ecris les nombres réels ci-dessous sans le symbole √ au dénominateur :*

$\frac{2}{3-\sqrt{5}}$ *et* $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$

<u>Corrigé</u>

$\frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{6+2\sqrt{5}}{3^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{9-5} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ .

$\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} = \frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \frac{(\sqrt{5})^2-2x\sqrt{5}x2+2^2}{(\sqrt{5})^2-2^2} = \frac{5-4\sqrt{5}+4}{5-4} = \frac{9-4\sqrt{5}}{1} = 9-4\sqrt{5}$ .

*<u>Exercice 8</u>*

L'unité de longueur est le centimètre.

Un rectangle a pour longueur $2\sqrt{3}+2$ et pour largeur $2\sqrt{3}-2$.

a) Calcule le périmètre de ce rectangle.

b) Calcule son aire.

<u>Corrigé</u>

a) Le périmètre P de ce rectangle est :

$P = 2\left(2\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}-2\right) = 8\sqrt{3}$.

Donc le périmètre est $8\sqrt{3}$ cm .

b) Calculons l'aire A de ce rectangle

$A = \left(2\sqrt{3}+2\right)\left(2\sqrt{3}-2\right) = (2\sqrt{3})^2 - 2^2 = 12 - 4 = 8$.

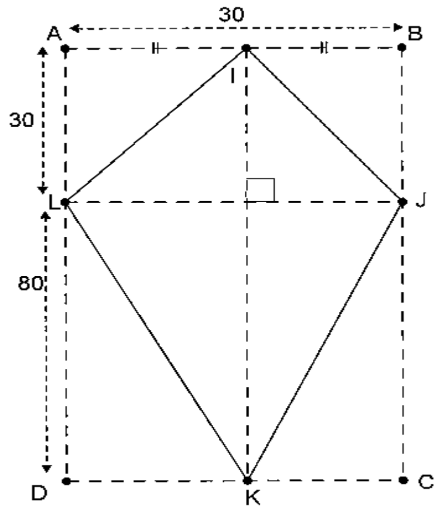
Donc l'aire de ce rectangles est 8 $cm^2$.

# Thème : Géométrie du plan

# Leçon 4 : TRIANGLE RECTANGLE                                    Heure : 10 heures

## A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour marquer leur participation à la kermesse du Lycée Moderne de Mankono, les élèves du niveau 3ème dudit établissement se proposent de fabriquer un grand cerf- volant dont la maquette IJKL réalisée par un professeur de mathématiques est ci-contre. Pour une bonne production, ils décident de déterminer les dimensions des côtés du cerf-volant et la mesure de chacun de ses angles.






## B. CONTENU DE LA LEÇON

### I. PROPRIÉTÉS DE PYTHAGORE

#### 1. La propriété de Pythagore

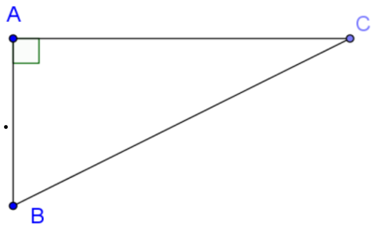
**Propriété**

Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

***Exemple***

ABC est un triangle rectangle en A.

D'après la propriété de Pythagore ; $BC^2 = AB^2 + AC^2$.




Exercices de fixation

Exercice 1

Choisis la bonne réponse parmi les propositions suivantes.

EFG est un triangle rectangle en E.

D'après la propriété de Phytagore:

a) $EF^2 = EG^2 + GF^2$    b) $EG^2 = EF^2 + FG^2$    c) $FG^2 = FE^2 + EG^2$.

Corrigé

a).

Exercice 2
L'unité de longueur est le centimetre.
ABC est un triangle rectangle en A tel que AB=4 et AC=3.
Calcule AB.

Corrigé
ABC est un triangle rectangle en A.
D'après la propriété de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
Donc $BC^2 = 4^2 + 3^2$ ;
$BC^2 = 16 + 9$ ;
Alors, $BC^2 = 25$. D'où $BC = \sqrt{25} = 5$.

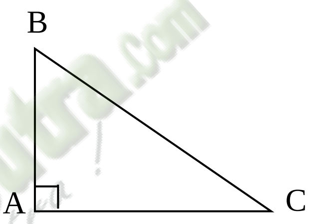
### 2. La réciproque de la propriété de Pythagore

**Propriété**
Dans un triangle, si le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

***Exemple***
ABC est un triangle.

$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$

ABC est un triangle rectangle en A






Exercice de fixation
L'unité de longueur est le centimetre.
ABC est un triangle tel que : $AB = 10$ ; $AC = 10$ $et$ $BC = 6$.
Justifie que le triangle ABC est rectangle en C.

**Corrigé**
On a: $AB^2 = (10)^2 = 10$ ; $AC^2 = (8)^2 = 64$ $et$ $BC^2 = (6)^2 = 36$.
Comme $100 = 64 + 36$, alors $AB^2 = AC^2 + BC^2$ donc, d'après la réciproque de Pythagore le triangle ABC est rectangle en C.

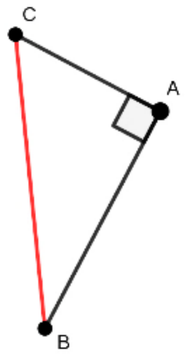
## II. CONSTRUCTION D'UN SEGMENT DE LONGUEUR $\sqrt{a}$ , $a > 0$

**Programme de construction**

**Exemple 1**

Pour construire un segment [BC] de longueur $\sqrt{13}$ cm sachant que $13 = 9 + 4$, on peut procéder comme suit : (En remarquant que $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$ ; $3^2 = 9$ et $2^2 = 4$)

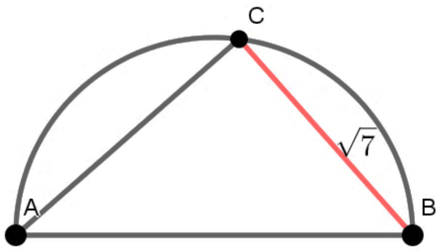
- on construit deux demi-droites de même origine A et de supports perpendiculaires ;
- sur l'une de ces deux demi-droites, on place le point B tel que AB=3 cm et sur l'autre demi-droite, on place le point C tel que AC=2 cm ;
- on trace le segment [BC] cherché.



**Exemple 2**

Pour construire un segment [BC] de longueur $\sqrt{7}$ cm sachant que $7 = 16 - 9$, on peut procéder comme suit :
(En remarquant que $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$ ; $3^2 = 9$ et $4^2 = 16$)

- on construit un demi-cercle de diamètre AB=4 cm ;
- sur ce demi-cercle, on place le point C tel que AC=3 cm ;
- on trace le segment [BC].




Exercices de fixation

Exercice 1

L'unité de longueur est le centimètre.

Sachant que $58 = 3^2 + 7^2$ , construis un segment [MP] de longueur $\sqrt{58}$.
Donne ta méthode de construction que tu justifieras.

Corrigé

On sait que $58 = 3^2 + 7^2$

d'où $(\sqrt{58})^2 = 3^2 + 7^2$

Construire un segment de longueur $\sqrt{58}$ revient à construire un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent respectivement 3 et 7.

Programme de construction

- On trace un segment [EP] de longueur 7.
- On trace une droite passant par le point E et perpendiculaire à la droite (EP).
- Sur cette droite, on place le point M tel que EM = 3.
- On trace le segment [MP] cherché.

Justification

Le triangle MEP est rectangle en E.
Donc, d'après la propriété de Pythagore :

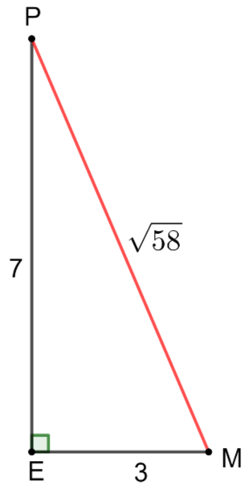
$MP^2 = EM^2 + EP^2$

$MP^2 = 3^2 + 7^2$

$MP^2 = 58$

$MP = \sqrt{58}$.

Construction




Exercice 2

Sachant que $65 = 9^2 - 4^2$ , construis un segment [NQ] de longueur $\sqrt{65}$.
Donne ta méthode de construction que tu justifieras.

Corrigé

On sait que $65 = 9^2 - 4^2$.

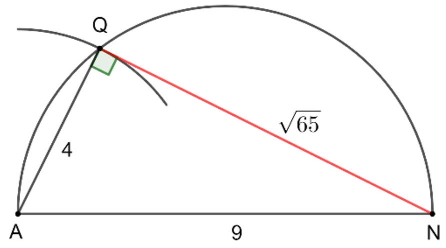
D'où $9^2 = (\sqrt{65})^2 + 4^2$.

Construire un segment de longueur $\sqrt{65}$ revient à construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 9 et l'un des côtés de l'angle droit mesure 4.

Programme de construction

- On trace un segment [NA] de longueur 9.
- On trace le demi-cercle de diamètre [NA].
- Sur cet demi-cercle et à l'aide du compas, on place le point Q tel que $AQ = 4$.
- On trace le segment [NQ] cherché.

Construction




Justification

Le point Q appartient au cercle de diamètre [NA]. Donc le triangle NAQ est rectangle en Q.

D'après la propriété de Pythagore :

$NA^2 = AQ^2 + NQ^2$

$9^2 = 4^2 + NQ^2$

$NQ^2 = 9^2 - 4^2$

$NQ^2 = 65$

$NQ = \sqrt{65}$.

## III. PROPRIETE METRIQUE DEDUITE DE L'AIRE

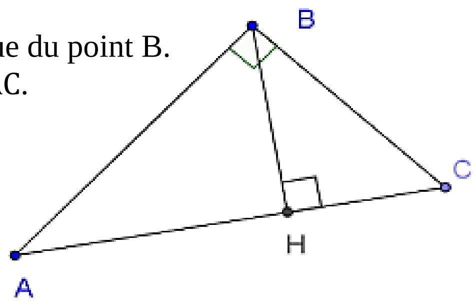
**Propriété**

Dans un triangle rectangle, le produit des côtés de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse et de la hauteur passant par le sommet de l'angle droit.

**Exemple**

ABC est un triangle rectangle en B et H est le pied de la hauteur issue du point B.

D'après la propriété métrique déduite de l'aire : $AB \times BC = BH \times AC$.




Exercices de fixation

Exercice 1

Choisis la bonne réponse parmi les propositions suivantes.

MOP est un triangle rectangle en P.

K est le pied de la hauteur issue du point P.

D'après la propriété métrique déduite de l'aire:

a) $MK \times OP = MP \times OK$ b) $MP \times OP = MO \times PK$ c) $MO \times MP = KO \times MK$

Corrigé

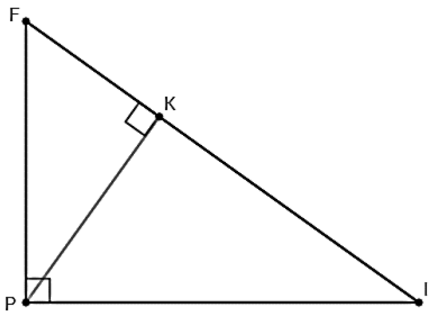
b).

Exercice 2

FIP est un triangle rectangle en P et K est la hauteur issue du sommet P.

On donne : FP = 4cm ; PI = 2cm et FI =$2\sqrt{5}$cm.

Justifie que PK=$\frac{4\sqrt{5}}{5}$.




**Corrigé**

FIP est un triangle rectangle en P.

K est le pied de la hauteur issue du sommet P.

D'après la propriété métrique déduite de l'aire, on a : FP$\times PI = PK \times IF$.

Donc $PK = \frac{FP\times PI}{IF}$.

$PK = \frac{4\times 2}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

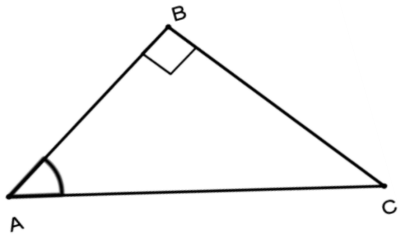
## IV. SINUS ET COSINUS D'UN ANGLE AIGU DANS UN TRIANGLE

### 1. Sinus d'un angle aigu

Dans un triangle rectangle, on appelle sinus d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{\text{Côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}}$$

***Exemple***




Dans le triangle ABC rectangle en B, on a : sin $\widehat{BAC} = \frac{\text{BC}}{\text{AC}}$ .



Exercices de fixation

Exercice 1

Choisis la bonne réponse parmi, les propositions suivantes.

IJK est un triangle rectangle en J, alors sin $\widehat{IKJ}$ est égal à :

a) $\frac{IJ}{KJ}$ b) $\frac{IJ}{IK}$ c) $\frac{JK}{IK}$

Corrigé

b).

Exercice 2

ABC est triangle rectangle en B tels que : $AB = 4\ cm; AC = 5\ cm\ et\ BC = 3\ cm$.

Calcule $\sin \widehat{BCA}$.

Corrigé

ABC est triangle rectangle en B.

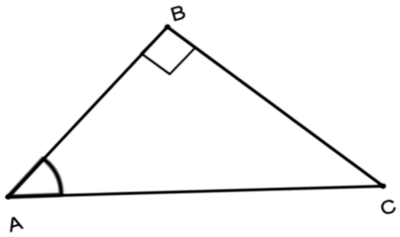
Alors, $\sin \widehat{BCA} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$.

## 2. Cosinus d'un angle aigu

Dans un triangle rectangle, on appelle cosinus d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur l'hypoténuse.

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{Côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}}$$

***<u>Exemple</u>***




Dans le triangle ABC rectangle en B, on a : $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC}$.

<u>Exercices de fixation</u>
<u>Exercice 1</u>
Choisis la bonne réponse parmi, les propositions suivantes.
OPQ est un triangle rectangle en O, alors $\cos \widehat{OPQ}$ est égal à :

a) $\frac{OP}{OQ}$ b) $\frac{PQ}{OQ}$ c) $\frac{OP}{PQ}$

Corrigé
c).

<u>Exercice 2</u>
ABC est triangle rectangle en B tels que : $AB = 4\ cm; AC = 5\ cm\ et\ BC = 3\ cm$
Calcule $\cos \widehat{BAC}$.

Corrigé
ABC est triangle rectangle en B. Alors, on a $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$.

## 3. Propriétés

### a. Propriétés du sinus et cosinus d'un angle

Pour tout angle aigu de mesure $a°$, on a :

- $0 < \sin a° < 1$ ;
- $0 < \cos a° < 1$ ;
- $\sin^2 a° + \cos^2 a° = 1$.

### b. Sinus et cosinus de deux angles complémentaires

**<u>Propriété</u>**
Lorsque deux angles sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.
Autrement dit, si $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont deux angles tels que $mes\hat{A} + mes\hat{B} = 90°$ alors :
$\sin \hat{A} = \cos \hat{B}$ et $\cos \hat{A} = \sin \hat{B}$.

<u>Exercice de fixation</u>
On donne $\cos 23° = 0{,}9205$ et $\sin 51° = 0{,}771$.
Détermine une valeur approchée de $\sin 67°\ et\ \cos 39°$.

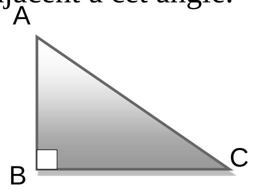
Corrigé

On a: $23° + 67° = 90°$ donc, $\sin 67° = \cos 23° = 0{,}9205$.
De même $\cos 39° = \sin 51° = 0{,}771$.

## V. TANGENTE D'UN ANGLE AIGU

### 1. Définition

Dans un triangle rectangle, on appelle tangente d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur le côté adjacent à cet angle.




Dans le triangle ABC rectangle en B, on a :

$tan\,\widehat{BAC} = \frac{Côté\ opposé\ à\ \widehat{BAC}}{Côté\ adjacent\ à\ \widehat{BAC}} = \frac{BC}{AB}$

### 2. Propriété

La tangente d'un angle aigu est égale au quotient du sinus de cet angle par son cosinus.

Autrement dit ; si $\hat{A}$ est un angle aigu, on a : $tan\,\hat{A} = \frac{sin\hat{A}}{cos\hat{A}}$ .

Exercices de fixation

Exercice 1

Choisis la bonne réponse parmi, les propositions suivantes.

RST est un triangle rectangle en R, alors tan $\widehat{RST}$ est égal à :

a) $\frac{RS}{ST}$ b) $\frac{TR}{RS}$ c) $\frac{TS}{TR}$

Corrigé

b).



Exercice 2

ABC est un triangle rectangle en B.

Calcule $tan\,\hat{A}$ lorsque :

a) $sin\,\hat{A} = \frac{1}{3}$ et $cos\,\hat{A} = \frac{3\sqrt{2}}{3}$.

b) $sin\,\hat{A} = \frac{3}{5}$ et $cos\,\hat{A} = \frac{4}{5}$.

Corrigé

a) $tan\,\hat{A} = \frac{sin\hat{A}}{cos\hat{A}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

b) $tan\,\hat{A} = \frac{sin\hat{A}}{cos\hat{A}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$.

## VI. UTILISATION DE LA TABLE TRIGONOMETRIQUE

On utilise la table trigonométrique pour:

- trouver le sinus, le cosinus ou la tangente d'un angle donné.

Exemple

On lit dans la table trigonométrique au millième près,

sin 12° ≈ 0,208, cos 71 ° ≈ 0,326 et tan 15° ≈ 0,268 .

Exercice de fixation

Utilise la table trigonométrique pour donner un arrondi au millième près de : cos 10° ; sin 32° ; sin 72° et cos 53°.

Corrigé

cos 10°≈0,985 ; sin 32° ≈0,540 ; sin 72°≈0,951 et cos 53°≈0,602.

.

Extrait de la table trigonométrique

| degré | sin | cos | tan | 1/tan | |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 0,208 | 0,978 | 0,213 | 4,705 | 78 |
| 13 | 0,225 | 0,974 | 0,231 | 4,331 | 77 |
| 14 | 0,242 | 0,970 | 0,249 | 4,011 | 76 |
| 15 | 0,259 | 0,966 | 0,268 | 3,732 | 75 |
| 16 | 0,276 | 0,961 | 0,287 | 3,487 | 74 |
| 17 | 0,292 | 0,956 | 0,306 | 3,271 | 73 |
| 18 | 0,309 | 0,951 | 0,325 | 3,078 | 72 |
| 19 | 0,326 | 0,946 | 0,344 | 2,904 | 71 |
| | cos | sin | 1/tan | tan | degré |

- encadrer la mesure d’un angle par deux mesures d’angle consécutives connaissant soit son sinus, soit son cosinus ou sa tangente.

Exemple

A l'aide de la table trigonométrique, donne un encadrement de mes $\hat{F}$ sachant que cos $\hat{F}$ = 0,302.

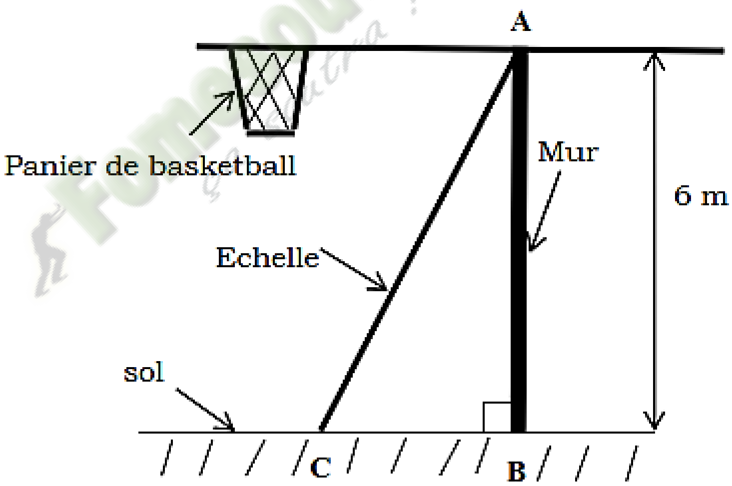
A partir de la table trigonométrique, on a : 0,292 < 0,302 < 0,309.

Alors, cos 73° < cos $\hat{F}$ < cos 72° , donc 72° < mes $\hat{F}$ < 73°.

## C. SITUATION D’EVALUATION

Pour participer à un tournoi communal de basketball organisé par le maire, le président des jeunes veux installer un panier de basket pour l’entrainement de l’équipe du quartier.
Le président des jeunes veut fixer le panier de basquet sur un mur à 6 m du sol.
Il dispose d’une échelle qui mesure 6,5 m de long.
Un maçon indique que le panier sera bien placé si l’angle formé par l’échelle et le sol est compris entre 60° et 70°.

1. Détermine la distance entre le pied du mur et le point d’appui de l’échelle.
2. Calcule le sinus de l’angle formé par l’échelle et le sol (sin $\widehat{ACB}$).
3. Dis si le panier sera bien placé.




**Extrait de table trigonométrique**

| Angle | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| cos | 0,423 | 0,407 | 0,391 | 0,375 | 0,358 | 0,342 |
| sin | 0,906 | 0,914 | 0,921 | 0,927 | 0,934 | 0,940 |

Corrigé

1. Considérons le triangle ABC rectangle en B .

D’après la propriété de Pythagore $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

d’où $BC^2 = AC^2 - AB^2$

$= 6,5^2 - 6^2$

$= 6,25$

Donc $BC = \sqrt{6,25} = 2,5$.

D’où la distance entre le pied du mur et le point d’appui de l’échelle est de 2,5 m.

2. Considérons le triangle ABC rectangle en B.

Alors, sin $\widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}$

$= \frac{6}{6,5} \approx 0,923.$

Encadrons $mes\ \widehat{ACB}$ par entire consécutifs.

On a 0,921 < 0,923 < 0 ,927, donc sin 67°< sin $\widehat{ACB}$ < sin 68°.

D'où 67°< mes $\widehat{ACB}$ < 68°.

Comme 67°< mes $\widehat{ACB}$ < 68°, alors l'angle formé par l'échelle et le sol est compris entre 60° et 70°.

Donc, le panier sera bien placé.

## D. EXERCICES

### D-1 EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

Recopie puis complète les propriétés suivantes.

1. « Si …….., alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$».
2. « Si un triangle RST est rectangle en S, alors ……. ».
3. « Si ……, alors $AB^2 = BC^2 + AC^2$ ».

Corrigé

1. « Si un triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$».
2. « Si un triangle RST est rectangle en S, alors $RT^2 = RS^2 + ST^2$ ».
3. « Si un triangle ABC est rectangle en C, alors $AB^2 = BC^2 + AC^2$ ».



Exercice 2

L'unité de longueur est le centimetre.

DEF est un triangle rectangle en D, tel que: DE=5 et DF=12.

Calcule EF.

Corrigé

DEF est un triangle rectangle en D.

D'après la propriété de Pythagore, $EF^2 = ED^2 + DF^2$.

Donc $EF^2 = 5^2 + 12^2$ ;

$EF^2 = 25 + 144$ ;

Alors, $EF^2 = 169$. D'où $EF = \sqrt{169} = 13$.

Exercice 3

L'unité de longueur est le centimetre.

MNP est un triangle rectangle en M, tel que: NP=10 cm et MP=8 cm.

Calcule MN.

Corrigé

MNP est un triangle rectangle en M.

D'après la propriété de Pythagore, $NP^2 = MN^2 + MP^2$.

Donc $MN^2 = NP^2 - MP^2$ ;

$MN^2 = 10^2 - 8^2$ ;

$MN^2 = 100 - 64$.

Alors, $MN^2 = 36$. D'où $MN = \sqrt{36} = 6$.

<u>Exercice 4</u>

Recopie puis complète les propriétés suivantes.

1. « Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ...... est rectangle en ……. ».
2. « Si $LN^2 = LM^2 + NM^2$, alors le triangle ….. est rectangle en …… ».
3. « Si $DF^2 = FE^2 + DE^2$, alors le triangle ……. Est rectangle en …… ».

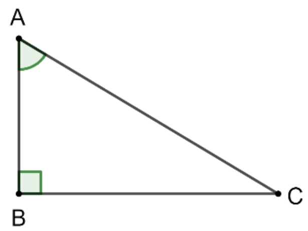
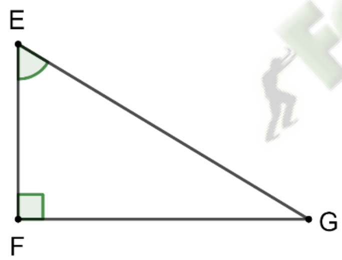
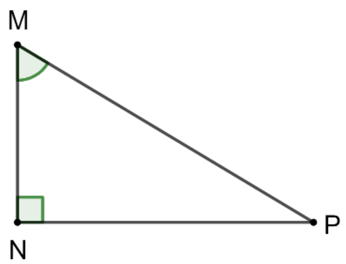
Corrigé

1. « Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A ».
2. « Si $LN^2 = LM^2 + NM^2$, alors le triangle LMN est rectangle en M ».
3. « Si $DF^2 = FE^2 + DE^2$, alors le triangle DEF Est rectangle en E ».

<u>Exercice 5</u>

Pour chaque ligne du tableau, une seule affirmation est juste.

Recopie le numéro de la ligne et la letter correspondante à l'affirmation juste.

| N° | Affirmations | Réponses | | |
|---|---|---|---|---|
| | | a | b | c |
| 1 | <br>sin $\widehat{BAC}$ est égal à | $\frac{AB}{AC}$ | $\frac{BC}{AC}$ | $\frac{AB}{BC}$ |
| 2 | <br>cos $\widehat{FEG}$ est égal à | $\frac{EF}{EG}$ | $\frac{FG}{EG}$ | $\frac{EF}{FG}$ |
| 3 | <br>tan $\widehat{NMP}$ est égal à | $\frac{MN}{MP}$ | $\frac{MN}{NP}$ | $\frac{NP}{MN}$ |

Corrigé

1-b ; 2-a ; 3-c.

Exercice 6

L'unité de longueur est le centimetre.

ABC est un triangle rectangle en A, tel que AB=6, AC=8 et BC=10.

Calcule:

sin $\hat{B}$ ; cos $\hat{B}$ ; tan $\hat{B}$.

Corrigé

ABC est triangle rectangle en A. Alors, on a:

- $sin\,\hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ .
- $cos\,\hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.
- $tan\,\hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

## D-2 EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 7

L'unité de longueur est le centimètre.

MNP est un triangle rectangle en P tel que : MN $= 8$ et mes $\widehat{\text{MNP}} = 30°$.

On donne $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 30° = \frac{1}{2}$ et $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Calcule $MP\ et\ PN$.

Corrigé

MNP est un triangle rectangle en P.

Alors, on a $\sin \widehat{\text{MNP}} = \frac{MP}{MN}$, d'où $MP = MN \times \sin \widehat{MNP}$.

Donc, $MP = 8 \times \sin 30° = 8 \times \frac{1}{2} = 4$.

On a $\cos \widehat{NMP} = \frac{NP}{MN}$, d'où $PN = MN \times \cos \widehat{NMP}$.

Donc, $PN = 8 \times \cos 30° = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

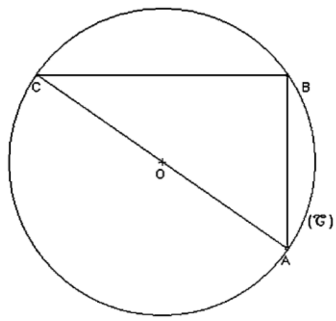
Exercice 8

L'unité de longueur est le centimètre.

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur,

ABC est un triangle inscrit dans le cercle (C ) de centre O et de diamètre [AC].

On donne : $AB = 4\sqrt{3}$ ; $AC = 8$ ; $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$; $\cos 30° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.




1. Justifie que ABC est un triangle rectangle en B.
2. Justifie que $\sin \widehat{ACB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.

Corrigé

1. Le triangle ABC est inscrit dans le cercle (C ) et son côté [AC] est un diamètre du cercle (C ), donc ABC est un triangle rectangle en B.
2. Considérons le triangle ABC, rectangle en B.

   Alors on a : $\sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Comme $\sin \widehat{ACB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ alors, mes $\widehat{ACB} = 60°$.

Exercice 9

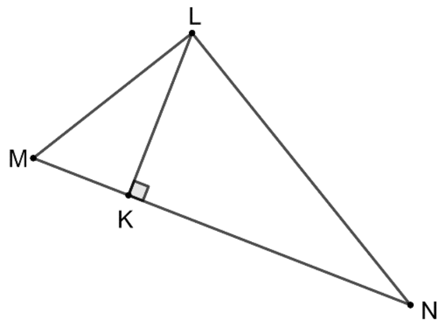
L'unité de longueur est le centimètre.

On considère la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur :

On donne MN=8 ; ML=4,8 et LN=6,4.

1. Démontre que LMN est un triangle rectangle en L.
2. K est le pied de la hauteur issue du sommet L.

Calcule LK.




**D-3 Exercices d'approfondissement**

Exercice 10

L'unité de longueur est le centimètre.

Sur la figure ci-dessous qui n'est pas en vraie grandeur, ABCD est un rectangle.

M est un point de [AB].

On donne AB=18,4 ; AD=7,2 et DM=7,8.

1. Justifie que AM=3 et que MC=7,8.
2. Le triangle DMC est-il rectangle ? Justifie ta réponse.

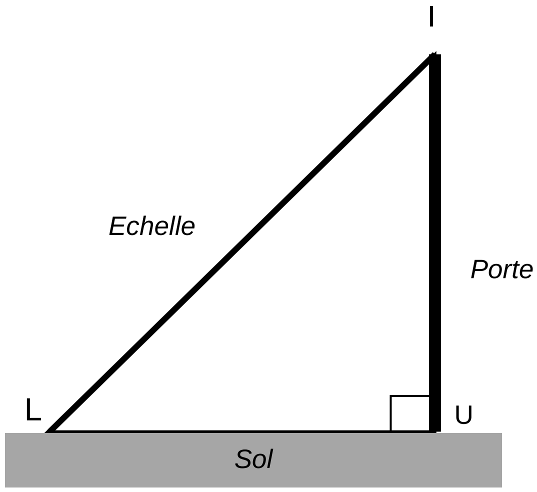
Exercice 11

Pour mieux éclairer devant la salle des professeurs, monsieur YEO l'électricien, veut fixer une ampoule devant la porte. Pour cela, il dispose d'une échelle de 4m et la porte a une hauteur de 2m.

En vu de prendre des précautions, il veut savoir la mesure de l'angle formé par l'échelle et le sol.

A quelle distance du pied de la porte doit-il placer l'échelle pour que son sommet soit juste au niveau de la porte ?

Détermine l'angle formé par l'échelle et le sol.



# Thème : CALCULS ALGEBRIQUES

# Leçon 5 : CALCUL NUMERIQUE Durée : 10h

## A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans une grande ville de la Côte d'Ivoire, un commerçant souhaite acheter un terrain dont l'aire est comprise entre 230 m² et 300 m² pour y construire un magasin.

A cet effet, il contacte un propriétaire terrien. Celui-ci possède un terrain dont il ne retrouve pas l'extrait topographique. Cependant, il se rappelle que la longueur de son terrain est comprise entre 17 m et 18 m et la largeur entre 14 m et 15 m.

Pour savoir si son terrain répond aux critères du commerçant, il s'adresse à sa fille qui est en classe de troisième dans un collège de la ville.

Arrivée en classe, la fille du commerçant soumet à ses camarades la préoccupation de son père. Intéressés, tous les élèves décident d'effectuer des recherches sur les intervalles, la comparaison des nombres réels et les encadrements.

## B. CONTENU DE LA LECON

### I - INTERVALLES

#### 1. Nouvelles Inégalités

Soit $a$ et $b$ deux nombres réels.

| Ecriture | Lecture | Signification |
|---|---|---|
| $a \geq b$ | $a$ est supérieur ou égal à $b$ | $a \geq b$ équivaut à $a = b$ *ou* $a > b$ |
| $a \leq b$ | $a$ est inférieur ou égal à $b$ | $a \leq b$ équivaut à $a = b$ *ou* $a < b$ |

**Exercice de fixation**

Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des affirmations suivantes.

a) $0,2 \geq \frac{2}{10}$ b) $4,1 > 2,53$ c) $7,4 < -119$
d) $8 \leq 8$ e) $0,065 \geq 0,09$ f) $81 < 81$.

**Corrigé**

a) V b) V c) F d) V e) F f ) F

## 2. Vocabulaire et représentation

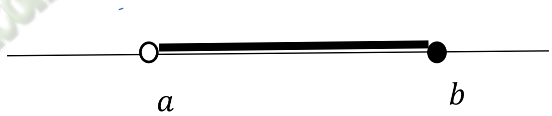
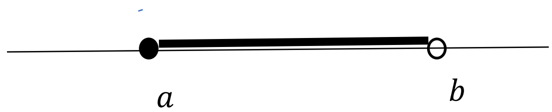
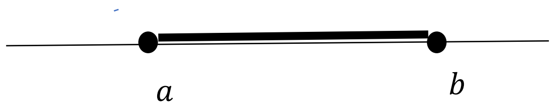
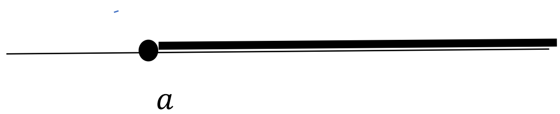
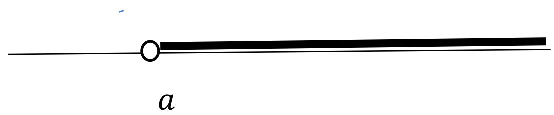
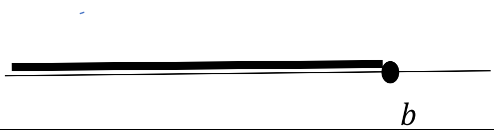
$a$ et $b$ deux nombres réels tel que : $a < b$.

- Les nombres $a$ et $b$ sont les **bornes** de chacun des intervalles suivants :

  [a ; b] ; [ a ; b [ ; ] a ;b ] et ] a ;b [.
- La distance $|a - b|$ des nombres $a$ et $b$ est appelée **l'amplitude de ces intervalles**.
- À tout élément $x$ de chacun de ces intervalles, on peut associer respectivement l'encadrement :

  $a \leq x \leq b$ ; $a \leq x < b$ ; $a < x \leq b$ ; $a < x < b$.
- $|a - b|$ est aussi **l'amplitude de ces encadrements**.
- Le nombre $\frac{a+b}{2}$ est le centre de ces intervalles.

**Tableau récapitulatif**

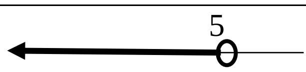
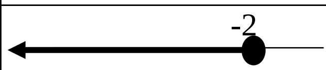
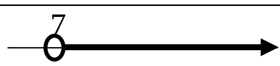
| **Ecriture** | **Lecture** | **Ensemble des $x$ tels que :** | **Représentation graphique** |
|---|---|---|---|
| $]a; b[$ | Intervalle ouvert $a, b$ | $a < x < b$ |  |
| $]a; b]$ | Intervalle $a, b$<br>ouvert en $a$, fermé en $b$ | $a < x \leq b$ |  |
| $[a; b[$ | Intervalle $a, b$,<br>fermé en $a$, ouvert en $b$ | $a \leq x < b$ |  |
| $[a; b]$ | Intervalle fermé $a, b$ | $a \leq x \leq b$ |  |
| $[a; \rightarrow[$ | Intervalle des nombres supérieurs ou égaux à $\boldsymbol{a}$ | $x \geq a$ |  |
| $]a; \rightarrow[$ | Intervalle des nombres plus grands que $\boldsymbol{a}$ | $x > a$ |  |
| $]\leftarrow; b]$ | Intervalle des nombres inférieurs ou égaux à $b$ | $x \leq b$ |  |
| $]\leftarrow; b[$ | Intervalle des nombres plus petits que $b$ | $x < b$ |  |

## Exercice de fixation

Dans le tableau ci-dessous, complète les cases vides.

| Ecriture | Lecture | Ensemble des $x$ tels que : | Représentation graphique |
|---|---|---|---|
| [-3 ; 4] | | | |
| | **Intervalle** $-7$ ; 0<br>fermé en $-7$, ouvert en 0 | | |
| | | $2 < x \leq 4{,}5$ | |
| | | |   |
| | **Intervalle** des nombres plus petits que 5 | | |
| ]← ; -2] | | | |
| | | x > 7 | |
| | | |   |

### Corrigé

| Ecriture | Lecture | Ensemble des $x$ tels que : | Représentation |
|---|---|---|---|
| [-3; 4] | **Intervalle** fermé -3 ; 4. | $-3 \leq x \leq 4$ |   |
| [-7 ; 0 [ | **Intervalle** $-7$ ; 0<br>fermé en $-7$, ouvert en 0 | $-7 \leq x < 0$ |   |
| ]2; 4,5 ] | **intervalle** ouvert 2,<br>fermé 4,5 | $2 < x \leq 4{,}5$ |   |
| ]-1;9 [ | **intervalle** ouvert -1 ; 9 | $-1 < x < 9$ |   |
| ]← ; 5 [ | **Intervalle** des nombres plus petits que 5 | $x < 5$ |   |
| ]← ; -2] | **Intervalle** des nombres inférieurs ou égaux à -2. | $x \leq -2$ |   |
| ]7 ; →[ | **intervalle** des nombres plus grands que 7 | $x > 7$ |   |
| [-4; →[ | **intervalle** des nombres supérieurs ou égaux à -4 | $x \geq -4$ |   |



**Exercices de fixation**

**Exercice 1**

1. Représente sur une droite graduée les intervalles suivants : $]-3;2]$; $[-1;4]$ ; $]5;\rightarrow[$ ; $]\leftarrow;3]$ .
2. Détermine le centre et l'amplitude de l'intervalle ] -3 ; 2].

**Exercice 2**

Ecris sous forme d'intervalles chacun des ensembles définis ci-dessous :

$x \leq -1$ ; $x > 2{,}3$ ; $-1 < x \leq 6$.

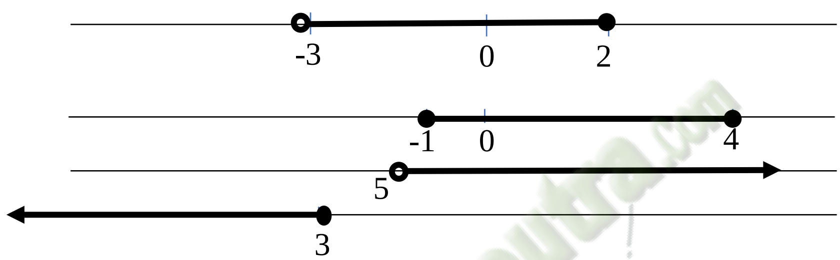
**Exercice 3**

Traduis à l'aide d'inégalités : $x \in ]0;7]$ ; $x \in ]\leftarrow;3[$ ; $x \in [-2;\rightarrow[$ .

## Corrigé

**Exercice 1**

1.




2. Le centre de $]-3;2]$ est : $\frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$; l'amplitude de] -3 ; 2] est : $|-3-2| = |-5| = 5$.



**Exercice 2**

$x \leq -1$ équivaut à $x \in ]\leftarrow;-1]$ ;
$x > 2{,}3$ équivaut à $x \in ]2{,}3;\rightarrow[$ ;
$-1 < x \leq 6$ équivaut à $x \in ]-1;6]$.

**Exercice 3**

$x \in ]0;7]$ équivaut à $0 < x \leq 7$ ;
$x \in ]\leftarrow;3[$ équivaut à $x < 3$.
$x \in [-2;\rightarrow[$ équivaut à $x \geq -2$.

### 3. Réunion et intersection d'intervalles

#### a. Réunion et intersection d'ensembles

**Définitions**

Soit A et B deux ensembles.

- L'intersection des ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartement à la fois à A et à B.

  On la note : $\boldsymbol{A \cap B}$ .
  On lit : **A inter B .**
  $x \in A \cap B$ équivaut à $x \in A$ *et* $x \in B$.

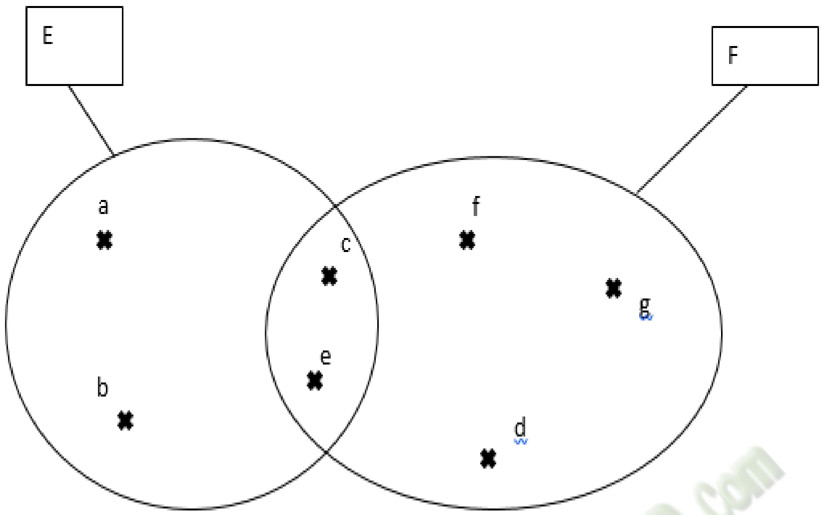
- La réunion des ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B.

  On la note : $\boldsymbol{A \cup B}$ **.**

On lit: **A Union B.**

$x \in A \cup B$ équivaut à $x \in A$ *ou* $x \in B$.

**Exemple**




$E \cup F = \{a; b; c; d; e; f; g\}$ .

$E \cap F = \{c; e\}$ .



**b. Réunion et intersection d'intervalles**

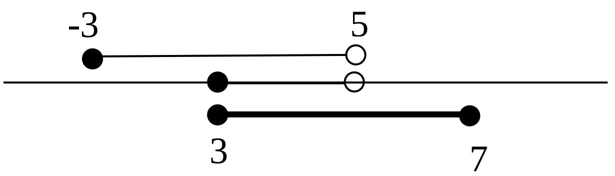
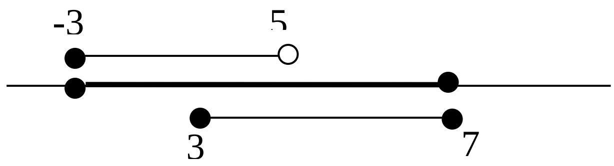
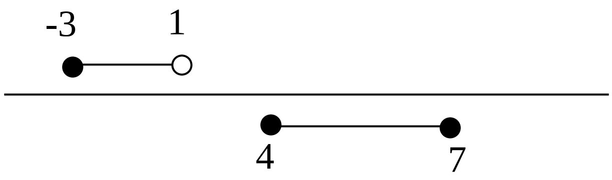
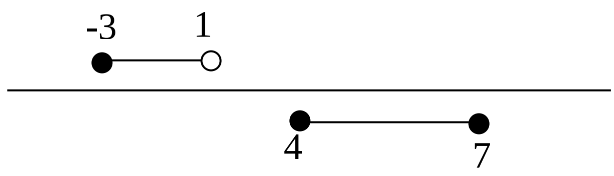
**Exemples**

Dans chacun des cas suivants, représentons sur une même droite les intervalles : $A$ , $B$ , $A \cup B$ et $A \cap B$.

a) $A = [-3\,;\ 5[\ \ et\ B = [3\,;7]$.

b) $A = [-3\,;\ 1[\ \ et$ B $= [4\,;7]$.

| Intersection | Réunion |
|---|---|
| a) | |

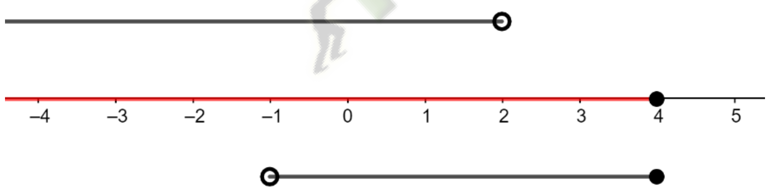
| | |
|---|---|
| <br>[-3 ; 5[∩ [3 ; 7] = [3 ; 5[ | <br>[-3; 5[ U [3 ; 7] = [-3 ; 7] |
| b) | |
| <br>Les intervalles [-3 ; 1[ et [4; 7] n'ont pas d'éléments communs, on dit qu'ils sont **disjoints**.<br>On écrit : [-3 ; 1[ ∩ [4 ; 7] = Ø (ensemble vide) | <br>La réunion des intervalles [-3 ; 1[et [4; 7] n'est pas un intervalle. |

**Exercice de fixation**

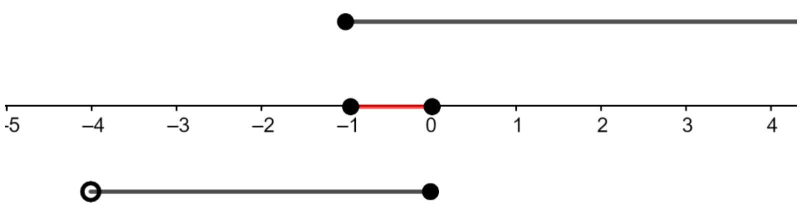
Représente sur une droite graduée et écris plus simplement :

]← ;2 [ U ] -1 ;4] ; [-1 ; →[ ∩ ] -4; 0] ; ]-3 ; 2] U ] 2 ; 5 [ ; ]-2;2] ∩ [3 ; 6] .

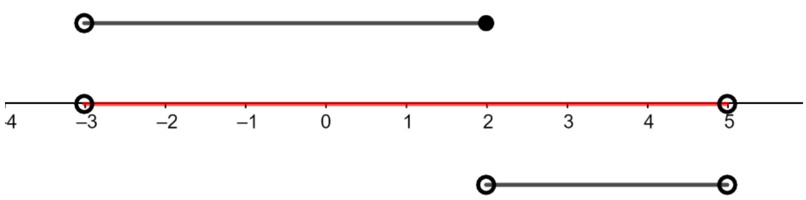
**Corrigé**



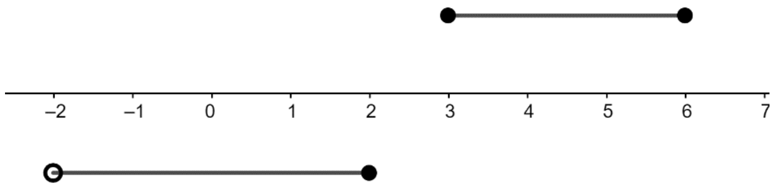

]← ; 2 [ U ] -1 ; 4 ]= ]← ; 4]




[-1 ; →[ ∩ ] -4; 0]= [-1; 0]



]-3 ; 2] U ] 2 ; 5 [= ]-3; 5 [




]-2;2] ∩ [3 ; 6]=∅

## II – COMPARAISON DE NOMBRES REELS

### 1. Rappels

Soient $a, b$ $et$ $c$ trois nombres réels.

- $Si\ c > 0\ et\ \ a < b\ , alors\ \ ac < bc$ .
- $Si\ c < 0\ et\ \ a < b,\ alors\ ac > bc$ .
- $Si\ a < b\ ,\ alors\ \ a + c < b + c$.

### 2. Inégalités et opérations

#### a. Inégalités et addition

**Propriété**

Lorsqu'on ajoute membre à membre des inégalités de même sens, on obtient une nouvelle inégalité de même sens.

$a, b, c$ $et$ $d$ étant des nombres réels,

- $si\ a \leq b\ et\ c \leq d\ , alors\ a + c \leq b + d$.
- $si\ a < b\ et\ c < d\ , alors\ a + c < b + d$ .

**Exercice de fixation**

$a$ et $b$ sont des nombres réels tels que : $1{,}5 < a < 1{,}6$ et $2{,}2 < b < 2{,}3$.

Encadre $a + b$ par deux nombres décimaux.

**Corrigé**

On a :$1{,}5 < a < 1{,}6$ et $2{,}3 < b < 2{,}4$.

Donc : $1{,}5 + 2{,}2 < a + b < 1{,}6 + 2{,}3$.

Donc : $1{,}7 < a + b < 3{,}9$.

### b. Inégalités et multiplication

**Propriété**

Lorsqu'on multiplie membre à membre des inégalités de même sens entre **nombre positifs,** on obtient une nouvelle inégalité de même sens.

$a, b$ $c$ $et$ $d$ étant des nombres réels.

- $si\ a < b\ et\ c < d\ , alors\ ac < bd.$
- $si\ a \leq b\ et\ c \leq d\ , alors\ ac \leq bd\ .$

**Exercice de fixation**

$a$ et $b$ sont des nombres réels tels que : $1{,}5 < a < 1{,}6$ et $2{,}2 < b < 2{,}3$.

Encadre $ab$ par deux nombres décimaux d'ordre 2.

**Corrigé**

On a : $1{,}5 < a < 1{,}6$ et $2{,}2 < b < 2{,}3$.

Donc : $1{,}5 \times 2{,}2 < ab < 1{,}6 \times 2{,}3$.

Donc : $3{,}30 < ab < 3{,}68$.

### 3. Comparaison de carrés et de racines carrées

#### a) Comparaison des carrés

**Propriété**

♦ **Nombres positifs**

**Propriété**

Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

$a$ et $b$ sont des nombres réels positifs.

- $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$
- $a \leq b$ équivaut à $a^2 \leq b^2$

♦**Nombres négatifs**

Deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs carrés.

$a$ et $b$ sont des nombres réels négatifs.

- $a < b$ équivaut à $a^2 > b^2$
- $a \leq b$ équivaut à $a^2 \geq b^2$

**Exercice de fixation**

1. Compare $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$ .
2. Compare $-9$ et $-4\sqrt{5}$ .

**Corrigé**

1. $(2\sqrt{3})^2 = 12$ et $(3\sqrt{2})^2 = 18$.

On a : $12 < 18$

$(2\sqrt{3})^2 < (3\sqrt{2})^2$

Donc : $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$ .

2. $(-9)^2 = 81$ et $\left(-4\sqrt{5}\right)^2 = 16 \times 5 = 80$.

On a : $81 > 80$.

$$(-9)^2 > \left(-4\sqrt{5}\right)^2$$

Donc : $-9 < -4\sqrt{5}$.

**b) Comparaison de racines carrées**

**Propriété**

Deux nombres réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées.

a et b sont des nombres réels positifs.

$a < b$ équivaut à $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

$a \leq b$ équivaut à $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

**Exercice de fixation**

Compare $\sqrt{7}$ et $\sqrt{11}$ .

**Corrigé**

On a : $7<11$ .

Donc : $\sqrt{7} < \sqrt{11}$ .

### 4. Comparaison et inverse

**Propriété**

Deux nombres réels de même signe et différents de 0 sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.

a et b sont deux nombres de même signe et différents de 0.

- $a < b$ équivaut à $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ .
- $a \leq b$ équivaut à $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ .

**Exercice de fixation**

Compare $\frac{1}{\sqrt{7}}$ et $\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

**Corrigé**

On a : $7 > 5$.

D'où : $\sqrt{7} > \sqrt{5}$ .

Donc : $\frac{1}{\sqrt{7}} < \frac{1}{\sqrt{5}}$

<u>**Remarque**</u>

**Pour comparer des nombres réels,** on peut :

- Comparer leurs carrés ou leurs racines carrées.
- Comparer leurs inverses.
- Etudier le signe de leur différence.

## III. ENCADREMENT

## 1. Encadrement d'une somme

**Exemple**

On donne : $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ et $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$.

Encadrons $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.

On a : $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$

$2,23 < \sqrt{5} < 2,24$

Donc : $1,41+2,23 < \sqrt{2}+\sqrt{5} < 1,42+2,24$

$3,64 < \sqrt{2}+\sqrt{5} < 3,66.$

Donc : $3,6 < \sqrt{2}+\sqrt{5} < 3,7.$

## 2. Encadrement d'une différence

**Méthode**

Pour encadrer la différence $\boldsymbol{a-b}$ , connaissant un encadrement de $\boldsymbol{a}$ et de $\boldsymbol{b}$, on peut procéder comme suit :

- on utilise l'égalité : $\boldsymbol{a-b=a+(-b)}$.
- on détermine un encadrement de $(-\boldsymbol{b})$ de même sens que celui de $\boldsymbol{a}$.
- on détermine un encadrement de la somme de $\boldsymbol{a+(-b)}$.

**Exemple**

On donne : $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ et $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$.

Encadrons $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1.

On a : $\sqrt{3}-\sqrt{2} = \sqrt{3}+\left(-\sqrt{2}\right)$ .

- J'encadre d'abord $\left(-\sqrt{2}\right)$.

  On a : $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$

  Donc : $-1,41 > -\sqrt{2} > -1,42$

  $-1,42 < -\sqrt{2} < -1,41$

- J'encadre ensuite $\sqrt{3}-\sqrt{2} = \sqrt{3}+\left(-\sqrt{2}\right)$

  On a : $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$

  $-1,42 < -\sqrt{2} < -1,41$

  Donc : $1,73+(-1,42) < \sqrt{3}+\left(-\sqrt{2}\right) < 1,74+(-1,41)$

  $1,73-1,42 < \sqrt{3}-\sqrt{2} < 1,74-1,41$

  $0,31 < \sqrt{3}-\sqrt{2} < 0,33$

  $0,3 < \sqrt{3}-\sqrt{2} < 0,4.$

### 3. Encadrement d'un produit

**Exemple**

On donne : $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ et $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

Encadrons : $\pi\sqrt{2}$ par deux nombres **décimaux d'ordre 2.**

On a $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$

$3{,}14 < \pi < 3{,}15$

Donc : $1{,}41 \times 3{,}14 < \pi\sqrt{2} < 1{,}42 \times 3{,}15$

$4{,}4274 < \pi\sqrt{2} < 4{,}473$

$4{,}42 < 4{,}4274 < \pi\sqrt{2} < 4{,}473 < 4{,}48$

Donc : $4{,}42 < \pi\sqrt{2} < 4{,}48$.

### 4. Encadrement d'un quotient

**Méthode**

Pour encadrer le quotient $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ connaissant un encadrement de chacun des nombres positifs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$, on peut procéder comme suit :

- on utilise l'égalité $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$.
- on détermine un encadrement de $\frac{1}{b}$ de même sens que celui de $a$.
- on détermine un encadrement du produit $a \times \frac{1}{b}$.

**Exemple**

On donne : $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ et $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$.

Encadrons $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ par deux nombres décimaux d'ordre 2.

On a : $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- J'encadre d'abord $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

On a : $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.

Donc : $\frac{1}{1{,}41} > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{1{,}42}$

$\frac{1}{1{,}42} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{1{,}41}$

- J'encadre ensuite : $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

On a : $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$

$\frac{1}{1{,}42} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{1{,}41}$

Donc : $1{,}73 \times \frac{1}{1{,}42} < \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{1{,}41} \times 1{,}74.$

$$\frac{1{,}73}{1{,}42} < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < \frac{1{,}74}{1{,}41}$$

$$1{,}218 < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < 1{,}235$$

$$1{,}21 < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < 1{,}24.$$

### 5. Arrondis d'une racine carrée

**Exemple**

On donne $\sqrt{15} = 3{,}8729833462$ ....

- L'arrondi d'ordre 0 de $\sqrt{15}\ est$ : 4.
- L'arrondi d'ordre 1 de $\sqrt{15}\ est$ : 3,9.
- L'arrondi d'ordre 2 de $\sqrt{15}\ est$ : 3,87.
- L'arrondi d'ordre 3 de $\sqrt{15}\ est$ : 3,873.



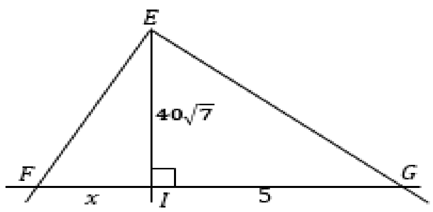
## C - SITUATION D'EVALUATION

M. Diaby dispose d'un terrain de forme triangulaire. Il souhaite construire une villa de même plan que celui de son voisin M. Koné.

Pour cela il se rend chez un architecte. Ce dernier lui dit qu'il peut réaliser le même plan si l'aire de son terrain est comprise entre $360\ m^2$ et $430\ m^2$. De retour à la maison, M. Diaby veut vérifier si son terrain remplit les conditions demandées.

Son fils en classe de 3ème , avec l'aide de ses camarades veut lui apporter son aide pour faire les calculs.

La figure ci-dessous représente le terrain de M. Diaby.




(*La figure n'est pas en grandeur réelle*)

On donne : FI = $x$ ; IG = 5 et EI = $40\sqrt{7}$ .

1. Exprime FG en fonction de $x$ .
2. Justifie que l'aire A du triangle EFG, est égale à $20\sqrt{7}(x+5)\ m^2$ .
3. Sachant que $2{,}645 < \sqrt{7} < 2{,}646$ et $2 < x < 3$.
   a) Encadre $A$ par deux nombres décimaux d'ordre 2.
   b) M. Diaby pourrait-il réaliser ce projet ?

## Corrigé

1. FG = FI + IG = $x$ + 5

2. Aire de EFG. $A = \frac{FG \times EI}{2} = \frac{(x+5)\times 40\sqrt{7}}{2}$

   Donc $A = 20\sqrt{7}(x+5)$.

3. a) $2,645 < \sqrt{7} < 2,646$

   $20\times 2,645 < 20\times\sqrt{7} < 20\times 2,646$

   $52,9 < 20\times\sqrt{7} < 52,92$

   $2 < x < 3$

   $5+2 < x+5 < 3+5$

   $7 < x+5 < 8$

$$\begin{array}{c} 52,9 < 20\times\sqrt{7} < 52,92 \\ 7 < x+5 < 8 \\ \hline 52,9\times 7 < 20\sqrt{7}(x+5) < 52,92\times 8 \\ 370,3 < 20\sqrt{7}(x+5) < 423,36 \end{array}$$

Donc : $370,3 < A < 423,36$.

b) Monsieur Diaby pourra réaliser son projet car l'aire de son terrain est bien comprise entre 360m$^2$ et 430m$^2$.

## D- EXERCICES

### D-1 Exercices de fixation

**Exercice1**

On donne $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$.

Encadre $\sqrt{2}$ par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 0, 1 et 2.

**Corrigé**

- Encadrement de $\sqrt{2}$ par deux entiers consécutifs :
  $1 < \sqrt{2} < 2$.
- Encadrement de $\sqrt{2}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 1 :
  $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$.
- Encadrement de $\sqrt{2}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 2 :
  $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$.

**Exercice 2**

Sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ et $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$.

Donne l'encadrement par deux nombres décimaux d'ordre 2 des nombres suivants :

$3\sqrt{2}$ ; $-4\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$.

**Corrigé**

- On a : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ alors $3\times 1,414 < 3\times\sqrt{2} < 3\times 1,415$

donc $4,242 < 3\times\sqrt{2} < 4,245$

par conséquent $4,24 < 3\sqrt{2} < 4,25$

- On a : $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$

  $-4\times 1,732 > -4\times\sqrt{3} > -4\times 1,733$

  $-6,928 > -4\times\sqrt{3} > -6,932$

  $-6,92 > -4\sqrt{3} > -6,93$

  $-6,93 < -4\sqrt{3} < -6,92$.

- $4{,}24 < 3\sqrt{2} < 4{,}25$

  $-6{,}93 < -4\sqrt{3} < -6{,}92$

  $4{,}24 - 6{,}93 < 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} < 4{,}25 - 6{,}92$

  Donc : $-2{,}69 < 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} < -2{,}67$.

## D-2 Exercices de renforcement

**Exercice 3**

On donne le nombre réel $A = 3\sqrt{2} - 5$.

1. a) Compare $3\sqrt{2}$ et 5.
   b) Déduis-en que A est un nombre réel négatif.
2. Ecris $|3\sqrt{2} - 5|$ sans le symbole de la valeur absolue.

**Corrigé**

1. a) $(3\sqrt{2})^2 = 18$ et $5^2 = 25$

On a : $18 < 25$

$(3\sqrt{2})^2 < 5^2$

Donc : $3\sqrt{2} < 5$

b) $3\sqrt{2} < 5$ ,donc $3\sqrt{2} - 5 < 0$ .

Donc A est un nombre négatif.

2. $|3\sqrt{2} - 5| = -(3\sqrt{2} - 5) = -3\sqrt{2} + 5$.

**Exercice 4**

Détermine le signe de $7\sqrt{2} - 6\sqrt{3}$.

**Corrigé**

- On compare d'abord $7\sqrt{2}$ et $6\sqrt{3}$.

  On a : $\left(7\sqrt{2}\right)^2 = 49 \times 2 = 98$ et $\left(6\sqrt{3}\right)^2 = 36 \times 3 = 108$.

  $98 < 108$

  $\left(7\sqrt{2}\right)^2 < \left(6\sqrt{3}\right)^2$.

  D'où : $7\sqrt{2} < 6\sqrt{3}$.

  Donc : $7\sqrt{2} - 6\sqrt{3} < 0$.

**Exercice 5**

Compare $2\sqrt{2} - 1$ et $3 - \sqrt{2}$.

**Corrigé**

On a : $2\sqrt{2} - 1 - (3 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 1 - 3 + \sqrt{2}$

$= 3\sqrt{2} - 4$.

On compare : $3\sqrt{2}$ et 4.

On a : $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18$ et $4^2 = 16$.

$18 > 16$

$(3\sqrt{2})^2 > 4^2$

Donc : $3\sqrt{2} > 4$.

Donc : $3\sqrt{2} - 4 > 0$

Par conséquent : $2\sqrt{2} - 1 - (3 - \sqrt{2}) > 0$.

D'où : $2\sqrt{2} - 1 > 3 - \sqrt{2}$.

**Exercice 6**

Range dans l'ordre croissant les nombres suivants : $5\sqrt{57} + 16$ ; 50 et 60.

**Corrigé**

On sait que : $49 < 57 < 64$ (carrés parfaits)

donc : $\sqrt{49} < \sqrt{57} < \sqrt{64}$

$7 < \sqrt{57} < 8$

$5\times7 < 5\sqrt{57} < 5\times8$

$35 + 16 < 5\sqrt{57} + 16 < 40+16$

$51 < 5\sqrt{57} + 16 < 56$

$50 < 51 < 5\sqrt{57} + 16 < 56 < 60$

Par conséquent : $50 < 5\sqrt{57} + 16 < 60$.



## D-3 Exercices d'approfondissement

**Exercice 7**

Compare les nombres $\frac{1}{2}\sqrt{29} + 3$ et $1 + \sqrt{11}$ .

**Corrigé**

D'une part

on sait que $25 < 29 < 36$

donc $\sqrt{25} < \sqrt{29} < \sqrt{36}$

$5 < \sqrt{29} < 6$

$\frac{1}{2}\times5 < \frac{1}{2}\sqrt{29} < \frac{1}{2}\times6$

$2,5 + 3 < \frac{1}{2}\sqrt{29} + 3 < 3+3$

$5,5 < \frac{1}{2}\sqrt{29} + 3 < 6$

D'autre part

on sait que $9 < 11 < 16$

donc $\sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16}$

$3 < \sqrt{11} < 4$

$1+3 < 1+\sqrt{11} < 4+1$

$4 < 1+\sqrt{11} < 5$.

$4 < 1+\sqrt{11} < 5 < 5,5 < \frac{1}{2}\sqrt{29} + 3 < 6$.

Par conséquent : $1+\sqrt{11} < \frac{1}{2}\sqrt{29} + 3$

**Exercice 8**

On donne : $A = \frac{1}{4-3\sqrt{2}}$ et $B = 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

1. Écris $A$ sans radical au dénominateur.
2. Calcule $A + B$.
3. Justifie que les nombres réels $A$ et $B$ sont opposés.
4. a) On donne $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.
   Détermine un encadrement B par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1.
   b) Déduis-en un encadrement de $A$.

**Corrigé**

1. $A = \frac{1\times(4+3\sqrt{2})}{(4-3\sqrt{2})(4+3\sqrt{2})} = \frac{4+3\sqrt{2}}{16-18} = -\frac{4+3\sqrt{2}}{2}$
2. $A + B = \frac{1}{4-3\sqrt{2}} + 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} = -\frac{4+3\sqrt{2}}{2} + 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

   $A + B = -2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{2}$.

   Donc $A + B = 0$.
3. A + B = 0 donc A et B sont opposés.
4. a) Encadrement de $B$

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$
$$\frac{3}{2}\times 1{,}41 < \frac{3}{2}\times\sqrt{2} < \frac{3}{2}\times 1{,}42.$$

$$2+\frac{3}{2}\times 1{,}41 < 2+\frac{3}{2}\times\sqrt{2} < 2+\frac{3}{2}\times 1{,}42.$$

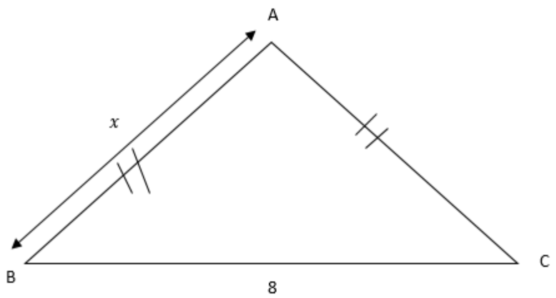
$$4{,}1 < B < 4{,}2$$

b) Encadrement de A

$A = -B$, donc : $-4{,}2 < B < -4{,}1$.

**Exercice 9**

L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-dessous, $ABC$ est un triangle isocèle en $A$.
$AB = x$ ; $BC = 8$ . On donne : $4{,}5 < x < 4{,}6$.




1. a) Détermine le périmètre du triangle $ABC$ en fonction de $x$.
   b) Déduis- en un encadrement de ce périmètre.

2. a) Détermine la hauteur issue du point $A$ en fonction de $x$.
   b) Déduis-en que l'aire du triangle $ABC$ est comprise entre 8 et 10 $cm^2$.

**Thème : Géométrie du plan**

**Leçon 7: VECTEURS** **Durée : 10 heures**

# A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le professeur de mathématiques d'une classe de troisième a mis l'égalité vectorielle suivante au tableau et s'est absenté pour aller à l'administration.

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AO} - 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DB}$, ou A, M, O, B et D sont des points distincts du plan.

Une élève affirme que les droites ( AM) et ( OD) sont parallèles.

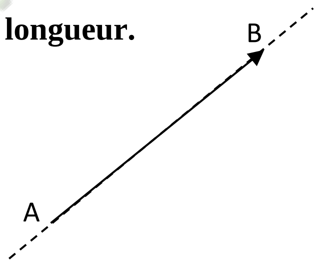
Son voisin n'étant pas convaincu, une discussion s'engage entre eux.

Ils posent le problème à leurs camarades de classe et ensemble ils décident de faire des recherches sur les propriétés relatives aux vecteurs.

# B. CONTENU DE LA LECON

## I. Caractérisation d'un vecteur

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par sa **direction,** son **sens** et sa **longueur.**



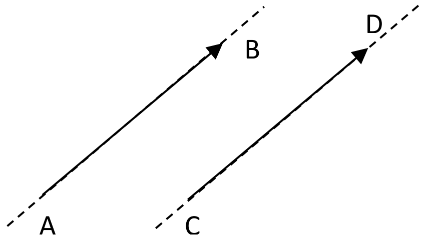

### 1. Caractéristiques d'un vecteur

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- sa direction qui est la droite (AB),
- son sens qui est celui de A vers B,
- sa longueur qui est la distance AB.

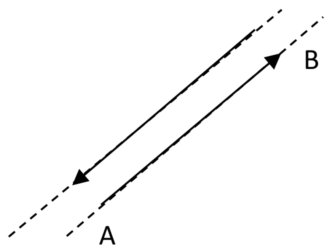
### 2. Vecteurs égaux – Vecteurs opposés

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils ont :
  - la même direction,
  - le même sens,
  - la même longueur.




- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{BA}$.

  On note : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.



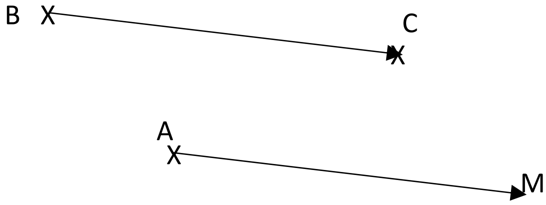
**Exercice de fixation**

Soient A, B et C trois points non alignés du plan. Place un point M du plan tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.

**Corrigé**

Programme de construction du point M.

- Je trace une droite passant par A et parallèle à (BC) ;
- Je place le point M tel que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$ aient le même sens et AM = BC.




## 3. Somme de vecteurs

**Egalité de Chasles**

A, B et C sont des points du plan.

On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

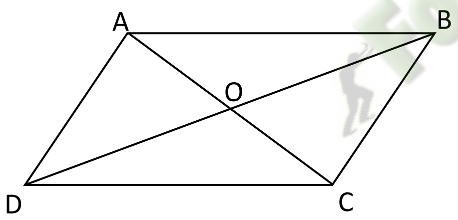
$\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

**Remarques**

- La somme de deux vecteurs de même direction est un vecteur de même direction.
- La somme de deux vecteurs opposés est le vecteur nul.

**Exercice de fixation**

ABCD est un parallélogramme de centre O. Nomme un vecteur de la figure égal à :




$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$ ; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$ ; $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB}$

Corrigé

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ; $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC}$ ; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ ; $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DB}$.

## 4. Différence de deux vecteurs

**a) Définition**

A, B, C et D sont quatre points distincts du plan.

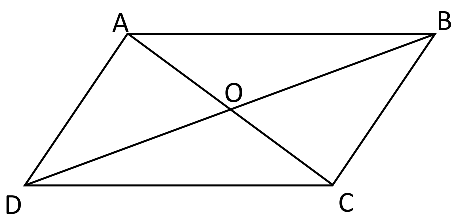
Le vecteur $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ est appelé **différence des vecteurs $\overrightarrow{AB}$** et **$\overrightarrow{CD}$.**

**Remarque**

On a : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

**Exercice de fixation**

ABCD est un parallélogramme de centre O. Nomme un vecteur de la figure égal à :




$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ ; $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CO}$ ; $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}$

**Corrigé**

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$.
$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ .
$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ .
$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{DA}$ .

**b) Réduction d'une somme de vecteurs**
**<u>Méthode</u>**
Pour effectuer une somme de plusieurs vecteurs, on peut :
- déplacer et regrouper certains vecteurs,
- transformer une différence de vecteurs en somme,
- appliquer l'égalité de Chasles.

**Exemple**
Calculons la somme : $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}$ .

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}$ (On a déplacé les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE}$).
$= -\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}$ ( On a appliqué l'égalité de Chasles à chacune des sommes $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}$).
$= -\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BF}$ ( On a appliqué l'égalité de Chasles à la somme $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}$ ).
$= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$ (On a transformé $-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BF}$ en $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$).
$= \overrightarrow{AF}$. ( On a appliqué l'égalité de Chasles à la somme $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$ ).

<u>Exercice de fixation</u>
Simplifie l'écriture de chacune des sommes suivantes :
$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CA}$ ; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$ .

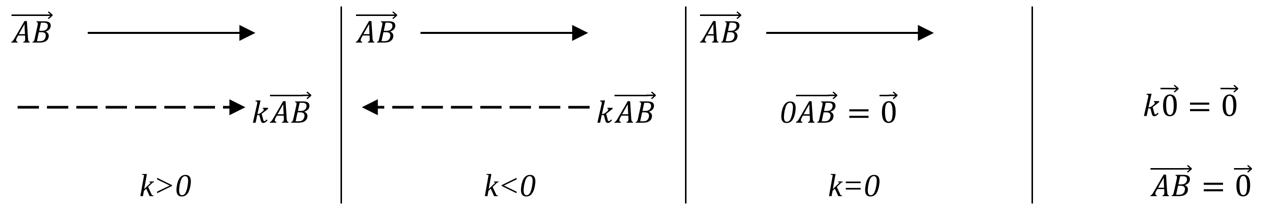
Corrigé
$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}$
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AD}$

## 5. <u>Produit d'un vecteur par un nombre réel</u>

**a) Définition**
On appelle produit du vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ par le nombre réel non nul $k$, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ tel que :
- (MN) et (AB) ont la même direction ;
- $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ $\begin{cases} -\ ont\ le\ même\ sens\ lorsque\ k\ est\ positif; \\ -\ ont\ des\ sens\ contraires\ lorsque\ k\ est\ négatif; \end{cases}$
- $MN = |k|$AB.

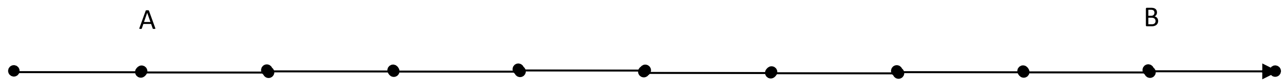
Le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le nombre k est noté : $k.\overrightarrow{AB}$.

**Par convention :**
- Le produit du vecteur nul par un nombre réel est le vecteur nul.
- Le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par 0 est le vecteur nul.

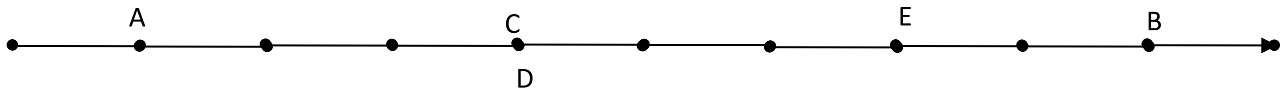


**Exemple**

(D) est une droite graduée. A, B, C, D et E sont des points de (D).



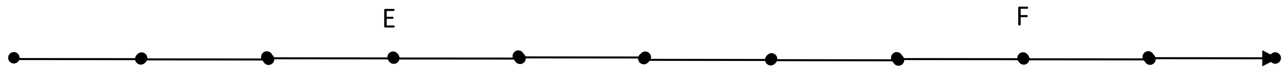

Plaçons les points C, D et E tels que : $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD} = -\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$




**Exercices de fixation**

**Exercice 1**

(D) est une droite graduée. E, F, G , H et K sont des points de (D).

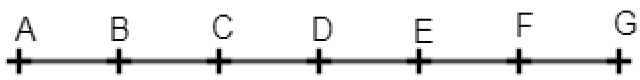



Place les points G, H et K tels que : $\overrightarrow{EG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EH} = \frac{7}{5}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FK} = -\frac{8}{5}\overrightarrow{EF}$ .

Corrigé


**Exercice 2**

Sur la figure ci-dessous, le segment $[MN]$ est partagé en six segments de même longueur.




Recopie et complète chacune des égalités suivantes par le nombre réel qui convient.

a) $\overrightarrow{AC} = \cdots \overrightarrow{AD}$ ; b) $\overrightarrow{FE} = \cdots \overrightarrow{GA}$ c) $\overrightarrow{CG} = \cdots \overrightarrow{CB}$ .

Corrigé

a) $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ ; b) $\overrightarrow{FE} = \frac{1}{6}\overrightarrow{GA}$ c) $\overrightarrow{CG} = -4\overrightarrow{CB}$ .

**b) Propriétés**

A, B, C et D sont des points du plan. $k$ et $h$ sont des nombres réels. On a :

- $k\left(h\overrightarrow{AB}\right) = (kh)\overrightarrow{AB}$.
- $k\overrightarrow{AB} + h\overrightarrow{AB} = (k + h)\overrightarrow{AB}$.
- $k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{CD} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.
- $1\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$.

**Exercice de fixation**
Simplifie les écritures suivantes :

a) $\frac{1}{2}(8\overrightarrow{AB})$
b) $-3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AB}$
c) $-3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD})$

Corrigé

a) $\frac{1}{2}(8\overrightarrow{AB}) = \left(\frac{1}{2} \times 8\right)\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AB}$
b) $-3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AB} = (-3+5)\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$
c) $$\begin{aligned} -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + 2\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\right) &= -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD} \\ &= -3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{CD} \\ &= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} \end{aligned}$$

# II. Vecteurs de même direction – Vecteurs colinéaires

## 1. Vecteurs de même direction

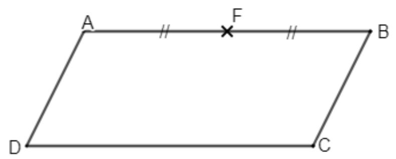
***Propriété* :** A, B, C et D sont quatre points du plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction. équivaut à On peut trouver un nombre réel $k$ non nul tel que : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$

***Exemple***
$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CD}$ équivaut à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction.

**Exercice de fixation**

Sur la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme et F est le milieu du segment [AB].
Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AF}$ ont la même direction.




Corrigé
ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.
Or $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AF}$ car F est le milieu du segment [AB].
Donc $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AF}$.
Par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AF}$ ont la même direction.

## 2. Vecteurs colinéaires

### a. Définition

On dit que des vecteurs sont **colinéaires** lorsqu'ils ont la même direction, ou lorsque l'un d'eux est le vecteur nul.

***Exemple***
$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CD}$ équivaut à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

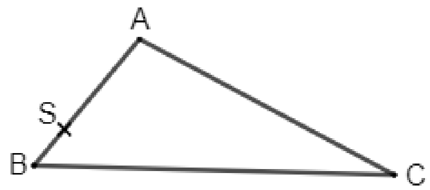
### b. Propriété

A et B sont deux points du plan.
$M \in (AB)$ équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

**Exercice de fixation**

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle et S ∈ [AB].
On donne le point I tel que : $3\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

1) Donne trois vecteurs colinéaires au vecteur $\overrightarrow{BS}$.
2) Justifie que I ∈ [BC].




Corrigé

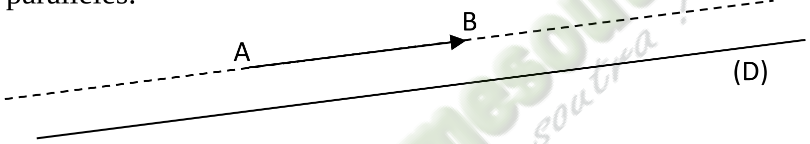
1) Trois vecteurs colinéaires au vecteur $\overrightarrow{BS}$ :
   $\overrightarrow{SA}$ , $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{SB}$ .
2) $3\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ équivaut à $3\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$
   équivaut à $3\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
   équivaut à $3\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BC}$.
   Donc les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Par conséquent I ∈ [BC].

## III. Vecteurs directeurs d'une droite – vecteurs orthogonaux

### 1. Vecteurs directeurs d'une droite

Définition

On dit que le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est un ***vecteur directeur*** de la droite (D) lorsque les droites (D) et (AB) sont parallèles.

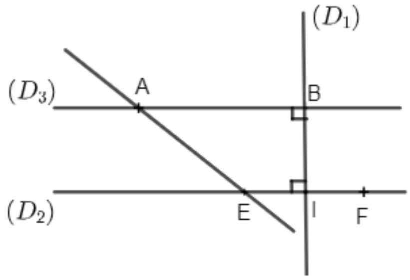



$(AB)//(D)$

**Remarque :** La droite (AB) détermine une direction, et chaque droite parallèle à la droite (AB) a la même direction que (AB).

**Exercice de fixation**

Observe la figure ci-contre puis écris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre qui correspond à la réponse correcte.




1) Un vecteur directeur de la droite $(D_3)$ est :
   a) $\overrightarrow{AE}$ b) $\overrightarrow{BI}$ c) $\overrightarrow{AB}$ .

2) Un vecteur directeur de la droite $(D_2)$ est :
   b) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{AE}$ c) $\overrightarrow{BI}$ .

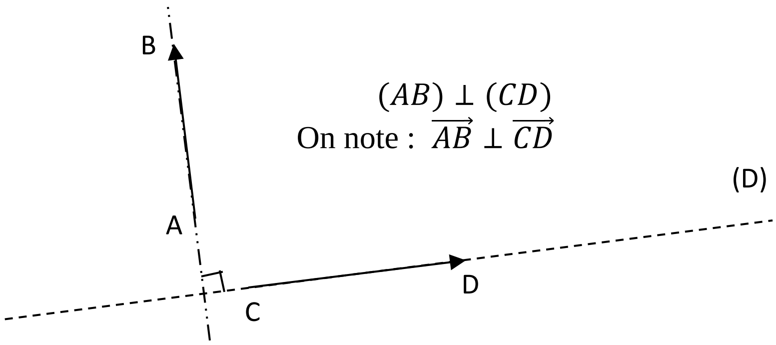
Corrigé

1) c) ; 2) b).

### 2. Vecteurs orthogonaux

Définition

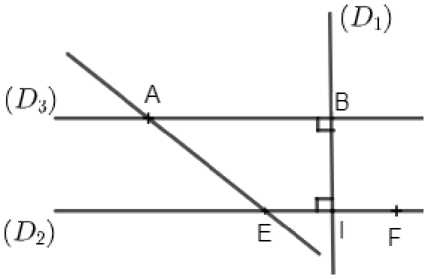
On dit que deux vecteurs non nuls sont orthogonaux lorsqu'ils sont des vecteurs directeurs de deux droites perpendiculaires.




$(AB) \perp (CD)$

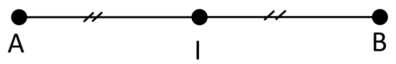
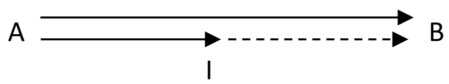
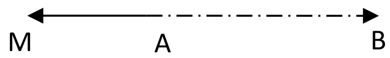
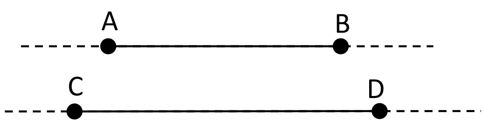
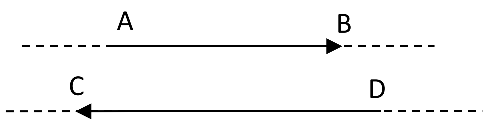
On note : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

**Exercice de fixation**
Observe la figure ci-dessous puis cite deux vecteurs orthogonaux.



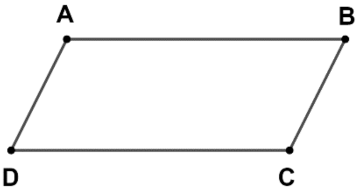

Corrigé
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BI}$ ou $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{BI}$ ou $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{BI}$.

## IV- Langage géométrique – langage vectoriel

| | Langage géométrique | | Langage vectoriel |
|---|---|---|---|
| Milieu d'un segment | I est le milieu de [AB] | équivaut à | $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ |
| |  | |  |
| Points Alignés | A, B et M sont alignés | équivaut à | $\begin{cases} \text{On peut trouver un} \\ \text{nombre } k \text{ tel que:} \\ \overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB} \end{cases}$ |
| |  $k \neq 0$ | |  |
| | $k = 0$  | |  |
| Droites parallèles | $(AB)//(CD)$ | équivaut à | $\begin{cases} \text{On peut trouver un} \\ \text{nombre } k \text{ non nul tel que:} \\ \overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB} \end{cases}$ |
| |  | |  |

## C. SITUATION D'EVALUATION

Pendant une séance de cours , le professeur de mathématiques d'une classe de 3ème a mis ces informations et la figure ci-contre au tableau.




ABCD est un parallélogramme et $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB}$.

Appelé d'urgence à l'administration , il s'absente. C'est alors qu'un élève de la classe affirme que le point C est le milieu du segment [ EF]. Un autre, étonné, cherche à vérifier cette affirmation.

1) Justifie que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DB}$.

2) Justifie que $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DB}$.

3) Dis si l'affirmation est vraie ou pas.

### Corrigé

1) On a $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DA}$.

En transformant le vecteur $\overrightarrow{ED}$ en $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD}$, on a :

$$\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$$
$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CD}$$
$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}, \text{ or } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}.$$

Donc $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$.

2) On a $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB}$.

En transformant le vecteur $\overrightarrow{ED}$ en $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD}$, on a :

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}, \text{ or } \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}.$$

Donc $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$.

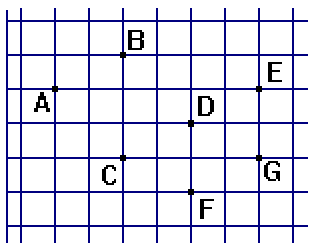
3) Comme $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DB}$ alors $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CF}$.
Donc, C est le milieu du segment [EF].
D'où l'élève a raison.

## D. EXERCICES

### D-1 Exercices de fixation

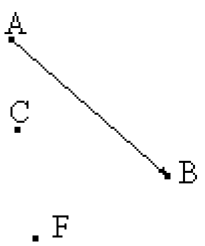
**Exercice 1**

1. Cite les vecteurs de même longueur que $\overrightarrow{AB}$ sur la figure ci-contre.
2. Cite les vecteurs de même direction que $\overrightarrow{AB}$ .
   Parmi ces vecteurs, cite ceux qui sont de même sens que $\overrightarrow{AB}$ .
3. Cite les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.




**Exercice 2**

Construire les points D et E tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ .



**Exercice 3**

A, B et C sont trois points non alignés du plan.
Dans chacun des cas suivants, construis le point M tel que :

a) $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB}$ .

b) $\overrightarrow{CM} = (-3)\overrightarrow{AB}$.

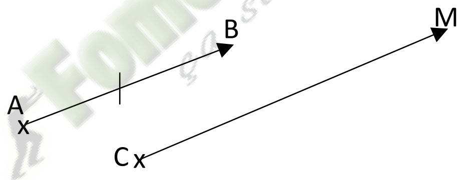
c) $\overrightarrow{CM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

**Corrigé**

a)


b)


c)






**Exercice 4**

On donne les égalités vectorielles suivantes :
$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$ et $3\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{EF}$.
Exprime $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$.

**Corrigé**

On a $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
On a $3\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{EF}$ alors $\overrightarrow{CD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{EF}$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{EF}$ donc $\overrightarrow{AB} = \frac{8}{3}\overrightarrow{EF}$.

**D-2 Exercices de renforcement**

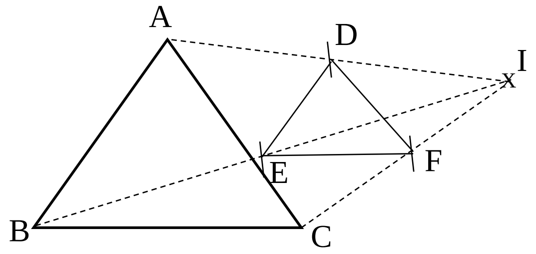
**Exercice 5**

ABC est un triangle équilatéral et I est un point extérieur à ce triangle.

1) Construis les points D, E et F tels que : $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$ ; $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$.
2) Démontre que les droites (DE) et (AB) sont parallèles.
3) Démontre que le triangle DEF est équilatéral.

**Corrigé**

1)




2) On a $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{IB}$ alors $\overrightarrow{IE} - \overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$.
Or $\overrightarrow{IE} - \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{DE}$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{IB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB}$.
Par conséquent les droites (DE) et (AB) sont parallèles.

**Remarque** : On peut de même démontrer que (DF)//(AC) et (EF)//(BC).

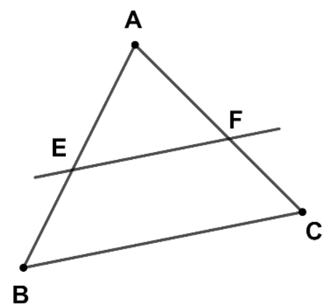
3) D'après la question 2), on a : $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{BC}$
Alors DE = $\frac{1}{2}$AB, DF = $\frac{1}{2}$AC et EF = $\frac{1}{2}$BC
Or AB = AC = BC car ABC est un triangle équilatéral
Donc DE = DF = EF
Par conséquent DEF est un triangle équilatéral.

**D-3 <u>EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT</u>**

**Exercice 6**

ABC est un triangle , E et F sont les milieux respectifs des segments [ AB] et [ AC].

1) Justifie que les vecteurs EF et CB sont colinéaires.
2) Deduis-en que : BC= 2EF



**Thème : Géométrie du plan**
**Leçon 7: VECTEURS** **Durée : 10 heures**

# A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le professeur de mathématiques d'une classe de troisième a mis l'égalité vectorielle suivante au tableau et s'est absenté pour aller à l'administration.
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AO} - 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DB}$, ou A, M, O, B et D sont des points distincts du plan.
Une élève affirme que les droites ( AM) et ( OD) sont parallèles.
Son voisin n'étant pas convaincu, une discussion s'engage entre eux.
Ils posent le problème à leurs camarades de classe et ensemble ils décident de faire des recherches sur les propriétés relatives aux vecteurs.

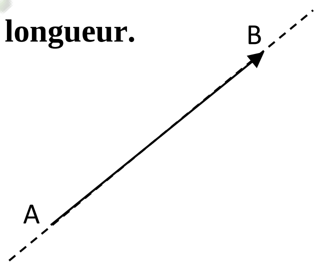
# B. CONTENU DE LA LECON

## I. Caractérisation d'un vecteur

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par sa **direction,** son **sens** et sa **longueur.**

### 1. Caractéristiques d'un vecteur

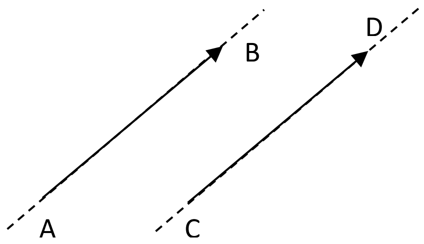
Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :
- sa direction qui est la droite (AB),
- son sens qui est celui de A vers B,
- sa longueur qui est la distance AB.



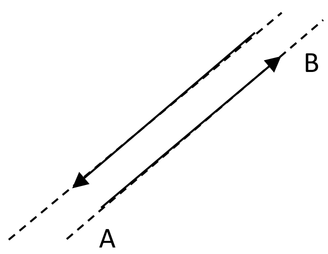



### 2. Vecteurs égaux – Vecteurs opposés

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils ont :
  - la même direction,
  - le même sens,
  - la même longueur.




- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{BA}$.
  On note : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.



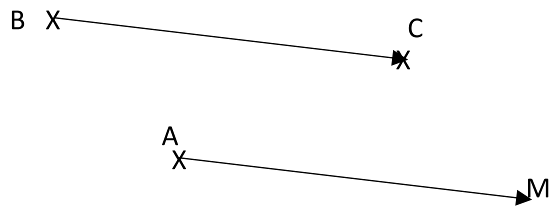
**Exercice de fixation**

Soient A, B et C trois points non alignés du plan. Place un point M du plan tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.

**Corrigé**

Programme de construction du point M.

- Je trace une droite passant par A et parallèle à (BC) ;
- Je place le point M tel que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$ aient le même sens et AM = BC.




## 3. Somme de vecteurs

**Egalité de Chasles**

A, B et C sont des points du plan.

On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

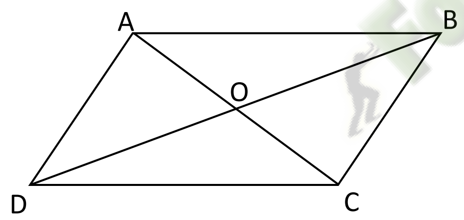
$\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

**Remarques**

- La somme de deux vecteurs de même direction est un vecteur de même direction.
- La somme de deux vecteurs opposés est le vecteur nul.

**Exercice de fixation**

ABCD est un parallélogramme de centre O. Nomme un vecteur de la figure égal à :




$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$ ; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$ ; $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB}$

Corrigé

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ; $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC}$ ; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ ; $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DB}$.

## 4. Différence de deux vecteurs

**a) Définition**

A, B, C et D sont quatre points distincts du plan.

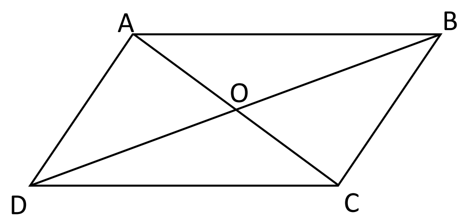
Le vecteur $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ est appelé **différence des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.**

**Remarque**

On a : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

**Exercice de fixation**

ABCD est un parallélogramme de centre O. Nomme un vecteur de la figure égal à :




$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ ; $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CO}$ ; $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}$

**Corrigé**

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$.
$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .
$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ .
$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DA}$ .

**b) Réduction d'une somme de vecteurs**
**Méthode**
Pour effectuer une somme de plusieurs vecteurs, on peut :
- déplacer et regrouper certains vecteurs,
- transformer une différence de vecteurs en somme,
- appliquer l'égalité de Chasles.

**Exemple**
Calculons la somme : $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ .

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$ (On a déplacé les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE}$).
$= -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF}$ ( On a appliqué l'égalité de Chasles à chacune des sommes $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$).
$= -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF}$ ( On a appliqué l'égalité de Chasles à la somme $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF}$ ).
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$ (On a transformé $-\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF}$ en $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$).
$= \overrightarrow{AF}$. ( On a appliqué l'égalité de Chasles à la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$ ).

Exercice de fixation
Simplifie l'écriture de chacune des sommes suivantes :
$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$ ; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$ .

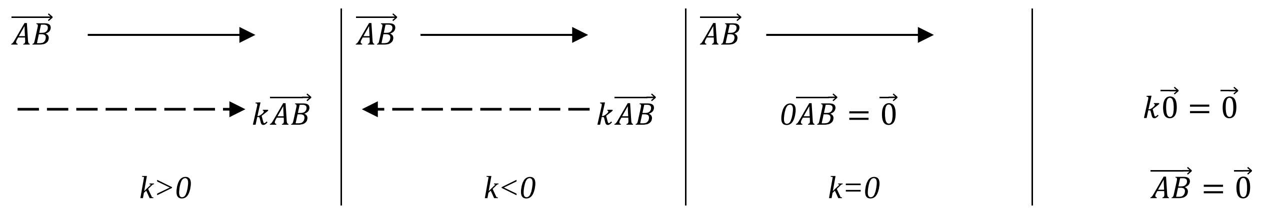
Corrigé
$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD}$
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD}$

## 5. Produit d'un vecteur par un nombre réel

**a) Définition**
On appelle produit du vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ par le nombre réel non nul $k$, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ tel que :
- (MN) et (AB) ont la même direction ;
- $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ $\begin{cases} -\ ont\ le\ même\ sens\ lorsque\ k\ est\ positif; \\ -\ ont\ des\ sens\ contraires\ lorsque\ k\ est\ négatif; \end{cases}$
- $MN = |k|$AB.

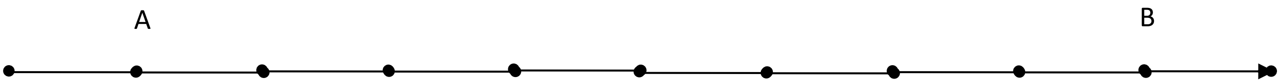
Le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le nombre k est noté : $k.\overrightarrow{AB}$.

**Par convention :**
- Le produit du vecteur nul par un nombre réel est le vecteur nul.
- Le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par 0 est le vecteur nul.

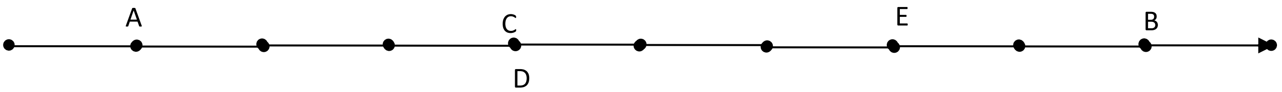


**Exemple**

(D) est une droite graduée. A, B, C, D et E sont des points de (D).



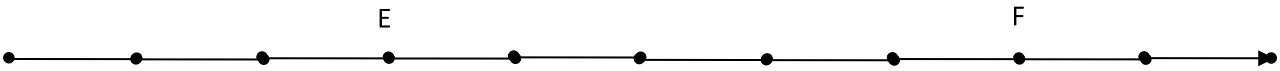

Plaçons les points C, D et E tels que : $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD} = -\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$




**Exercices de fixation**

**Exercice 1**

(D) est une droite graduée. E, F, G , H et K sont des points de (D).

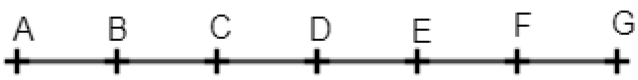



Place les points G, H et K tels que : $\overrightarrow{EG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EH} = \frac{7}{5}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FK} = -\frac{8}{5}\overrightarrow{EF}$ .

Corrigé


**Exercice 2**

Sur la figure ci-dessous, le segment $[MN]$ est partagé en six segments de même longueur.




Recopie et complète chacune des égalités suivantes par le nombre réel qui convient.

a) $\overrightarrow{AC} = \cdots\overrightarrow{AD}$ ; b) $\overrightarrow{FE} = \cdots\overrightarrow{GA}$ c) $\overrightarrow{CG} = \cdots\overrightarrow{CB}$ .

Corrigé

a) $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ ; b) $\overrightarrow{FE} = \frac{1}{6}\overrightarrow{GA}$ c) $\overrightarrow{CG} = -4\overrightarrow{CB}$ .

**b) Propriétés**

A, B, C et D sont des points du plan. $k$ et $h$ sont des nombres réels. On a :

- $k\left(h\overrightarrow{AB}\right) = (kh)\overrightarrow{AB}$.
- $k\overrightarrow{AB} + h\overrightarrow{AB} = (k+h)\overrightarrow{AB}$.
- $k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{CD} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.
- $1\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$.

**Exercice de fixation**
Simplifie les écritures suivantes :

a) $\frac{1}{2}(8\overrightarrow{AB})$
b) $-3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AB}$
c) $-3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD})$

Corrigé

a) $\frac{1}{2}(8\overrightarrow{AB}) = \left(\frac{1}{2} \times 8\right)\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AB}$
b) $-3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AB} = (-3+5)\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$
c) $$\begin{aligned} -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + 2\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\right) &= -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD} \\ &= -3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{CD} \\ &= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} \end{aligned}$$

## II. Vecteurs de même direction – Vecteurs colinéaires

### 1. Vecteurs de même direction

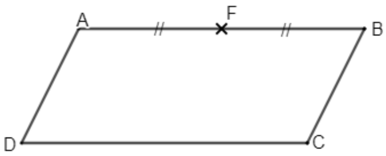
***Propriété* :** A, B, C et D sont quatre points du plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction. équivaut à On peut trouver un nombre réel $k$ non nul tel que : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$

***Exemple***
$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CD}$ équivaut à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction.

**Exercice de fixation**

Sur la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme et F est le milieu du segment [AB].
Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AF}$ ont la même direction.




Corrigé
ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.
Or $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AF}$ car F est le milieu du segment [AB].
Donc $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AF}$.
Par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AF}$ ont la même direction.

### 2. Vecteurs colinéaires

#### a. Définition

On dit que des vecteurs sont **colinéaires** lorsqu'ils ont la même direction, ou lorsque l'un d'eux est le vecteur nul.

***Exemple***
$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CD}$ équivaut à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

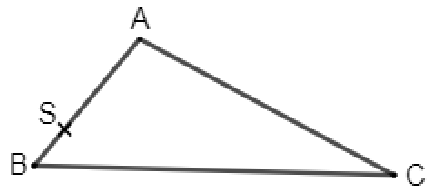
#### b. Propriété

A et B sont deux points du plan.
$M \in (AB)$ équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

**Exercice de fixation**

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle et S ∈ [AB].
On donne le point I tel que : $3\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

1) Donne trois vecteurs colinéaires au vecteur $\overrightarrow{BS}$.
2) Justifie que I ∈ [BC].




Corrigé

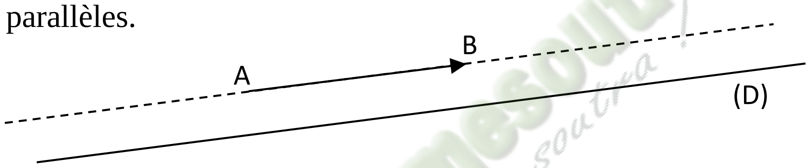
1) Trois vecteurs colinéaires au vecteur $\overrightarrow{BS}$ :
   $\overrightarrow{SA}$ , $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{SB}$ .
2) $3\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ équivaut à $3\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$
   équivaut à $3\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
   équivaut à $3\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BC}$.
   Donc les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Par conséquent I ∈ [BC].

## III. Vecteurs directeurs d'une droite – vecteurs orthogonaux

### 1. Vecteurs directeurs d'une droite

Définition

On dit que le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est un ***vecteur directeur*** de la droite (D) lorsque les droites (D) et (AB) sont parallèles.

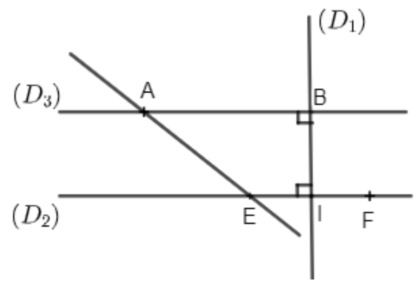



$(AB)//(D)$

**Remarque :** La droite (AB) détermine une direction, et chaque droite parallèle à la droite (AB) a la même direction que (AB).

**Exercice de fixation**

Observe la figure ci-contre puis écris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre qui correspond à la réponse correcte.




1) Un vecteur directeur de la droite $(D_3)$ est :
   a) $\overrightarrow{AE}$ b) $\overrightarrow{BI}$ c) $\overrightarrow{AB}$ .

2) Un vecteur directeur de la droite $(D_2)$ est :
   b) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{AE}$ c) $\overrightarrow{BI}$ .

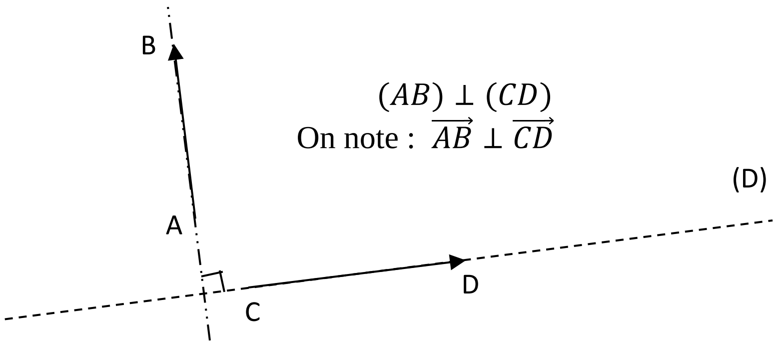
Corrigé

1) c) ; 2) b).

### 2. Vecteurs orthogonaux

Définition

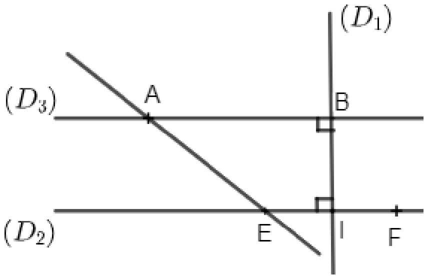
On dit que deux vecteurs non nuls sont orthogonaux lorsqu'ils sont des vecteurs directeurs de deux droites perpendiculaires.




$(AB) \perp (CD)$
On note : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

**Exercice de fixation**

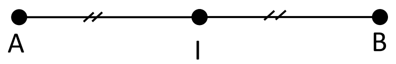
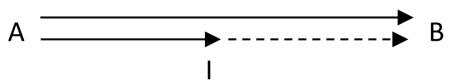
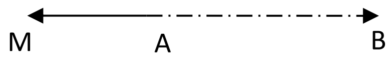
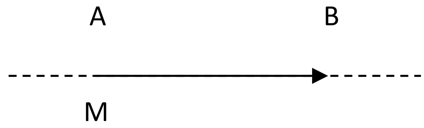
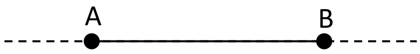
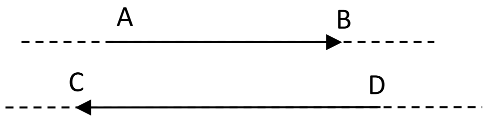
Observe la figure ci-dessous puis cite deux vecteurs orthogonaux.




Corrigé

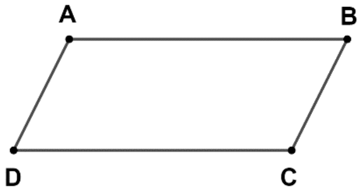
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BI}$ ou $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{BI}$ ou $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{BI}$.

## IV- Langage géométrique – langage vectoriel

| | Langage géométrique | | Langage vectoriel |
|---|---|---|---|
| Milieu d'un segment | I est le milieu de [AB] | équivaut à | $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ |
| |  | |  |
| Points Alignés | A, B et M sont alignés | équivaut à | $\left\{ \begin{array}{l} \textit{On peut trouver un nombre } k \textit{ tel que:} \\ \overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB} \end{array} \right.$ |
| |  $k \neq 0$ | |  |
| | $k = 0$  | |  |
| Droites parallèles | $(AB)//(CD)$ | équivaut à | $\left\{ \begin{array}{l} \textit{On peut trouver un nombre } k \textit{ non nul tel que:} \\ \overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB} \end{array} \right.$ |
| |  | |  |

## C. SITUATION D'EVALUATION

Pendant une séance de cours , le professeur de mathématiques d'une classe de 3ème a mis ces informations et la figure ci-contre au tableau.




ABCD est un parallélogramme et $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB}$.

Appelé d'urgence à l'administration , il s'absente. C'est alors qu'un élève de la classe affirme que le point C est le milieu du segment [ EF]. Un autre, étonné, cherche à vérifier cette affirmation.

1) Justifie que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DB}$.
2) Justifie que $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DB}$.
3) Dis si l'affirmation est vraie ou pas.

### Corrigé

1) On a $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DA}$.

En transformant le vecteur $\overrightarrow{ED}$ en $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD}$, on a :

$$\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$$
$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CD}$$
$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}, \text{ or } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}.$$

Donc $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$.

2) On a $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB}$.

En transformant le vecteur $\overrightarrow{ED}$ en $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD}$, on a :

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}, \text{ or } \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}.$$

Donc $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$.

3) Comme $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DB}$ alors $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CF}$.
Donc, C est le milieu du segment [EF].
D'où l'élève a raison.

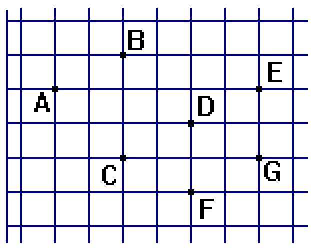


## D. EXERCICES

**D-1 Exercices de fixation**

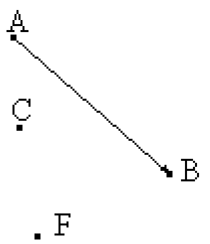
**Exercice 1**

1. Cite les vecteurs de même longueur que $\overrightarrow{AB}$ sur la figure ci-contre.
2. Cite les vecteurs de même direction que $\overrightarrow{AB}$ .
   Parmi ces vecteurs, cite ceux qui sont de même sens que $\overrightarrow{AB}$ .
3. Cite les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.




**Exercice 2**

Construire les points D et E tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ .



**Exercice 3**

A, B et C sont trois points non alignés du plan.
Dans chacun des cas suivants, construis le point M tel que :

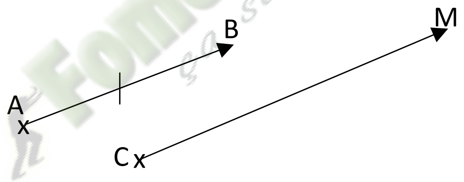
a) $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB}$ .
b) $\overrightarrow{CM} = (-3)\overrightarrow{AB}$.
c) $\overrightarrow{CM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

**Corrigé**

a)


b)


c)




**Exercice 4**

On donne les égalités vectorielles suivantes :
$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$ et $3\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{EF}$.
Exprime $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$.

**Corrigé**

$$\left.\begin{array}{l}\text{On a } \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD} \text{ alors } \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ \text{On a } 3\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{EF} \text{ alors } \overrightarrow{CD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{EF}\end{array}\right\} \quad \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{EF} \text{ donc } \overrightarrow{AB} = \frac{8}{3}\overrightarrow{EF}.$$

**D-2 Exercices de renforcement**

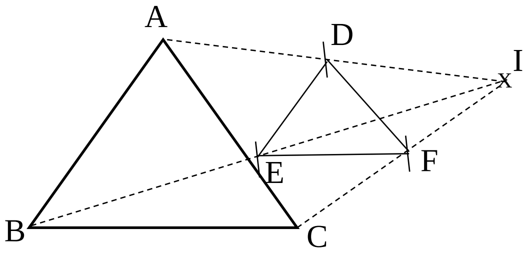
**Exercice 5**

ABC est un triangle équilatéral et I est un point extérieur à ce triangle.

1) Construis les points D, E et F tels que : $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$ ; $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$.
2) Démontre que les droites (DE) et (AB) sont parallèles.
3) Démontre que le triangle DEF est équilatéral.

**Corrigé**

1)




2) On a $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IB}$ alors $\overrightarrow{IE} - \overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$.
Or $\overrightarrow{IE} - \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{DE}$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{IB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
Par conséquent les droites (DE) et (AB) sont parallèles.

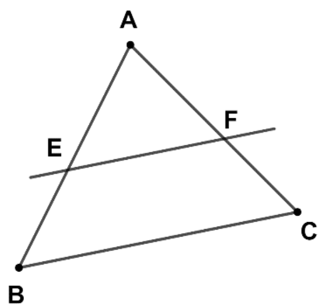
**Remarque** : On peut de même démontrer que (DF)//(AC) et (EF)//(BC).

3) D'après la question 2), on a : $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
Alors DE = $\frac{1}{2}$AB, DF = $\frac{1}{2}$AC et EF = $\frac{1}{2}$BC
Or AB = AC = BC car ABC est un triangle équilatéral
Donc DE = DF = EF
Par conséquent DEF est un triangle équilatéral.

**D-3 <u>EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT</u>**

**Exercice 6**

ABC est un triangle , E et F sont les milieux respectifs des segments [ AB] et [ AC].
1) Justifie que les vecteurs EF et CB sont colinéaires.
2) Deduis-en que : BC= 2EF



**Thème : CALCULS ALGEBRIQUES**

# LECON 8 : EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

**Durée : 4 heures**

## A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le professeur de mathématiques forme deux groupes dans sa classe de $3^{ème}$. Tous les élèves affichent le nombre 6 sur leur calculatrice.
- A l'un des groupes, il demande de multiplier le nombre affiché par 5 puis ajouter 4 au résultat obtenu.
- A l'autre, il demande de multiplier le nombre affiché par 7 puis retrancher 8 au résultat obtenu.
Quand ils ont terminé, tous les élèves de la classe s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent le même nombre.
Surpris par ce résultat, les élèves cherchent à savoir si d'autres nombres donnés au départ conduisent à un résultat similaire.
Pour cela, ils décident de mener des recherches sur les équations et inéquations dans IR.

## B. CONTENU DE LA LEÇON

### I. <u>EQUATIONS DU 1er DEGRE DANS $\mathbb{R}$</u>

**1- Equations du type : $\boldsymbol{x+a=b}$ ou $\boldsymbol{ax=b}$**

**Méthode de résolution**

• Résolution des équations du type $x+a=b$, où $a$ et $b$ sont des nombres réels.

$x+a=b$ équivaut à $x=b-a$.

La solution de l'équation est $b-a$.

• Résolution des équations du type $ax=b$, où $a$ et $b$ sont des nombres réels tels que $a$ soit non nul.

$ax=b$ équivaut à $x=\frac{b}{a}$.

La solution de l'équation est $\frac{b}{a}$.

**<u>Exemples</u>**

- Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $x+5=9$.

$x+5=9$ équivaut à $x=9-5$.
$x+5=9$ équivaut à $x=4$.
La solution de l'équation est 4.

- Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $3x = 18$.

$3x = 18$ équivaut à $x = \frac{18}{3}$.
$3x = 18$ équivaut à $x = 6$.
La solution de l'équation est 6.

**Remarque**

- L'équation : $0x = 0$ admet une infinité de solutions (tous les nombres réels sont solutions de cette équation)
- L'équation : $0x = b$ où b est non nul n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

## 2) Equations du type $ax + b = cx + d$

### a) Définition

$a, b, c$ et $d$ sont des nombres réels donnés. L'équation $ax + b = cx + d$ est appelée équation du 1er degré dans $\mathbb{R}$.
Un nombre est solution de cette équation si en remplaçant $x$ par ce nombre, l'égalité obtenue est vraie.

**Exemples**

$-2x + 3 = 5x - 8$ ; $x - 6 = 4$ et $7x = -1$ sont des équations du 1er degré dans $\mathbb{R}$.

### b) Propriétés

- Toute équation du type $ax + b = cx + d$ peut se ramener à une équation du type $ex = f$.
- Toute équation du type $= f$ , où $e \neq 0$ a une solution unique qui est : $\frac{f}{e}$.

**Exercice de fixation**

On considère l'équation (E) : $6x - 3 = 2x - 2$.
a) Justifie que l'équation (E) est équivalente à (E') : $4x = 1$.
b) Résous l'équation : $4x = 1$

**Corrigé**

a) $6x - 3 = 2x - 2$ équivaut à $6x - 2x = -2 + 3$.
$6x - 3 = 2x - 2$ équivaut à $4x = 1$.
b) $4x = 1$ d'après la propriété précédente, on a : $x = \frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$ est la solution de l'équation (E).

## 3) Equations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$.

**Propriété**

$a$ et $b$ étant des nombres réels ; $\boldsymbol{ab = 0}$ équivaut à $\boldsymbol{a = 0}$ ou $\boldsymbol{b = 0}$

**Exercice de fixation**

Résous dans $\mathbb{R}$ , l' équation : $(E)$: $(3x + 4)(-x - 7) = 0$ .

**Corrigé**

$(3x + 4)(-x - 7) = 0$ équivaut à :$(3x + 4) = 0$ ou $(-x - 7) = 0$.
$(3x + 4)(-x - 7) = 0$ équivaut à $x = \frac{-4}{3}$ ou $x = -7$.
Les solutions de l'équation (E) sont $-\frac{4}{3}$ et $-7$.

## 4) Equations du type : $x^2 = a$

**Propriété**

Si a>0, l'équation $x^2 = a$ est équivalente à $x^2 - a = 0$ , c'est-à-dire $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$.
Donc, l'équation : $\boldsymbol{x^2 = a}$ admet deux solutions qui sont : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

**Exercice de fixation**

Résous l'équation $(E): x^2 = 25$

**Corrigé**

$x^2 = 25$ équivaut à $x^2 - 25 = 0$
$x^2 = 25$ équivaut à $x^2 - (5)^2 = 0$
$x^2 = 25$ équivaut à $(x + 5)(x - 5) = 0$
$x^2 = 25$ équivaut à $x + 5 = 0$ *ou* $x - 5 = 0$
$x^2 = 25$ équivaut à $x = -5$ *ou* $x = 5$ .
Les solutions de l'équation (E) sont $-5$ et $5$.

**Remarque**

Si a < 0, alors l'équation : $\boldsymbol{x^2 = a}$ n'a pas de solution dans IR.
Si a = 0, alors l'équation : $\boldsymbol{x^2 = a}$ admet 0 comme seule solution.

## II. INEQUATIONS DU 1^er^ DEGRE DANS $\mathbb{R}$

### 1) Inéquations du type : $\boldsymbol{ax + b} > 0$

**Propriété**

- Toute inéquation du type : $ax + b > 0$, où $a \neq 0$, peut se ramener à une inéquation du type : $x > u$ ou $x < v$.
- Toute inéquation du type : $ax + b \geq 0$, où $a \neq 0$, peut se ramener à une inéquation du type : $x \geq u$ ou $x \leq v$.
- Les solutions de cette inéquation peuvent être représentées sur une droite graduée ou données sous forme d'intervalle.

**Exercice de fixation**

On considère les inéquations suivantes :
$(I_1): 2x - 6 > 0$ et $(I_2): -3x - 6 \geq 0$
1. a) Justifie que $(I_1)$ est équivalente à l'inéquation $(I'_1)$ : $x > 3$
   b) Justifie que $(I_2)$ est equivalente à l'inéquation $(I'_2)$ : $x \leq -2$.
2. Résous chacune des inéquations $(I_1)$ et $(I_2)$.

**Corrigé**

1.a) $2x - 6 > 0$ équivaut à $2x > 6$.
$2x - 6 > 0$ équivaut à $x > 3$.
b) $-3x - 6 \geq 0$ équivaut à $-3x \geq 6$
$-3x - 6 \geq 0$ équivaut à $x \leq -2$
2. $(I_1)$ équivaut à $x > 3$
L'ensemble des solutions de $(I_1)$ est : $]3; \rightarrow[$.

$(I_2)$ équivaut à $x \leq -2$

L'ensemble des solutions de $(I_2)$ est :$]\leftarrow; -2]$.

## 2) Inéquations du type : $\boldsymbol{ax + b < cx + d}$

**Propriété**

Toute inéquation du type $ax + b < cx + d$ peut se ramener à une équation du type $ex < f$.

**Exercice de fixation**

On considère l'inéquation $(I)$ : $8x + 5 < 3x + 10$

1. Justifie que $(I)$ est équivalente à$(I')$ : $5x < 5$.
2. Résous l'inéquation $(I')$.

**Corrigé**

1. $8x + 5 < 3x + 10$ équivaut à $8x - 3x < 10-5$ .
   $8x + 5 < 3x + 10$ équivaut à $5x < 5$.
2. $5x - 5 < 0$ équivaut à $5x < 5$.
   $5x - 5 < 0$ équivaut à $x < 1$.
   L'ensemble des solutions de $(I')$ est :$] \leftarrow ; 1[$.



## 3) Système d'inéquations dans $\mathbb{R}$.

Le système : $\begin{cases} ax + b \geq 0 \\ cx + d < 0 \end{cases}$ est un système d'inéquations à une inconnue $x$.

On peut aussi rencontrer dans les systèmes d'inéquations les symboles : $>$ ou $\leq$ .

Résoudre un système d'inéquations d'une inconnue, revient à trouver l'ensemble des solutions communes aux deux inéquations du système.

**Méthode de résolution**

Pour résoudre un système de deux inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R}$ ,on peut procéder comme suit :

- on résout séparément chacune des inéquations ;
- on détermine l'intersection des deux solutions trouvées et on écrit l'ensemble des solutions du système.

**Exercice de fixation**

Résous le système d'inéquations :

$\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 4x + 5 \geq 0 \end{cases}$

**Corrigé**

Résolvons le système : $\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 4x + 5 \geq 0 \end{cases}$ .

- $2x - 3 < 0$ équivaut à $2x < 3$
  $2x - 3 < 0$ équivaut à $x < \frac{3}{2}$

L'ensemble $S_1$ des solutions est : $S_1 = \left]\leftarrow; \frac{3}{2}\right[$.

- $4x + 5 \geq 0$ équivaut à $4x \geq -5$

  $4x + 5 \geq 0$ équivaut à $x \geq -\frac{5}{4}$

  L'ensemble $S_2$ des solutions est : $S_2 = \left[-\frac{5}{4} ; \rightarrow\right[$.

  L'ensemble $S$ des solutions du système est : $S = S_1 \cap S_2$.

Donc $S = \left[\frac{-5}{4} ; \frac{3}{2}\right[$.

## III. PROBLEME CONDUISANT A UNE EQUATION OU UNE INEQUATION DU 1^ER DEGRE DANS $\mathbb{R}$

**Méthode de résolution**

Pour résoudre un problème conduisant à une équation ou une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}$, on procède comme suit :

- on nomme l'inconnue ;
- on met le problème en équation ou en inéquation ;
- on résout l'équation ou l'inéquation ;
- on conclut en interprétant le résultat trouvé.

**Exercice de fixation**

Un club de location de CD vidéo fait deux propositions pour la location de ses films :
Première proposition : un abonnement de 1500 F et 200 F pour chaque cassette louée.
Deuxième proposition : pas d'abonnement et chaque cassette est louée à 320 F.
A partir de quel nombre de cassettes louées la première proposition est-elle avantageuse que la deuxième ?

**Corrigé**

- On désigne par $x$ le nombre de CD à louer.
- Traduisons les expressions suivantes en mathématique :

Le coût de la location dans la première proposition est :$1500 + 200x$ .
Le coût de la location dans la deuxième proposition est : $320x$.

La première proposition est avantageuse que la deuxième lorsque :
$1500{+}200x < 320x$.

- Résolvons l'inéquation : $1500 + 200x < 320x$.

  $200x - 320x < -1500$

  $-120x < -1500$

  $-x < -12{,}5$

  $x > 12{,}5$

- Interprétons le résultat.

  La résolution de l'inéquation donne : $x > 12{,}5$.

  A partir de 13 cassettes louées, il est plus avantageux de choisir la première proposition.

## C. SITUATION D'EVALUATION

Pour la fête de la promotion $3^{ème}$ d'un collège, le comité d'organisation ne sachant pas la somme à faire cotiser par chaque élève, sollicite des propositions.
Le Président du comité d'organisation affirme que : « si 250 élèves cotisent et que la coopérative donne 55 000 F, la somme totale peut excéder 130 000F ».
Le Trésorier dit : « si 205 élèves cotisent et qu'on retient 12 000F pour la sonorisation, cette somme ne dépasse pas 90 500F ».
Pour ne pas désavouer les deux responsables, il est question de trouver des solutions qui satisfassent tous les deux.

1. Traduis chacune des propositions sous forme d'inéquations.
2. Résous dans ℝ, le système suivant : $\begin{cases} 5x + 1100 > 2600 \\ 41x - 2400 < 18\,100 \end{cases}$.
3. Trouve le montant des cotisations qui satisfait le Président et Trésorier.

**Corrigé**

1. Soit $x$ la somme que doit cotiser chaque élève.
   « si 250 élèves cotisent et que la coopérative donne 55 000 F, la somme totale peut excéder 130 000F » se traduit par : $250\,x + 55000 > 130000$.

   « si 205 élèves cotisent et qu'on retient 12 000F pour la sonorisation, cette somme ne dépasse pas 90 500F » se traduit par : $205\,x - 12000 < 90500$.

2. Résolvons le système : $\begin{cases} 5x + 1100 > 2600 \\ 41x - 2400 < 18\,100 \end{cases}$.

   $5x + 1100 > 2600$ équivaut à $x > 300$.
   $41x - 2400 < 18100$ équivaut à $x < 500$.
   L'ensemble des solutions du système ]300 ; 500[.

3. A partir de la question 1) , on obtient le système : $\begin{cases} 250x + 55000 > 130000 \\ 205x - 12000 < 90500 \end{cases}$.

   Ce système est équivalent au système : $\begin{cases} 5x + 1100 > 2600 \\ 41x - 2400 < 18\,100 \end{cases}$.
   L'ensemble des solutions du système est l'intervalle ]300 ; 500[.

   Le montant des cotisations qui satisfait le Président et le Trésorier doit être compris entre 300 F et 500 F.

## D. EXERCICES

## D-1 Exercices de fixation

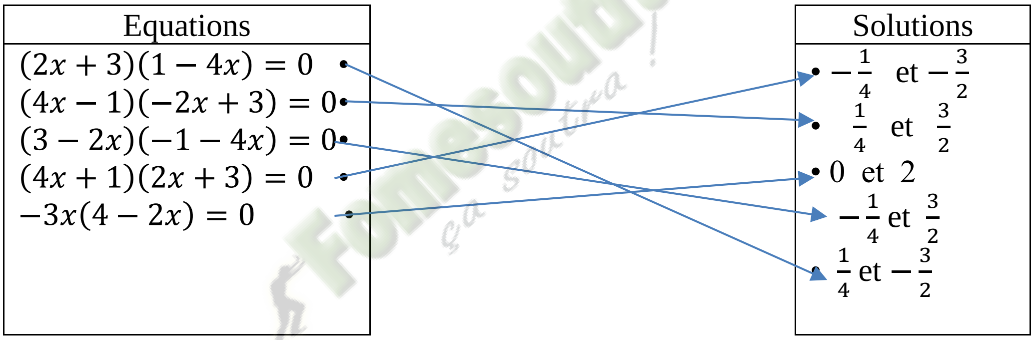
### Exercice1

Associe chaque équation à ses solutions

| Equations |
|---|
| $(2x+3)(1-4x)=0$ • |
| $(4x-1)(-2x+3)=0$ • |
| $(3-2x)(-1-4x)=0$ • |
| $(4x+1)(2x+3)=0$ • |
| $-3x(4-2x)=0$ • |

| Solutions |
|---|
| • $-\frac{1}{4}$ et $-\frac{3}{2}$ |
| • $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{2}$ |
| • $0$ et $2$ |
| • $-\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{2}$ |
| • $\frac{1}{4}$ et $-\frac{3}{2}$ |

**Corrigé**




### Exercice 2

Pour chaque affirmation trois réponses sont proposées et une seule est juste. Entoure la réponse correcte.

| | Affirmation | Proposition a | Proposition b | Proposition c |
|---|---|---|---|---|
| 1 | La solution de $6x-2=4$ est | 2 | - 1 | 1 |
| 2 | La solution de l'équation 7x – 13 = 15 | 4 | 3 | 5 |
| 3 | La solution et l'ensemble de solution de L'équation $3(x-1)+2=1+3x$ est : | 1 | $\mathbb{R}$ | Pas de solution |
| 4 | La solution et l'ensemble de solution de L'équation : $5x-11=5(x-3)+4$ est : | 3 | $\mathbb{R}$ | Pas de solution |

**Corrigé**

| | Affirmation | Proposition a | Proposition b | Proposition c |
|---|---|---|---|---|
| 1 | La solution de $6x - 2 = 4$ est : | 2 | - 1 | 1 |
| 2 | La solution de l'équation 7x – 13 = 15 | 4 | 3 | 5 |
| 3 | La solution et l'ensemble de solution de L'équation $3(x-1)+2 = 1+3x$ est : | 1 | $\mathbb{R}$ | Pas de solution |
| 4 | La solution et l'ensemble de solution de L'équation : $5x - 11 = 5(x-3)+4$ est : | 3 | $\mathbb{R}$ | Pas de solution |

**D-2 Exercices de renforcement**

**Exercice 3**

On donne l'inéquation (I) $x+5 \leq 4(x+1)+7$

1. Explique pourquoi chacun des nombres suivants est ou n'est pas une solution de l'inéquation (I) : $-5$ ; $-3$ ; 0 ; 3.
2. Résous l'inéquation (I).
3. Représente l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) sur une droite graduée.

**Corrigé**

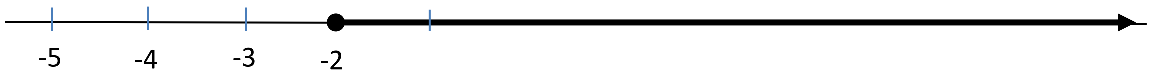
1. En remplaçant $x$ par – 5 dans l'inéquation (I), l'inégalité n'est pas vérifiée, donc – 5 n'est pas solution de (I).
   -3 ne vérifie pas (I) donc -3 n'est pas solution de (I).
   0 vérifie (I) donc 0 est solution de (I).
   7 vérifie (I) donc 7 est solution de (I).

2. Résolvons (I).

$x + 5 \leq 4(x+1)+7$ équivaut à $x+5 \leq 4x+4+7$
équivaut à $3x \geq -6$
équivaut à $x \geq -2$

L'ensemble des solutions de (I) est l'intervalle [-2 ; + ∞ [

3. Représentation graphique de l'ensemble des solutions de l'inéquation (I).




**Exercice4**

1. Résous chacune des équations suivantes :
   a) (3 – 4$x$) - (2$x$- 1) = 0 ;
   b) (3 – 4$x$) (2$x$- 1) = 0.
2. Résous l'inéquation : $3 - 4x > 2x - 1$.

Représente l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

**Corrigé**

1. Résolvons les équations :

a) $(3 - 4x) - (2x - 1) = 0$ équivaut à $3 - 4x - 2x + 1 = 0$
équivaut à - 6x + 4 = 0
équivaut à $x = \frac{2}{3}$.

Donc, la solution de l'équation est : $\frac{2}{3}$

b) $(3-4x)(2x-1)=0$ équivaut à $3-4x=0$ *ou* $2x-1=0$

équivaut à $x=\frac{3}{4}$ *ou* $x=\frac{1}{2}$

Donc, les solutions de l'équation sont : $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{2}$ .

2) Résolvons l'inéquation : $3-4x > 2x-1$

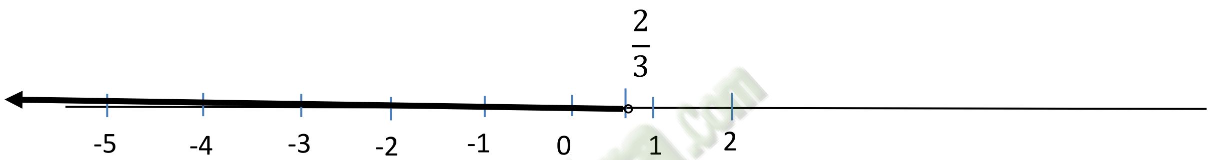
L'inéquation est équivalente à : $2x+4x < 3+1$

$$6x < 4$$

$$x < \frac{2}{3}$$

Donc, l'ensemble des solutions est l'intervalle $]-\infty\,;\frac{2}{3}[$

Représentation de l'ensemble des solutions sur une droite graduée




**D-3 Exercices d'approfondissement**

**Exercice 5**

On considère l'expression A suivante :

$A=(x-2)^2+(x-2)(3x+1)$

1. Développe et réduis A.
2. Factorise A.
3. Résous l'équation : $(x-2)(4x-1)=0$.
4. Calcule A pour $x=-\frac{1}{2}$

**Corrigé**

1. Développons $A=(x-2)^2+(x-2)(3x+1)$

$$A = x^2-4x+4+3x^2+x-6x-2$$

$$A = 4x^2-9x+2$$

2. Factorisons $A=(x-2)^2+(x-2)(3x+1)$

$$A=(x-2)(x-2+3x+1)$$

$$A=(x-2)(4x-1)\ .$$

3. Résolvons $(x-2)(4x-1)=0$.

L'équation est équivalente à $x-2=0$ *ou* $4x-1=0$.

Soit $x=2$ *ou* $x=\frac{1}{4}$ .

Donc les solutions de l'équation sont : 2 et $\frac{1}{4}$.

4. Calculons $A$ pour $x=-\frac{1}{2}$.

Pour $x=-\frac{1}{2}$, $A=(-\frac{1}{2}-2)(4\times(-\frac{1}{2})-1)$ .

$$A=(-\frac{5}{2})\times(-3)$$

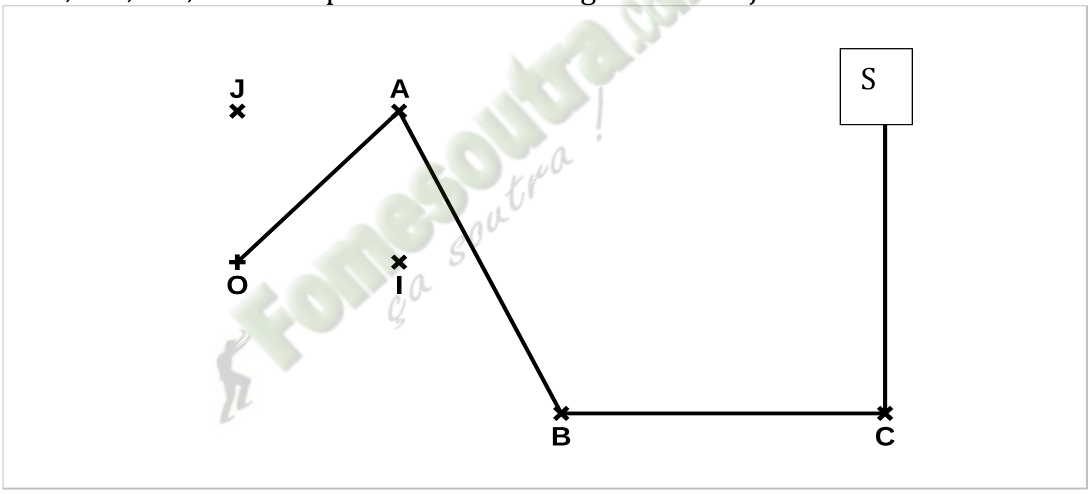
$$A=\frac{15}{2}.$$

**<u>THEME</u>: GEOMETRIE DU PLAN**

# <u>LEÇON 9</u> : COORDONNEES D'UN VECTEUR   Durée : 6 heures

## A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Les élèves d'une classe de 3$^{eme}$ d'un établissement secondaire décident de faire une sortie détente. A cet effet, les organisateurs s'informent auprès du service technique de la commune du site d'accueil (Point S) et ils reçoivent un extrait du trajet OABCS à parcourir, fait à l'échelle 1/2500.
Les organisateurs rendent compte à la classe. Tous les participants veulent alors connaître la distance de l'établissement (Point O) au point S.
Connaissant l'emplacement des points O, I et J des trois villes, ils s'organisent pour repérer les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ , $\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{BC}$ , $\overrightarrow{CS}$ $et$ $\overrightarrow{OS}$ puis calculer la longueur du trajet OABCS.



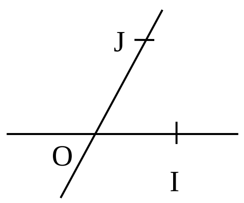
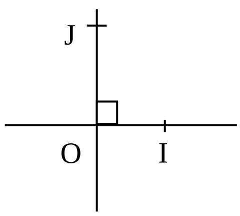
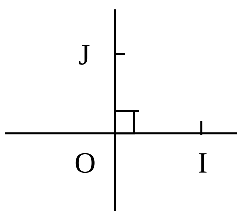

## B- <u>CONTENU DE LA LEÇON</u>

# I. Coordonnées d'un vecteur

## 1. Repère

**<u>Présentation</u>**

Un repère du plan est un triplet (O, I, J) de points distincts non alignés. Il existe plusieurs types de repères :

| | | |
|---|---|---|
| • **Le repère quelconque**   | • **Le repère orthogonal** ((OI)⊥(OJ) et OI≠OJ)   | • **Le repère orthonormé** ((OI) ⊥ (OJ) et OI=OJ)   |

**Vocabulaire**
Dans chacun des cas :
- La droite (OI) représente l'axe des abscisses.
- La droite (OJ) représente l'axe des ordonnées.

## 2. Coordonnées d'un point

### a) Coordonnées d'un point

**Définitions**

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Soit le point A( $x; y$ ).

- L'écriture ($x$ ; $y$) désigne le couple des nombres réels $x$ et $y$.

***x*** est le **premier terme** du couple et ***y*** est **le deuxième** terme du couple.

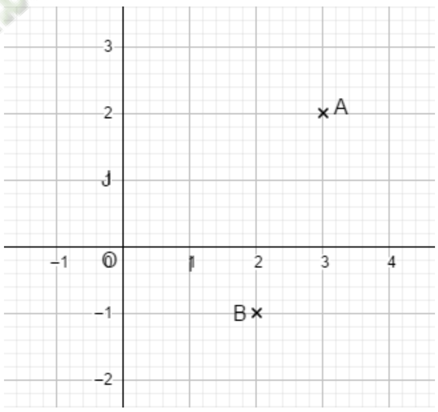
- Dans l'écriture A( $x; y$ ), ***x*** est **l'abscisse** du point A et ***y*** est **l'ordonnée** du point A.

On dit que ( $\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}$ ) est le **couple de coordonnées** du point A dans le repère (O, I, J).

- L'ensemble formé de tous les couples de nombres réels est noté ℝ x ℝ. On lit ℝ **croix** ℝ.

**Exemples**

- A a pour abscisse 3 et pour ordonnée 2.
  On note A(3 ; 2).
  ( **3** ; **2** ) est le **couple de coordonnées** du point A dans le repère (O, I, J).
- B a pour abscisse 2 et pour ordonnée -1.
  On note B(2 ; -1).
  ( $\mathbf{2}; \mathbf{-1}$ ) est le **couple de coordonnées** du point B dans le repère (O, I, J).

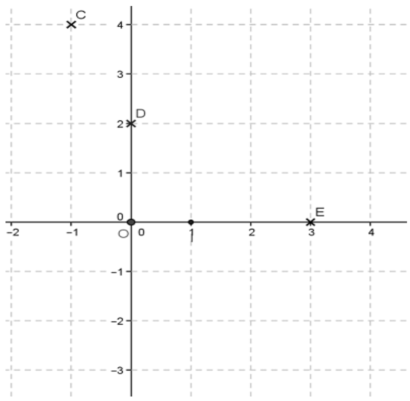



**Exercice de fixation**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

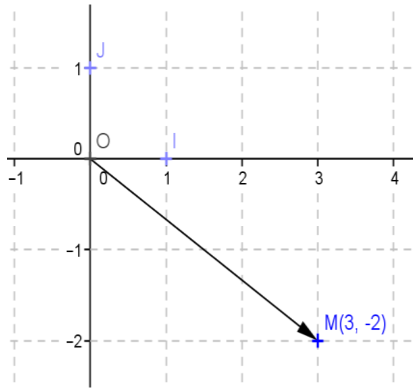
a) Place le point M( $3; -2$ ).

b) Détermine les coordonnées de chacun des points C, D, E et O.



**Corrigé**

a)




b) Les coordonnées des points sont : C(-1 ; 4), D(0 ; 2) , E(3 ; 0) et O( 0 ; 0).

### b) Égalité de couples de nombres réels

**Propriété**

Les couples ($x$ ; $y$) et ($x'$ ; $y'$) sont égaux, équivaut à : $x = x'$ et $y = y'$.

**Exemple**

($x$ ; 2) = (4 ; $y$) équivaut à $x = 4$ et $y = 2$.

**Remarque**

Les couples (4 ; 2) et (2 ; 4) ne sont pas égaux.

**Exercice de fixation**

Détermine $x$ et $y$ dans chaque cas pour que les couples ci-dessous soient égaux.

a) $(x+1\,;-3)$ et $(-2\,;\,y-5)$ ;

b) $(-5\,;3y)$ et $(2x\,;4)$.

Corrigé

a) $(x+1\,;-3)$ et $(-2\,;\,y-5)$ sont égaux équivaut à : $x+1=-2$ et $-3=y-5$.
$(x+1\,;-3)$ et $(-2\,;\,y-5)$ sont égaux équivaut à : $x=-3$ et $y=2$.

b) $(-5\,;3y)$ et $(2x\,;4)$ sont égaux équivaut à : $-5=2x$ et $3y=4$.
$(-5\,;3y)$ et $(2x\,;4)$ sont égaux équivaut à : $x=\frac{-5}{2}$ et $y=\frac{4}{3}$

## 3. Couple de coordonnées d'un vecteur

**Définition**

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). A et B sont des points du plan.

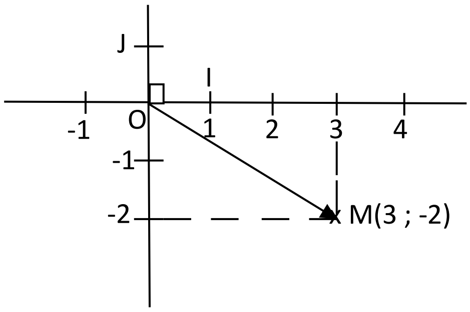
On appelle couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ , le couple de nombres réels $(x\,;y)$ tel que :

$\overrightarrow{AB}=x.\overrightarrow{OI}+y\overrightarrow{OJ}$.

On écrit : $\overrightarrow{AB}\binom{x}{y}$ ou $\overrightarrow{AB}(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{y})$.

**Exemples**

- L'écriture $\overrightarrow{AB}=2.\overrightarrow{OI}-3.\overrightarrow{OJ}$ montre que **(2 ;-3)** est **le couple de coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On écrit : $\overrightarrow{AB}\binom{2}{-3}$.
- Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On donne M (3 ; -2).




Sur la figure ci-contre, $\overrightarrow{OM} = 3.\overrightarrow{OI} - 2.\overrightarrow{OJ}$.
Donc le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et le point M ont le même couple de coordonnées.

**Remarque**

Le vecteur nul a pour couple de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice de fixation**

Dans chacun des cas suivants, identifie le couple de coordonnés du vecteur $\overrightarrow{CD}$.

a) $\overrightarrow{CD} = -3.\overrightarrow{OI} - 7.\overrightarrow{OJ}$ ; b) $\overrightarrow{CD} = \sqrt{2}.\overrightarrow{OI} + 2.\overrightarrow{OJ}$ ; c) $\overrightarrow{CD} = -6.\overrightarrow{OI}$ ; d) $\overrightarrow{CD} = 9.\overrightarrow{OJ}$.

**Corrigé**

Les couples de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont :

a) (-3 ; -7) ; b)($\sqrt{2}$ ; 2) ; c)(-6 ; 0) ; d)(0 ; 9).

## 4. Représentation d'un vecteur

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On donne un point A.

**Point méthode**

Pour construire le vecteur $\overrightarrow{AB}$ tel que $\overrightarrow{AB}(a ; b)$, on peut procéder comme suit :

- on exprime le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{OI}$ et du vecteur $\overrightarrow{OJ}$ ($\overrightarrow{AB} = a.\overrightarrow{OI} + b.\overrightarrow{OJ}$ , où $a$ et $b$ sont des nombres réels) ;
- on place le point A dans le repère donné ;
- on marque le point C tel que : $\overrightarrow{AC} = a.\overrightarrow{OI}$;
- on marque le point B tel que : $\overrightarrow{CB} = b.\overrightarrow{OJ}$.

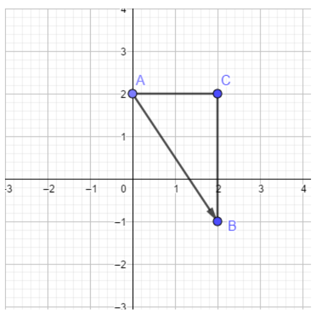
**Exercices de fixation**

**Exercice 1**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne le point A(0 ; 2).
Construis le vecteur $\overrightarrow{AB}\binom{2}{-3}$.

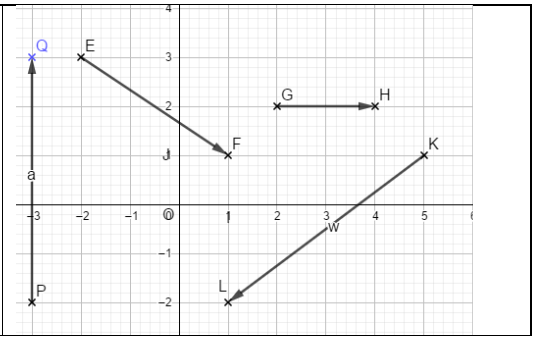
**Corrigé**

On sait que $\overrightarrow{AB}\binom{2}{-3}$ ; donc $\overrightarrow{AB} = 2.\overrightarrow{OI} - 3.\overrightarrow{OJ}$.
• On place le point A dans le repère donné ;
• On marque le point C tel que : $\overrightarrow{AC} = 2.\overrightarrow{OI}$ ;
• On marque le point B tel que : $\overrightarrow{CB} = -3.\overrightarrow{OJ}$.




**Exercice 2**

Détermine le couple de coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ , $\overrightarrow{GH}$ , $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{PQ}$ représentés dans le repère ci-contre.




**Corrigé**

$\overrightarrow{EF} = 3\,\overrightarrow{OI} - 2\,\overrightarrow{OJ}$ donc $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{GH} = 2\,\overrightarrow{OI} + 0\,\overrightarrow{OJ}$ donc $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{KL} = -4\,\overrightarrow{OI} - 3\,\overrightarrow{OJ}$ donc $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{PQ} = 0\,\overrightarrow{OI} + 5\,\overrightarrow{OJ}$ donc $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$.

## 5. Vecteurs égaux

**Propriété**

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). A, B, C et D sont des points du plan tels que $\overrightarrow{AB}(x\,;\,y)$ et $\overrightarrow{CD}$ ($x'$ ; $y'$).
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, équivaut à $\boldsymbol{x = x'}$ et $\boldsymbol{y = y'}$.



**Exercice de fixation**

Détermine les nombres $a$ et $b$ pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}a-3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}8\\-5-b\end{pmatrix}$ soient égaux.

**Corrigé**

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}a-3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}8\\-5-b\end{pmatrix}$ sont égaux, équivaut à : $a - 3 = 8$ et $4 = -5 - b$.

équivaut à : $a = 8+3$ et $b = -5-4$.

équivaut à: $a = 11$ et $b = -9$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux lorsque : $a = 11$ et $b = -9$.

**Conséquence**

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). A et B sont deux points du plan tels que $\overrightarrow{AB}(x\,;\,y)$.
$\overrightarrow{AB} = \vec{O}$ équivalent à $x = 0$ et $y = 0$.

# II. Coordonnées d'une somme de vecteurs

**Propriété**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). A, B, A' et B' sont des points du plan tels que :
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}\right)\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

**Exercice de fixation**

Soit $\overrightarrow{AB}\binom{2}{3}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{-6}{3}$. Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

Corrigé

On a $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})\binom{2+(-6)}{3+3}$ ; donc : $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})\binom{-4}{6}$.

# III. Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel

**Propriété**

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Soient A et B deux points du plan et $k$ un nombre réel.
**Si** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ **alors** $k.\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

**Exercice de fixation**

Soit $\overrightarrow{AB}\binom{-5}{10}$. Détermine les coordonnées du vecteur - 4 $\overrightarrow{AB}$.

Corrigé

On a $\overrightarrow{AB}\binom{-5}{10}$ et $-4\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\times(-5)\\-4\times(10)\end{pmatrix}$ ; donc : $-4\overrightarrow{AB}\binom{20}{-40}$.

# IV. Vecteurs colinéaires - Vecteurs non nuls orthogonaux

## 1. Vecteurs colinéaires

**Propriété**

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut à $xy' - x'y = 0$.

**Exercice de fixation**

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les vecteurs $\overrightarrow{AB}\binom{-3}{-1}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$.
Vérifie que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Corrigé

On a : $\overrightarrow{AB}\binom{-3}{-1}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$.
Calculons $xy' - x'y$.

$-3\times\sqrt{2} - (-1)\times(3\sqrt{2}) = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 0$ .
Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

## 2. Vecteurs non nuls orthogonaux

**Propriété**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont deux vecteurs non nuls.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont orthogonaux équivaut à $xx' + y'y = 0$.

**Exercice de fixation**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne les vecteurs $\overrightarrow{AB}\binom{-2}{4}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{2}{1}$.
Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

**Corrigé**

$\overrightarrow{AB}\binom{-2}{4}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{2}{1}$

Calculons $xx' + y\,y'$.

(-2) × 2 + 4 × 1= - 4 + 4 = 0.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

**Remarques**

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs.

- Si $xy' - x'y \neq 0$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.
- Si $xx' + y'y \neq 0$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas orthogonaux.

## V. Calculs dans un repère

### 1. Calcul des coordonnées d'un vecteur

**Propriété**

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). A et B sont deux points du plan.

Si $A(x\,;\,y)$ **et** B $(x'\,;\,y')$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}$.

**Exercice de fixation**

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les points A(*-2 ; 3)* et B (*1 ; 2)*.

Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

**Corrigé**

On sait que : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$.

En remplaçant par les valeurs, on a : $\overrightarrow{AB}\binom{1-(-2)}{2-3}$.

Donc $\overrightarrow{AB}\binom{3}{-1}$.

### 2. Calcul des coordonnées du milieu d'un segment

**Propriété**

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). K est le milieu du segment [AB].

Si $A(x\,;\,y)$ **et** B $(x'\,;\,y')$ alors K $\left(\frac{x+x'}{2}\,;\,\frac{y+y'}{2}\right)$.

**Exercice de fixation**

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne deux points A(*2 ; −3*) et B( $\frac{3}{2}$ *; −5*).

Détermine les coordonnées du milieu K du segment [AB].

**Corrigé**

Déterminons les coordonnées de K.

On sait que : $K\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

En remplaçant par les valeurs, on a : $K\left(\frac{2+\frac{3}{2}}{2};\frac{-3-5}{2}\right)$.

Donc $K\left(\frac{7}{4};-4\right)$.

### 3. Distance de deux points dans un repère orthonormé

**Propriété**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). A et B sont deux points du plan.

Si $A(x\,;\,y)$ **et** B $(x'\,;\,y')$ alors AB = $\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$ .

**Exercice de fixation**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne L(2 ; -2) et M(5 ; -1). Calcule la distance LM.

Corrigé

On a $\mathrm{LM} = \sqrt{(x_M - x_L)^2 + (y_M - y_L)^2}$.
En remplaçant par les valeurs, on a $\mathrm{LM} = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-(-2))^2}$.
Après calculs, on obtient $\mathrm{LM} = \sqrt{10}$.

## C. SITUATION D'EVALUATION

A l'occasion de la préparation de l'examen du BEPC, le professeur de mathématiques de Franck propose cette activité pour vérifier ses acquis.
« (O, I, J) est un repère du plan. A (1 ; -1) ; B (-2 ; 0) ; C ( -3 ; -3) et E(4 ; $-2$) sont trois points du plan. D est le symétrique de B par rapport à A . Les droites (AC) et (ED) sont-elles parallèles ? ».
Soucieux de réussir absolument son examen, Franck sollicite l'aide de son voisin de classe pour répondre à la question du professeur.

1- Justifie que le point D a pour coordonnées (4 ; $-2$).
2- Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ED}$.
3- Réponds à la préoccupation du professeur.

## Corrigé

**1- Coordonnées du point D**

A est le milieu du segment $[BD]$.

On a : $A\left(\frac{x_B+x_D}{2};\frac{y_B+y_D}{2}\right)$ donc, $A\left(\frac{-2+x_D}{2};\frac{y_D}{2}\right)$ et $A(1;-1)$.

$A\left(\frac{-2+x_D}{2};\frac{y_D}{2}\right)$ et $A(1;-1)$ sont égaux équivaut à : $\frac{-2+x_D}{2} = 1$ et $\frac{y_D}{2} = -1$

$A\left(\frac{-2+x_D}{2};\frac{y_D}{2}\right)$ et $A(1;-1)$ sont égaux équivaut à : $x_D = 4$ et $y_D = -2$.

Donc : $D\binom{4}{-2}$.

**2- Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ED}$.**

On a : $\overrightarrow{AC}\binom{-3-1}{-3+1}$ , donc : $\overrightarrow{AC}\binom{-4}{-2}$.

On a : $\overrightarrow{ED}\binom{4+4}{-2+6}$, donc : $\overrightarrow{ED}\binom{8}{4}$.

**3-Répondons à la préoccupation du professeur.**

Les deux droites (AC) et (ED) sont parallèles lorsque les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires. On a : $\overrightarrow{AC}\binom{-4}{-2}$ et $\overrightarrow{ED}\binom{8}{4}$.
$-4\times 4-(-2)\times 8 = -16+16 = 0$; les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires.
Par conséquent, les droites (AC) et (ED) sont parallèles.

## D. EXERCICES

## D-1. Exercices de fixation

**Exercice 1**

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

On donne les vecteurs : $\overrightarrow{AB}\binom{2}{1}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{6}{3}$.

Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

**Corrigé**

Justifions que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

$2 \times 3 - 1 \times 6 = 6 - 6 = 0$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

**Exercice 2**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On donne les vecteurs $\overrightarrow{AB}\binom{3}{5}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{5}{-3}$.

Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

**Corrigé**

$3 \times 5 + 5 \times (-3) = 15 - 15 = 0$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

**Exercice 3**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On donne $\overrightarrow{EF}$ ( - 3 ; 2) et $\overrightarrow{GH}$ ( 4 ; -7).

Calcule les coordonnées du vecteur : $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH}$.

**Corrigé**

En appliquant la propriété du cours, on obtient :

$(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH})\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$.

**Exercice 4**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On donne $\overrightarrow{EF}$ (5 ; 2).

a) Détermine les coordonnées du vecteur $2\overrightarrow{EF}$.

b) Détermine les coordonnées du vecteur $-4\overrightarrow{EF}$.

**Corrigé**

En appliquant la propriété du cours, on obtient :

a) $2\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$.

b) $-4\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-20\\-8\end{pmatrix}$.

**Exercice 5**

Dans les questions suivantes, indique-la (ou les) réponse(s) exacte(s) parmi les quatre réponses proposées.

1. Soit les points A(-3 ;-2) ; B(2 ;-1) et C(3 ; 2) d'un repère.
   ABCD est un parallélogramme si :

| A | b | c | d |
|---|---|---|---|
| D(-4 ;-5) | D(-2 ;1) | D(8 ;3) | D(-8 ;-3) |

2. Les vecteurs $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\x\end{pmatrix}$ sont colinéaires si :

| a | B | c | d |
|---|---|---|---|
| $x=\frac{-2}{9}$ | $x$ = -3 | $x$ = 9 | $x$ = -9 |

3. Soit les points A(-4 ; 2), B(1 ; -1) et C(5 ; y) d'un plan muni d'un repère (O, I, J).
Les points A, B et C sont alignés si :

| a | B | c | d |
|---|---|---|---|
| $y=\frac{-17}{5}$ | $y=\frac{17}{5}$ | $y=\frac{37}{5}$ | $y=\frac{-37}{5}$ |

4. Soit les points A(-3 ; 5), B(1 ;-7) et C(-1 ;-1) d'un repère. On a :

| A | b | c | d |
|---|---|---|---|
| B est le symétrique de A par rapport au point C | A est le symétrique de C par rapport au point B | C est le milieu de [AB] | B est le milieu de [AC] |

5. Soit les points A(-2 ; 5), B(-2 ;-1) et C(6 ; 3) dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
Dans le triangle ABC, la médiane issue de A coupe le segment [BC] en K. Donc la longueur AK est :

| a | b | C | d |
|---|---|---|---|
| $4\sqrt{2}$ | 4 | 5,6 | 8 |

**Exercice 6**

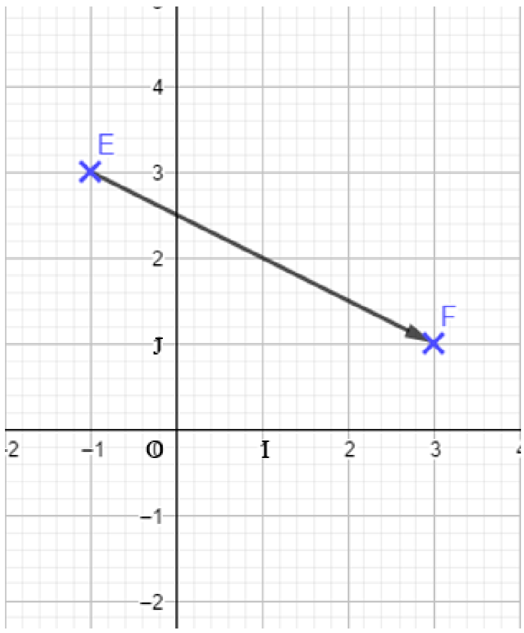
O, I et J sont trois points du plan. Identifie chaque repère à partir des informations contenues dans le tableau ci-dessous :

| N° | Informations | Réponses |
|---|---|---|
| 1 | (OI) $\perp$ (OJ) et OI = OJ | |
| 2 | (OI) et (OJ) sont sécantes et OI = OJ | |
| 3 | (OI) et (OJ) sont sécantes et OI $\neq$ OJ | |
| 4 | (OI) $\perp$ (OJ) et OI $\neq$ OJ | |

**Exercice 7**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On donne le point E(-1 ; 3).
Construis le vecteur $\overrightarrow{EF}$ tel que $\overrightarrow{EF}\binom{4}{-2}$.
Corrigé

Après la construction, on obtient la figure ci-contre.




**Exercice 9**

Détermine les nombres $a$ et $b$ pour que le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\b\end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}a-2\\-5\end{pmatrix}$ soient égaux.

**Corrigé**

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\b\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}a-2\\-5\end{pmatrix}$ sont égaux, équivaut à : 3=a-2 et b=-5

équivaut à: $a = 5$ et b = -5

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux lorsque : $a = 5$ et b = -5.

**Exercice 10**

Pour chaque affirmation, trois réponses sont proposées dont une seule est juste. Entoure la bonne réponse.

| | Affirmation | Proposition a | Proposition b | Proposition c |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), le couple de coordonnées de $\overrightarrow{RS} = 3\overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OJ}$ est | (2 ; 3) | (-3 ; 2) | (3 ; -2) |
| 2 | (a ; b) = (3 ; -4) équivaut à | $a$ = 3 et $b$ = -4 | $a$ = -4 et b = 3 | $a$ = 3 ou b = -4 |
| 3 | Si $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-2\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ alors | $3\times\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-6\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ | $3\times\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-6\\3\sqrt{3}\end{pmatrix}$ | $3\times\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-6\\\sqrt{9}\end{pmatrix}$ |
| 4 | $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RT}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont orthogonaux | $xy + x'y' = 0$ | $xy' + x'y = 0$ | $xx' + yy' = 0$ |

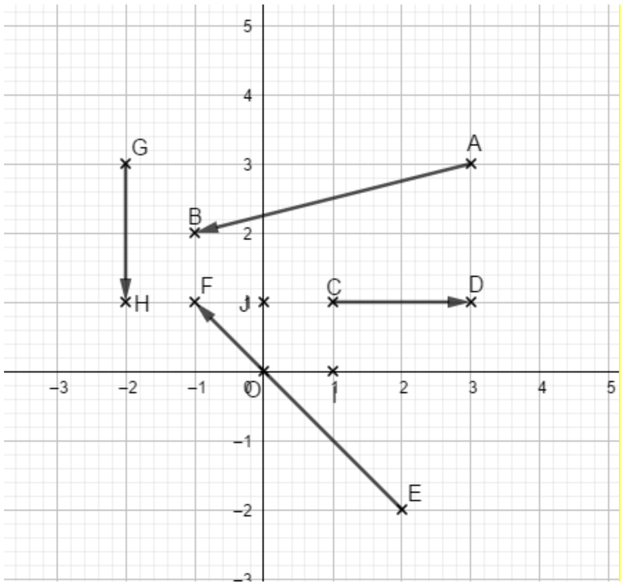
**Exercice 11**

(O, I, J) est un repère du plan. A et B sont deux points du plan.
Dans chacun des cas suivants, donne les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1) $\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{OI} - 3\overrightarrow{OJ}$
2) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OI}$
3) $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{OJ}$

**Exercice 12**

Détermine les couples de coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{CD}$ ; $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$.




**<u>Exercice</u> 12**

Dans chacun des cas suivants, calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{LM}$.

1) L(2 ; 3) et M(-5 ; -3) ; 3) L(-1 ; 4) et M(-7 ; -3)
2) L($\sqrt{2}$ ; 3) et M(2 ; -3) ; 4) L(0 ; -4) et M(-7 ; 0)

**<u>Exercice</u> 13**

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). On donne les points A(3 ; -1) ; B(-3 ; 4) ; C(4 ; 0) ; D(-3 ; -3)
Détermine le couple de coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}$ ; $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}$.

**<u>Exercice</u> 14**

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). On donne les vecteurs $\overrightarrow{AC}\binom{2}{9}$ et $\overrightarrow{DB}\binom{-5}{4}$.
Détermine les coordonnées des vecteurs $\frac{1}{3}.\overrightarrow{AC}$ ; $-\overrightarrow{DB}$ ; $\sqrt{3}\,.\,\overrightarrow{AC}$.

**<u>Exercice</u> 15**

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J).
Calcule les coordonnées des points I, J, K, milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [CD].

**<u>Exercice</u> 16**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J).
On donne les points N(-5 ; -1) ; P(-3 ; 3) ; Q(-3 ; 0) et R(-3 ; -3).
Calcule les distances NP ; PQ et RQ.

**<u>Exercice</u> 17**

Dans un repère (O, I, J), A, B, C et D sont des points non alignés. On donne les vecteurs
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\x+4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}y-2\\1\end{pmatrix}$ $x$ et $y$ étant des nombres réels.

On suppose que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux. Démontre que $x$ = -3 et $y$ = 4.

**<u>Exercice</u> 18**

(O, I, J) est un repère orthonormé du plan. Les points A, B, C et D sont tels que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

1) Calcule le couple de coordonnées de chacun des vecteurs suivants :

$2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}, \quad 3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}$.

2) Soit E et F deux points du plan tel que : $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Détermine $x$ pour que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ soient colinéaires.

b) Détermine $x$ pour que $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient orthogonaux.

**<u>Exercice</u> 19**

Dans un repère (O, I, J), on donne les points A(3 ; 2), B(-2 ; 1) et C(4 ; 3).

a) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OC}$.

b) Soit E($x$ ;-2) où $x$ est un nombre réel. Détermine $x$ pour que les points A, B et E soient alignés.

## D-2. Exercices de renforcement

**Exercice 20**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J), on donne les points N( -5 ; -1) ; P(-3 ; 3) et Q(-3 ; 0).

1. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{PQ}$.
2. Calcule les coordonnées des points T et V, milieux respectifs des segments $[NP]$ et $[PQ]$.
3. Calcule les distances NP et PQ.

**Corrigé**

1) Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{PQ}$.

$\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix} x_P-x_N \\ y_P-y_N \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix} -3-(-5) \\ 3-(-1) \end{pmatrix}$,donc $\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} x_Q-x_P \\ y_Q-y_P \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} -3-(-3) \\ 0-3 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2) Calculons les coordonnées des points T et V milieux respectifs des segments $[NP]$ et $[PQ]$.

$T\left(\frac{x_N+x_P}{2};\frac{y_N+y_P}{2}\right)$, on a : $T\left(\frac{-5-3}{2};\frac{-1+3}{2}\right)$, donc $T\ (-4;1)$.

$V\left(\frac{x_P+x_Q}{2};\frac{y_P+y_Q}{2}\right)$, on a : $T\left(\frac{-3-3}{2};\frac{3+0}{2}\right)$, donc $T\ (-3;\frac{3}{2})$.

3) Calculons les distances NP et PQ.

$$\begin{aligned} \mathrm{NP} &= \sqrt{(x_P-x_N)^2+(y_P-y_N)^2} \\ &= \sqrt{(-3-(-5))^2+(3-(-1))^2} \\ &= \sqrt{2^2+4^2} \\ &= \sqrt{20} \end{aligned}$$

Donc : $NP = 2\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ} &= \sqrt{(x_Q-x_P)^2+(y_Q-y_P)^2} \\ &= \sqrt{(-3-(-3))^2+(0-3)^2} \\ &= \sqrt{0^2+(-3)^2} \end{aligned}$$

Donc : PQ = 3.

**<u>Exercice</u> 21**

(O, I, J) est un repère orthonormé du plan. On donne les points A (3 ; -1) ; B (8 ;2) ; C (-1 ; -5).

1) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{BC}$ et $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$.

2) Calcule la distance AB.

**Exercice 22**
(O, I, J) est un repère orthonormé du plan. On donne les points A (2 ; 0) ; B (-3 ; y) ; C ($x$ ; 3) et D (4 ; 2). ($x$ et y étant des nombres réels).

1) Détermine les nombres $x$ et y pour que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient orthogonaux à $\overrightarrow{AB}$.
2) Démontre que les droites (BC) et (AD) sont parallèles.

**Exercice 23**
(O, I, J) est un repère orthonormé du plan. On donne $\overrightarrow{PQ}\binom{-3}{2}$ ; $\overrightarrow{RS}\binom{-6}{4}$ ; $\overrightarrow{TU}\begin{pmatrix}-5\sqrt{2}\\2\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{WV}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\-5\end{pmatrix}$.

1) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $RS$ sont colinéaires.
2) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{TU}$ et $\overrightarrow{WV}$ sont orthogonaux.

**Exercice 24**
(O, I, J) est un repère orthonormé du plan. On donne $\overrightarrow{PQ}\binom{x}{2}$ ; $\overrightarrow{RS}\binom{-3}{4}$.

1) Détermine la valeur de $x$ pour que les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{RS}$ soient colinéaires.
2) Détermine la valeur de $x$ pour que les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{RS}$ soient orthogonaux.

**Exercice 25**
Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On donne deux points A (*2 ; -3*) ; B ($\frac{3}{2}$ ; -5) et C ($\frac{7}{4}$ ; - 4).

1) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2) Démontre que les points A ; B et C sont alignés.

**Exercice 26**
Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On donne deux points A(4 ; 4) ; B(-4; -3) ; C(-2 ; 2) et D(8 ; 1).

1) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2) Démontre que les droites (BD) et (AC) sont parallèles.

**Exercice 27**
Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On donne deux points A(3 ; 5) ; B (5; 8) ; C(1 ; 0) et D(4 ; -2).

1) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2) Démontre que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

**Exercice 28**
(O, I, J) est un repère orthonormé du plan. On donne les points A(2 ; 0) ; B(-3 ; 5).

1) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$.
2) Calcule les coordonnées du point I, milieu de [AB].
3) Calcule les distances AI et AB.

**Exercice 29**
Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On donne deux points E(2 ; -3) ; F(0 ; 3) ; G(1 ; 0) et H($x$ ; -4).

1) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$.
2) Démontre que les points E ; F et G sont alignés.
3) Détermine la valeur de $x$ pour que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ soient orthogonaux.

## D-3. Exercices d'approfondissement

**Exercice 30**

(O, I, J) est un repère orthonormé du plan. On donne les points A (2 ; 0) ; B (6 ; 2) et C(0 ; 4).

1) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux
3) Calcule les distances AB et AC
4) Détermine la nature du triangle ABC.

**Exercice 31**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On considère les points B (-4 ; 2) et C (2 ; 4). On prend le centimètre comme unité.

1) Place les points B et C dans le repère orthonormé (O, I, J).
2) Exprime les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
3) Détermine les coordonnées du point A pour que le quadrilatère OBAC soit un parallélogramme. Place le point A dans le repère.
4) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
5) Détermine les coordonnées du point R, centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
6) Calcule le rayon de ce cercle.

# Thème : Géométrie du plan
# LEÇON 10 : EQUATIONS DE DROITES   Durée : 6 h

## A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un élève de 3ème d'un collège veut participer au jeu de « génie en herbe » organisé par le club de mathématiques de son établissement. Pour cela, il fait des recherches et découvre entre autres, des équations du type : $ax + by + c = 0$ ($a$ et $b$ étant des nombres réels pas tous nuls) qu'il présente à ses camarades de classe. Ceux-ci présentent leurs découvertes à leur professeur de Mathématiques qui décide de leur apprendre à construire des courbes d'équations de type $ax + by + c = 0$ et d'en connaître ses propriétés ($a$ et b n'étant pas tous nuls) afin de mieux prendre en compte dans leurs recherches toutes les propriétés relatives aux équations de droites.

## B. CONTENU DE LA LEÇON

### I. Equations d'une droite

#### 1. Equation d'une droite

**Propriétés**

Soient $a, b$ et $c$ des nombres réels.
Dans le plan muni d'un repère,

- Toute droite a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$.
- Toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ où $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$ est une équation d'une droite.

#### 2. Détermination d'une équation de droite

**a. Equation d'une droite passant par deux points**

**Exemple**

Dans le plan muni d'un repère (O ; I ; J), on donne les points $A(4; -3)$ et $B(6\,;1)$.
Déterminons une équation de la droite $(AB)$.
Considérons un point $M$ du plan tel que $M(x; y)$.
On sait que M appartient à (AB) équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y+3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6-4 \\ 1-(-3) \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\binom{2}{4}$.
D'où $M \in (AB)$ équivaut à : $4(x-4) - 2(y+3) = 0$.

$$4x - 16 - 2y - 6 = 0$$
$$4x - 2y - 22 = 0$$
$$2x - y - 11 = 0$$

$2x - y - 11 = 0$ est une équation de la droite (AB).

**b. Equation d'une droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée**

**Exemple**

Dans le plan muni du repère $(O, I, J)$, on donne les points $A(3; 2)$; $B(-1; -4)$ et $C(-2; 1)$.
Déterminons une équation de la droite (D) passant par C et parallèle à (AB).
Considérons $M$ un point du plan tel que $M(x; y)$.
On sait que $M$ appartient à $(D)$ équivaut à $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-3 \\ -4-2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$.
D'où $M$ appartient à $(D)$ équivaut à : -6$(x+2)+4(y-1)=0$

$$-6x-12+4y-4=0$$
$$-6x+4y-16=0$$
$$-3x+2y-8=0$$

$-3x+2y-8=0$ est une équation de la droite (D).

**Exercice de fixation**

Dans le plan muni du repère $(O, I, J)$, on donne les points $E(5; 3)$; $F(-3; 2)$ et $G(0; -4)$.
Détermine une équation de la droite (D) passant par E et de vecteur directeur $\overrightarrow{FG}$.

Corrigé

Considérons un point $K$ du plan tel que $K(x; y)$.
On sait que $K$ appartient à $(D)$ équivaut à $\overrightarrow{EK}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix} x-5 \\ y-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} 0-(-3) \\ -4-2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.
D'où $K$ appartient à $(D)$ équivaut à : -6$(x-5)-3(y-3)=0$

$$-6x+30-3y+9=0$$
$$-6x-3y+39=0$$
$$-2x-y+13=0$$

$-2x-y+13=0$ est une équation de la droite (D).

**c) Equation d'une droite passant par un point donné et perpendiculaire à une droite donnée**

**Exemple**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, I, J)$, on donne $E(1; 3)$ $F(-2; -6)$ et $G(2; -2)$.
Déterminons une équation de la droite $(D)$ passant par $G$ et perpendiculaire à $(EF)$.
Considérons un point M du plan tel que $M(x; y)$.
On sait que $M$ appartient à $(D)$ équivaut à $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont orthogonaux.
Or $\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+2 \end{pmatrix}$ $et$ $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -2-1 \\ -6-3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$.
D'où $M$ appartient à $(D)$ équivaut à : $-3(x-2)+(-9)(y+2) = 0$

$$-3x+6-9y-18=0$$
$$-3x-9y-12=0$$
$$x+3y+4=0$$

$x+3y+4=0$ est une équation de la droite (D).

# II. Le coefficient directeur d'une droite

### 1. Calcule du coefficient directeur d’une droite passant par deux points et non parallèle à l’axe des ordonnées

**Propriété**

Le plan est muni du repère $(O, I, J)$. La droite $(D)$ passe par les points $A(x_A\ ;\ y_A)\ et\ B(x_A\ ;\ y_B)$
Le **coefficient directeur a** de (D) est donné par la formule : $\boldsymbol{a} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

**Exercice de fixation**

Dans le plan muni du repère $(O, I, J)$, on donne les points $A(1; 3)$ et $B(-3; -5)$.
Calcule le coefficient directeur de la droite $(AB)$.

Corrigé

Soit a le coefficient directeur de la droite (AB)

$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-5-3}{-3-1} = \frac{-8}{-4} = 2.$

### 2. Détermination du coefficient directeur d’une droite

**Présentation**

Dans le plan muni du repère $(O, I, J)$, on donne une droite (D) qui a pour équation $ax$ +b $y$ +c = 0.
On peut transformer cette équation sous la forme $y$ = **A** $x$ + **B. (A et B étant des nombres réels).**
Dans ces conditions :

- **A est le coefficient directeur de la droite (D).**
- **B est l’ordonnée à l’origine de la droite (D).**

**Exemple**

Dans le plan muni d’un repère (O, I, J), une droite (D) a pour équation 6$x$ + 2 $y$ - 5 = 0.
Déterminons le coefficient directeur et l’ordonnée à l’origine de cette droite.
On écrit : 2 $y$ = - 6$x$ + 5

$$y = \frac{-6}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$y = -3x + \frac{5}{2}.$$

**-3** est le **coefficient directeur de la droite (D).**
$\boldsymbol{\frac{5}{2}}$ est **l’ordonnée à l’origine de la droite (D).**

**Exercice de fixation**

Dans le plan muni d’un repère (O, I, J), une droite (D) a pour équation : 3 $x$ + 2 $y$ + 8 = 0.
Détermine le coefficient directeur et l’ordonnée à l’origine de la droite (D).

Corrigé

On a 3$x$ + 2 $y$ + 8 = 0 donc, 2y = -3$x$ – 8.
D’où $y = -\frac{3}{2}x - \frac{8}{2}$.

$$y = -\frac{3}{2}x - 4.$$

Le coefficient directeur de la droite (AB) est $-\frac{3}{2}$.

L’ordonnée à l’origine est -4.

## III. Construction d’une droite dont on connaît une équation

**Exemple**

Construisons dans le plan muni d'un repère (O, I, J), la droite $(D)$ d'équation $2x - y + 3 = 0$.

**Etape 1** :

Trouvons deux points dont les coordonnées vérifient l'équation : $2x - y + 3 = 0$.

- Si $x = 0$ alors $2 \times 0 - y + 3 = 0$

  $y = 3$

- Si $x = -1$ alors $2 \times (-1) - y + 3 = 0$

  $-2 - y = -3$

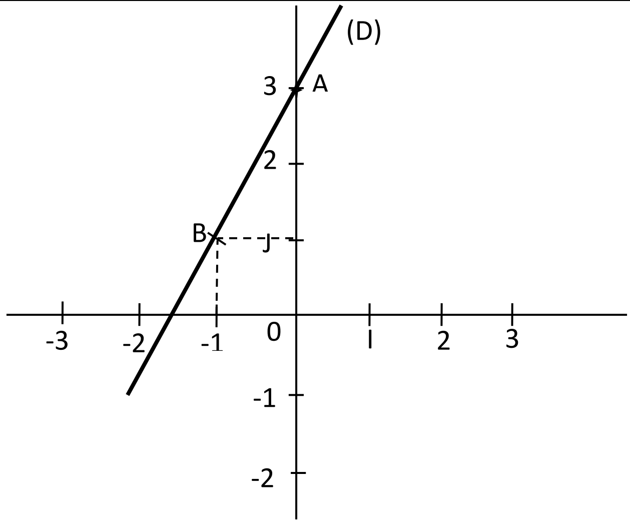
  $y = 1$

**Etape 2** :

plaçons les points $A(0;3)$ et $B(-1;1)$ dans le repère (O ; I ; J).

**Etape 3** :

puis traçons la droite passant par ces deux points.






# IV. Positions relatives de deux droites

## 1. Droites parallèles

**Propriété**

Le plan est muni du repère $(O, I, J)$.

Les droites $(D)$ et $(D')$ ont pour coefficients directeurs respectifs $a$ et $a'$.

$(D)\ //\ (D')$ équivaut à : $a = a'$.

**Exercice de fixation**

Dans le plan muni d'un repère $(O, I, J)$, on donne les droites :

$(D) : x - 3y + 4 = 0$ et $(D') : \frac{1}{3}x + y - 2 = 0$.

Justifie que $(D)$ et $(D')$ sont parallèles.

Corrigé

Ecrivons chacune des équations sous la forme $y = ax + b$.

$(D) : x - 3y + 4 = 0$

$-3y = -x - 4$

$(D) : y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

$(D') : -\frac{1}{3}x + y - 2 = 0$

$(D') : y = \frac{1}{3}x + 2$.

Le coefficient directeur **a** de $(D)$ est $\mathbf{\frac{1}{3}}$ et le coefficient directeur **a'** de $(D')$ est $\mathbf{\frac{1}{3}}$

On a : $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' = \mathbf{\frac{1}{3}}$. Donc $(D)$ et $(D')$ sont parallèles.

## 2. Droites perpendiculaires

**<u>Propriété</u>**

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, I, J)$.
Les droites $(D)$ et $(D')$ ont pour coefficients directeurs respectifs $a$ et $a'$.
$(D) \perp D')$ équivaut à : $a$ x $a'$ = -1.

**<u>Exercice de fixation</u>**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, I, J)$.
On donne les droites :
$(D) : 3x - y - 3 = 0$ et $(D') : y = -\frac{1}{3}x - 4$.
Justifie que les droites $(D)$ et $(D')$ sont perpendiculaires.

Corrigé

Ecrivons l'équation de $(D)$ sous la forme y = $a\,x$ + b.
$(D) : 3x - y - 3 = 0$.
$(D) : -y = -3x + 3$ d'où $(D) : y = 3x - 3$.
$(D)$ a pour coefficient directeur a tel que $a = 3$.
$(D')$ a pour coefficient directeur a' tel que $a' = -\frac{1}{3}$.
On a : $a \times a' = 3 \times (-\frac{1}{3}) = -1$ donc $(D) \perp (D')$.

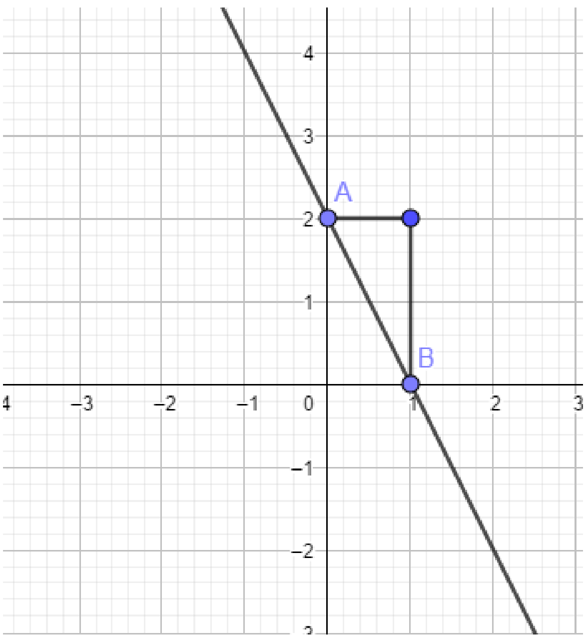
### 3. Construction d'une droite dont on connaît un point et le coefficient directeur

**<u>Exercice</u>**

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
Construis la droite passant par le point A(0 ; 2) et de coefficient directeur -2.

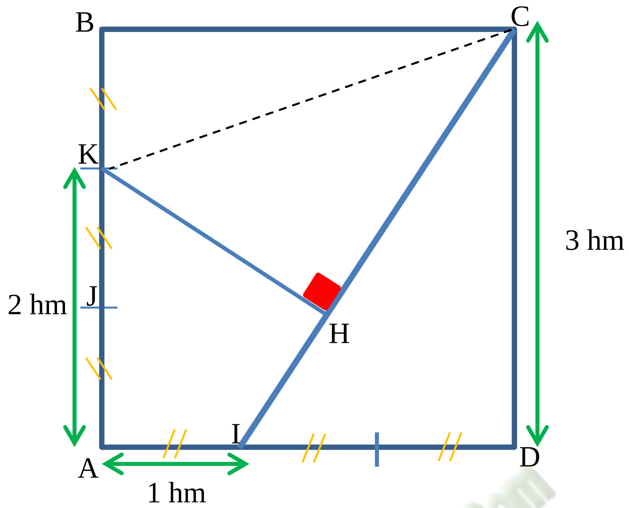
Corrigé

- On place le point A(0 ; 2) ;
- on construit le point B tel que $\overrightarrow{AB}$ ait pour couple de coordonnées (1 ; -2) ;
- la droite (AB) est la droite recherchée.




## C.SITUATION D'EVALUATION

Après le décès de leur grand frère, Konan le frère cadet décide d’attribuer à chacune des deux veuves du défunt une portion de sa plantation de cacao de forme carrée d’une superficie de 9 ha. Cette parcelle est représentée par la figure ci-dessous.




BCHK et CDI représentent les deux portions attribuées aux deux veuves. Charles, fils de Konan, en classe de troisième est sollicité par son père pour vérifier si le partage effectué est équitable pour les deux femmes.
(On fera le choix du repère orthonormé (A, I, J)).

1) Détermine l’équation réduite de chacune des droites (KD) et (IC).

2) a) Calcule la deuxième coordonnée du point H sachant que la première est $\frac{21}{13}$.

b) Calcule les distances KH et CH au dixième près.

3) Le partage est-il équitable pour les deux femmes? Justifie ta réponse.

Corrigé

1)

- Equation réduite de la droite (KD)

Les points K et D ont pour coordonnées respectives (0 ; 2) et (3 ; 0).
Soit $y = ax + b$, l’équation réduite de la droite (KD).
Le coefficient directeur $a$ de la droite (KD) est :
$a = \frac{y_K - y_D}{x_K - x_D} = \frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3}$.
L’ordonnée à l’origine $b$ de la droite (KD) est AK=2.
Donc, l’équation réduite de la droite (KD) est : $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

- Equation réduite de la droite (IC)

Les points I et C ont pour coordonnées respectives (1 ; 0) et (3 ; 3).
Soit $y = a'x + b'$, l’équation réduite de la droite (IC).
Le coefficient directeur $a'$ de la droite (IC) est :
$a' = \frac{y_I - y_C}{x_I - x_C} = \frac{0-3}{1-3} = \frac{3}{2}$.
L’ordonnée à l’origine $b$ de la droite (IC) est : $b' = 0 - \frac{3}{2} \times 1 = -\frac{3}{2}$.
Donc, l’équation réduite de la droite (IC) est : $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$.

2) a) Comme le point H appartient à la droite (IC) alors $y = \frac{3}{2} \times \frac{21}{13} - \frac{3}{2} = \frac{63}{26} - \frac{3}{2} = \frac{63-39}{26} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$.

Donc la deuxième coordonnée est $\frac{12}{13}$.

b)

- Distance KH.

On a $KH = \sqrt{(x_K - x_H)^2 + (y_K - y_H)^2}$

$$= \sqrt{\left(0 - \frac{21}{13}\right)^2 + \left(2 - \frac{12}{13}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{21}{13}\right)^2 + \left(\frac{14}{13}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{441}{169} + \frac{196}{169}}$$

$$= \sqrt{\frac{637}{169}} \approx 1{,}9 \text{ hm.}$$

- Distance CH.

On a $KH = \sqrt{(x_C - x_H)^2 + (y_C - y_H)^2}$

$$= \sqrt{\left(3 - \frac{21}{13}\right)^2 + \left(3 - \frac{12}{13}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{18}{13}\right)^2 + \left(\frac{27}{13}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{324}{169} + \frac{729}{169}}$$

$$= \sqrt{\frac{1053}{169}} \approx 2{,}4 \text{ hm.}$$

3)

- Déterminons l'aire de la parcelle CDI.

CDI est un triangle rectangle en D.

Aire de CDI = $\frac{CD \times DI}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$ ha.

- Déterminons l'aire de la parcelle BCHK.

Partageons la parcelle BCHK en deux parcelles BCK et KHC.

- Déterminons l'aire de la parcelle BCK.

BCK est un triangle rectangle en C.

Aire de BCK = $\frac{BC \times BK}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2}$ ha.

- Déterminons l'aire de la parcelle KHC.

KHC est un triangle rectangle en C.

Aire de KHC = $\frac{CH \times KH}{2} = \frac{1{,}9 \times 2{,}4}{2} = 2{,}28$ ha.

Donc la parcelle BCHK a pour aire : 3,78 ha.

L'aire de la parcelle CDI est 3 ha et l'aire de la parcelle BCHK est 3,78 ha, donc le partage n'est pas équitable.

# D. EXERCICES

## D-1. Exercices de fixation

**Exercice 1**

Parmi les égalités suivantes, identifie les équations de droites :

$3x - 3y + 4 = 0$ ; $xy - y + 4 = 0$ ; $3y + 4 = 0$ ; $x = +4$ ; $x - \frac{3y}{2x} + 4 = 0$

**Exercice 2**

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). Dans chacun des cas suivants, détermine une équation de la droite (AB).

a) $A(-2; 2)$ ; $B(1 ; -2)$ ; b) $A(4; 2)$ ; $B(4 ; -2)$ ; c) $A(5; -1)$ ; $B(-2 ; -1)$.

**Exercice 3**

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). On donne $A(2; -1)$ ; $B(-3 ; -1)$

Dans chacun des cas suivants, détermine une équation de la droite (D).

a) (D) passant par A et parallèle à l'axe des abscisses (OI).

b) (D) passant par B et parallèle à l'axe des abscisses (OI).

**Exercice 4**

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). $A(2; -1)$ ; $B(-3 ; -1)$.

Dans chacun des cas suivants, détermine une équation de la droite (D) qui passe par A et parallèle à (BC).

a) $A(2; 0)$ ; $B(-3 ; -2)$ ; $C(0 ; -1)$.

b) $A(2; 1)$ ; $B(0 ; -2)$ ; $C(1 ; -1)$.

c) $A(3; 1)$ ; $B(1 ; -2)$ ; $C(2 ; -1)$.

**Exercice 5**

Détermine une équation de la droite (D) dans chacun des cas suivants :

a) (D) passant par $A(3; 1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.

b) (D) passant par $B(-3 ; -2)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

**Exercice 6**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J). On donne $A(2; -1)$ ; $B(-3 ; -1)$.

Dans chacun des cas suivants, détermine une équation de la droite (D).

a) (D) passant par A et est perpendiculaire à l'axe des abscisses (OI).

b) (D) passant par B et est perpendiculaire à l'axe des abscisses (OJ).

**Exercice 7**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J). On donne $K(\sqrt{2} ; -1)$; L(2 ; 1) et M(-1 ; -1).

Détermine une équation de la droite (D) passant par $K$ et perpendiculaire à (LM).

**Exercice 8**

On donne les points $A(2; -2)$ ; $B(-3 ; -1)$ et $C(-3 ; -2)$.

Observe attentivement les coordonnées des trois points et donne sans faire de calculs, une équation de chacune des droites (AC) et (BC).

**Exercice 9**
Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). On donne les points $P(1; 3)$ ; $Q(-3\,; -5)$.
Détermine une équation de la droite (PQ) du type $y$ = $a\,x$ + b.

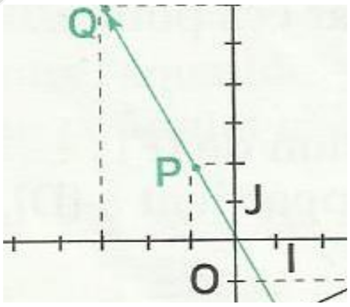
**Exercice 10**
On donne E($a$ ; $b$) et F($c$ ; $d$).
Identifie le coefficient directeur de la droite (EF) parmi les propositions suivantes :
1) $\frac{c-a}{d-b}$ ; 2) $\frac{d-b}{c-a}$ ; 3) $\frac{d-b}{a-c}$.

**Exercice 11**
Détermine le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite (D) dans chacun des cas suivants :
a) (D) : $y = 3x + 4$ ; b) (D) : $3x + y = 4$ ; c) (D) : $x - 4y = 1$ ; d) (D) : $3x - 3y + 4 = 0$.

**Exercice 12**
On donne les points $A(2; -2)$ ; $B(-3\,; -1)$.
Calcule le coefficient directeur de la droite (AB).

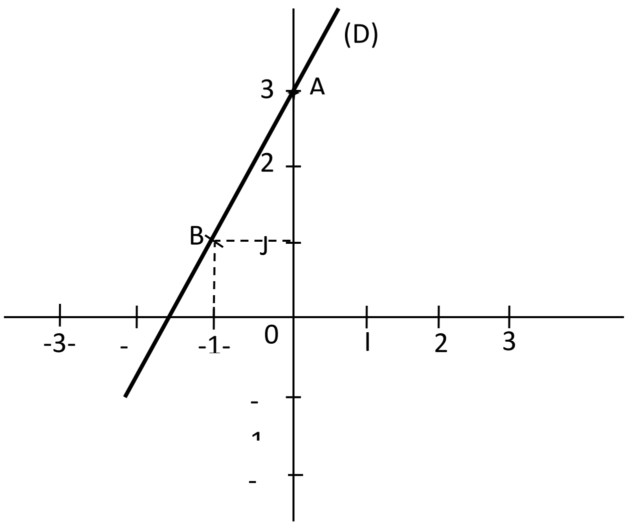
**Exercice 13**

Lis à partir de la figure ci-contre le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite (PQ).






**Exercice 14**
Lis à partir de la figure ci-contre le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite (AB).



**<u>Exercice</u> 15**
$2x - y + 1 = 0$ est une équation de la droite (Δ). Indique parmi les points suivants ceux qui appartiennent à la droite (Δ). $A(0; 1)$ ; $B(2\,; -3)$ ; $C(2\,; 5)$.

**<u>Exercice</u> 16**
Dans le plan muni du repère (O ; I ; J), construis les droites ($D_1$) et ($D_2$) d'équations respectives $2x - 3y + 2 = 0$ et $y = -2x + 3$.

**<u>Exercice</u> 17**
Dans le plan muni du repère (O ; I ; J), construis la droite (D) passant par A($\frac{1}{2}$ ; -2) et de coefficient directeur $\frac{3}{2}$.

**<u>Exercice</u> 18**
Dans le plan muni du repère (O ; I ; J), on donne E(10 ; 8) et F(-5 ; -1).
Soit (D) la droite qui passe par le point A(0 ; -2) et de coefficient directeur $\frac{3}{5}$.
Justifie que les droites (EF) et (D) sont parallèles.

**<u>Exercice</u> 19**
Le plan muni du repère orthonormé (O ; I ; J). On donne les droites ($D_1$) et ($D_2$) d'équations respectives $3x + 2y - 13 = 0$ et $y = \frac{2}{3}x + 3$.
Justifie que les droites ($D_1$) et ($D_2$) sont perpendiculaires.

**<u>Exercice</u> 20**
Dans le plan muni du repère (O ; I ; J), les droites ($D_1$), ($D_2$) et ($D_3$) ont respectivement pour équations $-2x + 2y + 3 = 0$ ; $x - y + 1 = 0$ et $3x + 3y - 6 = 0$.
Justifie que :
- ($D_1$) et ($D_2$) sont parallèles.
- ($D_2$) et ($D_3$) sont perpendiculaires.

# D-2. Exercices de renforcement

**<u>Exercice</u> 21**
Dans le plan muni du repère (O ; I ; J), On donne la droite (D) d'équation $2x + 3y + 6 = 0$ et les points $A(0; -2)$ ; $B(3\,; 0)$ ; $C(-3\,; -4)$.
1- Vérifie que les points $A$, $B$ et $C$ appartiennent à la droite (D).
2- Construis la droite (D).

**<u>Exercice</u> 22**
Dans le plan muni du repère (O ; I ; J),
1- Construis la droite (D) d'équation $y = 2x$.
2- Construis sur le même graphique, sans faire de calculs, les droites ($D_1$) et ($D_2$) d'équations respectives $y = 2x$+3 et $= -2x + y = 1$.

**<u>Exercice</u> 23**
Le plan muni du repère (O ; I ; J).
1- Détermine une équation de la droite (Δ) parallèle à la droite (D) d'équation $4x - 3y + 7 = 0$ et qui passe par le point P(-7 ; 8).
2- Calcule les coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ) et de l'axe des abscisses (OI).

**<u>Exercice</u> 24**

Le plan muni du repère (O ; I ; J).
1- Détermine l'équation réduite de la droite (D) qui coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 12 et l'axe des ordonnées (OJ) au point d'ordonnée -6.
2- Justifie si la droite (D) est parallèle ou non à la droite passant par les points C(3 ; 0) et F(0 ; -2).

**<u>Exercice</u> 25**
Le plan muni du repère (O ; I ; J).
1- Détermine une équation de la droite (Δ) passant par le point A(2 ; 3) et de coefficient directeur -2.
2- Détermine une équation de la droite ($D_1$) passant par le point B(-1 ; 7) et parallèle à (Δ).
3- Détermine une équation de la droite ($D_2$) passant par le point C(2; 1) et perpendiculaire à (Δ).

**<u>Exercice</u> 26**
Dans le plan muni du repère orthonormé (O ; I ; J), On donne R(1 ; 5) ; S(-1, 1) ; U(3 ; -1) et T(0 ; 3).
1- Place les points R ; S et T dans le repère orthonormé (O ; I ; J).
2- Vérifie que T est le milieu du segment [RS].
3- Détermine une équation de la médiane issue du sommet U du triangle RUS.
4- Détermine une équation de la médiatrice du segment [RS].

**<u>Exercice</u> 27**
1- Place dans un repère (O ; I ; J) les points A(-1 ; 8) et B(4 ; -2).
2- Calcule le coefficient directeur de la droite (AB).
3- Détermine une équation de la droite (AB) de la forme $y = ax$+b.
4- Vérifie si le point K($\frac{1}{2-\sqrt{2}}$ ; 4 - $\sqrt{2}$) appartient ou non à la droite (AB).

**<u>Exercice</u> 28**
(O, I, J) est un repère orthonormé du plan. On donne les points A (2 ; 0) ; B (6 ; 2) et C(0 ; 4).
1- Détermine une équation de la droite (AB).
2- Vérifie que le point C n'appartient pas à la droite (AB).
3- Calcule les coefficients directeurs des droites (AB) et (AC).
4- Démontre que les deux droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

# D-3. Exercices d'approfondissement

**<u>Exercice</u> 29**
1- Place dans un repère (O ; I ; J) les points A(2 ; 3), B(-2 ; 1), C($\frac{7}{2}$ ; $\frac{3}{2}$) et P(0 ; $\frac{7}{2}$).
2- Détermine une équation de la droite (AB).
3- Construis la droite ($D_1$) passant par P et de vecteur directeur $\overrightarrow{AC}$, puis donne une équation de la droite ($D_1$).
4- Démontre que les droites ($D_1$) et (AB) sont sécantes puis, calcule les coordonnées de leur point d'intersection R.
5- Détermine une équation de la médiane du triangle ABC issue du sommet A.

**<u>Exercice</u> 30**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O ; I ; J).

On considère trois points A(5 ; $\frac{5}{2}$) ; B(-1 ; $\frac{3}{2}$) et C($\frac{5}{2}$ ; 5).

1- Place les points A, B et C dans le repère orthonormé (O ; I ; J).

2- Détermine une équation de la droite (D) passant par B et parallèle à (AC) sous la forme $y = ax$+b.

3- Démontre que le triangle ABC est rectangle en C.

4- Sans faire de calcul, donne les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (AC).

5- Détermine les coordonnées des points d'intersection de (D) avec les droites (OI) et (OJ).

**THEME : ORGANISATION DES DONNEES**
**LEÇON 11 : STATISTIQUE** **DURÉE : 6 h**

## A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le professeur de géographie d'une classe de troisième d'un lycée de la Côte d'Ivoire demande à ses élèves de faire un exposé sur le niveau de vie des habitants d'un quartier de la commune. Les élèves disposent des informations suivantes.

**Document 1** : Etat d'une population

Une population est dite pauvre si le revenu annuel par personne est inférieur à 180 000 F CFA.
Une population est dite extrêmement pauvre si elle est pauvre et que plus de la moitié de la population a un revenu inférieur au revenu annuel par personne.

**Document 2** : Revenus annuels en milliers de F CFA

100, 100, 100, 100, 100, 110, 110, 110, 110, 110,
110, 110, 110, 110, 110, 110, 110, 110, 110, 110,
118, 118, 118, 118, 118, 120, 120, 120, 120, 120,
120, 120, 120, 120, 120, 130, 130, 130, 130, 130,
130, 130, 130, 130, 130, 140, 140, 140, 140, 140,
140, 140, 140, 140, 140, 150, 150, 150, 150, 150,
160, 160, 160, 160, 160, 160, 170, 170, 170, 170,
170, 170, 170, 170, 170, 170, 170, 170, 170, 170,
180, 180, 180, 180, 180, 180, 180, 180, 190, 190,
190, 190, 190, 190, 190, 190, 190, 190, 190, 190

Les résultats de l'enquête réalisée dans ce quartier sur un échantillon de 100 personnes sont donnés dans le document 2.
Pour déterminer le niveau de vie de cette population, les élèves décident d'organiser les données du document 2 dans un tableau et faire des calculs.

## B- CONTENU DE LA LECON

### I. Organisation des données

#### 1. Rappels

##### a) Le mode

**Définition**
On appelle mode d'une série statistique, toute modalité dont l'effectif est maximal ou encore la modalité qui a le plus grand effectif.

**Remarque**
Une série statistique peut avoir deux modes ou plus.

**<u>Exemple</u>**

Détermine le mode de la série statistique suivante :

| Modalités | 3 | 5 | 7 | 10 | 13 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 2 | 10 | 15 | 25 | 8 | 60 |

Le plus grand effectif est 25. La modalité qui a le plus grand effectif est 10.
Donc, le mode de cette série statistique est 10.

**b) <u>La fréquence</u>**

**Définition**
On appelle fréquence d'une modalité, le quotient de l'effectif de cette modalité par l'effectif total.
Elle peut s'exprimer en pourcentage : $fréq(\%) = \frac{effectif\ \ de\ la\ \text{mod}}{effectif\ \ total} \times 100$.

**<u>Exemple</u>**

La fréquence de la modalité 7 de la série statistique ci-dessus est : $\frac{15}{60} = 0{,}25$.
En pourcentage, on a : $\frac{15\times100}{60} = 25\%$ ( en multipliant le résultat précédent par 100).

**c) <u>La moyenne</u>**

**Définition**
La moyenne d'une série statistique à caractère quantitatif est égale à la somme de toutes les données, divisée par l'effectif total.

**<u>Exemple</u>**

On a pesé huit téléphones portables et obtenu les masses suivantes (en g) :
110 ; 100 ; 120 ; 130 ; 110 ; 120 ; 110 ; 130
Calculons la moyenne de la série des masses.

On calcule la moyenne M de la série des masses des téléphones portables en posant :

$$M = \frac{110+100+120+130+110+120+110+130}{8} = \frac{930}{8} = 116{,}25.$$

**Remarque**
La moyenne pondérée d'une série statistique est égale à la somme des produits de chaque valeur par son effectif, divisée par l'effectif total.

**<u>Exemple</u>**
La moyenne pondérée de la série des masses est :

$$M = \frac{3\times110+1\times100+2\times120+2\times130}{8} = \frac{930}{8} = 116{,}25.$$

**2- <u>Effectifs cumulés croissants, fréquences cumulées croissantes</u>**

**Définition**

Soit une série statistique à caractère quantitatif.

- On appelle **effectif cumulé croissant** d'une modalité $n$, la somme des effectifs de chaque modalité inférieure ou égale à $n$.
- On appelle **fréquence cumulée croissante** d'une modalité $n$, le quotient de l'effectif cumulé croissant de la modalité $n$ par l'effectif total.
  On la définit aussi comme étant la somme des fréquences de toutes les modalités inférieures ou égales à cette modalité.

**<u>Exercice de fixation</u>**

Les notes obtenues en mathématiques par les élèves d'une classe de troisième sont données dans le tableau suivant :

Complète le tableau statistique ci-dessous :

| Modalités | 3 | 5 | 7 | 10 | 13 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 2 | 10 | 25 | 15 | 8 | 60 |
| Effectifs cumulés croissants | | | | | | |
| Fréquences cumulées croissantes | | | | | | |

**Corrigé**

- **<u>Effectifs cumulés croissants</u>**

L'**effectif cumulé croissant** de la modalité 3, est l'effectif des élèves qui ont obtenu une note inférieure ou égale à 3, c'est-à-dire 2.

L'**effectif cumulé croissant** de la modalité 5, est l'effectif des élèves qui ont obtenu une note inférieure ou égale à 5, c'est-à-dire 2+10 = 12.

L'**effectif cumulé croissant** de la modalité 7, est l'effectif des élèves qui ont obtenu une note inférieure ou égale à 7, c'est-à-dire 2+10+25 = 37.

L'**effectif cumulé croissant** de la modalité 10, est l'effectif des élèves qui ont obtenu une note inférieure ou égale à 10, c'est-à-dire 2+10+25+15 = 52.

L'**effectif cumulé croissant** de la modalité 13, est l'effectif des élèves qui ont obtenu une note inférieure ou égale à 13, c'est-à-dire 2+10+25+15+8 = 60.

- **<u>Fréquences cumulées croissantes</u>**

La fréquence cumulée croissante de la modalité 3, est le quotient de l'effectif cumulé croissant de 3 par l'effectif total, c'est-à-dire $\frac{2}{60}$, ou $\frac{1}{30}$ après simplification par 2.

La fréquence cumulée croissante de la modalité 5, est le quotient de l'effectif cumulé croissant de 5 par l'effectif total, c'est-à-dire $\frac{12}{60}$, ou $\frac{1}{5}$ après simplification par 12.

La fréquence cumulée croissante de la modalité 7, est le quotient de l'effectif cumulé croissant de 7 par l'effectif total, c'est-à-dire $\frac{37}{60}$.

La fréquence cumulée croissante de la modalité 10, est le quotient de l'effectif cumulé croissant de 10 par l'effectif total, c'est-à-dire $\frac{52}{60}$, ou $\frac{13}{15}$ après simplification par 4.

La fréquence cumulée croissante de la modalité 13, est le quotient de l'effectif cumulé croissant de 13 sur l'effectif total, c'est-à-dire $\frac{60}{60}$, ou 1 après simplification par 60.

<u>Tableau des effectifs cumulés croissants et des fréquences cumulées croissantes</u>

| Modalités | 3 | 5 | 7 | 10 | 13 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 2 | 10 | 25 | 15 | 8 | 60 |
| Effectifs cumulés croissants | 2 | 12 | 37 | 52 | 60 | |
| Fréquences cumulées croissantes | $\frac{2}{60}$ | $\frac{12}{60}$ | $\frac{37}{60}$ | $\frac{52}{60}$ | $\frac{60}{60}$ | |

### 3. <u>Médiane d'une série statistique</u>

**Définition**
On appelle **médiane** d'une série statistique dont les valeurs sont ordonnées, tout nombre qui partage cette série en deux sous séries de même effectif :

- **un groupe constitué de valeurs inférieures ou égales à la médiane** ;
- **un groupe constitué de valeurs supérieures ou égales à la médiane**.

**<u>Remarque 1</u>**
Si l'effectif total N d'une série statistique est un nombre impair, alors la médiane est la modalité de rang $\frac{N+1}{2}$ sur la liste ordonnée des modalités de cette série.

**<u>Exemple 1</u>**
On donne la série statistique suivante : 2 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15.

Déterminons la médiane de cette série.

L'effectif total est 11 (un nombre impair), donc la position de la médiane sur la liste ordonnée est $\frac{11+1}{2} = \frac{12}{2} = 6$.
La médiane est la modalité de rang 6 sur la liste ordonnée : c'est 9.

$$\underbrace{2 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8}_{\text{5 nombres avant}} ; 9 ; \underbrace{10 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15}_{\text{5 nombres après}}$$

**<u>Remarque 2</u>**
• Si l'effectif total N d'une série statistique est un nombre pair, alors tout nombre compris entre la $\frac{N}{2}$ *ième valeur* et la $\left(\frac{N}{2}+1\right)$ *ième* valeur peut être considéré comme une médiane de la série.
• En pratique, la médiane est généralement la <u>moyenne</u> de ces deux valeurs.

**<u>Exemple 2</u>**
On donne la série statistique suivante : 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 10 ; 12.
Déterminons la médiane de cette série.

L'effectif total 6 est un nombre pair, donc la médiane est située entre la 3$^{\text{ème}}$ et la 4$^{\text{ème}}$ valeur de la liste ordonnée, c'est-à-dire entre 7 et 8. On la détermine en établissant la moyenne de ces deux valeurs. Donc la médiane cherchée est : $\frac{7+8}{2}$ = 7,5.

**Exercice de fixation**

Détermine la médiane de la série statistique suivante :
35 ; 33 ; 34 ; 37 ; 39 ; 40; 37 ; 28.

**Corrigé**

Il faut d'abord ranger les valeurs par ordre croissant :
On a donc : 28 ; 33 ; 34 ; 35 ; 37 ; 37 ; 39 ; 40.
L'effectif total 8 est un nombre pair. La médiane est située entre la 4$^{\text{ème}}$ et la 5$^{\text{ème}}$ valeur de la liste. On la détermine en établissant la moyenne de ces deux valeurs. Donc la médiane cherchée est :
$\frac{35+37}{2} = 36$.

## II. Regroupement en classe de même amplitude

### 1. Regroupement en classes d'égale amplitude

**Présentation**

Un professeur d'éducation physique et sportive mesure et relève la taille en mètres de chacun de ses 51 élèves d'une classe de 3$^{\text{ème}}$. Il obtient les résultats suivants :

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,54 | 1,53 | 1,57 | 1,59 | 1,54 | 1,55 | 1,60 | 1,63 | 1,59 | 1,67 | 1,61 | 1,63 | 1,67 |
| 1,69 | 1,68 | 1,69 | 1,70 | 1,64 | 1,67 | 1,65 | 1,54 | 1,72 | 1,73 | 1,64 | 1,74 | 1,78 |
| 1,55 | 1,76 | 1,75 | 1,79 | 1,66 | 1,77 | 1,67 | 1,69 | 1,59 | 1,76 | 1,69 | 1,79 | 1,76 |
| 1,59 | 1,74 | 1,78 | 1,73 | 1,68 | 1,65 | 1,71 | 1,76 | 1,78 | 1,65 | 1,57 | 1,58 | |

Son collègue de mathématiques, décide de former trois groupes d'étude en fonction de ces résultats sous forme d'intervalles de même amplitude dont le premier est $[1{,}50\,;\ 1{,}60[$.
Déterminons les deux autres intervalles.

L'amplitude de $[1{,}50\,;\ 1{,}60[$ est :1,60 – 1,50 = 0,1 . Donc, les deux autres intervalles sont $[1{,}60\,;\ 1{,}70[$ et $[1{,}70\,;\ 1{,}80[$ .

**Remarque**

Ces différents intervalles sont appelés des **classes.**

### 2. Classe modale

**Définition**

On appelle classe modale d'une série statistique, toute classe dont l'effectif est maximal ou toute classe qui a le plus grand effectif.

**Exemple**

L'organisation des données de l'activité ci-dessus est résumée dans le tableau des effectifs suivant :

| **Classes** | $[1{,}50\,;\ 1{,}60[$ | $[1{,}60\,;\ 1{,}70[$ | $[1{,}70\,;\ 1{,}80[$ |
|---|---|---|---|
| **Effectifs** | **13** | **20** | **18** |

La classe modale de cette série statistique est [1,60 ; 1,70[ car c'est la classe qui a le plus grand effectif.

### 3. La moyenne d'une série regroupée en classes

**Définition**
La moyenne d'une série statistique regroupée en classes est égale à la somme des produits du centre de chaque intervalle par son effectif , divisée par l'effectif total.

**Exemple**
En utilisant les données du tableau des effectifs précédant, calculons la taille moyenne des élèves de cette classe.

| **Classes** | [1,50 ; 1,60[ | [1,60 ; 1,70[ | [1,70 ; 1,80[ |
|---|---|---|---|
| **effectifs** | **13** | **20** | **18** |

- Calculons le centre de chaque classe :

Le centre de la classe [1,50 ; 1,60[ est $\frac{1,50+1,60}{2} = 1,55$.

Le centre de la classe [1,60 ; 1,70[ est $\frac{1,60+1,70}{2} = 1,65$

Le centre de la classe [1,70 ; 1,80[ est $\frac{1,70+1,80}{2} = 1,75$

| **Classes** | [1,50 ; 1,60[ | [1,60 ; 1,70[ | [1,70 ; 1,80[ | Total |
|---|---|---|---|---|
| **Le centre de chaque intervalle** | **1,55** | **1,65** | **1,75** | |
| **Effectifs** | **13** | **20** | **18** | **51** |

- La moyenne est M = $\frac{1,55x13+1,65x20+1,75x18}{51}$

$= \frac{84,65}{51}$

$= 1,65980\ldots$

$\approx 1,66$ (résultat arrondi à l'ordre 2)

La taille moyenne des élèves de cette classe est 1,66 m.

## III- Représentations graphiques

En classe de 4ème, vous avez représenté des effectifs et des fréquences sur des demi-disques.
En 3ème, nous allons les représenter sur des disques.

### 1. Diagramme circulaire

Sur un disque, on peut représenter les effectifs (ou les fréquences) des modalités d'une série statistique par des secteurs angulaires. La mesure en degré de chaque secteur angulaire est proportionnelle à l'effectif (ou à la fréquence) de la modalité qu'il représente.

**Exemple**

Complétons le tableau ci-dessous et construisons le diagramme circulaire correspondant.

| **Classes** | [1,50 ; 1,60[ | [1,60 ; 1,70[ | [1,70 ; 1,80[ | Total |
|---|---|---|---|---|
| **effectifs** | **13** | **20** | **18** | **51** |
| **Mesure (en degrés)** | | | | **360°** |

Déterminons les mesures des secteurs angulaires associés aux classes. La mesure d'un secteur est proportionnelle à l'effectif de la classe correspondante.
L'effectif total 51 correspond à tout le disque, c'est-à-dire 360°.

Pour la classe [1,50 ; 1,60[. On a : $\frac{360\times13}{51} = 91,7647\ldots. \approx 92°$ (résultat arrondi à l'ordre 0)
Pour la classe [1,60 ; 1,70[. On a : $\frac{360\times20}{51} = 141,1764\ldots \approx 141°$ (résultat arrondi à l'ordre 0)
Pour la classe [1,70 ; 1,80[. On a : $\frac{360\times18}{51} = 127,0588\ldots \approx 127°$ (résultat arrondi à l'ordre 0)
Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

| **Classes** | [1,50 ; 1,60[ | [1,60 ; 1,70[ | [1,70 ; 1,80[ | Total |
|---|---|---|---|---|
| **effectifs** | **13** | **20** | **18** | **51** |
| **Mesure (en degrés)** | **92°** | **141°** | **127°** | **360°** |

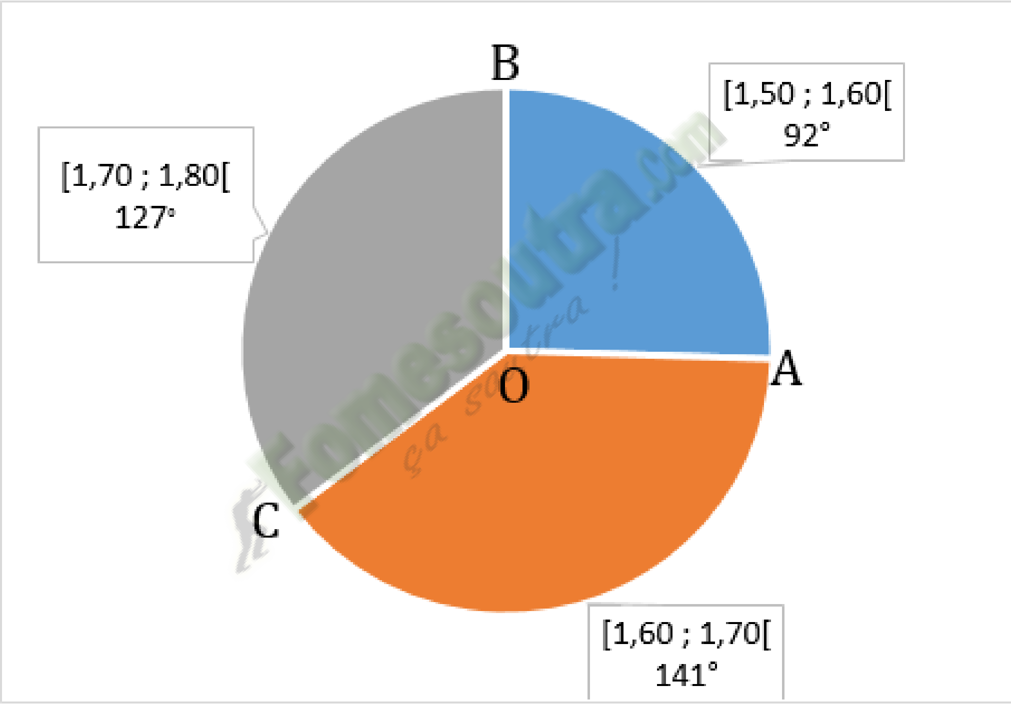



**Diagramme circulaire**

**2. <u>Polygone des effectifs cumulés croissants</u>**

**<u>Exemple</u>**

Voici un tableau qui résume le nombre d'heures passées devant le poste téléviseur par 28 enfants.

| Nombre d'heures | [1 ; 3[ | [3 ; 5[ | [5 ; 7[ | [7 ; 9[ | [9 ; 11[ | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 2 | 6 | 4 | 7 | 9 | 28 |

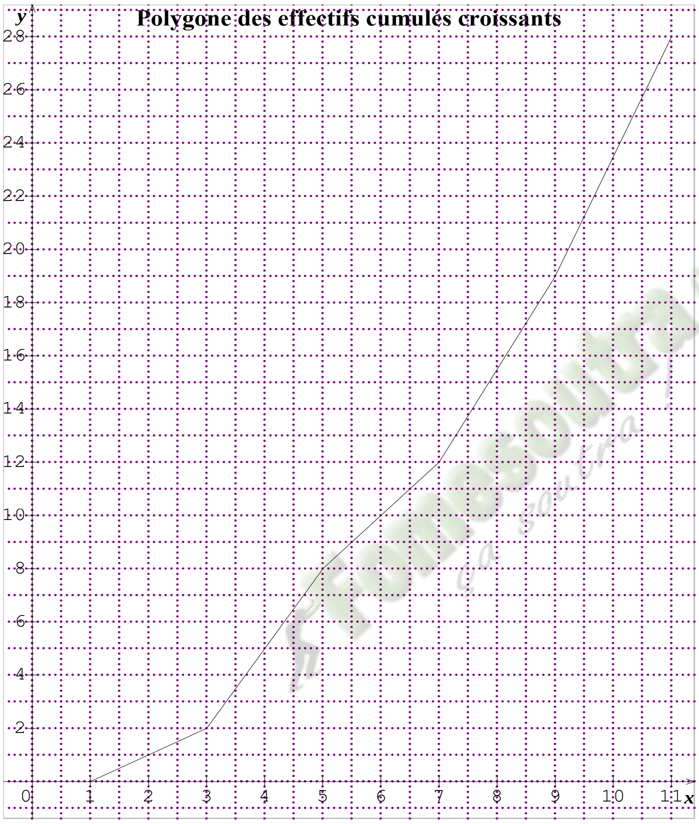
Déterminons les effectifs cumulés croissants de cette série statistique.

On obtient :

| Nombre d'heures | [1 ; 3[ | [3 ; 5[ | [5 ; 7[ | [7 ; 9[ | [9 ; 11[ | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 2 | 6 | 4 | 7 | 9 | 28 |
| Effectifs cumulés croissants | 2 | 8 | 12 | 19 | 28 | |

Interprétons ce tableau. Devant le poste téléviseur :
0 enfant passe moins d'une heure (1h);
2 enfants passent moins de 3h;
8 enfants passent moins de 5h ;
12 enfants passent moins de 7h;
19 enfants passent moins de 9 h;
28 enfants passent moins de 11 h.
Construisons le polygone des effectifs cumulés croissants.

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on place les points de coordonnées (1;0) ; (3;2) ; (5;8) ; (7;12) ; (9 ; 19) ; (11 ; 28) puis on les relie par des segments.




La courbe construite s'appelle le polygone des effectifs cumulés croissants.

## C- SITUATION D'EVALUATION

Dans le souci d'améliorer leurs prestations, les créateurs d'un site réalisent une enquête de satisfaction auprès des internautes clients. Ils estiment qu'une enquête est jugée satisfaisante si au moins 55% des internautes ont donné une note supérieure ou égale à la note médiane. Ils demandent alors d'attribuer une note sur 20 au site. Le tableau suivant donne les notes de 50 internautes.
Le responsable du site sollicite son fils en classe de $3^{ème}$ pour l'aider à se prononcer sur les résultats de l'enquête.

| Note | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 1 | 5 | 7 | 8 | 12 | 9 | 8 |

1. a) Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.
   b) Justifie que la note médiane de cette série est 14.

2. Dresse le tableau des fréquences cumulées croissantes.
3. L'enquête est-elle jugée satisfaisante ? Justifie ta réponse.

**Corrigé**

1. a) Tableau des effectifs cumulés croissants.

| Note | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 1 | 5 | 7 | 8 | 12 | 9 | 8 |
| Effectifs cumulés croissants | 1 | 6 | 13 | 21 | 33 | 42 | 50 |

b) $\frac{N}{2} = 25.$

25 est compris entre les effectifs cumulés croissants 21 et 33. Donc, la note médiane est 14.

2. Tableau des fréquences cumulées croissantes

| Note | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 1 | 5 | 7 | 8 | 12 | 9 | 8 |
| Fréquences cumulées croissantes | $\frac{1}{50}$ | $\frac{6}{50}$ | $\frac{13}{50}$ | $\frac{21}{50}$ | $\frac{33}{50}$ | $\frac{42}{50}$ | 1 |

3. D'après le tableau ci-dessus, $\frac{21}{50}$ des internautes ont attribué une note inférieure ou égale à 12.
Donc, $\frac{29}{50}$ soit 58% des internautes ont donné une note supérieure ou égale à 14.
Par conséquent , l'enquête est jugée satisfaisante.

## D. EXERCICES

### D-1 Exercices de fixation

#### Exercice 1

A partir des informations consignées dans le tableau 1, complète le tableau 2 en répondant par vrai ou par faux à chacune des affirmations.

**Tableau1**

| Notes | 08 | 10 | 12 | 13 | 14 | 16 | 17 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 2 | 6 | 4 | 8 | 3 | 7 | 10 | 40 |
| Effectifs cumulés croissants | 2 | 8 | 12 | 20 | 23 | 30 | 40 | |
| Fréquences en % | 5 | 15 | 10 | 20 | 7,5 | 17,5 | 25 | 100 |
| Fréquences cumulées croissantes | 5 | 20 | 30 | 50 | 57,5 | 75 | 100 | |

**Tableau2**

| N° | Affirmations | Réponses |
|---|---|---|
| 1 | Le caractère de la série statistique étudiée est qualitatif | |
| 2 | Le mode de cette série statistique est 13 | |
| 3 | L'effectif de la modalité 17 est 10 | |
| 4 | L'effectif total de cette série statistique est 40 | |
| 5 | L'effectif cumulé croissant de la modalité 14 est 20 | |
| 6 | 75% des élèves de cette classe ont une note inférieure ou égale à 16 | |

**Corrigé**

| N° | Affirmations | Réponses |
|---|---|---|
| 1 | Le caractère de la série statistique étudiée est qualitatif | F |
| 2 | Le mode de cette série statistique est 13 | F |
| 3 | L'effectif de la modalité 17 est 10 | V |
| 4 | L'effectif total de cette série statistique est 40 | V |
| 5 | L'effectif cumulé croissant de la modalité 14 est 20 | F |
| 6 | 75% des élèves de cette classe ont une note inférieure ou égale à 16 | V |

## Exercice 2

Une enquête portant sur le temps (en heures) de travail personnel quotidien de 20 élèves de $3^{ème}$ d'un collège a donné les résultats suivants :

| Temps en heures | [0 ; 2[ | [2 ; 4[ | [4 ; 6[ | [6 ; 8[ | [8 ; 10[ | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 4 | 6 | 2 | 4 | 4 | 20 |
| Effectifs cumulés croissants | 4 | 10 | 12 | 16 | 20 | |
| Fréquences en % | 20 | 30 | 10 | 20 | 20 | 100 |
| fréquences cumulées croissantes | 20 | 50 | 60 | 80 | 100 | |

Dans le tableau ci-dessous cinq affirmations incomplètes sont données à partir du tableau ci-dessus. Sur chaque ligne numérotée, trois réponses sont proposées. Une seule réponse est correcte. Indique sur ton cahier le numéro de l'affirmation suivi de la lettre qui correspond à la réponse juste qui la complète.

| N° | Affirmations | Réponses | | |
|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C |
| 1 | Toutes les classes ont la même amplitude égale à | 3 | 1 | 2 |
| 2 | La classe modale de cette série statistique est | [0 ; 2[ | [2 ; 4[ | [6 ; 8[ |
| 3 | L'effectif de la classe [2 ; 4[ est | 6 | 12 | 10 |
| 4 | L'effectif des élèves qui ont un temps de travail personnel inférieur à 8h est | 16 | 12 | 4 |
| 5 | 80% des élèves ont un temps de travail personnel inférieur à | 6h | 8h | 9h |

**Corrigé**

1. C 2. B 3. A 4. A 5. B

**Exercice 3**

Identifie la médiane des séries statistiques suivantes :

a) 2 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15.

b) 5 ; 8 ; 5 ; 7 ; 8 ; 9 ; 8 ; 7.

**Corrigé**

a) 9 b) 7,5

**Exercice 4**

On a relevé les tailles en centimètres (cm) de 24 élèves d'une classe d'un collège. Ces tailles sont consignées dans le tableau ci-dessous. Recopie et complète ce tableau

| taille en cm | 151 | 153 | 155 | 158 | 160 | 165 | total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| effectif | 7 | 10 | 13 | 10 | 8 | 6 | 54 |
| Effectif cumulé croissant | | | | | | | |

**Corrigé**

| taille en cm | 151 | 153 | 155 | 158 | 160 | 165 | total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| effectif | 7 | 10 | 13 | 10 | 8 | 6 | 54 |
| Effectif cumulé croissant | 7 | 17 | 30 | 40 | 48 | 54 | |

**Exercice 5**

Voici un tableau qui résume le nombre d'heures passé devant le poste téléviseur par 27 enfants. Recopie et complète ce tableau

| Modalité | 2 | 3 | 7 | 10 | 11 | 15 | total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence | 0,1 | 0,05 | 0,15 | 0,3 | 0,1 | 0,3 | |
| Fréquence cumulée croissante | | | | | | | |

**Corrigé**

| Modalité | 2 | 3 | 7 | 10 | 11 | 15 | total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence | 0,1 | 0,05 | 0,15 | 0,3 | 0,1 | 0,3 | 1 |
| Fréquence cumulée croissante | 0,1 | 0,15 | 0,3 | 0,6 | 0,7 | 1 | |

**Exercice 6**

Recopie et complète le tableau suivant :

| Modalité | [0 ; 3[ | [3 ; 6[ | [6 ; 9[ | [9 ; 12[ | [12 ; 15[ | [15 ; 18[ | total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence en % | 25 | 14 | 14,5 | 20,5 | 14 | 12 | |
| Fréquence cumulée croissante | | | | | | | |

## Exercice 7

À partir des données du tableau ci-dessous, construis un diagramme circulaire.
Arrondis les mesures des angles à l'unité près.

| Âge en années | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|
| fréquence en % | 6,9 | 59,7 | 33,4 |

## Exercice 8

Voici la répartition des notes de mathématiques à l'issue d'une interrogation écrite dans une classe de 25 élèves :

| Notes | [0 ; 5[ | [5 ; 10[ | [10 ; 15[ | [15 ; 20[ |
|---|---|---|---|---|
| Fréquences de ces notes | 8% | 20 % | 48 % | 24% |

Représente les indications du tableau par un diagramme circulaire.

## Exercice 9

Voici un tableau donnant la pointure de 40 élèves d'une classe de 3ème.

| Pointure | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 13 | 7 | 10 | 5 | 2 | 1 | 2 | 40 |
| Effectifs cumulés croissants | 13 | 20 | 30 | 35 | 37 | 38 | 40 | |

Construis le polygone des effectifs cumulés croissants de cette série statistique :



## Exercice 10

| Nombre d'heures | [1 ; 3[ | [3 ; 5[ | [5 ; 7[ | [7 ; 9[ | [9 ; 11[ | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 2 | 6 | 4 | 7 | 9 | 28 |
| Effectifs cumulés croissants | 2 | 8 | 12 | 19 | 28 | |

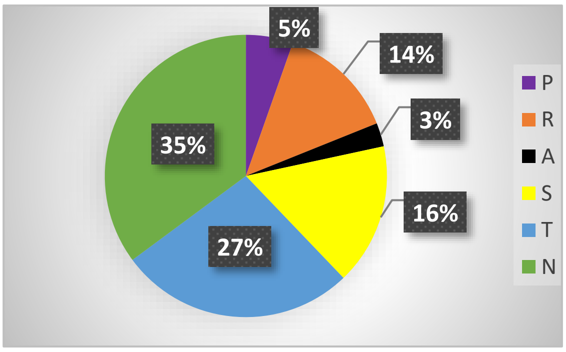
Construis le polygone des effectifs cumulés croissants de cette série statistique.

## Exercice 11

Dresse un tableau des fréquences cumulées croissantes à partir du diagramme circulaire ci-contre.

## Exercice 12

Dresse un tableau des effectifs cumulés croissants à partir du diagramme circulaire ci-contre. Arrondis les valeurs à l'unité près.
L'effectif total de la série est 37.



**Exercice 13**

Dans une classe, on relève le temps (en minutes) consacré par les élèves à faire leurs devoirs à la maison. Ces valeurs sont consignées dans le tableau ci-dessous :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 20 | 30 | 40 | 10 | 50 | 40 | 15 | 5 | 10 |
| 20 | 30 | 30 | 40 | 40 | 30 | 50 | 70 | 50 | 30 |
| 75 | 40 | 10 | 15 | 40 | 15 | 30 | 20 | 80 | 10 |

Regroupe les données de cette série en classes de même amplitude, la première étant [5 ; 25[.

**Corrigé**

L'amplitude de la classe est : 25-5= 20.

| Classe | [5 ; 25[ | [25 ; 45[ | [45 ; 65[ | [65 ;85[ |
|---|---|---|---|---|
| Effectif | 12 | 12 | 3 | 3 |

**Exercice 14**

En reprenant les données, regroupe les données de l'exercice 14 en 6 classes de même amplitude.

**Exercice 15**

Calcule la moyenne de la série statistique suivante :

| Classe | [0 ; 2[ | [2 ; 4[ | [4 ; 6[ | [6 ; 8[ | [8 ; 10[ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 10 | 12 | 15 | 8 | 3 |

**Exercice 16**

Dans une entreprise, les salaires en milliers de francs CFA se présentent comme suit :

| Classe | [100 ; 120[ | [120 ; 140[ | [140 ; 160[ | [160 ; 180[ | [180 ; 200[ | [200 ; 220[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 23 | 12 | 19 | 18 | 5 | 3 |

Calcule le salaire moyen dans cette entreprise.

**Corrigé**

| Classe | [100 ; 120[ | [120 ; 140[ | [140 ; 160[ | [160 ; 180[ | [180 ; 200[ | [200 ; 220[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Centre | 110 | 130 | 150 | 170 | 190 | 210 |
| Effectif | 23 | 12 | 19 | 18 | 5 | 3 |

La moyenne est :$\frac{110\times23+130\times12+150\times19+170\times18+190\times5+210\times3}{23+12+19+18+5+3} = 144{,}75$.

Le salaire moyen est donc 144,75 milliers de francs , soit 144750 francs.

### D-2 Exercices de renforcement

**Exercice17**

Une entreprise possède 15 voitures pour effectuer le transport de ses travailleurs. Voici les consommations moyennes, en litres d'essence, de chaque voiture aux 100 kilomètres : 9,5 ; 6,7 ; 7,8 ; 8,2 ; 10,1 ; 9,3 ; 6,9 ; 7,5 ; 6,8 ; 8,5 ; 9 ; 10,2 ; 11 ; 7 ; 10,5.
1. Détermine la consommation moyenne aux 100 kilomètres des voitures de cette entreprise.
2. Détermine la médiane de cette série.
3. Interprète ce résultat.

**Corrigé**

1. Déterminons la consommation moyenne aux 100 kilomètres des voitures de cette entreprise.
   Il s'agit de faire la somme de toutes les données, divisée par l'effectif total. On obtient :

$$\frac{9{,}5+6{,}7+7{,}8+8{,}2+10{,}1+9{,}3+6{,}9+7{,}5+6{,}8+8{,}5+9+10{,}2+11+7+10{,}5}{15} = \frac{129}{15}=8{,}6$$

   Donc la consommation moyenne est 8,6 litres d'essence aux 100 km.

2. Déterminons la valeur médiane de cette série.

Rangeons d'abord les données dans l'ordre croissant.
On obtient la liste ordonnée suivante :
6,7 ; 6,8 ; 6,9 ; 7 ; 7,5 ; 7,8 ; 8,2 ; 8,5 ; 9 ; 9,3 ; 9,5 ; 10,1 ; 10,2 ; 10,5 ; 11
On sait que l'effectif total est 15 qui est un nombre impair, donc la position de la médiane sur la liste ordonnée est : $\frac{15+1}{2} = \frac{16}{2} = 8$.
La médiane est donc la $8^{ème}$ valeur sur la liste ordonnée , c'est-à-dire 8,5.

En conclusion, la valeur médiane de cette série statistique est 8,5 litres.

3. Interprétons ce résultat.
Comme interprétation, on a 7 véhicules qui consomment moins de 8,5 litres d'essence et 7 véhicules qui consomment plus de 8,5 litres d'essence.

**Exercice 18**

Quelle couleur de bandeau souhaiterez-vous utiliser lors de nos activités sportives ? C'est la question qu'a posée un professeur d'EPS à ses élèves de $4^{ème}$.
Chaque élève interrogé choisit une seule couleur.
Les réponses obtenues sont consignées dans le tableau suivant :

| Couleur préférée | Rouge | Vert | Bleu | Orange | Noir | Jaune |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'avis favorables | 45 | 30 | 42 | 22 | 36 | 25 |

1. Quelle est le mode de cette série statistique ?
2. Calcule la fréquence en pourcentage de chaque couleur.

**Exercice 19**

On considère la série statistique suivante : 0,6 ; 1,2 ; 1,6 ; 1,5 ; 1,3 ; 0,8 ; 1,9 ; 1,4 ; 0,8 ; 1,8 ; 1,7 ; 0,9 ; 1,1 ; 1,9 ; 0,7 ; 1,8 ; 1,6 ; 1,6.

1. Regroupe ces données en classes d'amplitude 0,5.
2. Détermine la classe modale de cette série.

**Exercice 20**

Voici la répartition des 45 élèves d'une classe de $3^{ème}$ selon la note obtenue par chacun à un devoir de mathématique :

| Notes | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 | 17 | total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 5 | 7 | 6 | 10 | 9 | 3 | 5 | 45 |
| Effectif cumulé croissant | | | | | | | | |

1. Complète le tableau.
2. Détermine la note médiane.

**Exercice 21**

On a relevé les tailles en centimètres (cm) de 24 élèves d'une classe d'un collège Ces tailles sont consignées dans le tableau ci-dessous.

| Taille en cm | 151 | 153 | 155 | 158 | 160 | 165 | total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 7 | 10 | 13 | 10 | 8 | 6 | 54 |
| Effectif cumulé croissant | | | | | | | |

1. Complète le tableau.
2. Détermine la médiane de cette série.

**Exercice 22**

Voici un tableau qui résume le nombre d'heures passées devant le poste téléviseur par 27 enfants.

| Nombre d'heures | [1 ; 3[ | [3 ; 5[ | [5 ; 7[ | [7 ; 9[ | [9 ; 11[ | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 2 | 6 | 4 | 7 | 9 | 28 |
| Effectifs cumulés croissants | | | | | | |

1. Complète le tableau.
2. Construis le polygone des effectifs cumulés croissants en fonction du nombre d'heures.
3. Détermine :
   - la classe médiane.
   - une valeur approchée de la médiane par lecture graphique.

**Exercice 23**

Les quantités d'eau bue par 50 personnes par jour sont consignées dans le tableau ci-dessous :

| Quantité d'eau en litres | [0 ; 0,5[ | [0,5 ; 1[ | [1 ; 1,5[ | [1,5 ; 2[ | [2 ; 2,5[ | [2 ; 2,5[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence en% | 24 | 42 | 18 | 10 | 4 | 2 |

1. Détermine la classe modale de cette série statistique.
2. Dresse le tableau des fréquences cumulées croissantes.
3. Construis le polygone des fréquences cumulées croissantes.

## Exercice 24

Une usine teste des ampoules électriques, sur un échantillon, en étudiant leur durée de vie en heures. Voici les résultats :

| Durée de vie en heures | [1000 ; 1200[ | [1200 ; 1400[ | [1400 ; 1600[ | [1600 ; 1800[ | [1800 ; 2000[ |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'ampoules | 550 | 1460 | 1920 | 1640 | 430 |

1. Détermine le pourcentage d'ampoules qui ont une durée de vie de moins de 1 400 h.
2. Calcule la durée de vie moyenne d'une ampoule.

## Exercice 25

Une station de ski réalise une enquête auprès de 300 skieurs qui la fréquentent. Les résultats de l'enquête sont notés dans le tableau ci-dessous et indiquent la répartition en classe des skieurs en fonction de leur âge (en années) :

| Âge | Effectif | Centre de classe |
|---|---|---|
| [0;10[ | 27 | |
| [10;20[ | 45 | |
| [20;30[ | 48 | |
| [30;40[ | 39 | |
| [40;50[ | 42 | |
| [50;60[ | 36 | |
| [60;70[ | 33 | |
| [70;80[ | 24 | |
| [80;90[ | 6 | |



1. Complète ce tableau en indiquant le centre de chaque classe d'âge.
2. Calcule l'âge moyen des skieurs fréquentant cette station.
3. Détermine la fréquence, en pourcentage, de skieurs ayant un âge strictement inférieur à 40 ans.

## Exercice 26

On considère la série statistique suivante :

| Modalité | [5 ; 10[ | [10 ; 15[ | [15 ; 20[ | [20 ; 25[ |
|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 3 | 6 | 4 | 7 |

1. Détermine la classe modale.
2. Calcule la moyenne de cette série.
3. Construis le diagramme circulaire associé à cette série.

### Corrigé

1. La classe modale est [20 ; 25[ , car elle a le plus grand effectif qui est 7.
2. On détermine les centres des classes puis on calcule la moyenne :

$$\frac{7{,}5\times3+12{,}5\times6+17{,}5\times4+22{,}5\times7}{3+6+4+7} = 16{,}25.$$

3. Déterminons pour chaque classe le secteur angulaire associé :
   - Pour la classe [5 ; 10[, on a $\frac{360\times3}{20} = 54^0$
   - Pour la classe [10 ; 15[, on a $\frac{360\times6}{20} = 108^0$
   - Pour la classe [15 ; 20[, on a $\frac{360\times4}{20} = 72^0$
   - Pour la classe [20 ; 25[, on a $\frac{360\times7}{20} = 126^0$.

On en déduit la construction du diagramme circulaire associé à cette série.

**<u>Exercice 27</u>**

Une enquête portant sur le temps (en heures) de travail personnel quotidien de 20 élèves de 3$^{\text{ème}}$ d'un collège a donné les résultats suivants :

| Temps en heures | [0 ; 2[ | [2 ; 4[ | [4 ; 6[ | [6 ; 8[ | [8 ; 10[ | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 4 | 6 | 2 | 4 | 4 | 20 |
| Effectifs cumulés croissants | | | | | | |
| fréquences cumulées croissantes | | | | | | |

1. Complète le tableau ci-dessus.
2. Détermine la classe modale de cette série statistique.
3. Détermine l'amplitude de chaque classe.
4. Calcule le temps moyen de travail des élèves.

**<u>Exercice 28</u>**

Le tableau ci-dessous donne la répartition des âges des personnes qui se sont rendues dans le centre de santé d'un quartier pendant une semaine donnée :

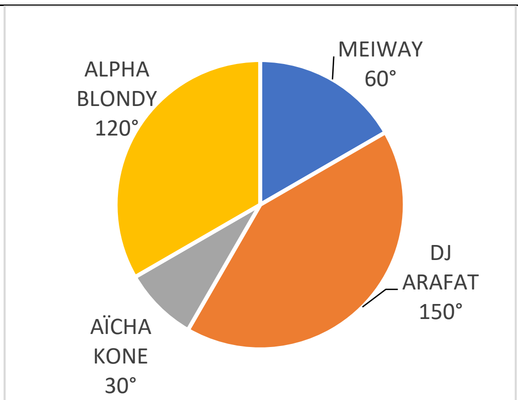
| Âge | [0 ; 30[ | [30 ; 60[ | [60 ; 90[ |
|---|---|---|---|
| Effectifs | 6 | 38 | 32 |

1. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.
2. Détermine la classe médiane de cette série.
3. Construis le diagramme circulaire associé à cette série.

**<u>Exercice 29</u>**

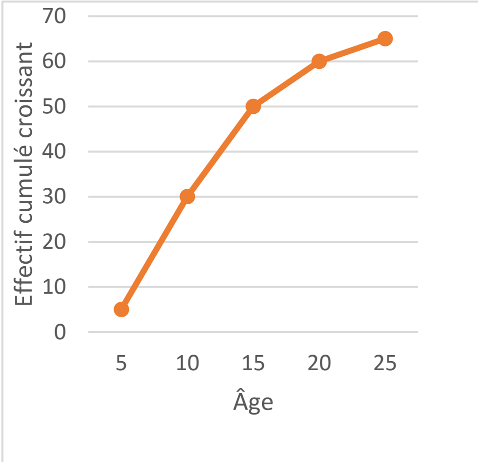
Une enquête faite auprès de 60 élèves relative à leur artiste préféré a donné les résultats qui sont représentés par le diagramme circulaire ci-contre :

1. Identifie le mode de cette série statistique.
2. Dresse le tableau des effectifs, des effectifs cumulés croissants.
3. Dresse le tableau des fréquences, des fréquences cumulées croissantes.



**Exercice 30**

Le diagramme ci-contre est le polygone des effectifs cumulés croissants d'une série statistique.
1. Détermine graphiquement une valeur approchée de la médiane de cette série statistique.
2. Dresse le tableau des effectifs de cette série statistique.
3. Construis le diagramme circulaire associé à cette série.




**Exercice 31**

Une enquête portant sur le temps (en heures) de travail personnel quotidien de 20 élèves de 3ème d'un collège a donné les résultats suivants :

| Temps en heures | [0 ; 2[ | [2 ; 4[ | [4 ; 6[ | [6 ; 8[ | [8 ; 10[ | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 4 | 6 | 2 | 4 | 4 | 20 |
| Effectifs cumulés croissants | | | | | | |

1. Complète la ligne des effectifs cumulés croissants.
2. Construis le digramme circulaire.
3. Construis le polygone des effectifs cumulés croissants

### D-3 Exercices d'approfondissement

**Exercice 32**

On a mesuré en centimètres la taille de 55 enfants. Cela a donné les résultats suivants :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 127 | 130 | 132 | 127 | 131 | 138 | 120 | 139 | 125 | 125 | 143 |
| 134 | 134 | 132 | 142 | 121 | 131 | 127 | 127 | 131 | 130 | 126 |
| 134 | 126 | 132 | 133 | 141 | 133 | 136 | 127 | 138 | 129 | 132 |
| 146 | 136 | 128 | 123 | 136 | 133 | 124 | 135 | 112 | 133 | 134 |
| 129 | 128 | 125 | 133 | 128 | 118 | 135 | 138 | 115 | 122 | 126 |

1. Identifie le caractère de cette série statistique.
2. Regroupe ces données en classes d'amplitude 6.
3. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.
4. Détermine la classe médiane.
5. Construis le diagramme circulaire associé à cette série.

**Corrigé**

1. Le caractère étudié est la taille.
2. Tableau des effectifs

| Taille en cm | $[112; 118[$ | $[118; 124[$ | $[124; 130[$ | $[130; 136[$ | $[136; 142[$ | $[142; 148[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 2 | 5 | 17 | 20 | 8 | 3 |

3. Tableau des effectifs cumulés croissants

| Taille en cm | $[112; 118[$ | $[118; 124[$ | $[124; 130[$ | $[130; 136[$ | $[136; 142[$ | $[142; 148[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 2 | 5 | 17 | 20 | 8 | 3 |
| Effectifs cumulés croissants | 2 | 7 | 24 | 44 | 52 | 55 |

4. La classe médiane est : $[130; 136[$ .
5. Déterminons les secteurs angulaires de chaque classe

   Pour la classe $[112; 118[$, on a : $\frac{360\times2}{55} \approx 13°$

   Pour la classe $[118; 124[$, on a : $\frac{360\times5}{55} \approx 33°$

   Pour la classe $[124; 130[$, on a: $\frac{360\times17}{55} \approx 111°$

   Pour la classe $[130; 136[$, on a : $\frac{360\times20}{55} \approx 131°$

   Pour la classe $[136; 142[$, on a : $\frac{360\times8}{55} \approx 52°$

   Pour la classe $[142; 148[$, on a : $\frac{360\times3}{55} \approx 20°$ .

On en déduit la construction du le diagramme circulaire associé à cette série.

**Thème : Calculs algébriques**

# LEÇON 12 : EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

**Durée : 8 heures**

## A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

L'oncle de votre camarade de classe exploite une portion de bas-fond qu'il a divisée en deux. La première année, il cultive sur la première parcelle, de la tomate qui fait 3 tonnes à l'hectare. Sur la deuxième, il cultive du gombo qui fait 2 tonnes à l'hectare. Il fait une récolte totale de 10 tonnes. L'année suivante, il cultive sur la première parcelle de la tomate qui fait 5 tonnes à l'hectare ; sur la deuxième il cultive du gombo qui fait 4 tonnes à l'hectare et fait une récolte totale de 16 tonnes. L'oncle veut avoir une idée de la superficie de la portion. Informés, vous vous organisez pour déterminer les superficies des différentes parcelles pour aider votre ami à répondre aux préoccupations de son oncle.

## B. CONTENU DE LA LEÇON

## I. Equations du 1er degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

**Définitions**

Soient $a, b$ et $c$ des nombres réels tels que $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;0)$.

- Une équation du type $ax + by = c$ est une équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
- Tout couple $(x_0\ ;y_0)$ vérifiant l'égalité $ax + by = c$ est solution de cette équation.
- Résoudre une équation du type $ax + by = c$, c'est trouver tous les couples solutions de cette équation.

**Exemple**

$3x + 5y = 2$ est une équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

On a : $3\times4 + 5(-2) = 12 - 10 = 2$. Donc, le couple $(4\ ;-2)$ est solution de cette équation.

On a: $3\times 1 + 5 \times 0 = 3 + 0 = 3$ et $3 \neq 2$. Donc, le couple $(1\ ;0)$ n'est pas solution de cette équation.

**Exercice de fixation**

On considère l'équation à deux inconnues $x$ et $y$ définie par : $3x + 2y = 8$.

1. Vérifie que $(2\ ;1)$ est une solution de cette équation.
2. Vérifie que $(1\ ;2)$ n'est pas solution de cette équation.
3. Vérifie si $(0\ ;4)$ est solution ou non de cette équation.

Corrigé

1. $3\times(2) + 2\times(1) = 6 + 2 = 8$. Donc le couple $(2\ ;1)$ est solution de cette équation.
2. $3\times(1) + 2\times(2) = 7$ et $7 \neq 8$. Donc le couple $(1\ ;2)$ n'est pas solution de cette équation.
3. $3\times(0) + 2\times(4) = 8$. Donc le couple $(0\ ;4)$ est solution de cette équation.

## II. Systèmes d'équations du 1er degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

## 1) Définitions

Soient $a, b, c, a', b'$ et c' des nombres réels tels que $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ et $(a'\ ;\ b') \neq (0\ ;\ 0)$.

- Un système d'équations du premier degré à deux inconnues $x$ et $y$ est un système de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

- Résoudre le système, revient à trouver tous les couples solutions aux deux équations.

**Exercice de fixation**

Identifie, parmi les systèmes suivants, ceux qui sont des systèmes de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ ; b) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ ; c) $\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$ ; d) $\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ -3y = 0 \end{cases}$

Corrigé

Les systèmes b) et d) sont des systèmes de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

## 2) Résolution d'un système d'équations

### a) Résolution par substitution

**Méthode**

Pour résoudre un système par substitution :

1) On utilise l'une des équations pour exprimer une des inconnues en fonction de l'autre.
2) Dans l'autre équation, on remplace cette inconnue par son expression exprimée en 1) et on obtient une équation à une inconnue qu'on résout.
3) Dans l'équation obtenue au 1), on remplace l'inconnue par la valeur trouvée et on trouve la deuxième inconnue.
4) On donne la solution du système.

**Exemple**

Pour résoudre par substitution le système : $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

1) On exprime $x$ en fonction de $y$ dans la première équation et on obtient l'équation : $x = 5 + 3y$.
2) On remplace $x$ par sa nouvelle expression dans la deuxième équation pour obtenir l'équation suivante : $3(5 + 3y) + 2y = 4$ ; donc $15 + 9y + 2y = 4$ ; d'où $15 + 11y = 4$
$11y = -11$ ; donc $y = -1$.
3) D'après le 1), $x = 5 + 3(-1) = 5 - 3 = 2$.
4) Ainsi, la solution du système est le couple $(2\ ;\ -1)$.

**Exercice de fixation**

Résous par la méthode substitution le système suivant : $\begin{cases} x + y = 35 \\ 8x + 7y = 260 \end{cases}$

**Corrigé**

On exprime $x$ en fonction de $y$ dans la première équation et on obtient: $x = 35 - y$

On remplace $x$ par sa nouvelle expression dans la deuxième équation pour obtenir l'équation suivante: $8(35 - y) + 7y = 260$.

D'où $280 - 8y + 7y = 260$ ; donc $y = 20$.

On remplace la valeur de $y$ obtenue dans la première équation $x = 35 - y$.

On obtient $x = 35 - 20$ ; donc $x = 15$.

La solution de ce système est le couple (15 ; 20 ).

### b) Résolution par combinaison

**Méthode**

Pour résoudre un système par combinaison :
1) On choisit l'inconnue que l'on veut éliminer, par exemple $x$.
2) On multiplie les deux membres de l'une des équations (ou les deux équations, si nécessaire) par des coefficients de sorte que la variable $x$ ait des coefficients opposés.
3) On additionne membre à membre les deux nouvelles équations obtenues en 2) et on obtient une nouvelle équation du premier degré à une inconnue $y$.
4) On résout l'équation en 3), et on trouve la valeur de y.
5) On élimine la deuxième inconnue en suivant les étapes énoncées précédemment.
6) On donne la solution du système.

**Exemple**

Pour résoudre par combinaison le système suivant : $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - 2y = -7 \end{cases}$

1) On choisit d'éliminer $x$.
2) On multiplie les deux membres de la première équation par 3 et ceux de la deuxième par – 2. On obtient le système suivant : $\begin{cases} 6x + 9y = 12 \\ -6x + 4y = 14 \end{cases}$.
3) On additionne membre à membre ces deux équations pour obtenir l'équation suivante :
$13y = 26$.
4) On résout l'équation $13y = 26$.
Donc $y = 2$.
5) On va éliminer y.
On multiplie les deux membres de la première équation par 2 et ceux de la deuxième par 3.
On obtient le système suivant : $\begin{cases} 4x + 6y = 8 \\ 9x - 6y = -21 \end{cases}$.
On additionne membre à membre ces deux équations pour obtenir l'équation suivante :
$13x = -13$. Donc $x = -1$.
6) Ainsi la solution du système est le couple $(-1 ; 2)$.

<u>**Exercice de fixation**</u>:

Résous par combinaison le système suivant : $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 4x + 7y = 1 \end{cases}$.

Corrigé

On choisit d'éliminer y.
On multiplie les deux membres de la première équation par 7 et ceux de la deuxième par 1.
On obtient : $\begin{cases} 21x - 7y = 49 \\ 4x + 7y = 1 \end{cases}$.
On additionne membre à membre ces deux équations pour obtenir : $25\,x = 50$.
Donc $x = 2$.
On choisit d'éliminer $x$.
On multiplie les deux membres de la première équation par $-4$ et ceux de la deuxième par 3.
On obtient le système suivant $\begin{cases} -12x + 4y = -28 \\ 12x + 21y = 3 \end{cases}$
On additionne membre à membre ces deux équations pour obtenir : $25\,y = -25$.
Donc $y = -1$.
Ainsi la solution du système est le couple $(2 ; -1)$.

**c) Résolution graphique**

**Méthode**

Pour résoudre graphiquement un système de deux équations $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

on trace les deux droites (D) et (D') d'équations respectives : $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ dans un même repère.

Trois cas de figure se présentent :

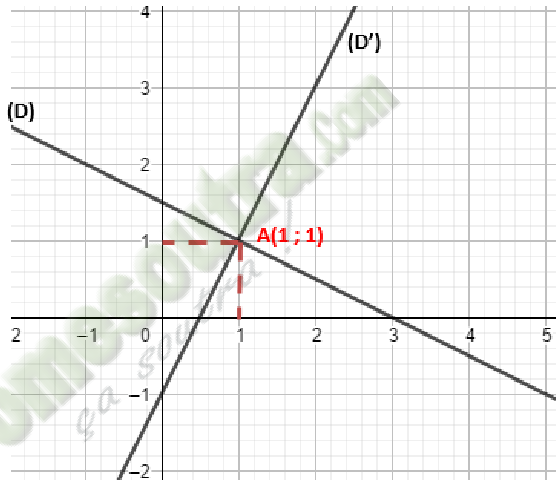
- Si les deux droites sont sécantes en un point, alors le couple de coordonnées de ce point est la solution du système.
- Si les deux droites sont parallèles disjointes, alors le système n'a pas de solution.
- Si les deux droites sont confondues, alors le système admet une infinité de solutions.

Les solutions sont les couples de coordonnées de n'importe quel point de (D) ou (D').

**Exemple 1**

Pour résoudre graphiquement le système : $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ ,

on trace les droites (D) et (D') d'équations respectives $x + 2y = 3$ et $2x - y = 1$.

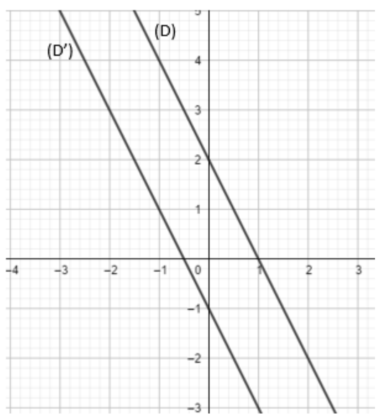



(D) et (D') se coupent au point A de coordonnées (1 ; 1).
Donc le couple (1 ; 1) est la solution du système.

**Exemple 2**

Pour résoudre graphiquement le système : $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$'

on trace les droites (D) et (D') d'équations respectives :
$2x + y = 2$ et $2x + y = -1$

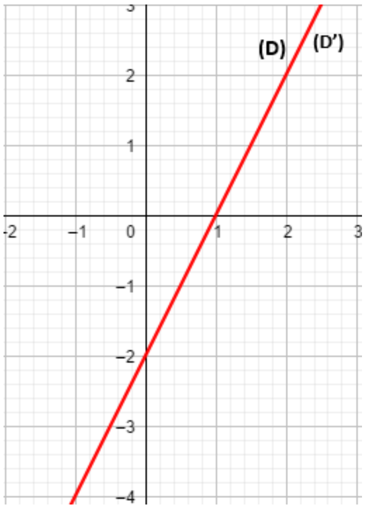



Les droites (D) et (D') sont parallèles (disjointes).
Donc le système n'a pas de solution.

**Exemple 3**

Pour résoudre graphiquement le système : $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$,

on trace les droites (D) et (D') d'équations respectives : $2x - y = 2$ et $4x - 2y = 4$.




(D) et (D') sont confondues.
Donc le système admet une infinité de solutions. Les solutions sont les couples de coordonnées de n'importe quel point de (D) ou (D').

# III. Inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

## 1) Définitions

Soient $a, b$ et $c$ des nombres réels tels que $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$.

- On appelle inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ toute inéquation d'un des types : $ax + by + c > 0$ ; $+by + c < 0$ ; $ax + by + c \geq 0$ ou $ax + by + c \leq 0$.
- Un couple $(x_0\,;\,y_0)$ de nombres réels est solution d'une des inéquations, signifie que $x_0$ et $y_0$ vérifient cette inéquation.

**Exemple**

$x - y + 3 < 0$ est une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

- Pour $x = 1$ et $y = 5$, on a : $1 - 5 + 3 = -1$.

$-1 < 0$ est vrai, donc le couple $(1\,;\,5)$ est solution de l'inéquation.

- Pour $x = 0$ et $y = 0$, on a $0 - 0 + 3 = 3$. $3 < 0$ est faux. Donc $(0\,;\,0)$ n'est pas solution de l'inéquation.

**<u>Exercice de fixation</u>**

Pour chaque ligne du tableau, une seule affirmation est vraie.
Recopie le numéro de la ligne et la lettre qui correspond à l'affirmation vraie.

| N° | Affirmations | Réponses | | |
|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C |
| 1 | Une solution de l'équation suivante : $x - y + 5 = 0$ est | $(2\,;\,3)$ | $(3\,;\,2)$ | $(-2\,;\,3)$ |
| 2 | Une solution de l'inéquation suivante : $x + y - 1 < 0$ est | $(0\,;\,0)$ | $(1\,;\,1)$ | $(2\,;\,2)$ |
| 3 | Une solution de l'inéquation suivante : $x - y + 2 > 0$ est | $(-2\,;\,1)$ | $(2\,;\,-1)$ | $(-5\,;\,-2)$ |

Corrigé

1- C ; 2- A ; 3-B

## 2) Propriété

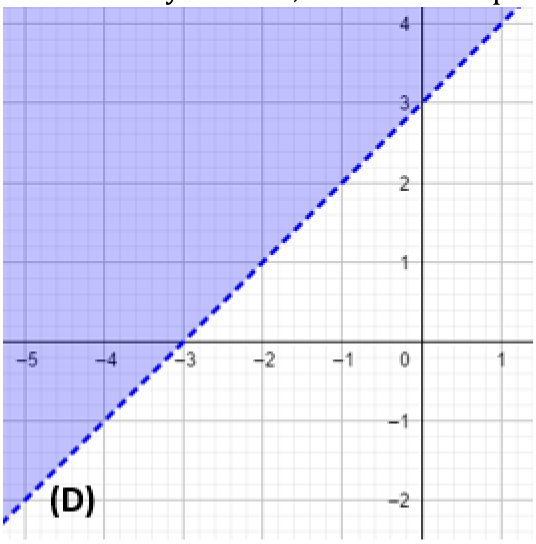
Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on considère la droite (D) d'équation :
$ax + by + c = 0$.

(D) partage le plan en deux demi-plans :

- L'un de ces demi-plans contient tous les points dont les coordonnées vérifient $ax + by + c > 0$ ou $ax + by + c \geq 0$
- L'autre demi-plan contient tous les points dont les coordonnées vérifient $ax + by + c < 0$ ou $ax + by + c \leq 0$

L'ensemble des solutions d'une inéquation est donc l'ensemble des couples de coordonnées des points d'un demi-plan.

Exemple
L'ensemble des solutions de l'inéquation : $x - y + 3 < 0$ est le demi-plan, de bord la droite (D) d'équations : $x - y + 3 = 0$, ne contenant pas le point O(0 ; 0).




## IV. Système d'inéquations du 1^er degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

### 1) Définitions

- On appelle système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un système constitué de plusieurs inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Résoudre un tel système, c'est trouver tous les couples de nombres qui vérifient toutes les inéquations (en même temps).

**Exemple**

$\begin{cases} x - y + 3 < 0 \\ x + y - 2 > 0 \end{cases}$ est un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

### 2) Résolution graphique

**Méthode**

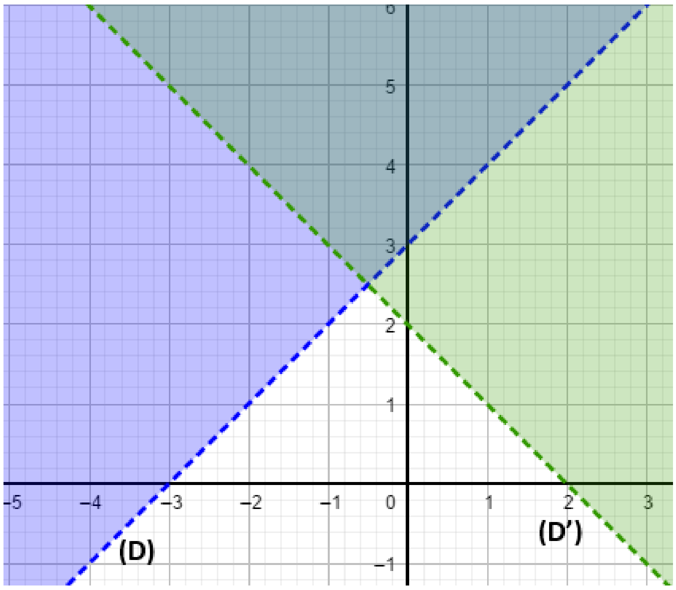
Pour résoudre graphiquement un système de deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$,
1) On trace, dans un même repère, la droite associée à chaque inéquation ;
2) On colorie (ou hachure) les demi-plans qui correspondent aux solutions de chaque inéquation ;
L'ensemble des solutions du système est l'intersection des deux demi-plans coloriés (ou hachurés).

**Exemple**

Pour résoudre graphiquement le système d'inéquations suivant :

$\begin{cases} x - y + 3 < 0 \\ x + y - 2 > 0 \end{cases}$

1. On trace, dans un même repère, (D) et (D') d'équations respectives :
$x - y + 3 = 0$ et $x + y - 2 = 0$.




2. On hachure les demi-plans qui correspondent aux solutions de chaque inéquation.
L'ensemble de solutions est la partie hachurée deux fois (en bleu et en rouge).

## V. Problème conduisant à une équation, une inéquation, un système d'équations ou un système d'inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

**Méthode de résolution**
Pour résoudre un problème conduisant à une équation, une inéquation, un système d'équations ou un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on peut procéder comme suit :
1) Choisir les inconnues ;
2) Mettre le problème en équations ou en inéquations [traduire les données de l'énoncé en langage mathématique par une (ou des) équation(s)ou inéquation(s)] ;
3) Résoudre l'équation, l'inéquation ou le système en utilisant une méthode appropriée ;
4) S'assurer que la (ou les) solution(s) trouvée(s) vérifie(nt) bien l'équation, l'inéquation ou le système ;
5) Conclure en interprétant le résultat trouvé.

**Exemple**
Un organisateur propose les tarifs suivants à un spectacle :
• 1 000 f pour les adultes
• 500 f pour les enfants.
A la fin du spectacle il fait une recette totale de 120 000 f pour 205 tickets vendus.
Déterminons le nombre d'adultes et celui d'enfants ayant assisté au spectacle.

1) On désigne par $x$ le nombre d'adultes et par y celui d'enfants ayant assisté au spectacle.
2) On traduit les expressions suivantes en mathématiques :
a) Le nombre total de tickets vendus est 205. On trouve : $x + y = 205$.
b) La recette totale est égale à 120 000 f. On trouve : $500x + 1\,000y = 120\,000$.
On obtient le système d'équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ suivant :
$$\begin{cases} x + y = 205 \\ 500x + 1000y = 120000 \end{cases}.$$
3) On résout le système d'équations (par combinaison).
$$\begin{cases} x + y = 205 \\ 500x + 1000y = 120000 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x + y = 205 \\ x + 2y = 240 \end{cases}.$$
En multipliant les deux membres de la première équation par $-1$, on obtient :
$$\begin{cases} -x - y = -205 \\ x + 2y = 240 \end{cases}$$

On additionne membre à membre ces deux équations pour obtenir l'équation suivante : $y = 35$.
Donc $y = 35$.
En multipliant les deux membres de la première équation par $-2$, on obtient :
$\begin{cases} -2x - 2y = -410 \\ x + 2y = 240 \end{cases}$
On additionne membre à membre ces deux équations pour obtenir l'équation suivante : $-x = -170$.
Donc $x = 170$.
4) La solution du système est le couple (170 ; 35).
5) Conclusion : il y a 170 enfants et 35 adultes qui ont assisté au spectacle.

## C. SITUATION D'EVALUATION

Monsieur ALI est tâcheron à la fois comme plombier et électricien en bâtiment dans une entreprise. Il gagne 5 000 f par heure en tant qu'électricien et 3 000 f par heure en tant que plombier. Ce mois-ci il a cumulé les deux métiers durant 30 heures en tout et a gagné 150 000 f au total. Il demande à son neveu, votre ami de classe de l'aider à trouver le nombre d'heures de travail en tant qu'électricien et celui de plombier. Informés, vous décidez de vous organiser pour répondre à la préoccupation de l'oncle de votre ami.
En désignant par $x$ nombre d'heures de travail d'électricité et par $y$ celui de plomberie,
1) Traduis par une équation chacune des phrases suivantes :
- Il a cumulé les deux métiers pendant 30 heures.
- Il gagne 5 000 f par heure en tant qu'électricien et 3 000 f par heure en tant que plombier et a gagné 150 000 f au total.
1) Détermine le nombre d'heures de travail d'électricité et celui de plomberie.

Corrigé
1) - $x + y = 30$.
 - $5000\,x + 3000\,y = 150\,000$.
2) Cela revient à résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + y = 30 \\ 5000x + 3000y = 150000 \end{cases}$.
Procédons par combinaison.
$\begin{cases} x + y = 30 \\ 5000x + 3000y = 150000 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x + y = 30 \\ 5x + 3y = 150 \end{cases}$.
En multipliant les deux membres de la première équation par $-3$, on obtient :
$\begin{cases} -3x - 3y = -90 \\ 5x + 3y = 150 \end{cases}$.
On additionne membre à membre ces deux équations pour obtenir l'équation suivante : $2x = 60$.
Donc $x = 30$.
En multipliant les deux membres de la première équation par $-5$, on obtient :
$\begin{cases} -5x - 5y = -150 \\ 5x + 3y = 150 \end{cases}$
On additionne membre à membre ces deux équations pour obtenir l'équation suivante : $-2y = 0$.
Donc $y = 0$.
La solution du système est le couple (30 ; 0).
Conclusion : le nombre d'heures de travail d'électricité est de 30 h et celui de plomberie est 0 h.

# D. EXERCICES

## D-1. Exercices de fixation

**Exercice 1**
Reproduis le tableau ci-dessous puis complète la troisième colonne par Vrai ou Faux.

| N° | Affirmations | Réponses |
|---|---|---|
| 1 | $3x - 5 = 0$ est une équation du 1^er^ degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ | |
| 2 | $y = x + 1$ est une équation du 1^er^ degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ | |
| 3 | $x\sqrt{2} + y = 0$ est une équation du 1^er^ degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ | |

**Exercice 2**
Parmi les inéquations suivantes, recopie celles qui sont des inéquations du premier degré $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ :

$2x - 5 > 3y$ ; $x^2 + y \leq 0$ ; $5 \leq 3x - \frac{2y}{3}$ ; $2x + 5 > x - 1$ ; $3x + 2y \geq 2$.

**Exercice 3**
Reproduis le tableau ci-dessous puis complète la troisième colonne par Vrai ou Faux.

| N° | Affirmations | Réponses |
|---|---|---|
| 1 | $\begin{cases} x - 5y + 1 = 0 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$ est un système d'équations du 1^er^ degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ | |
| 2 | $\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ x^2 - y + 4 = 0 \end{cases}$ est un système d'équations du 1^er^ degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ | |
| 3 | $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$ est un système d'équations du 1^er^ degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ | |
| 4 | $\begin{cases} \frac{2}{x} + y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$ est un système d'équations du 1^er^ degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ | |



**Exercice 4**
Parmi les systèmes d'inéquations suivants, recopie ceux qui sont des systèmes d'inéquations du premier degré $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

$\begin{cases} x - 2y + 3 < 0 \\ 5x + 3y \geq 1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} 2x + 3y + 2 \geq 0 \\ 3x^2 - 2y - 5 > 0 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x - 4x + 2y \leq 1 \\ 2x - 3y < 0 \end{cases}$ ; $\begin{cases} \frac{3}{x} + 2y \leq 0 \\ -2x - y \geq 2 \end{cases}$

**Exercice 5**
Pour chaque ligne du tableau, une seule affirmation est vraie.
Recopie le numéro de la ligne et la lettre qui correspond à l'affirmation vraie.

| N° | Enoncés | Réponses | | |
|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C |
| 1 | Une solution de l'équation suivante : $x - y + 5 = 0$ est | $(2 ; 3)$ | $(3 ; 2)$ | $(-2 ; 3)$ |
| 2 | Une solution de l'inéquation suivante : $x + y - 1 < 0$ est | $(0 ; 0)$ | $(1 ; 1)$ | $(2 ; 2)$ |
| 3 | Une solution de l'inéquation suivante : $x - y + 2 > 0$ est | $(-2 ; 1)$ | $(2 ; -1)$ | $(-5 ; -2)$ |

**Exercice 6**
On donne l'équation(E) du premier degré $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivante : $3x - y + 5 = 0$.
Recopie le tableau ci-dessous puis mets une croix dans les cases correspondantes aux couples solutions de (E).

| Couples | $(1 ; 3)$ | $(-1 ; 2)$ | $(0 ; 0)$ | $(1 ; 8)$ |
|---|---|---|---|---|
| Croix | | | | |

**Exercice 7**
On considère l'inéquation(E) du premier degré $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivante : $2x + y - 3 = 0$.
Recopie puis complète le tableau ci-dessous pour que les couples $(x ; y)$ soient solution de (E).

| $x$ | $-5$ | | $0$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | | $-1$ | | $2$ | |

**Exercice 8**
On donne l'inéquation(E) du premier degré $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivante : $x - 3y - 1 \leq 0$.
Recopie le tableau ci-dessous puis mets une croix dans les cases correspondantes aux couples solutions de (E).

| Couples | $(4 ; 1)$ | $(1 ; -2)$ | $(0 ; 0)$ | $(5 ; -1)$ |
|---|---|---|---|---|
| Croix | | | | |

**Exercice 9**
On considère l'inéquation(E) du premier degré $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivante : $5x - y + 2 > 0$.
Recopie puis complète le tableau ci-dessous pour que les couples $(x ; y)$ soient solutions de (E).

| $x$ | | $-1$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $-3$ | | $0$ | | $4$ |

**Exercice 10**
Trouve trois couples solutions de chacune des équations du premier degré $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ suivantes : $x + 2y - 5 = 0$ ; $3x - 2y + 1 = 0$ ; $-5x + 3y - 2 = 0$

**Exercice 11**
Trouve trois couples solutions de chacune des inéquations du premier degré $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ suivantes : $2x - y + 5 < 0$ ; $2x + 3y - 1 \leq 0$ ; $3x - 5y + 2 > 0$.

**Exercice 12**
Représente graphiquement dans le plan muni d'un repère, l'ensemble des solutions de chacune des inéquations du premier degré $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ suivantes :
$2x - y + 5 > 0$ ; $2x + 3y - 1 < 0$ ; $3x - 5y + 2 \leq 0$

**Exercice 13**

Résous par la méthode de substitution chacun des systèmes d'équations du premier degré $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivants :

$\begin{cases} x - 5y + 1 = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ ; $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 4x + 2y = 4 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases}$

**Exercice 14**

Résous par la méthode de combinaison chacun des systèmes d'équations du premier degré $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivants :

$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$

**Exercice 15**

Résous graphiquement chacun des systèmes d'équations du premier degré $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivants :

$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + y = 6 \end{cases}$ ; $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ ; $\begin{cases} 6x + 2y - 4 = 0 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

**Exercice 16**

Représente graphiquement l'ensemble des solutions de chacun des systèmes d'inéquations du premier degré $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivants :

$\begin{cases} x - 2y + 3 < 0 \\ 5x + 3y \geq 1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} 2x + 3y + 2 \geq 0 \\ 3x - 2y - 5 > 0 \end{cases}$ ; $\begin{cases} -4x + 2y \leq 1 \\ 2x - 3y < 0 \end{cases}$

## D-2. Exercices de renforcement

**Exercice 17**

Résous les systèmes suivants avec la méthode de ton choix.

a) $\begin{cases} 3x = y + 14 \\ 3y - 2x + 21 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5y = 3x - 2y - 59 \\ 7x + 9y = 3y - 5x + 78 \end{cases}$

**Exercice 18**

Résous les systèmes suivants avec la méthode de ton choix.

a) $\begin{cases} \frac{x+5}{2} - \frac{3-y}{5} = 4 \\ x + 7 + \frac{y-6}{4} + 21 = \frac{7}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x-3}{2} - \frac{5}{2} = \frac{2y-21}{2} + 1 \\ \frac{x+2}{3} + 3 = \frac{3-y}{5} - \frac{10}{3} \end{cases}$

**Exercice 19**

Un objet composé d'un alliage d'or et de cuivre, pèse 1 875 g pour un volume de 143 $cm^3$.
1 $cm^3$ d'or pèse 19,5 g et 1 $cm^3$ de cuivre pèse 9 g.
Calcule le volume d'or et le volume de cuivre de cet objet.

**Exercice 20**

Soit l'inéquation (I) : $5x - 2y + 1 < 0$.

1- Trouve deux couples solutions de (I) de première composante $-\frac{3}{5}$.

2- Trouve deux couples solutions de (I) de deuxième composante 8.

3- Trouve un couple solution de (I) de première composante 1 et de deuxième composante inférieure à 4

**Exercice 21**

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1- a) Représente la droite ($D_1$) d'équation : $x + y + 8 = 0$.

b) Représente la droite ($D_2$) d'équation : $x - y = 0$.

2- a) Représente graphiquement l'ensemble solution du système (S) suivant :

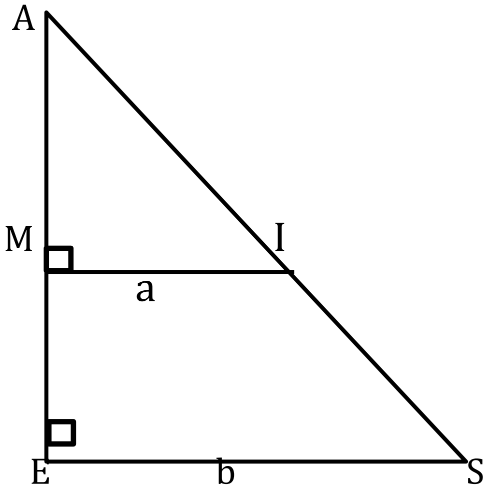
$\begin{cases} x + y + 8 > 0 \\ x - y < 0 \end{cases}$

b) Trouve trois couples solutions de (S) tels que $0 < x < 8$ et $y > 0$.

## D-3. Exercices d'approfondissement

**Exercice 22**

Sur la figure ci-dessous, AM = 7 cm et AE = 9 cm.




a). Justifie que les (MI) et (SE) sont parallèles.
b). En utilisant le théorème de Thalès, établis une égalité reliant a et b.
c). Sachant que l'aire du trapèze MISE est égale à 20 $cm^2$, écris une deuxième égalité liant a et b.
d). Détermine les longueurs MI et SE.

**Exercice 23**

Soit le système de trois équations à trois inconnues suivant.

$$\begin{cases} x + y = 59 \\ x + z = 75 \\ y + z = 32 \end{cases}$$

a). Exprime $y$ en fonction de $x$ dans la première équation.
b). Exprime $z$ en fonction de $x$ dans la deuxième équation.
c). Dans la troisième équation, remplace $y$ et $z$ par les expressions trouvées dans les questions a. et b.
d). Résous l'équation trouvée.
e). Détermine les valeurs de $y$ et $z$.

**Exercice 24**

Monsieur ZOUNGRANA est ouvrier dans une usine qui emploie au total 392 agents. Chaque soir, il y a une équipe de 20 hommes et 12 femmes qui monte et se repose le lendemain. Le nombre d'hommes restant à l'usine est égal au triple de celui des femmes restant à l'usine. Il sollicite son fils, ton camarade de classe pour avoir une idée du pourcentage de femmes dans cette usine. Informé, tu t'organises pour aider ton ami à répondre à la préoccupation de son père.
En désignant par $x$ nombre de femmes et par $y$ celui des hommes que l'usine emploie,
1) Traduis par une équation chacune des phrases suivantes :
- la société emploie au total 392 agents.
- 20 hommes et 12 femmes travaillent la nuit et le nombre d'hommes restant à l'usine est égal au triple de celui des femmes restant à l'usine.
2) Détermine le nombre d'hommes et celui des femmes que l'usine emploie.
3) Calcule le pourcentage de femmes dans l'usine.

**Exercice 25**

Monsieur ALI est tâcheron à la fois comme plombier et électricien en bâtiment dans une entreprise. Il gagne 5 000 f par heure en tant qu'électricien et 3 000 f par heure en tant que plombier. Ce mois-ci il a cumulé les deux métiers durant 30 heures en tout et a gagné 150 000 f au total. Il demande à son neveu, votre ami de classe de l'aider à trouver le nombre d'heures de travail en tant qu'électricien et

celui de plombier. Informés, vous décidez de vous organiser pour répondre à la préoccupation de l'oncle de votre ami.
En désignant par $x$ nombre d'heures de travail d'électricité et par $y$ celui de plomberie,
1) Traduis par une équation chacune des phrases suivantes :
- Il a cumulé les deux métiers pendant 30 heures.
- Il gagne 5 000 f par heure en tant qu'électricien et 3 000 f par heure en tant que plombier et a gagné 150 000 f au total.
2) Détermine le nombre d'heures de travail d'électricité et celui de plomberie.

### Exercice 26
Le Conseil Général propose d'équiper la bibliothèque de votre établissement par des romans qui coûtent 2 000 f chacun et des livres divers coûtant 3 000 f chacun. Les élèves souhaitent :
- avoir au moins 50 romans,
- qu'il y ait plus de romans que de livres,
- que la somme dépensée soit inférieure ou égale à 300 000 f.
1) Détermine graphiquement les diverses possibilités d'achat de romans et de livres. (On fera apparaître en rouge les points correspondants sur le graphique).
2) Le Conseil Général a respecté les souhaits des élèves et a acheté au total 140 ouvrages (romans et livres divers).
Détermine le nombre de romans et le nombre de livres divers achetés.

Code :
Thème : FONCTIONS

# LEÇON 13 : APPLICATIONS AFFINES Durée : 6 heures

## A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour la kermesse organisée par les élèves de Troisième du Lycée Félix Houphouët-Boigny de KORHOGO, le comité d'organisation décide de louer du matériel de sonorisation pour une journée. Il s'adresse à deux fournisseurs.
Le premier fournisseur propose deux tarifs différents :
*Tarif 1*
Le matériel est cédé pour 5 000 F CFA l'heure avec une caution de 10 000 F CFA.
*Tarif 2*
Le matériel est cédé à un prix forfaitaire de 50 000 F CFA pour le temps de la manifestation.
Le deuxième fournisseur propose un tarif unique : 7 000 F CFA l'heure pour le temps de la manifestation.
Vu leurs moyens limités, les élèves de Troisième 4 décident de déterminer le tarif le plus avantageux selon la durée de la manifestation.



## B. CONTENU DE LA LEÇON

# I. Applications affines

### 1. Définition

Soit $a$ et $b$ deux nombres fixés.
On appelle application affine de *coefficient* $a$ et de *terme constant* $b$, la correspondance $f$ qui à chaque nombre réel $x$ associe le nombre réel $ax+b$.
On note : $f : x \longmapsto ax+b$.
$ax+b$ est l'image de $x$ par $f$ et on note $f(x) = ax+b$.
Si $f(x) = y$ on dit que : $y$ est l'image de $x$ par $f$.
Dans l'écriture $ax+b$, $a$ s'appelle le coefficient ; $b$ s'appelle le terme constant.

**Exemple**
La correspondance $f : x \longmapsto 2x+1$ est une application affine.
• 2 est le coefficient et 1 est le terme constant.

**Exercice de fixation**
Complète les colonnes du tableau ci-dessous selon l'exemple traité à la ligne1.

| Correspondance | Application affine (oui ou non) | Coefficient | Terme constant |
|---|---|---|---|
| $l : x \longmapsto -3x + \frac{1}{3}$ | oui | $-3$ | $\frac{1}{3}$ |
| $m : x \longmapsto 16x - 5$ | | | |
| $n : x \longmapsto 4x^2 - 5$ | | | |
| $p : x \longmapsto -4 + \frac{1}{7}x$ | | | |
| $q : x \longmapsto \frac{1}{7x} - 10$ | | | |
| $r : x \longmapsto x\sqrt{3} + 1$ | | | |

Corrigé

| Correspondance | Application affine (oui ou non) | Coefficient | Terme constant |
|---|---|---|---|
| $l : x \longmapsto -3x + \frac{1}{3}$ | oui | $-3$ | $\frac{1}{3}$ |
| $m : x \longmapsto 16x - 5$ | oui | 16 | $-5$ |
| $n : x \longmapsto 4x^2 - 5$ | non | | |
| $p : x \longmapsto -4 + \frac{1}{7}x$ | oui | $\frac{1}{7}$ | $-4$ |
| $q : x \longmapsto \frac{1}{7x} - 10$ | non | | |
| $r : x \longmapsto x\sqrt{3} + 1$ | oui | $\sqrt{3}$ | 1 |

## 2. Calcul de l'image d'un nombre par une application affine

**Méthode**

Soit $f$ une application affine telle que pour tout nombre réel $x$, $f(x) = ax + b$.
Pour calculer l'image d'un nombre réel $t$, on remplace $x$ par $t$ dans l'expression de $f(x)$.
On écrit : $f(t) = at + b$ et on calcule $at + b$.

**Exercice de fixation**

Calcule l'image de 2 et l'image de $-1$ par l'application affine $f : x \longmapsto -5x + 7$.

Corrigé

$f(2) = -5 \times 2 + 7$
$f(2) = -10 + 7$
$f(2) = -3$
L'image de 2 par $f$ est $(-3)$.

$f(-1) = -5 \times (-1) + 7$
$f(-1) = 5 + 7$
$f(-1) = 12$
L'image de $-1$ par $f$ est 12.

## 3. Détermination du nombre $x$ tel que $f(x) = y$, étant donné un nombre réel $y$ et une application affine $f$

**Méthode**

Soit $y$ un nombre réel donné et $f$ une application affine telle que pour tout réel $x$, $f(x) = ax + b$.

Pour déterminer le nombre réel $x$ tel que $(x) = y$ , on résout l'équation $ax + b = y$.

**Exercice de fixation**
On donne l'application affine $g: x \longmapsto 5x - 7$.
Détermine le nombre réel $x$ tel que $g(x) = 8$

**Corrigé**

On résout l'équation $5x - 7 = 8$

$$
\begin{aligned}
5x - 7 = 8 \ & \textit{équivaut à} \ \ 5x = 8 + 7 \\
& \textit{équivaut à} \ \ 5x = 15 \\
& \textit{équivaut à} \ \ x = \frac{15}{5} \\
& \textit{équivaut à} \ \ x = 3.
\end{aligned}
$$

Le nombre cherché est 3.

**Remarque**
On peut vérifier ce résultat.
En effet $g(3) = 5 \times 3 \ - 7 = 15 - 7 = 8$.

## 4. Détermination l'expression d'une application affine $f$ définie par deux nombres réels et leurs images

**Exemple**
Soit $f$ une application affine telle que : $f(2) = -3$ et $f(4) = 1$.
Détermine l'expression de $f(x)$ pour tout nombre réel $x$.

**Corrigé**
Cela revient à déterminer les nombres réels $a$ et $b$ tels que $f(x) = ax + b$.
On sait que :
$f(2) = -3$. Donc : $2a + b = -3 \ \ (i)$
$f(4) = 1$. Donc : $4a + b = 1 \ \ (ii)$
On obtient le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$
\begin{cases} 2a + b = -3 \ \ (i) \\ 4a + b = 1 \ \ (ii) \end{cases}
$$

Nous allons résoudre ce système par substitution.
L'égalité $(i)$ : $2a + b = -3$ $\ \textit{équivaut}$ à $\ b = -2a - 3 \ (iii)$
Ainsi en remplaçant $b$ par $(-2a - 3)$ dans l'égalité $(ii)$ on a :

$$
\begin{aligned}
& 4a + (-2a - 3) = 1 \\
& 4a + (-2a - 3) = 1 \ \ \textit{équivaut à} \ \ 2a - 3 = 1 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\ \ \textit{équivaut à} \ \ 2a = 4 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\ \ \textit{équivaut à} \ \ a = 2
\end{aligned}
$$

On a donc $a = 2$.
On obtient $b$ en remplaçant $a$ par sa valeur dans l'égalité $(iii)$ :

$$
\begin{aligned}
& b = -2a - 3 \\
& b = -2 \times 2 - 3 \\
& b = -7
\end{aligned}
$$

Donc : $f(x) = 2x - 7$.

## 5. Représentation graphique d'une application affine

### a) Propriété

Le plan étant rapporté à un repère $(O, I, J)$, l'application affine $f$ définie pour tout réel $x$ par : $f(x) = ax + b$, a pour représentation graphique la droite $(D)$ d'équation : $y = ax + b$.

Si $M(x; y)$ appartient à la droite $(D)$, alors $x$ et $y$ vérifient l'égalité $y = ax + b$.

Remarque
- Le coefficient $a$ est le coefficient directeur de la droite $(D)$.
- La constante b est l'ordonnée à l'origine de $f$ (l'image de 0 par $f$).

**Exercice de fixation**

Relie chaque application affine de la colonne 1 à la droite qui la représente dans la colonne 2.

| Colonne 1 | | Colonne 2 |
|---|---|---|
| $f$ est l'application affine définie par : $f(x) = 3x - 2$ | × × | La droite d'équation : $y = -4x$ |
| $g$ est l'application affine définie par : $g(x) = -4x$ | × × | La droite d'équation : $y = 8$ |
| $h$ est l'application affine définie par : $h(x) = -5x + 9$ | × × | La droite d'équation : $y = 3x - 2$ |
| $k$ est l'application affine définie par : $k(x) = 8$ | × × | La droite d'équation : $y = -5x + 9$ |



Corrigé

| Colonne 1 | | Colonne 2 |
|---|---|---|
| $f$ est l'application affine définie par : $f(x) = 3x - 2$ | × × | La droite d'équation : $y = -4x$ |
| $g$ est l'application affine définie par : $g(x) = -4x$ | × × | La droite d'équation : $y = 8$ |
| $h$ est l'application affine définie par : $h(x) = -5x + 9$ | × × | La droite d'équation : $y = 3x - 2$ |
| $k$ est l'application affine définie par : $k(x) = 8$ | × × | La droite d'équation : $y = -5x + 9$ |

### b) Représentation graphique d'une application affine connaissant son expression

**Méthode**

Le plan étant rapporté à un repère $(O, I, J)$.
Pour tracer la droite $(D)$ , représentation graphique de l'application affine $f$ :
• on choisit deux nombres et on calcule leurs images. Chaque nombre et son image sont les coordonnées d'un point de la droite $(D)$;
• on obtient ainsi deux points de $(D)$ que l'on place dans le repère $(O, I, J)$ ;
• on trace la droite qui passe par ces deux points qui est la droite $(D)$.

**Exercice de fixation**

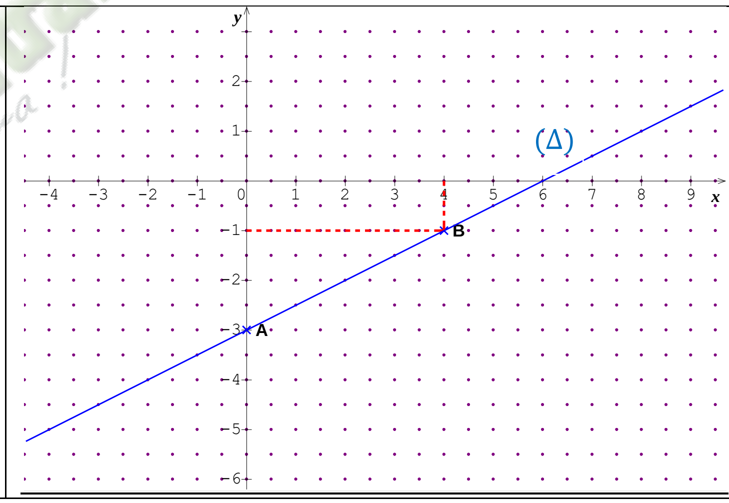
Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), trace la droite (Δ), représentation graphique de l'application affine $f$ définie par : $f(x) = 0{,}5x - 3$.

**Corrigé**

$f(x) = 0{,}5x - 3$
Je choisis deux nombres, par exemple : 0 et 4.
Je calcule les images de 0 et 4 par $f$.
On résume les résultats dans le tableau suivant.

| $x$ | 0 | 4 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $-3$ | $-1$ |
| Point | $A(0\,;-3)$ | $B(4;-1)$ |

La représentation graphique de $f$ est la droite (Δ) passant par les points $A$ et $B$.



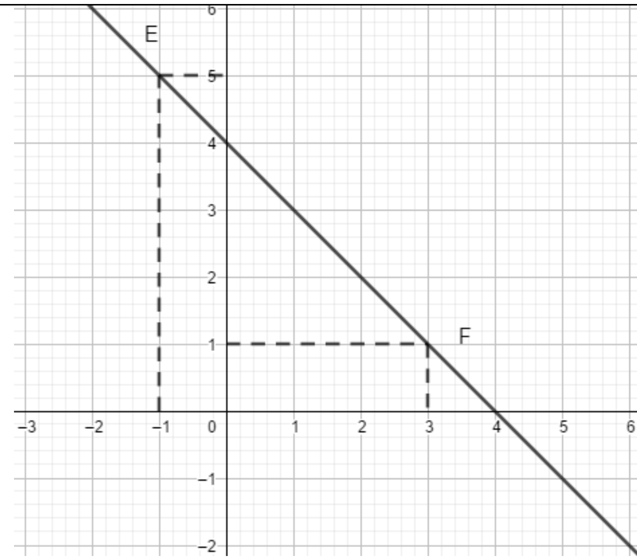

### c) Représentation graphique d'une application affine connaissant deux nombres réels et leurs images

**Exercice de fixation**

On donne l'application affine $g$ telle que $g(-1) = 5$ et $g(3) = 1$.
Représente graphiquement $g$ dans le plan muni d'un repère $(O, I, J)$.

**Corrigé**

La représentation graphique de $g$ est la droite qui passe par le point $\mathrm{E}(-1; 5)$, car $g(-1) = 5$ et par le point $\mathrm{F}(3; 1)$ , car $g(3) = 1$.
Il suffit donc de marquer les points E et F dans le repère et de tracer la droite (EF).





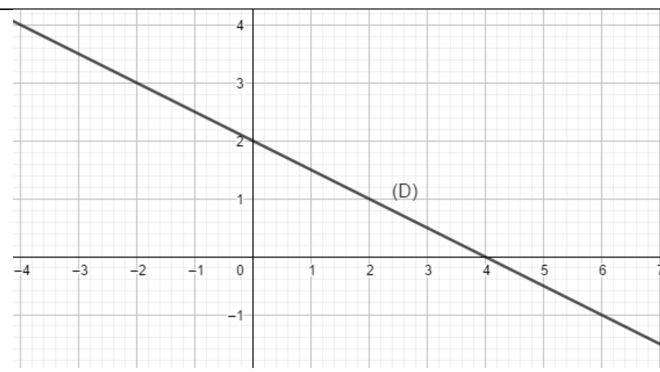

## 6) Utilisation de la représentation graphique d'une application affine.

### a) Détermination graphique de l'image d'un nombre par une application affine

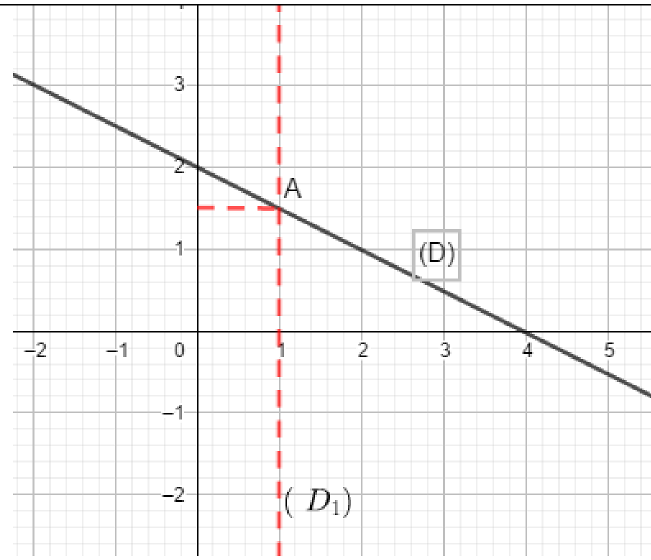
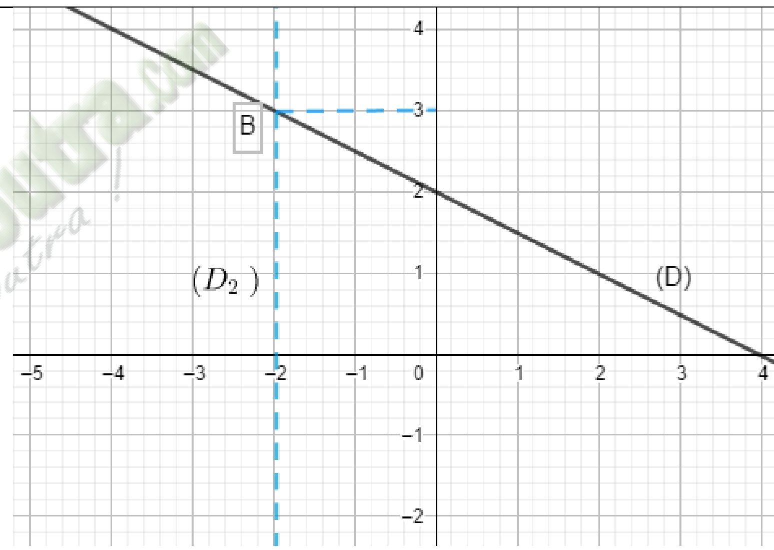
**Méthode**
Pour déterminer l'image d'un réel $m$ à partir de la représentation graphique $(D)$ d'une application affine $f$ dans un repère :
• on trace d'abord la droite $(\Delta)$ d'équation : $x = m$ ;
• la droite $(\Delta)$ coupe la droite $(D)$ en un point A d'abscisse $m$;
• l'ordonnée $n$ de A est l'image de $m$ par $f$.

**Exercice de fixation**

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) ci-contre, la droite $(D)$ est la représentation graphique d'une application affine $g$.
1. Détermine graphiquement l'image de 1 par $g$.
2. Détermine graphiquement l'image de (-2) par $g$.



## Corrigé

| | |
|---|---|
| 1. Déterminons graphiquement l'image de 1 par $g$<br>• On trace la droite $(D_1)$ d'équation $x = 1$ (en rouge).<br>• $(D_1)$coupe $(D)$ en A.<br>• L'ordonnée de A est 1,5.<br>• Donc, graphiquement, l'image de 1 par $g$ est 1,5. |   |
| 2. Cherchons l'image de $(-2)$ par $g$<br>• On trace la droite $(D_2)$ d'équation $x = -2$ (en bleu).<br>• $(D_2)$ coupe $(D)$ en B.<br>• L'ordonnée de B est 3.<br>• Donc, graphiquement, l'image de $(-2)$ par $g$ est 3. |   |

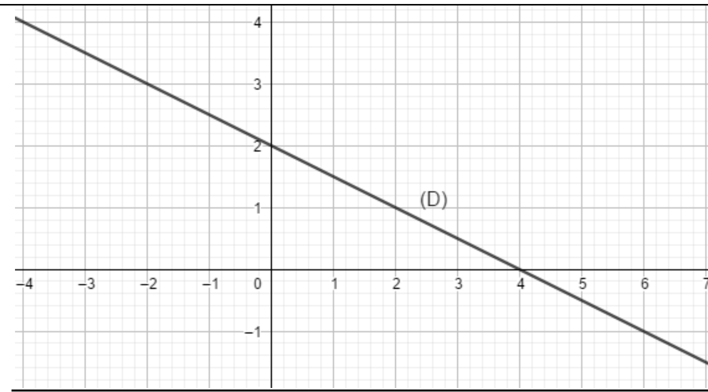


**b) Détermination graphique du nombre réel $m$ tel que $f(m) = n$, $f$ étant une application affine**

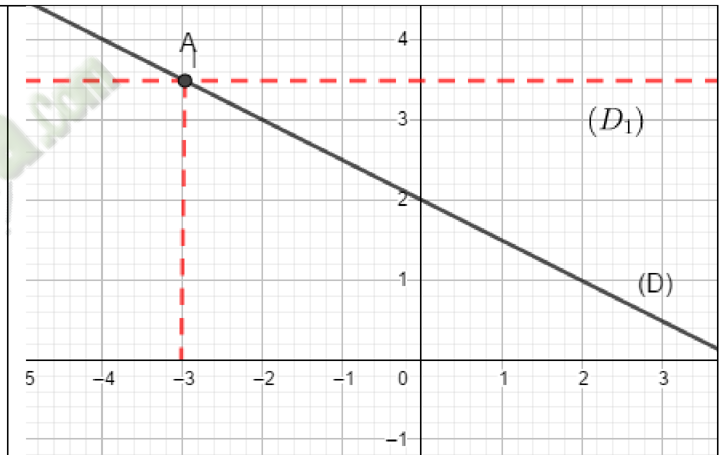
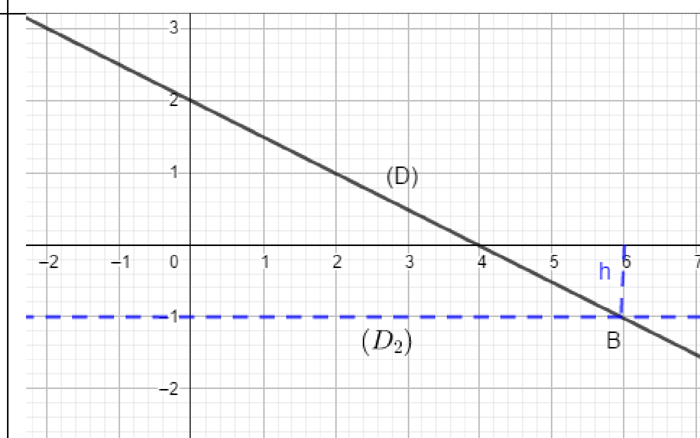
**Méthode**

Etant donné un nombre réel $n$, pour déterminer graphiquement le nombre réel $m$ tel que $f(m) = n$ à partir de la représentation graphique $(D)$ d'une application affine $f$ :
• on trace d'abord la droite $(\Delta)$ d'équation $y = n$ ;
• la droite $(\Delta)$ coupe la droite $(D)$ en un point A d'ordonnée $n$ ;
• l'abscisse du point A est le nombre $m$ cherché.

**Exercice de fixation**

| | |
|---|---|
| Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) ci-contre, la droite $(D)$ est la représentation graphique d'une application affine $f$.<br>1. Détermine graphiquement le nombre réel $m$ tel que : $f(m) = 3{,}5$.<br>2. Détermine graphiquement le nombre réel $t$ tel que : $f(t) = -1$. |   |

**Corrigé**

| | |
|---|---|
| 1. Déterminons graphiquement le réel $m$ tel que : $f$(m)=3,5.<br>• On trace la droite $(D_1)$ d'équation $y = 3{,}5$<br>• La droite $(D_1)$ coupe la droite $(D)$ en A.<br>• L'abscisse de A est $-3$.<br>• Donc, graphiquement, $f(-3) = 3{,}5$. |   |
| 2. Déterminons graphiquement le nombre réel $t$ tel que $f(t) = -1$.<br><br>• On trace la droite $(D_2)$ d'équation $y = -1$<br>• $(D_2)$ coupe la droite $(D)$ en B.<br>• L'abscisse de B est 6.<br>• Donc : $f(6) = -1$.<br>• Par conséquent $t = 6$. |   |

## c) Détermination de l'expression d'une application affine connaissant une équation de sa représentation graphique

**Méthode**

Une droite (D) d'équation : $px + qy + r = 0$ est la représentation graphique d'une application affine.
Pour connaître l'expression de cette application affine, il suffit de réécrire l'équation de la droite sous la forme $y = ax + b$.

**Exercice de fixation**

Détermine l'expression de l'application affine dont la droite donnée est sa représentation graphique dans un repère.
1. La droite $(\Delta)$ d'équation : $3x + y - 5 = 0$ est la représentation graphique de $f$.
2. La droite $(D)$ d'équation : $2x - 3y - 15 = 0$ est la représentation graphique de $g$.

**Corrigé**

1. $(\Delta)$: $3x + y - 5 = 0$ *équivaut à* $y = -3x + 5$.
Donc $f(x) = -3x + 5$.
2. (D): $2x - 3y - 15 = 0$ *équivaut à* $-3y = -2x + 15$ (En multipliant chaque membre par $(-1)$),
$-3y = -2x + 15$ *équivaut à* $3y = 2x - 15$ (En multipliant chaque membre par $\frac{1}{3}$)
$3y = 2x - 15$ *équivaut à* $y = \frac{2}{3}x - 5$
Donc $g(x) = \frac{2}{3}x - 5$.

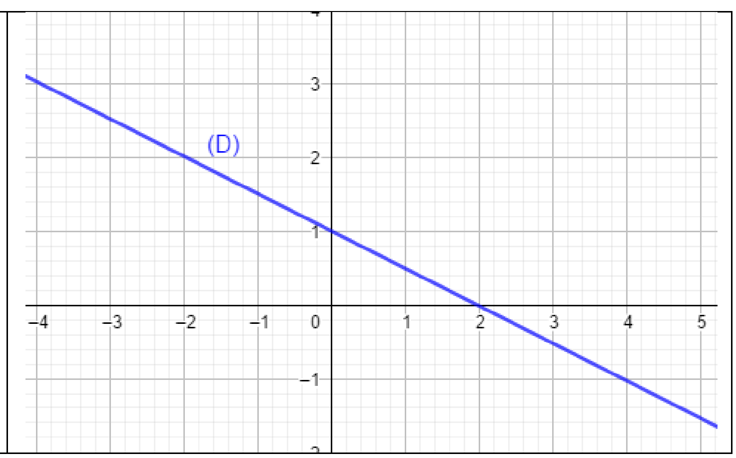
## d) Détermination de l'expression d'une application affine $f$ à partir de sa représentation graphique :

**Méthode**

Pour déterminer l'expression d'une application affine $f$ à partir de sa représentation graphique dans un repère, il faut choisir deux points A et B dont on peut lire facilement les coordonnées sur le graphique.
Puis on remplace $x$ et $f(x)$ par les coordonnées des points A et B dans l'expression :
$f(x) = ax + b$, pour déterminer les nombres réels $a$ et $b$.

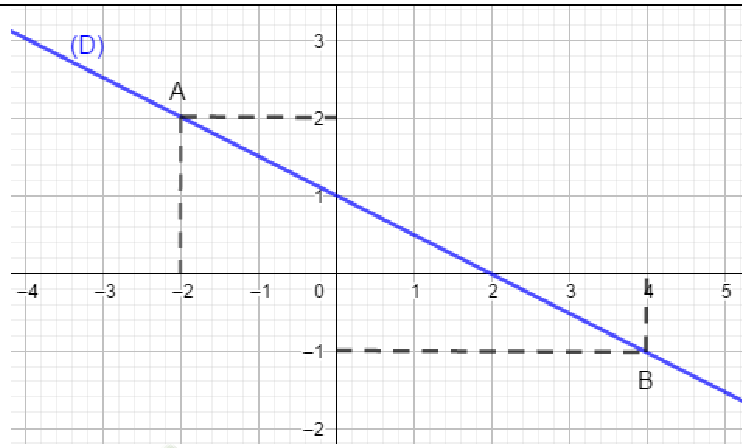
**Exercice de fixation**

Détermine l'expression de l'application affine $f$ dont la représentation graphique (D) est donnée par la figure ci-contre.



| | |
|---|---|
| | |

**Corrigé**

<table>
<tr>
<td>On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = ax + b$.<br>On choisit deux points quelconques A et B sur la droite (D).<br>On choisit par exemple les points A$(-2; 2)$ et B$(4; -1)$.<br>A et B appartiennent à la représentation graphique de $f$ donc :<br>$f(-2) = 2$ et $f(4) = -1$<br>$f(-2) = 2$ équivaut à<br>$-2a + b = 2$<br>$f(4) = -1$ équivaut à<br>$4a + b = -1$<br>On résout le système d'équations :<br>$\begin{cases} -2a + b = 2 \\ 4a + b = -1 \end{cases}$ par combinaison</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">On multiplie les deux membres de la première équation par -1 et on obtient :<br>$\begin{cases} 2a - b = -2 \\ 4a + b = -1 \end{cases}$<br>En additionnant membre par membre, on a : 6a = - 3. D'où, a= $\frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$.<br><br>On multiplie cette fois-ci les deux membres de la première équation par 2 et on obtient :<br>$\begin{cases} -4a + 2b = 4 \\ 4a + b = -1 \end{cases}$<br>En additionnant membre par membre, on a 3b=3. D'où b =1<br><br>On obtient : $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 1$.<br>Ainsi donc $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.</td>
</tr>
</table>



## 7. Sens de variation d'une application affine

### a) Définitions

Soit $f$ une application affine, $m$ et $n$ deux nombres réels quelconques.

- On dit que $f$ est croissante lorsque pour tous nombres réels $m$ et $n$, si $m > n$, alors $f(m) > f(n)$.
- On dit que $f$ est décroissante lorsque pour tous nombres réels $m$ et $n$, si $m > n$, alors $f(m) < f(n)$.
- On dit que $f$ est constante lorsque pour tous nombres réels $m$ et $n$, si $m > n$, alors $f(m) = f(n)$

**Exemple**

- $f$ est l'application affine telle que : $f(-5) = 3$ et $f(2) = 7$.
  On a : $-5 < 2$ et $f(-5) < f(2)$. Donc, $f$ est croissante.

- $g$ est l'application affine telle que : $g(1) = -2$ et $f(3) = -6$.
  On a : $1 < 3$ et $g(1) > g(3)$. Donc, $g$ est décroissante.

**b) Propriétés**

Soit $f$ une application affine définie par : $f(x) = ax + b$.

- Si $a > 0$, alors l'application $f$ est croissante.
- Si $a < 0$, alors l'application $f$ est décroissante.
- Si $a = 0$, alors l'application $f$ est constante.

**Exercice de fixation**

Complète le tableau suivant en mettant une croix dans la case qui convient, puis justifie.

| Application affine | Décroissante | Constante | Croissante | Justification |
|---|---|---|---|---|
| $f: x \longmapsto 2x - 1$ | | | | |
| $g: x \longmapsto -5x + 3$ | | | | |
| $h: x \longmapsto 12$ | | | | |
| $i: x \longmapsto -8 + 3x$ | | | | |
| $j: x \longmapsto -\sqrt{5}$ | | | | |
| $k: x \longmapsto -(7 - 0{,}5x)$ | | | | |
| $l: x \longmapsto 10 - \frac{3}{4}x$ | | | | |
| $m: x \longmapsto -(-1 + 23x)$ | | | | |



**Corrigé**

| Application affine | Décroissante | Constante | Croissante | justification |
|---|---|---|---|---|
| $f: x \mapsto 2x - 1$ | | | x | $a = 2$ et $2 > 0$ |
| $g: x \longmapsto -5x + 3$ | × | | | $a = -5$ et $-5 < 0$ |
| $h: x \longmapsto 12$ | | x | | $a = 0$ |
| $i: x \longmapsto -8 + 3x$ | | | x | $a = 3$ et $3 > 0$ |
| $j: x \longmapsto -\sqrt{5}$ | | x | | $a = 0$ |
| $k: x \longmapsto -(7 - 0{,}5x)$ | | | x | $a = -(-0{,}5) = 0{,}5$ et $0{,}5 > 0$ |
| $l: x \longmapsto 10 - \frac{3}{4}x$ | x | | | $a = -\frac{3}{4}$ et $-\frac{3}{4} < 0$ |
| $m: x \longmapsto -(-1 + 23x)$ | × | | | $a = -23$ et $-23 < 0$ |

**c) Utilisation du sens de variation d'une application affine pour comparer les images de nombres réels**

**Exercice de fixation**

On donne les applications affines $f$ ; $g$ et $h$ telle que $f$ est constante, $g$ est décroissante et $h$ est croissante. Compare :

1. $f(136)$ et $f(-7)$ ;
2. $g(1{,}5)$ et $g(4{,}3)$;
3. $h(-9)$ et $h(-14)$.

**Corrigé**

1. $f$ est constante. Donc quels que soient les nombres réels $x$ et $y$, on a $f(x) = f(y)$. Par conséquent $f(136) = f(-7)$.
2. $1{,}5 < 4{,}3$ et comme $g$ est décroissante on a : $g(1{,}5) > g(4{,}3)$.
3. $-9 > -14$ et comme $h$ est croissante on a : $h(-9) > h(-14)$.

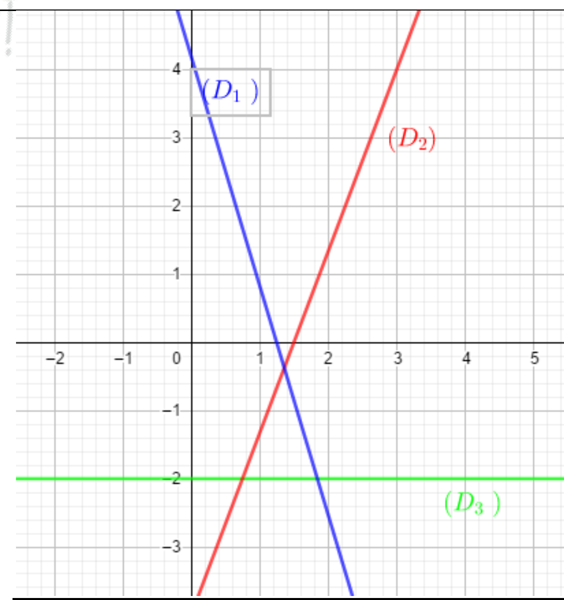
**d) Le sens de variation d'une application affine et sa représentation graphique**

• Lorsqu'une application affine est *croissante,* sa représentation graphique est une droite « montante » de la gauche vers la droite.
• Lorsqu'une application affine est *décroissante* sa représentation graphique est une droite « descendante » de la gauche vers la droite.
• Lorsqu'une application affine est *constante* sa représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses.



**Exemple**

Soit les droites $(D_1)$, $(D_2)$ et $(D_3)$ représentées dans le repère ci-contre.




• La droite $(D_1)$, en bleu, est descendante de la gauche vers la droite. Donc elle est la représentation graphique d'une application affine décroissante.
• La droite $(D_2)$, en rouge, montante de la gauche vers la droite. Donc elle est la représentation graphique d'une application affine croissante.
• La droite $(D_3)$, en vert, est parallèle à l'axe des abscisses. Donc elle est la représentation graphique d'une application affine constante.

# II. Applications linéaires

## 1. Définition

Soit $a$ un nombre.
On appelle application linéaire de coefficient $a$, toute application affine $f$ telle que $f(x) = ax$.

**Exemples**

- Les applications $f$ et $g$ telles que $f(x) = -7x$ et $g(x) = x\sqrt{2}$ sont des applications linéaires.
- L'application $h$ telle que $h(x) = -4x + 3$ n'est pas une application linéaire.

**Remarque**

Une application linéaire étant une application affine, tout ce que nous avons vu concernant les applications affines est aussi valable pour les applications linéaires.

**Exercices de fixation**

**Exercice 1**

Parmi les applications affines suivantes, écris dans ton cahier les numéros de celles qui sont des applications linéaires.

| N° | Applications affines |
|---|---|
| 1 | $f : x \longmapsto -7x+4$ |
| 2 | $g : x \longmapsto 3x$ |
| 3 | $h : x \longmapsto -11x - 10$ |
| 4 | $j : x \longmapsto 4$ |
| 5 | $k : x \longmapsto x$ |

**Corrigé**

Réponse : 2 et 5.

**Exercice 2**

On donne l'application linéaire $f$ telle que $f(x) = x\sqrt{2}$.

a) Calcule l'image par $f$ de $-2$, de $0$ puis de $\sqrt{2}$.

b) Détermine le nombre réel $m$ tel que $f(m) = 1$.

**Corrigé**

a)

| | | |
|---|---|---|
| $f(-2) = -2 \times \sqrt{2}$<br>$f(-2) = -2\sqrt{2}$ | $f(0) = 0 \times \sqrt{2}$<br>$f(0) = 0$ | $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$<br>$f(\sqrt{2}) = 2$ |

b) $f(m) = 1$ équivaut à $m\sqrt{2} = 1$

équivaut à $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$

équivaut à $m = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$

$$\text{équivaut à } m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Le nombre cherché $m$ est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Exercice 3**

On donne l'application linéaire $g$ telle que $g(-6) = 2$.
Détermine l'expression de $g(x)$.

**Corrigé**

$g(x)$ est de la forme $g(x) = ax$

$g(-6) = 2$ *équivaut* à $-6a = 2$

*équivaut* à $a = \frac{2}{-6}$

*équivaut* à $a = -\frac{1}{3}$

Donc $g(x) = -\frac{1}{3}x$.

## 2. Représentation graphique d'une application linéaire

**Propriété**

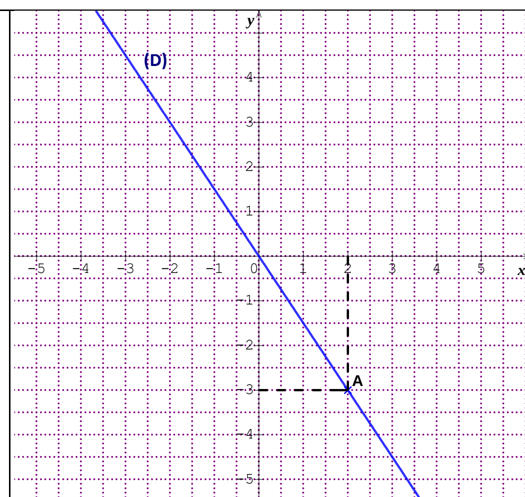
Le plan est rapporté à un repère $(O, I, J)$.
La représentation graphique d'une application linéaire $f$ est une droite qui passe par l'origine du repère c'est-à-dire le point de couple de coordonnées $(0; 0)$.

**Exercices de fixation**

**Exercice 1**

Dans le plan muni d'un repère, trace la droite $(D)$ représentation graphique de l'application linéaire $f$ telle que $f(x) = -\frac{3}{2}x$.

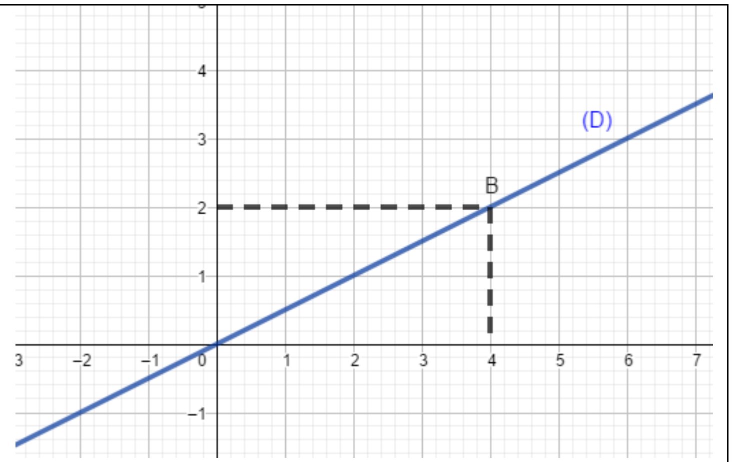
**Corrigé**

| | |
|---|---|
| Choisissons deux nombres réels et cherchons leurs images par $f$.<br>On choisit par exemple 0 et 2. On a: $f(0) = 0$; $f(2) = -3$<br>Donc $(D)$ passe aussi par le point O(0 ; 0) et le point A$(2; -3)$<br>Le point O étant déjà placé, on place le point A.<br>La droite (D) est la droite (OA). |  |



**Exercice 2**

Trace la droite $(D)$ représentation graphique de l'application linéaire $g$ telle que : $g(4) = 2$.
Corrigé

| | |
|---|---|
| Comme $g(4) = 2$, alors la droite $(D)$ passe par le point B$(4; 2)$<br>On sait aussi que la droite (D) passe par le point de coordonnées O$(0; 0)$. |   |

## 3. Les propriétés de linéarité

### a) Propriétés

Soit $f$ une application linéaire, $m$, $n$ et $k$ sont des nombres réels. On a:
- $f(m + n) = f(m) + f(n)$
- $f(km) = kf(m)$

**Exercice de fixation**
Soit $f$ une application linéaire telle que $f(2) = -6$ et $f(-3) = 9$
Calcule $f(-1)$, $f(5)$ et $f(9)$ sans déterminer $f(x)$.

Corrigé
$f$ est une application linéaire:
- Calculons $f(-1)$

On sait que :$2 + (-3) = -1$
d'où :
$f(-1) = f(2 + (-3))$ d'après
la propriété de linéarité
$f(-1) = f(2) + f(-3)$ or
$f(2) = -6$ et $f(-3) = 9$
$f(-1) = -6 + 9$
$f(-1) = 3$

- Calculons $f(5)$

$5 = 2 - (-3)$ d'où :
$f(5) = f(2) - f(-3)$
$f(5) = -6 - 9$
$f(5) = -15$ .

- Calculons $f(9)$

$9 = -3 \times (-3)$ d'où
$f(9) = f(-3 \times (-3))$
d'après la propriété de linéarité
$f(9) = -3 \times f(-3)$
or $f(-3) = 9$
$f(9) = -3 \times 9$
$f(9) = -27.$

**b) Traduire une situation de proportionnalité par une application linéaire**

**<u>Exercice</u> de fixation**
Au marché Gouro d'Adjamé, un kilogramme ($kg$) d'oranges coûte 340 FCFA.
1. Cauphy y achète 1,5 $kg$ d'oranges. Détermine le montant à payer.
2. Détermine le montant à payer si Cauphy y achète $x$ $kg$ d'oranges.
3. Etablis la correspondance qui, à chaque quantité d'oranges exprimée en $kg$, associe la somme en FCFA à payer.

**Corrigé**
1. $1{,}5 \times 340 = 510F$
Cauphy payera la somme de 510 Fcfa
2. $340 \times x = 340x$
Cauphy payera $340x$ Fcfa
3. La correspondance est : $x \mapsto 340x$.
Cette correspondance est une application linéaire car elle est de la forme $ax$ où $a = 340$.

## C. SITUATION D'EVALUATION

Monsieur Sylla doit effectuer avec sa voiture un voyage à Odienné pour prendre part à la cérémonie d'ouverture d'un nouveau collège. A la fin de cette cérémonie, il doit retourner à Abidjan. Les deux villes sont distantes de 800 Km.
On sait que la quantité $\boldsymbol{q}$ (en litres) d'essence restante dans la voiture après une distance parcourue $\boldsymbol{x}$ (en kilomètres), est une application affine et qu'après 100 km du trajet la consommation d'essence est d'environ 5 $litres$.
Avant le départ d'Abidjan, Monsieur Sylla a rempli son réservoir dont la capacité est de 60 $litres$ d'essence.
Il dit à son fils élève de 3ème , qu'avant de tomber en panne sèche (le réservoir vide), le voyant lumineux devrait s'allumer lorsqu'il reste seulement 5 $litres$ d'essence dans le réservoir.
Mais ce voyant a un défaut et ne fonctionne pas.
Afin de prendre toutes les dispositions pour éviter la panne sèche, M. Koné voudrait savoir la distance à parcourir d'Odienné au lieu où le voyant lumineux devrait s'allumer.
Il ne sait pas comment procéder. Son fils veut lui apporter son aide.

1. Détermine la quantité d'essence restante après un parcours de 100 Km.
2. Démontre que la quantité $q$ d'essence restante est telle que: $q(x) = -\frac{1}{20}x + 60$.
3. a. Détermine la distance parcourue après laquelle le voyant lumineux devrait s'allumer.
   b. Déduis-en la distance à parcourir d'Odienné au lieu où le voyant devrait s'allumer.

## Corrigé

1. Après 100 km du trajet la consommation d'essence est d'environ 5 $litres$.
   Donc, la quantité d'essence restante est de : $60 - 5 = 55$ $litres$.
2. Démontrons que : $q(x) = -\frac{1}{20}x + 60$.

   $q$ étant une application affine, alors elle de la forme : $q(x) = ax + b$.

   - La quantité au départ d'Abidjan est de 60 $litres, d'$où: $q(0) = 60$.
   - D'après la question 1, on a : $q(100) = 55$

   On obtient le système d'équations : $\begin{cases} b = 60 \\ 100a + b = 55 \end{cases}$.

   On en déduit que : $a = -\frac{5}{100} = -\frac{1}{20}$ .

   Donc : $q(x) = -\frac{1}{20}x + 60$.

3. a) Pour que le voyant lumineux s'allume, il faut qu'on ait : $q(x) = 5$.
   On résout l'équation : $-\frac{1}{20}x + 60 = 5$.

   Après résolution, on obtient : $x = 1100$ .

   Donc, le voyant lumineux devrai s'allumer après un parcours de 1100 Km.

   b) Déterminons la distance à parcourir d'Odienné au lieu où le voyant devrait s'allumer.
   Pour atteindre Odienné, il faut parcourir 800 Km.
   Or, l'allumage du voyant se produit après un parcours de 1100 Km.

   On a : $1100 - 800 = 300$.

   Donc, le voyant lumineux devrait s'allumer lors du trajet de retour, à 300 Km d'Odienné.

# D. EXERCICES

## D-1 Exercices de fixation

**Exercice 1**
Mets une croix dans la case correspondante si la réponse est oui.

| L'application …est une application | affine | linéaire | constante |
|---|---|---|---|
| $f : x \longmapsto 2x + 5$ | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $g: x \longmapsto 3x^2 - 7$ | | | |
| $h: x \longmapsto 4x$ | | | |
| $i: x \longmapsto -3x - 4$ | | | |
| $j: x \longmapsto -4 + 3x$ | | | |
| $k: x \longmapsto 8$ | | | |
| $l: x \longmapsto 2(x - 9)$ | | | |
| $m: x \longmapsto 2x + 5 - 2x$ | | | |
| $n: x \longmapsto 11\sqrt{x} + 1$ | | | |

**Exercice 2**

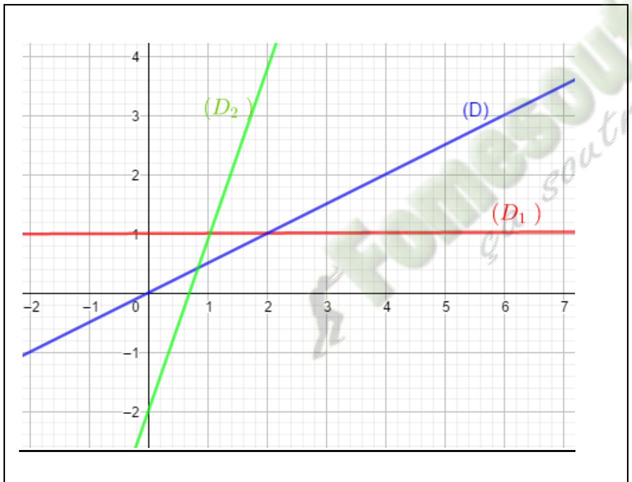
Soit $f$ une application affine telle que $(x) = \frac{2}{3}x - 4$ .

1. Calcule l'image de chacun des nombres $(-3)$, $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.
2. Détermine les nombres $m$ et $n$ tel que $f(m) = 0$ et $(n) = 4$ .

**Exercice 3**

Soit la figure ci-dessous.

Parmi les droites $(D)$, $(D_1)$ et $(D_2)$, cite celle qui est la représentation graphique d'une application linéaire.



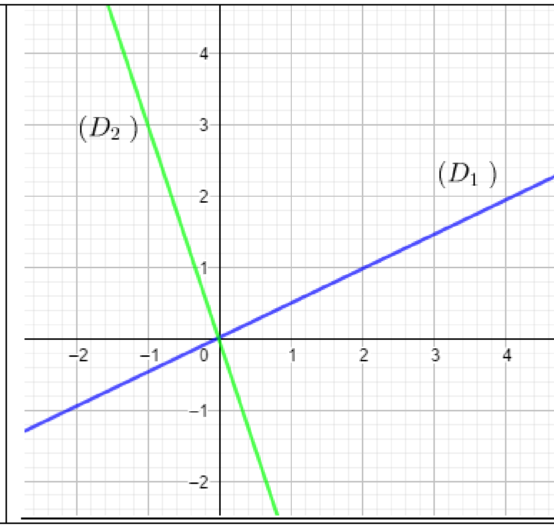



**Corrigé**

La seule droite qui passe par l'origine du repère est la droite (D) en bleu. Donc (D) est la représentation graphique d'une application linéaire.

**Exercice 4**

Parmi les applications linéaires $f$ et $g$ suivantes, dis celle qui est croissante et celle qui est décroissante et associe chaque droite de la figure à l'application linéaire correspondante.
$f(x) = 0{,}5x$ et $g(x) = -3x$.




Corrigé

- $f$ est croissante car son coefficient 0,5 est positif $(0{,}5 > 0)$. Donc, sa représentation graphique est la droite "montante" de gauche à droite c'est-à-dire la droite $(D_1)$.
- $g$ est décroissante car son coefficient $-3$ est négatif $(-3 < 0)$. Donc, sa représentation graphique est la droite "descendante" de gauche à droite c'est-à-dire la droite $(D)$.

**Exercice 5**

Soit $f$ une application affine telle que $(x) = -3x + 4$ .
1. Calcule l'image de chacun des nombres 0, $-\frac{1}{3}$ et 1.
2. Détermine les nombres $a$ et $b$ tel que $f(a) = -5$ et $(b) = 2$ .

**Exercice 6**

Soit $h$ une application linéaire telle que $h(x) = -1{,}5x$.
1. Calcule l'image de chacun des nombres $-1{,}5$, $-2$ et 7.
2. Détermine les nombres $t$ et $q$ tel que $f(t) = 1$ et $(q) = 12$ .

**Exercice 7**

Détermine l'application affine $f$ telle que $f(-4) = 6$ et $f(6) = 1$.

**Exercice 8**

Détermine l'application affine $g$ telle que $g(3) = 5$ et $g(7) = 13$.

**Exercice 9**

Détermine l'application linéaire $h$ telle que $h(\sqrt{2}) = \sqrt{6}$ .

**Exercice 10**

Dans une boucherie, le kilogramme $(kg)$ de viande coûte 2500 Fcfa. Et pour tout achat, l'emballage est facturé à 100 Fcfa.
Madame Yao a acheté 5,5 $kg$ de viande et Madame Koné en a acheté $9kg$.
1. Calcule la somme dépensée par chacune des deux femmes.

2. Lucien a payé 7600 Fcfa. Calcule la quantité de viande qu'il a achetée.
3. Exprime la somme $S(x)$ à payer pour l'achat de $x$ kg de viande dans cette boucherie.
4. Donne la nature de la correspondance : $x \longmapsto S(x)$.

**Exercice 11**
Le réservoir d'eau d'une ferme a été troué pendant la nuit, alors qu'il contenait 81 litres d'eau. Il perd ainsi 3,6 litres d'eau toutes les trente minutes.
1. Calcule la quantité d'eau qu'il perdra au bout de45 minutes, puis au bout d'une heure et demie.
2. Calcule le temps (en heure) au bout duquel il perdra 72 litres d'eau et celui au bout duquel il sera totalement vide.
3. Exprime la quantité d'eau $y$ (exprimée en litres) perdue en fonction du temps $x$ (exprimé en minutes).
4. Donne la nature de la correspondance qui, à $x$ associe $y$.

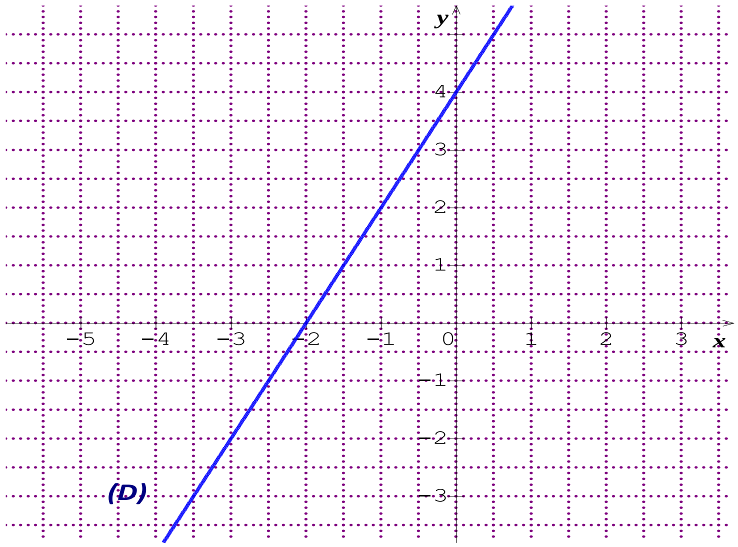
**Exercice 12**
On donne les applications affines $f_1$ , $f_2$ , $f_3$ et $f_4$ suivantes :
$f_1(x) = 3x - 4$ ; $f_2(x) = -2x + 1$ ; $f_3(x) = -2x - 3$ et $f_4(x) = 2$.
Représente graphiquement $f_1$ , $f_2$, $f_3$ et $f_4$ dans un même repère (orthogonal avec des couleurs différentes).

**Exercice 13**
On donne les applications linéaires $g$ , $h$ et $k$ suivantes :
$g(x) = 2{,}5x$ ; $h(x) = -\frac{1}{3}x$ et $h(x) = x$.
Représente graphiquement, $h$ et $k$ dans un même repère (orthogonal avec des couleurs différentes).

**Exercice 14**
L'application affine $f$ et l'application linéaire $g$ sont telles que :
$f(-3) = -1$ ; $f(2) = 3$ et $g(3) = -2$
Représente graphiquement $g$ et $f$ dans un même repère (orthogonal avec des couleurs différentes).

**Exercice 15**
Détermine l'expression de l'application affine dont la droite donnée est sa représentation graphique.
1. $(\Delta)$: $\frac{3}{2}x + 3y - 6 = 0$, représentation graphique de $f$.
2. $(D)$: $2x - 5y = 0$, représentation graphique de $g$.
3. $(d)$: $8y - 6 = 0$, représentation graphique de $h$.
4. $(\delta)$: $5x + 4y - 10 = 0$, représentation graphique de $k$.

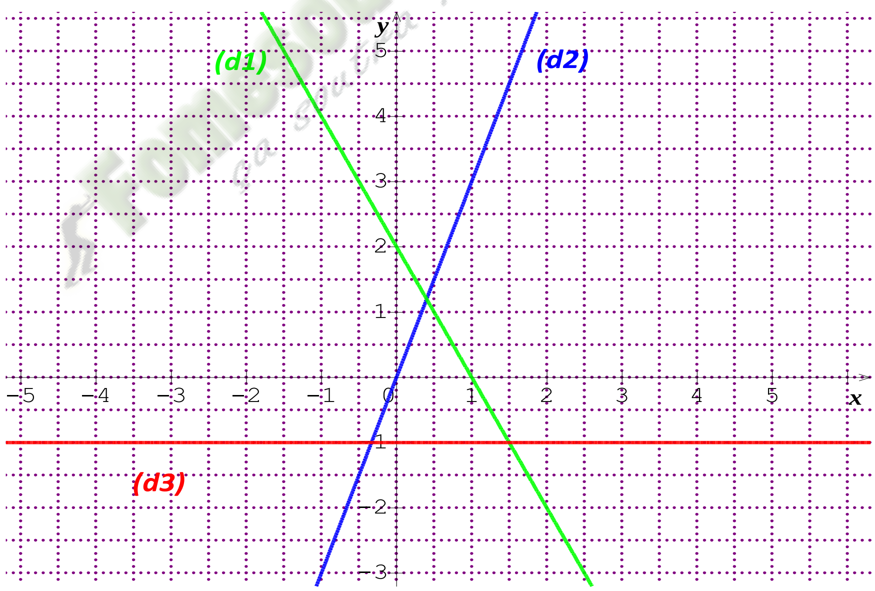
**Exercice 16**
La droite $(D)$ représentée ci-dessous est la représentation graphique d'une application affine $g$.
Détermine graphiquement :
1. Les images par g de 0 ; $-1$ et $(-1{,}5)$.
2. Les nombres réels dont les images sont respectivement 0 ; 1 et $-2$.




### Exercice 17

Sur la figure ci-dessous, la droite $(d1)$ est la représentation graphique d'une application $j$ ; $(d2)$ est celle d'une application $l$ et $(d3)$ celle d'une application $k$.

1. Donne la nature de chaque application.
2. Détermine l'expression de chaque application.




### Exercice 18

Soit $h$ une application linéaire telle que $h(-4) = -3$ et $h\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}$.

Sans déterminer l'expression de $h$, calcule $h(1)$ ; $h(4)$ ; $h\left(-\frac{11}{3}\right)$ et $h\left(\frac{13}{3}\right)$.

### Exercice 19

Mets une croix dans la case correspondante si la réponse est oui et donne ta justification dans la colonne "*justification*"

| L'application affine est | croissante | décroissante | constante | Justification |
|---|---|---|---|---|

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $f: x \longmapsto 2x + 5$ | | | | |
| $g: x \longmapsto -5 - 2x$ | | | | |
| $h: x \longmapsto 4x$ | | | | |
| $i: x \longmapsto -3x - 4$ | | | | |
| $j: x \longmapsto -4 + 7x$ | | | | |
| $k: x \longmapsto 8$ | | | | |
| $l: x \longmapsto -\pi x$ | | | | |
| $m: x \longmapsto -5$ | | | | |

**Exercice 20**
L'application affine $f$ et l'application linéaire $g$ sont telles que :
$f(-3) = 1$ ; $f(2) = 3$ et $g(5) = -3$
Sans déterminer leurs expressions, justifie que $f$ est croissante et que $g$ est décroissante.

**Exercice 21**
On donne les applications affines $f$ ; $g$ et $h$ telles que $f$ est croissante, $g$ est constante et $h$ est décroissante. Compare :
1. $f(-2)$ et $f(-7)$.
2. $g(\frac{17}{4})$ et $g(\sqrt{3})$.
3. $h(-9)$ et $h(16)$.



## D-2 Exercices de renforcement

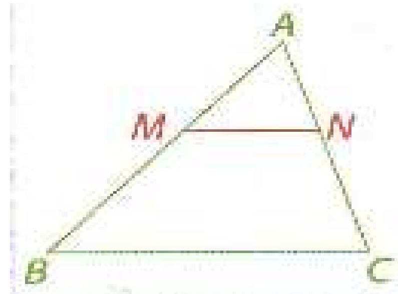
**Exercice 22**
Deux amis Teloka et Bita s'abonnent pour la première fois à une bibliothèque. Ce même jour Teloka paye 1600 Fcfa pour son abonnement et la location de 3 livres. Quant à Bita, il paye 2200 Fcfa pour son abonnement et la location de 5 livres.
Détermine le coût de l'abonnement et celui de la location d'un livre dans cette bibliothèque.

**Exercice 23**
Dans un magasin, les cartouches d'encre pour imprimante sont vendues à 15000 Fcfa l'unité. Sur internet, ces mêmes cartouches d'encre sont vendues à 10000 Fcfa l'unité plus un forfait de 15000 Fcfa pour les frais de livraison quel que soit le nombre de cartouches achetées.
Soit $\boldsymbol{x}$ le nombre de cartouches achetées.
1. Exprime en fonction de $\boldsymbol{x}$ :
   a) le prix $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x})$ à payer en magasin.
   b) le prix $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})$ à payer sur internet.
2. Calcule le prix de 6 cartouches dans chaque cas et dis le tarif le plus avantageux.
3. Cauphy dispose de 80000Fcfa. Détermine le tarif le plus avantageux pour lui.
4. A partir de combien de cartouches le prix sur internet est le plus avantageux.
5. Représente graphiquement $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})$ dans un même repère, sur du papier millimétré avec deux couleurs différentes et retrouve graphiquement les résultats précédents (tu laisseras les traits permettant la lecture graphique).
   Echelle : en ordonnée 1 $\boldsymbol{cm}$ pour 5000 Fcfa.

## D-3 Exercices d'approfondissement

**Exercice 24**

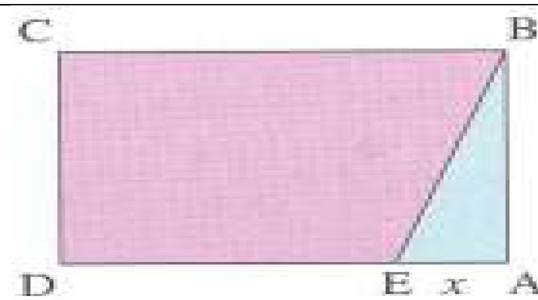
On considère la figure ci-dessous où ABC est un triangle et la droite (MN) est parallèle à la droite (BC).
On a AB= 5 $\boldsymbol{cm}$ AC= 4 $\boldsymbol{cm}$ BC= 6 $\boldsymbol{cm}$ et AM= $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{cm}$
($\boldsymbol{x}$ désignant un nombre réel tel que $\mathbf{0} < \boldsymbol{x} < \mathbf{5}$)




1. Calcule le périmètre $\boldsymbol{a}$ du triangle ABC.
2. Justifie que AN $= \frac{4}{5}\boldsymbol{x}$ et que MN $= \frac{6}{5}\boldsymbol{x}$.
3. Justifie que l'application qui, à $\boldsymbol{x}$ associe le périmètre $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ du triangle AMN, est une application linéaire.
4. Justifie que l'application qui, à $\boldsymbol{x}$ associe le périmètre $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$ du trapèze MNCB, est une application affine.
5. Représente graphiquement $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$ dans le plan muni d'un repère orthogonal avec deux couleurs différentes.

**Exercice 25**

L'unité est le $\boldsymbol{cm}$ (centimètre)
Dans le rectangle ABCD ci-contre on a : AB= 3, AD= 4 et E est un point de [AD] tel que AE= $\boldsymbol{x}$.



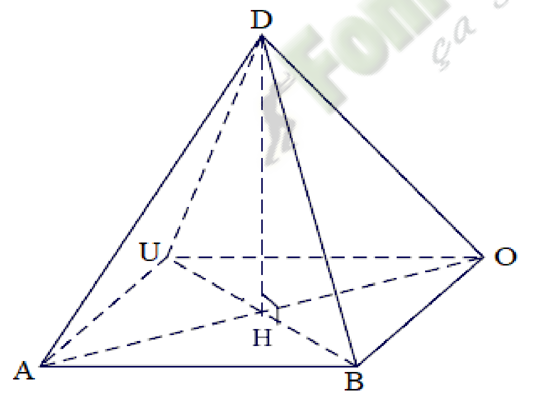

1. a) Justifie que l'aire $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})$ du triangle ABE est $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1{,}5}\boldsymbol{x}$.
   b) Justifie que l'aire $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$ du quadrilatère BCDE est $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = -\mathbf{1{,}5}\boldsymbol{x} + \mathbf{12}$.
   c) précise la nature des applications $\boldsymbol{s}: \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{q}: \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$.
2. Calcule l'aire du triangle ABE et l'aire du quadrilatère BCDE pour :
   a) $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$.
   b) $\boldsymbol{x} = \mathbf{3}$.
3. a) Détermine la valeur de $\boldsymbol{x}$ pour laquelle le triangle ABE et le quadrilatère BCDE ont la même aire.
   b) Justifie que dans ce cas les points E et D sont confondus.
4. Représente graphiquement $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$ dans un même repère, sur du papier millimétré, avec deux couleurs différentes et retrouve graphiquement le résultat de la question 3.a)- (Tu laisseras les traits permettant la lecture graphique).

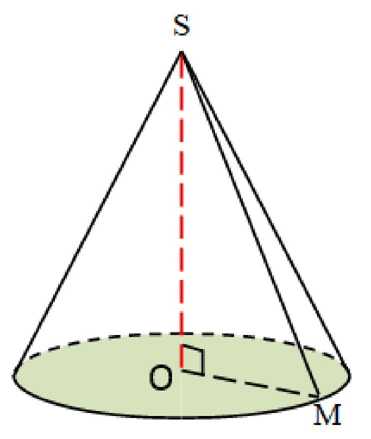
# Thème : Géométrie de l'espace

# LECON 14 : PYRAMIDES ET CÔNES Durée : 6 heures.

## A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour la fête de fin d'année scolaire, le Proviseur d'un Lycée envoie sa secrétaire passer une commande de 100 boîtes d'emballage de cadeaux chez un marchand. Le marchand propose à la secrétaire deux types de boîtes d'emballage qui ont les formes représentées par les figures ci-dessous.
Il indique que ces figures ne sont pas en grandeurs réelles et que :
DH = SO = 40 cm, AH = OM = 30 cm et DB = SM = 50 cm.
Le mètre carré de matière à utiliser pour fabriquer ces boîtes d'emballage coûte 5000 F CFA.
La secrétaire veut savoir lequel des deux modèles d'emballage est le moins cher. Elle doit donner sa réponse dans un délai de deux jours. Son fils, élève en classe de 3ème, ayant vu ces figures dans son livre de maths, décide de l'aider en lisant le cours sur les pyramides et les cônes.



## B. CONTENU DE LA LEÇON

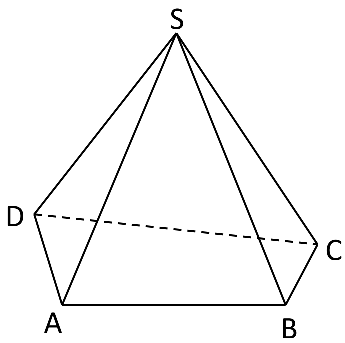
### I. Pyramides

#### 1. Présentation

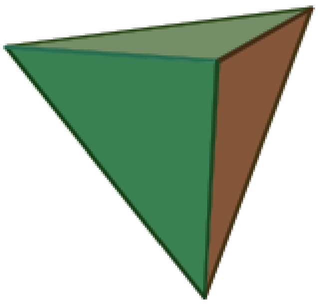
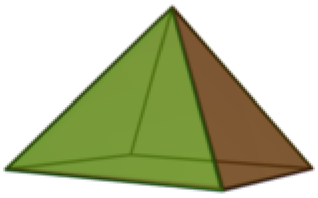
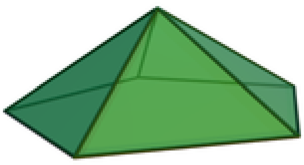
Une pyramide est un solide qui a :
• un **sommet** appelé aussi le sommet principal **;**
• une **base** en forme de polygone (une figure plane qui a plusieurs côtés et qui est formée d'une ligne brisée fermée) ;
• des **faces latérales** triangulaires ayant un même sommet appelé « sommet principal »;
• le sommet principal du solide est relié aux sommets de sa base par des segments appelés arêtes de la pyramide.

**Exemple**

Le solide SABCD représenté ci-contre est une **pyramide**.
• Le point S est le **sommet** de la pyramide.
• Le quadrilatère ABCD est la **base** de la pyramide.
• Les triangles SAB, SBC, SDC et SDA sont les **faces latérales** de la pyramide.
• Les segments [SA], [SB], [SC], [SD, [AB], [BC], [CD] et [DA] sont **les arêtes** de la pyramide.

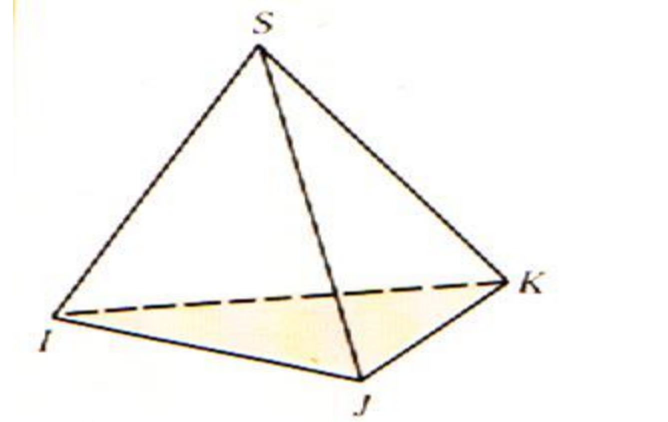



**Exemples de pyramides particulières**

| **Nom** | **Tétraèdre** | **Pyramide carrée** | **Pyramide pentagonale** |
|---|---|---|---|
| **Solide** |  |  |  |
| Base | Triangle équilatéral | Carré | Pentagone régulier |

**Remarques**

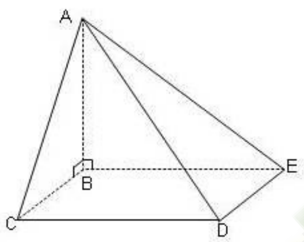
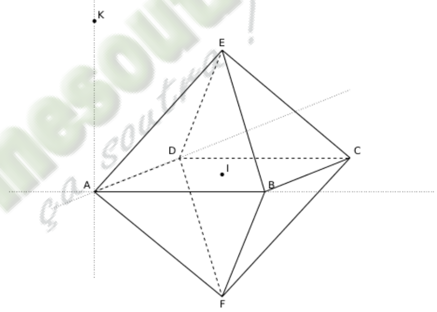
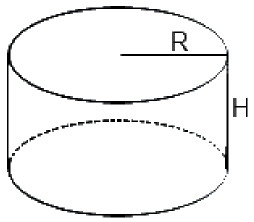
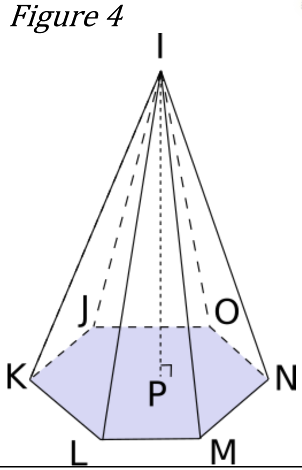
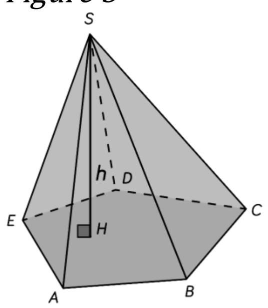
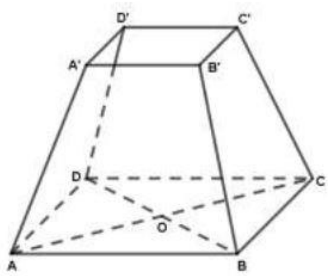
- Une pyramide a autant de faces latérales que sa base a de côtés.
- Dans une pyramide à base triangulaire, chaque face latérale peut être considérée comme base de cette pyramide et chaque sommet peut être considéré comme le sommet de cette pyramide.




**Exercice de fixation**



Parmi les solides suivants, indique ceux qui sont des pyramides

| | | |
|---|---|---|
| *Figure 1*<br><br> | *Figure 2*<br><br> | *Figure 3*<br><br> |
| *Figure 4*<br><br> | *Figure 5*<br><br> | *Figure 6*<br><br> |

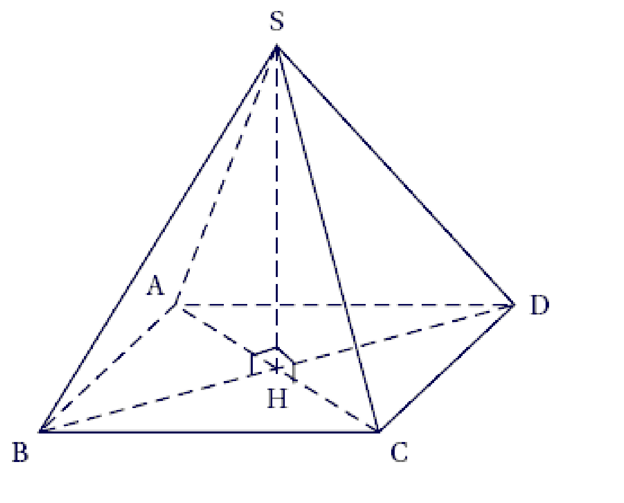
Corrigé

Figures 1 ; 4 et 5.

## 2. Hauteur d'une pyramide

**Définition**
• On appelle hauteur d'une pyramide, la droite qui passe par le sommet de cette pyramide et qui est perpendiculaire au plan de sa base.

**Exemple**
Dans la pyramide SABCD ci-contre, le support du segment [SH] est perpendiculaire au plan de la base ABCD.
Donc le segment $[SH]$ est la **hauteur** de cette pyramide.



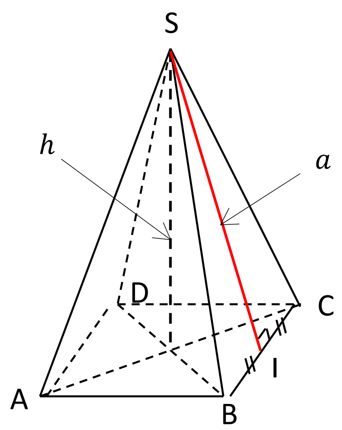

## 3. Apothème d'une pyramide

Définition
Un **apothème** d'une pyramide est la hauteur d'une face latérale issue du sommet de la pyramide.

**Exemple**
Dans la pyramide SABCD ci-contre, le segment [SI] est un apothème.

Remarque
Un apothème est aussi une longueur de la hauteur d'une face latérale issue du sommet de la pyramide.

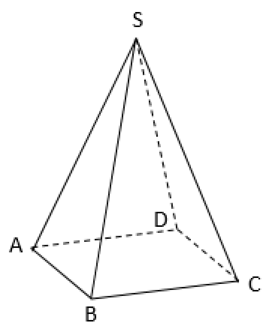





## 4. Pyramide régulière

### a) Définition
Une pyramide est dite **régulière** lorsque :
• Sa base est un **polygone régulier** (polygone inscriptible dans un cercle et dont tous les côtés ont la même longueur). Par exemple, la base peut être un triangle équilatéral, un carré, ...
• Ses faces latérales sont des triangles **isocèles** superposables.

**Exemple**
Sur la figure ci-contre, SABCD est une pyramide régulière car sa base ABCD est un carré et les triangles SAB ; SBC ; SCD et SDA sont isocèles.

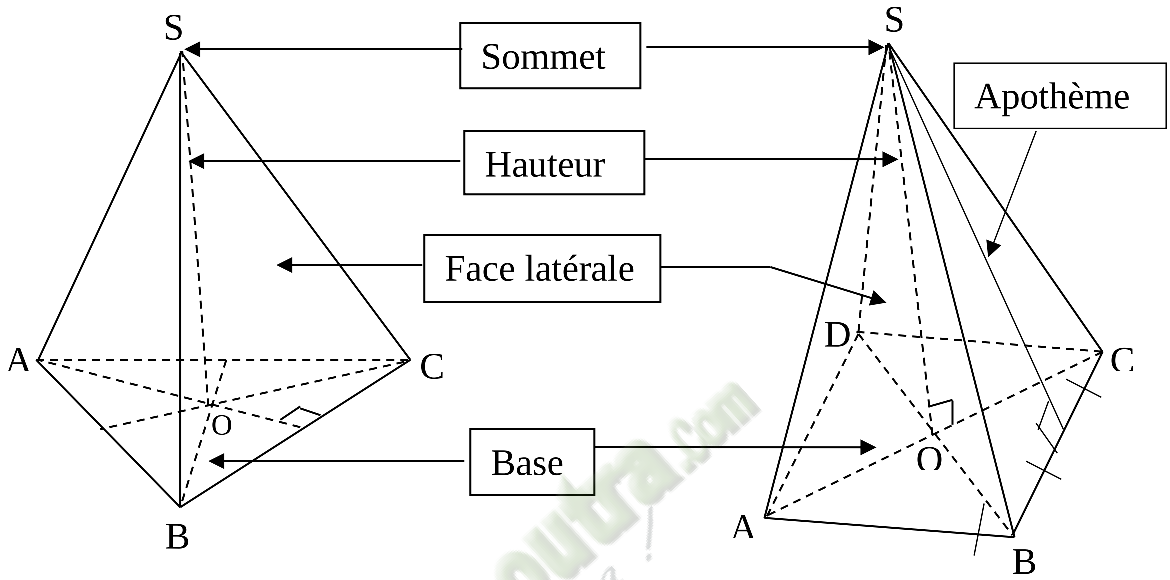



### b) Propriétés
• Si une pyramide est régulière, alors sa hauteur passe par le sommet de la pyramide et le centre du cercle circonscrit à sa base.
• L'apothème d'une pyramide régulière est la hauteur d'une face latérale.

**Remarques :**
• Dans le cas de la pyramide à base carrée, le centre de la base correspond à l'intersection des diagonales.
• Pour une base en forme de triangle équilatéral, cela correspond à l'intersection des médianes.

**c) Exemples des pyramides régulières**

Les figures ci-dessous représentent deux pyramides régulières



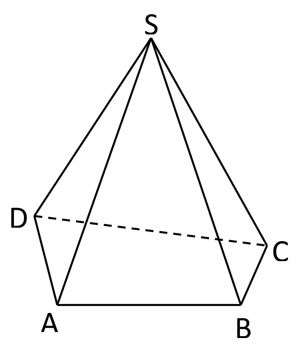
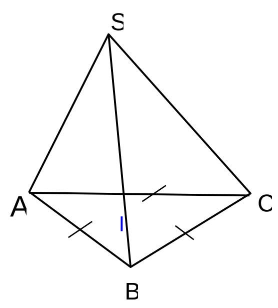
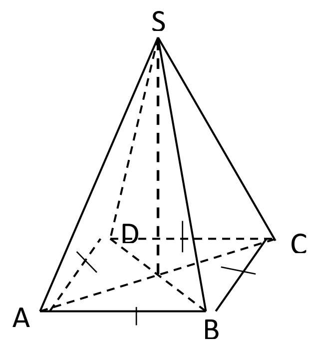

SABC est une pyramide régulière de base : le triangle équilatéral ABC.

SABCD est une pyramide régulière de base : le carré ABCD.



<u>**Exercices de fixation**</u>

<u>**Exercice 1**</u>
Parmi les figures ci-dessus, indique celles qui représentent des pyramides régulières.

| | | |
|---|---|---|
|  **Figure 1** |  **Figure 2** | SA=SB=SC=SD  **Figure 3** |





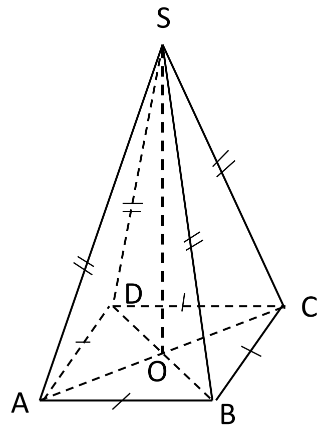
Corrigé
• La figure 1 ne représente pas une pyramide régulière car la base n'est pas un polygone régulier.
• La figure 2 ne représente pas une pyramide régulière bien que la base soit un triangle équilatéral, car on n'ignore si les faces latérales sont des triangles isocèles.
• La figure 3 représente une pyramide régulière, car sa base est un carré et ses faces latérales sont des triangles isocèles.

## Exercice 2

La figure SABCD ci-contre est une pyramide régulière de base carrée.

Fais correspondre chaque désignation de la colonne 1 à la désignation correspondante de la colonne 2.

| Colonne 1 | | | Colonne 2 |
|---|---|---|---|
| S | • | • | Face latérale |
| SAB | • | • | Hauteur |
| ABCD | • | • | Sommet |
| (SO) | • | • | Base |




Corrigé

| Colonne 1 | | | Colonne 2 |
|---|---|---|---|
| S | • | • | Face latérale |
| SAB | • | • | Hauteur |
| ABCD | • | • | Sommet |
| (SO) | • | • | Base |



## 5. Aire latérale et volume d'une pyramide régulière

**Propriétés**

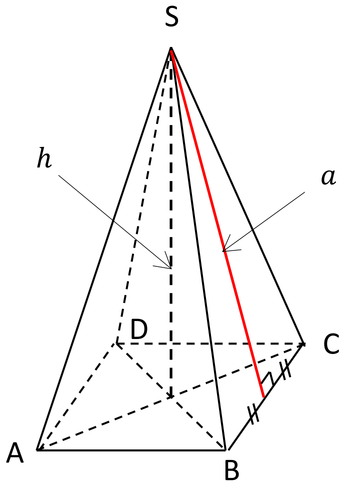
SABCD est une pyramide régulière de base un polygone régulier ABCD.

**Aire latérale ($\mathcal{A}$)**

$\mathcal{A} = \frac{P \times a}{2}$, où P est le périmètre de la base et $a$ l'apothème (hauteur d'une face latérale).

**Volume de la pyramide (V)**

$V = \frac{B \times h}{3}$, où **B** est l'aire de la base et **h** la hauteur de la pyramide.

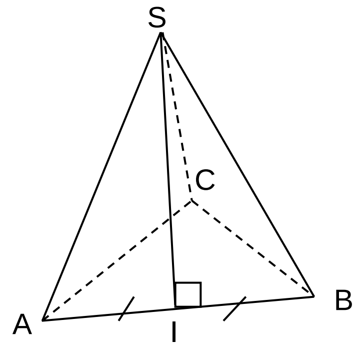



**Remarque :**

L'aire totale $\mathcal{A}_T$ d'une pyramide fermée à la base est égale à la somme de l'aire latérale $\mathcal{A}$ et de l'aire de la base $\mathcal{B}$ de cette pyramide. Soit $\mathcal{A}_T = \mathcal{A} + \mathcal{B}$.

### Exercices de fixation

**Exercice 1**

| | |
|---|---|
| Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, SABC est une pyramide régulière de sommet principal S et de base le triangle équilatéral ABC. I est le milieu du segment [BC].<br>On donne : SB=9 cm, AB=6 cm et $SI = 6\sqrt{2}$ cm.<br>1) Que représente [SI] pour la pyramide ?<br>2) Calcule l'aire latérale de la pyramide SABC. |  |

Corrigé

1) Le segment [SI] est un apothème de la pyramide SABC.

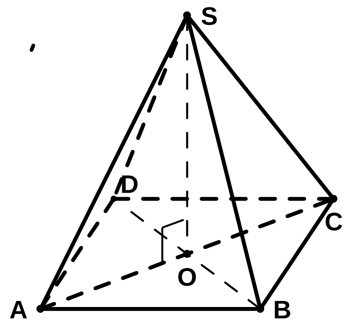
2) Calculons l'aire latérale.

On sait que : $\mathcal{A} = \frac{\mathrm{P} \times a}{2}$.

Or $P = 3 \times AB$ et $a = SI = 6\sqrt{2}$

$$\mathcal{A} = \frac{3 \times AB \times SI}{2} = \frac{3 \times 6 \times 6\sqrt{2}}{2} = 54\sqrt{2}\ cm^2$$

**Exercice 2**

| | |
|---|---|
| L'unité de longueur est le centimètre.<br>SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de base le carré ABCD de centre O.<br>On donne : $SO = 12$ et $AB = 6$.<br>Calcule le volume V de la pyramide SABCD. |  |

Corrigé

On sait que : $v = \frac{B \times h}{3}$

Calculons l'aire de la base

$B = c \times c = 6 \times 6 = 36\ cm^2$

La hauteur de la pyramide est SO.

On a h=SO=12 cm.

On obtient :

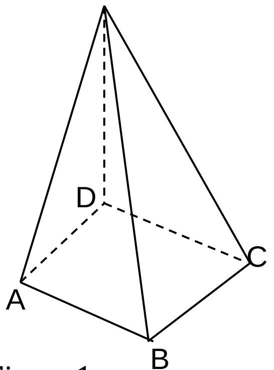
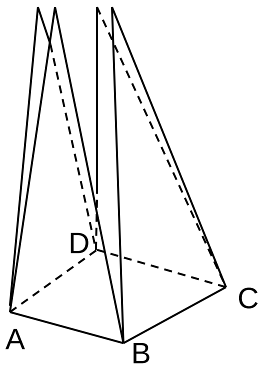
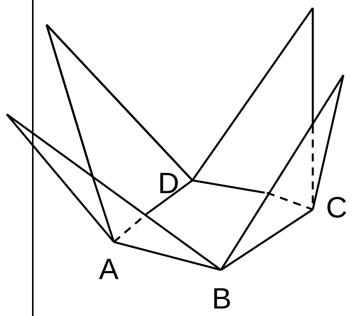
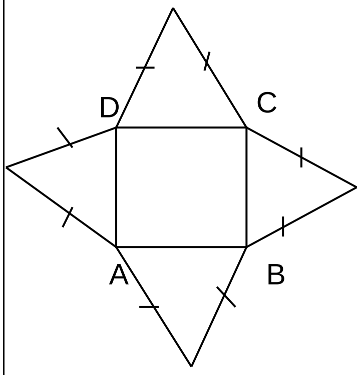
$v = \frac{36 \times 12}{3} = 144\ cm^3$ .

## 6. Patron d'une pyramide régulière

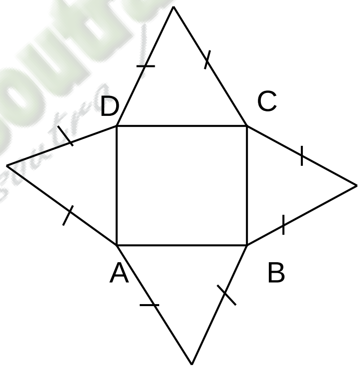
**Définition**

Un **patron** d'une pyramide est une surface plane, qui, par pliage, doit permettre de retrouver la pyramide.

**Exemple**
Les figures ci-dessous sont les étapes de dépaillage  d’une pyramide régulière à base carrée pour obtenir un patron.

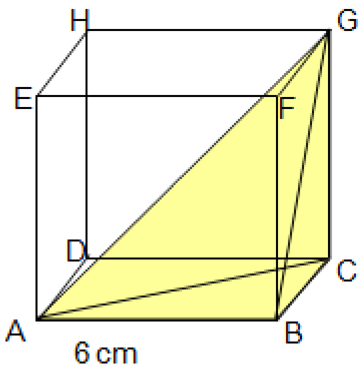
| | | | |
|---|---|---|---|
|   Figure1 |   Figure2 |   Figure3 |   Figure4 |

**La figure 4 est un patron de la pyramide régulière à base carrée.**

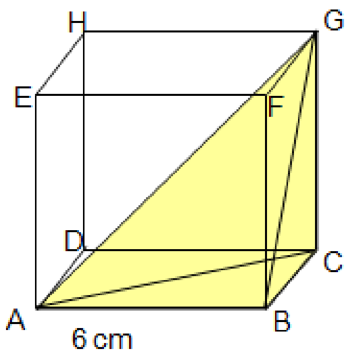




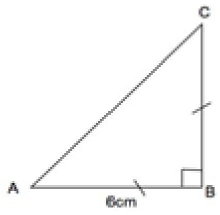

**Exemple de  construction d’un patron de pyramide**

| | |
|---|---|
| Construis le patron de la pyramide GABC inscrite dans le cube ABCDEFGH |   |

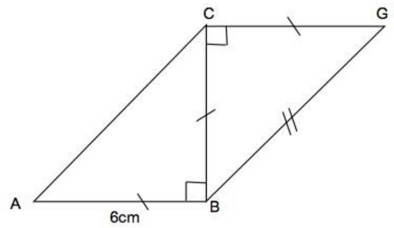
Corrigé



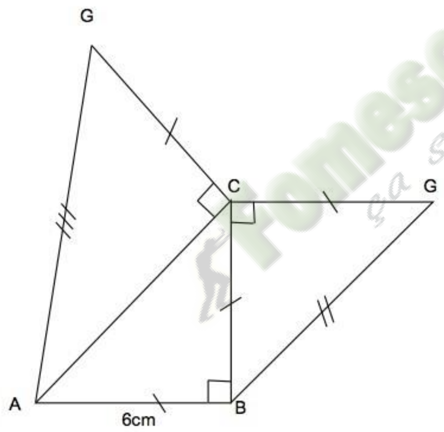

**Etape 1**
On commence par tracer par exemple la base de la pyramide qui est le triangle ABC rectangle et isocèle en B tel que AB=BC= 6 cm.



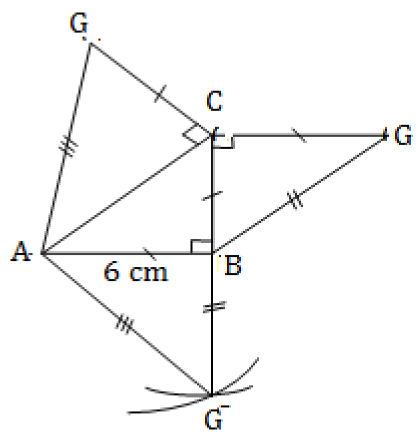

**Etape 2**
On trace ensuite la face de droite qui est le triangle BCG rectangle et Isocèle en C tel que CG= 6 cm




**Etape 3**
On trace ensuite la face arrière qui est le triangle ACG rectangle en C tel que CG = 6 cm




**Etape 4**
On finit en traçant la face de devant qui le triangle ABG. Pour cela, on reporte au compas les longueurs AG et BG déjà construites sur les autres triangles.



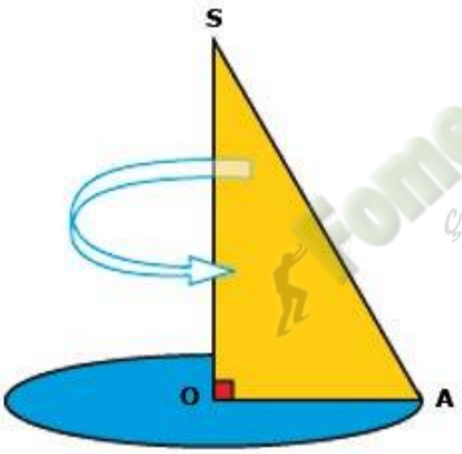
# II. CÔNE DE RÉVOLUTION

**Quelques images de cônes de révolution**

Les parties supérieures de ces châteaux d'eau ont la forme d'un cône de révolution.

## 1. Présentation

Considérons un triangle SOA rectangle en O.





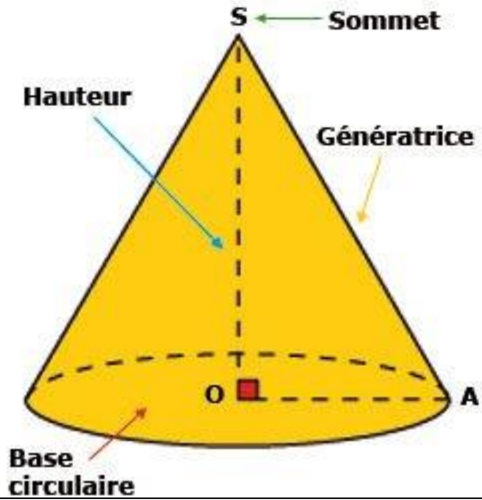

Faisons tourner le triangle SOA rectangle en O autour de la hauteur (SO).
On génère un **cône**. L'hypoténuse d'un tel triangle est appelé génératrice du cône.

Le solide représenté ci-contre est un cône de révolution dont le sommet est S, la base est le disque (D) de centre O et de rayon [OA].

- La droite (SO) est l'axe de révolution du cône.
- Le support du segment $[SO]$ est la hauteur du cône.
- Le segment [SA] est une génératrice de ce cône.

**Remarque**

L'apothème du cône est confondu à sa génératrice.

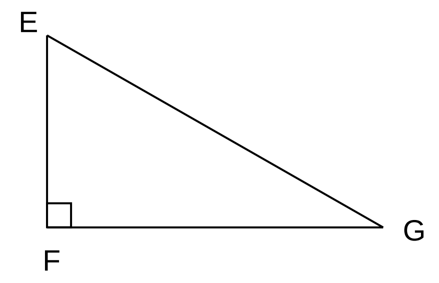


## 2. Hauteur d'un cône de révolution

__Définition__ :
On appelle hauteur d'un cône, la droite qui passe par son sommet et qui est perpendiculaire au plan de sa base.
La distance du sommet au centre O du disque de base s'appelle aussi la hauteur du cône.

__Exercice de fixation__

On donne la figure codée ci-contre.
Complète chacune des phrases suivantes à l'aide de l'une des expressions suivantes :
**une génératrice ; la rotation ; le rayon de la base; la hauteur.**



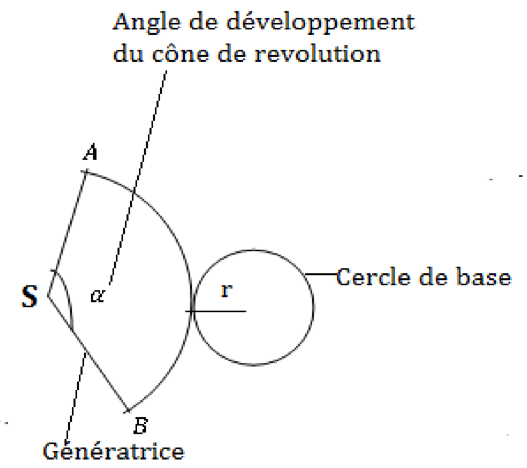

1) Un cône de révolution est engendré par ……………… du triangle EFG autour de la droite (FE).
2) Le segment $[FG]$ est ……………………………………du cône.
3) Le segment $[EG]$ est ……………………………………du cône.
4) La distance FE est ……………………………………du cône.

Corrigé
1) Un cône de révolution est engendré par **la rotation** du triangle EFG autour de la droite (FE).
2) Le segment $[FG]$ est **le rayon de la base** du cône.
3) Le segment $[EG]$ est **une génératrice** du cône.
4) La distance FE est **la hauteur** du cône.

## 3. Patron d'un cône de révolution
**Définition**

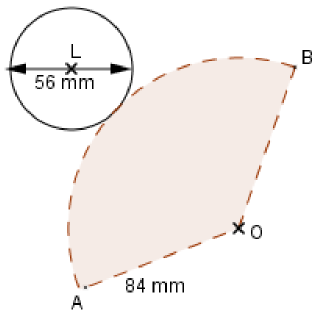
**Définition**
Le patron d'un cône de révolution est composé d'un disque qui est la base du cône et d'un secteur angulaire, qui est la face latérale.
L'angle du secteur angulaire $\alpha$ du patron est l'angle de développement du cône.

$\boldsymbol{\alpha = 360° \times \frac{r}{g}}$ , où $r$ est le rayon du disque et $g$ est la génératrice du cône.
$\alpha$ est en degré.



## Exercice de fixation

La figure ci-cône est un patron d'un cône de révolution.




a) Nomme son sommet et le centre de sa base.
b) Indique le rayon de la base et la longueur des génératrices.

Corrigé

a) Le sommet de de la base est le point O et le centre de la base est le point L.
b) Le rayon de la base est 28 mm .
La longueur des génératrices est 84 mm.

**Remarque**

• La longueur de l'arc $\widehat{AB}$ est égale au périmètre du cercle de base.
• Le patron d'un cône est obtenu en traçant le cercle de base et la surface latérale.
Pour cela, il faut connaître la génératrice $g$, le rayon du disque r et l'angle de développement $\alpha$.

## Exercices de fixation

**Exercice 1**

Un secteur angulaire de mesure 130° et de rayon 3cm est la surface latérale d'un cône de révolution. On donne $\pi = 3{,}14$.
Calcule le périmètre de base P de ce cône.



Corrigé

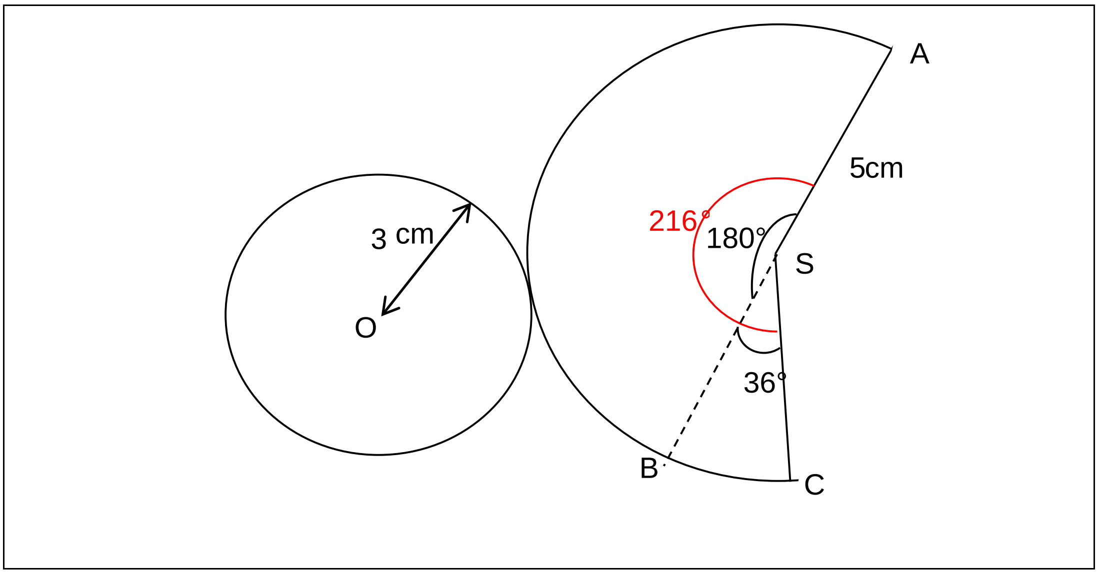
Pour connaître le périmètre il faut connaître le rayon r du disque de la base.
On sait que : $\alpha = 360 \times \frac{r}{g}$, on a : $r = \frac{g \times \alpha}{360}$.
$P = 2\pi r = 2\pi \times \frac{g \times \alpha}{360} = \frac{\pi \times g \times \alpha}{180}$, où $g = 3$ et $\alpha = 130°$.
$P = \frac{3{,}14 \times 3 \times 130°}{180°} = 6{,}80\ cm.$

**Exercice 2**

Réalise le patron d'un cône de révolution dont le diamètre du disque de base est 6 cm et la génératrice est 5 cm.

Corrigé

Calculons l'angle de développement.
$\alpha = 360° \times \frac{r}{g}$, où $r = 3$ et $g = 5$.
$\alpha = 360° \times \frac{3}{5} = 216°$.




## 4. Formules de l'aire latérale et du volume d'un cône de révolution.

• **Aire latérale** ($\mathcal{A}$)

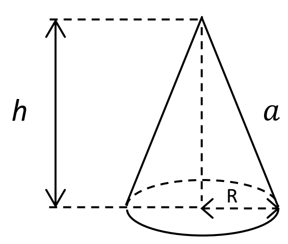
$\mathcal{A} = \frac{\mathrm{P} \times a}{2}$

Où **P** désigne le périmètre de la base et ***a*** la génératrice ou l'apothème.

• **Volume d'un cône de révolution**

$\mathcal{V} = \frac{\mathrm{B} \times \mathrm{h}}{3}$

Où **B** est l'aire de la base et **h** la hauteur du cône.



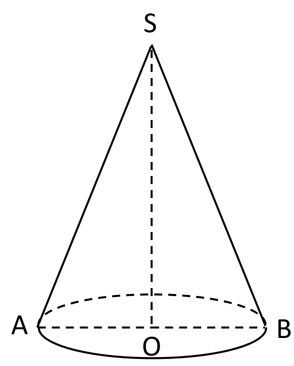



**Remarque** :

L'aire totale $\mathcal{A}_T$ du cône est égale à la somme de l'aire latérale $\mathcal{A}$ et de l'aire $\mathcal{B}$ du disque de base.
Soit $\mathcal{A}_T = \mathcal{A} + \mathcal{B}$.

**Exercice de fixation**

L'unité de longueur est le centimètre.
La figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, représente un cône de révolution de sommet S, de hauteur SO et de base, le disque de diamètre AB.
On donne : $AB = 10$ , $SO = 12$ et SA=13.
1) Calcule l'aire latérale de ce cône.
2) Calcule le volume de ce cône.



Corrigé

1) Calculons l'aire latérale $\mathcal{A}$ du cône.

$\mathcal{A} = \frac{P \times a}{2}$

Calculons le périmètre de la base.

$P = 2\pi r = 2\pi \times 5 = 10\pi$ cm

L'apothème est $SA$

on a : $a = SA = 13\ cm$

On obtient :

$\mathcal{A} = \frac{10\pi \times 13}{2} = 65\pi\ cm^2$.

2) $V = \frac{B \times h}{3}$

Calculons l'aire de la base.

$B = \pi r^2 = \pi \times 5^2 = 25\pi\ cm^2$

La hauteur est SO.

$h = SO = 12$ cm.

On obtient :

$V = \frac{25 \times 12 \times \pi}{3} = 100\pi\ cm^3$.

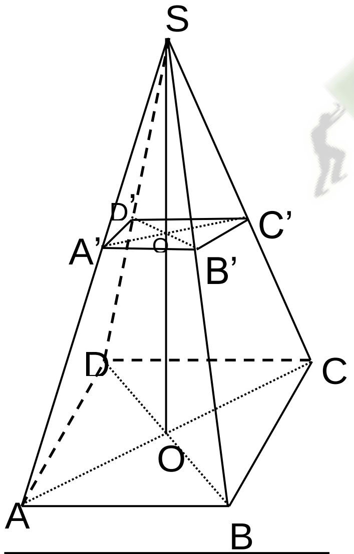
# III. Sections planes

## 1. Section d'une pyramide régulière par un plan parallèle au plan de la base

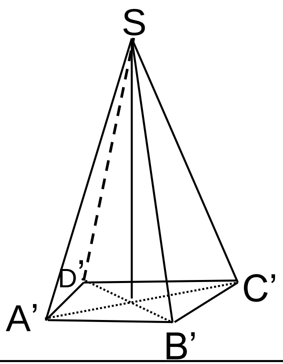
### a) Présentation –vocabulaire

• Sur la figure ci-dessous SABCD est une pyramide régulière à base carrée. A' est un point du segment [SA]. Le plan (P) passant par A' et parallèle au plan (ABC) de la base coupe (SB) en B', (SC) en C' et (SD) en D'.

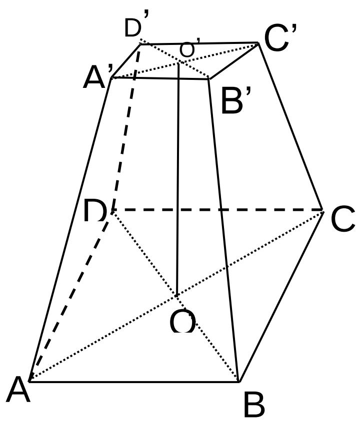
• L'intersection de cette pyramide et du plan (P) est un carré. C'est la section de la pyramide SABCD par le plan (P). On obtient alors une petite pyramide SA'B'C'D' et un tronc de pyramide ABCDA'B'C'D'.




**Grande pyramide**




**Petite pyramide**




**Tronc de pyramide**

**b) Propriété**

La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone de même nature que cette base. Les supports des côtés de ces deux polygones sont parallèles deux à deux.

**c) Propriété de réduction**

Lorsqu'on coupe une pyramide régulière par un plan parallèle au plan de sa base, on obtient une réduction de cette pyramide.
Si l'échelle de réduction est égale au nombre k alors :

- $\dfrac{La\ longueur\ d'un\ segment\ de\ la\ pyramide\ réduite}{La\ longueur\ d'un\ segment\ correspondant\ de\ la\ pyramide} = k.$

- $\dfrac{Aire\ de\ la\ pyramide\ réduite}{Aire\ \ de\ la\ pyramide} = k^2.$

- $\dfrac{Volume\ de\ la\ pyramide\ réduite}{Volume\ \ de\ la\ pyramide} = k^3.$



<u>**Exercices de fixation**</u>

<u>**Exercice 1**</u>

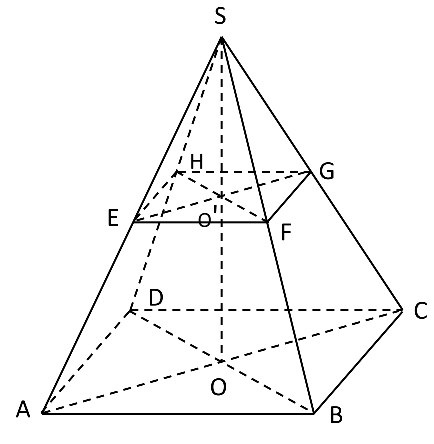
Recopie et complète les phrases ci-dessous avec les groupes de mots suivants :
**les volumes, les longueurs, les aires.**
Dans un agrandissement ou une réduction de rapport $k$
a) ……………. sont multipliées par $k$
b) ……………. sont multipliées par $k^2$
c) ……………. sont multipliés par $k^3$

Corrigé

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport $k$
a) **les longueurs** sont multipliées par $k$
b) **les aires** sont multipliées par $k^2$
c) **les volumes** sont multipliés par $k^3$

<u>**Exercice 2**</u>

L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-contre, SABCD est une pyramide régulière de base, le carré ABCD, de sommet S et de hauteur $SO$. On donne : AB = $6\sqrt{2}$ et SO = 8.
1) Justifie que le volume de la pyramide est 192 cm$^3$
2) On réalise une section parallèle au plan de la base au point $E$ telle que $SE = \frac{3}{4}SA$.
a) Justifie que $EF = \frac{9}{2}\sqrt{2}$.
b) Calcule l'aire du carré EFGH.
c) Calcule le volume du petit cône SEFGH.



Corrigé

| | |
|---|---|
| 1) $V = \frac{B \times h}{3}$<br>$V = \frac{(6\sqrt{2})^2 \times 8}{3}\ cm^3$<br>$= \frac{36 \times 2 \times 8}{3}\ cm^3$<br>$= 12 \times 16\ cm^3$<br>$= 192\ cm^3$<br>2) a) L'égalité $SE = \frac{3}{4}SA$ implique $\frac{SE}{SA} = \frac{3}{4}$.<br>Donc le coefficient de réduction est $\frac{3}{4}$.<br><br>Ainsi $\frac{EF}{AB} = \frac{3}{4}$. D'où $EF = \frac{3}{4}AB$<br>$= \frac{3}{4} \times 6\sqrt{2}$ cm<br>$= \frac{9}{2} \times \sqrt{2}$ cm<br>b) Calcule l'aire $\mathcal{A}$ du carré EFGH.<br>On a : $\mathcal{A}$=EF×EF<br>$\mathcal{A} = (\frac{9}{2} \times \sqrt{2})^2$ cm².<br>$= \frac{81}{4} \times 2\ cm^2$<br>$= \frac{81}{2}\ cm^2$<br>$= 40{,}5\ cm^2$. | c) Calcule le volume du petit cône SEFGH<br>Soit V le volume du grand cône et V' le volume du petit cône<br>On a $\frac{V'}{V} = (\frac{3}{4})^3$<br>Donc $V' = (\frac{3}{4})^3 \times V$<br>$V' = (\frac{3}{4})^3 \times 192 cm^3$<br>$V' = \frac{27}{64} \times 192 cm^3$<br>$V' = \frac{27 \times 192}{64}\ cm^3$<br>$V' = 81\ cm^3$<br>Le volume du petit cône est 81 $cm^3$. |

## 2. Section d'un cône de révolution par un plan parallèle au plan de la base

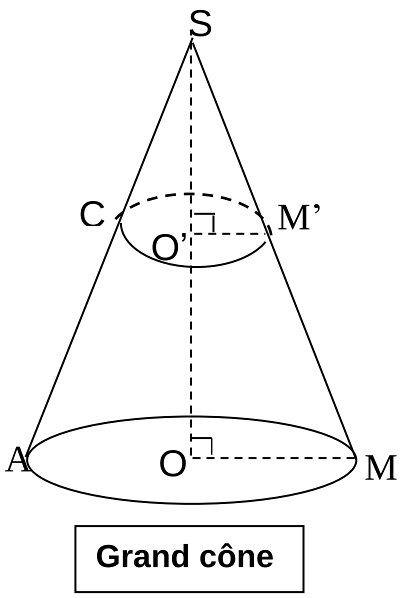
### a) Présentation –vocabulaire

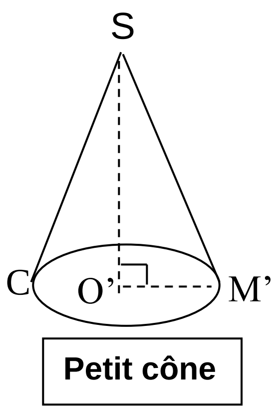
On considère un cône de révolution de sommet S, de base le disque de centre O et de diamètre [AB].

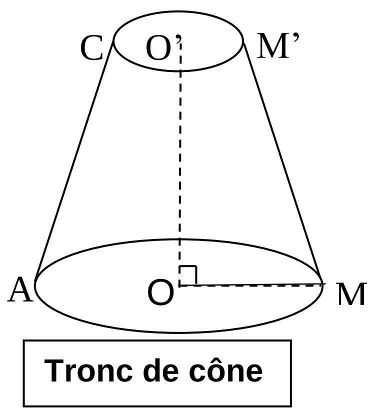
• C est un point de la génératrice [SA]. Le plan (P) passant par C et parallèle au plan de la base du cône coupe la génératrice [SM] en M'.

• L'intersection du cône et du plan (P) est un disque. C'est la section du cône par le plan (P).

On obtient un petit cône de sommet S, de base le disque de centre O' et un tronc de cône.



**b) Propriété**

La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est un disque.

**c) Propriété de réduction**

Lorsqu'on coupe un cône de révolution par un plan parallèle au plan de sa base, on obtient une réduction de ce cône.

Si l'échelle de réduction est égale au nombre k alors :

- $\frac{La\ longueur\ d'un\ segment\ du\ cône\ réduit}{La\ longueur\ d'un\ segment\ correspondant\ du\ cône} = k$

- $\frac{Aire\ du\ cône\ réduit}{Aire\ \ du\ cône} = \ k^2$

- $\frac{Volume\ du\ cône\ réduit}{Volume\ \ du\ cône} = \ k^3$

<u>**Exercices de fixation**</u>

<u>**Exercice 1**</u>

Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des affirmations suivantes :

| Affirmations | Réponses |
|---|---|
| La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est un rectangle. | |
| Si on réduit un cône de révolution en multipliant les longueurs par $\frac{2}{3}$ alors son volume est multiplié par $\left(\frac{2}{3}\right)^3$. | |
| La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est un disque. | |

Corrigé

| Affirmations | Réponses |
|---|---|
| La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est un rectangle. | Faux |
| Si on réduit un cône de révolution en multipliant les longueurs par $\frac{2}{3}$ alors son volume est multiplié par $\left(\frac{2}{3}\right)^3$. | vrai |
| La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est un disque. | Vrai |

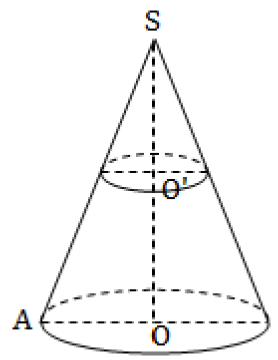
<u>**Exercice 2**</u>

On considère un cône de révolution de sommet S et de base, le disque de centre O. On donne :
$OA = 3\ cm; SO = 10\ cm$

1) Justifie que le volume $V$ du cône est $30\pi\ cm^3$

2) On coupe le cône par un plan parallèle au plan de la base. Ce plan passe par le point O' du segment [SO] tel que : $SO' = \frac{2}{3}SO$

Calcule le volume V' du petit cône.



Corrigé

1) On sait que: $V = \frac{B\times h}{3}$

$= \dfrac{\pi r^2 \times SO}{3}$

$= \dfrac{9 \times 10}{3}\pi\ cm^3$

$= 30\pi\ cm^3$

$V = 30\pi\ cm^3$.

2) Calculons le volume $V'$ du cône réduit :

On a : $\frac{SO'}{SO} = \frac{2}{3} = k$

On a

On a $\frac{V'}{V} = (\frac{2}{3})^3$

Donc V' $= (\frac{2}{3})^3 \times$V

V' $= (\frac{2}{3})^3 \times 30\pi\ cm^3$

V' $= \frac{8}{27} \times 30\pi\ cm^3$

V' $= \frac{8\times 10\pi}{9}\ cm^3$

V' $= \frac{80\pi}{9}\ cm^3$.

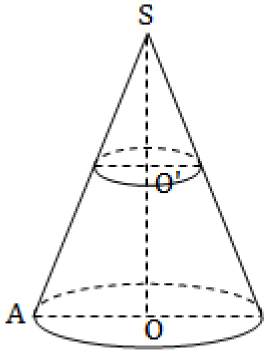
## 3) Tronc d'une pyramide ou d'un cône de révolution

**Propriété.**

Si $A_G$ désigne l'aire latérale de la grande pyramide (ou du grand cône) et $A_P$ désigne l'aire latérale de la pyramide réduite (ou du cône réduit).
L'aire $A_T$ du tronc est : $A_T = A_G - A_P$ .

Si $V_G$ désigne le volume de la grande pyramide (ou du grand cône) et $V_P$ désigne le volume de la pyramide réduite (ou du cône réduit).
Le volume $V_T$ du tronc est : $V_T = V_G - V_P$ .

<u>**Exercice de fixation**</u>

| | |
|---|---|
| On considère les résultats de l'exercice précédent :<br>Le volume du grand cône est : $V_G = 30\pi\ cm^3$ et le volume du petit cône $V_P = \frac{80\pi}{9} cm^3$.<br>Calcule le volume $V_T$ du tronc de ce cône. | <br> |

**Solution**

On a :

$V_T = V_G - V_P$

$V_T = 30\pi\ cm^3 - \frac{80\pi}{9} cm^3$

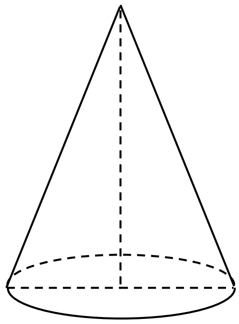
$V_T = (\frac{270\pi}{9} - \frac{80\pi}{9}) cm^3$

$V_T = \frac{(270-80)\pi}{9}\ cm^3$

$V_T = \frac{190\pi}{9}\ cm^3$.

## C. SITUATION D'EVALUATION

Avant les examens du BEPC, les élèves d'une classe de 3ème de ton école veulent organiser leur fête de promotion. Ils décident alors de commander une tente de 3 mètres de diamètre et de hauteur 3 mètres qui servira de loge au parrain le jour de la manifestation. Une commission de proposition du patron de ce cône est mise en place et tu en fais partie. Par ailleurs, le comité dispose d'un don de bâche de 40 mètres carrés pour la confection de la tente. Le comité veut savoir si la bâche disponible suffira pour recouvrir la tente.
1) Construis le patron du cône sur une feuille avec la reproduction réelle. (On prendra : 1cm pour 1mètre)
2) Dis si le comité d'organisation dispose de suffisamment de bâche pour la commande de sa tente. Justifie ta réponse.



Corrigé

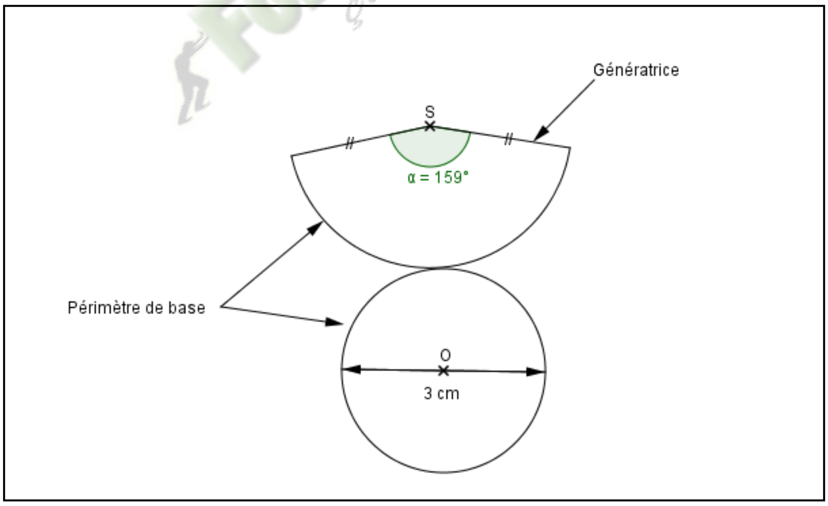
1) On a :

- Le périmètre de base est : $P = 2 \times \pi \times r = 2 \times \pi \times 1{,}5 = 9{,}4\ m$.

- La génératrice $g$ est telle que : $g^2 = h^2 + r^2 = 3^2 + 1{,}5^2 = 11{,}25$ ,donc $g = 3{,}4\ m$.

- L'angle de développement $\alpha = 360 \times \frac{r}{g} = 360 \times \frac{1{,}5}{3{,}4} = 159°$.

On obtient le patron suivant :




2) L'aire latérale du cône est $A_l = \frac{P \times g}{2} = \frac{9{,}4 \times 3{,}4}{2} = 30{,}08\ m^2$.

L'aire de la base est $B = \pi \times r^2 = \pi \times 1{,}5^2 = 7{,}1\ m^2$.

Donc l'aire totale est $A = 30{,}08 + 7{,}1 = 37{,}18\ m^2$.

Comme $37{,}18\ m^2 < 40\ m^2$, alors le comité d'organisation dispose de suffisamment de bâche pour la commande de sa tente.

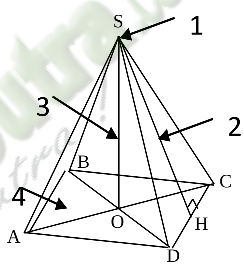
# D. EXERCICES

## D-1 Exercices de fixation

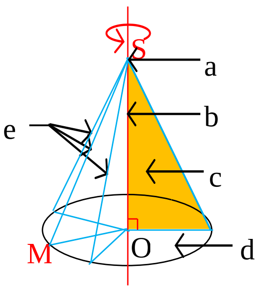
### Exercice 1
Réponds par Vrai si l'affirmation est juste ou par faux si elle fausse:

| | Affirmations | Réponses |
|---|---|---|
| 1 | On appelle hauteur du cône de révolution, le segment de support perpendiculaire à la base issu du sommet | |
| 2 | La base d'un cône est un cercle | |
| 3 | Le rayon d'un cône de révolution est le rayon de la base | |
| 4 | Le volume d'un cône de révolution s'obtient en multipliant l'aire de la base par la hauteur | |
| 5 | Lorsque la base d'une pyramide est un carré ou un triangle équilatéral, la pyramide est appelée pyramide régulière | |

### Exercice 2
Complète les numéros des flèches par : apothème, génératrice, sommet, hauteur, surface latérale, base.



Pyramide régulière



Cône de révolution



### Exercice 3

Complète le tableau suivant qui concerne des pyramides régulières à base carrée, de coté c, de hauteur h, d'aire de base B et de volume V.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| h | 12 cm | ……cm | 0,6 m | ………dm |
| c | 50cm | ……cm | ……dm | 1,7 dam |
| B | …….dm$^2$ | 144 cm$^2$ | ……..dm$^2$ | …..m$^2$ |
| V | ……dm3 | 0,624 dm3 | 242 dm3 | 433,5 cm3 |

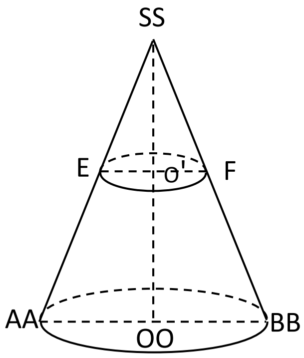
### Exercice 4
Réalise le patron d'un cône de révolution ayant pour diamètre de base 12 cm et pour apothème de longueur 18 cm.

### Exercice 5
Le volume d'une pyramide régulière à base carrée est 25 dm3 et le coté du carré est 25 cm. Calcule la hauteur de la pyramide.

## D-2 Exercices de renforcement / Approfondissement

### Exercice 6

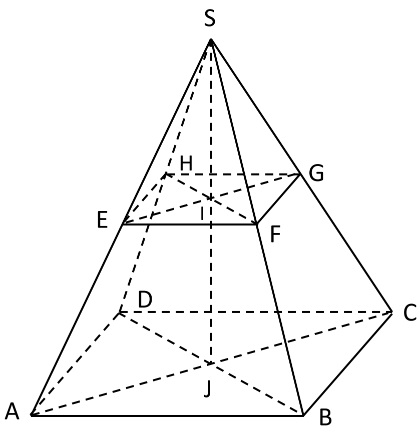
L'unité de longueur est le centimètre.
La base d'un cône de sommet S est un disque de diamètre [AB] et $E \in [SA]$.
Le plan parallèle à la base et contenant E coupe (SB) en F.
On donne : $SA = 13$ ; $AB = 10$ et $SE = 9$.
1- Justifie que $SO = 12$.
2- Calcule l'aire latérale du grand cône.
3- Justifie que le coefficient de réduction $k = \frac{9}{13}$
4- Calcule l'aire latérale du petit cône.
5- Calcule l'aire latérale du tronc de cône.
6- Justifie que $SO' = \frac{108}{13}$ et $EO' = \frac{45}{13}$
7- Calcule le volume du tronc de cône.




### Exercice 7

SABCD est une pyramide régulière à base carrée.
Le plan parallèle à la base qui passe par le milieu E de [SA] coupe les arêtes [SB] ; [SC] et [SD] respectivement en F ; G et H.
On donne $AB = 12$ cm et $SJ = 18$ cm.
1) Justifie que $EF = 6$ cm.
2) Calcule le volume Vg de la pyramide SABCD.
3) Justifie que le coefficient de réduction $k = \frac{1}{2}$
4) Déduis-en le volume Vp de la pyramide SEFGH.

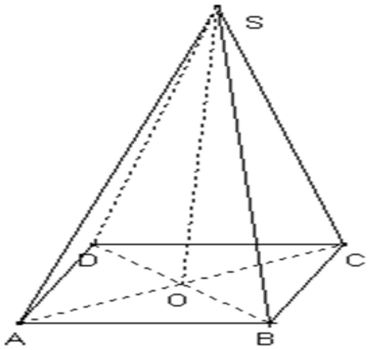





## D-3 Exercices d'approfondissement

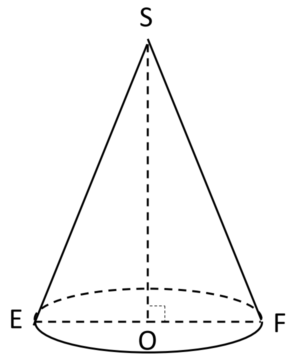
### Exercice 8

L'unité est le centimètre.
SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de base, le carré ABCD de centre O.
On donne $AS = 9$ ; $AB = 6$ et $AC = 6\sqrt{2}$
Justifie que le triangle SAO est rectangle en O.
Démontre que $SO = 3\sqrt{7}$.
Calcule le volume de cette pyramide.



## Exercice 9

L'unité de longueur est le centimètre. SEF est un cône de révolution de hauteur [SO] et de base, le disque de diamètre [EF].
On donne : SE $= 7$ ; son aire latérale A $=$ $43{,}4\ \text{cm}^2$ et $\pi \approx 3{,}1$
1) Calcule le rayon R de sa base.
2) Calcule sa hauteur SO.
3) Calcule le volume V de ce cône.




## Exercice 10

L'unité est le centimètre.
ABCDEFGH est un cube dont l'arête mesure 3 cm.
K est le milieu du segment [BF].
1) Justifie que le triangle ABD est rectangle et isocèle.
2) Justifie que $DB = 3\sqrt{2}$.
3) Calcule FD.
4) Construis en vraie grandeur le triangle FBD rectangle en B.
5) $I$ est le centre du carré ABCD.
Justifie que I est le milieu de [BD].
6) a) Justifie que dans le triangle FDB, (KI) et (FD) sont parallèles.
b) Calcule $KI$.
7) Calcule le volume V de la pyramide KABCD.