FOMESOUTRA

ÇA SOUTRA !!!

COURS DE MATHS

SECONDE C

2nde C

1ière édition

BY TEHUA

2025

MATHÉMATIQUES __ PROGRESSION 2nde C __ 2024-2025

Volume horaire annuel : 150 heures *(5 heures par semaine)*

Trimestre	*Mois*	*Sem.*	*Leçons*	*Vol. hor.*	*Taux d'exécution*
		1	1. Vecteurs et points du plan	9 h	3,57 % (5/140)
	Septembre	2			6,43 % (9/140)
			Régulation	1 h	7,14 % (10/140)
		3	2. Ensemble des nombres réels	11 h	10,71 % (15/140)
		4			14,28 % (20/140)
1er Trimestre		5			15 % (21/140)
			Régulation	1 h	15,71 % (22/140)
	Octobre		3. Utilisation des symétries et translations	7 h	17,86 % (25/140)
		6			20,71 % (29/140)
			Régulation	1 h	21,43 % (30/140)
		7	4. Généralités sur les fonctions	9 h	25 % (35/140)
Devoir de niveau		8			27,86 % (39/140)
			Régulation	1 h	28,57 % (40/140)
		9	5. Droites et plans de l'espace	11 h	32,14 % (45/140)
	Novembre	10			35,71 % (50/140)
		11			36,42 % (51/140)
			Régulation	1 h	37,14 % (52/140)
			6. Fonctions polynômes et fractions rationnelles	7 h	39,28 % (55/140)
		12			42,14 % (59/140)
			Régulation	1 h	42,86 % (60/140)
	Décembre	13	7. Angles inscrits	5 h	46,43 % (65/140)
		14	*Régulation*	1 h	47,14 % (66/140)
2e Trimestre			8. Angles orientés et trigonométrie	11 h	50 % (70/140)
		15			53,57 % (75/140)
		16			55 % (77/140)
			Régulation	1 h	55,71 % (78/140)
	Janvier		9. Statistique à une variable	7 h	57,14 % (80/140)
		17			60,71 % (85/140)
Devoir de niveau		18	*Régulation*	1 h	61,43 % (86/140)
			10. Produit scalaire	11 h	64,28 % (90/140)
		19			67,86 % (95/140)
	Février	20			69,28 % (97/140)
			Régulation	1 h	70 % (98/140)
			11. Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$	9 h	71,43 % (100/140)
		21			75 % (105/140)
		22			76,43 % (107/140)
			Régulation	1 h	77,14 % (108/140)
	Mars		12. Homothéties	7 h	78,57 % (110/140)
		23			82,14 % (115/140)
3e Trimestre		24	*Régulation*	1 h	82,86 % (116/140)
			13. Étude de fonctions élémentaires	11 h	85,71 % (120/140)
		25			89,28 % (125/140)
		26			90,71 % (127/140)
			Régulation	1 h	91,43 % (128/140)
	Avril		14. Rotations	7 h	92,86 % (130/140)
Devoir de niveau		27			96,43 % (135/140)
		28	*Régulation*	1 h	97,14 % (136/140)
			15. Inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	3 h	99,28 % (139/140)
			Régulation	1 h	100 % (140/140)
	Mai	29	*Révisions*	10 h	
		30			

NB : La régulation consiste à mener des activités de rémédiation relativement aux contenus de la leçon.
À cette occasion, le professeur mènera également des activités permettant d'évaluer et de renforcer les acquis des élèves.
C'est le cumul du temps de régulation qui fait 1h. Le professeur peut en faire des séances de travaux dirigés.

Remarque :

- ⇨ Le respect de la progression est obligatoire afin de garantir l'achèvement du programme dans le temps imparti et de permettre l'organisation des devoirs de niveau.
- ⇨ Les volumes horaires indiqués comprennent les cours, les exercices et les travaux dirigés (75%) et IE, DS et comptes rendus (25%).

M.E.N.A.
DIRECTION DE LA PÉDAGOGIE ET DE LA FORMATION CONTINUE
Coordination Nationale Disciplinaire de Mathématiques
Le Coordonnateur National

Jean-Marie KOFFI

Leçon 1 : VECTEURS ET POINTS DU PLAN

COMPETENCE : 3

THEME : GEOMETRIE DU PLAN

Leçon 1 : Vecteurs et points du plan

Nombre de séances : 8h+2h=10h

Tableau des habiletés et contenus

Habiletés	Contenus
♦ Connaitre	- La définition d'une combinaison linéaire de vecteurs - La définition de deux vecteurs colinéaires - La définition de la norme d'un vecteur - La définition d'un vecteur unitaire - La définition d'une base orthonormée - La définition de la mesure algébrique d'un couple de points - La définition du déterminant d'un couple de vecteurs - La définition d'un repère du plan - Les règles de calcul sur les vecteurs - La propriété relative à l'existence et à l'unicité du point M tel **(OM)** = **u**, où O est un point et u = un vecteur - La propriété relative à la colinéarité de deux vecteurs - La propriété fondamentale relative aux coordonnées d'un vecteur - L'expression de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée - La caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs
♦ Noter	- Un vecteur en utilisant une lettre minuscule
♦ Ecrire	- Un vecteur comme combinaison linéaire des vecteurs de bases, connaissant les coordonnées de ce vecteur dans une base
♦ Représenter	- Un vecteur connaissant ses coordonnées
♦ Tracer	- Une droite connaissant un de ses points et un de ses vecteurs directeurs
♦ Construire	- le point M tel que **(OM)** = **u** - un représentant d'une combinaison linéaire de vecteurs
♦ Calculer	- Le déterminant de deux vecteurs - La norme d'un vecteur dans une base orthonormée
♦ Déterminer	- Les coordonnées d'un vecteur ou d'une combinaison linéaire de vecteurs dans une base

	- Une équation cartésienne de droite en utilisant le déterminant de deux vecteurs
♦ Décomposer	- Un vecteur en combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires graphiquement ou algébriquement
♦ Justifier	- Que deux droites sont parallèles en utilisant le déterminant de deux vecteurs - Que des points sont alignés en utilisant le déterminant de deux vecteurs
♦ Démontrer	- Qu'un couple de vecteurs est une base du plan vectoriel v - L'alignement de trois points en utilisant la colinéarité de deux vecteurs - Le parallélisme de deux droites en utilisant la colinéarité de deux vecteurs
♦ Simplifier	- Une expression vectorielle en utilisant la relation de Chasles
♦ Traiter une situation	- Faisant appel aux vecteurs et points du plan

Situation d'apprentissage :

Une fille en classe de seconde C à IS Lavoisier se rend au supermarché avec son père à bord d'une voiture munie d'un GPS (Global Positioning system). Le GPS lui indique, entres autres, les trajectoires rectilignes possibles et les coordonnées de différentes positions.

La fille veut s'assurer du parallélisme des tronçons Résidence-Salle de sport et Station d'essence-Supermarché.

Elle présente la photo du GPS matérialisé par la figure ci-contre qui n'est pas en grandeur réelle à ses amis de la classe.

Ceux-ci décident de vérifier le parallélisme des deux tronçons sur la base de coordonnées GPS.

I. VECTEURS

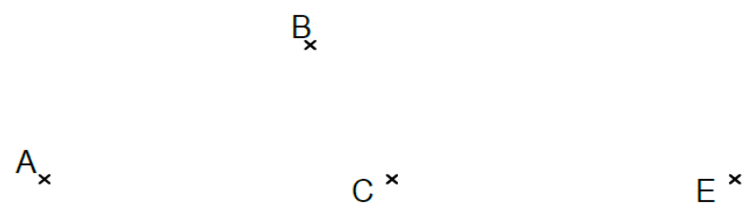
1- Définitions et premières propriétés

a) Notation

Activité

Sur la figure ci-dessous A, B, C et E sont quatre points distincts du plan.

1) Tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$
2) Construire les points D et F tels que : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$



Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut-être aussi noté $\vec{u}$. On a: $\vec{u} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ on dit que les couples (A,B) ; (C,D) et (E,F) sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.

On utilise en général une lettre minuscule surmontée d'une flèche pour désigner un vecteur. Ainsi, on notera: $\vec{a}$, $\vec{b}$,….. $\vec{u}$ $\vec{v}$, $\vec{w}$ un vecteur.

L'ensemble des vecteurs du plan est appelé plan vectoriel et noté $\mathcal{V}$

b) propriétés

Activité

Construire sur la figure ci-dessous le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{U}$

Peut-on trouver un autre point P différent de M tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{U}$?

On admet la propriété suivante :

Propriété fondamentale

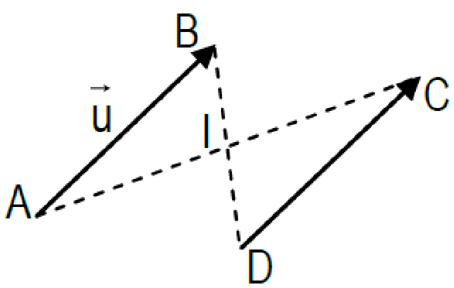
Pour tout point O et tout vecteur u , il existe un et un seul point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{U}$

Propriété : Vecteurs égaux et parallélogrammes

- Dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à dire que le quadrilatère ABCD est un

Parallélogramme.

- ABCD est un parallélogramme équivaut aussi à dire que les segments [AC] et [BD] ont le même milieu.



2- Norme d'un vecteur

Définition

On appelle norme de $\vec{U}$, la distance AB où le couple (A,B) est un représentant de $\vec{U}$. On note $\|\vec{U}\|$.

On a : $\|\vec{U}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$

Propriété

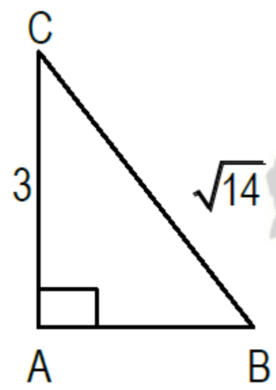
Il existe un et un seul vecteur ayant une direction donnée, un sens donné et une norme donnée.

Remarque :

- $||\vec{u}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$, en effet, $\vec{0}$ a pour norme 0.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$, $||\vec{u}|| = ||\overline{-\vec{u}}||$
- Deux vecteurs de même norme ne sont pas nécessairement égaux.

Exercice d'application

On considère la figure codée ci-dessous. On pose : $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{w}$



Détermine $||\vec{u}||$; $||\vec{v}||$ et $||\vec{w}||$

Vecteur unitaire

Définition

On appelle vecteur unitaire tout vecteur de norme 1

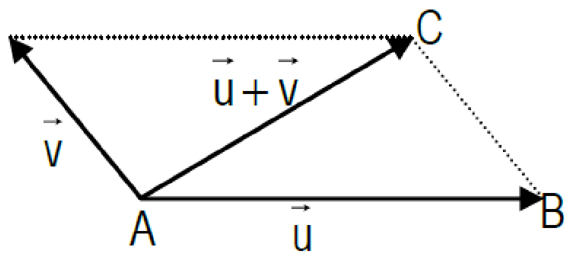
Propriété

Pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul, il n'existe que deux vecteurs unitaires colinéaires à $\vec{u}$. Ces deux vecteurs sont opposés.

- <u>Calcul vectoriel</u>

Egalité de Chasles :

Pour tous points A, B et C on a: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Inégalité triangulaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$

Produit d'un vecteur par un nombre réel

Définition

- Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, λ un nombre réel non nul.

Le vecteur $\lambda\vec{u}$ est le vecteur qui a :

– Pour direction celle de $\vec{u}$;
– Pour sens celui de $\vec{u}$ si λ est positif, celui de $-\vec{u}$ si λ est négatif ;
– Pour norme $|\lambda|||\vec{u}||$;

- On pose, par ailleurs, pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout nombre réel λ : $0\,\vec{u} = \vec{0}$ et $\lambda\vec{0} = \vec{0}$

Règles de calcul

Pour tous vecteurs, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, pour tous nombres réels λ et μ, on a :

(1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; (2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

(3) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$; (4) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

(5) $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda \times \mu)\vec{u}$; (6) $1\vec{u} = \vec{u}$

(7) $\lambda\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$; (8) $\lambda\vec{u} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \lambda \neq 0 \text{ et } \vec{u} \neq \vec{0}$

Exercice d'application

1) A, B, C, D, E, F et P sont des points du plan. Simplifier les expressions suivantes :
   - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DC}$
   - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{FE}$
2) Développer et réduire.
   - $\vec{a} = 7\vec{u} - 4\vec{v} + 3(\vec{u} + 3\vec{w}) - 5(2\vec{w} - \vec{v})$
   - $\vec{b} = 2\vec{u} - 3(5\vec{v} - \vec{u}) + 4(\vec{w} + 2\vec{v})$

3- Combinaisons linéaires

a) Combinaison linéaire

Définition

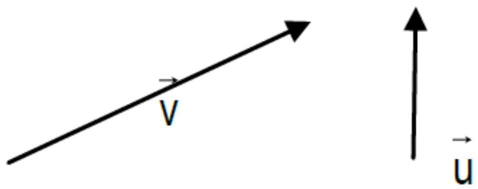
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs. Tout vecteur de la forme $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ où α et β sont des nombres réels est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. α et β sont les coefficients respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice d'application

On donne $\vec{w} = 3(\vec{u} + \vec{v}) - 4(\vec{u} - 2\vec{v}) - 8\vec{v}$

1) Montrer que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis préciser leurs coefficients.

2) Sachant que $\vec{w} = 3\vec{v} - \vec{u}$ construire un représentant de $\vec{w}$ sur la figure ci-dessous



Vecteurs colinéaires

Définition

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires dans les deux cas suivants :

- Lorsque l'un d'eux au moins est le vecteur nul
- Ou bien lorsqu'ils ont la même direction.

Remarque :

Le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel vecteur.

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel λ tel que : $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ou $\vec{u} = \lambda\vec{v}$

Exercice d'application

On donne les vecteurs $\vec{a} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$; $\vec{b} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ et $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

1) Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{a}$ sont colinéaires.

2) Ecrire $\vec{\jmath}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

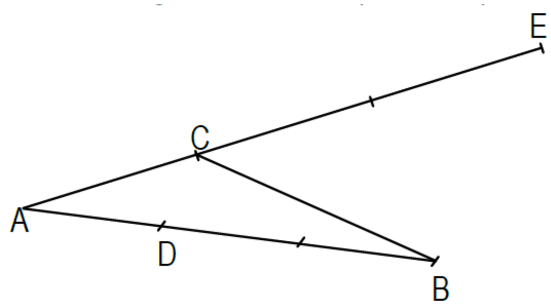
Parallélisme et alignement

Propriété :

- Dire que (AB) est parallèle à (CD) équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$
- Dire que les points distincts A, B et C sont alignés équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

Exercice d'application

Soit ABC un triangle. D et E deux points du plan tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{CA}$



1) Montrer que $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ et en déduire que les points A, C et E sont alignés.

2) Montrer que les droites (BE) et (CD) sont parallèles.

Vecteurs directeurs d'une droite

Définition

On appelle vecteur directeur d'une droite (D) tout vecteur non nul $\vec{u}$ ayant même direction que (D). On dit que (D) est dirigée par $\vec{u}$.

Remarque

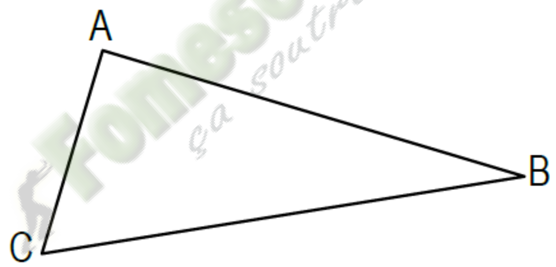
• Si la droite (D) est dirigée par $\vec{u}$, les vecteurs directeurs de (D) sont k$\vec{u}$ où k est nombre réel non nul. Une droite admet donc une infinité de vecteurs directeurs tous colinéaires entre eux.

• Si A et B sont des points de (D) dirigée par $\vec{u}$, alors $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle

Activité

Soit ABC un triangle. Construire les points A', B' et C' les milieux respectifs de [BC]; [CA] et [AB]. Construire le point G, point de concours des droites (AA'); (BB') et (CC').



1) Que représente le point G ?
2) Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$
3) En déduire que $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$ puis $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
4) Montrer que G est unique (On considèrera un autre point M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ et on montrera que $3\overrightarrow{MG} = \vec{0}$)

Propriété

Le centre de gravité d'un triangle ABC est l'unique point G tel que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Exercice d'application

ABC un triangle de centre de gravité G.

Montrer que pour tout point N du plan, $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{NG}$

II. MESURE ALGEBRIQUE

1- Droite orientée

Une droite admet deux vecteurs directeurs unitaires opposés. Choisir l'un d'eux revient à orienter la droite.

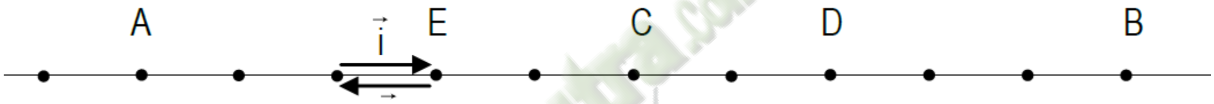
2- Mesure algébrique

a) Définition

Soit (D) une droite orientée par l'un de ces vecteurs unitaires. A et B étant deux points de (D), on appelle mesure algébrique de (A,B) relativement à $\vec{\imath}$, l'unique nombre réel noté $\overline{AB}$ tel que : $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \times \vec{\imath}$

Exemple :

Soit (D) une droite et $\vec{\imath}$ l'un des vecteurs directeurs unitaires. On considère les points A, B, C, D et E suivants :



Compléter :

– relativement à $\vec{\imath}$: $\overline{AB} = \cdots \dots \dots ..$; $\overline{BC} = \cdots \dots \dots ..$; $\overline{CD} = \cdots \dots \dots ..$; $\overline{AE} = \cdots \dots \dots ..$
– relativement à $-\vec{\imath}$: $\overline{AB} = \cdots \dots \dots ..$; $\overline{BC} = \cdots \dots \dots ..$; $\overline{CD} = \cdots \dots \dots ..$; $\overline{AE} = \cdots \dots \dots ..$

Remarque:

- Ces mesures sont dites algébriques car, contrairement aux distances, elles peuvent être négatives.
- $\overline{AB}$ ne peut être définie sans que la droite (AB) ne soit orientée.

Propriété

Soit (D) une droite orientée par l'un de ses vecteurs directeurs unitaires $\vec{\imath}$. Pour tous points A, B et C de la droite (D) et pour tout nombre réel λ on a :

- $|\overline{AB}| = AB$
- $\overline{AB} = -\overline{BA}$
- Lorsque A et B sont distincts :
  - $\overline{AB} = AB$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\imath}$ sont de même sens ;
  - $\overline{AB} = -AB$ si et seulement $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\imath}$ sont de sens contraires.
- $\overline{AB} = 0$ si et seulement si A=B
- $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $\overline{AC} = \lambda\overline{AB}$
- $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (c'est la relation de Chasles)

Remarque :

- $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ n'a de sens que si les points A, B et C sont alignés ;
- $AB + BC = AC$ n'est vérifiée que si B appartient $[AC]$

Exercices

III. BASES ET REPERES

1. Base du plan vectoriel V

a) Définition

On appelle base du plan vectoriel V tout couple de vecteurs non colinéaires.

b) Coordonnées d'un vecteur

Propriété fondamentale

Soit $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs non colinéaires. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un et un seul couple de nombres réels (x;y) tel que : $\vec{u} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath}$

Définition

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de V et $\vec{u}$ un vecteur. Le seul couple de nombres réels (x ; y) vérifiant $\vec{u} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath}$ est appelé couple de coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On écrit : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}(x; y)$ dans $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Application :

ABCD est un parallélogramme de centre O.

1) Justifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est une base de V
2) Dans cette base, déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OB}$

c) Norme d'un vecteur dans une base orthonormée

Définition

- Deux vecteurs sont orthogonaux si leurs directions sont perpendiculaires ou si l'un au moins est nul.
- Une base est dite orthonormée lorsqu'elle est constituée de deux vecteurs unitaires orthogonaux.

Propriété

Si $\vec{u}\binom{x}{y}$ dans une base orthonormé, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Remarque :

Cette propriété n'est applicable que dans une base orthonormée.

Exercice d'application

1. ABC est un triangle. Justifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base de V
2. Soit $\vec{V}\binom{3}{4}$ dans la base orthonormée $(\vec{a}, \vec{b})$
   a. Ecrire $\vec{V}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$
   b. calculer$\|\vec{V}\|$ dans la base $(\vec{a}, \vec{b})$

Déterminant de deux vecteurs

Définition

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base de V, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs. On appelle déterminant de $(\vec{u}, \vec{u}')$ relativement à la base $(\vec{i},\vec{j})$, le nombre réel : $xy' - yx'$

On note : $\det(\vec{u}, \vec{u}') = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$

b) <u>Propriété</u>

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Exercice d'application

<u>Exercice 1</u>

Le plan vectoriel $\mathcal{V}$ est muni d'une base orthonormée $(\vec{i};\vec{j})$. Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1) Construire $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$.
2) Calculer le $\det(\vec{u};\vec{v})$ et en déduire que $(\vec{u};\vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.

3- Repères du plan

a) Définition

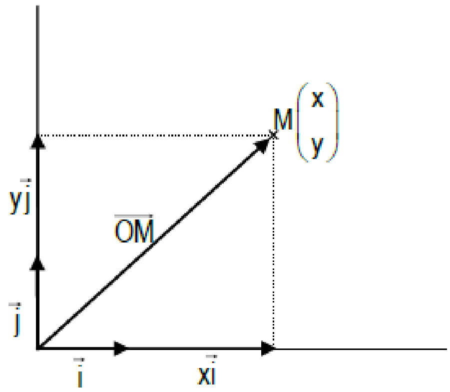
On appelle repère du plan :

- Ou bien un triplet (O, I, J) de points non alignés
- Ou bien un triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est un point et $(\vec{i},\vec{j})$ est une base de V

Le point O est appelé origine du repère.

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ signifie que $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $(\vec{i},\vec{j})$

signifie que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$



Remarque

- Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé si et seulement si la base $(\vec{i},\vec{j})$ l'est.
- $(O, \vec{i})$ est un repère de l'axe des abscisses et $(O, \vec{j})$ est un repère de l'axe des ordonnées.

b) Calculs dans un repère

Propriété : Si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et si G est le centre de gravité du triangle ABC alors $G\begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Leçon 2 : ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

COMPETENCE : 2

THEME : CALCULS ALGEBRIQUES

Leçon 2 : ENSEMBLE DES NOMBRES

Nombre de séances : 10h+2h=12h

Tableau des habiletés et contenus

Habiletés	Contenus
♦ Connaitre	- La définition d'un majorant d'un ensemble non vide de R - La définition d'un minorant d'un ensemble non vide de R - La définition d'un maximum d'un ensemble non vide de R - La définition d'un minimum d'un ensemble non vide de R - La définition de la valeur absolue d'un nombre réel - La distance de deux nombres réels - Les propriétés relatives à la valeur absolue d'un nombre réel
♦ Déterminer	- Un majorant d'un sous-ensemble non vide de R quand c'est possible - Un minorant d'un sous-ensemble non vide de R quand c'est possible - Le maximum d'un sous-ensemble non vide de R quand c'est possible - Un minimum d'un sous-ensemble non vide de R quand c'est possible
♦ Comparer	- Deux nombres réels
♦ Résoudre	- Algébriquement une équation du type x-a = r - Graphiquement une équation du type x-a = r - Algébriquement une inéquation du type x-a r - Graphiquement une inéquation du type x-a = r
♦ Démontrer	- Une propriété en utilisant le raisonnement par l'absurde
♦ Traiter une situation	- Faisant appel aux nombres réels

Situation d'apprentissage :

Pendant les vacances, un élève orienté en classe de seconde C fait des recherches sur les nombres et apprend à maitriser sa calculatrice scientifique qu'il a reçue comme cadeau.

Il découvre le nombre e appelé constance d'Euler et le nombre d'or noté . Ces nombres sont tels que :

Il souhaiterait savoir à quel ensemble appartient chacun des nombres e et puis, donner à l'aide de sa calculatrice un encadrement par deux réels consécutifs d'ordre 5 de leur somme.

Malheureusement, il n'y est pas parvenu.

A la rentrée, il explique ses trouvailles a ses amis de classe qui décident de l'aider en effectuant des calculs sur les nombres réels.

I. ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

1. Ensemble des nombres rationnels et irrationnels

a) Nombres rationnels

Définition

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme de $\frac{a}{b}$ (a ϵ $\mathbb{R}$ et b ϵ $\mathbb{R}^*$).

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$

Exemple :

-3 ; 3 ; -0.5 ; $\frac{4}{5}$; $\frac{-6}{7}$ sont des nombres rationnels.

b) Nombres irrationnels

Définition

Un nombre est irrationnel lorsqu'il n'est pas rationnel.

Les nombres irrationnels ne peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.

Exemples :

π ; $\sqrt{5}$; $\sqrt{3}$

c) Nombres réels

L'ensemble des nombres rationnels et celui des nombres irrationnels est appelé l'ensemble des nombres réels. Il est noté $\mathbb{R}$.

L'ensemble des nombres irrationnels est noté $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

2. principe du raisonnement par l'absurde pour démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$

a) principe du raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition (P) est vraie, on prouve que la négation de cette proposition (non P) est fausse. Pour cela :

– On suppose que (non P) est vraie ;
– On cherche à en déduire une (q) que l'on sait fausse.

Ainsi, lorsque l'on y parvient, on aboutit à une contradiction et on a démontré que (non p) est fausse, c'est-à-dire que (p) est vraie.

b) irrationalité de $\sqrt{2}$

Démontrons par le raisonnement par absurde que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

- Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Il existe donc deux nombres réels a et b tels que :

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

La fraction $\frac{a}{b}$ peut être choisie irréductible.

- $$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \Leftrightarrow a^2 = 2b^2$$

a^2 est du type 2n, donc a^2 est un nombre pair.

a^2 est un nombre pair alors a est également pair.

a peut s'écrire : a = 2r.

Remplaçons a par cette expression. On a :

$$a^2 = 2b^2$$
$$(2r)^2 = 2b^2$$
$$4r^2 = 2b^2$$
$$2r^2 = b^2$$

b^2 est du type 2n, donc b^2 est un nombre pair.

b est également un nombre pair.

Le nombre a est un pair et le nombre b est pair, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse :

La fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible. Alors la proposition que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel est fausse.

Donc $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Rappel sur les calculs dans $\mathbb{R}$

a) Quotients

Définition

Soit a un nombre réel, b un nombre réel non nul.

Le quotient de a par b est l'unique réel x tel que : bx=a. on le note $\frac{a}{b}$

Propriétés

Pour tous nombres réels a, b, c et d tels que b et d ne soient pas nuls, on a :

$$(1) \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$(2) \quad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$(3) \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$$

Si de plus $c \neq 0$

$$(4) \quad \frac{1}{\frac{c}{d}}=\frac{d}{c}$$

$$(5) \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

b) Puissances

Définition

soit a un nombre réel, n un nombre entier naturel non nul.

On pose : $a^n = a \times a \times a \times ... \times a$

De plus si $\neq 0$, on pose : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ et $a^0 = 1$

Propriétés

Pour tous nombres entiers relatifs m, n et pour tous nombres réels non nuls a, b, on a :

$$(1) \quad a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(2) \quad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

$$(3) \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$(4) \quad (ab)^n = a^n b^n$

$(5) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$(6) \quad (-a)^n = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$

a^n

c) racines carrés

Définition

Soit a un nombre réel positif.

A est l'unique nombre réel dont le carré est a

Propriété

Pour tous nombres réels positifs a, b et pour tout nombre entier naturel n, on a :

$(1) \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$(2) \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \; (si\ b \neq 0)$

$(3) \quad \left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}$

Propriété

Pour tout nombre réel positif a et tout nombre réel x, on a :

$x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}\ ou\ x = -\sqrt{a}$

II. ORDRE DANS $\mathbb{R}$

1. Ordre et opérations

a) Définitions

Soit a et b deux nombres réels ;

- a est inférieur ou égal à b signifie que b-a est un nombre réel positif ;
- a est strictement inférieur à b signifie que b-a est un nombre réel strictement positif.

b) Propriétés

Propriété 1

Pour tous nombres réels a, b et c on a :

$(1) \quad a \leq a$

(2) $a \leq b \; et \; b \leq a \Longrightarrow a = b$

(3) $a \leq b \; et \; b \leq c \Longrightarrow a \leq c$

Propriété 2

Soit a et b deux nombres réels.

(1) Pour tout nombre réel c: $a \leq b \;\Longrightarrow a + b \leq b + c$
(2) Pour tout nombre réel $c \geq 0$: $a \leq b \;\Longrightarrow ac \leq bc$
Pour tout nombre réel $c \leq 0$: $a \leq b \;\Longrightarrow ac \geq bc$
(3) En particulier : $a \leq b \;\Longrightarrow -a \geq -b$

Propriété 3

(4) Pour tous nombres réels a, b, c et d : $a \leq b \; et \; c \leq d \;\Longrightarrow a + c \leq b + d$
(5) Pour tous nombres réels a, b, c et d positifs : $a \leq b \; et \; c \leq d \;\Longrightarrow ac \leq bd$

Propriété 4

Pour tous nombres réels a et b positifs :

(6) $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$

(7) $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs : (8) $a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

c) Majorant – minorant – maximum et minimum d'un ensemble

Activité

Soit A = {-3 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 12 ; 17}.

1) Trouver des nombres plus grands que tous les éléments de A

Ces nombres sont appelés……………………………………………………………………………………

2) Quel est le plus grand élément de A ?

Ce nombre est aussi un…………………………………………………………………………………de A.

On dit que……………………….................est le…………………………….………….de l'ensemble A.

3) Trouver des nombres plus petits que ceux de A.

Ces nombres sont appelés…………………………………………………………………………

4) Quel est le plus petit élément de l'ensemble A ?

.Ce nombre est aussi un…………………………………..……………………………………de A. On dit que …………………….…….…..……...… est le………………………………de l'ensemble A.

d) Majorant et minorant

Définition

Soit A un sous ensemble non vide d$\mathbb{R}$e

- On dit qu'un nombre réel M est un majorant de A si M est supérieur ou égal à tous les éléments de A. Un ensemble qui admet un majorant est dit majoré.
- On dit qu'un nombre réel m est un minorant de A si m est inférieur ou égal à tous les éléments de A. Un ensemble qui admet un minorant est dit minoré.

e) Maximum et minimum

Définition

Soit A un sous ensemble non vide de$\mathbb{R}$

- Lorsqu'il existe, le plus grand élément de A est appelé maximum de A.
- Lorsqu'il existe, le plus petit élément de A est appelé minimum de A.

Remarques

- Lorsqu'il existe, le maximum d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$ est unique.
- Lorsqu'il existe, le minimum d'un sous ensemble de$\mathbb{R}$ est unique.
- Soit A un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et M un nombre réel. M est le maximum de A si et seulement si M est un majorant de A appartenant à A.
- Soit A un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et m un nombre réel. m est le minimum de A si et seulement si m est un minorant de A appartenant à A.
- Un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$ n'admet pas nécessairement de maximum
- Un sous-ensemble minoré de $\mathbb{R}$ n'admet pas nécessairement de minimum.

III. VALEUR ABSOLUE

1. Définitions et propriétés

a) Définition

Soit a un nombre réel. Le plus grand des deux nombres réels a et – a est appelé valeur absolue de a et est $|a|$

Propriétés

Activité

Compléter le tableau ci-dessous

a	b	$\lvert a\rvert$	$\lvert b\rvert$	$\lvert a-b\rvert$	$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	$\lvert ab\rvert$	$\lvert a\rvert\times\lvert b\rvert$	$\sqrt{a}^2$	$\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$	$\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert$
-3	5									
14	17									
-7	-11									

Propriétés :

Pour tous nombres réels a et b et pour tout nombre réel strictement positif r on a :

(1) $|a| \geq 0$

(2) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

(3) $|a| = |-a|$

(4) $|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ a \text{ si } a < 0 \end{cases}$

-

(5) $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ ou } a = -b$

(6) $\sqrt{a^2} = |a|$

(7) $|ab| = |a||b|$

(8) $si\ b \neq 0, \left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b|}$

(9) $si\ b \neq 0, \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

(10) $|a+b| \leq |a| + |b|$

$(inégalité\ triangulaire)$

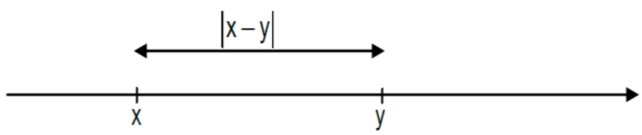
(11) $|a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq a \leq r$

b) Distance de deux nombres réels

Définition

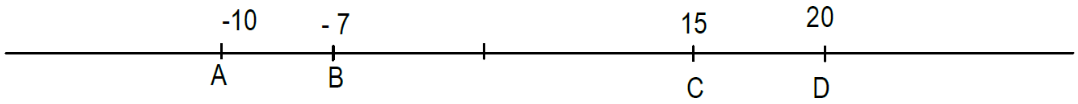
Soit x et y deux nombres réels.

Le nombre réel $|x-y|$ est appelé distance de x et y.



Exercice d'application

Soit (D) la droite graduée ci-dessous :



Calculer les distances suivantes : AB ; BC ; AC et AD.

c) Equation du type $|x-a|=r$

Soit a un nombre réel et r un nombre réel strictement positif.

L'équation : $x \in \mathbb{R}$, $|x-a|=r$, a pour ensemble de solution $\{a-r; a+r\}$

f) Inéquation du type $|x-a| \leq r$

Soit a un nombre réel et r un nombre réel strictement positif.

L'inéquation : $x \in \mathbb{R}, |x-a| \leq r$ a pour solution l'intervalle $[a-r; a+r]$

Leçon 3 : UTILISATION DES SYMETRIES ET TRANSLATION

COMPETENCE 1

THEME : GEOMETRIE DU PLAN

Leçon 3 : UTILISATION DES SYMETRIES ET TRANSLATIONS

Nombre de séances : 6h + 2h=8h

Tableau des habiletés et contenus

Habiletés	Contenus
♦ Construire	- Une figure en utilisant les propriétés des : o Symétries orthogonales ; o Symétries centrales ; o Translation.
♦ Démontrer	- Une propriété en utilisant une symétrie ou une translation.
♦ Trouver	- Un ensemble de points en utilisant une symétrie ou une translation
♦ Traiter une situation	- Faisant appel à l'utilisation des symétries et des translations

Situation d'apprentissage :

Un professeur d'arts plastiques demande à ses élèves de 2^{nd} C de reproduire le pavage ci-dessous à l'aide du motif de base.

Pour mieux réussir leurs productions, ils s'informent auprès de leur professeur de mathématiques. Celui-ci les conseille d'utiliser des translations et des symétries.

Les élèves décident d'approfondir leurs connaissances sur l'utilisation de ces deux applications du plan.

1. Qu'est-ce que le professeur d'art plastique demande-t-il à ses élèves ?
2. Selon leur professeur de mathématiques, de quoi les élèves ont-ils besoin pour réussir leur production.

I. TRANSLATION

1. Définition

On considère un vecteur $\vec{u}$ du plan. La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

On la note : $t_{\vec{u}}$

2. Propriétés

- si le vecteur $\vec{u}$ n'est pas nul, aucun point n'est invariant. Si $\vec{u}$ est nul, tous les points sont invariants.
- $t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$
- Par une translation l'image d'une droite (D) est une droite (D') parallèle à (D);
- Par une translation l'image d'un cercle est un cercle de même rayon ;
- Par une translation l'image d'un segment est un segment de même longueur.

Remarque :

- $t_{\overrightarrow{AB}}(C) = D \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
  $\Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme.
- La translation conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

II. SYMETRIES CENTRALES

1. Définition

On considère un point A du plan. La symétrie centrale de centre A est la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que A est le milieu du segment $[MM']$

On a alors $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM}$

On la note : S_A

2. Propriétés

- Le seul point invariant par une symétrie centrale est le centre de cette symétrie ;
- Par une symétrie centrale l'image d'une droite (D) est une droite (D') parallèle à (D) ;
- Par une symétrie centrale l'image d'un cercle est un cercle de même rayon ;
- Par une translation l'image d'un segment est un segment de même longueur

Remarque :

La symétrie centrale conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

3. SYMETRIE ORTHOGONALE OU AXIALE

Définition

On considère une droite (D) du plan. La symétrie orthogonale d'axe (D) est la droite du plan qui à tout point M associe le point M' tel que (D) est la médiatrice de $[MM']$.

On la note : $S_{(D)}$

Propriétés

- L'ensemble des points invariants par une symétrie orthogonale est l'axe de cette symétrie ;
- Par une symétrie orthogonale l'image d'une droite (L) est une droite (L').
- Par une symétrie orthogonale, l'image d'un cercle est un cercle de même rayon ;
- Par une symétrie orthogonale l'image d'un segment est un segment de même longueur.

Remarque :

La symétrie orthogonale conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

Exercices

Leçon 4 : GENERALITES SUR LES FONCTIONS

COMPETENCE 2

THEME 2 : FONCTION

Leçon 4 : GENERALITES SUR LES FONCTIONS

Nombre de séances : 8h + 2h=10h

Tableau des habiletés et contenus

Habiletés	Contenus
♦ Connaitre	- La définition d'une fonction ; - Les diverses déterminations d'une fonction ; - La définition de l'ensemble de définition d'une fonction ; - La définition de l'image directe d'un ensemble ; - La définition de l'image réciproque d'un ensemble ; - La définition du maximum d'une fonction ; - La définition du minimum d'une fonction ; - La définition du sens de variation d'une fonction ; - La définition de deux fonctions égales sur un intervalle ; - La définition de la représentation graphique d'une fonction.
♦ Reconnaitre	- Une fonction ; - Qu'une courbe peut être la représentation graphique d'une fonction ; - Graphiquement sur un intervalle qu'une fonction admet un maximum, un minimum ; - Graphiquement qu'une fonction est croissante sur un intervalle ; - Graphiquement qu'une fonction est décroissante sur un intervalle ; - Graphiquement qu'une fonction est constante sur un intervalle.
♦ Lire	- Graphiquement l'image d'un nombre réel par une fonction ; - Graphiquement les antécédents, l'image directe puis l'image réciproque d'un intervalle ;
♦ Déterminer	- L'ensemble de définition d'une fonction ; - Graphiquement l'image directe puis l'image réciproque d'un intervalle par une fonction

♦ Calculer	- Algébriquement l'image puis les antécédents d'un nombre réel par une fonction
♦ Démontrer	- Que deux fonctions sont égales sur un sous-ensemble de R ; - Algébriquement qu'un nombre donné est maximum ou minimum d'une fonction
♦ Traiter une situation	- Faisant appel aux fonctions

Situation d'apprentissage :

Dans le cadre de l'étude des activités économiques d'un pays, le professeur d'histoire géographique a fourni aux élèves de la 2nd C, le graphique ci-contre qui donne le taux de chômage de la population active de ce pays de 2007 à 2014. Le travail à faire par les élèves consiste à analyser ce graphique et tirer une conclusion sur l'évolution du chômage dans ce pays.

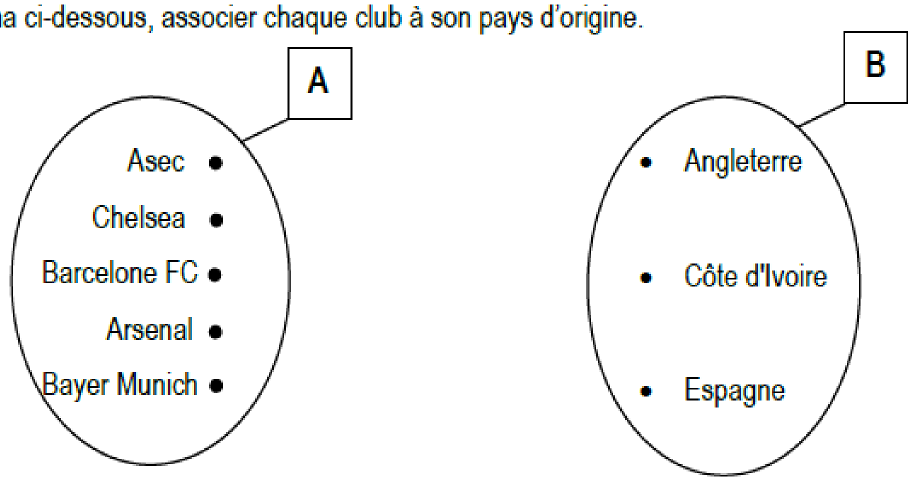
Pour réussir leur production, les élèves décident d'étudier au préalable, les généralités sur les fonctions

I. GENERALITES SUR LES FONCTIONS

1- Définition

<u>Activité 1</u>

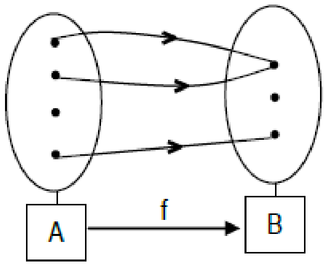
Sur le schéma ci-dessous, associer chaque club à son pays d'origine.



A chaque club, on a associé zéro (0) ou un (1) pays.
Cette correspondance, qui à chaque club associe son pays d'origine s'il existe, est appelé **fonction**.

A et B sont deux ensembles non vides.

On appelle fonction de A vers B toute correspondance qui, à chaque élément de A, associe un ou zéro élément de B.



Vocabulaire et notation

Soit x un élément de A et on désigne par f(x) sa correspondance par f. On dit que f est la fonction de A vers B qui, à x associe f(x) ;

A est l'ensemble de départ de f, B son ensemble d'arrivée. x est la variable, f(x) l'image de x par f. On note :

f : $A \longrightarrow B$

$x \longmapsto f(x)$

- Lorsque v est l'image de u par f, on dit que u est un antécédent de v par f. On écrit v =f(u) .
- Lorsque l'ensemble d'arrivée d'une fonction f est un ensemble de nombres réels, on dit que f est une fonction numérique.
- Lorsque l'ensemble de départ d'une fonction numérique f est un ensemble de nombres réels, on dit que f est une fonction numérique d'une variable réelle.

Remarque

Les applications : symétrie et translation sont des fonctions du plan vers le plan. Les applications affines sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

2- Diverse détermination d'une fonction

Une fonction peut être déterminée :

- Par un tableau ou une table,
- Par une touche d'une calculatrice,
- Par la formule explicite c'est-à-dire l'expression f(x) en fonction de x

3- Ensemble de définition

Activité 2

On considère la fonction g définie de$\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{x+5}$

1) Déterminer si possible, l'image par g de chacun des nombres réels suivants : -5;4;0;-7 ;-13 ;2 et 20.

2) Parmi les nombres ci-dessus, citez ceux qui n'ont pas d'images par g et dites pourquoi.

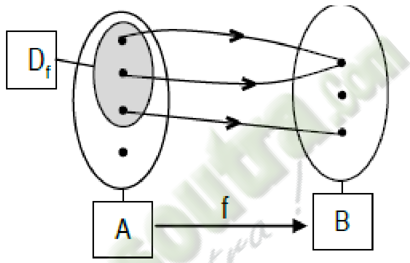
Vocabulaire

- -7 n'a pas d'image par la fonction g ; on dit que g n'est pas définie en -7.
- 4 a une image par la fonction g ; on dit que g est définie en 4.
- Chaque nombre de l'intervalle [-5 ; 20] a une image par g. On dit que g est définie sur [-5 ; 20].
- $[-5; +\infty[$ est le plus grand ensemble sur lequel g est définie.

Définition

f est une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B. On appelle ensemble de définition de f, l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f.

On note habituellement Df l'ensemble de définition de f.



Exemple de détermination de l'ensemble de définition d'une fonction Déterminons l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow x^2 - x + 3$

$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \frac{x+3}{x-1}$

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \sqrt{x+5}$

……

……

……

……

Exercice d'application

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$j(x) = 2x + 1$; $k(x) = \frac{x^2-5x+1}{2x-1}$; $m(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$

4- Représentation graphique

Définition

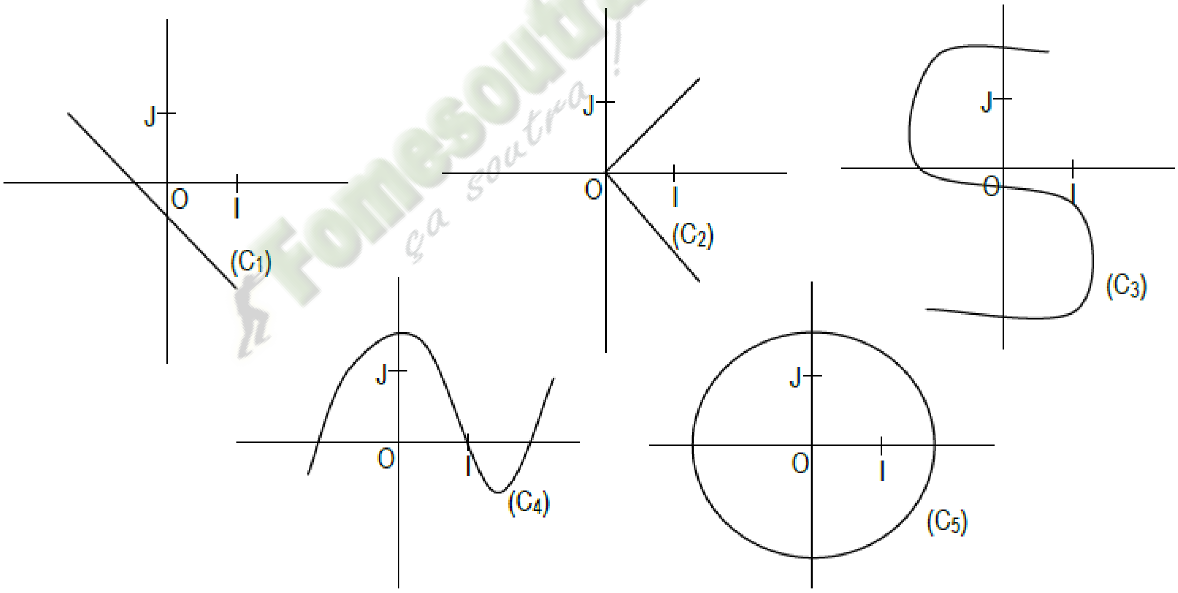
Le plan est muni d'un repère.

f est une fonction numérique d'une variable réelle, d'ensemble de définition Df .

On appelle représentation graphique de f, ou courbe représentative de f l'ensemble des points $M\binom{x}{f(x)}$ où x est un élément de Df.

Exercice d'application

Parmi les schémas ci-dessous, indiquer les courbes qui sont des représentations graphiques d'une fonction. Justifie ta réponse.



5- Fonctions égales sur un ensemble

Activité

On considère les fonctions f et g définies par :f(x)=x-1 et g(x)=$\frac{x^2-1}{x+1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f et g.
2. Justifier que f et g sont définies sur
3. Simplifier g(x) sur son ensemble de définition et comparer f(x) et g(x).

Définition

f et g sont des fonctions définies sur un ensemble E. On dit que les fonctions f et g sont égales sur E (où qu'elles coïncident sur E) lorsque, pour tout élément x de E ; f(x) = g(x)

Remarque

Les représentations graphiques de fonctions égales sur un ensemble coïncident sur cet ensemble.

Exercices

Exercice 1

Soit $f\ x = -x^2+5$ et $g\ x = \dfrac{2x-3}{x-1}$.

1) Calculer l'image de 0 ; – 2 et $\sqrt{2}$ pour chacune des fonctions.
2) Déterminer le ou les antécédents de 1 pour chaque fonction.

Exercice 2

f et g sont des fonctions définies par :

$f\ x = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 \text{-} 5x$ et $g\ x = \dfrac{2}{x^4} - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{5}{x}$.

1) Déterminer D_f et D_g les ensembles de définitions respectifs des fonctions f et g.
2) Calculer l'image par f et g de chacun des nombres suivants : 10^{-1} ; 10 ;-10 et -10^{-1}.

Exercice 3

h est la fonction définie par $h\ x = \dfrac{x+1}{x^2-4}$. ($C_h$) est la courbe représentative de h.

1) Parmi les points suivants, indique ceux qui appartiennent et ceux qui n'appartiennent pas à (C_h) :

$A\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}1\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

2) Déterminer l'ordonnée du point de (C_h) dont l'abscisse est $\frac{1}{3}$, dont l'abscisse est $-\frac{2}{5}$.

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, dire si les fonctions f et g sont égales sur $\mathbb{R}$ ou non. Sinon préciser le plus grand ensemble sur lequel f et g coïncident.

a) $f\ x = \sqrt{x^2}$ et $g\ x = |x|$; b) $f\ x = x$ et $g\ x = \dfrac{x^2+x}{x^2+1}$; c) $f\ x = x$ et $g\ x = \dfrac{x^3-x}{x^2-1}$

Exercice 5

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f\ x = \dfrac{3x}{x^2-2x+1}$; $g\ x = \dfrac{\sqrt{2-x}}{x+4}$; $h\ x = \sqrt{-3x+9}$

$j\ x = \dfrac{5x}{x^2+3}$; $P\ x = \dfrac{1}{X} + \sqrt{X+1}$; $k\ x = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

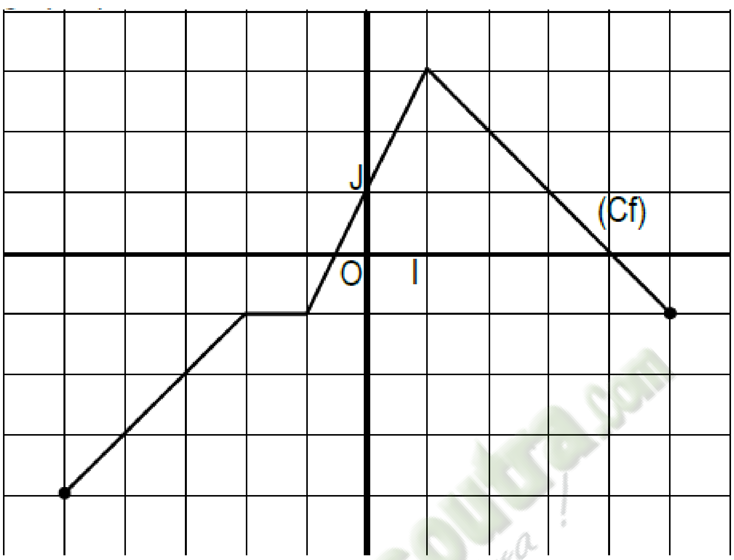
$n\ x = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x-1}}$; $m\ x = \sqrt{x^2+2}$; $r\ x = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$; $s(x) = \dfrac{x^3-2x+1}{4}$

II. ETUDE GRAPHIQUE

1- Lecture d'image et d'antécédent (s) d'un nombre

Activité

Soit (Cf) la représentation graphique d'une fonction f de ℝ vers ℝ.



- Pour lire graphiquement l'image de a c'est-à-dire f(a), on procède ainsi :
  - Tracer la droite (D) d'équation x = a
  - L'ordonnée du point d'intersection de (Cf) et (D) est l'image de a par f.
- Pour lire graphiquement le(s) antécédent(s) d'un nombre b par f on procède comme suit :
  - Tracer la droite (Δ) d'équation y = b. Les antécédents de b sont les abscisses d'intersection de la droite (Δ) d'équation y = b et de (Cf).

1. Donner l'ensemble de définition Df de la fonction f
2. Compléter le tableau ci-dessous.

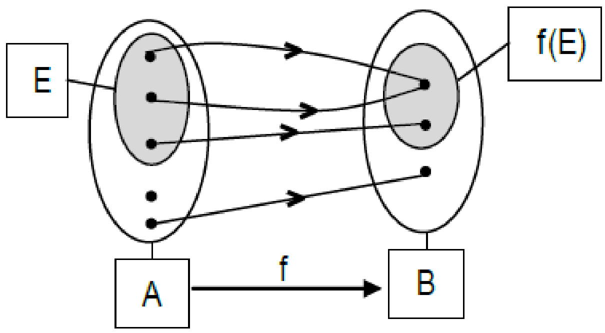
x	-3	-1	0			
f(x)				-4	-3	3

3. Déterminer graphiquement les antécédents par f de 1 ; 0 et 2.

2- Image directe d'un ensemble

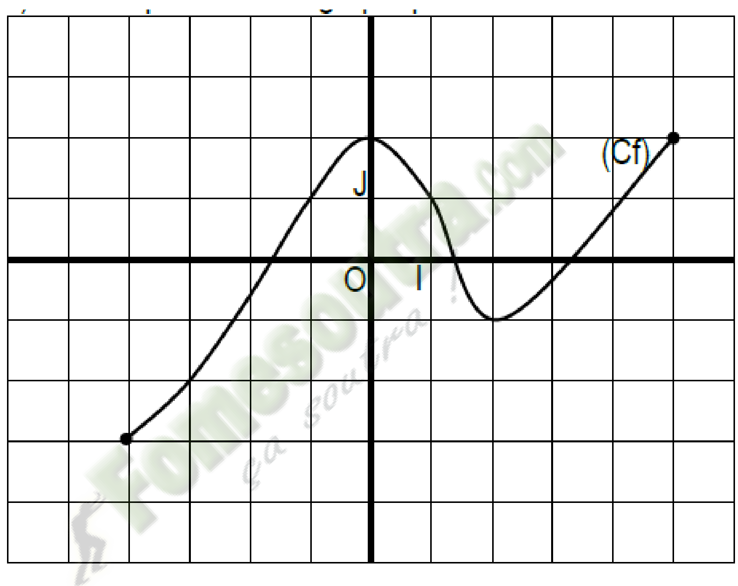
a) Définition

f est une fonction de A vers B et E une partie de A. On appelle image directe de E par f, l'ensemble des images par f de tous les éléments de E. On le note f(E).



b) Lecture de l'image directe d'un ensemble

Sur la figure ci-dessous (Cf) est la représentation graphique d'une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.



1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer sur le graphique les images directes des intervalles [-4 ; 0] et [-3 ; 2].

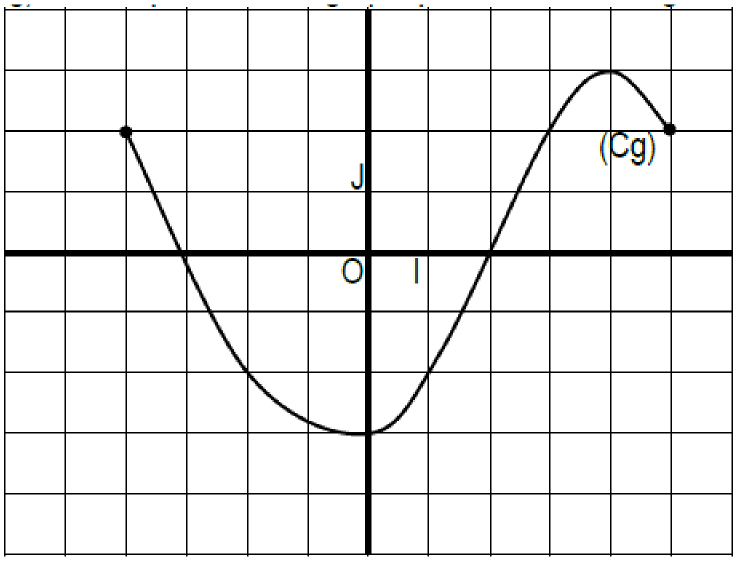
Image réciproque d'un ensemble

a) Définition

f est une fonction de A et vers B et G une partie de B. On appelle image réciproque de G par f, l'ensemble G' des antécédents par f de tous les éléments de G.

b) Lecture graphique de l'image réciproque d'un ensemble

Sur la figure ci-dessous (Cg) est la représentation graphique d'une fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

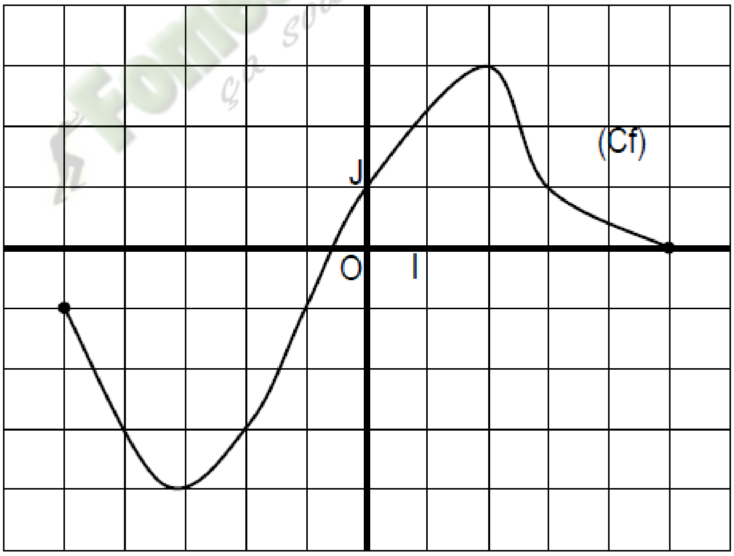


1. Donner l'ensemble de définition de la fonction g.

2. Déterminer sur le graphique les images réciproques des intervalles suivants : [-3 ; 2] ; [-2 ; 2] et [0 ;2].

EXERCICES

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction numérique f.



1. Déterminer graphiquement l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer graphiquement les images de – 4 ;– 3; 0 ; 2 et 3.
3. Déterminer graphiquement les antécédents de -1 ; -3 ; 1 et 3 par f. Déterminer les images directes de : [-3 ;-1] et [- 4; 3].
4. Déterminer les images réciproques : [-3 ;-1] et [1 ; 4].

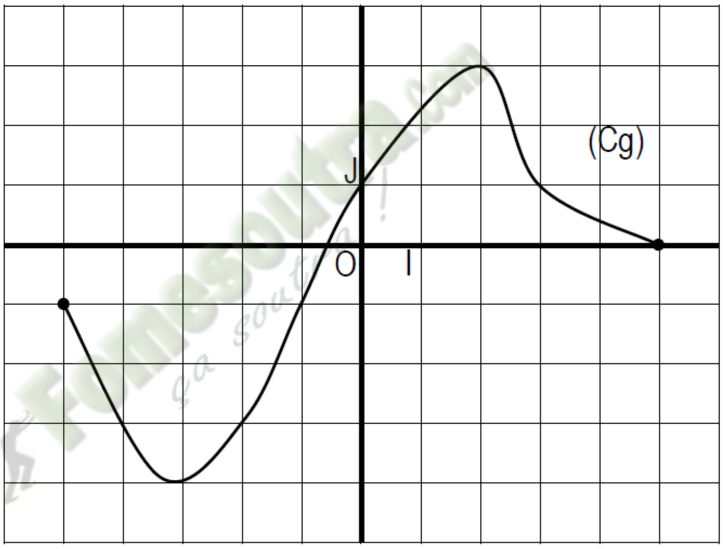
VARIATIONS D’UNE FONCTION

1- Maximum-Minimum d'une fonction.

(Cg) est la représentation graphique d'une fonction numérique g définie sur l'intervalle [– 5 ;5]

a) Déterminer les coordonnées du point le plus haut de la courbe.
b) Déterminer les coordonnées du point le plus bas de la courbe.

On dit que sur l'intervalle [– 5 ; 5] g admet en 2 un maximum égal à 3 et en – 3 minimum égal à – 4.



a) Définition

f est une fonction numérique d’une variable réelle définie sur un ensemble E ; a est un élément de E.

- Lorsque, quel que soit x élément de E, f(a) ≥ f(x) ; on dit que f(a) est le maximum de f sur E.
- Lorsque, quel que soit x élément de E, f(a) ≤ f(x) ; on dit que f(a) est le minimum de f sur E.

b) Détermination algébrique du maximum ou du minimum d'une fonction.

Activité

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par f (x) =$4+\sqrt{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition Df de la fonction f.
2. Démontrer que 4 est le minimum de f sur Df. Pour cela :
   a. Montrer que 4 est un minorant de f sur Df c'est-à-dire : pour tout x ∈ Df , f(x) ≥ 4 .

b. Démontrer que 4 admet un antécédent.

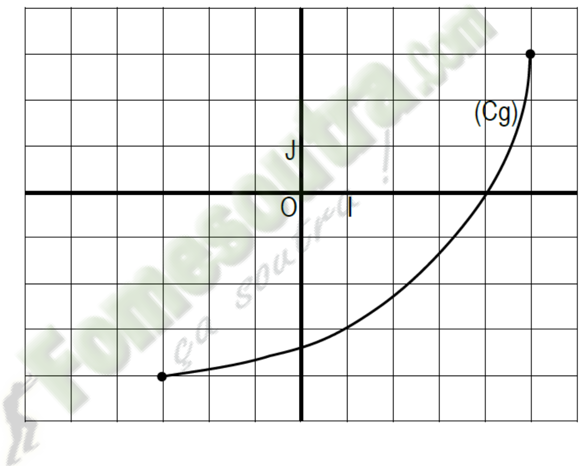
c. Conclure

∀ x ∈ Df ;   f(x) ≥ 4 et f(1)= 4 donc 4 est le minimum de f.

2- Sens de variation d'une fonction.

(Cg) est la représentation graphique d'une fonction g sur l'intervalle [-3 ; 5].

1. Comparer g(2) et g(4).
2. Soit a et b deux réels de [-3 ; 5] tels que a < b,   comparer graphiquement g(a) et g(b).
3. En déduire le tableau de variation de g.



Conclusion :

$\forall\ a \in [-3\,;5]$ et $\forall\ b \in [-3\,;5]$;

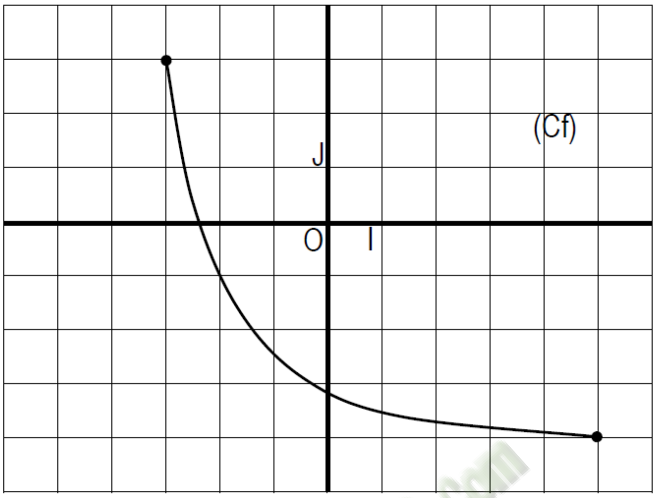
Si a < b alors g(a) < g(b). on dit que g est strictement croissante sur $[-3\,;5]$

Tableau de variation de la fonction g

x	−3		5
f(x)			3
	−4	↗	

6- (Cf) est la représentation graphique d'une fonction f sur l'intervalle [-3;5].

1. Comparer f(2) et f(4).
2. Soit a et b deux réels de [-3 ; 5] tels que a<b, comparer graphiquement f(a) et f(b).
3. En déduire le tableau de variation de f.



Conclusion :

$\forall$ a $\in [-3\,;5]$ et $\forall$ b $\in [-3\,;5]$;

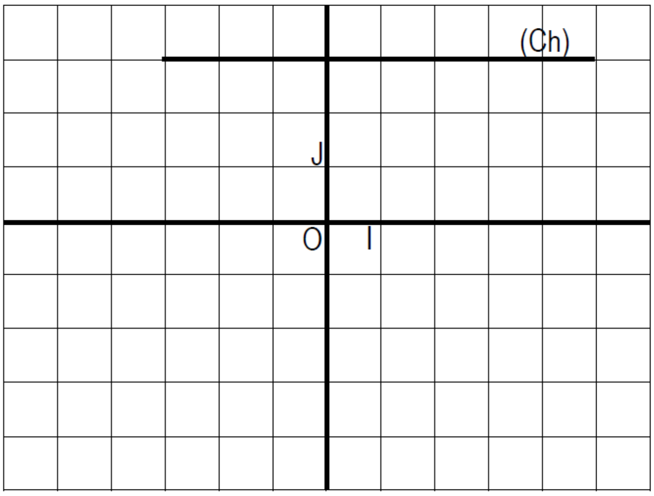
Si a $<$ b alors f(a) $>$ f(b). On dit que g est strictement décroissante sur $[-3\,;5]$

Tableau de variation de la fonction f

x	-3	5
f(x)	3 ↘	-4

7- (Ch) est la représentation graphique d'une fonction h sur l'intervalle [-3 ; 5].

1. Compare h(2) et h(4).
2. Soit a et b deux réels de [-3 ; 5] tels que a < b, comparer, en utilisant (Ch), h(a) et h(b).
3. En déduire le Tableau de variation de la fonction h.



Conclusion :

$\forall$ a $\in [-3\,;5]$ et $\forall$ b $\in [-3\,;5]$;

On a : h(a) = h(b).

On dit que h est une fonction constante sur $[-3\,;5]$

Tableau de variation de la fonction h

x	-3		5
f(x)	3	$\longrightarrow$	3

Définition.

f est une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle K.

- f est une fonction croissante sur K (respectivement strictement croissante sur K) lorsque pour tous éléments u et v de K.
  $u < v \Longrightarrow f(u) \leq f(v)$ (respectivement $u < v \Longrightarrow f(u) < f(v)$)
- f est une fonction décroissante sur K (respectivement strictement décroissante sur K) lorsque pour tous éléments u et v de K.
  $u < v \Longrightarrow f(u) \geq f(v)$ (respectivement $u < v \Longrightarrow f(u) > f(v)$)
- constante sur K lorsque pour tous éléments u et v de K, f(u) = f(v) .
- f est une fonction monotone sur K lorsqu'elle est :

– soit croissante sur K
– soit décroissante sur K.

- f est une fonction strictement monotone sur K lorsqu'elle est :
  – soit strictement croissante sur K
  – soit strictement décroissante sur K.

Remarques

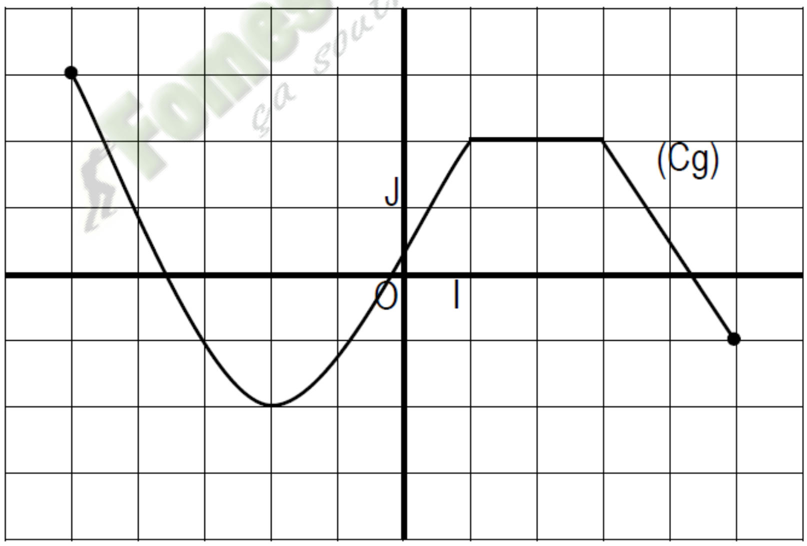
- Toute fonction croissante conserve l'ordre.

- Toute fonction décroissante inverse l'ordre.

Exercice d'application.

Sur la figure ci-contre (Cg) est la représentation graphique d'une fonction g définie sur [-5;5].

1. Déterminer les intervalles sur lesquels g est croissante, décroissante, constante.
2. Etablir le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle [-5;5]



EXERCICES

Leçon 5 : DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

COMPETENCE 1

THEME : GEOMETRIE DE L'ESPACE

Leçon 5 : DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Nombre de séances : 12h + 2h = 14h

Tableau des habiletés et contenus

Habiletés	Contenus
♦ Connaitre	- Les positions relatives d'une droite et d'un plan - Les positions relatives de deux plans - Les propriétés des positions relatives d'une droite et d'un plan - Les propriétés des positions relatives de deux plans - Les propriétés sur les positions relatives de deux droites - Les propriétés relatives à la détermination d'un plan - Les propriétés relatives au parallélisme de deux droites - Les propriétés relatives au parallélisme d'une droite et d'un plan - Les propriétés relatives au parallélisme de deux plans.
♦ Construire	- Une section plane d'un solide de l'espace
♦ justifier	- que deux droites sont coplanaires ou non coplanaires - qu'une droite est sécante à un plan - qu'une droite est parallèle à un plan - que deux plans sont parallèles - que deux plans sont sécants
♦ Traiter une situation	- Faisant appel à la géométrie de l'espace

Situation d'apprentissage :

Le père d'un élève en classe de seconde C fabrique des boites d'emballage de parfum. Ces boites ont la forme de pavé droit. Il a reçu une commande qui nécessite la section du pavé par un plan passant par les points I, J, et K représentés sur la figure ci-contre. Séduit par cette nouvelle boite à créer, l'élève veut découvrir la maquette définitive.

Il explique le projet de son père à ses camarades de classe qui décident d'apprendre à construire la section d'un solide par un plan

Les élèves décident d'approfondir leurs connaissances sur l'utilisation de ces deux applications du plan.

I. DEFINITION ET AXIOMES

1- Définition d'un plan

- $(\mathcal{P})$ est défini par trois points non alignés.
  Illustration :

- $(\mathcal{P})$ est défini par une droite et un point n'appartenant pas à la droite.

  Illustration :

- $(\mathcal{P})$ est défini par deux droites sécantes.

Illustration :

- $(\mathcal{P})$ est défini par deux droites strictement parallèles.
  Illustration :

2- Axiomes

(A_1) par deux points distincts A et B de $\mathcal{E}$, il passe une droite unique notée (AB).

Illustration :

(A_2) par trois points non alignés A, B et C de $\mathcal{E}$, il passe un plan unique noté (ABC).

Illustration :

(A_3) si A et B sont deux points distincts d'un plan $(\mathcal{P})$, alors $(\mathcal{P})$ contient la droite (AB).

Illustration :

(A_4) Tout plan $(\mathcal{P})$ partage l'espace $\mathcal{E}$ en deux demi-espace $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ non vides tels que :

- $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ et $(\mathcal{P})$ sont deux à deux disjoints ;
- $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup (\mathcal{P}) = \mathcal{E}$;
- Si A et B sont deux points de $\mathcal{E}_1$, alors $\mathcal{E}_1$ contient $[AB]$;
- Si A et B sont deux points de $\mathcal{E}_2$, alors $\mathcal{E}_2$ contient $[AB]$;
- Si A et B sont des points appartenant respectivement à $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ alors $[AB]$ et $(\mathcal{P})$ ont un unique point d'intersection C.

Illustration :

(A_5) Les théorèmes de géométrie plane sont vrais dans tout plan de l'espace.

II. POSITIONS RELATIVES DE DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

1- Positions relatives d'une droite et d'un plan

a) Présentation

- (D) est contenue dans $(\mathcal{P})$
  Illustration :

- $(\mathcal{P})$ et (D) sont strictement parallèles.

Illustration :

- (D) et $(\mathcal{P})$ sécantes en O.
  Illustration

b) Définitions

(1) On dit qu'une droite (D) est parallèle à un plan $(\mathcal{P})$ lorsque (D) est incluse dans $(\mathcal{P})$ ou lorsque (D) et $(\mathcal{P})$ sont disjoints.

(2) On dit que le plan $(\mathcal{P})$ est sécant à la droite (D) au point I lorsque l'intersection de (D) et de $(\mathcal{P})$ est réduit au point I.

c) Propriétés

Etant donné une droite (D) et un plan $(\mathcal{P})$, les différentes positions relatives sont:

(1) (D) est incluse dans $(\mathcal{P})$;
(2) L'intersection de (D) et de $(\mathcal{P})$ est réduite à un point ;
(3) (D) et $(\mathcal{P})$ sont disjoints.

2- Positions relatives de deux plans

a) Présentation

- $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont confondus
  $(\mathcal{P}) = (\mathcal{P}')$
  Illustration :

- $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont strictement parallèles.
  Illustration :

- $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécantes
  Illustration :

b) Définitions

(1) Deux plans confondus ou disjoints sont dits parallèles ;

(2) Deux plans non parallèles sont dits sécants, leur intersection est alors une droite.

c) Propriétés

Etant donné deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$, les différentes positions relatives sont :

(1) $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont confondus ;
(2) L'intersection de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ est une droite ;
(3) $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont disjoints.

3- Position relatives de deux droites

a) Définitions

(1) Deux droites sont dites parallèles lorsqu'elles sont confondues ou bien lorsqu'elles sont coplanaires et disjointes.
(2) Deux droites sont dites sécantes lorsque leur intersection est réduite à un point.

b) Propriété

Deux droites non coplanaires sont disjointes.

III. ETUDE DU PARALLELISME

1- Parallélisme de deux droites

- Propriété 1
  Par un point donné de l'espace, il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée.

- Propriété 2
  Si deux droites sont parallèles, tout plan coupant l'une coupe l'autre.

- Propriété 3
  Deux droites sont parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

2- Parallélisme d'une droite et d'un plan

- Propriété 1
  Une droite (D) est parallèle à un plan $(\mathcal{P})$ si et seulement si il existe dans $(\mathcal{P})$ une droite parallèle (D).

- Propriété 2
  Si une droite (D) est parallèle à un plan $(\mathcal{P})$, alors toute droite parallèle à (D) est parallèle à $(\mathcal{P})$.

- Propriété 3
  Une droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur droite d'intersection.

3- Parallélisme de deux plans

- Propriété 1
  Deux plans sont parallèles si et seulement si l'un contient deux droites parallèles à l'autre et sécantes entre elles.

- Propriété 2
  Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.

- Propriété 3
  Par un point donné de l'espace, il passe un et un seul plan parallèle à un plan donné.

- Propriété 4
  Si deux plans sont parallèles :
  (1) Tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèle ;
  (2) Toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre ;
  (3) Toute droite sécante à l'un est sécante à l'autre.

Exercices :

Leçon 6 : FONCTIONS POLYNOMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

COMPETENCE 2

THEME : CALCULS ALGEBRIQUES

Leçon 6 : POLYNOMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

Nombre de séances : 8h + 2h = 10h

Tableau des habiletés et contenus

Habiletés	Contenus
♦ Connaitre	- La définition d'un polynôme - La définition du degré d'un polynôme - La définition d'une fraction rationnelle - La définition d'un zéro d'un polynôme - La propriété relative au produit de polynômes - La propriété relative à la somme de polynômes - La propriété relative à l'égalité de deux polynômes - Les produits remarquables - Le théorème fondamental relatif à la factorisation par x- a - Les différentes écritures d'une fraction rationnelle
♦ Reconnaitre	- Les coefficients d'un polynôme - La forme factorisée d'un polynôme
♦ Vérifier	- qu'un nombre réel donné est un zéro d'un polynôme
♦ Effectuer	- La somme de deux polynômes - Le produit de deux polynômes
♦ Ecrire	- La forme canonique d'un polynôme du second degré
♦ Factoriser	- Un polynôme en utilisant les égalités remarquables - Un polynôme du second degré en utilisant la forme canonique - Un polynôme en utilisant la méthode des coefficients indéterminés - Un polynôme en utilisant la méthode de la division euclidienne
♦ Etudier	- Le signe d'un polynôme du second degré (en utilisant une expression déjà factoriser)
♦ Transformer	- Les fractions rationnelles par une division - Les fractions rationnelles par la méthode d'identification
♦ Traiter une situation	Faisant appel aux polynômes et/ou aux fonctions rationnelles

Situation d'apprentissage :

Une entreprise fabrique des cahiers pour des établissements secondaires.

Estimant que les cahiers leur reviennent chers, les élèves d'un lycée ont invité le directeur de l'entreprise à prononcer une conférence sur la confection des cahiers au sein de leur établissement.

Au cours de son intervention, le directeur a informé les élèves que le cout total, en milliers de francs, de la production de x cahiers s'exprime, en fonction de x, par CM(x) =

De plus le cout moyen de la fabrication est donné par :

Pour mieux comprendre les explications du directeur, les élèves de la seconde C ont décidé d'étudier les polynômes et les fractionnelle.

I. GENERALITES SUR LES POLYNOMES

1- Notion de polynôme

a) Définition

- Soit $a \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}$.
  Toute fonction numérique f de la variable réelle x, définie par $f(x) = ax^n$, est appelé monôme de coefficient a et de degré n.
- On appelle polynôme toute somme algébrique de monômes.

b) Théorème et définitions

Théorème fondamental

Tout polynôme non nul $p(x)$ peut s'écrire de façon unique sous la forme : $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$

Où n est un entier naturel et $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des nombres réels tels que $a_n \neq 0$.

Définitions

Un polynôme écrit sous la $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ est dit réduit et ordonné suivant les puissances décroissantes de x.

- n est appelé degré de P. on le note : d°P.
- Pour tout nombre entier naturel k compris entre 0 et n, a_kx^k est appelé terme de degré k.

c) Egalité de deux polynômes

Propriété

Deux polynômes sont égaux si et seulement si :

- Ils ont même degré ;
- Les coefficients des termes de même degré sont égaux.

2- Zéro d'un polynôme

Activité

On considère le polynôme Q définie par : $Q(x)= x^3-x^2-4x+4$

Compléter le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
Q(x)							

- Cite tous les nombres réels qui annulent le polynôme Q.

Définition

On appelle zéro d'un polynôme P tout nombre réel α tel que : $P(\alpha) = 0$

Remarque :

Déterminer les zéros de P, c'est résoudre l'équation P(x) = 0

Exercice d'application

1) Vérifier que 0 et -3 sont des zéros du polynôme P défini par $P(x)= x^3 + 3x^2$

2) Déterminer les zéros du polynôme G défini par $G(x)= x^2-9$

3- Somme et produit de deux polynômes

Activité

On donne les polynômes P et Q définis par : $P(x)= 2x^4 - 3x^2 + 5$ et $Q(x)=3x^5-2x^4$

1) Calculer P(x) Q(x) et P(x)+ Q(x).
2) Déterminer le degré des polynômes PQ et P+Q.

Propriété : Degré de produit de polynômes.

Le produit de deux polynômes P et Q est un polynôme noté : PQ. On a d°(PQ) = d°P +d°Q

4- Factorisation d'un polynôme

Définition :

Un polynôme mis sous la forme d'un produit de polynômes de degrés supérieurs ou égaux à 1 est dit factorisé.

Produits remarquables : Propriétés

Pour tous nombres réels a et b, on a :

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
(3) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$
(4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
(5) $(a-b)^3= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
(6) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
(7) $(a+b)(a2-ab+b^2)=a^3+b^3$

Exercice d'application :

Factoriser les polynômes suivants :

a) $P(x)=x^3-8$
b) $Q(x)=x^3+1$
c) $K(x)=x^3-6x^2+12x-8$
d) $T(x)=x^2-9+(x-2)(x+3)$
e) $S(x)=8x^3+12x^2+6x+1$

II. POLYNÔMES DU SECOND DEGRE

1- Définition

a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

On appelle polynôme du second degré tout polynôme de la forme ax^2+bx+c

Exemples :

2- Forme canonique d'un polynôme du second degré

Activité

On donne les polynômes du second degré suivants : P(x)=x^2-4x+3 et Q(x)=2x^2+3x-2

Vérifie que $(x-2)^2$-1=P(x) et $2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]=Q(x)$

Ces expressions P(x)= $(x-2)^2$-1 et $Q(x)=2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]$ sont les formes canoniques respectives de P et Q.

Cas général

a, b et c sont des nombres réels avec a ≠ 0

$P(x)=ax^2+bx+c$

$p(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$

$P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$ cette expression de P(x) est sa forme canonique.

Exercice d'application :

Mettre les polynômes ci-dessous sous la forme canonique.

T(x)=x^2+4x-5 K(x)=2x^2-6x-3 P(x)=x^2+x-2

A(x)=-x^2+5x+3 B(x)= 3x^2+6x+2 D(x)= -3x^2+4x-4

Factorisation avec la forme canonique

Activité

Dans chacun des cas ci-dessous le polynôme du second degré P est donné sous forme canonique. Ecrire si possible P sous la forme d'un produit de polynômes de 1er degré.

$a)\quad p(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\qquad c)\quad p(x)=\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{9}$

$b)\quad p(x)=2[(x-2)^2+3]\qquad d)\quad p(x)=3\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{36}{16}\right]$

Remarque :

Si la forme canonique d'un polynôme du second degré P est une somme de deux carrés alors P ne peut-être écrit sous la forme d'un produit de polynômes de degré 1.

Etude du signe d'un polynôme du second degré

Activité

On considère le polynôme p(x)=x-1

1) Résoudre l'équation p(x)=0
2) Résoudre les inéquations suivantes : $p(x) < 0$; $p(x) > 0$
3) Complète le tableau suivant avec le signe – ou +

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$		0	

Le tableau ci-dessus est appelé le tableau de signe du polynôme x-1

Cas général

Soit P(x)=ax +b avec $a \neq 0$

Pour étudier le signe de P(x) . On peut procéder comme suit :

- Rechercher le zéro $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$
- Etablir le tableau de signe

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
P(x)		Signe de – a	0	Signe de a	

Exercice d'application

Etudier le signe du polynôme Q(x)= - 2x + 3 .

Exemple 1

Soit le polynôme B défini $B(x)=x^2-3x+2$

1. Vérifier que B(x)=(x-1)(x-2)
2. Etudier le signe de B(x) suivant les valeurs de x en utilisant un tableau de signe.
   a- Déterminer les zéros de B
   b- Complète le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	....	....	$+\infty$
$x-1$				
$x-2$				
B x				

C- Donne le signe de B(x) suivant les valeurs de x

Exercice d'application

Etudier suivant les valeurs de x, le signe du polynôme du second degré T; défini par :

T(x)= (2x + 1)(4 - 3x)

III. FACTORISATION PAR X - α

Activité

On donne le polynôme P défini par P(x)=x^3+2x^2-x-2

1) Calculer P (-1).
2) Développer, réduire et ordonner(x + 1)(x2 + x- 2)suivant les puissances décroissantes de x.
   P(x) est factorisable ou divisible par x + 1. Le polynôme x^2 + x- 2 est le quotient de P(x) par x +1

Théorème fondamental

Soit P un polynôme et α un nombre réel. α est un zéro de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que pour tout nombre réel x ; P(x)= (x $-\alpha$)Q(x)

Q(x) est appelé quotient de P(x) par x $-\alpha$

Conséquence : un polynôme de degré n a au plus n zéros distincts.

Détermination pratique du quotient de P(x) par x- a

a) Méthode des coefficients indéterminés

Soit P(x)=2x^3-x^2+x-2

1. Vérifie que 1 est un zero de P
   Il existe un polynôme du second degré Q tels que ∀∈ ℝ , p(x)= (x-1) Q(x)
   Determiner Q(x).

Exercice d'application

Soit S le polynôme défini par S(x)=2x^3-3x^2-4

1. Vérifier que 2 est un zéro de S.
2. On a S(x)= (x- 2)Q(x), préciser le degré du polynôme Q.

En utilisant la méthode des coefficients indéterminés, détermine l'expression de Q sachant que $Q(x)= ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des réels tels que $a \neq 0$

Remarque :

Il est très facile de se rendre compte si 0, 1 ou – 1 est un zéro d'un polynôme. Lorsque c'est le cas on dit que le polynôme admet un zéro évident.

Méthode de la Division Euclidienne

Exemple

Soit $p(x)= 2x^3-x^2+x-2$

Déterminons le quotient de P(x) par x-1 en effectuant la division euclidienne.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - x^2 + x - 2 & x - 1 \\ \hline & \\ & \end{array}$$

P(x)= (x- 1)(............

EXERCICES

On considère le polynôme G définie par : $G(x)=x^4+x^3+8x^2+8$

1. Justifier que – 1 est un zéro de G.
2. Déterminer le polynôme Q tel que G(x)= (x + 1)Q(x)
3. Factoriser Q(x).
4. En déduire les zéros de G.

FRACTIONS RATIONNELLES

Définition

Toute fonction numérique de la forme $\frac{P}{Q}$ où P et Q sont deux polynômes, est appelée fraction rationnelle.

Remarque :

La fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ a pour ensemble de définition l'ensemble des nombres réels privé des zéros de Q

Exemples :

Les fonctions définies p $f: x \mapsto \frac{-x^2-2x+3}{x^2-1}$ar $g: x \mapsto \frac{x+2}{x^2-4x+4}$ $h: x \mapsto x^2 - 3x + 1$ sont des fractions rationnelles.

Simplification et étude de signe d’une fraction rationnelle

Activité

Soit la fraction rationnelle f définie par : $f: x \mapsto \frac{-x^2-2x+3}{x^2-9}$

1. Détermine l'ensemble de définition Df de f.
2. Vérifier que 1 est un zéro du numérateur de f
3. Montre que $f(x) = \frac{(x+3)(1-x)}{(x-3)(x+3)}$
4. $\forall \in \mathrm{Df}$, simplifie (x) .
5. Etudie le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x

Autres écritures d’une fraction rationnelle

Activité :

Soit la fraction P définie par : $\mathrm{p(x)} = \frac{2\mathrm{x}^2+\mathrm{x}-3}{\mathrm{x}+1}$

1. Détermine l'ensemble de définition Dp de p.
2. Détermine trois réels a, b et c tels que $\forall \in \mathrm{Dp}, \mathrm{P(x)} = \mathrm{ax} + \mathrm{b} + \frac{c}{\mathrm{x}+1}$

exercices

Leçon 7 : ANGLES INSCRITS

COMPETENCE 1

THEME : GEOMETRIE DU PLAN

Leçon 7 : ANGLES INSCRITS

Nombre de séances : 06h + 2h = 08h

Tableau des habiletés et contenus

Habiletés	Contenus
♦ Identifier	- Deux arcs capables d'un angle donné
♦ Connaitre	- La relation entre un angle inscrit et l'angle au centre associé ; - La propriété relative aux mesures d'un angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente et de l'angle au centre associé ; - La propriété relative aux mesures de deux angles inscrits interceptant deux arcs de mêmes extrémités ; - La propriété relative à la bissectrice d'un angle inscrit et l'arc que cet angle intercepte ; - La propriété relative à l'aire d'un triangle ; - Le théorème des sinus.
♦ Calculer	- Des aires, des longueurs et des mesures d'angles en utilisant les formules d'aire ou le théorème des sinus.
♦ Déterminer	- La mesure d'un angle en utilisant les propriétés des angles inscrits
♦ Construire	- Un arc capable de mesure donnée
♦ Justifier	- Une égalité angulaire en utilisant les propriétés des angles inscrits
♦ Transformer	- Les fractions rationnelles par une division - Les fractions rationnelles par la méthode d'identification
♦ Traiter une situation	Faisant appel aux angles inscrits

Situation d'apprentissage :

Dans ses recherches sur internet, le jeune pedou, élève en seconde C, à découvert le dispositif optique ci-contre qui est composé d'une source lumineuse, d'un un miroir et d'un détecteur. Les trois éléments cités sont situés sur un cercle imaginaire appelé cercle de focalisation de rowland.

Pédou est intrigué par le fait que, bien qu'ayant des trajectoires différentes, les rayons lumineux issus de la source et réfléchissants sur le miroir aboutissent tous sur le détecteur.

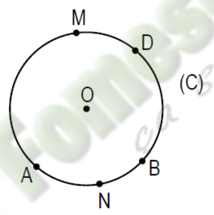
Pour comprendre ce phénomène, il décide avec ses camarades de classe d'étudier les angles inscrits

I. ANGLES INSCRITS

1- Angle inscrit défini par une corde et un point

a) Activité (rappel)

Soit A; B ; D; M et N des points du cercle (C) de centre O.

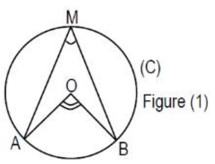


- Que représentent les segments [AB]; [AD], [AM] et [MB] pour le cercle (C)? Les segments [AB]; [AD], [AM] et [MB] représentent des cordes du cercle (C).
- Le segment [AB] défini sur le cercle (C) deux arcs qui sont : Le petit arc AB et le grand arc $\overset{\smile}{AB}$
- L'angle $\widehat{AMB}$ est un angle inscrit dans (C) et intercepte l'arc AB ; l'angle $\widehat{ANB}$ est un angle inscrit dans (C) et intercepte l'arc $\overset{\smile}{AB}$
- L'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre de (C) et intercepte l'arc AB. L'angle $\widehat{AOB}$ est appelé angle au centre associé à l'angle $\widehat{AMB}$.

b) Propriétés

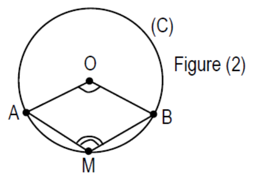
Relation entre angle inscrit et angle au centre associé.

- AMB est un angle inscrit aigu



$$mesAMB = \frac{1}{2}mesAOB$$

- AMB est un angle inscrit obtus

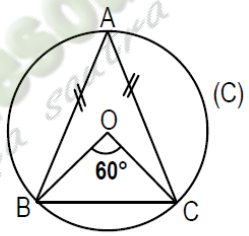


$$mes AMB = 180° - \frac{1}{2} mes AOB$$

Exercice d'application

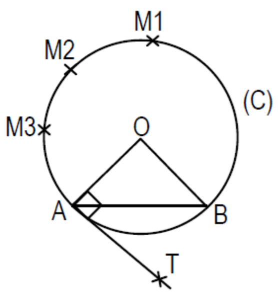
Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle isocèle en A, inscrit dans le cercle (C) de centre O, tel que mes BOC=60°et D un point de BC

1) Quelles sont les mesures des angles du triangle ABC ?
2) Calculer mes BDC



2- Angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente
   a) Activité

Soit (C) un cercle de centre O. [AB] une corde de (C). M est un point variant sur l'arc $\breve{AB}$. M1; M2 et M3 des points du cercle appartenant au grand arc $\breve{AB}$ et $[AT)$ la demi-tangente en A au cercle (C).



- Construire en rouge les angles inscrits AM_1B ; AM_2B et AM_3B et comparer leur mesure.

Mes AM_1B=mes AM_2B=mes AM_3B

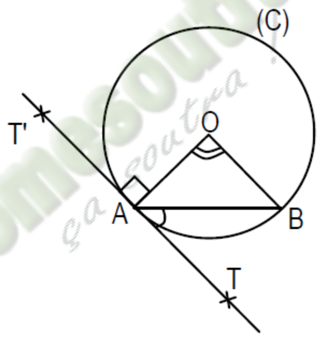
- Lorsque M prend des positions M1; M2 et M3, etc.… de plus en plus proches de A, comment se comportent les demi-droites $[M_1A)$; $[M_2A)$ et $[M_3A)$ par rapport à la demi-tangente $[AT)$?
  Les demi-droites $[M_1A)$; $[M_2A)$ et $[M_3A)$ se rapprochent de plus en plus de la demi-droite $[AT)$
- Nous admettons de ce fait que l'angle TAB est un angle inscrit dans le cercle (C) et de même
- mesure que les angles inscrits AM_1B ; AM_2B et AM_3B . L'angle TAB est défini par une corde [AB] et la demi-tangente [AT).

b) Extension de la notion d'angle inscrit

Propriété

Soit [AB] une corde d'un cercle (C), qui n'est pas un diamètre, [AT) la demi-tangente en A à (C) contenue dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas O. [AT') l'autre demi-tangente en A. On a :

$\text{mes}\widehat{\text{TAB}} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{\text{AOB}}$ et $\text{mes}\widehat{\text{T'AB}} = 180° - \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{\text{AOB}}$

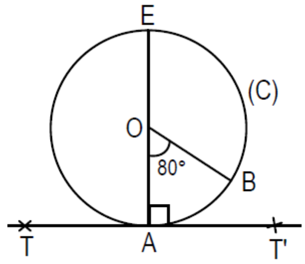


Exercice d'application

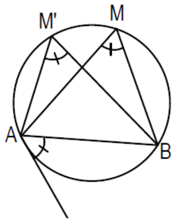
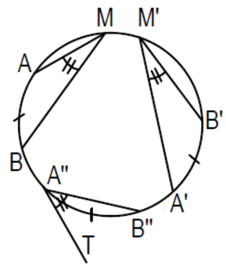
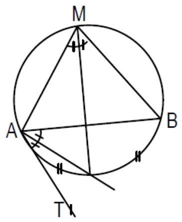
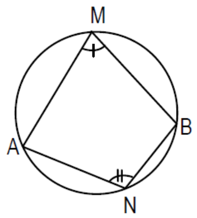
Sur la figure ci-dessous, (C) est un cercle de centre O. la droite (TT') est perpendiculaire à la droite (AE).

On pose mes AOB = 80°

Déterminer les mesures des angles TAB et T' AB.



3- Propriétés

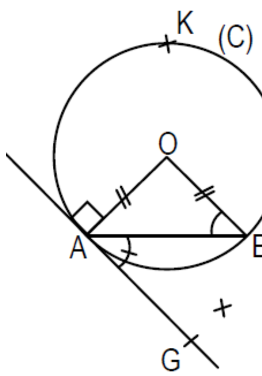
P1	P2
 Des angles inscrits qui interceptent le même arc ont même mesure	 Des angles inscrits qui interceptent deux arcs de même longueur ont même mesure
P3	**P4**
 La bissectrice d'un angle inscrit partage l'arc intercepté en deux arcs de même longueur	 Si M est un point de l'arc AB et N un point de l'arc AB , alors AMB et ANB sont supplémentaires

Exercice

Sur la figure codée ci-contre, (C) est un cercle de centre O. AOB est un triangle isocèle en O. la droite (GA) est perpendiculaire à la droite (OA) et K ∈(C), mes OBA = mes GAB .

1) Calculer mes GAB

2) En déduire mes AKB

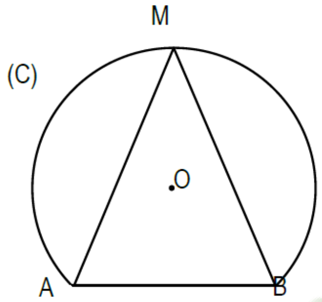


II. LIEU GEOMETRIQUE DES POINTS M TELS QUE $\text{mes}\ \widehat{\text{AMB}} = \theta°$

1- Construction d'arcs capables

Activité

Construis le symétrique de l'arc AB par rapport à la droite (AB) et M' le symétrique de M par rapport à la droite (AB). mes AMB = 65°



- Quelle est la mesure de l'angle AM'B ?
- Les deux arcs de cercle sont appelés arcs capables d'angles 65°d'extrémités A et B.
- La réunion de ces deux arcs de cercle est appelée lieu géométrique des points M tels que : mes AMB =65°

Propriété

Soit A et B deux points distincts, q un nombre réel tel que : $0 < \theta < 180$.

Le lieu géométrique des points M tels que : mes AMB=θ est la réunion de deux arcs de cercle symétriques par rapport à (AB).

Vocabulaire

Ces deux arcs de cercle sont appelés arcs capables d'angle q° , d'extrémités A et B.

Programme de construction.

Soit A et B deux points distincts et un angle de mesure q° tel que : 0 < q< 180 .

Pour construire le lieu géométrique des points M tels que : mes AMB = q° , On peut procéder comme suit :

- Construire l'angle TAB tel que mes TAB = q°
- Tracer la perpendiculaire (D) à (AT) en A et la médiatrice (Δ) du segment [AB].

- Les droites (D) et (Δ) se coupent en un point O qui est le centre du cercle (C) passant par A et B.
- Si l'angle est aigu le lieu géométrique est la réunion du grand arc AB et son symétrique par
- rapport à (AB).
- Si l'angle est obtus le lieu géométrique est la réunion du petit arc AB et son symétrique par rapport à (AB).

Exercices d'application

Exercice1 : L'unité est le centimètre

Construire des arcs capables d'un angle de 55° d'extrémités A et B tels que AB=4 .

Exercice 2 : L'unité est le centimètre.

Construire des arcs capables d'un angle 110° d'extrémités E et F tels que EF = 5.

III. RELATIONS METRIQUES DANS UN TRIANGLE

1- Sinus d'un angle obtus

Activités

Complète le tableau ci-dessous à l'aide de la calculatrice.

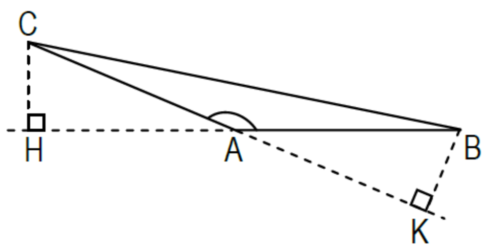
Mesure d'angle en degré	30	150	60	120	45	135
Sinus de l'angle						

1. Citer des angles supplémentaires dans le tableau ci-dessus et comparer leur sinus.
2. Que peut-on retenir ?

Définition

Soit BAC un angle, H le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC). On pose :

$\sin\widehat{BAC} = \frac{HC}{AC} = \frac{KB}{AB}$



Remarque :

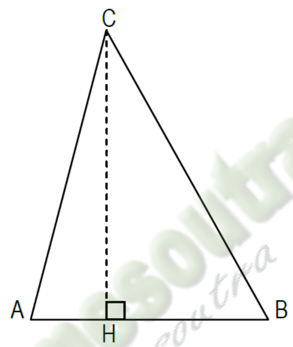
Nous admettrons que 2 angles ayant même sinus ont la même mesure ou sont supplémentaires.

2- Aire d'un triangle

Activité

ABC est un triangle et (CH) la hauteur issue du sommet C.

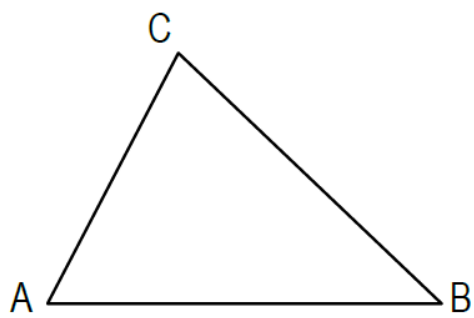
1) Donner l'expression A de l'aire du triangle ABC
2) Montrer que l'aire du triangle ABC est $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \sin\mathrm{A}}{2}$



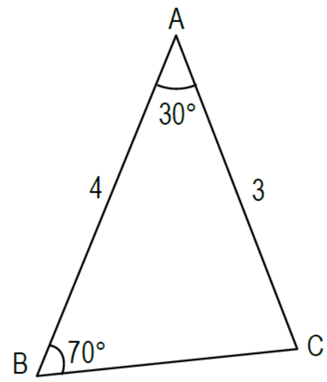
Propriété

Soit ABC un triangle et A son aire. On pose : BC = a ; AC = b et AB = c

On a : $A = \frac{1}{2}\mathrm{bc}\ \sin\mathrm{A} = \frac{1}{2}\mathrm{ac}\ \sin\mathrm{B} = \frac{1}{2}\mathrm{ab}\ \sin\mathrm{C}$



Exercice d'application



L'unité est le centimètre.

Soit la figure codée ci-contre.

1) Calculer l'aire du triangle ABC.

2) Calculer la longueur du côté [BC].

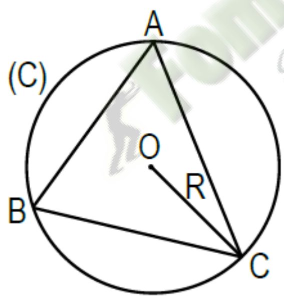
3- Théorème des sinus

Propriété :

Nous admettrons la propriété suivante :

Soit ABC un triangle, A son aire, (C) son cercle circonscrit et R le rayon de (C). On pose : BC = a ; AC = b et AB = c

On a : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2\mathcal{A}} = 2R$



Exercice d'application :

L'unité est le centimètre

Soit NAB un triangle isocèle en N tel que mes ANB =30°. Sachant que le rayon de son cercle circonscrit est égal à 1, calcule la longueur de chacun de ses côtés.

IV. MESURE D'UN ANGLE EN RADIAN

1- Définition

La mesure en radian d'un angle MON est égale à la longueur de l'arc intercepté par cet angle sur le cercle de centre O et de rayon 1. On notera mes MON.

2- Mesures en radian et mesures en degré

Activité

Compléter le tableau suivant :

Mesures en degré x	180	95	60		45	35		25	0
Mesures en radian y	π			$\frac{5\pi}{12}$			$\frac{\pi}{6}$		

Exprime y en fonction de x puis x en fonction de y.

Exercice d'application

1- Exprimer en radian la mesure d'un angle de 80° puis celle d'un angle de 1°;

2- Exprimer en degré la mesure d'un angle de 0,9 radian puis d'un angle de $\frac{3\pi}{5}$ radian ; d'un angle $\frac{7\pi}{8}$ radian

EXERCICES

On considère la figure ci-contre. On donne $a = \frac{7\pi}{36}$ rad.

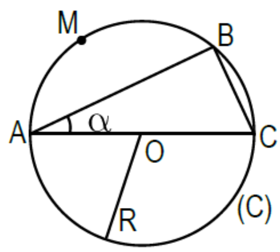
1. Déterminer en radian les mesures des angles suivants :

ABC ; BCA ; AOB et BMC.

2. Exprimer en degré les mesures des angles suivants :

BAC ; BCA ; AOB et BMC.

3. Sachant que le rayon R=3, calculer la longueur de l'arc AB.



Leçon 8 : ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE

COMPETENCE 1

THEME : GEOMETRIE DU PLAN

Leçon 8 : ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE

Nombre de séances : 10h + 2h = 12h

Tableau des habiletés et contenus

Habiletés	Contenus
♦ Identifier	- Deux arcs capables d'un angle donné
♦ Connaitre	- La définition de la mesure d'un angle en radian - La définition d'un angle orienté ; - La définition de la mesure principale d'un angle orienté ; - La définition du cercle trigonométrie ; - La définition du cosinus d'un angle ; - La définition du sinus d'un angle orienté ; - La définition de la tangente d'un angle orienté ; - Les propriétés relatives au cosinus, au sinus et à la tangente d'un angle orienté.
♦ Reconnaitre	- Deux angles orientés opposés
♦ Lire	- La mesure principale d'un angle orienté sur le cercle trigonométrie
♦ Mesurer	- Un angle orienté
♦ Convertir	- Des mesures d'angles de degré en radian et inversement
♦ Calculer	- La mesure principale d'un angle orienté dans une configuration donnée
♦ Placer	- Les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle orienté dont on connait la mesure principale
♦ Retrouver	- Les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle orienté dont on connait la mesure principale en utilisant le cercle trigonométrique
♦ Traiter une situation	Faisant appel aux angles orientés et trigonométrie

Situation d'apprentissage :

Un élève d'une classe de 2^{nd} C observe une horloge dans un miroir. Il constate que l'heure indiquée par l'horloge vue dans le miroir est différente de celle vue hors du miroir. Il ne parvient pas à se l'expliquer. Il dessine alors les horloges vues dans les deux situations (voir dessins ci-contre) qu'il présente à ses camarades de classe.

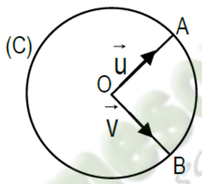
Un de ces camarades prétend que ce phénomène est lié au sens de rotation des aiguilles de la montre. Les autres décident de cerner ce phénomène en étudiant les angles orientés

II. COMPLEMENTS SUR LES ANGLES

1- Angles orientés de deux vecteurs

Présentation et vocabulaire

Soit (C) un cercle de centre O. A et B deux points de (C). $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs respectivement colinéaires à $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.



Combien de sens de parcours à l'arc AB?

A chaque sens de parcours, on associe un nouveau type d'angle appelé angle orienté.

Le parcours de l'arc AB de A vers B correspond à l'angle orienté noté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Le parcours de l'arc AB de B vers A correspond à l'angle orienté noté $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$.

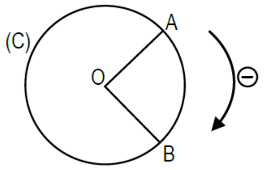
Remarque

Le couple $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est un représentant de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ et le couple $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ est un représentant$(\vec{v}, \vec{u})$.

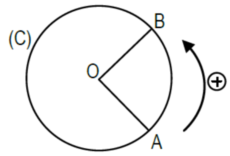
Les angles orientés $(\vec{u}, \vec{v})$et $(\vec{v}, \vec{u})$sont dits opposés.

2- Orientation du plan

a) Plan orienté



Sens indirect
C'est le sens des aiguilles d'une montre



Sens direct
C'est le sens contraire des aiguilles d'une montre

Remarque :

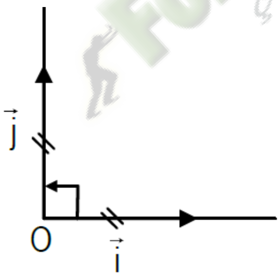
Orienté le plan c'est convenir que tous les cercles seront orientés dans le même sens.

b) Repère orthonormé direct

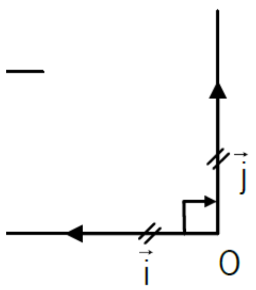
Définition

Soit le repère orthonorm$(O, \vec{i}, \vec{j})$

- Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est direct si l'angle $(\vec{i}, \vec{j})$ est l'angle droit direct ;

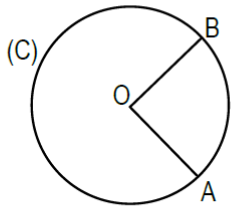


- Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est indirect si l'angle $(\vec{i}, \vec{j})$ est l'angle droit indirect.



3- Mesure principale d'un angle orienté

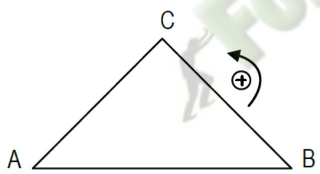
a) Définition



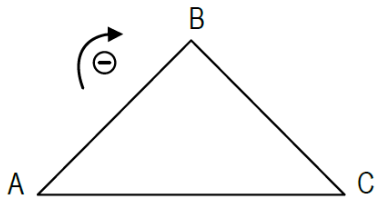
La mesure principale en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est notée Mes $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Elle est définie par :

- ✓ Si $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est nul alors Mes $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$=0
- ✓ Si $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$est plat alors Mes $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \pi$
- ✓ Si $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$n'est ni nul ni plat alors :
  - Mes $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$=mes AOB lorsque le sens de déplacement de A vers B sur le petit arc AB est le sens direct.
  - Mes$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$= - mesAOB lorsque le sens de déplacement de A vers B sur le petit arc AB est le sens indirect.

Remarques



Ce triangle ABC est dit de sens direct.



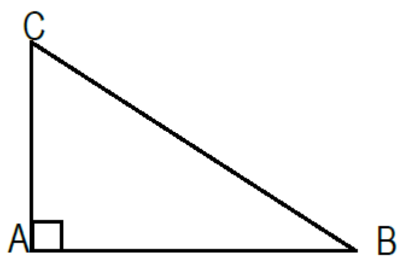
Ce triangle ABC est dit de sens indirect.

La mesure principale de l'angle plat orienté est π(et non $-\pi$). Par conséquent la mesure principale d'un angle orienté est un nombre réel appartenant à $]-\pi; \pi]$.

Application

Soit ABC un triangle rectangle en A. Sachant que mes ACB = 60°

Détermine : Mes$(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$; Mes$(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AC})$; Mes$(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC})$



Remarques : Egalité d'angles orientés

Des angles orientés sont égaux si et seulement si ils ont la même mesure principale.

b) Propriété fondamentale Propriété

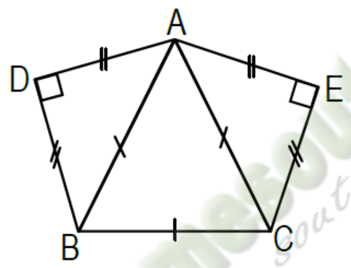
Etant donné un nombre réel α appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$ et une demi-droite [OX), il existe une seule demi-droite [OY) telle que Mes $\left(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}\right)=\alpha$

Exercice

On considère la figure ci-contre.

Calculer les mesures principales des angles :

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB})$; $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE})$; $(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD})$; $(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{BC})$



III. TRIGONOMETRIE

1- Cercle trigonométrique

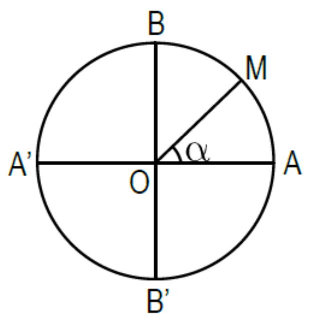
a) Définition

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct (O, A, B), on appelle cercle trigonométrique, le cercle de centre O de rayon 1.

b) Point associé à un nombre réel $\alpha\in]-\pi;\pi]$

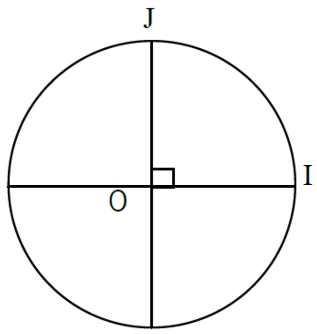
A tout point M du cercle trigonométrique, on associe l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$ de mesure principale α réciproquement, à tout nombre réel α élément de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ est associé le point M du cercle trigonométrique tel que $\mathrm{Mes}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)=\alpha$

M est appelé image de α sur le cercle trigonométrie.



Exercice d'application

Sur le cercle trigonométrique ci-contre, place les points A, B, C, D, E et F images respectives des réels $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \pi$



2- Cosinus, sinus d'un angle orienté

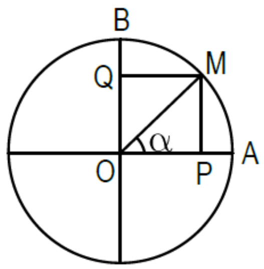
Soit M un point du cercle trigonométrique appartenant à l'arc AB. On pose mesAOM = a

Compléter :

$\cos\alpha = \frac{OP}{OM} = OP$; $\sin\alpha = \frac{OQ}{OM} = OQ$ car OM=1

dans le repère (O;A;B); on a M(OP,OQ)

- Cos α est l'abscisse du point M
- sin α est l'ordonné du point M

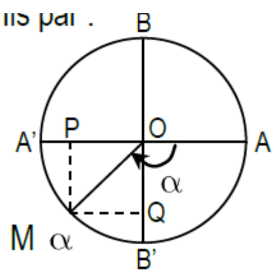


a) Définition

Un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$de mesure principale α étant donné ; soit M l'image de α sur le cercle trigonométrique. Soit P et Q les projetés orthogonaux de M respectivement sur (A'A) et (B'B).

Le cosinus et le sinus de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ ou de sa mesure principale α sont définis par :

$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos\alpha = \overline{OP}$ et $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \sin\alpha = \overline{OQ}$



b) Propriétés

Quel que soit le nombre réel α dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ on a :

(1) $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

(2) $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

(3) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

(4) de plus si $\alpha \neq \pi$ alors

Cos($-\alpha$) = cos α

sin($-\alpha$) = -sin α

Exercice d'application

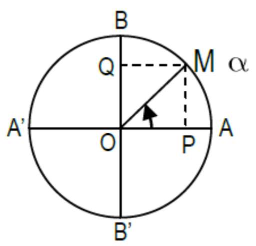
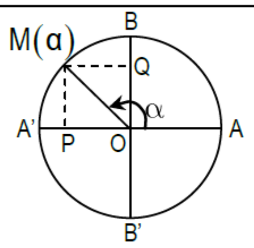
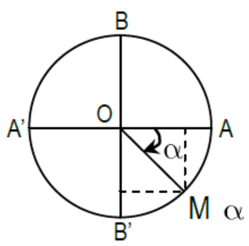
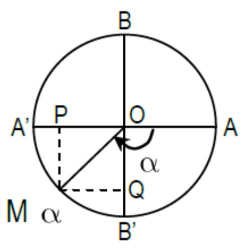
x étant la mesure principale d'un angle orienté, démontre que :

a) $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\sin x.\cos x$

b) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

c) $\sin^4 x - \cos^4 x + 2\cos^2 x = 1$

c) Signe du sinus et cosinus d'un angle

 $\alpha \in]0;\frac{\pi}{2}[$ • cos α...................... • sin α......................	 $\alpha \in]\frac{\pi}{2};\pi[$ • cos α...................... • sin α......................
 $\alpha \in]-\frac{\pi}{2};0[$ • cosα...................... • sinα......................	 $\alpha \in]-\pi;\frac{-\pi}{2}[$ • cos α...................... • sin α......................

Exercice d'application

Compléter le tableau des signes suivants :

α	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\sin\alpha$					
Signe de $\cos\alpha$					

d) Sinus et Cosinus d’angle remarquable

Compléter le tableau ci-dessous

Mesure principale	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Cosinus						
Sinus						

3- Tangente d’un angle orienté

a) Définition

Soit un angle orienté $(\overrightarrow{u}, \vec{v})$ non droit de mesure principale α $(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\ et\ \alpha \neq -\frac{\pi}{2})$.

La tangente de cet angle orienté ou de sa mesure principale est définie par : $\tan(\vec{u}, \vec{v}) = \widehat{\tan\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Propriété

Quel que soit le nombre réel α de l’intervalle $]-\pi; \pi]$ tel que $\alpha \neq \frac{\pi}{2}\ et\ \alpha \neq -\frac{\pi}{2}$ on a:

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Exercice d'application

Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$, on a $\tan\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Calcule $\cos\alpha$

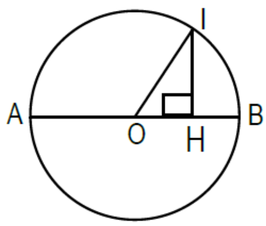
EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Calculer $\cos x$ sachant que $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Exercice 2

Sur la figure ci-contre, $OA = OB = OI = 1$ et $mes\widehat{BOI} = \frac{\pi}{4}$



1) Calculer les distances OH puis AH.
2) Démontrer que le triangle OIH est rectangle isocèle en H.
3) Déduire que $\cos\widehat{BAI} = \frac{2+\sqrt{2}}{2AI}$
4) a- Quelle est la nature du triangle AIB ?

   b- Montrer que $AI = 2\cos\widehat{BAI}$
5) a- Montrer que $mes\widehat{BAI} = \frac{\pi}{8}$

   b- Déduire des questions précédentes que $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Leçon 9 : STATISTIQUES

COMPETENCE 3

THEME : ORGANISATION ET TRAITEMENTS DES DONNEES

Leçon 9 : STATISTIQUES

Nombre de séances : 8h + 2h = 10h

Tableau des habiletés et contenus

Habiletés	Contenus
♦ Identifier	- L'effectif cumulé croissant ; - L'effectif cumulé décroissant ; - La fréquence cumulée croissante ; - La fréquence cumulée décroissante ; - La médiane
♦ Connaitre	- La formule de l'écart moyen ; - La formule de la variance ; - La formule de l'écart type.
♦ Dresser	- Le tableau de fréquences cumulées croissantes ; - Le tableau des fréquences cumulées décroissantes.
♦ construire	- le polygone des effectifs cumulés croissantes ; - le polygone des effectifs cumulés décroissantes.
♦ Déterminer	- La médiane d'une série statistique par lecture graphique ;
♦ calculer	- l'écart moyen ; - la variance ; - l'écart type ; - la médiane.
♦ interpréter	- les différents paramètres de position (mode, moyenne, médiane) ; - les différents paramètres de dispersion (étendue, écart-moyen, écart-type)
♦ Traiter une situation	Faisant appel aux statistiques

Situation d'apprentissage :

Le club santé d'un collège sollicite un médecin pour effectuer une étude sur les grossesses précoces en milieu scolaire. L'enquête du médecin sur l'âge des filles enceintes dans le district sanitaire a produit les résultats résumés dans le tableau ci-dessous :

Ages	$[12; 14[$	$[14; 16[$	$[16; 18[$	$[18; 24[$	Total
Effectifs	125	60	85	70	340

Dans son rapport, il mentionne que :

- Les polygones des effectifs cumulés permettent de déterminer l'âge médian des filles enceintes ;
- Plus de 50% des jeunes filles tombent enceintes alors qu'elles n'ont pas encore 18 ans.

Il y a donc risque élevé de grossesses précoces dans le district par rapport à l'âge moyen qui est de 16 ans. On doit faire quelque chose car la situation est alarmante.

Inquiétés par ces propos, les élèves des classes de seconde C décident de les vérifier en s'aidant de notion de statistique.

I. ORGANISATION DES DONNEES

1- vocabulaire

- *Définition :* Population / Individu
  On appelle une population tout ensemble soumis à une étude statistique et individu un élément de la population.

- *Définition :* Caractère / Modalité
  L'aspect ou le trait auquel va porter l'étude statistique s'appelle le caractère.
  Les valeurs ou les modalités sont les valeurs prises par le caractère. On les notes x_i

- *Définition :* Quantitatif / Qualitatif
  Un caractère est dit quantitatif si les modalités / valeurs sont des nombres, sinon le caractère est dit qualitatif.

- *Définition :* Discret / Continue
  Un caractère quantitatif est dit discret lorsque les valeurs sont isolées, c'est-à-dire qu'on peut compter les valeurs possibles. Sinon le caractère quantitatif est dit continu.

- *Définition :* Classe et Centre
  Lorsque le caractère est quantitatif continue, on peut effectuer des regroupements par classe. Et on appelle le centre (c_i) le centre de la classe, le milieu des valeurs de la classe.

2- Effectifs cumulés, fréquences cumulées

Définition :

Soit $(x_i\,;n_i)_{1\leq i\leq p}$ une série statistique dont les modalités sont rangées par ordre croissant.

- On appelle effectif cumulé croissant (resp. décroissant) de la modalité x_k la somme des effectifs des modalités inférieures ou égales (resp. supérieures ou égales) à x_k;
- On appelle fréquence cumulée croissante (resp. décroissante) de la modalité x_k le quotient de son effectif cumulé croissant (resp. décroissant) par l'effectif total de la série.

Exemple :

Les notes sur 20 obtenues lors d'un devoir de mathématiques dans une classe de seconde sont les suivantes :

10, 8, 11, 9, 12, 10, 8, 10, 7, 9, 10, 11, 12, 10, 8, 9, 10, 9, 10, 11.

• La population étudiée est la classe et les individus sont les élèves. L'effectif total est égal à 20 et la note obtenue au devoir est le caractère discret que l'on étudie.

• La série statistique définie par les effectifs est la suivante :

Valeurs du caractère (notes) x_i	7	8	9	10	11	12
Effectifs (nb d'élèves ayant la note) n_i	1	3	4	7	3	2

• La série statistique définie par les fréquences en pourcentage est la suivante :

Valeurs du caractère (notes) x_i	7	8	9	10	11	12
Fréquences en % $f_i = \frac{n_i}{20} \times 100$	5 %	15 %	20 %	35 %	15 %	10 %

Avec l'exemple des notes, on a :

Valeurs x_i	7	8	9	10	11	12
Effectif cumulé croissant	1	4*	8	15	18	20
Effectif cumulé décroissant	19	16**	12	5	2	0

* : nombre d'élèves ayant eu une note $\leqslant 8$; ** : nombre d'élèves ayant eu une note > 8

II. GRAPHIQUES

1- Histogramme

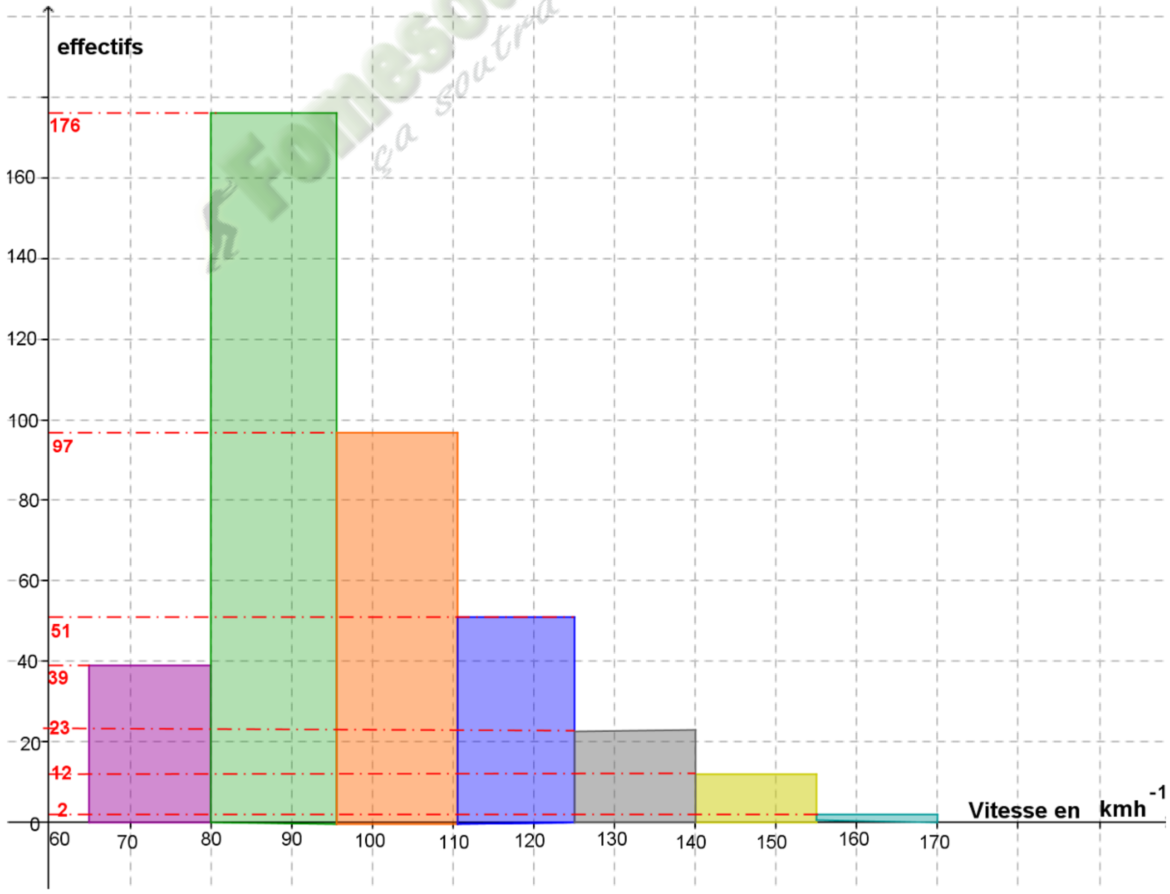
Pour représenter graphiquement une série statistique donnée par des classes, on utilise un histogramme, avec en abscisses les classes des valeurs du caractère.

Un histogramme est constitué de rectangles juxtaposés ; la largeur de chaque rectangle correspond à l'intervalle de la classe correspondante ; sa hauteur est telle que l'aire du rectangle est proportionnelle à l'effectif de la classe.

Exemple :

On étudie la vitesse de 400 véhicules enregistrée par un radar lors d'un contrôle routier.

Classes : **Vitesse en km h^{-1}**	[65 ; 80[	[80 ; 95[	[95;110[	[110;125[	[125;140[	[140; 155[	[155 ;170[
Effectifs	39	176	97	51	23	12	2



2- Courbe des effectifs cumulés croissant

Pour tracer la courbe des effectifs cumulés croissants (ou décroissants) :

On complète le tableau en calculant les effectifs cumulés croissants (ou décroissants);

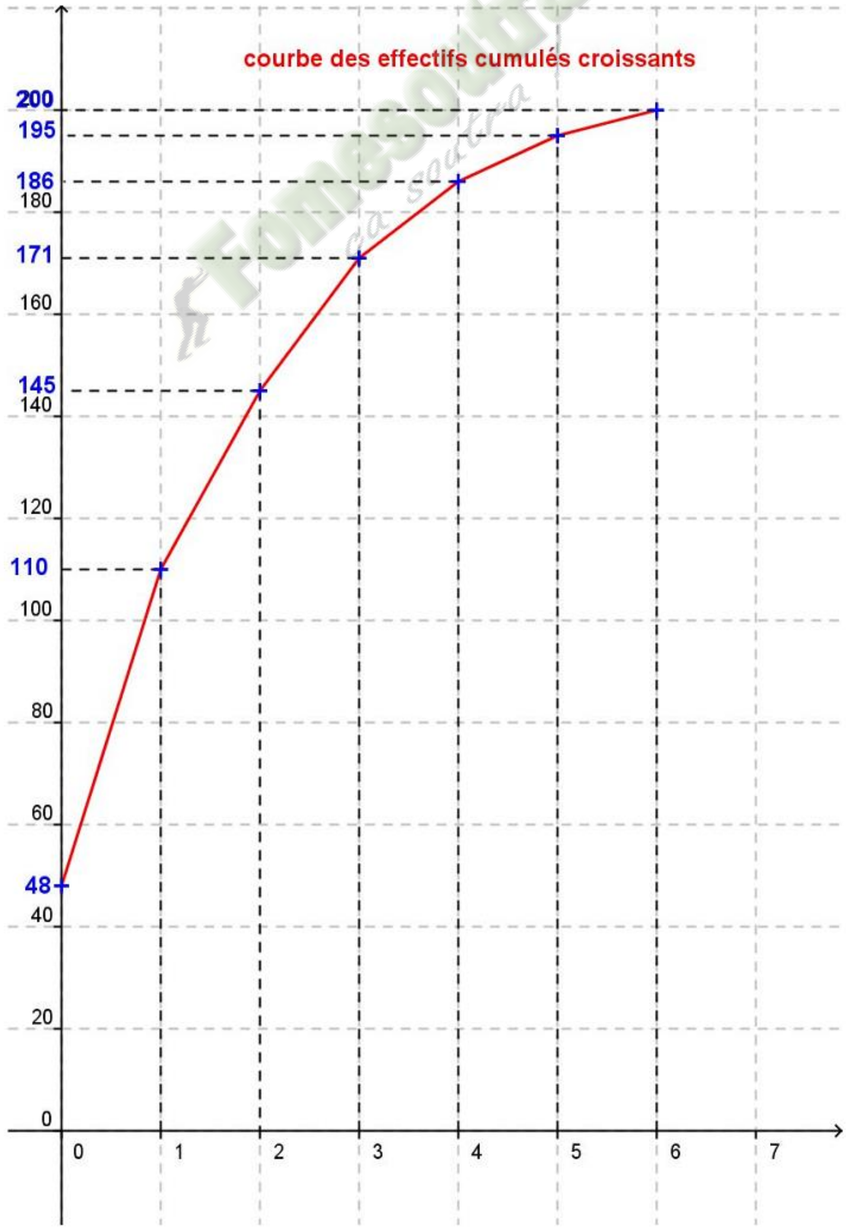
On trace dans un repère le point dont l'abscisse est la modalité et l'ordonnée l'effectif cumulé qui lui correspond ;

On trace les segments qui relient chaque point du plan.

Exemple 1 :

On étudie le nombre d'enfants dans 200 familles d'un village. On regroupe les résultats dans le tableau ci-dessous :

Modalités	0	1	2	3	4	5	6
Effectifs	48	62	35	26	15	9	5
ECC	48	110	145	171	186	195	200



Exemple 2 : Cas où les données sont regroupées en classe

On étudie la vitesse de 400 véhicules enregistrée par un radar lors d'un contrôle routier.

Classes : **Vitesse en km h^{-1}**	[65 ; 80[	[80 ; 95[	[95;110[	[110;125[	[125;140[	[140; 155[	[155 ;170[
Effectifs	39	176	97	51	23	12	2
ECC	39	215	312	363	386	398	400

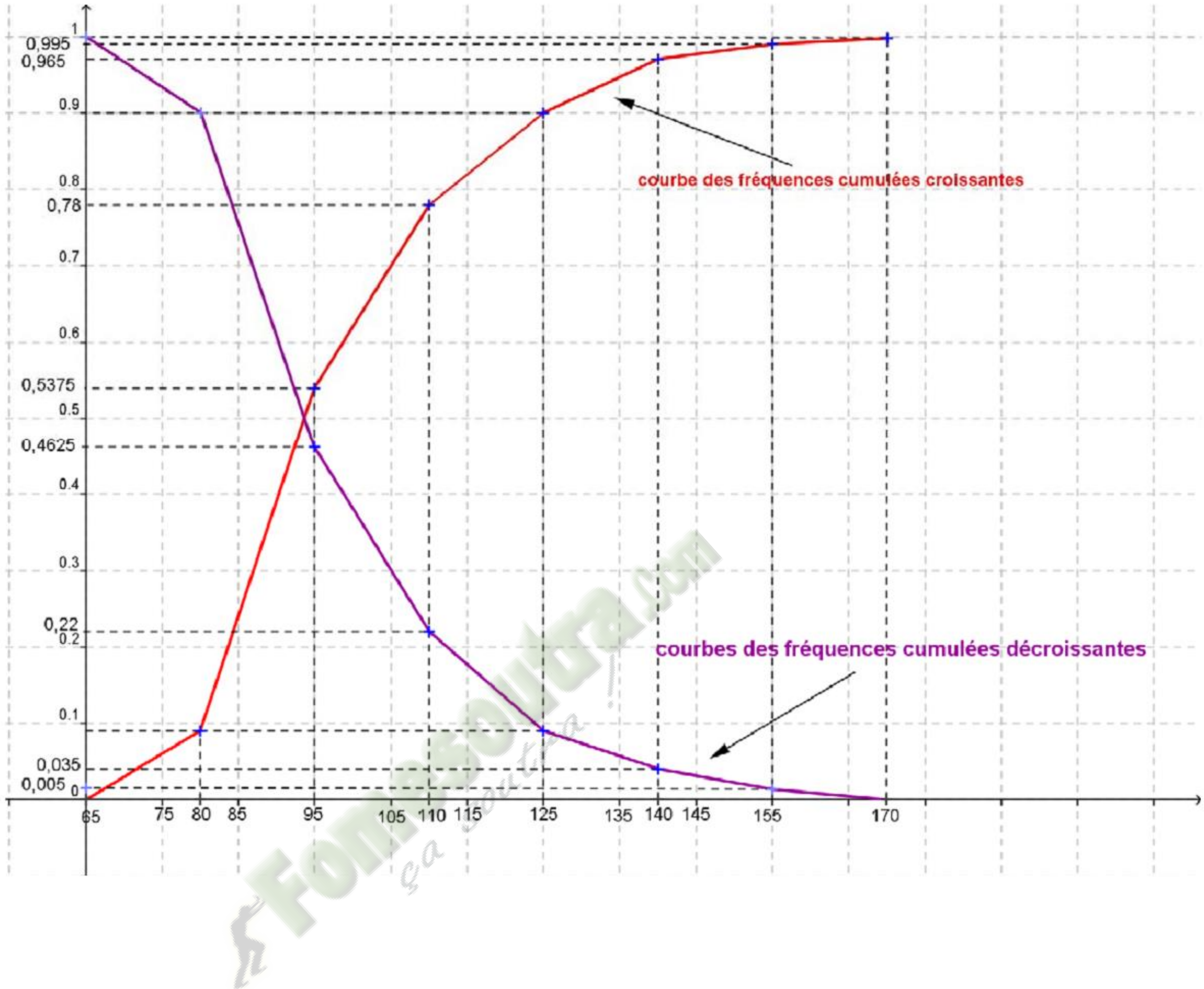
3- Courbe des fréquences cumulées croissantes

Reprenons le tableau de la série statistique étudiant la vitesse des véhicules précédent.

Classes	[65 ; 80[	[80 ; 95[	[95;110[	[110;125[	[125;140[	[140; 155[	[155 ;170[
Fréquences	0,0975	0,44	0,2425	0,1275	0,0575	0,03	0,005
FCC	0,0975	0.5375	0.78	0.9075	0.965	0.995	1
FCD	1	0,9025	0,4625	0,22	0,0925	0,035	0,005

Faisons un graphique des fréquences cumulées croissantes et décroissantes

(Le principe est exactement le même que pour les effectifs cumulées croissants ou décroissants)



III. CARACTERISTIQUES DE POSITION ET DE DISPERSION

1- Caractéristiques de position

a) Mode

Définition :

On appelle mode d'une série statistique toute modalité d'effectif maximal.

b) Moyenne

Définition :

Pour une série statistique, la moyenne est le nombre, noté $\bar{x}$, défini par:

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_px_p}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_ix_i$$

Avec N = l'effectif total

Exemple :

Soit la série statistique répertoriant la taille en mètres de 100 requins blancs

taille (en m)	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
Effectif	8	10	25	32	19	4	2

La taille moyenne est :

$$\bar{x} = \frac{1{,}5\text{x}8 + 2\text{x}10 + 2{,}5\text{x}25 + 3\text{x}32 + 3{,}5\text{x}\ 19 + 4\text{x}4 + 4{,}5\text{x}2}{100} = 2{,}82$$

c) Médiane

Définition :

On appelle médiane d'une série statistique d'effectif total N tout nombre réel M tel que le nombre d'individus de la modalité supérieure ou égale à M et le nombre d'individus de modalité inférieure ou égale à M soient tous deux au moins égaux à $\frac{N}{2}$.

Remarque :

- Il existe d'autres définitions, plus restrictives, de la médiane. Toutes mettant en évidence la notion intuitive de partage d'une population en deux groupes de même effectif ;
- Une médiane n'est pas toujours une modalité de la série ;
- Une médiane peut être un nombre réel unique ou tout nombre d'un intervalle (fermé) de $\mathbb{R}$.

2- Caractéristiques de dispersion

a) Ecart moyen

Définition :

Soit une série statistique $(x_i\,;n_i)_{1\leq i\leq p}$ de moyenne $\bar{x}$. L'écart moyen est le nombre réel e_m défini par :

$$e_m = \frac{n_1|x_1-\bar{x}| + n_2|x_2-\bar{x}| + \cdots + n_p|x_p-\bar{x}|}{n_1+n_2+\cdots+n_p} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i|x_i-\bar{x}|}{\sum_{i=1}^{p} n_i}$$

b) Variance – Ecart type

Définition :

Soit une série statistique $(x_i\,; n_i)_{1\leq i\leq p}$ de moyenne $\bar{x}$.

- La variance est le nombre réel **V** défini par :

$$\mathbf{V} = \frac{n_1(x_1-\bar{x})^2 + n_2(x_2-\bar{x})^2 + \ldots + n_p(x_p-\bar{x})^2}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i-\bar{x})^2.$$

Avec N = l'effectif total

- L'écart type est le nombre réel positif σ défini par : $\sigma = \sqrt{V}$

EXERCICES

Exercice 1 :

Pendant un mois (30 jours), un client a pesé chaque jour à un demi-gramme près les quatre baguettes de pain que lui livre son boulanger. Il a inscrit les résultats dans le tableau suivant :

Masse (en grammes)	140	140,5	141	141,5	142	142,5	143	143,5	144	144,5	145	Total
Effectif	24	20	16	14	13	10	9	7	3	2	2	
Masse x Effectif												
Effectif cumulé croissant												
Effectif cumulé décroissant												

1) Compléter le tableau ci-dessus.

2) Quel est le mode de cette série ?

3) Calculer la moyenne de cette série statistique. En déduire la quantité moyenne de pain (en grammes) achetée chaque jour par ce client.

4) Représenter les effectifs cumulés croissants et décroissants par un diagramme en bâtons et en déduire la médiane (ou un intervalle médian) de cette série.

Exercice 2 :

On lance deux dès 60 fois de suite et on note, pour chaque lancer, la somme des points obtenus. On P obtient le tableau suivant : ($\bar{P}$ désigne la moyenne)

Points (p)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Effectif (n)	2	3	3	5	8	11	9	8	5	3	3	
nP												
$\lvert P-\bar{P}\rvert$												
$n\lvert P-\bar{P}\rvert$												
$P-\bar{P}\ ^{2}$												
$n\ P-\bar{P}\ ^{2}$												

1) Compléter le tableau ci-dessus.

2) Calculer la moyenne, l'écart moyen et l'écart type de cette série statistique.

Leçon 10 : PRODUIT SCALAIRE

COMPETENCE 1

THEME : GEOMETRIE DU PLAN

Leçon 10 : PRODUIT SCALAIRE

Nombre de séances : 10h + 2h = 12h

Tableau des habiletés et contenus

Habiletés	Contenus
♦ Identifier	- Une équation cartésienne d'un cercle
♦ Connaitre	- La définition du produit scalaire de deux vecteurs ; - La définition du carré scalaire d'un vecteur ; - Les propriétés relatives au produit scalaire de deux vecteurs ; - La propriété relative au carré scalaire d'un vecteur ; - La propriété relative à l'interprétation géométrique du produit scalaire ; - Les propriétés relatives aux règles de calculs sur le produit scalaire ; - Le théorème d'Al Kashi ; - Les propriétés relatives aux vecteurs orthogonaux ; - Les relations métriques caractérisant un triangle rectangle ; - L'expression du produit scalaire dans une base orthonormée - Les propriétés relatives aux cercles.
♦ Traduire	- l'orthogonalité de deux droites à l'aide du produit scalaire.
♦ Calculer	- le produit scalaire de deux vecteurs connaissant leurs coordonnées dans une base orthonormée ; - la longueur d'un côté d'un triangle en utilisant le théorème d'Al Kashi ; - la mesure d'un angle d'un triangle en utilisant le théorème d'Al Kashi.
♦ Démontrer	- Une propriété en utilisant les règles de calculs du produit scalaire.
♦ Déterminer	- la mesure de l'angle de deux vecteurs connaissant leurs coordonnées ; - une équation cartésienne d'un cercle dont on connait le centre et le rayon ; - une équation cartésienne d'un cercle dont on connait un diamètre ;

	- le centre et le rayon d'un cercle dont une équation cartésienne.
♦ Ecrire	- $-x^2 + y^2 - 2ax - 2by + by + c = 0$ sous la forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 + d = 0$
♦ Traiter une situation	Faisant appel au produit scalaire

Situation d'apprentissage :

Pendant les congés de Noel, Kessé, élève en classe de 2nde se rend chez son oncle qui habite en campagne, au bord de la mer. De la maison (M), il aperçoit le phare (P) et sur l'ile en face une tour (T).

Kessé veut savoir la distance qui sépare la tour du phare.

Son oncle, marin à la retraite, lui donne les informations suivantes :

- La tour est à 4 km de la maison ;
- L'angle formé par la tour, la maison et le phare fait 74° ;
- L'angle formé par la maison, la tour et le phare fait 42°.

Avec ces informations Kessé n'arrive à déterminer cette distance.

De retour des congés, il présente à situation à ses camarades de classe.

Ceux-ci cherchent à répondre à sa réoccupation en utilisant des propriétés relatives au produit scalaire.

I. DEFINITIONS ET PREMIERES PROPRIETES

1- Produit scalaire de deux vecteurs

a) Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par :

- $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul ;
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

$\vec{u}.\vec{v}$ se lit " $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ".

b) Propriété

(1) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

(2) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

(3) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$;

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

2- Carré scalaire

a) Définition

$\vec{u}.\vec{u}$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$. On le note $\vec{u}^2$.

b) Propriété

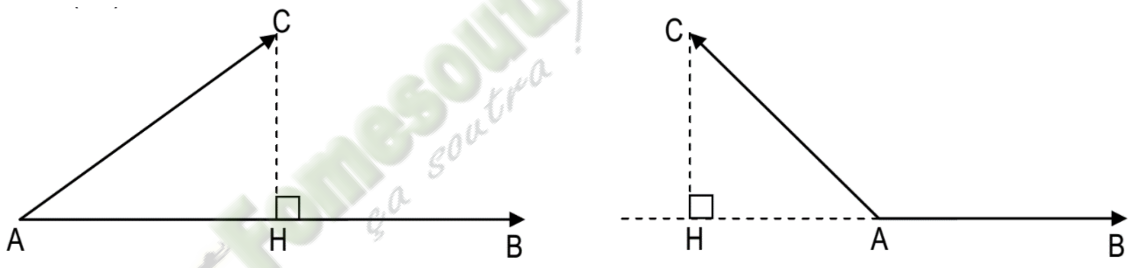
Pour tout vecteur $\vec{u}$: $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

3- Interprétation géométrique

a) Propriété 1

Pour tous points A, B et C tels que A ≠ B, on a :

$\overline{AB}.\overline{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).



b) Propriété 2

Soit A, B, C et D quatre points tels que A ≠ B.

$\overline{AB}.\overline{CD} = \overline{AB} \times \overline{HH'}$ où H et H' sont les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB).

II. PROPRIETES DU PRODUIT SCALAIRE

1- Vecteurs orthogonaux

a) propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a: $\vec{u}.\vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$

b) Conséquences

(1) soit (D) et (D') deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
$(D) \perp (D') \iff \vec{u}.\vec{v} = 0$

(2) soit les points A, B, C, D avec A ≠ B et C ≠ D : $(AB) \perp (CD) \iff \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

(3) soit les points A, B, M, avec A ≠ B :
M appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

2- Règles de calculs

a) propriétés fondamentales

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{u'}$, $\overrightarrow{v'}$ et tout nombre réel λ , on a :

(1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

(2) $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{v}'\right) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{v}'$

(3) $\left(\lambda\vec{u}\right)\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\left(\lambda\vec{v}\right) = \lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$

(4) $\left(\vec{u}+\vec{u}'\right)\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}'\cdot\vec{v}$

b) propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v'}$, on a :

(1) $(\vec{u}+\vec{v}).\left(\overrightarrow{u'}+\overrightarrow{v'}\right) = \vec{u}.\overrightarrow{u'} + \vec{u}.\overrightarrow{v'} + \vec{v}.\overrightarrow{u'} + \vec{v}.\overrightarrow{v'}$;

(2) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$;

(3) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$;

(4) $(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

c) Autre expression du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

III. RELATION METRIQUE DANS UN TRIANGLE

1- Relation métrique caractérisant un triangle rectangle

Propriété :

Soit ABC un triangle, H le projeté orthogonal de A sur (BC).

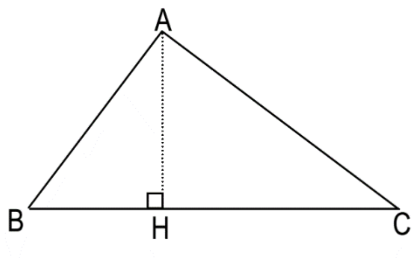
Les énoncés suivants sont équivalents :

(1) ABC est rectangle en A

(2) $BC^2 = AB^2 + AC^2$

(3) $AB^2 = \overline{BA} \times \overline{BC}$

(4) $AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$



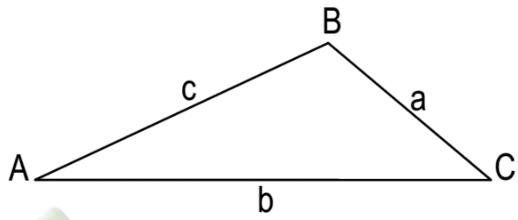
2- Théorème d'Al Kashi

Propriété :

Soit ABC un triangle quelque.

On pose : a=BC ; b=AC ; C=AB.

On a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$.



3- Théorème de la médiane

Soit ABC un triangle quelconque et$[AA']$ la médiane relative à $[BC]$. On a :

(1) $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$;

(2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AA'^2 - \frac{BC^2}{4}$

IV. FORME ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE

Expression dans une base orthonormée

Propriété :

a) **Conséquence :**

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormé $(\vec{i},\vec{j})$ on a : $\vec{u}\cdot\vec{u}' = xx' + yy'$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$ on a : $\begin{cases} x = \vec{u}\cdot\vec{i} \\ y = \vec{u}\cdot\vec{j} \end{cases}$

V. CERCLE

1- Equation d'un cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

- Soit (c) un cercle, il existe des nombres réels a, b, et c tels que pour tout point M(x;y), M ϵ (c) $\Longleftrightarrow$ $x^2+y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

- Soit a, b, et c des nombres réels.
  L'ensemble des points M(x;y) tels que $x^2+y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ est soit l'ensemble vide ; soit un point ; soit un cercle.

2- Equation du cercle de diamètre $[\boldsymbol{AB}]$

Soit A et B deux points distincts du plan et (c) le cercle de diamètre $[AB]$ dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

M ϵ (c) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0.$

3- Equation du cercle de centre A et de rayon r

Soit A un point du plan, r un nombre réel strictement positif et (c) le cercle de centre A et de rayon r dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

M ϵ (c) $\Leftrightarrow AM = r.$

M ϵ (c) $\Leftrightarrow AM^2 = r^2.$

EXERCICES

Exercice 1 :

ABC un triangle isocèle en A tel que AB = 3 et BC = 4.

Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC), K le projeté orthogonal de H sur (AC).

1) Calculer AH ; $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}$ de deux manières différentes.

2) En déduire la valeur de AK.

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle. On appelle S son aire. On pose a=BC ; b=CA et C=AB.

On sait que : mes $\hat{A}$= 45° ; b=3 et S=3.

Déterminer la longueur de chacun des côtés et les angles de ce triangle.

Leçon 11 : EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS ℝ

COMPETENCE : 2

THEME : CALCULS ALGEBRIQUES

Leçon 11 : EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS ℝ

Nombre de séances : 8h+2h=10h

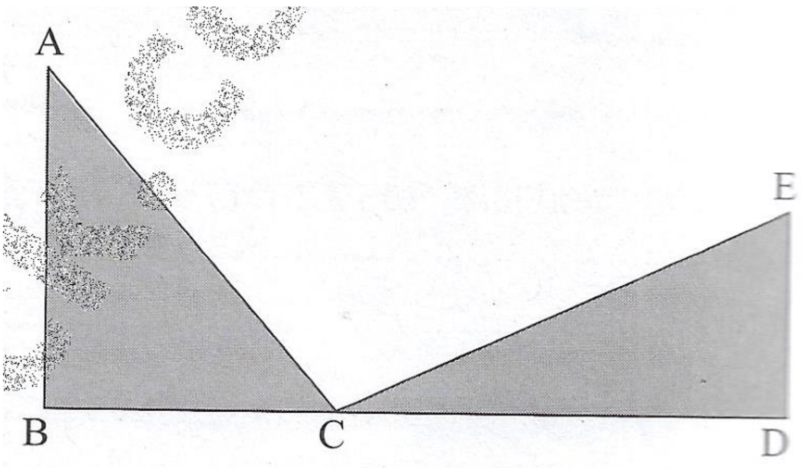
Tableau des habiletés et contenus

Habiletés	Contenus
♦ Identifier	- Une équation dans ℝ - Une équation dans ℝ - Deux équations équivalentes - Deux inéquations équivalentes
♦ Résoudre	- Des équations et inéquations dans ℝ dont les membres sont deux polynômes ou deux fractions rationnelles - Des équations et des inéquations avec valeur absolue
♦ Traiter une situation	- Faisant appel aux équations et inéquations dans ℝ

Situation d'apprentissage :

La figure ci-dessous représente un terrain offert par la communauté villageoise à la coopérative d'un lycée.

Le terrain a été partagé en deux parcelles de formes triangulaires, une pour les classes de $3^{ème}$ et l'autre pour les classes de 2^{nde}. Les deux parcelles ont la même aire. Chacune d'elles doit être clôturée pour éviter que les cultures soient détruites. Les élèves de seconde C veulent savoir lequel des deux groupes a plus dépenses à faire pour l'achat du grillage. Ils décident de résoudre des équations et inéquations dans ℝ.



AB = 50 m ; BD = 70 m et DE = 30 m.

I. GENERALITES SUR LES EQUATIONS ET INEQUATIONS

1. Equations

Définition :

Soit A et B deux ensembles.

- (E) : «f(x) = g(x) » où f et g sont deux fonctions de A vers B est appelée équation dans A, d'inconnue x.
- Tout élément α de A vérifiant f(α) = g(α) est appelé solution de l'équation (E).
- Résoudre dans A l'équation (E), c'est rechercher l'ensemble des éléments de A qui sont solutions de (E).

Remarque :

- Le nom utilisé pour l'inconnue est sans importance, les équations f(x) = g(x) et f(t) = g(t) ont même ensemble de solutions.
- Avant de résoudre une équation, il convient, si nécessaire, de préciser les contraintes sur l'inconnue.

Exemples d'équation :

$(E_1) : -2x^2 + x + 4 = -x^2 + 2x - 2$ $\qquad (E_3) : \dfrac{x-2}{(x-2)(x-1)} = 2$ $\qquad (E_5) : |2x-5| = |x-1|$

$(E_2) : (x+4)(x+1) = x^2 - 1$ $\qquad (E_4) : \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{-x}{x^2-4}$ $\qquad (E_6) : |x-2| = x+3$

Sont des équations dans $\mathbb{R}$ d'inconnue x.

2. Inéquations

Définition :

Soit A un ensemble.

- (I) : « f(x) ≤ g(x) » où f et g sont deux fonctions de A vers $\mathbb{R}$, est appelée inéquation dans A, d'inconnue x.
- Tout élément α de A vérifiant f(α) ≤ g(α) est appelé solution de l'inéquation (I).
- Résoudre dans A l'inéquation (I), c'est rechercher l'ensemble des éléments de A qui sont solutions de (I).

Remarque :

Pour les inéquations, l'ensemble d'arrivée des fonctions f et g doit être $\mathbb{R}$, puisqu'il s'agit de
f(x) comparer et g(x).

Exemples d'inéquation :

$(I_1) : 2x - 3 > x + 5$

$(I_2) : x^2 - 9 \leq 2x(x-3)$

$(I_3) : \dfrac{x+2}{x+1} \leq \dfrac{7}{x-1}$

$(I_4) : |2x+1| \leq |x-3|$

II. EXEMPLES DE RESOLUTION D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

1- Exemples de résolution d'équations dans $\mathbb{R}$

a) Définition d'équations équivalentes

Deux équations sont équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions.

b) Equations liant deux polynômes

Activité 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) suivante : $E \ : -2x^2 + x + 4 = -x^2 + 2x - 2$

$$(E) \Leftrightarrow -2x^2 + x + 4 + x^2 - 2x + 2 = 0$$
$$(E) \Leftrightarrow -x^2 - x + 6 = 0$$
$$(E) \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$
$$(E) \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = 0$$
$$(E) \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0$$
$$(E) \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 0$$
$$(E) \Leftrightarrow (x+3)(x-2) = 0$$
$$(E) \Leftrightarrow x + 3 = 0 \text{ ou } x - 2 = 0$$
$$(E) \Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = 2$$

L'ensemble de solutions de l'équation (E) est $\{-3;2\}$

c) Equations liant deux fractions rationnelles

Activité 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E_2) suivante :

$$E_2 \ : \frac{x-2}{x-2 \quad x-1} = 2$$

Résolution par équivalence de l'équation (E_2)

Contraintes sur l'inconnue : $x-2 \quad x-1 \neq 0$

Or $x-2 \quad x-1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow x-2 \neq 0$ et $x-1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq 1$

Donc les contraintes sur l'inconnue sont : $x \neq 2$ et $x \neq 1$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \ 2;1 \ \ ;$ (E_2) $\quad \Leftrightarrow x-2 = 2(x-2)(x-1)$

$\Leftrightarrow 1 = 2(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x = 3$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

On a $\dfrac{3}{2} \in \mathbb{R} \setminus \ 2;1$ donc l'ensemble des solutions de (E_2) est : $\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

Activité 3 :

$$E_3 \ : \frac{1}{x+2} = \frac{-x}{x^2-4}$$

Résolution par implication de l'équation (E3)

$(E_3) \quad \Rightarrow x^2 - 4 = -x(x+2)$

$\Rightarrow x^2 - 4 = -x^2 - 2x$

$\Rightarrow x^2 - 4 + x^2 + 2x = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0$

$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$\Rightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} - 2 = 0$

$\Rightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4} = 0$

$\Rightarrow \ x+2 \quad x-1 \ = 0$

$\Rightarrow x+2 = 0$ ou $x-1 = 0$

$\Rightarrow x = -2$ ou $x = 1$

Vérification :

- Pour x = 1 on a $\dfrac{1}{3} = \dfrac{-1}{-3} = \dfrac{1}{3}$ donc 1 est solution de l'équation (E_3)
- Pour x = – 2 ; $\dfrac{1}{x+2}$ n'est pas définie donc – 2 n'est pas solution de (E_3).

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) est : 1

d) Equations avec valeurs absolues

Activité 5 : Equation du type $|f\,(x)\,| = g(x)$

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : E_6 : $|x-2| = x+3$

Contraintes sur l'inconnue x : $x+3 \geq 0$

Or $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$

$\forall\, x \in [-3;+\infty[$; E_6

$\Leftrightarrow$ x-2 = x+3 ou x-2 = -x-3

$\Leftrightarrow$ 0 = 5 (impossible) ou 2x = - 1

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

On a $-\frac{1}{2} \in [-3;+\infty[$ (... ion E_6 est : $-\frac{1}{2}$

Retenons

Pour résoudre une équation (E) du type $|f(x)| = |g(x)|$ on peut :

- Utiliser l'équivalence suivante : (E) $\Leftrightarrow f(x) = g(x)$ ou $f(x) = -g(x)$
- Résoudre successivement les équations $(E_1) : f(x) = g(x)$ et $(E_2) : f(x) = -g(x)$

L'ensemble des solutions de (E) est la réunion des ensembles de solutions de (E_1) et (E_2)

2- Exemples de résolution d'inéquations dans $\mathbb{R}$

a) Deux inéquations sont équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions.

b) Inéquations liant deux polynômes

Activité :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

I_1 : $2x-3 > x+5$

I_2 : $x^2-9 \leq 2x\ \ x-3$

c) Inéquations liant deux fractions rationnelles

Activité :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :

I_3 : $\dfrac{x+2}{x+1} \leq \dfrac{7}{x-1}$

d) Inéquations avec valeurs absolues

Activité :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :

$I_4 : |2x+1| \leq |x-3|$

Retenons

Pour résoudre une inéquation (I) du type $|f(x)| \leq |g(x)|$ on peut :

- Utiliser successivement les équivalences suivantes :

$$I \Leftrightarrow f(x)^{\ 2} \leq g(x)^{\ 2}$$
$$\Leftrightarrow f(x)^{\ 2} - g(x)^{\ 2} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow f(x)-g(x)\ \ f(x)+g(x) \leq 0$$

- Résoudre ensuite par les méthodes habituelles l'inéquation : $I' : f(x)-g(x)\ \ f(x)+g(x) \leq 0$

EXERCICES

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$E_1 : 2x-3\ \ x-1^{\ 2} = 4\ 2x-3$ $\qquad E_2 : 2x^2+x-3 = x^2-3x-3$ $\qquad E_3 : \dfrac{1-2x}{2-x} = \dfrac{3-2x}{2+x}$

$E_4 : \dfrac{x^2}{x-1} = 4$ $\qquad E_5 : |2X-5| = |7-x|$ $\qquad E_6 : |x^2-5x+13| = |6x-15|$

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

$I_1 : 2-x\ \ 2x+1 \geq 0$; $\qquad I_2 : x-1\ \ 2x+3 < x-1\ \ x-2$ $\qquad I_3 : \dfrac{x-2}{x+1} < \dfrac{2x+5}{x}$

$I_4 : \dfrac{3x+2}{x-1\ \ x-2} \leq 1$ $\qquad I_5 : |2x-1| \leq |x+4|$ $\qquad I_6 : |x^2-5x-15| \leq |6x+13|$

Leçon 12 : HOMOTHETIES

COMPETENCE : 1

THEME : TRANSFORMATION DU PLAN

Leçon 12 : HOMOTHETIES

Nombre de séances : 6h+2h=8h

Tableau des habiletés et contenus

Habiletés	Contenus
♦ Connaitre	- La définition d'une homothétie - La propriété relative à l'alignement d'un point, de son image et du centre de l'homothétie - La propriété relative aux points invariants par une homothétie - La propriété fondamentale de l'homothétie - Les propriétés relatives aux images de figures simples par une homothétie - Les propriétés relatives à la conservation de l'alignement, du parallélisme, à l'orthogonalité, au milieu et aux angles orientés par une homothétie - La propriété relative à la multiplication des longueurs et des aires par les homothéties
♦ Construire	- L'image d'un point par une homothétie en utilisant la définition - L'image d'une droite, d'un segment, d'une demi-droite, d'un cercle par une homothétie - L'image d'un point par une homothétie définie par l'une de ses caractérisations
♦ Démontrer	- Que deux droites sont parallèles en utilisant une homothétie - Que des droites sont perpendiculaires en utilisant une homothétie - Une égalité d'angles en utilisant une homothétie - Qu'un point est le milieu d'un segment en utilisant une homothétie
♦ Traiter une situation	- Faisant appel aux homothéties

Situation d'apprentissage

Le panneau de signalisation à l'entrée d'un lycée est devenu vétuste et illisible. Les élèves de la promotion seconde dudit lycée veulent faire repeindre ce panneau et faire confectionner un autre trois fois plus grand que l'ancien. Le présent de la promotion propose le schéma ci-contre.

Il a fallu 10000 f pour peindre le 1er panneau.

Les élèves se demandent combien il faudra débourser pour peindre le nouveau panneau sachant que les couts restent inchangés.

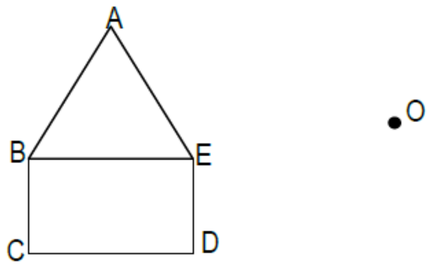
Un élève de la promotion affirme qu'il peut rapidement calculer ce montant connaissant l'aire du 1er panneau. Ses amis de classe cherchent à vérifier cette affirmation. Ils sollicitent donc leur professeur de mathématiques qui leur demande de faire des recherches sur les homothéties.

I. DEFINITION

ACTIVITE

Soit h l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tels que $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM}$.
A', B', C', D' et E' sont les images respectives des points A, B, C, D et E par l'application h.

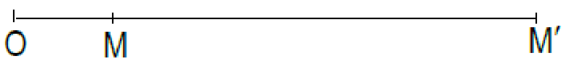
1) Ecrire les relations liant les points et leurs images
2) Sur la figure ci-dessous, construire les points A', B', C', D' et E' à partir de l'application h.
3) Tracer en rouge la figure A', B' C', D' E' obtenue et comparer la taille des deux figures.
4) Quelle est l'image du point O par l'application h?
5) Comparer les distances OA et OA'.
6) Sachant que $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM}$, que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ puis des points O, M et M'?



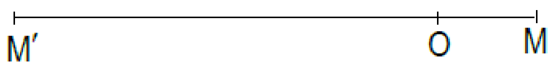
Cette application h est appelée homothétie de centre O et de rapport 2.

du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe le point M' tel que : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = K\overrightarrow{\mathrm{OM'}}$

$k > 0$



$k < 0$



Cette homothétie est généralement notée : $h_{(O,k)}$

II. Propriétés

Propriété 1

Un point M, son image M' par une homothétie et le centre de cette homothétie sont alignés.

Vocabulaire

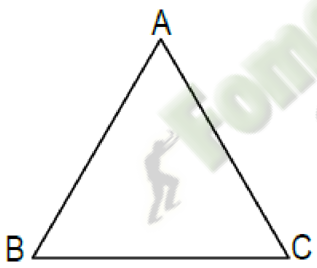
Un point est invariant par une application f du plan P dans lui-même lorsqu'il est sa propre image. Il est immédiat que O est invariant par $h_{(O,k)}$

Propriété 2

Le seul point invariant, par une homothétie de rapport différent de 1, est son centre

Exercices d'application

On considère le triangle ABC ci-dessous. Construire l'image de B et C par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

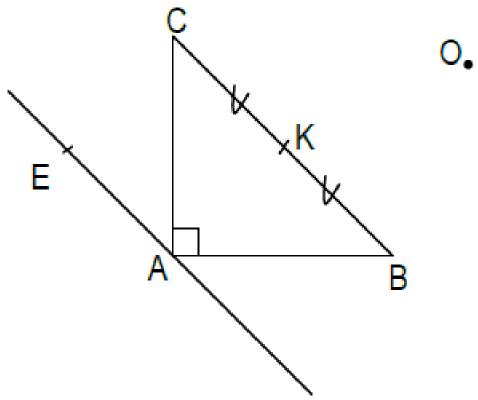


III. Propriétés de l'homothétie

Activité

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle rectangle en A; K est le milieu du segment [BC] et la droite (EA) est parallèle à la droite (BC).

1) Construire les points A', B', C', E' et K' images respectives des points A, B, C, E et K par l'homothétie de centre O et de rapport 2.



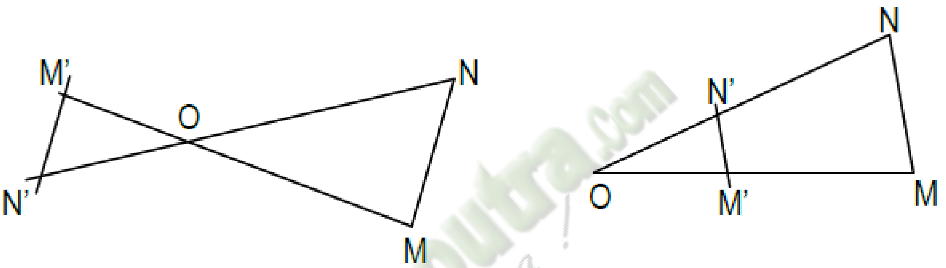
2) Compléter les égalités vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{A'B'} = \cdots \ldots \ldots . \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{C'K'} = \cdots \ldots \ldots . \overrightarrow{CK}$; $\overrightarrow{E'A'} = \cdots \ldots \ldots . \overrightarrow{EA}$

3) Quelle est la position relative des droites (A'B') et (A'C')?
4) Quelle est la position relative des droites (E'A') et (B'C')?
5) Quel est le milieu du segment [B'C']?
6) Que peut-on dire des points B', C' et K'?

1- Propriété fondamentale

Soit h une homothétie de rapport k, M' et N' les images respectives par h de deux points quelconques M et N: on a : $\overrightarrow{M'N'} = K\overrightarrow{MN}$



2- Images de figures simples

Soit h une homothétie de rapport k , A', B' et I' les images respectives de A, B (avec A ≠ B) et I par h :

1. L'image de la droite (AB) est la droite (A'B') et (A'B') est parallèle à (AB)
2. L'image du segment [AB] est le segment [A'B']
3. L'image de la demi-droite [AB) est la demi-droite [A'B')
4. L'image du cercle de centre I et de rayon r est le cercle de I' et de rayon $|k|r$

3- Conservation de l'alignement, du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu d'un segment et des angles orientés

- Toute homothétie transforme :

1. Trois points alignés en trois points alignés ;
2. Deux droites parallèles en deux droites parallèles ;
3. Deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires ;
4. Le milieu d'un segment en le milieu du segment image.

- Soit A, B, C trois points d'images respectives A', B', C' par une homothétie.
  On a: $\left(\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{C'B'}\right) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ (on dit l'homothétie conserve les angles orientés)

4- Multiplication des longueurs et des aires

Soit h une homothétie de rapport k

(1) L'image d'un segment de longueur l est un segment de longueur $|k|l$

(2) L'image d'une figure d'aire A est une figure d'aire $K^2 A$

Exercice d'application :

L'unité est le centimètre

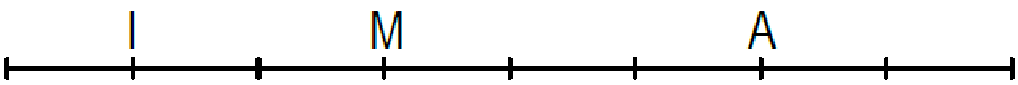
Sur la figure ci-dessous, (C) est un cercle de centre O et de rayon 1,5.

1. Construire l'image (C') de (C) par l'homothétie h de centre A et de rapport – 2.
2. Calculer l'aire du cercle (C) puis en déduis l'aire de (C'). (On prendra $\pi = 3{,}1$).
3. Calculer le rayon du cercle (C').

IV. Caractérisations d'une homothétie

1- Homothétie définie par son centre, un point et son image
Activité

Soit I, M et A trois points alignés et distincts deux à deux comme l'indique la figure ci-dessous.



1) Montrer qu'il existe une homothétie et une seule de centre I qui transforme M en A.

2) Déterminer son rapport

Propriété

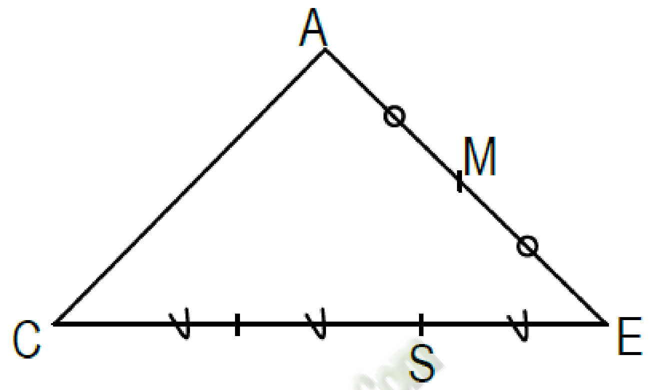
Soit trois points alignés O, A, A' deux à deux distincts. Il existe une homothétie et une seule de centre O qui transforme A en A'

Exercice d'application

On donne la figure ci-contre.

h est l'homothétie de centre S qui transforme C en E.

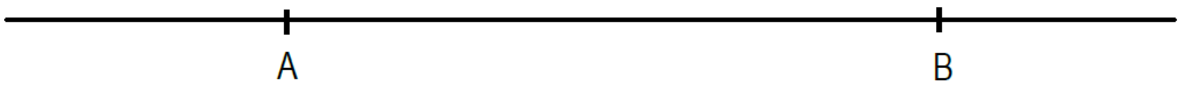
Construire les points A' et M' images respectives de A et M par h.



2- Homothétie définie par son rapport, un point et son image
Activité

Sur la figure ci-dessous.

1) Construire le centre O de l'homothétie h de rapport – 2 qui transforme A en B



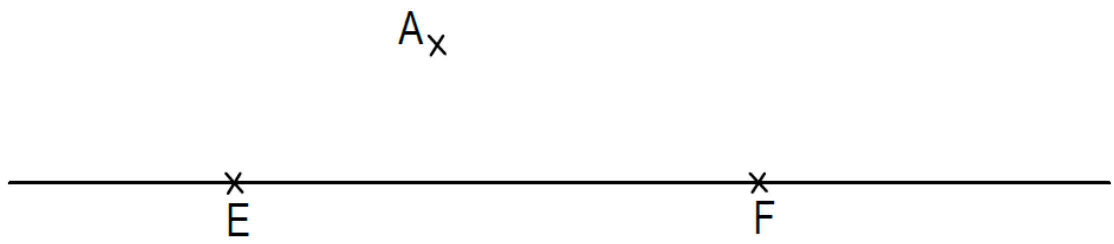
2) h étant de rapport k différent de zéro et de un, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AO}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Propriété

Soit un nombre réel k différent de 0 et 1, deux points A et A'. Il existe une homothétie et une seule de rapport k qui transforme A en A'.

Exercice d'application

Soit h une homothétie de rapport 2 qui transforme E en F. Construire le point B image du point A par h.



3- Homothétie définie par deux points et leurs images

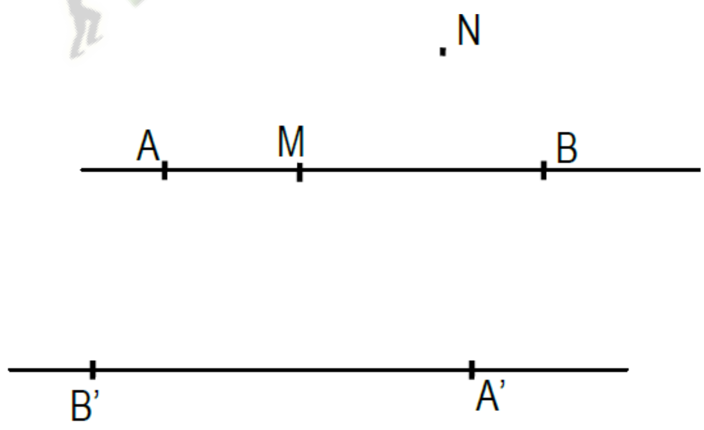
Propriété

Soit quatre points A, B, A',B' tels que (AB) // (A'B') et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$. Il existe une homothétie et une seule qui transforme A en A' et B en B'.

Exercice d'application

On donne les points A, B, A', B', M et N comme l'indique la figure ci-dessous. Soit h l'homothétie qui transforme A en A' et B en B'.

Construire les points M' et N' images respectives de M et N par h.



Leçon 13 : ETUDE DE FONCTIONS ELEMENTAIRES

COMPETENCE : 2

THEME : FONCTION

Leçon 13 : ETUDE DE FONCTIONS ELEMENTAIRES

Nombre de séances : 10h+2h=12h

Tableau des habiletés et contenus

Habiletés	Contenus
♦ Identifier	- une fonction affine par intervalles
♦ Reconnaitre	- Les fonctions élémentaires
♦ Représenter	- Les fonctions élémentaires ($x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \|x\|$; $x \mapsto E(x)$) - La fonction $x \mapsto \|ax+b\|$
♦ Calculer	- La partie entière d'un nombre réel
♦ Etudier	- Le sens de variation des fonctions élémentaires et dresser leur tableau de variations - Les fonctions du : $x \mapsto ax^2$; $x \mapsto \frac{a}{x}$; $(a \in \mathbb{R}^*)$ en utilisant les fonctions élémentaires
♦ Traiter une situation	- Faisant appel aux fonctions élémentaires

Situation d'apprentissage

Lors d'une exposition à une kermesse, des élèves d'une classe de seconde apprécient particulièrement la toile représentée par la figure ci-contre.

L'auteur affirme que cette toile a été obtenue à partir des représentations de plusieurs fonctions élémentaires dont certaines sont étudiées en seconde.

Emerveillés, les élèves décident d'identifier et de représenter graphiquement ces fonctions élémentaires.

I. FONCTIONS AFFINES PAR INTERVALLES

1- Définition

- On appelle fonction affine par intervalles, toute fonction numérique f d'une variable réelle dont l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles sur chacun desquels f coïncide avec une fonction affine.

- Lorsque sur chacun de ces intervalles f coïncide avec une fonction constante, on dit que f est une fonction en escalier.

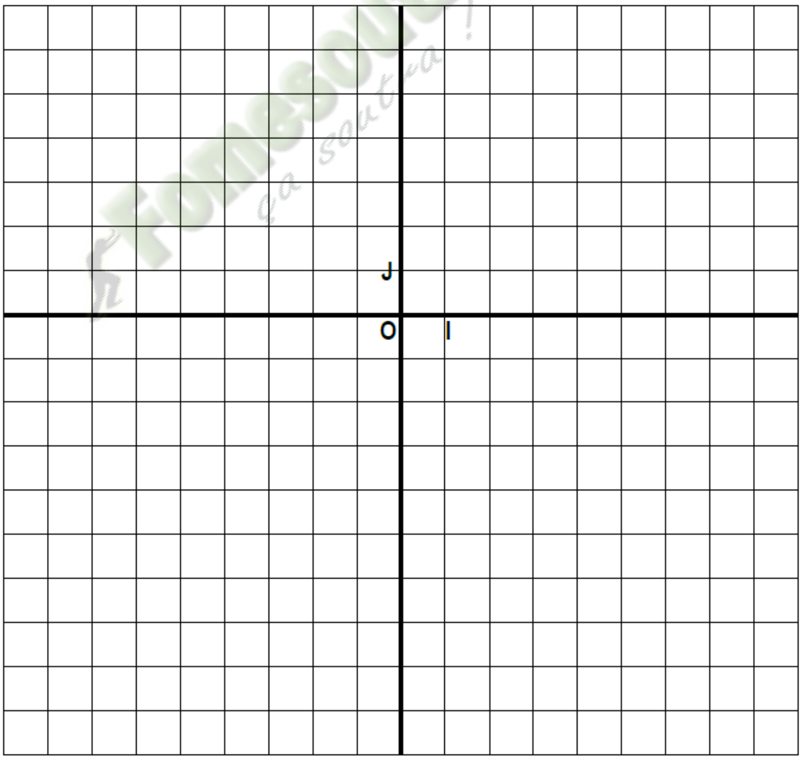
Exemple d'étude de fonctions affines par intervalles

Exemple 1

On considère la fonction f affine par intervalles définie par :

- Pour $x \in [-4; -2[$, $f(x) = 2x + 5$
- Pour $x \in [-2; 1[$, $f(x) = -x - 1$
- Pour $x \in [1; 5[$, $f(x) = -2$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Calcule f (- 1) f (0) f (4,3)
3. Donner le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles : $[-4; -2[$; $[-2; 1[$; $[1; 5[$
4. Dresser le tableau de variation de f sur Df.
5. Construire la représentation graphique (Cf) de f.



Remarque :

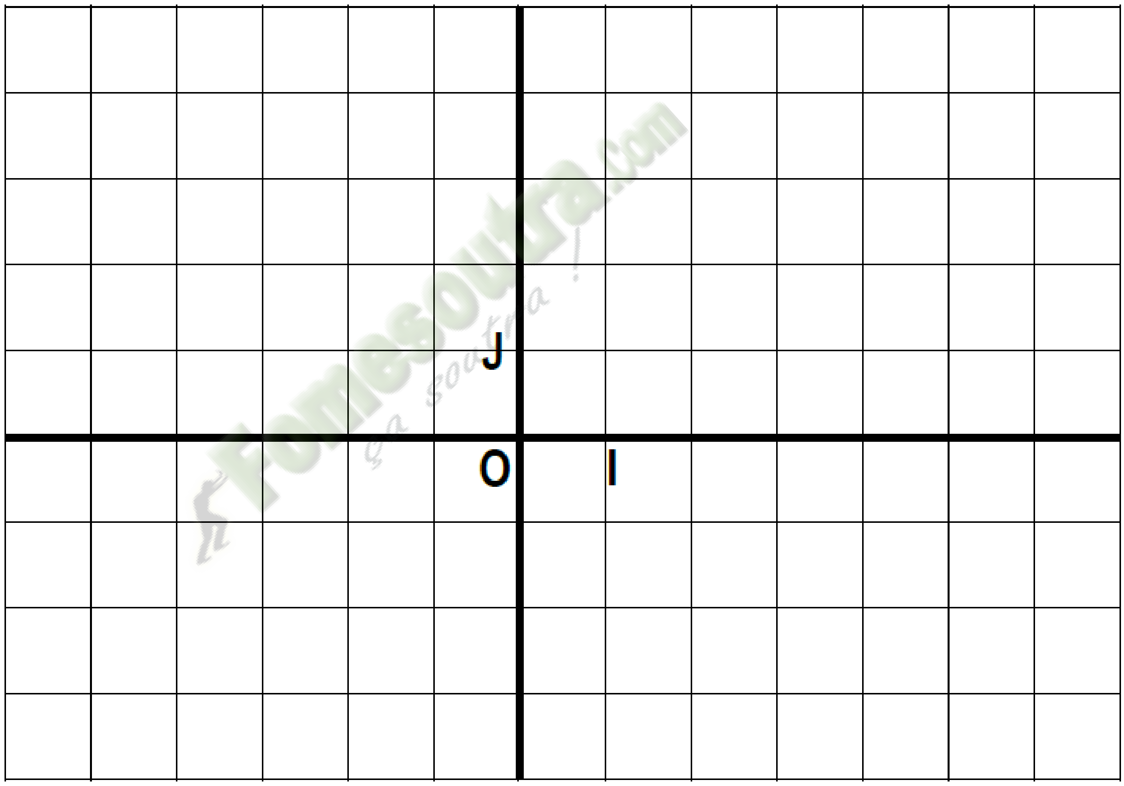
La représentation graphique d'une fonction affine par intervalles est une réunion de segments ou de demi-droites.

2- de la fonction valeur absolue

Soit la fonction $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto |x|$$

1) Donner Dg.
2) Montrer que la fonction valeur absolue est une fonction affine par intervalles (on pourra écrire g(x) sans le symbole valeur absolue)
3) le sens de variation de la fonction g sur chacun des intervalles $[-\infty; 0[$ et $[0; +\infty[$
4) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur Dg.
5) Construire la représentation graphique (Cg) de la fonction g



Exercice :

Fonctions dont l'expression contient des valeurs absolues.

On considère la fonction $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto |-2x + 4|$$

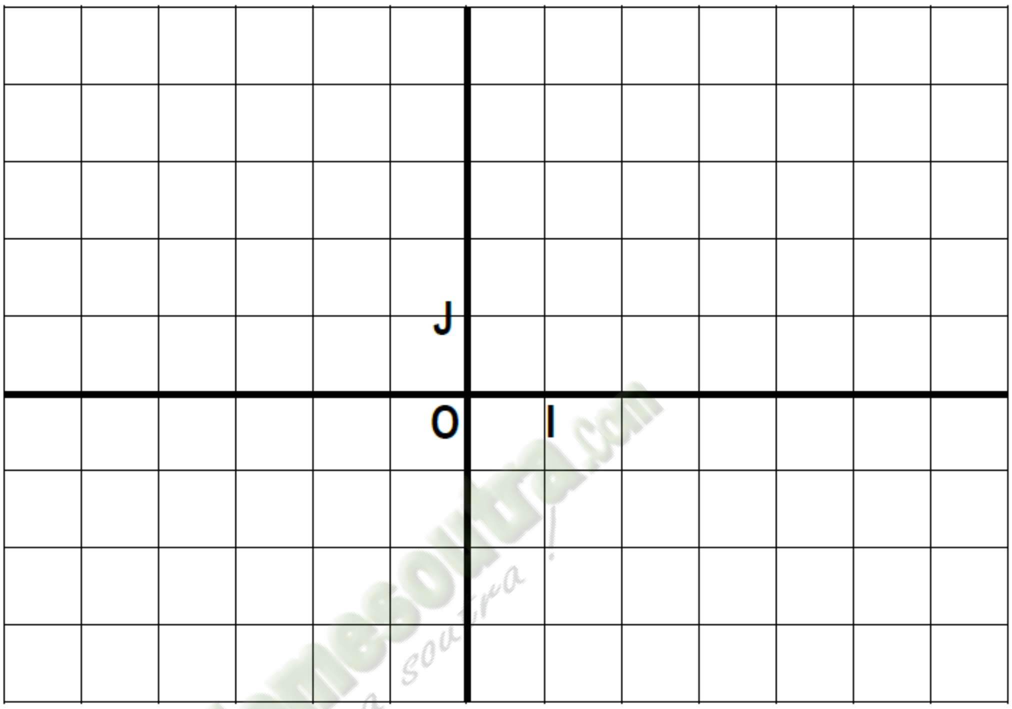
1) Déterminer l'ensemble de définition Dh de h.

2) Montrer que h est une fonction affine par intervalles

3) Donner le sens de variation de la fonction h.

4) Dresser le tableau de variation de la fonction h.

5) Construire la représentation graphique (Ch) de h.



3- Fonction partie entière

a) Définition de la partie entière d'un nombre réel.

La partie entière d'un nombre réel x est le nombre entier relatif n vérifiant : $\mathrm{n} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{n}+1$. Elle est notée E(x)

Exemple :

Donner la partie entière des nombres réels suivants : – 7,2 ; 12,8 ; 0,63 ; – 0,63 ; 2 ; 0 ; – 15.

b) Etude de la fonction partie entière

Soit la fonction partie entière f : $\mathrm{h}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

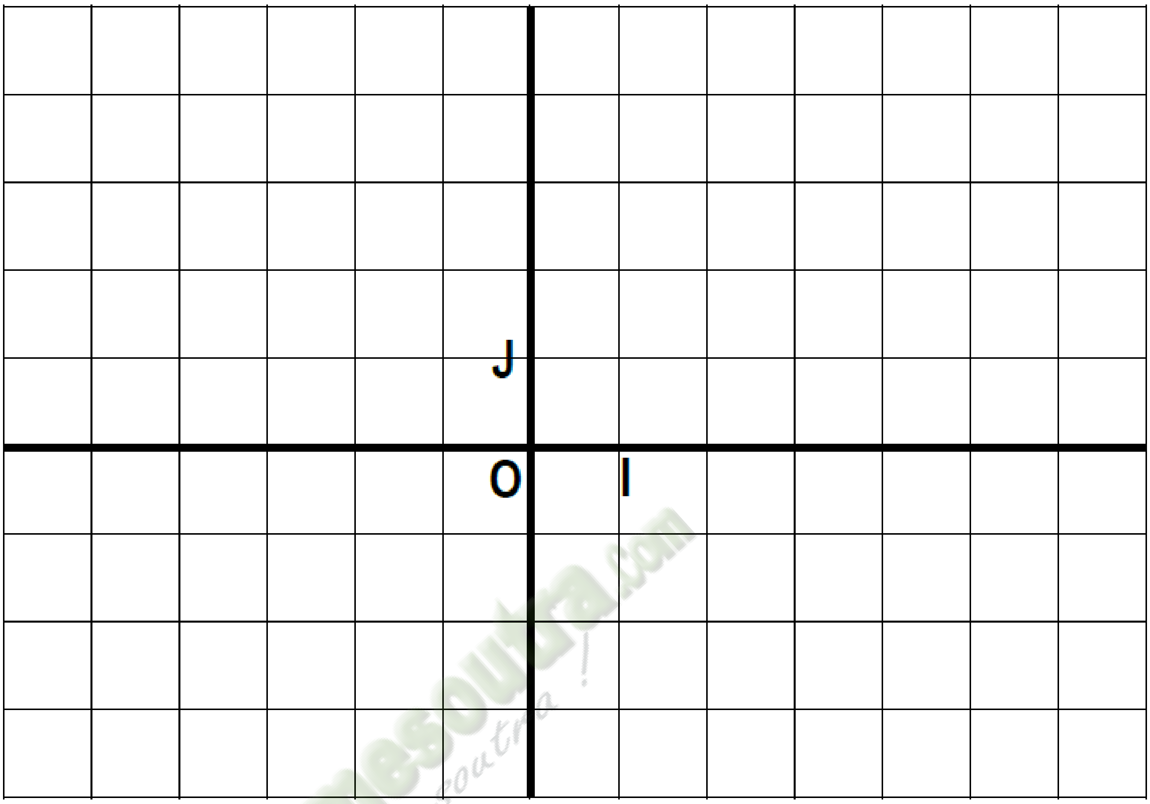
$$\mathrm{x} \longmapsto \mathrm{E}(\mathrm{x})$$

1. Donner l'ensemble de définition Df de f.
2. Compléter le tableau suivant :

x	$[-3;-2[$	$[-2;-1[$	$[-1;0[$	$[0;1[$	$[1;2[$	$[2;3[$
E(x)						

3. Donner le sens de variation de la fonction f sur chacun de ces intervalles

4. Construire la représentation graphique (Cf) de f sur [- 3;3[



II. FONCTIONS ELEMENTAIRES

1- Etude de la fonction carrée

Activité 1

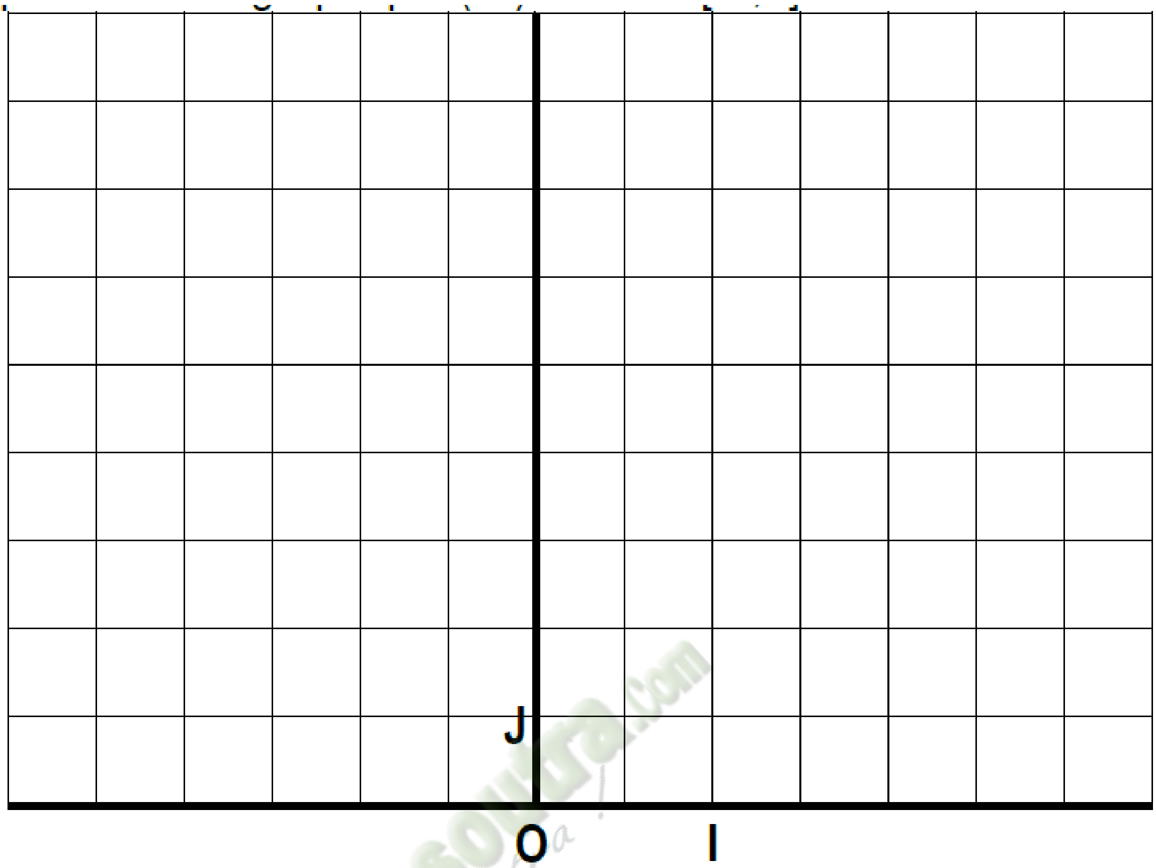
Soit la fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ d'ensemble de définition Df

$$x \longmapsto x^2$$

1. Déterminer Df sous forme de réunion d'intervalles.
2. Etudier le sens de variation de la fonction f sur Df.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur Df
4. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
F(x)							

5. Construire la représentation graphique (Cf) de f sur [-3;3].



2- Etude de la fonction inverse
Activité 2

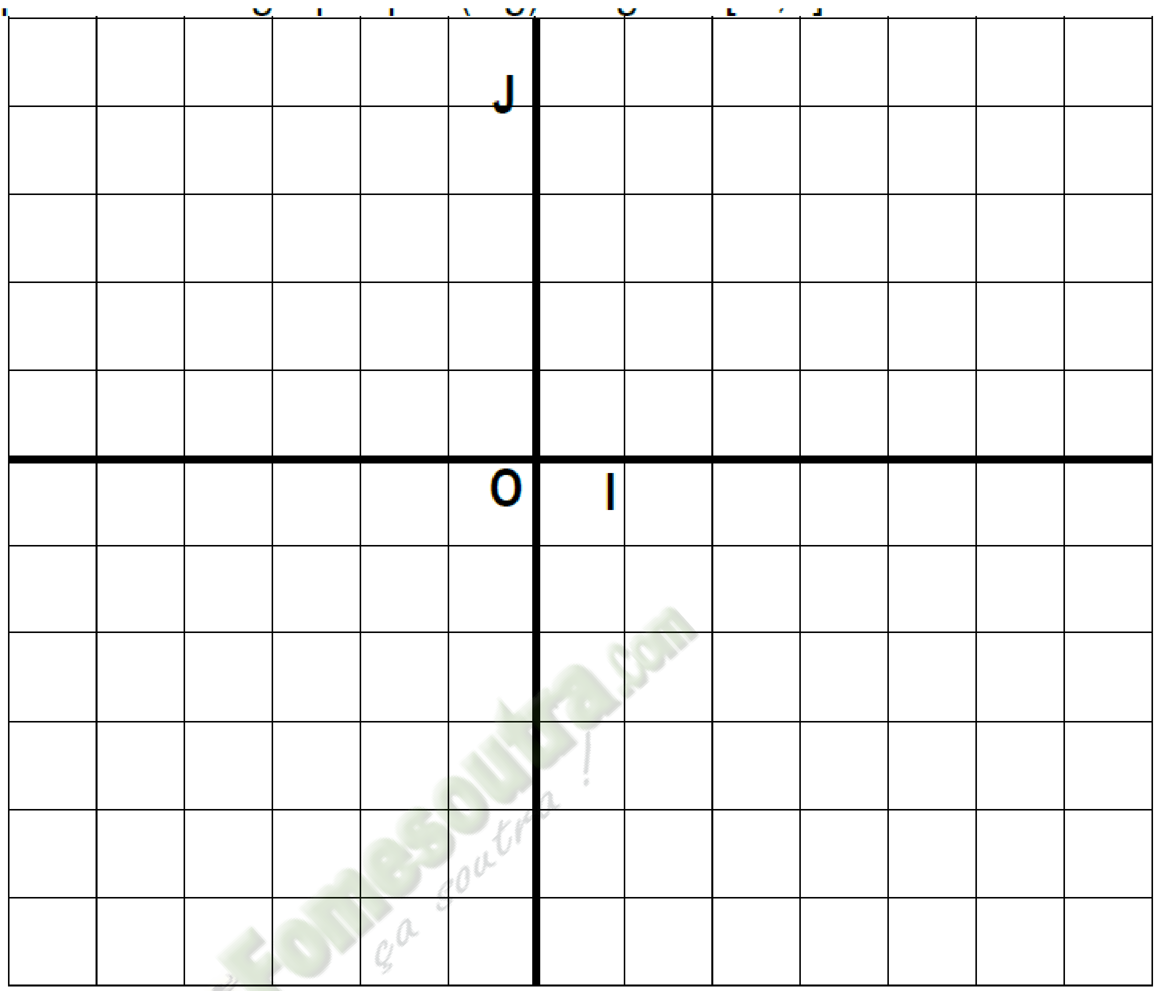
Soit la fonction $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ d'ensemble de définition Dg .

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

1. Déterminer Dg sous forme de réunion d'intervalles.
2. Etudier le sens de variation de la fonction g sur Dg.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction g sur Dg.
4. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
g(x)							

5. Construire la représentation graphique (Cg) de g sur [-4;4].



3- Etudier de la fonction racine carrée
   Activité

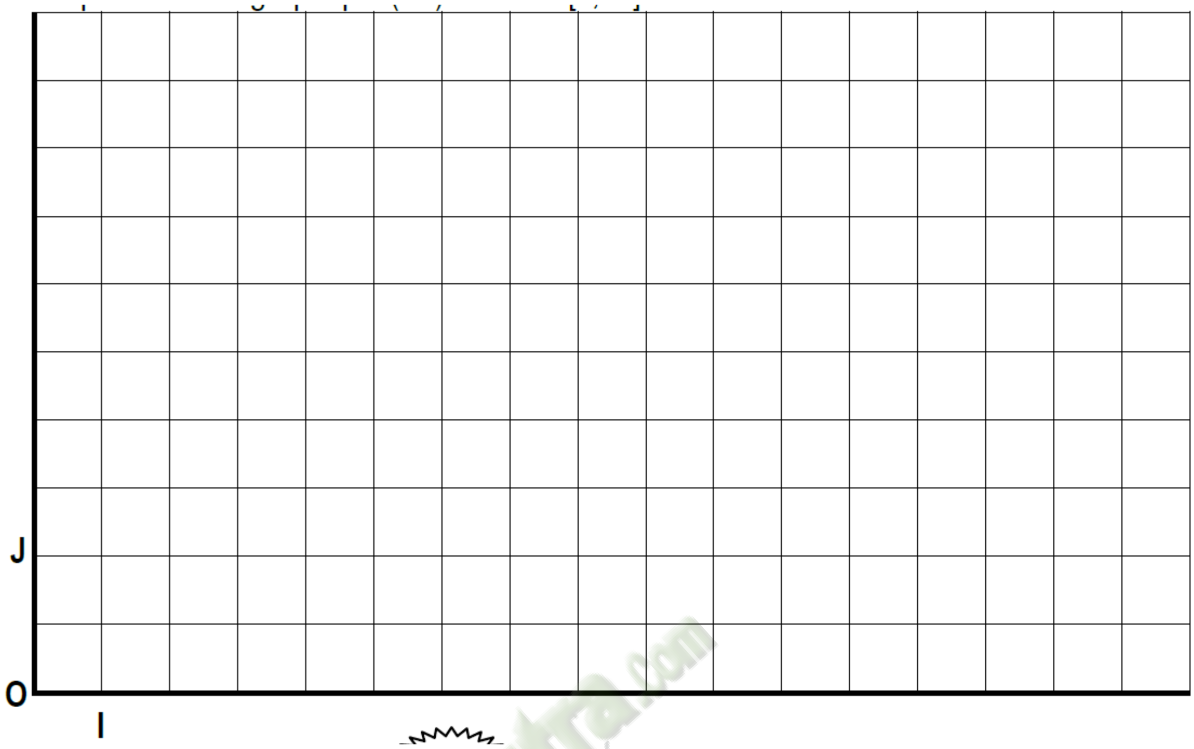
Soit la fonction $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ d'ensemble de définition Dh.

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

1. Déterminer Dh.
2. Etudier le sens de variation de la fonction h sur Dh.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction h sur Dh.
4. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	0	1	4	9	16
h(x)					

5. Construire la représentation graphique (Ch) de h sur [0;16].



4- Etude de la fonction cube
Activité

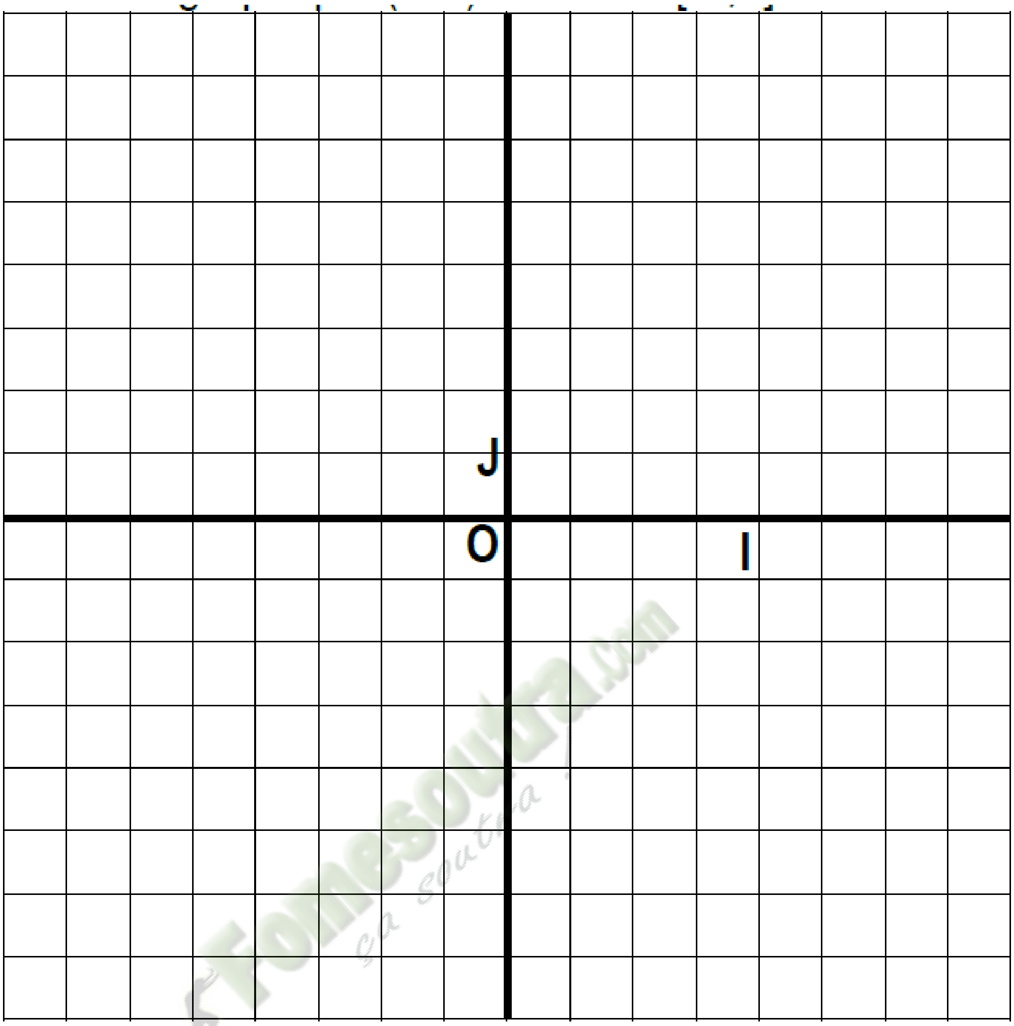
Soit la fonction $m: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ d'ensemble de définition Dm

$$x \longmapsto x^3$$

1. Déterminer Dm sous forme de réunion d'intervalles.
2. Etudier le sens de variation de la fonction m sur Dm.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction m sur Dm.
4. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-2	-1	0	1	2
g(x)					

5. Construire la représentation graphique (Cm) de m sur [-2;2].



III. UTILISATION DES FONCTIONS ELEMENTAIRES

1- Etude de la fonction ax2 avec $a \neq 0$

Soit la fonction f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

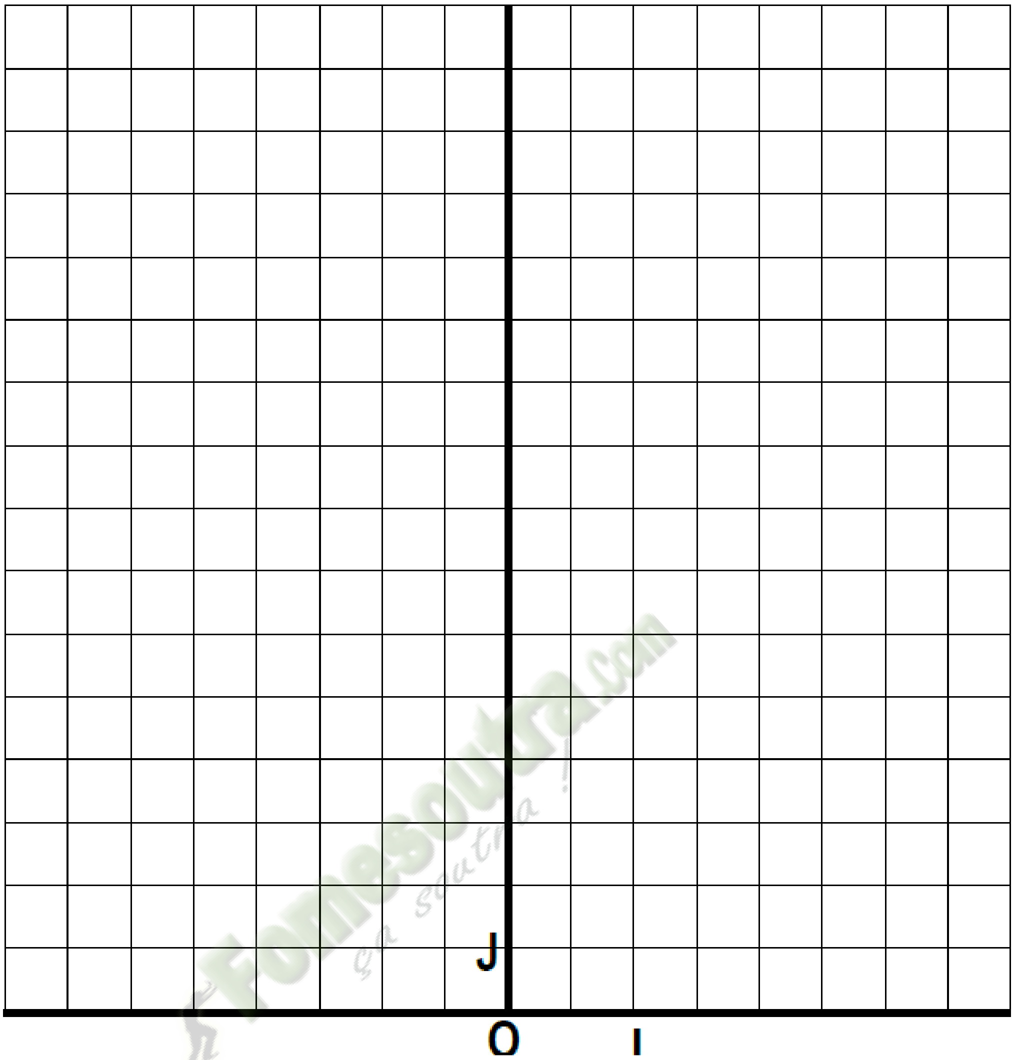
$$x \longmapsto ax^2 \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*$$

1er cas : a > 0

1. Déterminer Df sous forme d'intervalle.
2. Etudier le sens de variation de la fonction f sur Df.
3. Dresser le tableau de variation de f sur Df
4. Pour a = 2, compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)							

5. Pour a = 2, construire la représentation graphique (Cf) de f sur [-3;3].

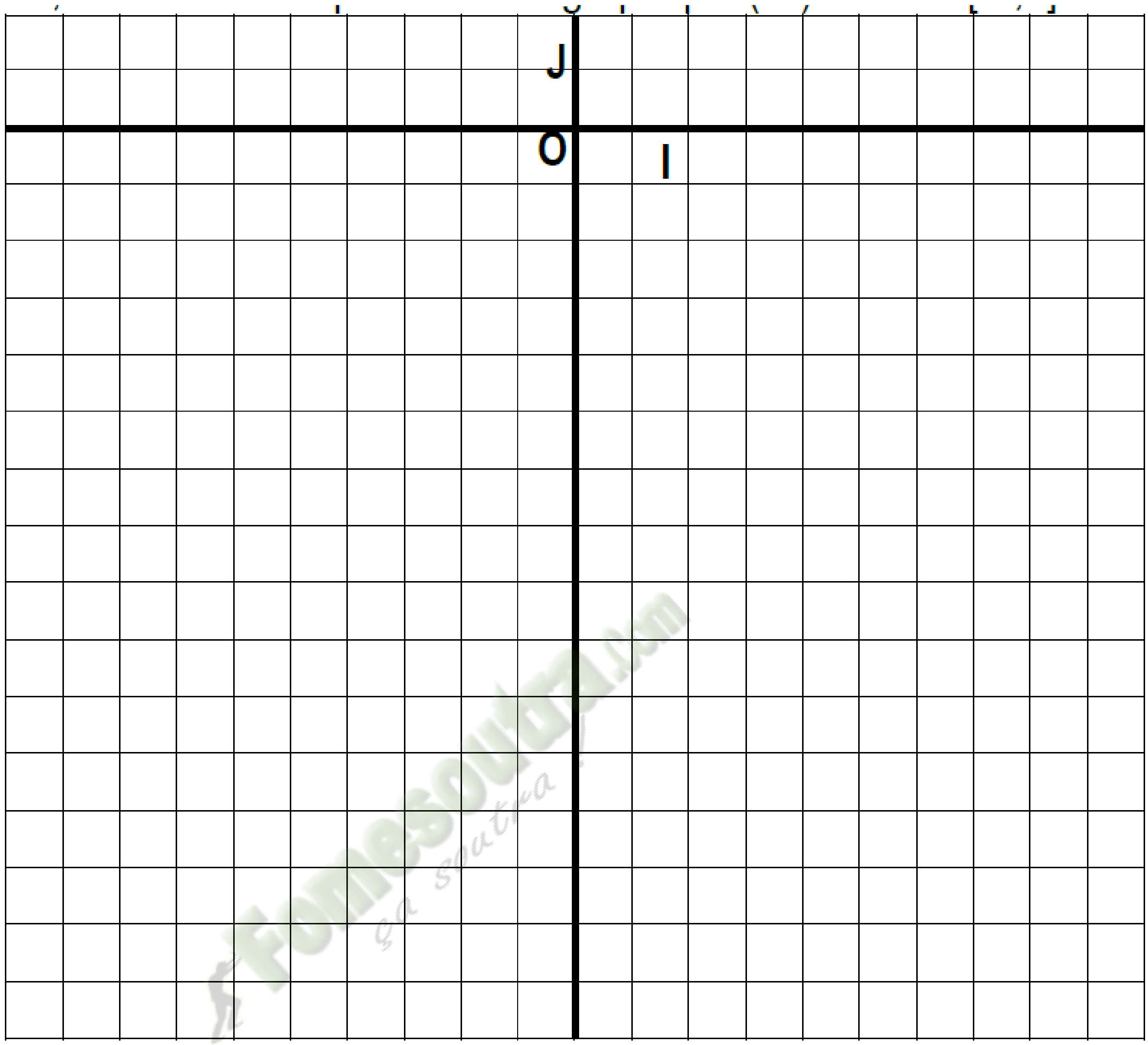


2e cas: a < 0

1. Déterminer Df sous forme d'intervalles.
2. Etudier le sens de variation de f sur Df.
3. Dresser le tableau de variation de f sur Df
4. Pour a = -2, compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)							

5. Pour a = -2, construire la représentation graphique (Cf) de f sur [-3;3].



2- Etude de la fonction a avec $\frac{a}{x}$ avec $a \neq 0$

Soit la fonction $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ d'ensemble de définition Dg.

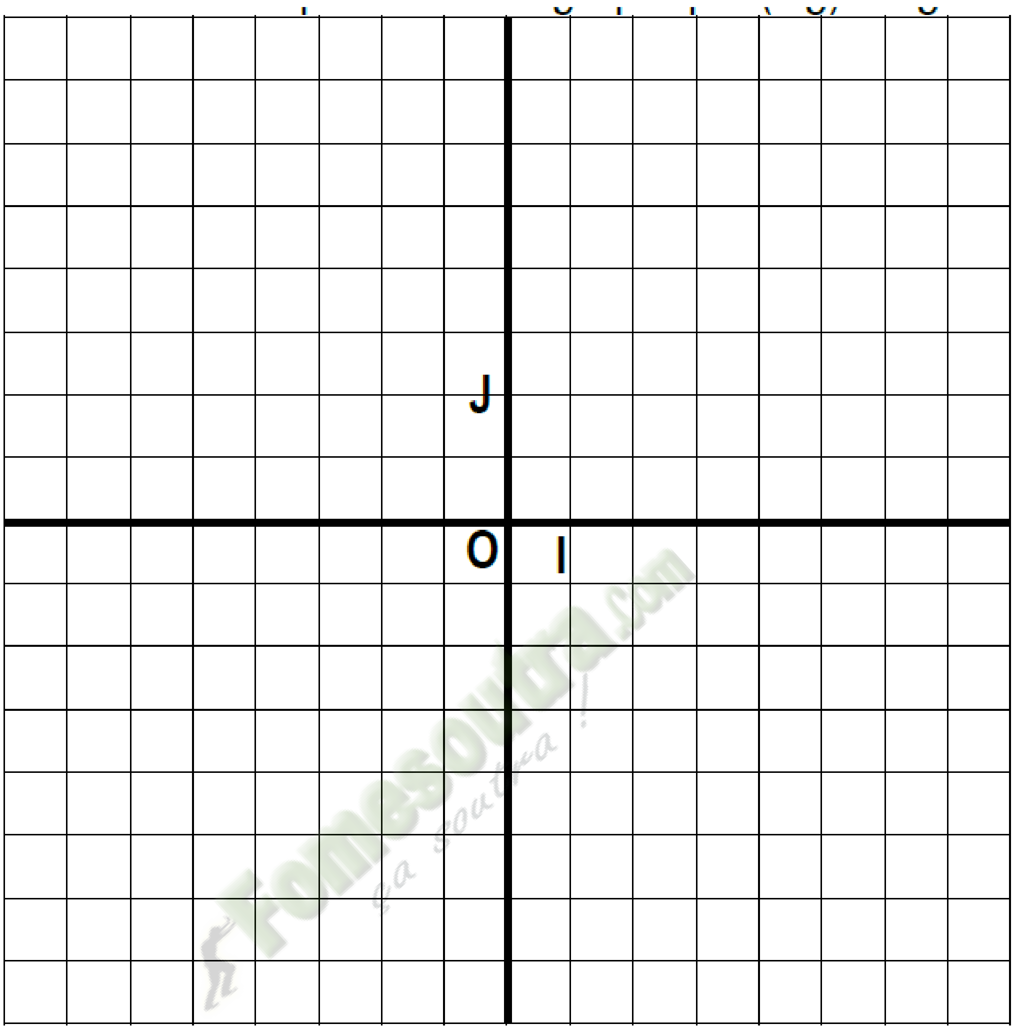
$$x \longmapsto \frac{a}{x} \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*$$

1er cas : a > 0

1. Déterminer Dg sous forme de réunion d'intervalles.
2. Etudier le sens de variation de g sur Dg.
3. Dresser le tableau de variation de g sur Dg.
4. Pour a = 2, compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
g(x)									

5. Pour a = 2, construire la représentation graphique (Cg) de g sur [-4;4].

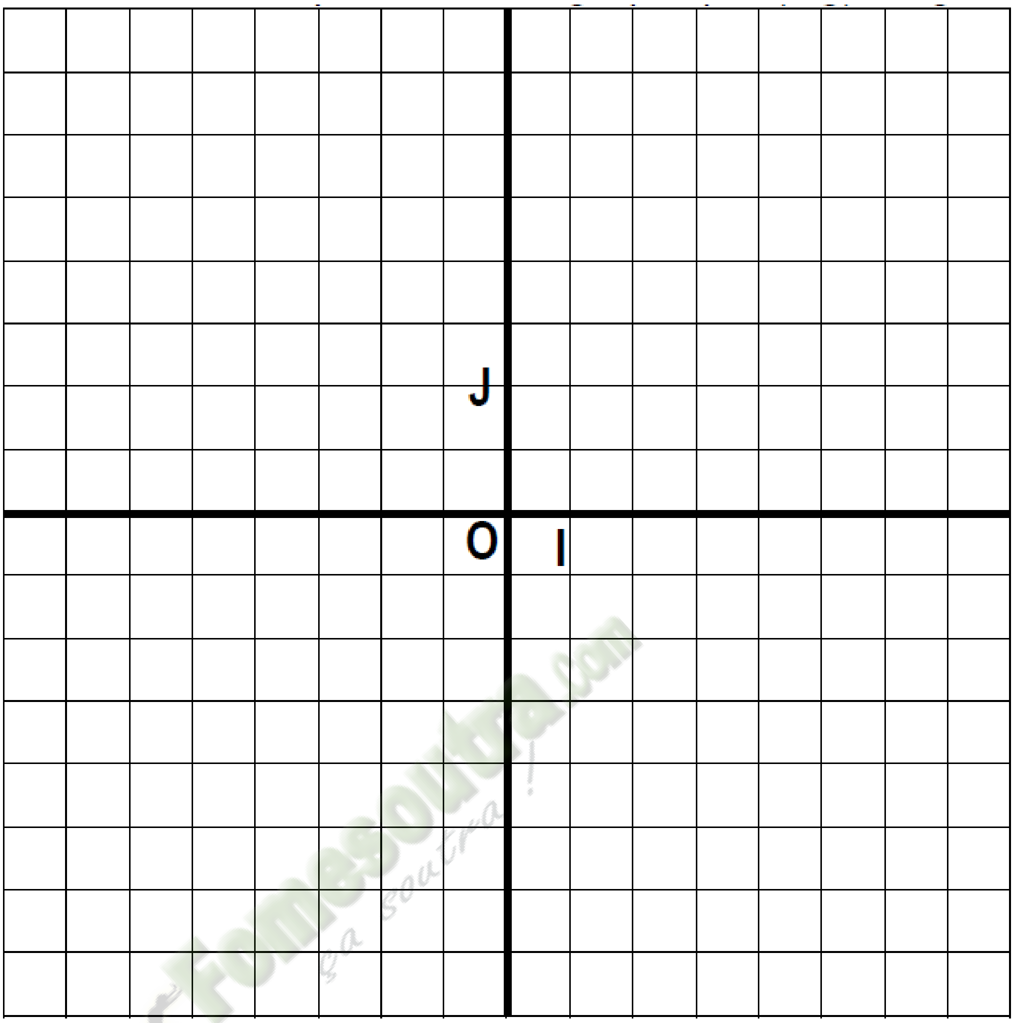


2e cas : a < 0

1. Déterminer Dg sous forme de réunion d'intervalles.
2. Etudier le sens de variation de g sur Dg.
3. Dresser le tableau de variation de g sur Dg.
4. Pour a = – 2, compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
g(x)									

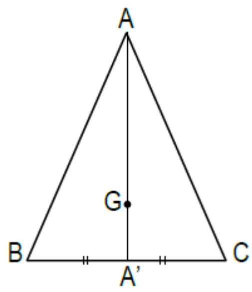
5. Pour a = -2, construire la représentation graphique (Cg) de g sur [-4;4]. OJ=2 cm ; OI=1 cm



EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

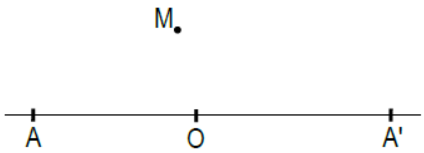
Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle de centre de gravité G, A' est le milieu de [BC].

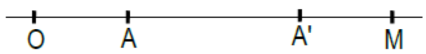


1) Déterminer le rapport k de l'homothétie h de centre A qui transforme A' en G.
2) Démontrer que l'homothétie h' de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ transforme A en A'

Exercice 2

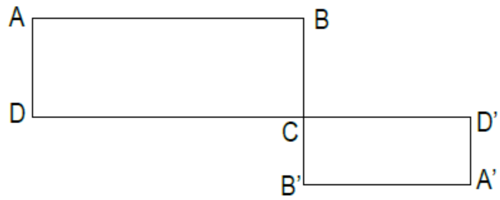
Dans chacun des cas suivants, construire le point M' l'image du point M par l'homothétie h de centre O qui transforme A en A'.





Exercice 3 (l'unité est le centimètre)

On donne deux rectangles ABCD et CB'A'D' comme indiqué sur la figure ci-contre. On a AB = 4 ; BC =2 ; CD'= 2 ; et CB' = 1



1) Montrer qu'il existe une homothétie h de centre C qui transforme D en D' et B en B' ; Déterminer son rapport k.
2) Montrer que A' est l'image de A par h.
3) Justifier que les droites (BD) et (B'D') sont parallèles.

Leçon 14 : ROTATION

COMPETENCE : 1

THEME : TRANSFORMATION DU PLAN

Leçon 14 : ROTATION

Nombre de séances : 6h+2h=8h

Tableau des habiletés et contenus

Habiletés	Contenus
♦ Connaitre	- La définition d'une rotation - La propriété fondamentale de la rotation - Les propriétés relatives aux images de figures simples par une rotation - Les propriétés relatives à la conservation de l'alignement, du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu et des angles orientés par une rotation - La propriété relative à la conservation des longueurs et des aires par une rotation
♦ Construire	- L'image d'un point par une rotation en utilisant la définition - L'image d'une droite, d'un segment, d'une demi-droite, d'un cercle par une rotation
♦ Démontrer	- Que deux droites sont parallèles en utilisant une rotation - Que des droites sont perpendiculaires en utilisant une rotation - Une égalité d'angles en utilisant une rotation - Qu'un point est le milieu d'un segment en utilisant une rotation
♦ Traiter une situation	- Faisant appel aux rotations

Situation d'apprentissage

Un groupe d'élèves d'une classe de 2nde C est allé à la bibliothèque pour faire des recherches. Ils découvrent le tableau ci-contre accroché au mur.

L'ayant apprécié, ces élèves demande au bibliothécaire la permission d'en prendre une photo pour le reproduire sur du papier.

Le bibliothécaire leur apprend que selon l'auteur, c'est un motif qui a été reproduit six fois sur du disque en bois à l'aide d'une rotation.

Fort de ces informations, ces élèves décident d'étudier les rotations pour faire une bonne représentation.

I. Définition

Activité

Soit r une application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tels que OM'=OM et $\text{Mes}\left(\overrightarrow{\text{OM}}, \overrightarrow{\text{OM}'}\right) = \frac{\pi}{3}$. Les points A' et B' sont les images respectives des points A et B par l'application r.

1) Compléter les égalités suivantes:
   OA'=……………………………………………..et $\text{Mes}\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OA}'}\right)$………………………..
   OB'=……………………………………………..et $\text{Mes}\left(\overrightarrow{\text{OB}}, \overrightarrow{\text{OB}'}\right)$………………………..

2) Sur la figure ci-dessous, construire les point A' et B'.
3) Quelle est l'image du point O par l'application r ?

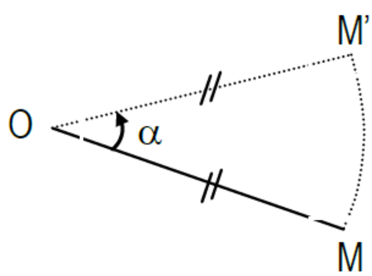
- L'application r est appelée rotation de centre O et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{3}$

1. Définition

Soit O un point, α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$

On appelle rotation de centre O et d'angle α l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que :

- Si M = O, alors M' = M
- Si M ≠ O ; alors OM' = OM et $\text{Mes}\left(\overrightarrow{\text{OM}}, \overrightarrow{\text{OM}'}\right) = \alpha$



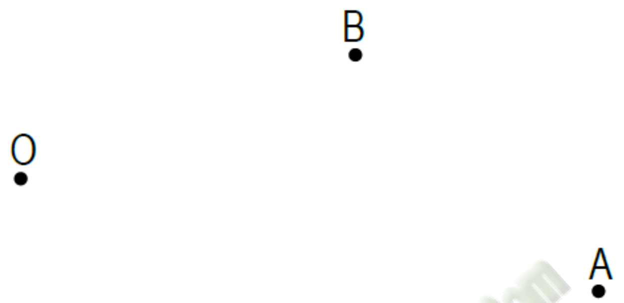
On note généralement $r_{(o,\alpha)}$la rotation de centre O et d'angle α.

2. Propriété

Le seul point invariant par une rotation d'angle non nul est le centre de cette rotation.

Exercice d'application

On donne les points O, A et B ci-dessous



1) Construire l'image B' de B par la rotation de centre O et d'angle orienté de mesure π
2) Observer les points O, B et B'. Justifier que O est le milieu du segment [BB']
3) Construire l'image A' de A par la rotation de centre O et d'angle orienté 0 (zéro) et observer les points O, A et A'. Que peut-on constater ?

Remarques

- Si $\alpha = 0$; tout point est sa propre image par la rotation r d'angle de mesure α. Une telle

application est l'identité du plan.

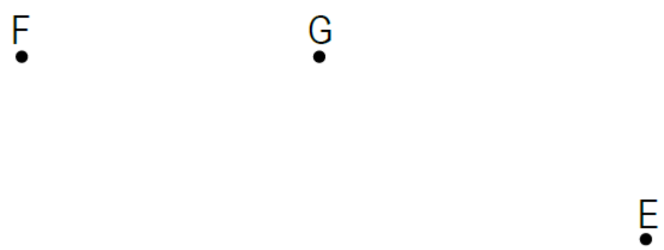
- Si $\alpha = \pi$; alors la rotation d'angle α et de centre O est la symétrie de centre O.

3. Propriété fondamentale

Activité

On considère les points E, F et G ci- dessous.

1) Construire les points E' et F' images respectives des points E et F par la rotation r de centre G d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{4}$

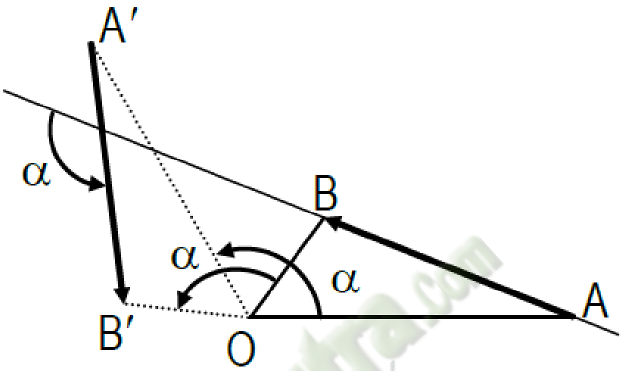


2) Donner la mesure de l'angle $(\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{E'F'})$et comparer les distances EF et E'F'.

Propriété fondamentale

Soit r une rotation d'angle α . A' et B' les images respectives par r de deux points quelconques A et B.

On a : A'B'=AB et $\text{Mes}\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}\right) = \alpha$

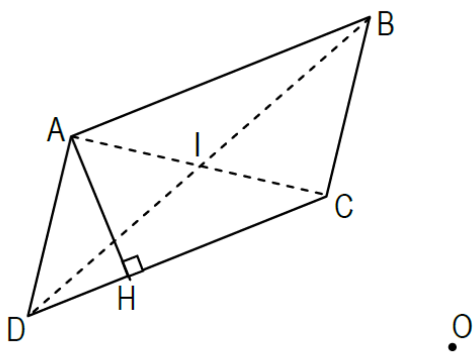


4. Images de figures simples

Activité

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un parallélogramme de centre I, la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (DC) et $H\in[DC]$. On considère la rotation r de centre O et d'angle orienté de mesure $-\frac{\pi}{3}$

1) Construire les points A', B', C', D', H' et I' images respectives des points A, B, C, D, H et I par r.



2) Que peut-on dire des directions des droites (A'B') et (D'C') et celles des droites (A'H') et (D'C')?
3) Quelle est la nature du quadrilatère A'B'C'D' ?

4) Que peut-on dire des points D', H' et C' ?
5) Que représente le point I' pour le quadrilatère A'B'C'D' ?

Propriétés

Toute rotation transforme :

(1) Une droite en une droite ;

(2) Un segment en un segment ;

(3) Une demi-droite en une demi-droite ;

(4) Un cercle en un cercle de même rayon ;

(5) Le milieu d'un segment en le milieu du segment image ;

(6) Deux droites parallèles en deux droites parallèles ;

(7) Deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires.

EXERCICES

Exercice 1

(C) est un cercle de centre O. A et B sont deux points de (C) tels que mesAOB = 90°. r est la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$

1) Construire le point C image de B par r.

2) Calculer les mesures des angles du triangle ABC.

Exercice 2

Dans le plan orienté, on considère le triangle ABC tels que $\mathrm{mes}(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$. B' est l'image de B par la rotation r de centre A et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$ et C' est l'image de C par la rotation r' de centre A et d'angle orienté $-\frac{\pi}{2}$.

1) Quelle est la nature du triangle AB'C' ?

2) Soit E = r(C) et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

a- Démontrer que les points A, C' et E sont alignés.

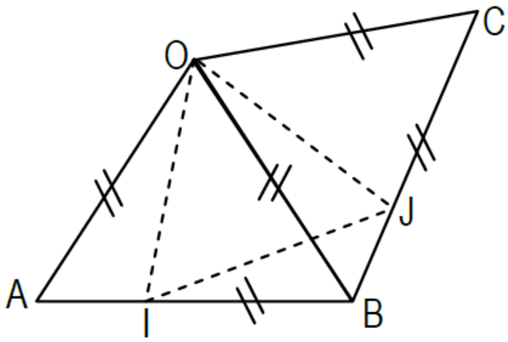
b-Montrer que les droites (B'E) et (AH) sont parallèles.

C-Démontrer que la droite (AH) est médiane du triangle AB'C'.

Exercice 3

Sur la figure ci-contre, OAB et OBC sont deux triangles équilatéraux.

I $\in$[AB] et J $\in$ [BC] tels que AI = BJ.



Soit r la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$

1) Déterminer l'image du segment [AB] par r.

2) En déduire que r(I)=J.

Leçon 15 : INEQUATIONS DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

COMPETENCE 2

THEME : CALCULS ALGEBRIQUES

Leçon 15 : INEQUATIONS DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Nombre de séances : 04h + 2h = 6h

Tableau des habiletés et contenus

Habiletés	Contenus
♦ Connaitre	- Le théorème fondamental relatif à l'interprétation géométrique d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
♦ Traduire	- Diverses situations concrètes en inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
♦ Résoudre	- Graphiquement un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
♦ Interpréter	- Géométriquement les solutions d'un système d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
♦ Traiter une situation	Faisant appel aux inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Situation d'apprentissage

Pendant la kermesse de leur établissement, il est remis un billet de tombola à tout élève qui achète à la fois 1 paquet de cahiers pesant 1 kg et un lot de crayons de 250 g. chaque paquet de cahiers coute 1000F et chaque lot de crayons 500F.

Un élève d'une classe de 2nde C dispose de la somme de 6000 F et peut supporter au maximum 3 kg d'objets dans son sac. Il désire savoir le plus grand nombre de billets qu'il peut avoir.

Ses pairs veulent l'aider et décident d'utiliser des inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

I. EQUATION LINEAIRE DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1. Définition

Soit a, b et c trois nombres réels donnés.

Toute équation de la forme $ax + by = c$ est une équation linéaire à deux inconnues x et y.

Remarque :

Le couple $(x_0; y_0)$ est solution de cette équation si et seulement si $ax_0 + by_0 = c$.

2. Théorème fondamental

Soit (O, I, J) un repère du plan et (D) la droite d'équation : $ax + by = c$.

Soit $(\mathcal{P}_1)$ l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant : $ax + by + c > 0$.

Soit $(\mathcal{P}_2)$ l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant : $ax + by + c < 0$.

$(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont les deux demi-plans ouvert de frontière (D).

Exercices

Exercice 1

Résous graphiquement dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chacune des inéquations linéaires suivantes :

$2y - 3x \leq 1$; $4y + 5x \geq 2$

Exercice 2

Résous graphiquement dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chacune des inéquations linéaires suivantes :

$3x + 2y < 1$; $4y + 5x >$

II. Systèmes d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Définition

La donnée de deux ou plusieurs inéquations linéaires à deux inconnues s'appelle un système d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Résoudre un tel système d'inéquations, c'est trouver tous les couples de nombres réels qui vérifient simultanément toutes les inéquations.

Exercices

Exercice 1

Résous graphiquement dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chacun des systèmes de deux inéquations linéaires suivantes :

$(S_1) : \begin{cases} x + 2y < 4 \\ 3x - 2y \geq 2 \end{cases}$

$(S_2) : \begin{cases} 3x - 5y \geq 1 \\ -2x + y < 2 \end{cases}$