FOMESOUTRA

ÇA SOUTRA !!!

COURS DE MATHS

PREMIERE A

1ère A

1ière édition

BY TEHUA

2025

MATHÉMATIQUES ___ PROGRESSION 1re A2 __ 2024-2025
Volume horaire annuel : 90 heures *(3 heures par semaine)*

Trimestre	Mois	Sem.	Leçons	Vol. hor.	Taux d'exécution
1er trimestre	Septembre	1	1. Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$	9 h	3,57 % (3/84)
		2			7,14 % (6/84)
		3			10,71 % (9/84)
	Octobre	4	*Régulation*	1 h	11,90 % (10/84)
			2. Dénombrement	17 h	14,28 % (12/84)
		5			17,86 % (15/84)
		6			21,43 % (18/84)
		7			25 % (21/84)
	Novembre	8			28,57 % (24/84)
Devoir de niveau		9			32,14 % (27/84)
		10	*Régulation*	1 h	33,33 % (28/84)
			3. Généralités sur les fonctions	11 h	35,71 % (30/84)
		11			39,28 % (33/84)
2e trimestre	Déembre	12			42,86 % (36/84)
		13			46,43 % (39/84)
		14	*Régulation*	1 h	47,62 % (40/84)
			4. Dérivabilité et étude de fonctions	17 h	50 % (42/84)
	Janvier	15			53,57 % (45/84)
		16			57,14 % (48/84)
		17			60,71 % (51/84)
		18			64,28 % (54/84)
	Février	19			67,86 % (57/84)
Devoir de niveau		20	*Régulation*	1 h	69,05 % (58/84)
			5. Suites numériques	9 h	71,43 % (60/84)
		21			75 % (63/84)
3e trimestre	Mars	22			78,57 % (66/84)
		23			79,76 % (67/84)
			Régulation	1 h	80,95 % (68/84)
			6. Statistique	9 h	82,14 % (69/84)
		24			85,71 % (72/84)
		25			89,28 % (75/84)
	Avril	26			91,66 % (77/84)
			Régulation	1 h	92,86 % (78/84)
		27	7. Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	5 h	96,43 % (81/84)
Devoir de niveau		28			98,81 % (83/84)
			Régulation	1 h	100 % (84/84)
	Mai	29	Révisions	6 h	
		30			

NB : La régulation consiste à mener des activités de rémédiation relativement aux contenus de la leçon.
À cette occasion, le professeur mènera également des activités permettant d'évaluer et de renforcer les acquis des apprenants.
C'est le cumul du temps de régulation qui fait 1h. Le professeur peut en faire des séances de travaux dirigés.

Remarque :

- ⇨ Le respect de la progression est obligatoire afin de garantir l'achèvement du programme dans le temps imparti et de permettre l'organisation des devoirs de niveau.
- ⇨ Les volumes horaires indiqués comprennent les cours, les exercices et les travaux dirigés (75%) et IE, DS et comptes rendus (25%)

M.E.N.A.
DIRECTION DE LA PÉDAGOGIE ET DE LA FORMATION CONTINUE
Coordination Nationale Disciplinaire de Mathématiques
Le Coordonnateur National

Jean-Marie KOFFI

AVANT PROPOS

Fondée sur la pratique du programme de mathématiques actuellement en vigueur en Première A en Côte d'Ivoire, la collection SPM propose un ouvrage clair et concis.
Elle est l'œuvre des conseils d'enseignement mathématique (C.E) et de l'association des professeurs de mathématiques de la région du Gbêkê (APMGB).

Dans l'élaboration de ce manuel, notre souci a été de respecter strictement le programme défini par les instructions officielles et précisé dans le document Enseignement mathématique
Les chapitres de ce manuel ont la même structure :

♦ des prérequis

Les exercices proposés visent à consolider les acquis des classes antérieures.

♦ le cours

Il est bref mais complet. Nous avons respecté strictement les limites du programme, évité tout débordement qui impacte négativement les progressions.

♦ des exercices d'applications

Ces exercices corrigés visent à l'acquisition des définitions et propriétés. Nous avons beaucoup mis l'accent sur la rédaction afin d'aider nos élèves à rédiger avec clarté et précision.

♦ des exercices

Nombreux et variés, ces exercices permettent aux élèves de s'entrainer efficacement et aborder ainsi les devoirs dans les meilleures dispositions.

Nous espérons, par ce manuel, améliorer l'enseignement des Mathématiques en Côte d'Ivoire et lutter efficacement contre l'échec scolaire.

Pour la rédaction de ce manuel, nous remercions tous les C.E et U.P de la région du Gbêkê qui par leur contribution ont rendu possible la réalisation de cet ouvrage.

Les auteurs

SOMMAIRE

1

EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS IR

COMMENTAIRE

☞ Ce chapitre vise à résoudre des problèmes à l'aide d'équations et d'inéquations du second degré.
☞ Dans les classes précédentes, les élèves ont résolu des équations et inéquations du second degré qui peuvent se mettre sous la forme $(\mathrm{a}x+\mathrm{b})(\mathrm{c}x+\mathrm{d})=0$ ou $(\mathrm{a}x+\mathrm{b})(\mathrm{c}x+\mathrm{d})\geq 0$ en ayant recours aux égalités remarquables. Le nouvel outil mis à leur disposition est le discriminant.
☞ La forme canonique, la somme et le produit des racines ne sont pas des savoirs exigibles.
☞ Les coefficients des polynômes du second degré doivent être des entiers relatifs.
☞ Les équations bicarrées et les équations et inéquations avec des paramètres sont hors programme.
☞ Les formules donnant les solutions d'une équation du second degré pourront être admises, de même que la forme factorisée.
☞ Dans la résolution de problèmes concrets, on évaluera séparément les deux étapes suivantes : la mise en équation et la résolution des équations et inéquations obtenues.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
Discriminant	☞ Résoudre - les équations de type $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$ - les inéquations de type $\frac{ax+b}{cx+d} \leq 0$. ☞ Factoriser un polynôme du second degré en utilisant le discriminant . ☞ Résoudre une équation ou une inéquation du second degré en utilisant le discriminant. ☞ Résoudre un problème concret en utilisant les équations et inéquations.

COURS

I. DISCRIMINANT

$P(x)$ désigne un polynôme défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in IR^*$, $b \in IR$ et $c \in IR$.

Définition

On appelle discriminant de $P(x)$ ou de l'équation : $x \in IR$, $P(x) = 0$, le nombre réel Δ défini par : $\Delta = b^2 - 4ac$.

EXEMPLES

a) Calculer le discriminant du polynôme $P(x) = 3x^2 - 5x + 1$.
b) Calculer le discriminant de l'équation (E): $x \in IR, -x^2 + 2x + 5 = 0$.
c) Calculer le discriminant du polynôme $Q(x) = 2x^2 + 3$.

Résolution

a) Le discriminant du polynôme P(x) est $\Delta = (-5)^2 - 4(3)(1) = 13$.
b) Le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (2)^2 - 4(-1)(5) = 29$.
c) Le discriminant du polynôme Q(x) est $\Delta = (0)^2 - 4(2)(3) = -24$.

II. ZÉROS D'UN POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

$P(x)$ désigne un polynôme défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in IR^*$, $b \in IR$ et $c \in IR$.

Propriété 1

Les zéros de $P(x)$ peuvent être déterminés de la façon suivante :

– Si $\Delta < 0$ alors $P(x)$ n'a pas de zéro ;

– Si $\Delta = 0$ alors $P(x)$ admet un seul zéro : $-\frac{b}{2a}$:

– Si $\Delta > 0$ alors $P(x)$ admet deux zéros : $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

EXEMPLES

Déterminer les zéros éventuels de chacun des polynômes $P(x)$, $Q(x)$ et $R(x)$ définis par :
$P(x) = 2x^2 - 4x - 6$, $Q(x) = -x^2 + 2x - 3$ et $R(x) = 9x^2 - 12x + 4$.

• *Le discriminant du polynôme P(x) est* $\Delta = (-4)^2 - 4(2)(-6) = 64$.

$\Delta > 0$ *donc P(x) admet deux zéros :* $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-8}{4} = -1$ *et* $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4\mp 8}{4} = 3$

• *Le discriminant du polynôme Q(x) est* $\Delta = -8$. $\Delta < 0$ *donc Q(x) n'admet pas de zéro.*

• *Le discriminant du polynôme R(x) est* $\Delta = (-12)^2 - 4(9)(4) = 0$.

$\Delta = 0$ *donc R(x) admet un seul zéro :* $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

EXEMPLES

Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $-x^2 + 6x - 10 = 0$;

b) $x^2 + 4x - 21 = 0$;

c) $9x^2 + 6x + 1 = 0$.

a) *Le discriminant de l'équation est* $\Delta = -4$. $\Delta < 0$ *donc l'équation n'admet pas de solution.*

b) Le discriminant de l'équation est $\Delta = 100$.

$\Delta > 0$ *donc l'équation admet deux solutions :* 3 *et* -7.

c) Le discriminant de l'équation est $\Delta = 0$. $\Delta = 0$ *donc l'équation admet une seule solution :* $-\frac{1}{3}$.

Exercice

Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $-x^2 + 5x - 6 = 0$; b) $x^2 - 4x - 21 = 0$; c) $x^2 + 6x + 9 = 0$; d) $x - 1 - 3x^2 = 0$;

e) $2x^2 - 11x + 14 = 0$; f) $x^2 + 2x - 1 = 0$; g) $x^2 - x - 1 = 0$.

III. FACTORISATION

P(x) désigne un polynôme défini par P$(x) = $ a$x^2 + $ b$x + $ c avec a $\in IR^*$, b $\in IR$ et c $\in IR$.

Propriété 2

– Si $\Delta < 0$ alors P(x) ne peut pas s'écrire comme produit de 2 polynômes du 1er degré.

– Si $\Delta = 0$ alors P(x) = a$(x - x_0)^2$ où $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

– Si $\Delta > 0$ alors P(x) = a$(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les zéros de P(x).

EXEMPLES

Soit P(x), Q(x) et R(x) les polynômes définis par :

P$(x) = -3x^2 + 4x - 1$; Q$(x) = x^2 + x - 6$; R$(x) = -4x^2 + 20x - 25$.

Ecrire P(x), Q(x) et R(x) comme produit de deux polynômes du 1er degré.

• *Le discriminant du polynôme P(x) est* $\Delta = (4)^2 - 4(-3)(-1) = 4$.

$\Delta > 0$ *donc P(x) admet deux zéros :* $x_1 = = \frac{-4-2}{-6} = 1$ *et* $x_2 = = \frac{-4\mp2}{-6} = \frac{1}{3}$.

Donc P(x) = $-3(x - 1)(x - \frac{1}{3})$ = $(-3x + 3)(x - \frac{1}{3})$.

• *Q(x) admet deux zéros :* -3 *et* 2 . Donc Q(x) = $(x + 3)(x - 2)$.

• *R(x) admet un seul zéro :* $\frac{5}{2}$. Donc R(x) = $-4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$.

Exercice

Ecrire si possible P(x), Q(x) , R(x) et S(x) comme produit de deux polynômes du 1er degré.

P(x) = $-3x^2 + 4x - 1$; Q(x) = $x^2 + x - 6$; R(x) = $-4x^2 + 10x - 25$; S(x) = x^2+4x+4.

IV. SIGNE D'UN POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

Soit P(x) le polynôme défini par P(x) $= ax^2 + bx + c$ avec $a \in IR^*$, $b \in IR$ et $c \in IR$.

Propriété 3

● Si $\Delta < 0$:

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de P(x)	Signe de a

● Si $\Delta = 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Signe de P(x)	Signe de a	0	Signe de a

● Si $\Delta > 0$, x_1 et x_2 désignant les zéros de P(x) tels que $x_1 < x_2$:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
Signe de P(x)	Signe de a	0	Signe de $-$a	0	Signe de a

EXEMPLES

Étudier, suivant les valeurs de x, le signe du polynôme $f(x)$ dans chaque cas :

a) $f(x) = 8x^2 + 8x + 2$;

b) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$;

c) $f(x) = -x^2 - 3x - 10$.

Solution

a) *Le discriminant du polynôme f(x) est* $\Delta = 0$.

$\Delta = 0$ *donc f(x) admet un seul zéro :* $x_0 = -\frac{1}{2}$. *a = 8 donc a > 0. Par suite :*

$\forall\, x \in IR - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, f(x) > 0; \qquad f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$

b) *Le discriminant du polynôme f(x) est* $\Delta = 25$. $\Delta > 0$ *donc f(x) admet deux zéros :* $-\frac{1}{2}$ *et* 2.

a = -2 , a < 0. Par suite :

$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]2; +\infty\right[, f(x) < 0$ et $\forall\, x \in \left]-\frac{1}{2}; 2\right[,\ f(x) > 0$

$\forall\, x \in \left\{-\frac{1}{2}; 2\right\},\ f(x) = 0$.

c) *Le discriminant du polynôme f(x) est* $\Delta = -36$. $\Delta < 0$ *donc f(x) n'admet pas de zéro .*

a = -1, a < 0. Par suite : $\forall\, x \in IR,\ f(x) < 0;$

Exercice 1

Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$ dans chaque cas :

a) $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$; b) $f(x) = x^2 + x - 6$; c) $f(x) = -4x^2 + 10x - 25$;

d) $f(x) = x^2+4x+4$; e) $f(x) = 3x^2 -4x + 5$; f) $f(x) = 2x^2 -5x + 2$;

g) $f(x) = 4x - 4x^2 -1$; h) $f(x) = (2 - x)(x - 6)$; i) $f(x) = x - 4x^2$;

j) $f(x) = -5(2 - x)^2$; k) $f(x) = -x^2 +4x - 5$; l) $f(x) = 5x^2 + 2x - 3$;

m) $f(x) = -2 + 3x - x^2$; n) $f(x) = 100 + 60x^2$.

Exercice 2

Résoudre dans IR chacune des inéquations :

a) $x^2 - 5x + 6 < 0$; b) $4x^2 - 12x + 9 \geq 0$; c) $x^2 + x + 1 \leq 0$;

d) $x^2 - 5x + 6 < 0$; e) $10x - 25x^2 - 1 > 0$; f) $-2x^2 - x + 6 \leq 0$;

g) $3x^2 - 5x > 0$; h) $5 - x^2 \geq 0$; i) $x^2 - x - 1 \leq 0$;

j) $3x^2 - 4x + 5 < 0$; k) $2x^2 - 5x + 2 \leq 0$; l) $-4x^2 + 4x - 1 < 0$.

TRAVAUX PRATIQUES

EXERCICE RÉSOLU 1

Résoudre dans IR, l'équation : $\frac{3x-4}{2x+1} = 0$.

Solution

▪*Ensemble de validité D*

Condition : $2x + 1 \neq 0$ *c'est-à-dire* $x \neq -\frac{1}{2}$.

Donc D = IR$-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

▪ *Soit* $x \in D$.

$\frac{3x-4}{2x+1} = 0 \Leftrightarrow 3x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

EXERCICE RÉSOLU 2

Résoudre dans IR, l'inéquation : $\frac{2-x}{x+3} \leq 0$.

Solution

Soit (I) l'inéquation $x \in IR$, : $\frac{2-x}{x+3} \leq 0$.

▪*Ensemble de validité D*

Condition : $x + 3 \neq 0$ *c'est-à-dire* $x \neq -3$. *Donc D = IR*$-\{-3\}$.

▪ *Soit* $x \in D$. *Etudions le signe de* $\frac{2-x}{x+3}$.

$2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

x	$-\infty$	-3		2	$+\infty$
$2-x$	+		+	0	$-$
$x+3$	$-$	0	+		+
$\frac{2-x}{x+3}$	$-$		+	0	$-$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est : S = $]-\infty; -3[\cup [2; +\infty[$.

EXERCICE RÉSOLU 3

Un grossiste propose à Moussa un certain nombre de boîtes de lait identiques dont le coût total est de 59400 F.

Il met ces boîtes de lait dans un gros sac.

Moussa hésite au dernier moment et demande au commerçant de diminuer le prix de chaque boîte de 90 F.
Ce dernier accepte et dit à Moussa avec peine qu'il devra ajouter 5 boîtes supplémentaires dans le gros sac. Moussa lui remet alors les 59400 F.
Combien de boîtes de lait Moussa a-t-il achetés et à quel prix unitaire ?

Solution

Soit x le prix d'une boîte de lait et y le nombre de boîtes de lait qu'il a achetés.

On a : $\begin{cases} xy = 59400 \\ (x-90)(y+5) = 59400 \end{cases}$

$xy = 59400$ *donc* $y = \frac{59400}{x}$.

$(x-90)(y+5) = 59400 \Leftrightarrow xy + 5x - 90y - 450 = 59400$

On sait que xy = 59400 donc, 5x -90y -450 = 0.

Soit : x -18y -90=0.

Remplaçons y par $\frac{59400}{x}$.

On obtient l'équation : x - 18× $\frac{59400}{x}$ *-90 = 0.*

Soit : $x^2 - 90x - 1069200 = 0$.

Le discriminant $\Delta = (-90)^2 - 4 \times (-1069200) = 4284900$.

Les solutions sont : $x_1 = \frac{90-\sqrt{4284900}}{2}$ *et* $x_1 = \frac{90+\sqrt{4284900}}{2}$

$x_1 = -990$ *et* $x_2 = 1080$.

Seule la solution positive répond à la question.

Donc $x = 1080$ et $y = \frac{59400}{x} = \frac{59400}{1080} = 55$.

Le prix d'une boîte de lait est égal à 1080 F et le nombre de boîtes de lait qu'il a achetés est 55.

EXERCICES

1 Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $(3x + 1)(x - 1) = 0$;
b) $x(3x + 1) = 0$;
c) $(2x - 3)^2 - x^2 = 0$;
d) $16 - (x - 1)^2 = 0$.

2 Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a) $(-2x + 1)(x - 1) > 0$;
b) $-3x(8x + 6) \geq 0$;
c) $(2x - 3)^2 - (1 + 4x)^2 < 0$;
d) $16 - x^2 \leq 0$.

3 Résoudre dans IR :

a) $\frac{-2x+3}{-8x+12} = 0$; b) $\frac{x+3}{1-x} = 0$;
c) $\frac{3x+12}{2x+5} = 0$; d) $\frac{7}{2x-4} = 0$;
e) $\frac{2x+3}{7} \leq 0$; f) $\frac{3x+1}{x+1} \geq 0$;
g) $\frac{-2x+8}{-x+5} < 0$; h) $\frac{1}{3x-4} > 0$;
i) $\frac{-3}{5-x} < 0$; j) $\frac{-4x}{1-x} = 0$;
k) $\frac{2x+7}{4x} = 0$; l) $\frac{-3x}{x-4} \geq 0$;
m) $\frac{2x+3}{7-x} \leq 0$; n) $\frac{3x+1}{4x+18} \geq 0$;
p) $2 - \frac{5}{3+4x} = 0$; q) $1 - \frac{1}{3x-4} > 0$.

4 Dans chacun des cas suivants, factoriser si possible le polynôme du second degré $P(x)$:

a) $P(x) = 5x^2 + x - 6$;
b) $P(x) = x^2 + 7x + 12$;
c) $P(x) = -2x^2 - 3x + 2$;
d) $P(x) = x^2 + 5x + 12$;
e) $P(x) = 9x^2 - 24x + 16$;
f) $P(x) = x^2 - x - 1$;
g) $P(x) = 4 - 9x^2$;
h) $P(x) = 5x - x^2 - 4$;
i) $P(x) = -x^2 - 3x$;
j) $P(x) = x^2 + x - 1$;
k) $P(x) = 2x^2 - 4x - 4$;
l) $P(x) = 3x^2 - x - 1$;
m) $P(x) = 3x^2 + 4$;
n) $P(x) = -x^2 + 20x - 100$.

5 Résoudre dans IR les équations suivantes:

a) $5x^2 + 4 = 0$;
b) $4x^2 - \frac{25}{4} = 0$;
c) $-3x^2 + 7x = 0$;
d) $x^2 - x - 12 = 0$;
e) $2x^2 + 5x + 3 = 0$;
f) $-x^2 + 8x - 7 = 0$;
g) $-3x^2 - x - 12 = 0$;
h) $x^2 + x - 1 = 0$;
i) $1 - 4x^2 = 0$;
j) $4x^2 - x - 3 = 0$;
k) $x^2 + 4x + 7 = 0$;
l) $-3x^2 + 7x + 4 = 0$;
m) $4x^2 - x + 3 = 0$;
n) $-4x^2 + 10x - 6 = 0$;
p) $25-(2x - 7)^2 = 0$;

r) $(4-3x)^2 = 0$;

s) $3x^2 - 18x + 27 = 0$;

t) $-3x(2-5x) = 0$.

6 Déterminer deux nombres dont la somme est égale à 212 et le produit égal à 9555.

7 Déterminer les dimensions d'un rectangle sachant que son aire est égale à 221 cm^2 et son périmètre égal à 60 cm.

8 Étudier, suivant les valeurs de x, le signe du polynôme $f(x)$ dans chaque cas :

a) $f(x) = -2x^2 + 7x - 5$;
b) $f(x) = x^2 + 3x + 1$;
c) $f(x) = 1 - x^2$;
d) $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$;
e) $f(x) = -4x^2 + 6x$;
f) $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$;
g) $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$;
h) $f(x) = (2-3x)(x+1)$;
i) $f(x) = 4x - x^2 + 5$;
j) $f(x) = 4x - x^2 - 5$.

9 Résoudre dans IR les inéquations suivantes:

a) $x^2 - 2 < 0$;

b) $3x^2 + 1 < 0$;

c) $-x^2 - 5 < 0$;

d) $4x^2 + 16 \geq 0$;

e) $4x^2 + 2x - 2 < 0$;

f) $2x^2 + 5x + 3 \leq 0$;

g) $-x^2 + 8x - 7 > 0$;

h) $-3x^2 - x - 12 < 0$;

i) $x^2 + x - 1 > 0$;

j) $-x^2 - x + 1 \geq 0$;

k) $x^2 - 2x + 3 > 0$;

l) $x^2 + 4x - 12 \leq 0$;

m) $1 - x^2 \leq 0$;

n) $4 < 3x^2$;

p) $3x \geq 4x^2$;

q) $2x^2 + 3x + 1 < 0$;

r) $x^2 - 3x - 7 \leq 0$;

s) $4x^2 > -3$;

t) $x - x^2 < 0$;

u) $-2x^2 - 2x + 12 \leq 0$;

v) $-2x^2 - 10x + 12 > 0$;

w) $3x^2 - 12x + 12 \leq 0$;

x) $25-(2x-7)^2 \geq 0$;

z) $(1-2x)(3x-1) < 0$.

10 Soit $\mathrm{P}(x)$ le polynôme défini par :

$\mathrm{P}(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15$.

1. Calculer P(3).

2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que : $\mathrm{P}(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c)$.

3. Résoudre dans IR :

a) $\mathrm{P}(x) = 0$;

b) $\mathrm{P}(x) \leq 0$.

11 Soit $\mathrm{P}(x)$ le polynôme défini par :

$\mathrm{P}(x) = 2x^3 + 3x^2 - 14x$.

1 Justifier que pour tout nombre réel x:

$\mathrm{P}(x) = x(x-2)(2x+7)$.

2. Résoudre dans IR, l'inéquation

$\mathrm{P}(x) > 0$.

12 Soit $f(x)$ le polynôme défini par :

$f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 5x + 3.$

1 Justifier que pour tout nombre réel x:

$f(x) = (2x - 3)(-x^2 + x - 1).$

2. Résoudre dans IR, l'équation

$f(x) = 0.$

3. Résoudre dans IR, l'inéquation

$f(x) \geq 0.$

13 1. Résoudre dans IR, l'équation :

$-3x^2 + x + 4 = 0.$

2. Soit $f(x)$ le polynôme défini par :

$f(x) = -3x^3 - 5x^2 + 6x + 8.$

a) Justifier que pour tout nombre réel x:

$f(x) = (x + 2)(-3x^2 + x + 4).$

b) Résoudre dans IR, l'équation, $f(x) = 0.$

c) Résoudre dans IR, l'inéquation,

$f(x) > 0.$

14 Un parent d'élèves achète des cahiers pour 8 000 F.
Avec 4 cahiers de plus, pour le même prix total, chaque cahier aurait coûté 100 F de moins.
Combien de cahiers ce parent d'élèves a- t-il achetés ?

15 Il y a tout juste un an, Laciné avait 8 fois l'âge de son fils.
Aujourd'hui son âge est le carré de celui de son fils.
Trouvez son âge.

16 Le produit de l'âge de Clément dans 10 ans par celui qu'il avait il y a 10 ans est égal à 44.
Quel est l'âge de Clément ?

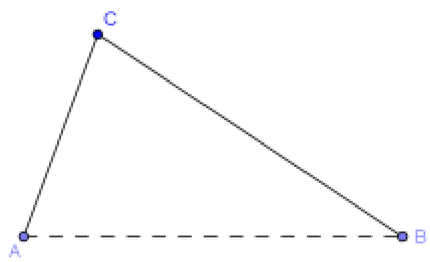
17 Avec 5 km/h de plus le train mettrait 2 heures de moins sur un trajet de 300 km.
Quelle est sa vitesse?
Rappel fondamental L = v . T .

18 Les longueurs des côtés d'un triangle rectangle sont des nombres consécutifs.
Quels sont ces nombres ?

19 Un champ de forme rectangulaire a pour aire 308 m² et la longueur mesure 8 mètres de plus que la largeur.
Quelles sont les dimensions de ce champ ?

20 La somme de l'âge de Sita et de sa petite sœur est égale à 29 et le produit de leur âge est égale à 285.
Quel est l'âge de la petite sœur de Sita ?

21 Une ficelle longue de 89 cm est fixée à ses extrémités par deux clous A et B distants de 65 cm.



Déterminer la longueur AC pour que le triangle ABC soit rectangle en C.

2

DENOMBREMENT

COMMENTAIRES

► Ce chapitre vise à :
- consolider les techniques de dénombrement vues dans les classes antérieures ;
- organiser des données pour dénombrer à l'aide de modèles mathématiques adaptés.

► L'utilisation des tableaux, arbres de choix, … dans le dénombrement en 2nd A sera poursuivie en 1ère A et formalisée à l'aide des modèles que sont les p-listes, les arrangements, les combinaisons et les permutations.

► Le milieu socioculturel de l'élève sera largement valorisé.

► La mise en place des différents modèles se fera progressivement à partir d'exercices simples et appropriés.

► Dans la résolution des exercices, on mettra l'accent sur la modélisation (tableaux, diagrammes, arbres de choix et autres outils mathématiques).

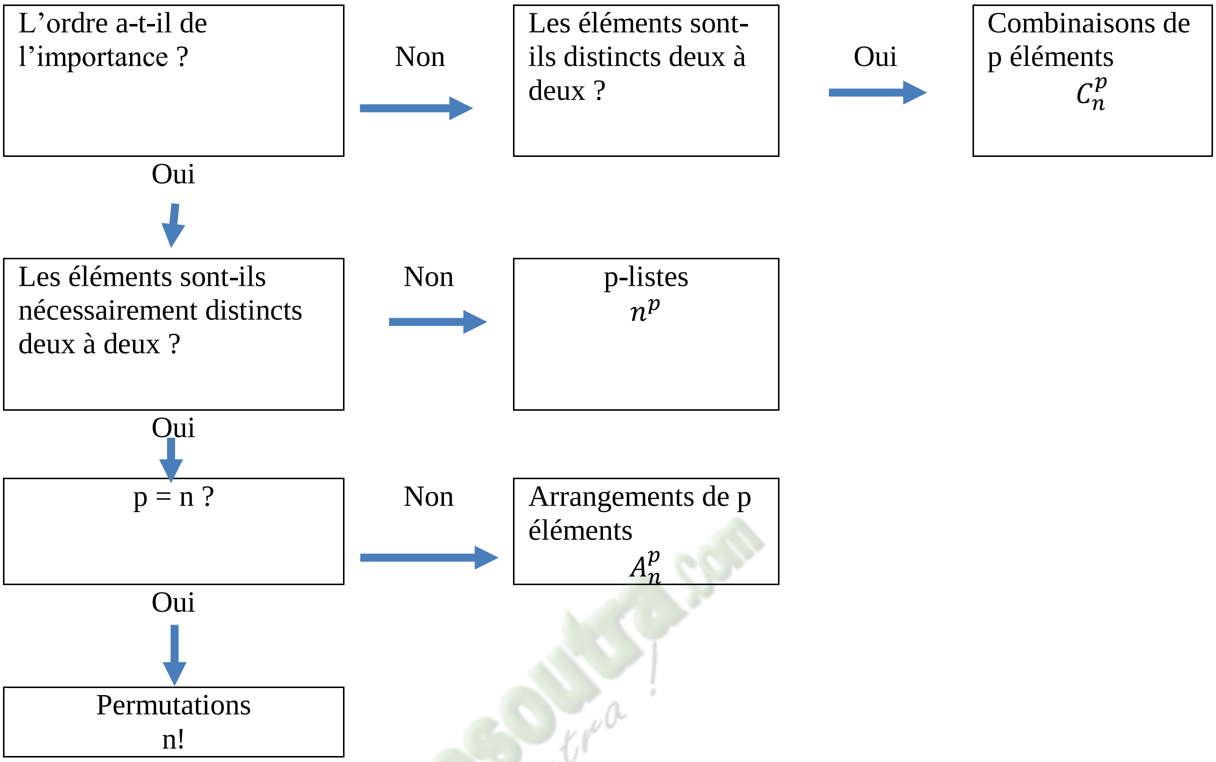
► On évitera l'usage abusif et mécanique des formules combinatoires.

► On s'efforcera de donner du sens aux activités et aux exercices en les puisant dans l'environnement des élèves.

Les notions élémentaires de dénombrement peuvent être mise en situation de manière standard en imaginant un tirage de boules dans une urne. On identifiera alors :
- tirages successifs avec remise et p-listes ;
- tirages successifs sans remise et arrangements ;

- tirages simultanés et combinaisons.

► Pour mieux identifier le cas qui convient, on pourra s'aider du schéma suivant :



CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
1. Produit cartésien de deux ensembles finis • définition • Cardinal 2. p-listes : Définition Nombre de p-listes d'un ensemble fini III. Arrangements Définition Nombre d'arrangements à p éléments d'un ensemble à n éléments (p≤ n) Notation A_n^p $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$ IV. Permutations Définition Nombre de permutations d'un ensemble à n éléments Notation n! ; $n! = n(n-1)\dots\times 2\times 1$ V. Combinaisons Définition Nombre de combinaisons à p éléments d'un ensemble à n éléments (p≤ n) Notation C_n^p; $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$; $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$; $C_n^p = C_n^{n-p}$	☞ Calculer le cardinal d'un produit cartésien de deux ensembles. ☞ Calculer le nombre de p-listes d'un ensemble à p éléments d'un ensemble à n éléments. ☞ Calculer le nombre d'arrangements à p éléments d'un ensemble à n éléments. ☞ Calculer le nombre de permutations d'un ensemble fini. ☞ Calculer le nombre de combinaisons à p éléments d'un ensemble à n éléments. ☞ Calculer n!, A_n^p, C_n^p. ☞ Savoir choisir une des trois notions : p-listes, arrangement, combinaison dans des problèmes de dénombrement.

ACTIVITÉS

ACTIVITÉ 1

Un enfant possède 4 cartons portant respectivement les lettes P, A, I, X.

1. Utiliser un arbre de choix pour citer tous les mots commençant par A qu'il peut former.
2. Déduire le nombre de mots qu'il peut former à l'aide de ces 4 cartons.

ACTIVITÉ 2

Un restaurant propose chaque midi 2 plats : Riz ou Foutou et 4 sauces :
graine, aubergine ,arachide et pili-pili .
De combien de façons un client peut-il passer une commande d'un repas ?

ACTIVITÉ 3

Moussa désire composer un code PIN de 4 chiffres distincts pour sécuriser son téléphone cellulaire. Combien peut-il former de codes PIN distincts ?

ACTIVITÉ 4

Combien existe-t-il de numéros de téléphone composés de 8 chiffres commençant par 05 ou 07 ?

ACTIVITÉ 5

Un joueur possède deux dés : un rouge et un vert. Les faces de chaque dé sont numérotées de 1 à 6.
Il lance ces deux dés et note la somme des deux numéros obtenus.
Combien de résultats donnent une somme égale à 9 ?

ACTIVITÉ 6

Une urne contient 5 boules rouges (numérotées de 1 à 5), 2 boules jaunes (numérotées de 1 à 2) et 3 boules vertes (numérotées de 1 à 3).
On tire successivement avec remise 3 boules de l'urne.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y-a-t-il de tirages comprenant une rouge, une jaune et une verte dans cet ordre ?
3. Combien y-a-t-il de tirages comprenant une rouge, une jaune et une verte ?
4. Combien y-a-t-il de tirages comprenant au moins une rouge ?
5. Combien y-a-t-il de tirages comprenant au plus une rouge ?

COURS

I. PRODUIT CARTÉSIEN

Définition

Soit A et B deux ensembles finis.
On appelle produit cartésien de A par B, noté A×B, l'ensemble des couples (a, b), où a est élément de A et b est élément de B.

EXEMPLE

Soit A = {0; 1} et B = $\{a; e, i, u\}$.
Citer tous les éléments de A×B en utilisant un tableau .

Solution

0	a		$(0, a)$
	e		$(0, e)$
	i		$(0, i)$
	u		$(0, u)$
1	a		$(1, a)$
	e		$(1, e)$
	i		$(1, i)$
	u		$(1, u)$

Les éléments de A×B sont :
$(0, a)$, $(0, e)$, $(0, i)$,$(0, u)$,$(1, a)$, $(1, e)$, $(1, i)$,$(1, u)$.
Card(A×B) = 8.

Propriété

Soit A et B deux ensembles finis.
Card(A×B) = Card(A) × Card(B) .

Remarques

• Ce résultat se généralise au produit cartésien de p ensembles finis $E_1,\ldots, E_p$, $p \geq 1$.
$\text{Card}(E_1 \times \cdots \times E_p) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \ldots \times \text{Card}(E_p)$.
• Soit A un ensemble fini et p un entier supérieur ou égal à 2.
Le produit cartésien A×A×…×A (p fois) est noté A^p : $\text{Card}(A^p) = (\text{Card}(A))^p$.

EXEMPLE
Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées,
2 plats et 4 desserts ?

Solution
Notons :
E l'ensemble des trois entrées disponibles, $E = \{E1; E2; E3\}$. *Card (E) = 3.*
P l'ensemble des deux plats disponibles, $P = \{P1; P2\}$. *Card (P) = 2 .*
D l'ensemble des quatre desserts disponibles, $D = \{D1; D2; D3; D4\}$. *Card (D) = 4 .*
Un menu est constitué d'un triplet ordonné de trois éléments choisis respectivement dans E, P et D.
Chaque menu est donc un élément du produit cartésien $E \times P \times D$.
Le nombre de menus que l'on peut composer est donc égal à
Card (E)×Card (P)×Card (D) = 3×2×4 = 24 **.** *On peut donc composer 24 menus différents.*

Exercice
1. Combien de mots de 6 lettres peut-on former à l'aide des lettres de l'alphabet ?
2. Parmi ces mots, combien se terminent par une voyelle ?

II. P-LISTES

Définition

Soit E un ensemble fini et p un entier naturel non nul.
On appelle p-liste de E tout élément $(x_1, \dots, x_p)$ de E^p.

Remarques
• Dans une p-liste, on peut répéter les éléments et l'ordre compte.
• Situation type : « tirages successifs avec remise ».

EXEMPLE
Soit E l'ensemble des chiffres.
(4, 3, 0, 5, 7), (0, 6, 0, 2, 4), (3,3,3,3,3) sont des 5-listes de E.

Propriété

Soit n un entier naturel et p un entier naturel non nul.
Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est n^p.

EXEMPLE 1

Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).
On tire successivement et avec remise 3 jetons du sac.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y en a-t-il

a) ne comprenant que des jetons verts ?
b) ne comprenant aucun jeton vert ?
c) comprenant un seul jeton vert ?

Solution

1. *Un tirage est une 3-liste de trois éléments choisis parmi 9 éléments.*
Le nombre de tirages possibles est donc égal à $9^3 = 729$.

2.a) *Un tirage est une 3-liste de trois éléments choisis parmi les 5 jetons verts.*
Le nombre de tirages possibles est donc égal à $5^3 = 125$.

b) Un tirage est une 3-liste de trois éléments choisis parmi les 4 jetons rouges.
Le nombre de tirages possibles est donc égal à $4^3 = 64$.

c) Utilisons un tableau pour dénombrer le nombre de tirages possibles :

Position des jetons	V	R	R
Nombre de possibilités	5	4	4

Il y a 5 ×4 ×4 = 80 tirages possibles.

Position des jetons	R	V	R
Nombre de possibilités	4	5	4

Il y a 4 × 5 ×4 = 80 tirages possibles.

Position des jetons	R	R	V
Nombre de possibilités	4	4	5

Il y a 4 ×4 ×5 = 80 tirages possibles.

Conclusion : Il y a donc en tout 80×3 = 240 tirages possibles.

EXEMPLE 2
Un élève possède 4 livres : 1 livre de mathématiques, 1 livre de chimie, 1 livre de français et 1 livre d'anglais.
Il souhaite ranger ces 4 livres dans 3 tiroirs, chaque tiroir pouvant contenir plusieurs livres.
De combien de façons peut-il ranger ces livres ?

Solution

Livres	*Maths*	*chimie*	*Français*	*anglais*
Nombre de choix	*3*	*3*	*3*	*3*

Il y a 3^4 *= 81 rangements possibles.*

Exercice
Un numéro de téléphone en Côte d'Ivoire est formé de 8 chiffres .
Combien de numéros peut-on fournir ?

III. ARRANGEMENTS

Définition

Soit E un ensemble fini et n et p deux entier naturels tels que : 1≤ p ≤ n.
On appelle arrangement de p éléments de E toute p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.

Remarques
• Dans un arrangement, les éléments sont différents et l'ordre compte.
• Situation type : « tirages successifs sans remise ».

EXEMPLE
Soit E l'ensemble des entiers naturels pairs.
(4, 2, 0), (2, 4, 0), (6,2,4) sont des arrangements de 3 éléments de E.

Propriété

Soit n et p deux entier naturels tels que : 1≤ p ≤ n.
Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments est
$A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$ (p facteurs).

EXEMPLE 1
$A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$; $A_7^1 = 7$; $A_7^7 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$.

EXEMPLE 2
On veut former des mots de 5 lettres distinctes avec les lettres de l'alphabet.
Combien de ces mots peut-on former ?

Solution
Chaque mot formé est un arrangement de 5 lettres choisies parmi 26 lettres.
Donc le nombre de mots possibles est $A_{26}^{5} = 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 7893600$.

EXEMPLE 3
18 jeunes filles de Bouaké se présentent à la présélection du concours Miss. On doit désigner la Miss et ses 2 dauphines.
Combien y a-t-il de podiums possibles ?

Solution
Chaque podium est un arrangement de 3 éléments choisis parmi 18 éléments.
Le nombre de podiums possibles est donc $A_{18}^{3} = 4896$.

Exercice
1. Combien de nombres de 3 chiffes distincts peut-on former à l'aide des six chiffres 2 ;3 ;5 ;6 ;7 ;9 ?
2. Combien de ces nombres sont pairs ?

IV. PERMUTATIONS

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n (n ≥1).

On appelle permutation de E tout arrangement des n éléments de E.

EXEMPLE
Soit E = $\{a, b, c\}$.
Les permutations de E sont : (a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a).

Propriété

Soit E un ensemble fini de cardinal n (n ≥1).

Le nombre de permutations de E est le nombre noté n! (factorielle n) :

$n! = n \times (n-1) \times \cdots 2 \times 1$ (n facteurs).

Remarque n! = A_n^n .
Convention : On convient que : **0 ! = 1**.

EXEMPLE 1
5 ! = $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

EXEMPLE 2
On appelle anagramme du mot BOUAKE tout mot de 6 lettres formé à l'aide des 6 lettres qui composent le mot BOUAKE.
Exemples : BOUAEK, OBKUEA, KBUOAE.
Combien le mot BOUAKE admet-il d'anagrammes ?

Solution
Chaque anagramme est une permutation des 6 lettres du mot BOUAKE.
Le nombre d'anagrammes possibles est donc $6! = 720$.

Exercice
Une réunion sous régionale regroupe 7 pays de la CEDEAO.
1. De combien de façons peut-on disposer les drapeaux de ces pays à l'entrée de la salle de cérémonie ?
2. De combien de manières peut-on faire assoir les hautes autorités de ces pays à la longue table de séance si le pays hôte doit être au centre ?

V. COMBINAISONS

Définition

Soit E un ensemble fini et p un entier naturel.
On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E à p éléments.

EXEMPLE
Soit E = $\{a, b, c, d\}$.
Les combinaisons de 3 éléments de E sont : $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, d, c\}$.

Remarques
• Dans une combinaison, on ne peut pas répéter les éléments et il n'y a pas d'ordre.
• Situation typique : « tirage simultané de p objets parmi n ».

Propriété

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$.

EXEMPLE 1

Un jeu de 32 cartes compte 4 as. On en extrait une main de 8 cartes.
Déterminer :
a) le nombre total de mains possibles.
b) le nombre de mains ne contenant aucun as.
c) le nombre de mains contenant exactement 2 as.

Solution
a) Lorsqu'on extrait une main, Il n'y a pas d'ordre et pas de répétition : un tirage est donc une combinaison de 8 cartes parmi 32. Il y a : $C_{32}^8 = \frac{A_{32}^8}{8!}$*= 10518300 mains différentes.*
b) Il y a façons C_{28}^8 *de choisir 4 cartes parmi les 28 autres.*
IL y a donc 3108105 mains possibles.
c) Il y a façons C_4^2 *de choisir 2 as parmi 4 puis, pour chacune de ces façons, il y a* C_{28}^6 *façons de choisir 8 cartes parmi les 28 autres cartes.*
Le nombre de mains recherchées est donc : $C_4^2 \times C_{28}^6$ *= 2260440.*

EXEMPLE 2

Une urne contient 5 boules numérotées 1, 2, 3, 4 et 5 .
On tire simultanément 2 boules de l'urne.
1. Dénombrer tous les cas possibles.
2. Déterminer le nombre de tirages dont la somme est un multiples de 3.

Résolution
1. Soit A l'ensemble des tirages possibles. On tire simultanément 2 boules parmi 5.
D'où Card(A) = C_5^2 *= 10. Il y a donc 10 tirages possibles.*
2. Citons tous les cas qui conviennent : $\{1; 2\}$, $\{1; 5\}$, $\{4; 2\}$, $\{4; 5\}$. *Ainsi, Il y a donc 4 tirages permettant d'obtenir 2 numéros dont la somme est un multiple de 3.*

EXEMPLE 3

Dans une classe de Première, il y a 45 élèves dont 30 filles.
L'éducateur de niveau choisit 3 élèves qui devront participer à une formation sur le Sida.
1. Combien y a-t-il de choix possibles ?
2. Les élèves Minata et Moise font partie de cette classe.
a) Si un seul de ces deux élèves a été désigné pour participer à la formation, combien y a-t-il de choix possibles ?
b) Si l'un au moins de ces deux élèves a été désigné pour participer à la formation, combien y a-t-il de choix possibles ?

Résolution

1. Chaque choix est une combinaison de 3 élèves d'un ensemble à 45 éléments.
D'où le nombre de choix possibles est : C_{45}^{3} *= 14190.*

*2.a) * Si Minata fait partie du groupe et Moise non, alors le nombre de choix possibles est :*
C_{43}^{2} *= 903.*

** Si Moise fait partie du groupe et Minata non, alors le nombre de choix possibles est :*
C_{43}^{2} *= 903.*

Finalement le nombre de choix possibles où un seul des deux élèves fait partie du groupe est

2×903 =1806.

b) Il a deux situations qu'on peut avoir:

- un seul des deux élèves fait partie du groupe : 1806 choix possibles

- les deux élèves font partie du groupe : $C_{43}^{1} = 43$.

Finalement le nombre de choix possibles est : 1806 + 43 = 1849.

TRAVAUX PRATIQUES

EXERCICE RÉSOLU 1

Un sac contient trois jetons : un vert, un noir, un rouge.

On tire successivement trois jetons du sac de la façon suivante : après avoir tiré un jeton du sac et noté sa couleur, on remet le jeton tiré dans le sac.

1. Combien y a-t-il résultats possibles à l'issue de ce tirage ?
2. Combien y en a-t-il contenant exactement 2 jetons de la même couleur ?

Solution 1. Dans le tableau ci-dessous notons : vert : V ; noir : N ; rouge : R

		V	*(V,V,V)*
	V	*N*	(V,V,N) *
		R	*(V,V,R)* *
		V	*(V,N,V)* *
V	N	*N*	*(V,N,N)* *
		R	*(V,N,R)*
	R	*V*	*(V,R,V)* *
		N	*(V,R,N)*
		R	*(V,R,R)* *
		V	*(N,V,V)* *
	V	*N*	(N,V,N) *
		R	*(N,V,R)*
		V	*(N,N,V)* *
N	N	*N*	*(N,N,N)*
		R	*(N,N,R)* *
	R	*V*	*(N,R,V)*
		N	*(N,R,N)* *
		R	*(N,R,R)* *

		V	*(R,V,V)**
	V	*N*	(R,V,N)
		R	*(R,V,R)* *
		V	*(R,N,V)*
R	N	*N*	*(R,N,N)* *
		R	*(R,N,R)* *
	R	*V*	*(R,R,V)* *
		N	*(R,R,N)* *
		R	*(R,R,R)*

Il y a 27 résultats possibles.

2. Notons dans le tableau ci-dessous une astérisque à côté des résultats où il y a exactement deux jetons de la même couleur. Il y a donc 18 résultats possibles.

EXERCICE RÉSOLU 2

Un sac contient neuf jetons : cinq verts numérotés de 1 à 5 ; trois rouges numérotés de 1 à 3 ; un blanc numéroté 1 . On tire successivement et sans remise trois jetons du sac.

1. Combien y a-t-il de tirages unicolores ?
2. Combien y en a-t-il contenant exactement 2 jetons verts ?

1. Chaque tirage est un arrangement de 3 éléments choisis parmi 9 éléments.
Pour obtenir un tirage unicolore, on peut tirer 3 jetons verts parmi 5 soit A_5^3 possibilités, ou trois jetons rouges parmi 3 soit A_3^3 possibilités.
Le nombre de possibilités est donc $A_5^3 + A_3^3 = 66$.
2. Utilisons un tableau pour dénombrer :

Jetons	*V*	*V*	*Autre couleur*
Nombre de choix	*5*	*4*	*4*

Il y a 80 possibilités.

Jetons	*V*	*Autre couleur*	*V*
Nombre de choix	*5*	*4*	*4*

Il y a 80 possibilités.

Jetons	*Autre couleur*	*V*	*V*
Nombre de choix	*4*	*5*	*4*

Il y a 80 possibilités.

<u>*Conclusion*</u> *: Il y a 240 possibilités d'avoir un tirage contenant exactement 2 jetons verts.*

EXERCICE RÉSOLU 3

Dans une classe de 60 élèves dont 36 garçons et 24 filles, on choisit un comité de 3 personnes.

1. Dénombrer tous les cas possibles.
2. Déterminer le nombre de comités comprenant exactement 2 garçons.
3. Déterminer le nombre de comités comprenant au plus 1 fille.
4. Déterminer le nombre de comités comprenant au moins 1 fille.

Résolution

1. Soit A l'ensemble de tous les comités possibles. Un comité est une combinaison de 3 personnes d'un ensemble à 60 éléments.
D'où $Card(A) = C_{60}^3 = 34220$.
Il y a donc 34220 comités possibles.

2. Soit B l'ensemble des comités comprenant exactement 2 garçons . On doit

choisir 2 garçons parmi 36 et compléter par 1 fille choisie parmi 24.

D'où Card(B) = $C_{24}^{1} \times C_{36}^{2} = 15120$.
Il y a donc 15120 comités comprenant exactement 2 garçons.

3. Soit C l'ensemble de tous les comités comprenant au plus 1 fille.
C est composé de tous les comités comprenant 0 fille et ceux comprenant exactement 1 fille.

D'où Card(C) = $C_{36}^{3} + C_{24}^{1} \times C_{36}^{2} = 22260$.

Il y a donc 22260 comités comprenant au plus 1 fille.

4. Soit D l'ensembles des comités comprenant au moins une fille.
D est composé de tous les comités comprenant exactement 1 fille, ceux comprenant exactement 2 filles et ceux comprenant exactement 3 filles.

D'où Card(D) = $C_{24}^{1} \times C_{36}^{2} + C_{24}^{2} \times C_{36}^{1} + C_{24}^{3} = 27080$.

Il y a donc 27080 comités comprenant au moins 1 fille.

EXERCICE RÉSOLU 4

Une classe de TC compte 5 filles. Dans cette classe, il y a 10 tables-bancs numérotés de 1 à 10.
Sachant que deux filles ne doivent pas s'assoir sur le même table-blanc, combien y a-t-il de dispositions possibles ?

Résolution
Pour la $1^{ère}$ *fille, il y a 10 choix possibles.*
Lorsque la $1^{ère}$ *fille s'est assise, il reste 9 choix possibles pour la* 2^{e} *fille.*
IL reste 8 choix possibles pour la 3^{e} *fille.*
IL reste 7 choix possibles pour la 4^{e} *fille.*
IL reste 6 choix possibles pour la 5^{e} *fille.*

Le nombre de dispositions possibles des 5 filles est $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$.

EXERCICES

1 Un sac contient quatre jetons : un vert, un noir, un rouge et un gris.
On tire successivement et avec remise trois jetons du sac de la façon suivante : après avoir tiré un jeton du sac et noté sa couleur, on remet le jeton tiré dans le sac.

1. Dénombrer tous les résultats possibles à l'issue de ce tirage.
2. Combien y en a-t-il contenant exactement 1 jeton vert ?
3. Combien y en a-t-il contenant exactement 2 jetons verts ?
4. Combien y en a-t-il contenant exactement 1 jeton vert et 2 jetons noirs ?

2 Un sac contient quatre jetons : un vert, un noir, un rouge et un gris.
On tire successivement et sans remise trois jetons du sac de la façon suivante : après avoir tiré un jeton du sac et noté sa couleur, on ne le remet pas dans le sac.

1. Dénombrer tous les résultats possibles à l'issue de ce tirage.
2. Combien y en a-t-il contenant le jeton vert ?
3. Combien y en a-t-il contenant le jeton vert, le jeton rouge et le jeton gris ?

3 On dispose de deux dés, l'un noir (N) dont trois faces portent 1 point, deux faces portent 3 points et une face porte 5 points ; et l'autre rouge (R) dont deux faces portent 2 points, deux faces portent 4 points et deux faces portent 6 points.

On lance simultanément les deux dés et on s'intéresse à la somme S des points marqués sur la face supérieure.

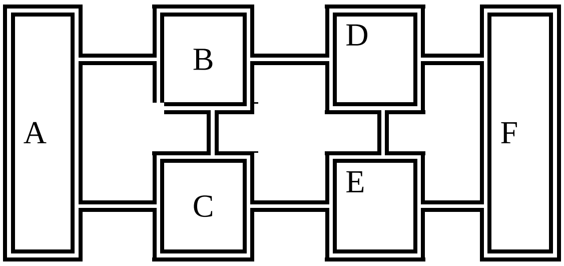
1. A l'aide d'un tableau, déterminer les valeurs possibles distinctes de S.
2. De combien de façons différentes peut-on obtenir une valeur de S égale à 7 ?

4 Un élève achète une canette dans une boutique qui coûte 300F ; il donne au boutiquier 1000F. Ce dernier ne possède que des pièces de 50F, de 100F, de 200F et de 500F pour lui rendre la monnaie.

De combien de façon peut-il rendre la monnaie à l'élève ?

5 1. Dénombrer les anagrammes distinctes du mot GARÇON.
2. Dénombrer les anagrammes distinctes du mot FILLE.

6 La figure ci-dessous représente six villes A, B, C ,D, E et F ainsi que les routes les reliant.



1. Combien y a-t-il de chemins menant de A à F sans passer deux fois par la même ville ?
2. Combien y a-t-il de chemins menant de A à F en passant par B et E sans passer deux fois par la même ville ?

7 1. Combien peut-il y avoir au plus de numéros de téléphone fixe en Côte d'Ivoire avec notre système de numérotation à huit chiffres ?
2. Parmi ces numéros, combien
a) sont composés de chiffres distincts ?

b) contiennent au moins une fois le chiffre 0 ?
c) contiennent exactement trois fois le chiffre 0 ?

8 Dix-huit chevaux sont au départ du tiercé.
1. De combien de façon peut-on jouer le tiercé au hasard ?
2. Pour un tiercé gagnant (dans l'ordre), combien y en a-t-il où figure le n° 13 ?

9 Pour se rendre à son travail, un automobiliste traverse successivement quatre carrefours avec feux. Chaque feu peut être rouge (R), orange (O) ou vert (V). On appelle trajet de l'automobiliste un ensemble ordonné de quatre lettres choisies parmi R, O et V : par exemple, VRVO.

1.Combien existe-t-il de trajets possibles ?
2. Combien y a-t-il de trajets pour lesquels :
a) les deux premiers feux sont rouges ?
b) exactement deux feux sont rouges ?

10 Lors d'un examen, un questionnaire à choix multiples (Q.C.M) autorisant une seule réponse par question, comprend 5 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles dont une seule est exacte.

1. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?
2. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire :
a) s'il répond correctement à la première question et faux aux autres questions ?
b) s'il répond correctement à une seule question ?
b) s'il répond correctement à exactement deux questions ?

11 En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères.
Un bit est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1.
Avec 8 chiffres binaires (un octet), combien de caractères peut-on coder ?

12 Dans une classe de $1^{ère}$, il y a 40 élèves dont 30 filles.
On constitue le bureau composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier.

1. Combien y a-t-il de bureaux possibles ?
2. Combien y en a-t-il où le président est une fille ?
3. Combien y en a-t-il où le bureau ne comprend que deux filles ?

13 1. Combien y a-t-il de nombres de cinq chiffres ?
2. Parmi ces nombres :
a) combien sont pairs ?
b) combien sont composés de chiffres distincts ?
c) combien sont composés exactement de deux chiffres identiques ?

14 Dans une classe de $1^{ère}$ A, il y a 20 élèves dont 8 filles.
On constitue un groupe de cinq élèves pour le balayage hebdomadaire de la classe.

1. De combien de manières peut-on former ce groupe ?
2. Combien y en a-t-il si le groupe est composé exactement de trois filles ?
3. Combien y en a-t-il si le groupe comprend au moins une fille ?
4. Dans cette classe, il y a deux élèves qui ne souhaitent pas faire partie du même

groupe.
Combien de groupes peut-on constituer de telle façon que ces deux élèves ne se retrouvent pas ensemble ?

15 Au service du personnel, on compte 7 célibataires parmi les 30 employés. On désire faire un sondage : pour cela on choisit un échantillon de quatre personnes dans ce service.

1. Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?
2. Quel est le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire ?
3. Quel est le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire ?

16 Un sac contient 10 jetons :
4 jetons blancs numérotés de 1 à 4 ;
4 jetons rouges numérotés de 1 à 4 ;
2 jetons verts numérotés de 1 à 2 .

On tire simultanément 3 jetons du sac.
1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages :
a) ne contenant que des numéros identiques ?
b) ne contenant que des jetons de la même couleur ?
c) contenant exactement 2 jetons blancs ?
d) contenant au moins un jeton blanc ?
e) contenant au plus 2 jetons blancs ?

17 Quatre garçons et deux filles s'assoient sur un banc.
1. Quel est le nombre de dispositions possibles ?

2. Même question si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre.
3. Même question si chaque fille est intercalée entre deux garçons.
4. Même question si les filles veulent rester l'une à côté de l'autre.

18 Quatre garçons et deux filles s'assoient autour d'une table ronde.
1. Quel est le nombre de dispositions possibles ?
2. Même question si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre.

19 Le club informatique d'un lycée se compose :
– de 10 élèves de Seconde dont 7 proviennent d'une série scientifique;
– de 15 élèves de Première dont 5 proviennent d'une série scientifique;
– de 10 élèves de Terminale dont 8 proviennent d'une série scientifique.

On offre à trois élèves de ce club un voyage gratuit en Inde pour visiter un lycée d'excellence.
Pour désigner les heureux bénéficiaires, on choisit trois élèves du club informatique.

1. Combien y a-t-il de choix possibles ?
2. Démontrer que le nombre de choix où un seulement des trois élèves choisis est en Seconde est égal à 3000.
3. Combien y a-t-il de choix possibles où :
a) les trois élèves choisis appartiennent à même niveau scolaire ?
b) deux élèves exactement proviennent d'une série scientifique ?
c) au moins l'un des élèves choisis est en Première et provient d'une série scientifique ?

20 Le code de la porte d'entrée d'un immeuble est composé d'une lettre suivie

de deux chiffres (par exemple A02, ou G40 ou U33).
On rappelle que l'alphabet comporte 26 lettres dont 6 voyelles.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien y en a-t-il où
a) la lettre est un S ?
b) la lettre est une voyelle ?
c) il y a exactement un chiffre impair dans le code ?
d) il y a au moins un chiffre impair dans le code ?

21 On se propose de tester l'efficacité d'une serrure à code et d'un système d'alarme.
Une porte est munie d'un dispositif portant les touches 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et A, B, C, D. La porte s'ouvre lorsqu'on frappe dans l'ordre trois chiffres et deux lettres qui forment un code. Les chiffres sont nécessairement distincts, les lettres non.

1.Quel est le nombre de codes possibles ?
2. Déterminer le nombre de codes répondant à chacun des critères suivants :
a) les trois chiffres sont pairs ;
b) les deux lettres sont identiques ;
c) le code contient deux chiffres impairs.

22 Les êtres humains sont répartis, suivant la composition du sang en quatre groupes : O, A, B, AB.
Dans une assemblée de dix donneurs de sang, quatre personnes appartiennent au groupe O, trois au groupe A, deux au groupe B et une au groupe AB.
On choisit au hasard trois personnes de l'assemblée.

1. Combien y a-t-il de choix possibles ?
2. Combien y en a-t-il où les trois personnes appartiennent au même groupe sanguin ?
3. Combien y en a-t-il où deux personnes exactement appartiennent au même groupe sanguin ?
4. Combien y en a-t-il où deux personnes au moins appartiennent au même groupe sanguin ?

23 Un libraire dispose de 20 livres d'auteurs différents qu'il veut répartir dans six tiroirs numérotés de 1 à 6 (chaque tiroir peut contenir de zéro à 20 livres).

1. Combien y a-t-il de rangements possibles ?
2. Combien y a-t-il de rangements possibles où le tiroir numéro 1 contient deux livres exactement ?
3. Combien y a-t-il de rangements possibles où un tiroir contient les vingt livres ?
4. Combien y a-t-il de rangements possibles où chaque tiroir contient au moins un livre ?

24 On jette deux dés cubiques A et B dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On note S la somme des points marqués sur la face supérieure de chaque dé.

1. Combien y a-t-il de possibilités où S est égal à 7 ?
2. Combien y a-t-il de possibilités où la somme des points est strictement inférieure à 10 ?

25 On jette trois dés cubiques A, B et C dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Combien y a-t-il de possibilités d'obtenir :

a) exactement un as ?

b) au moins un as ?

c) trois faces identiques ?

d) exactement deux faces identiques ?

e) une somme des points égale à 12 ?

26 On veut construire un tableau de mots croisés ayant cinq lignes et cinq colonnes comme ci-dessous.
On noircit au hasard huit des 25 cases du tableau.

1. De combien de manières peut-on choisir les huit cases noires dans le tableau ?
2. De combien de manières peut-on obtenir un tableau constitué : une case noire au centre et une à chacun des sommets ?

27 Lors de la préparation d'un concours, un élève n'a étudié que 8 des 12 leçons proposées. On a mis 12 papiers contenant chacun une question portant respectivement sur les 12 leçons dans une urne.
Le candidat tire simultanément 4 papiers.

1. Combien y a-t-il de tirages où le candidat ne connait aucun de ces sujets ?
2. Combien y a-t-il de tirages où le candidat connait les quatre sujets ?
3. Combien y a-t-il de tirages où le candidat connait un et un seul de ces sujets ?
4. Combien y a-t-il de tirages où le candidat connait au moins de ces sujets ?

28 Afin de donner des notes de rattrapage, le professeur de mathématiques interroge l'un après cinq élèves dont deux garçons.

1. De combien de manières peut-il procéder ?
2. De combien de manières peut-il procéder si le premier élève interrogé doit être une fille ?

29 Chacune des trois promotions de la seconde à la terminale du lycée mandate 5 élèves à l'élection du bureau des représentants des élèves, bureau comprenant un président, un secrétaire et un trésorier. Tout élève mandaté est susceptible d'occuper un des postes et un seul du bureau.

1. Justifier qu'il y a 2730 bureaux possibles que l'on peut élire.
2. Combien y en a-t-il :

a) où le président est un élève de terminale ?

b) comprenant exactement un élève de terminale ?

c) comprenant uniquement des élèves de terminale ?

d) comprenant un élève de chaque promotion ?

30 On prend sept cartons identiques. Sur chaque carton on écrit une, et une seule, des sept lettres du mot AFRIQUE; chacune des lettres de ce mot est utilisée.
On place ces cartons dans une urne. On les en extrait au hasard un à un, et on note les lettres obtenues dans l'ordre de leur apparition afin de former un mot.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. Combien y en a-t-il si les trois premières lettres apparues sont dans cet ordre A, F, R ?

31 A l'écrit d'un concours, on doit traiter 8 exercices au choix parmi 10.
1. Combien y a-t-il de choix possibles ?
2. Combien y en a-t-il si les deux premiers exercices sont obligatoires.

32 Combien y a-t-il de mots de 5 lettres distinctes prises parmi $\{A, B, C, \dots, X, Y, Z\}$ qui finissent par deux voyelles ?

33 Une banque distribue à ses clients des cartes magnétiques dont le code est formé de quatre chiffres, (par exemple 0553, 4561, 8888).
Combien la banque peut-elle distribuer de cartes magnétiques ayant des codes distincts ?

34 Un comité de dix personnes se propose d'élire un président, un vice-président et un secrétaire général. Il y a cinq femmes et cinq hommes. Le cumul des mandats est interdit.

1. Combien y a-t-il de comités possibles ?
2. Combien y en a-t-il où le président est une fille ?
3. Combien y en a-t-il où le président et le vice-président sont de sexe différent ?
4. Combien y en a-t-il où le président et le vice-président sont du même sexe ?

35 Combien y a-t-il de nombres de quatre chiffres dans lesquels 0 apparaît exactement deux fois ?

36 Dans une classe, chaque élève étudie au moins l'une des 3 langues suivantes : Anglais, Allemand, Espagnol.
Combien y' a-t-il d'élèves dans la classe sachant que :
5 élèves étudient les 3 langues ;
7 élèves étudient l'anglais et l'allemand ;
8 élèves étudient l'anglais et l'espagnol ;
9 élèves étudient l'allemand et l'espagnol ;
20 élèves font de l'anglais ;
15 élèves font de l'allemand ;
18 élèves font de l'espagnol.

37 Dans une classe de 20 élèves (12 garçons et 8 filles), on décide de former un comité composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier.
1. Combien y-a-t-il de comités possibles?
2. Combien y-a-t-il de comités comprenant une seule fille ?
3. Combien y-a-t-il de comités comprenant au moins une fille ?
4. Mr X et Melle Y ne veulent pas siéger ensemble.
Combien de comités peut-on former?

38 Un agent de la CIE est chargé de distribuer 7 factures d'électricité dans 7 appartements d'un immeuble, une facture par appartement. Comme il fait très sombre, il décide de déposer au hasard une facture devant chaque appartement.
1. Déterminer le nombre de distributions possibles.
2. On suppose qu'il est sûr de bien remettre la facture du 1er appartement.
Combien y-a-t-il de distributions possibles?
3.On suppose qu'il est sûr de bien distribuer les factures du 1er et du dernier appartement.
Combien y-a-t-il de distributions possibles?

3

GENERALITES SUR LES FONCTIONS

COMMENTAIRES

► Ce chapitre vise à étudier les propriétés de symétrie de la représentation graphique d'une fonction. Il s'agit de poursuivre l'étude de la représentation graphique d'une fonction amorcée en 2nde A, en mettant en exergue, les éléments de symétrie.
Les fonctions au programme en 1ère A sont les fonctions homographiques ou polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
Dans ce thème, seules la lecture graphique et l'utilisation de formules explicites sont exigées.
Dans l'étude de la parité, on se limitera aux fonctions définies sur IR ou IR*.
► Les définitions et les propriétés seront introduites à partir d'exemples simples.
► Propriétés pour démontrer :
- qu'un point est centre de symétrie :
On considère le point A(a, b) et f une fonction définie sur IR ou sur IR-$\{a\}$.
A est centre de symétrie de (C_f) si la fonction g définie par g$(x) = f(x+a) - b$ est impaire.
- qu'une droite est axe de symétrie :
Le plan est rapporté à un repère orthogonal.
On considère la droite (D) d'équation $x = a$ et f une fonction définie sur IR ou sur IR-$\{a\}$.
(D) est axe de symétrie de (C_f) si la fonction g définie par g$(x) = f(x+a)$ est paire.
► En utilisant la propriété pour démontrer qu'un point est centre de symétrie ou qu'une droite est axe de symétrie, on ne demandera pas aux élèves de déterminer l'ensemble de définition de la fonction g après qu'il est établit l'ensemble de définition de f.
► L'étude de la parité se faisant sur IR ou IR*, on n'exigera pas des élèves la condition « si $x \in D_f$ $alors - x \in D_f$ ».
On adoptera les définitions suivantes :
- Définition d'une fonction paire
Soit f une fonction définie IR ou IR*. On dit que f est paire si pour tout élément de D_f, on a : $f(-x) = f(x)$.

- Définition d'une fonction impaire

Soit f une fonction définie IR ou IR*. On dit que f est impaire si pour tout élément de D_f, on a : $f(-x) = -f(x)$.

CONTENUS	**CAPACITÉS ATTENDUES**
I. Fonction paire, fonction impaire 1. Définition d'une fonction paire, d'une fonction impaire définie sur IR ou IR* 2. Propriétés liant la parité d'une fonction et sa représentation graphique II. Axe et centre de symétrie Propriétés	☞ Une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3 ou une fonction homographique étant donnée : - déterminer l'ensemble de définition de cette fonction ; - à partir de la représentation graphique de cette fonction, reconnaître si la fonction est paire ou impaire -justifier que la fonction donnée par une formule explicite est paire ou impaire. - justifier que la droite d'équation x = a est un axe de symétrie. - justifier que le point A(a ;b) est un centre de symétrie.

COURS

I. FONCTION PAIRE

Définition

Soit f une fonction définie sur IR ou sur IR*.

On dit que f est paire si pour tout élément de D_f, on a : $f(-x) = f(x)$.

EXEMPLE

Soit f la fonction de IR vers IR et définie par : $f(x) = -3x^2$.
Démontrer que f est paire.

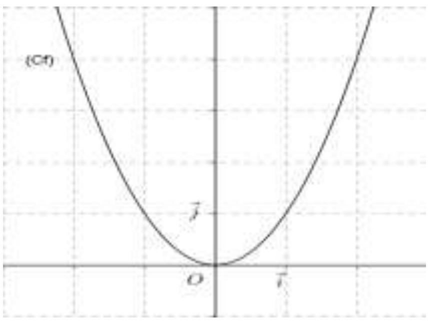
Solution
f est une fonction polynôme donc D_f =IR.
Pour tout x de D_f, on a : $f(-x) = -3(-x)^2 = -3x^2 = f(x)$.
Donc f est paire.

Propriété

Dans un repère orthogonal, une fonction f est paire si et seulement si l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de sa courbe représentative.

EXEMPLE

Soit la représentation graphique (C) ci-dessous d'une fonction f. Justifier que f est paire



Solution
L'axe des ordonnées est un axe de symétrie de (C) donc f est paire.

Exercice 1

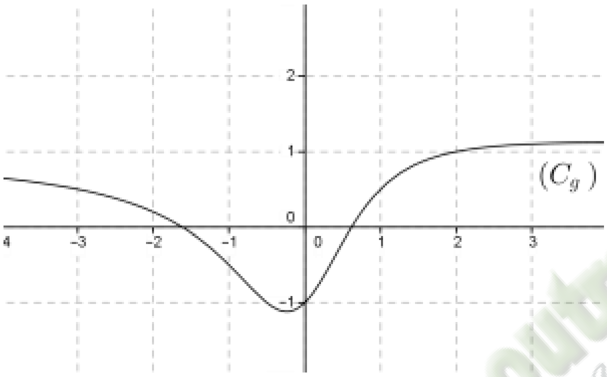
$f : IR \to IR$ et $g : IR \to IR$

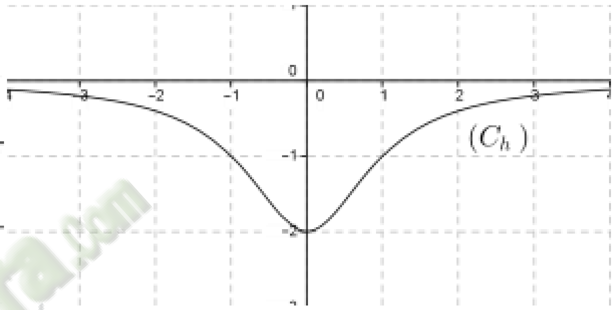
$x \mapsto x^2 - 5$ $\quad$ $x \mapsto 3x - 1$

a) Démontrer que f est paire.
b) Démontrer que g n'est pas paire.

Exercice 2

Ci-dessous sont représentées graphiquement deux fonctions, l'une est paire ; laquelle ?
L'autre n'est pas paire ; pourquoi ?





II. FONCTION IMPAIRE

Définition

Soit f une fonction définie sur IR ou sur IR*.

On dit que f est impaire si pour tout élément de D_f, on a : $f(-x) = -f(x)$.

EXEMPLE

Soit $f: x \mapsto -2x^3 + 7x$
Démontrer que f est impaire.

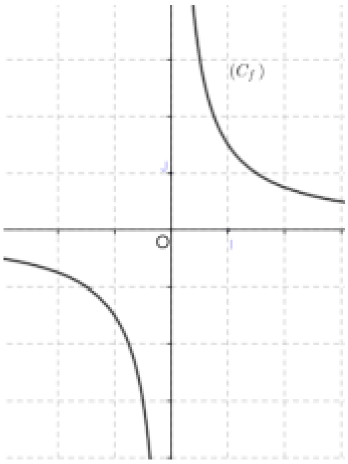
Solution
f est une fonction polynôme donc $D_f = IR$.
Pour tout $x \in IR$, on a : $f(-x) = -2(-x)^3 + 7(-x) = 2x^3 - 7x$
et $-f(x) = -(-2x^3 + 7x) = 2x^3 - 7x$.
Donc pour tout $x \in IR$, on a : $f(-x) = -f(x)$. D'où f est impaire.

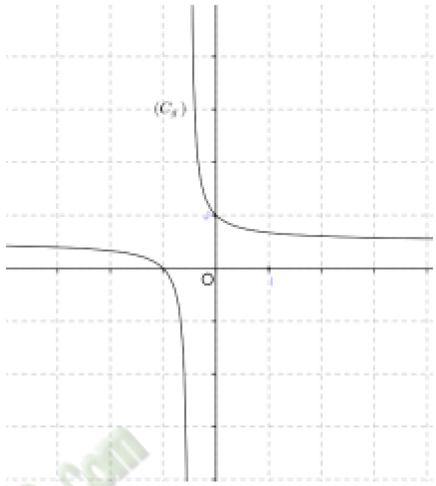
Propriété

Une fonction f est impaire si et seulement si l'origine du repère est un centre de symétrie de sa courbe représentative.

Exercice

Ci-dessous sont représentées graphiquement deux fonctions, l'une est impaire ; laquelle ?
L'autre n'est pas impaire ; pourquoi ?





III. AXE ET CENTRE DE SYMÉTRIE

1. Axe de symétrie

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J).

Propriété

On considère la droite (D) d'équation $x = a$ et f une fonction définie sur IR ou sur IR-$\{a\}$.

(D) est axe de symétrie de $\left(C_f\right)$ si la fonction g définie par g$(x) = f(x+a)$ est paire.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x^2 + 3x$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J).

Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : $x = -\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de (C).

Solution

f est une fonction polynôme donc $D_f = IR$.

Soit $g(x) = f\left(x+\frac{3}{2}\right)$. Démontrons que g est paire.

On a : $g(x) = f\left(x-\frac{3}{2}\right) = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(x-\frac{3}{2}\right) = x^2 - \frac{9}{4}$.

On a : $g(-x) = (-x)^2 - \frac{9}{4} = x^2 - \frac{9}{4} = g(x)$. D'où g est paire .

La droite $(\mathcal{D})$ est donc un axe de symétrie de (C).

2. Centre de symétrie

Le plan est muni d'un repère (O,I,J).

Propriété 4

On considère le point A(a, b) et f une fonction définie sur IR ou sur IR-$\{a\}$.

A est centre de symétrie de (C_f) si la fonction g définie par $g(x) = f(x+a) - b$ est impaire.

EXEMPLE 1

Soit f la fonction de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{2x+1}{4-x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J).
Démontrer que le point $A(4; -2)$ est un centre de symétrie de (C).

Solution
$x \in D_f \Leftrightarrow 4 - x \neq 0$.
Donc : $D_f = IR - \{4\}$.
Démontrons que le point A est un centre de symétrie de (C).
On a : a = 4 et b = -2.
Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x+4) + 2 = \frac{2(x+4)+1}{4-(x+4)} + 2 = \frac{2x+9}{-x} + 2 = -\frac{9}{x}$.
Démontrons que g est impaire.
On a : $g(-x) = \frac{9}{x} = -g(x)$. *Donc g est impaire.*
Donc le point A est un centre de symétrie de (C).

EXEMPLE 2

Soit g la fonction de IR vers IR et définie par : $g(x) = 2x^3 + 1$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
Démontrer que le point J est un centre de symétrie de (C).

Solution
On a : $D_g = IR$.
Démontrons que le point J(0 ;1) est un centre de symétrie de (C).
On a : a = 0 et b = 1.
Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x) = g(x+0) - 1 = 2x^3$.
Démontrons que h est impaire.
On a : $h(-x) = 2(-x)^3 = -2x^3 = -h(x)$. *Donc h est impaire.*
Donc le point J est un centre de symétrie de (C).

EXERCICES

1 Dans chacun des cas suivants, étudier la parité de la fonction f de IR vers IR.

a) $f(x) = -3x^2 + 5$;

b) $f(x) = 5$;

c) $f(x) = -x^3 + 5x$;

d) $f(x) = \frac{1}{x}$;

e) $f(x) = 4x^2 + x$;

f) $f(x) = \frac{x^2}{3}$;

g) $f(x) = -3x^2 + 5$;

h) $f(x) = x^3 + x + 1$;

i) $f(x) = \frac{3x+4}{2x-1}$;

j) $f(x) = \frac{5-x^2}{4}$;

k) $f(x) = \frac{-6}{5x}$;

l) $f(x) = x - \frac{1}{2}x^3$;

m) $f(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{x}{7}$;

n) $f(x) = 4(1-x)(1+x)$;

o) $f(x) = -x(x^2 - 4)$.

2 Soit f la fonction de IR vers IR et définie par : $f(x) = x^3 - 3x$ -2 et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O,I,J).

Démontrer que le point $B(1;-2)$ est un centre de symétrie de (C).

3 Soit f la fonction de IR vers IR et définie par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O,I,J).
Démontrer que le point I est un centre de symétrie de (C).

4 Soit f la fonction de IR vers IR et définie par : $f(x) = x^2 + x + 1$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J).
Démontrer que la droite (D) d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C).

5 Soit f la fonction de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O,I,J).
Démontrer que le point $K(2;1)$ est un centre de symétrie de (C).

6 Soit f la fonction de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{5}{3}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O,I,J).
Démontrer que le point $A(1;-2)$ est un centre de symétrie de (C).

7 Soit f la fonction de IR vers IR et définie par : $f(x) = (x+2)^3 - 1$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O,I,J).
Démontrer que le point $Q(-2;-1)$ est un centre de symétrie de (C).

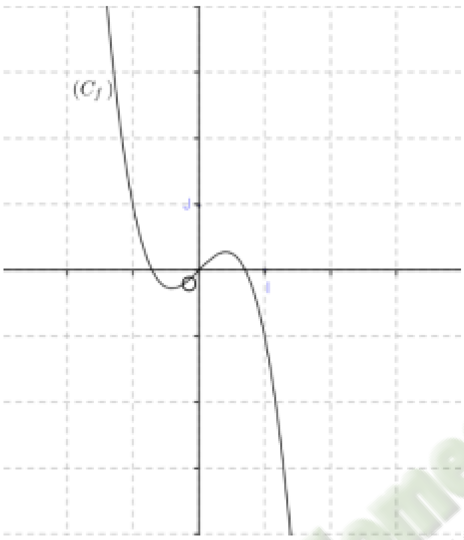
8 Soit f la fonction de IR vers IR et définie par : $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J).
Démontrer que la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de (C).

9 Soit f la fonction de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{5-6x}{3-2x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un

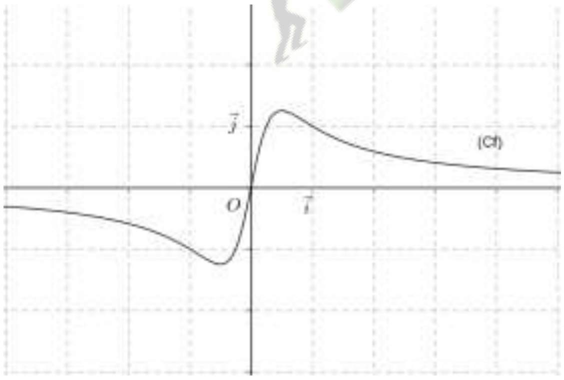
repère orthogonal (O,I,J).
Démontrer que le point A $\left(\frac{3}{2};3\right)$ est un centre de symétrie de (C).

10 Dans chacun des cas suivants, (C) désigne la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé (O,I,J), dites si f est paire ou impaire.

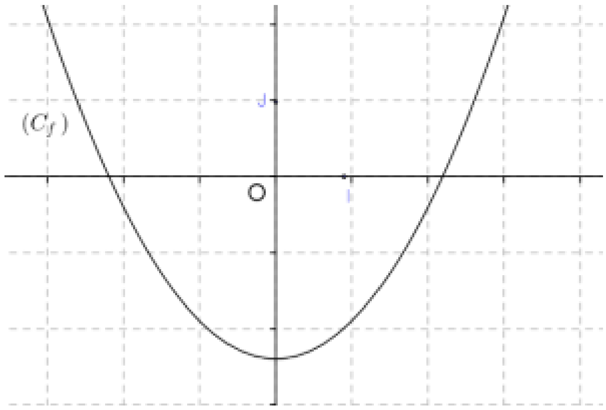
a)



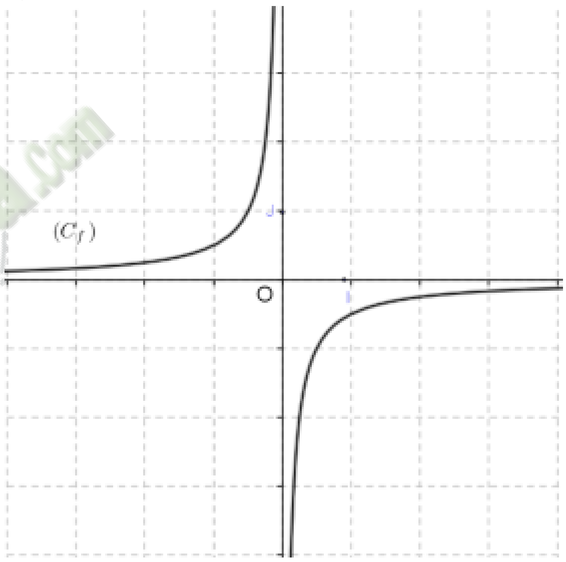
b)



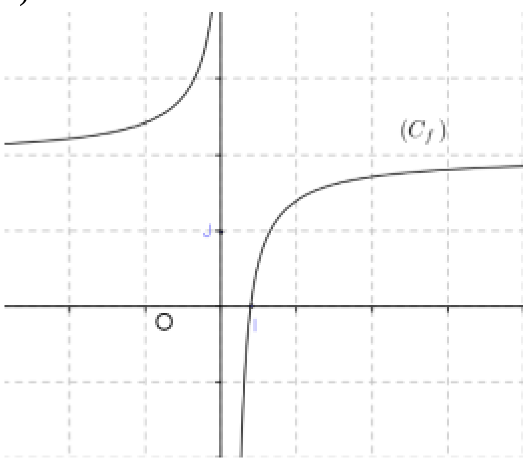
c)



d)



e)



4

DERIVABILITE – ETUDE DE FONCTIONS

COMMENTAIRES

► Ce chapitre vise à compléter l'étude des fonctions entamées en classe de seconde A par la mise en place des notions de nombre dérivé et de fonction dérivée.

► Les fonctions aux programme en 1ère A sont les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et les fonctions homographiques.

► Les formules des dérivées des fonctions du type $\mathrm{u}+\mathrm{v}, \mathrm{au}, \mathrm{uv}$ et $\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}}$ seront admises.

► La notion de limite n'est pas au programme.

► Pour la mise en place de la notion intuitive du nombre dérivé d'une fonction en a, le professeur pourra utiliser l'une des trois approches suivantes :

- approche graphique à l'aide de la tangente ;
- approche cinématique à l'aide de la vitesse ;
- approche numérique, en calculant le taux d'accroissement pour des valeurs suffisamment proches de a.

► Pour établir le nombre dérivé de chacune des fonctions $x \mapsto k$, $x \mapsto x$, $x \mapsto \mathrm{a}x+\mathrm{b}$, $x \mapsto x^2$,

$x \mapsto x^3$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, on utilisera la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ en procédant de la façon suivante :
- on simplifie le quotient $\frac{f(x)-f(\mathrm{a})}{x-\mathrm{a}}$ par $x - \mathrm{a}$;
- on calcule $f'(\mathrm{a})$ en remplaçant x par a dans cette nouvelle expression.

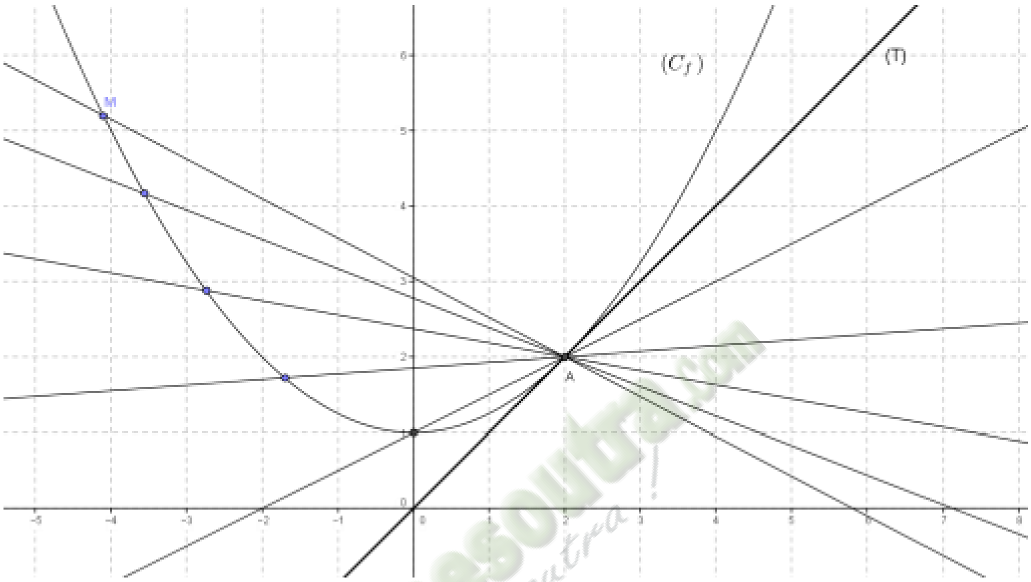
► Par la suite, on utilisera les formules de dérivées au programme.

► Pour construire la tangente en un point de (C_f), on entraînera les élèves à utiliser le nombre dérivé sans déterminer une équation de la tangente.

CONTENUS	**CAPACITÉS ATTENDUES**
1. Définition d'une fonction dérivable en un nombre réel 2. Définition du nombre dérivé d'une fonction en un nombre réel 3. Equation de la tangente 4. Formules de la dérivée de chacune des fonctions : $x \longmapsto k$; $x \longmapsto x$ $x \longmapsto \mathrm{a}x + \mathrm{b}$; $x \longmapsto x^2$; $x \longmapsto x^3$; $x \longmapsto \frac{1}{x}$. 5. Formules des dérivées des fonctions du type $\mathrm{u} + \mathrm{v}, \mathrm{au}, \mathrm{uv}, \frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}}$. 6. Propriété liant dérivée et sens de variation d'une fonction 7. Propriété liant dérivée et extremum relatif	☞ Déterminer la fonction dérivée d'une fonction. ☞ Calculer le nombre dérivé d'une fonction en un nombre réel . ☞ Déterminer une équation de la tangente à une courbe en un point donné. ☞ Construire la tangente en un point de la représentation graphique d'une fonction. ☞Utiliser la dérivée pour déterminer le sens de variation d'une fonction. ☞ Dresser le tableau de variation d'une fonction. ☞ Représenter graphiquement une fonction sur un intervalle ou une réunion d'intervalles fermés bornés. ☞ Etant donné le tracé de la tangente à une courbe d'une fonction f en un point d'abscisse a, déterminer graphiquement $f'(\mathrm{a})$. ☞ A partir de la représentation graphique d'une fonction, déterminer le signe de la dérivée sur un intervalle.

ACTIVITÉS

(C) est la courbe représentative de la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$.
A est le point de (C) d'abscisse 2 et M est un point de (C) distinct de A et d'abscisse x.



Lorsque M se rapproche le plus près possible de A, la droite (AM) atteint une position limite (T).
La droite (T) est appelée la **tangente** en A à (C).
Pour tout $x \neq 2$, on pose m(x) = $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.
m(x) est le coefficient directeur de la droite (AM).
1. Simplifier m(x).
2. En déduire vers quel réel tend m(x), lorsque x tend vers 2.

COURS

I. NOMBRE DERIVÉ- TANGENTE

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre réel de I.

On dit que f est **dérivable** en a lorsque $\frac{f(x)-f(\mathrm{a})}{x-\mathrm{a}}$ tend vers un nombre réel quand x tend vers a ; ce nombre réel est appelé **nombre dérivé** de f en a et noté f'(a).

EXEMPLE

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = 3x^2 - 1$.
Démontrer que f est dérivable en 4 et calculer $f'(4)$.

Solution
On a f(4) = 47 .
Pour tout $x \neq 4$, posons m(x) = $\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$.
On a : m(x) = $\frac{3x^2-1-47}{x-4} = 3(x+4)$.
Lorsque x tend vers 4, m(x) tend vers 24.
On en déduit que f est dérivable en 4 et que $f'(4) = 24$.

Exercice 1
Soit la fonction f définie sur IR* par : $f(x) = \frac{1}{x}$.
Démontrer que f est dérivable en -1 et calculer $f'(-1)$.

Exercice 2
Soit la fonction g définie de IR vers IR par : $\mathrm{g}(x) = \frac{2x-3}{x+1}$.
Démontrer que g est dérivable en 3 et calculer $\mathrm{g}'(3)$.

Exercice 3
Soit la fonction h définie de IR vers IR par : $\mathrm{h}(x) = 3 - 4x$.
Calculer le nombre dérivé de h en 0.

Définition - Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre réel de I tel que f soit dérivable en a.

La droite (T) passant par A(a ;f(a)) et de coefficient directeur f'(a) est appelée la tangente à (C_f) en A.

Une équation de (T) est : $y = f'(\text{a})(x - \text{a}) + f(\text{a})$.

EXEMPLE

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x^2$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse -2.

Solution

On a pour tout $x \neq -2$, $\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \frac{x^2-4}{x+2} = x - 2$.
Donc $f'(-2) = -4$.
Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse -2 est :
$y = f'(-2)(x + 2) + f(-2)$.
Soit : $y = -4(x + 2) + 4$
Soit : $y = -4x - 4$.

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\text{IR} - \{-\frac{3}{2}\}$ par $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère (O, I, J).
Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

Exercice 2

Soit la fonction g définie sur IR par $\text{g}(x) = 1 - 2x^2$ et on note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère (O, I, J).
Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse -3.

II. FONCTION DÉRIVÉE

Formules de dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	**Dérivée f'**	**f est dérivable sur**
$x \longmapsto$ a (a ∈IR)	$x \longmapsto 0$	IR
$x \longmapsto x$	$x \longmapsto 1$	*IR*
$x \longmapsto \mathrm{a}x + b$ (a∈IR*, b∈IR)	$x \longmapsto \mathrm{a}$	*IR*
$x \longmapsto x^2$	$x \longmapsto 2x$	*IR*
$x \longmapsto x^3$	$x \longmapsto 3x^2$	*IR*
$x \longmapsto \frac{1}{x}$	$x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$	*]−∞ ; 0[ou] 0 ; +∞[*

Opérations

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un nombre réel.

fonction f	**Dérivée f'**	**Commentaires**
$\mathrm{u} + \mathrm{v}$	$\mathrm{u}' + \mathrm{v}'$	
ku	ku'	
uv	$\mathrm{u}'\mathrm{v} + \mathrm{uv}'$	
$\dfrac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}}$	$\dfrac{\mathrm{u}'\mathrm{v} - \mathrm{uv}'}{\mathrm{v}^2}$	si v ne s'annule pas sur I

EXEMPLES

a) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^3 + 5x^2 - x + 6$.

$\forall x \in IR, f'(x) = 3x^2 + 10x - 1$.

b) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = (3x^2 + x)(4x - 1)$.

$\forall x \in IR, f'(x) = (6x + 1)(4x - 1) + (3x^2 + x)(4)$.

$\forall x \in IR, f'(x) = 36x^2 + 2x - 1$.

c) Soit f la fonction définie sur IR$-\left\{\frac{2}{3}\right\}$ par $f(x) = \frac{x+1}{3x-2}$.

$\forall\, x \in IR - \left\{\frac{2}{3}\right\}, f'(x) = \frac{3x-2-(3)(x+1)}{(3x-2)^2} = \frac{-5}{(3x-2)^2}$.

Exercice
Calculer la dérivée de la fonction f dans chaque cas .

a) $f(x) = x - 5$	b) $f(x) = -2x^3 + 5x + 1$	c) $f(x) = \frac{1}{x+4}$
d) $f(x) = (x+1)(2x-4)$	e) $f(x) = \frac{3x-5}{2x-4}$	f) $f(x) = (2x-3)^2$
g) $f(x) = 1 - \frac{3}{2x}$	h) $f(x) = \frac{3}{2x+4}$	i) $f(x) = x(2x-3)^2$
j) $f(x) = -\frac{3}{x}$	k) $f(x) = \frac{5}{7}$	l) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$.

III. DERIVÉE ET SENS DE VARIATION

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et f' sa fonction dérivée.
- Si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.
- Si f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I.
- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

EXEMPLE 1
Soit f la fonction de IR vers IR et définie par : $f(x) = -3x + 5$.
Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.
Solution
$D_f = IR$ car f est une fonction polynôme.
$\forall\, x \in IR, f'(x) = -3$. *Donc* $\forall\, x \in IR, f'(x) < 0$.
Donc f est décroissante sur IR.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$\searrow$	

EXEMPLE 2

Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = x^2 - 6x$.

Etudier le sens de variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

D_f = IR car f est une fonction polynôme.

$\forall\, x \in IR, f'(x) = 2x - 6.$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow x = 3$

Le tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

$\forall\, x \in]-\infty; 3[, f'(x) < 0$ et $\forall\, x \in]3; +\infty[, f'(x) > 0;$

Il en résulte que f est décroissante sur $]-\infty; 3]$ et f est croissante sur $[3; +\infty[$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	-9	$\nearrow$	

EXEMPLE 3

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5.$

Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

Solution

$\forall\, x \in IR, f'(x) = -3x^2 + 6x + 9.$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x + 9 = 0\,.$

Les zéros de $f(x)$ sont -1 et 3.

Le tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

$\forall\, x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[, f'(x) < 0;$

$\forall\, x \in]-1; 3[, f'(x) > 0;$

Donc :

f est décroissante sur $]-\infty; -1]$ et sur $[3; +\infty[$;

f est croissante sur $[-1; 3]$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	32	$\searrow$	

Exercice

Etudier les variations de la fonction f de IR vers IR dans chacun des cas suivant et dresser son tableau de variation.

a) $f : x \mapsto 1 - 2x^3$;

b) $f : x \mapsto x^3 + 5x^2 + 3x - 1$

c) $f : x \mapsto \frac{3x-5}{1-x}$;

d) $f : x \mapsto \frac{-3x+1}{x+2}$;

e) $f : x \mapsto 2 - 5x$;

f) $f : x \mapsto \frac{6}{x}$.

IV. EXTREMUM RELATIF D'UNE FONCTION

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un nombre réel de I.
Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum relatif de f sur I.

Remarques

x		c	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	f(c)	↗

f' s'annule en c en étant négative, puis positive donc f(c) est un minimum relatif.

x		c	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	f(c)	↘

f' s'annule en c en étant positive, puis négative donc f(c) est un maximum relatif.

EXEMPLE 1

Soit une fonction f définie sur IR connue par son tableau de variation:

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	1	↗	

1. Justifier que f admet un minimum relatif.
2. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Solution

1. f' s'annule en -4 en étant négative puis positive donc $f(-4)$ est un minimum relatif de f sur IR.

Or $f(-4) = 1$, donc 1 est un minimum relatif de f sur IR.

2. Comme 1 est le minimum relatif de f sur IR , pour tout x de IR : $f(x) \geq 1$.

Donc pour tout x de IR : $f(x) > 0$.

EXEMPLE 2

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = -x^3 + 3x$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer les extremums relatifs de f.

Solution

1. $\forall x \in IR, f'(x) = -3x^2 + 3$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0$.

Les zéros de $f(x)$ sont -1 et 1.

Donc

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, f'(x) < 0;$

$\forall x \in]-1; 1[, f'(x) > 0.$

D'où : f est décroissante sur $]-\infty; -1]$ *et sur* $[1; +\infty[$ *et est croissante sur* $[-1; 1]$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	-2	↗	2	↘	

2. ● La fonction f' s'annule en -1 en changeant de signe, donc f admet en -1 un extremum relatif qui est -2.

Comme $\begin{cases} \text{pour tout } x \text{ } de \text{ }]-\infty; -1[, f'(x) < 0 \\ \text{pour tout } x \text{ } de \text{ }]-1; 1[, f'(x) > 0 \end{cases}$ alors -2 est un minimum relatif de f.

● La fonction f' s'annule en 1 en changeant de signe, donc f admet en 1 un extremum relatif qui est 2.

Comme $\begin{cases} \text{pour tout } x \text{ } de \text{ }]-1; 1[, f'(x) > 0 \\ \text{pour tout } x \text{ } de \text{ }]1; +\infty[, f'(x) < 0 \end{cases}$ alors 2 est un maximum relatif de f.

TRAVAUX PRATIQUES

Dans les exercices ci-dessous f est une fonction numérique et (C) désigne sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J).

EXERCICE RESOLU 1

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = -x^2 + 4x + 1$

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. Déterminer les points d'intersection de (C) avec (OI) et (OJ).
3. Démontrer que la droite (D) d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de (C).
4. Tracer (C) sur $[-1{,}5; 5{,}5]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé .

Solution

1. $\forall\, x \in IR, f'(x) = -2x + 4$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
D'où :
$\forall\, x \in]-\infty; 2[, f'(x) > 0;$
$\forall\, x \in]2; +\infty[, f'(x) < 0;$
Par conséquent, f est strictement croissante sur $]-\infty; 2]$ *et strictement décroissante sur* $[3; +\infty[$.
On obtient donc le tableau de variation de f suivant :

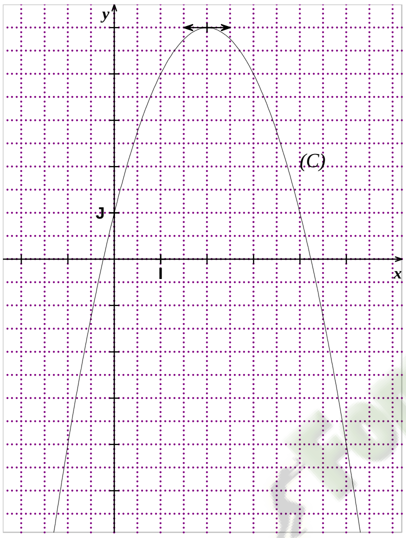
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	$-\infty$

2 • Les points d'intersection de (C) avec (OI) sont les points d'abscisses x tels que f(x) = 0.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 1 = 0.$
Le discriminant de l'équation est $\Delta = 20$.
Les solutions de l'équation sont : $x_1 = 2 - \sqrt{5}$ *et* $x_2 = 2 + \sqrt{5}$.
Les points d'intersection de (C) avec (OI) sont donc : A$(2 - \sqrt{5}; 0)$ *et B*$(2 + \sqrt{5}; 0)$.
• Le point d'intersection de (C) avec (OJ) est le point d'abscisse nulle.
f(0) = 1. Le point d'intersection de (C) avec (OJ) est donc le point K(0 ;1).

3. Soit $g(x) = f(x+2)$.
On a : $g(x) = -(x+2)^2 + 4(x+2) + 1 = -x^2 + 5$.
On a : $g(-x) = -(-x)^2 + 5 = -x^2 + 5 = g(x)$.
g est donc paire. Donc la droite (D) est donc axe de symétrie de (C).

4. Le tableau de valeurs suivant et les points d'intersections de (C) avec (OI) et (OJ) permettent de tracer (C).

x	*-1,5*	*-1*	*-0,5*	*0*	*0,5*	*1*	*1,5*	*2,5*	*3*	*3,5*	*4*	*4,5*	*5*	*5,5*
Arrondi d'ordre 1 de f(x)	*-7,3*	*4*	*-1,3*	*1*	*2,8*	*4*	*4,8*	*4,8*	*4*	*2,8*	*1*	*-1,3*	*-4*	*-7,3*



EXERCICE RESOLU 2

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 1$.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
3. Tracer (T) et (C) sur $[-2; 4]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé .

Solution

1. f est dérivable su IR. $\forall\, x \in IR, f'(x) = -x^2 + 2x$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = 2$.
D'où :
$\forall\, x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[, f'(x) < 0;$
$\forall\, x \in]0; 2[, f'(x) > 0.$
Par conséquent :

f est strictement croissante sur $[0; 2]$;
f strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ *et sur* $[2; +\infty[$.
On obtient donc le tableau de variation de f suivant :

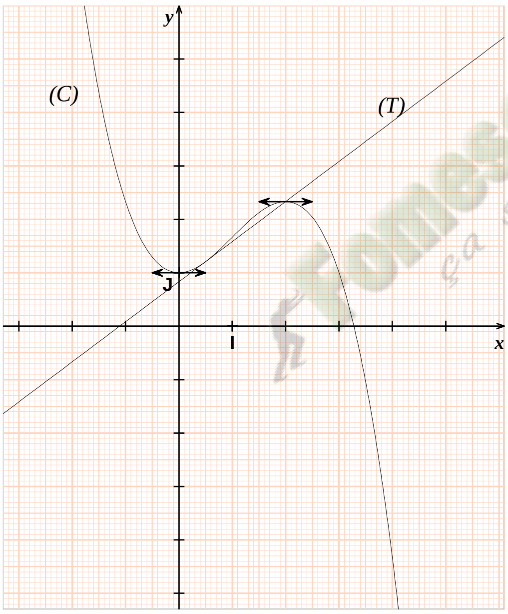
x	$-\infty$		*0*		*2*		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	*0*	$+$	*0*	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	*1*	↗	$\frac{7}{3}$	↘	$-\infty$

2. Une équation de la tangente (T) est : $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

On a $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ *et* $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{29}{24}$.

Une équation de la tangente (T) est donc : $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{6}$.

3. Figure.



EXERCICE RÉSOLU 3

Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Tracer (C) sur $[-7; 8]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé .

Solution

1. Df = IR$-\{-1\} =]-\infty; -1[\ \cup\ ]-1; +\infty[$.

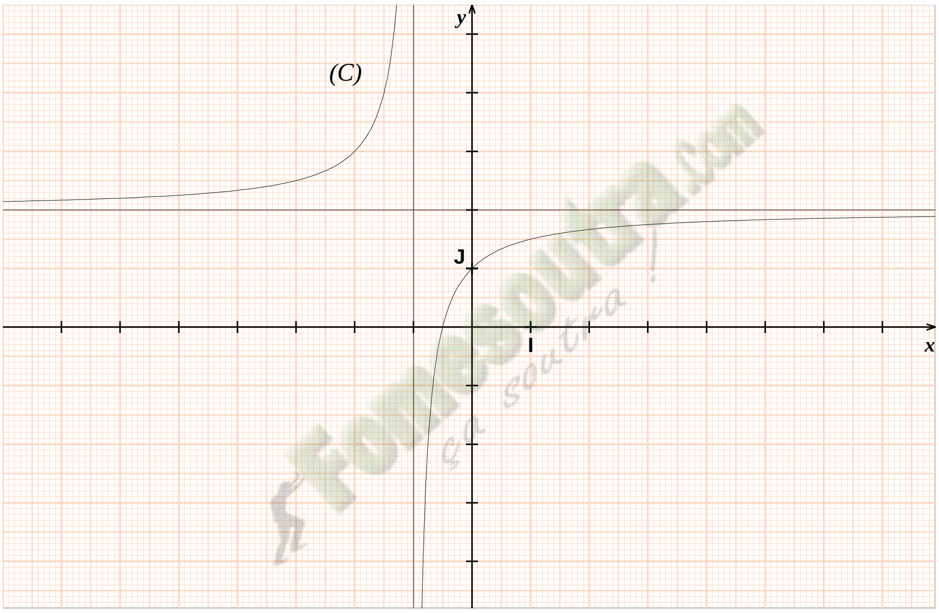
2. $\forall x \in IR - \{-1\}, f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$.

$\forall x \in IR - \{-1\}, (x+1)^2 > 0$ *et* $1 > 0$ *donc* $\forall x \in IR - \{-1\}, f'(x) > 0$.

f est donc strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ *et sur* $]-1; +\infty[$.

On obtient donc le tableau de variation de f suivant :

x	$-\infty$	*-1*	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	*2* ↗	‖	↗ *2*



EXERCICES

Le plan est muni du repère orthogonal (O,I,J).
Dans les exercices 1 à 7, f est une fonction de IR vers IR.

1 Dans chacun des cas suivants, calculer en utilisant la définition le nombre dérivé de la fonction f en x_0 .

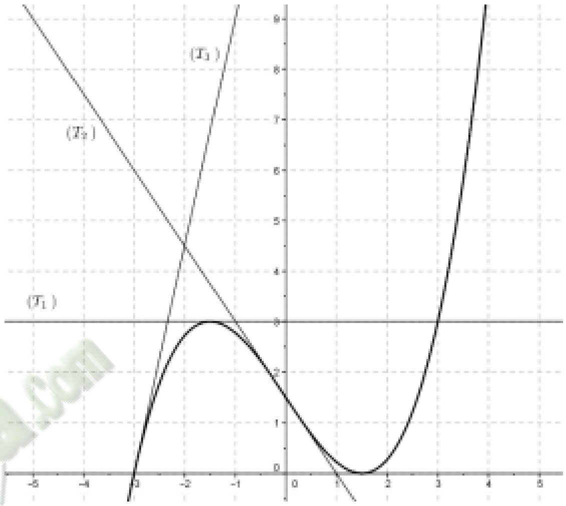
a) $f : x \mapsto -3x + 2,\ x_0 = -1;$
b) $f : x \mapsto -4x^2 + 3x + 5,\ x_0 = 3;$
c) $f : x \mapsto -\frac{2}{x^2},\ x_0 = 1;$
d) $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}\ ,\ x_0 = 2;$
e) $f : x \mapsto 3x^2 - 2,\ x_0 = -1.$

2 Dans chacun des cas suivants, donner une équation de la tangente (T) à la courbe représentative de la fonction f en x_0 .

a) $f : x \mapsto 3,\ x_0 = -1;$
b) $f : x \mapsto 2x^2 - 3x + 2,\ x_0 = 1;$
c) $f : x \mapsto -\frac{4}{x^2},\ x_0 = 1;$
d) $f : x \mapsto \frac{2x+1}{3x-1}\ ,\ x_0 = 2;$
e) $f : x \mapsto 3x - 7,\ x_0 = 0;$
f) $f : x \mapsto x^2 + 4x,\ x_0 = -4;$
f) $f : x \mapsto \frac{1}{x^2},\ x_0 = -2;$
g) $f : x \mapsto \frac{1}{3x-1}\ ,\ x_0 = 2.$

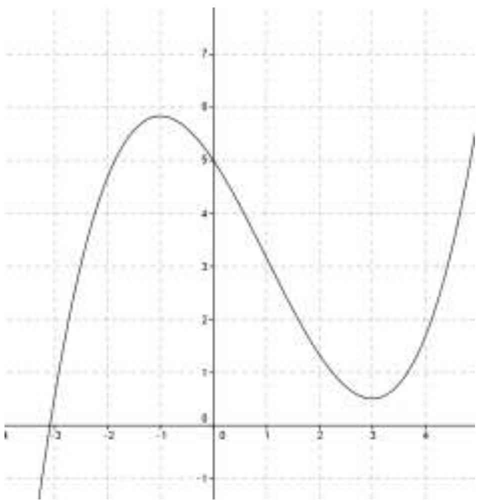
3 On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur IR et quelques-unes de ses tangentes.

1. Donner en utilisant ce graphique les valeurs de : $f'(-3)$, $f'\left(-\frac{3}{2}\right)$ et $f'(0)$.
2. Dresser le tableau de variation de f.



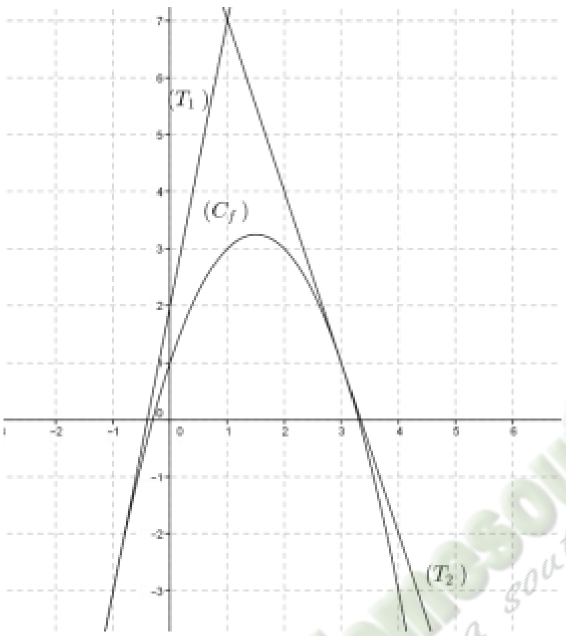
4 Soit f la fonction définie sur IR par :
$f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + 5$.
La courbe (C) ci-dessous est la représentation graphique de f.

1. Déterminer $f'(0)$.
2. Sans utiliser une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0, tracer (T).



5 On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur IR et quelques-unes de ses tangentes.

Donner en utilisant ce graphique les valeurs de f'(-1) et f'(3).



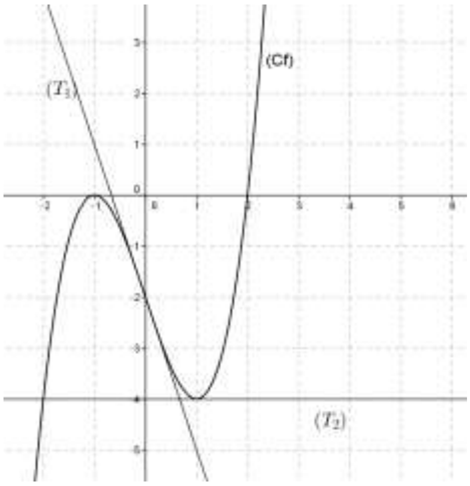
6 Déterminer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas :

a) $f(x) = -2$
b) $f(x) = 5x$
c) $f(x) = 2x - 7$
d) $f(x) = \frac{x^3}{3}$
e) $f(x) = \frac{3}{2x}$
f) $f(x) = x^2 - 3x + 2$
g) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + 1$
h) $f(x) = \frac{1}{2x+4}$
i) $f(x) = \frac{2-x}{2+x}$
j) $f(x) = (2 - 3x)(x + 4)$
k) $f(x) = \frac{3}{2x+1}$
l) $f(x) = \frac{5-2x}{3}$
m) $f(x) = 1 - \frac{4}{2-x}$
n) $f(x) = (3 + 4x)(x^2 - x + 1)$
0) $f(x) = (2x - 1)^2$
p) $f(x) = -2x^3 + x^2 + 3x - 5$
q) $f(x) = -4x^2 + 3x - 5$
r) $f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}$
s) $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 3x)$
t) $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$
u) $f(x) = \frac{4-6x}{5}$
v) $f(x) = (x^2 + x)(2 - x)$.

7 Etudier les variations de la fonction f dans chacun des cas et dresser son tableau de variation :

a) $f(x) = x^2 - x$
b) $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$
c) $f(x) = x^3 + x^2$
d) $f(x) = -x^3 + x^2 - 4x + 1$
d) $f(x) = \frac{-2x+1}{x+1}$
e) $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$
f) $f(x) = \frac{-2}{3-x}$
g) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
l) $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$
m) $f(x) = -\frac{4}{x}$
n) $f(x) = -10$
o) $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3$.

8 (Cf) est la représentation graphique d'une fonction f.
(T_1) et (T_2) sont les tangentes à (Cf) aux points d'abscisses respectives 0 et 1.



Déterminer $f'(0)$ et $f'(1)$, puis les équations de (T_1) et (T_2).

9 f est une fonction de IR vers IR. (C) désigne sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J).

1. Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.
2. Tracer (C) sur K.

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$,
K = $[-4; -1{,}2] \cup [-0{,}8; 3]$;

b) $f(x) = \frac{5}{x}$,
K = $[-2; -0{,}5] \cup [0{,}5; 4]$;

c) $f(x) = x^2 + x + 1$,
K = $[-2; 2]$;

d) $f(x) = x^3 - 3x + 5$
K = $[-3; 3]$;

d) $f(x) = x^3 - 3x + 5$
K = $[-3; 3]$;

e) $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 3x - 6$
K = $[-1; 4]$;

f) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$
K = $[-1; 4]$;

g) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$
K = $[-2; 4]$.

10 On considère la fonction f de IR vers IR et définie par :
$f(x) = (2x+1)^2\,(x-1)$.
(C) désigne sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J). Unité graphique : 4 cm.

1. Donner la forme développée, réduite et ordonnée de $f(x)$.
2. Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.
3. Démontrer que le point A(0 ;-1) est centre de symétrie de (C).
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe (OI).
5. Tracer (C) sur $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$.
6. Tracer la tangente (T) à (C) au point A.

11 Soit f la fonction définie sur IR par :
$f(x) = -2x^2 - 3x + 2$.

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec (OI) et (OJ).
4. Démontrer que la droite (D) d'équation $x = -\frac{3}{4}$ est axe de symétrie de (C).
5. Tracer (C) sur $[-3; 2]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

12 Soit f la fonction définie sur IR par :
$f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1$.

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
4. Démontrer que la droite (D) d'équation $x = 1$ est axe de symétrie de (C).
5. Tracer (T) et (C) sur $[-2; 4]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé .

13 Soit f et g les fonctions définies sur IR par :
$f(x) = x^2 - 2x + 2$ et

$g(x) = -3x^2 - x + 7$.

(C_f) et (C_g) désignent respectivement les courbes représentatives de f et g dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J).

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. Etudier la position de (C_f) par rapport à (C_g) .
4. Tracer (C_f) et (C_g) sur $[-7; 7]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé .

14 Soit f et g les fonctions définies sur IR par :

$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ et

$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

(C_f) et (C_g) désignent respectivement les courbes représentatives de f et g dans le plan muni du repère (O, I, J).

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. . Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. Etudier la position de (C_f) par rapport à (C_g) .
4. Tracer (C_f) et (C_g) sur $[-7; 5]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé .

15 Soit f la fonction définie sur IR par :

$f(x) = x^3 - 3x - 1$

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
3. Démontrer que le point A(0 ;-1) est centre de symétrie de (C).
4. Tracer (T) et (C) sur $[-2; 2]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé .

16 Soit f la fonction définie sur IR par :

$f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x + 1$.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. a) Calculer $f(1)$.
b) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que, pour tout x de IR, on a :
$f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.
c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec (OI) .
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
4.a) Démontrer que, pour tout x de IR :
$f(x) - (x - 1) = (-x + 2)(x - 1)^2$.
b) En déduire les positions relatives de (C) et (T).
5. Tracer (T) et (C) sur $[-2; 2]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé .

17 Soit f la fonction définie sur IR par :

$f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 2)^2$.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
2. Démontrer que le point A(1 ;1) est centre de symétrie de (C).
3.a) Déterminer que la droite (T) d'équation $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ est tangente à (C) au point d'abscisse 1.
b) Justifier que pour tout x de IR, on a :
$f(x) - \left(-\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}(x - 1)^3$.
c) En déduire les positions relatives de (C) et (T).
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec (OI) et (OJ).
5. Tracer (T) et (C) sur $[-2; 2]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé .

18 Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f

de la fonction f.

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. Démontrer que le point $A\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de (C).

4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec (OI) et (OJ). Tracer les tangentes en ces points.

5. Tracer (C) sur $[-5;6]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

19 Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. Démontrer que le point $A(-1;2)$ est centre de symétrie de (C).

4. Tracer (C) sur $[-7;7]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

20 Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = -\frac{3}{x}$.

1. Etudier la parité de f.

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. Tracer (C) sur $[-5;5]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

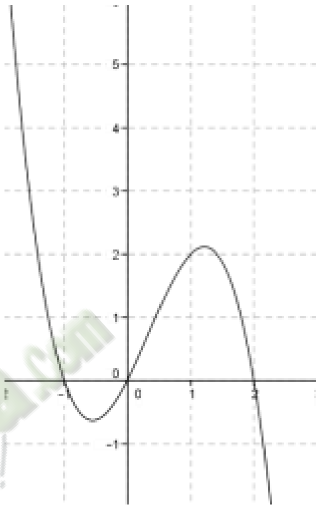
21 Soit f une fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	-4	↘

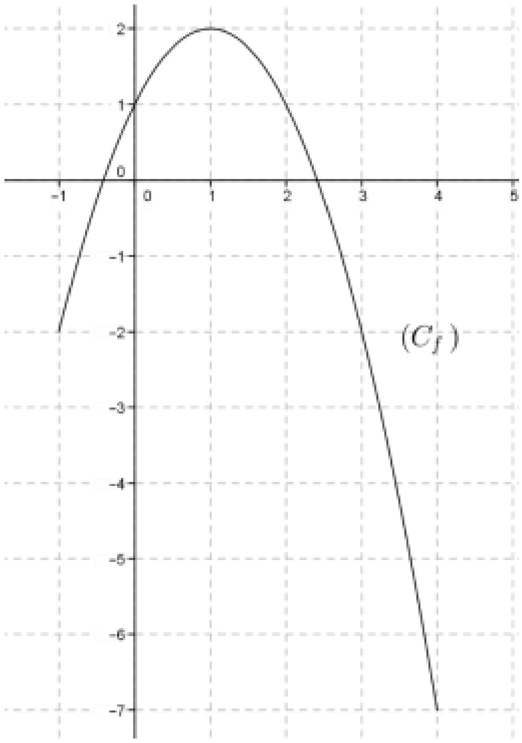
1. f admet-elle un maximum ? Justifier.

2 . Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

22 On considère la fonction f déterminée par sa représentation graphique ci-dessous. Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x sur $[-2;3]$.

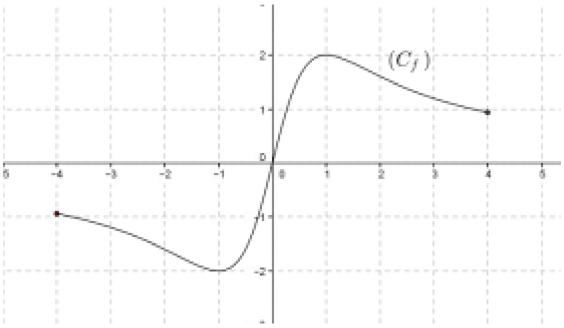


23 La fonction f définie et dérivable sur $[-1;4]$ est représentée par la courbe (C_f) ci-dessous.



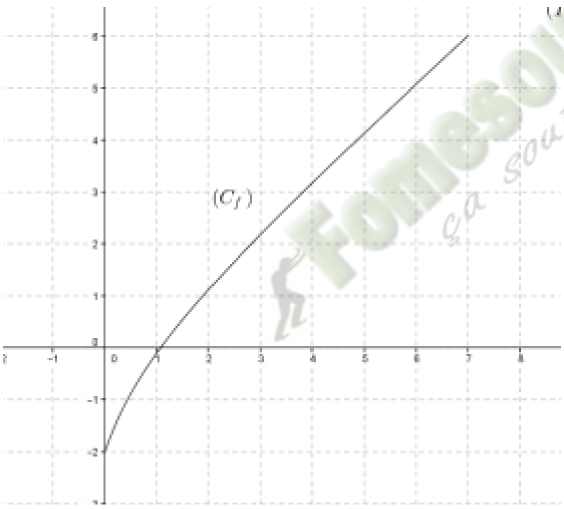
Dresser le tableau de variation de f.

24 La fonction f définie et dérivable sur $[-4; 4]$ est représentée par la courbe (C_f) ci-dessous.



Dresser le tableau de variation de f.

25 La fonction f définie et dérivable sur $[0; 7]$ est représentée par la courbe (C_f) ci-dessous.



Dresser le tableau de variation de f.

26 Une entreprise produit chaque trimestre des ardoises en quantité q (exprimée en milliers).
Lorsque la quantité q est comprise entre 10 et 29, on admet que le coût de production par trimestre, exprimé en milliers de F CFA, est donné par :
$C(q) = q^3 - 48q + 600$.

L'entreprise vend chaque millier d'ardoises à 627 000 F CFA.

1. Démontrer que le bénéfice mensuel B(q), exprimé en milliers de FCFA, est donné par : $B(q) = -q^3 + 675q - 600$ avec $q \in [10 ; 29]$.
2. Calculer B'(q) où B' désigne la dérivée de la fonction B.
3. Étudier le signe de B'(q) sur l'intervalle [10 ; 29].
Dresser le tableau de variations de la fonction B.
4. En déduire le nombre de milliers d'ardoises à produire par trimestre pour obtenir un bénéfice maximal.
Quel est alors ce bénéfice maximal ?
5.a) Représenter graphiquement la fonction B.
b) En utilisant ce graphique, déterminer le nombre de solutions de l'équation $B(q) = 0$ et donner des valeurs approchées de ces solutions.
6. Déterminer graphiquement les productions qui assurent à l'entreprise un bénéfice positif.

27 Un libraire vend des stylos à 140 F l'unité.
Son bénéfice mensuel, en francs, sur cet article est donné par :
$B(x) = x\left(48 - \frac{x}{2}\right)$, où x est le nombre de stylos.
1.a) Etudier les variations du revenu.
b) En déduire le nombre de stylos rendant le revenu maximal.
2.a) Exprimer le chiffre de ce libraire sur la vente de ces stylos, en fonction de x .
b) Déterminer le nombre de stylos à vendre permettant d'obtenir un revenu supérieur au quart du chiffre d'affaires sur cet article

5

SUITES NUMERIQUES

COMMENTAIRES

► Ce chapitre vise à présenter la notion de suite numérique. Il s'agira :
- d'initier les élèves à la notion de suites numériques ;
- de familiariser les élèves avec la notation indicielle.

► La notion de suite numérique est nouvelle pour les élèves de Première. On fera comprendre le fonctionnement d'une suite en calculant et en représentant quelque termes.

► L'élève est en phase d'initiation au concept de suite. On portera un accent particulier sur :
- la découverte dans des situations concrètes ;
- la visualisation du concept ;
- le modèle mathématique ;
- les notations ;
- la démarche inductive ;
- la conjecture.

► On se limitera aux suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = \text{a}u_n + \text{b}$, ($\text{a} \in \mathcal{Q}^*$ et $\text{b} \in \mathcal{Q}$).

► On privilégiera les exemples de suites arithmétiques et géométriques sans les nommer.

► On présentera des situations faisant appel aux pourcentages en continuité avec le programme de 2nde A (taux d'intérêt, augmentation, réduction…).

► Les points suivant sont hors programme :
- l'étude spécifiques des suites arithmétiques et géométriques (définitions et propriétés) ;
- le raisonnement par récurrence.

► On introduira les suites à partir d'exemples simples de la vie courante en évitant toute théorie.

► Pour les problèmes de la vie courante dont la résolution fait intervenir les suites arithmétiques ou géométriques, on fera calculer par exemples des termes consécutifs de la suite et on fera conjecturer la forme générale de celle-ci. Une telle activité ne peut faire l'objet de question dans une interrogation écrite ou un devoir surveillé.

► On fera largement usage de graphiques pour une meilleure visualisation des suites.

Il est conseillé de débuter avec une situation simple, posée sous forme de problème (par exemple, quel est le 2003ème nombre pair ?). La résolution se fera avec toute la classe.

Dans un premier temps, on provoquera chez les élèves la nécessité de la notation indicielle. Ensuite à partir d'un décompte exhaustif , on amènera les élèves à l'écriture d'une formule de récurrence ou d'une formule explicite pour calculer le terme général.

Les recherches se présenteront sous la forme d'un tableau comme ci-dessous :

Rang	0	1	2	3	4
Terme					

CONTENUS	**CAPACITÉS ATTENDUES**
1. Définition d'une suite numérique. 2. Détermination d'une suite : − une formule explicite − une formule de récurrence	☞ Calculer un terme d'une suite connaissant sa formule explicite. ☞ Calculer un terme d'une suite connaissant le premier terme et la formule de récurrence. ☞ Représenter graphiquement des termes d'une suite définie par une formule de récurrence sur l'axe des abscisses dans un repère orthonormé.

ACTIVITÉ

Au 1er janvier 2015, la Côte d'Ivoire comptait 23 millions d'habitants et sa population augmente en moyenne annuellement de 2,6% .

1. Combien vaudrait sa population au 1er janvier 2016 ?

2. On note P_n la population de la Côte d'Ivoire au 1er janvier 2015 + n.

a) Compléter le tableau suivant

Rang n	0	1	2	3
P_n				

b) Justifier que : $P_{n+1} = 1{,}026P_n$.

c) Calculer la population de ce village au 1er janvier 2022.

COURS

I. DÉFINITION

Définition

Une suite numérique est une fonction de IN vers IR.

Notations et vocabulaire.

Soit la suite $u: \text{IN} \longrightarrow \text{IN}$
$\qquad\qquad\qquad n \longmapsto u(n)$

$u(n)$ se note u_n .
u_n est appelé le terme de rang n ou encore terme d'indice n .
Si E est l'ensemble de définition de la suite u alors la suite u est notée $(u_n)_{n\in E}$ ou (u_n) .
u_n est appelé terme général de la suite (u_n).

EXEMPLE

Soit la suite $(\mathrm{u_n})$ définie sur IN par : $\mathrm{u_n} = 2\mathrm{n} - 5$.
Calculer les trois premiers termes.
Calculer le terme d'indice 21 de cette suite.

Solution

$u_0 = -5$, $u_1 = -3$, $u_2 = -1$.
u_{21} *est le terme de rang 21 .* u_{21} *=37.*

II. DÉTERMINATION D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

1. Formule explicite

Une suite numérique u peut être engendrée par une fonction numérique f définie sur IR$^+$ de la façon suivante : pour tout entier naturel n : $u_n = f(n)$.

EXEMPLE

Soit la suite $(\mathrm{a_n})$ définie sur IN par : $\mathrm{a_n} = \frac{2n-5}{n+1}$.
Calculer les 4 premiers termes.

Solution

$a_0 = -5$, $a_1 = -\frac{3}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{3}$; $a_3 = \frac{1}{4}$.

Exercice

Pour toutes les suites (u_n) définies définies sur IN ci-dessous, calculer les 6 premiers termes .

1. $u_n = 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. 2. $u_n = 4 - 3n$.

2. Suite définie par une formule de récurrence

Une suite numérique u peut être engendrée par le terme initial u_0 et par la relation
$u_{n+1} = f(u_n)$,
où f est une fonction numérique.
Une suite ainsi définie est dite suite récurrente.

Remarque :

la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ ne définit une suite que si $u_n \in D_f$ pour tout entier naturel n.

EXEMPLE

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall\, n \in IN,\ u_{n+1} = 3u_n + 5 \end{cases}$

a) Calculer les 3 premiers termes de cette suite .

b) Calculer le terme d'indice 4 de cette suite.

Solution

a) $u_0 = -2$ *;* $u_1 = 3u_0 + 5 = -1$ *;* $u_2 = 3u_1 + 5 = 2.$

b) $u_3 = 3u_2 + 5 = 11$ *;* $u_4 = 3u_3 + 5 = 38.$

Exercice

Pour toutes les suites (u_n) définies ci-dessous, calculer les 4 premiers termes .

a) $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall\, n \in IN,\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n \end{cases}$

b) $u_1 = -1$ et
$\forall\, n \in IN^*,\ u_{n+1} = u_n + 1$

d) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall\, n \in IN,\ u_{n+1} = 2 - 3u_n \end{cases}$

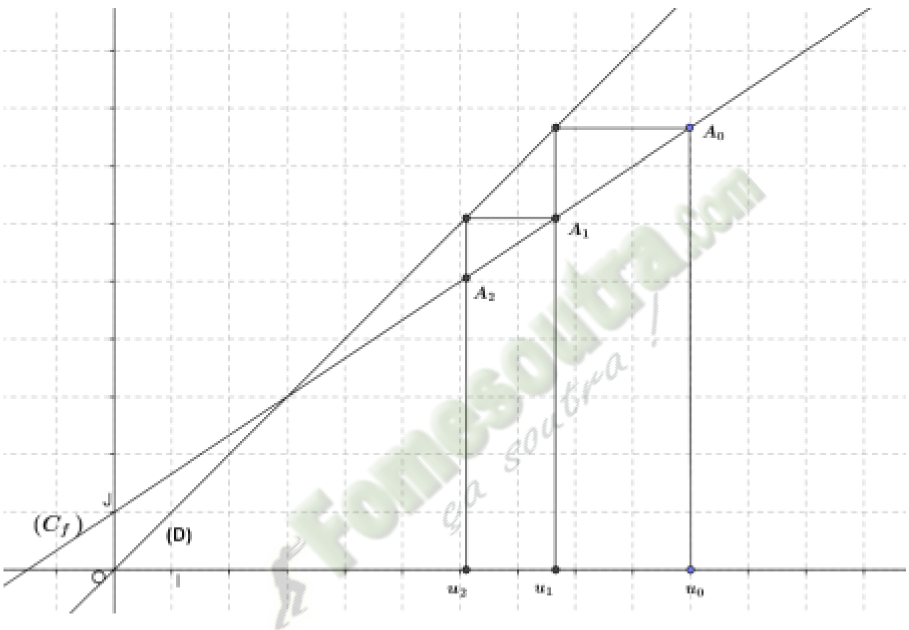
e) $\begin{cases} u_0 = 9 \\ \forall\, n \in IN,\ u_{n+1} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}u_n \end{cases}$

TRAVAUX PRATIQUES

Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall\, n \in IN,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1. \end{cases}$

Soit (C) la représentation graphique de la fonction $f : x \longmapsto \frac{2}{3}x + 1$ dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J) et (D) la droite d'équation y = x .



1. Justifier que les abscisses respectives des points A_0, A_1, A_2 sont u_0, u_1 , u_2 .
2. Compléter le dessin en plaçant u_3, u_4 , u_5 et u_6 sur la droite (OI).

Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = -3 \\ \forall\, n \in IN,\ u_{n+1} = -u_n. \end{cases}$

Représenter graphiquement les termes u_0, u_1, u_2 sur l'axe des abscisses dans un repère orthonormé (O,I,J).

Exercice 3

Soit la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 8 \\ \forall\, n \in IN,\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \end{cases}$.

Représenter graphiquement les termes v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 sur l'axe des abscisses dans un repère orthonormé (O,I,J).

EXERCICES

1 Pour toutes les suites définies ci-dessous, calculer dans chaque cas les 4 premiers de la suite u définie ci-dessous.

a) $\forall n \in IN,\ u_n = 2n - 5$

b) $\forall n \in IN,\ u_n = 2^n$

c) $\forall n \in IN,\ u_n = 2 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

d) $\forall n \in IN,\ u_n = (-1)^n$

e) $\forall n \in IN,\ u_n = \frac{n}{n^2+1}$

f) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in IN,\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ \forall n \in IN^*,\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n \end{cases}$

h) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in IN, u_{n+1} = 3 - u_n \end{cases}$

i) $\forall n \in IN, u_n = 3(-2)^n$

j) $\forall n \in IN, u_n = 2n^2 - n + 5$

k) $\forall n \in IN^*,\ u_n = -\frac{2}{n}$

l) $\begin{cases} u_0 = -6 \\ \forall n \in IN,\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

m) $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in IN,\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$

n) $\forall n \in IN, u_n = 3 + 4^n$

o) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in IN^*,\ u_{n+1} = 0{,}8u_n + 0{,}05 \end{cases}$.

2 Soit la suite u définie par :

$\forall n \in \text{IN},\ u_n = \frac{2n-3}{n+1}$.

Calculer $u_{n+1} - u_n$.

3 Soit la suite u définie par :

$\forall n \in \text{IN},\ u_n = -n^2 + 2n + 4$.

Calculer $u_1 - u_0$.

4 Soit la suite u définie par :

$\forall n \in \text{IN},\ u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n$.

1. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
2. En déduire que $\forall n \in \text{IN}, u_{n+1} < u_n$.

5 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), représenter sur (OI) à l'aide de la droite d'équation y = x les 5 premiers termes de la suite u.

a) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \text{IN},\ u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \text{IN}^*,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \text{IN},\ u_{n+1} = u_n + 2. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \text{IN},\ u_{n+1} = 3 - u_n \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \text{IN},\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_0 = 6 \\ \forall\, n \in \text{IN} \;,\; u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall\, n \in \text{IN} \;,\; u_{n+1} = -2u_n \end{cases}$.

6 Soit (u_n) la suite définie par
$\begin{cases} u_0 = 8 \\ \forall\, n \in IN,\; u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$
et (v_n) la suite définie sur IN par :
$v_n = u_n - 3$.
Calculer v_0, v_1 et v_2.

7 Soit (a_n) la suite définie sur IN par : $a_n = -3n + 7$.

1. Calculer a_0, a_1 et a_2.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 3 + a_n$.

8 Mr KOUAME loue un appartement au 1er janvier 2014 ; le loyer annuel payé pour l'année 2014 est $L_0 = 400000$ F.
Pour chacune des années qui suivent, le loyer annuel subit une augmentation de 10% par rapport au loyer de l'année précédente.
On appelle L_n le loyer versé pour l'année 2014+n.

1. Calculer le loyer versé en 2015, en 2016.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :$L_n = 400000 \times (1{,}1)^n$.
Calculer le loyer versé en 2023.
4. On appelle S le montant total du loyer versé par Mr KOUAME pendant 10 ans.
Calculer S.

9 Une enquête étudie le nombre de clients dans un supermarché.
On constate que chaque mois 70% des clients du mois précédent restent fidèles à ce supermarché et que 3000 nouveaux clients apparaissent.
On note u_n le nombre de clients venus au cours du nième mois de l'enquête.
Ainsi $u_1 = 8000$.

1. Calculer u_2 et u_3 .
2. Calculer u_{n+1} en fonction de u_n .

10 On dit qu'un capital est placé à intérêt composé quand, à la fin de chaque année, les intérêts produits s'ajoutent au capital pour former un nouveau capital qui produira lui aussi des intérêts.
Monsieur OUATTARA a placé 200 000 F sur un compte bancaire à un taux d'intérêt composé de 8%.
1. Calculer la valeur de son capital au bout de 1 an.
2. Pour tout entier naturel n, on note C_n la valeur de son capital au bout de n années.
Ainsi $C_0 = 200\,000$ F.
a) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $C_{n+1} = 1{,}08C_n$.
b) Calculer la valeur de son capital au bout de 2 ans.
3. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :
$C_n = (1{,}08)^n \times 200000$.
a) Calculer C_3 et C_4 .
b) Calculer la valeur de son capital au bout de 10 ans.

11 Au 1er janvier 2010, un village comptait 10 000 habitants.
Vu la sécheresse qui se prolonge, ce village voit sa population diminuer régulièrement de 5% par an.
1. Calculer la population de ce village au 1er janvier 2012 si la calamité qui frappe le village se poursuivait.
2. On note P_n la population de ce village au 1er janvier 2010+n, si la calamité qui frappe le village se poursuivait .
a) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n .
b) Calculer la population de ce village au

1er janvier 2015 si la calamité qui frappe le village se poursuivait .

12 Chaque année Madame KOUA dépose de l'argent sur un compte afin d'acheter une maison qui coute 11 000 000 F.
Elle a commencé le 1er janvier 2015 par un dépôt de 1000 000 F. Depuis lors, elle a effectué un dépôt chaque 1er janvier, en augmentant chaque année le montant de ce dépôt de 600 000 F.
Combien d'années au minimum, Mme KOUA devra-t-elle attendre pour pouvoir acheter sa maison ?

13 Madame TRAORE a le choix entre deux contrats de location concernant un magasin qu'elle occupera 10 ans.
● Contrat n^0 1 : le loyer annuel se monte à 150 000 F et le locataire accepte une augmentation forfaitaire annuelle de 15 000 F.
● Contrat n^0 2 : le loyer annuel se monte à 120 000 F et le locataire accepte une augmentation annuelle de 10 % du loyer de l'année précédente.
U_n désigne le loyer de la n-ième année avec le contrat n^0 1 et V_n désigne le loyer de la n-ième année avec le contrat n^0 2.
Ainsi $U_1 = 600\,000$ F et $V_1 = 500\,000$ F.

1. Calculer U_2, U_3, U_3 U_4 et U_5 .
2. Calculer V_2, V_3, V_3 V_4 et V_5 .
3. En déduire au bout de combien d'années le loyer défini par le contrat n^0 2 sera supérieur au loyer défini par le contrat n^0 1 ?

14 Un professeur a placé sur un compte le 01/01/2010 un capital de 600 000 F CFA. Ce compte produit des intérêts de 7 % par an. Chaque année les intérêts sont ajoutés au capital et deviennent, à leur tour, générateurs d'intérêts.

Pour n entier naturel, on appelle C_n le capital au 1er janvier de l'année (2010 + n). On a ainsi $C_0 = 600\,000$.

1. Calculer C_1 et C_2 .
2. Donner une valeur approchée de C_{10} après avoir calculé C_3 , C_4 , … , C_9 . Interpréter ce résultat.
3. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n .
4. On admet que : $C_n = C_0 \times (1{,}07)^n$. Retrouver ainsi la valeur de C_{10}.
5. On suppose maintenant qu'au 1er janvier de chaque année, à partir du 01/01/2011, la personne rajoute 50 000 F CFA sur son compte.
(Ce compte produit toujours des intérêts de 7 % par an)
a) Calculer C_1 et C_2 .
b) Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n .
c) Donner une valeur approchée de C_{10} après avoir calculé C_3 , C_4 , … , C_9 .
d) On admet que : $C_n = C_0 + 50000n$.
Déterminer à partir de quelle année le capital aura été multiplié par 5.

6

STATISTIQUE

COMMENTAIRES

☞ Ce chapitre vise à consolider les acquis de la classe de seconde A et à les compléter par :
- l'introduction des caractéristiques de dispersion ;
- le traitement des données regroupées en classes.

☞ Le programme de Première est essentiellement axé sur le traitement, la représentation et l'interprétation des données regroupées en classes.

☞ On se limitera aux cas d'effectifs cumulés croissants et de fréquences cumulées croissantes.

☞ La mise en place des nouvelles notions doit s'effectuer à travers des exemples simples.

☞ On choisira des exercices permettant d'illustrer l'utilité des mathématiques dans l'étude des situations réelles.

☞ On ne s'arrêtera pas aux résultats calculés, mais on en donnera une interprétation chaque fois que cela est possible.

☞ On initiera les élèves à l'utilisation des fonctions statistiques de la calculatrice.

☞ Les caractéristiques de position et de dispersion permettent de comparer deux séries statistiques.

Exemple

Les notes de deux élèves sont réparties de la façon suivante :

Elève A	1	10	19
Elève B	9	10	11

Ces deux élèves ont la même moyenne 10, mais l'élève B est plus constant que l'élève A. Ce fait est traduit par l'écart type de la série B(0,82) qui est inférieur à celui de la série A(7,35). On dit que la série A est plus dispersée que la série B.

☞ Lors des évaluations :
- On exigera des élèves les différentes étapes des calculs (tableaux et formules) ;
- Pour la construction d'un histogramme, les unités sur les axes seront données ;
- La question de la construction d'un diagramme circulaire sera précédée d'une question relative au

remplissage du tableau de correspondance des effectifs ou des fréquences avec les mesures des secteurs angulaires.

Effectifs ou fréquences	12	…	
Mesures en degré	65	….	

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
1. Caractéristiques de position : mode ; moyenne ; médiane ; quartile, décile. 2. Classe : - classe modale ; - amplitude d'une classe ; - centre d'une classe. 3. Histogrammes 4. Caractéristiques de dispersion : - variance ; - écart-type 5 .Polygone des effectifs cumulés croissants ou des fréquence cumulées croissantes. 6. Séries chronologiques	☞ Calculer la moyenne, la variance et l'écart type. Interpréter la variance et l'écart type. ☛ Construire l'histogramme d'une série statistique regroupée en classe de même amplitude. ☛ Construire un diagramme circulaire ou semi-circulaire d'une série statistique regroupée en classes d'amplitudes différentes. ☞ Construire le polygone des effectifs croissants ou des fréquences cumulées croissantes. ☞ Trouver une classe modale. ☞ Déterminer la médiane, un décile et un quartile : - graphiquement ; - algébriquement par interpolation linéaire (série A1) ☞ Représenter et interpréter une série chronologique.

COURS

I. CARACTÉRISTIQUES DE POSITION

EXEMPLE

Le relevé de notes suivant est le résultat d'un devoir d'un groupe de 17 élèves: 12 ; 8 ; 12 ; 15 ; 12 ; 8 ; 18 ; 10 ; 14 ; 5 ; 14 ; 8 ; 14 ; 9 ; 14 ; 5 ; 20.

A partir de cette liste, on peut construire le tableau suivant :

Notes	5	8	9	10	12	14	15	18	20
Effectifs	2	3	1	1	3	4	1	1	1

Quelle est la note qui a le plus grand effectif ?

1. Mode

Définition

On appelle mode d'une série statistique toute modalité qui a le plus grand effectif.

Remarque

Une série statistique peut avoir plusieurs modes.

2. Moyenne

Définition

La moyenne $\overline{X}$ de p nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p$ affectés respectivement des coefficients $n_1, n_2, \ldots, n_p$ est égale à :

$$\overline{X} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_px_p}{n_1+n_2+\cdots+n_p}.$$

EXEMPLE

Pour les 17 notes, On a :

$$\overline{X} = \frac{5\times2+8\times3+9\times1+10\times1+12\times3+14\times4+15\times1+18\times1+20\times1}{17} = \frac{198}{17}.$$

$\overline{X} \approx 11,65$.

3. Médiane

EXEMPLE

Rangeons les termes de la série précédente dans l'ordre croissant.
La série des notes devient : 5 ;5 ;8 ;8 ;8 ;9 ;10 ;12 ;$\boxed{12}$;12 ;14 ;14 ;14 ;14 ;15 ;18 ;20.

La note 12 sépare les 17 notes en deux groupes de 8 notes. 8 élèves ont une note inférieure à 12, et 8 élèves ont une note supérieure à 12.
On dit que 12 est la médiane de la série statistique.

Définition

La médiane M d'une série statistique est la modalité tel que la moitié de la population étudiée prend une valeur inférieure ou égale à M et la moitié prend une valeur supérieure ou égale à M.

Remarques :

● Lorsque la série a pour effectif total un nombre impair, la médiane est donnée par la valeur du terme « central » de la série.
● Lorsqu'une série a pour effectif total un nombre pair, la médiane est donnée par la moyenne des valeurs des deux termes « centraux » de la série.

4. Quartiles

Une série statistique peut être étudiée plus finement en exploitant des données autres que la médiane, tout en répartissant les valeurs de cette série en groupes ; on utilise la notion de quartile.

Définition

● Le premier quartile d'une série statistique est le plus petit élément Q_1 des modalités de la série tel qu'au moins 25 % des données soient inférieures ou égales à Q_1.
● Le troisième quartile d'une série statistique est le plus petit élément Q_3 des modalités de la série tel qu'au moins 75 % des données soient inférieures ou égales à Q_3.

EXEMPLE

● $17 \times 25\ \% = 4{,}25$. le premier quartile est donné par la 5^{e} note ; il s'agit de 8.
Au moins 25% des élèves ont 8 au maximum.
● $75\ \% \times 17 = 12{,}75$; le troisième quartile est donné par la 13^{e} note, qui est 14.
Au moins 75% des élèves ont 14 au maximum.

5. Décile

Définition

n est un entier naturel compris entre 1 et 10
On appelle n-ième décile , la valeur telle que $\frac{n}{10}$ de l'effectif total lui soit inférieur.

II. CARACTÉRISTIQUES DE DISPERSION

Variance, Ecart type

EXEMPLE

Pour les 17 notes, la moyenne $\overline{\mathrm{X}} = 11{,}65$.
a) Compléter le tableau suivant :

Notes x_i	5	8	9	10	12	14	15	18	20
Effectifs n_i	2	3	1	1	3	4	1	1	1
$n_i(x_i - \overline{\mathrm{X}})^2$									

b) Calculer $\frac{n_1(x_1-\overline{\mathrm{X}})^2+n_2(x_2-\overline{\mathrm{X}})^2+\cdots+n_9(x_9-\overline{\mathrm{X}})^2}{17}$.

Définitions

● La variance de la série statistique (x_i, n_i) est le nombre réel V(X) défini par

$$\mathrm{V(X)} = \frac{n_1(x_1-\overline{\mathrm{X}})^2+n_2(x_2-\overline{\mathrm{X}})^2+\cdots+n_p\left(x_p-\overline{\mathrm{X}}\right)^2}{\mathrm{N}}$$

où N est l'effectif total.

● L'écart type de la série statistique (x_i, n_i) est le nombre réel σ(X) défini par
$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V(X)}}$.

EXEMPLE

Justifier que l'arrondi à l'entier de l'écart type de la série des 17 notes est égal à 3.

III. CLASSE

EXEMPLE

A partir du relevé des notes des 17 élèves, on a établi le tableau suivant :

Notes	[5 ;8[	[8 ;11[	[11 ;14[	[14 ;17[	[17 ;20]
Effectifs	2	5	3	5	2

- Les intervalles [5 ;8[, [8 ;11[, [11 ;14[, [14 ;17[et [17 ;20] sont appelés classes.
- Quelles sont les classes qui ont le plus grand effectif ?
- L'amplitude de la classe [5 ;8[est : 8-5 = 3. Ici, toutes les classes ont la même amplitude.
- Le centre de la classe [14 ;17[est égale à $\frac{14+17}{2} = 15{,}5$.

Définition

● On appelle **classe modale** d'une série statistique, toute classe qui a le plus grand effectif.
● L'**amplitude** d'une classe [a ;b[est : b- a .
● Le **centre** de la classe [a ;b[est égale à $\frac{a+b}{2}$.

Remarques :

● Les classes [a ;b[, [a ;b],]a ;b[,]a ;b] ont même amplitude et même centre.
● Pour les séries statistiques regroupées en classes :
- la moyenne : $\overline{X} = \frac{n_1x_1+ n_2x_2+ \dots + n_px_p}{n_1+n_2+\cdots+n_p}$;
- la variance : $V(X) = \frac{n_1(x_1-\overline{X})^2+n_2(x_2-\overline{X})^2+\cdots+n_p(x_p-\overline{X})^2}{N}$ où N est l'effectif total ;
- L'écart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Les nombres $x_1; x_2; \ \dots; x_p$ représentent les centres respectifs de chaque classe.

EXEMPLE

La répartition des tailles en cm de 36 élèves d'une classe de première donne le tableau suivant :

Taille	[150;155[	[155 ; 160[	[160;165[	[165 ;170[	[170 ;175[	[175 ;180]
Effectifs	3	5	6	8	8	6

- La moyenne : $\overline{X} = \frac{3\times152{,}5+5\times157{,}5+6\times162{,}5+8\times167{,}5+8\times172{,}5+6\times177{,}5}{36}$.

$\overline{X} \approx 166{,}81$.

- La variance : $V(X) = \frac{3(152{,}5-166{,}81)^2+ 5(157{,}5-166{,}81)^2+\cdots+6(177{,}5-166{,}81)^2}{36}$.

$V(X) \approx 58{,}55$.

- L'écart type : $\sigma(X) \approx 7{,}65$.

IV. REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

1. Polygone des effectifs cumulés croissants

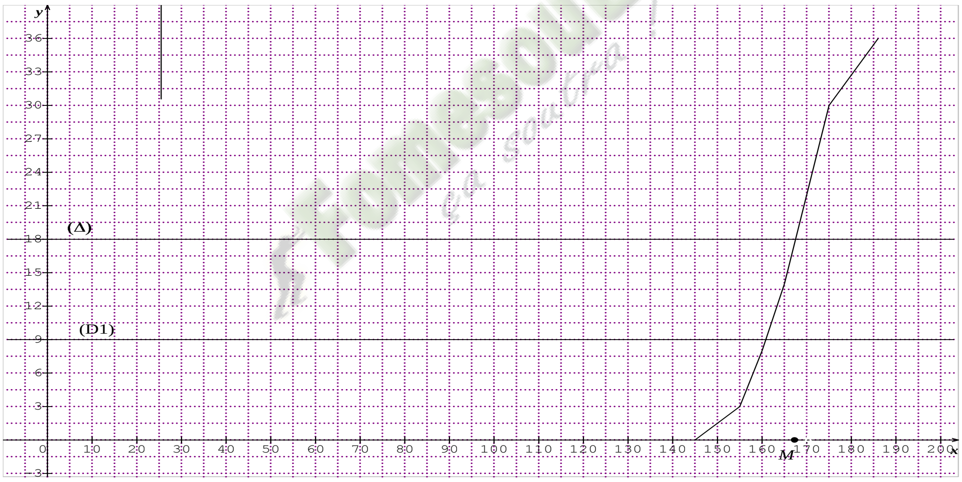
EXEMPLE

A partir des tailles en cm de 36 élèves , on a établi le tableau suivant :

Taille	[145;155[	[155 ; 160[	[160;165[	[165 ;170[	[170 ;175[	[175 ;185]
Effectifs	3	5	6	8	8	6
Effectifs cumulés croissants	3	8	14	22	30	36

Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J). Unités : 1 cm pour 10 en abscisse et 1 cm pour 3 en ordonnées, on a placé les points de coordonnées
(145;0),(155; 3),(160; 8), (165; 14), (170; 22), (175 ;30), (185 ;36).
La ligne brisée passant par ces points est appelée le polygone des cumulés croissants

.



Remarque :

Le polygone des effectifs cumulés croissants permet de retrouver la médiane, les quartiles et les déciles.

Dans le cas du polygone des effectifs cumulés croissants :

- la médiane M est l'abscisse du point de ce polygone qui a pour effectif $\frac{\mathrm{N}}{2}$;
- le 1er quartile Q_1 est l'abscisse du point de ce polygone qui a pour effectif $\frac{\mathrm{N}}{4}$;
- le 1er décile D_1 est l'abscisse du point de ce polygone qui a pour effectif $\frac{\mathrm{N}}{10}$.

Ici, M ≈ 67 ; $Q_1 \approx 161$.

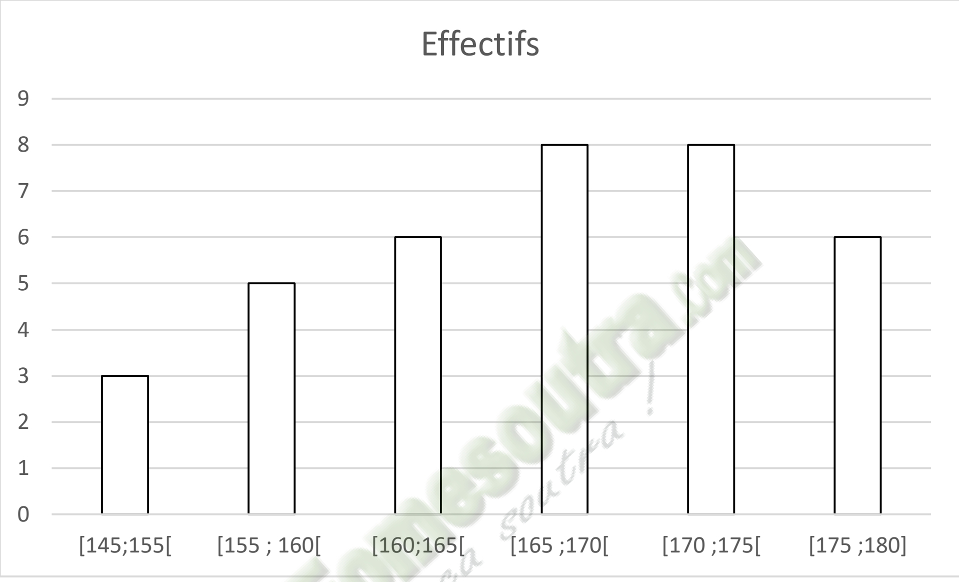
2. Histogrammes

Définition

On représente une série statistique dont les termes sont regroupés en classes de même amplitude par un histogramme ; les abscisses représentent des classes de même amplitude et les ordonnées correspondent aux effectifs.

EXEMPLE

Le tableau précédent donne l'histogramme ci-dessous :



3. Diagramme circulaire, semi-circulaire

Dans un diagramme circulaire (ou semi circulaire), les mesures des angles des secteurs angulaires sont proportionnelles aux effectifs (ou aux fréquences) associés(e).

EXEMPLE

La structure de la population en Côte D'Ivoire est donnée par le tableau ci-dessous.

Age (an)	[0; 15[	[15; 65[	[65 ;110]
Fréquence (%)	39,8	57,2	3

1. Compléter le tableau de correspondance suivant :

Fréquences (%)	100	39,8	57,2	3
Mesures en degré	360			

2. Construire le diagramme circulaire.
3. Compléter le tableau de correspondance ci-dessous puis construire le diagramme semi-circulaire.

Fréquences (%)	100	39,8	57,2	3
Mesures en degré	180			

V . SÉRIE CHRONOLOGIQUE

Définition

Une série est dite chronologique ou chronique lorsqu'elle est constituée de données prises sur une variable au cours d'un temps assez long ,les données ayant été récoltées à intervalle de temps constants tous les mois ou tous les ans par exemple.

EXEMPLE

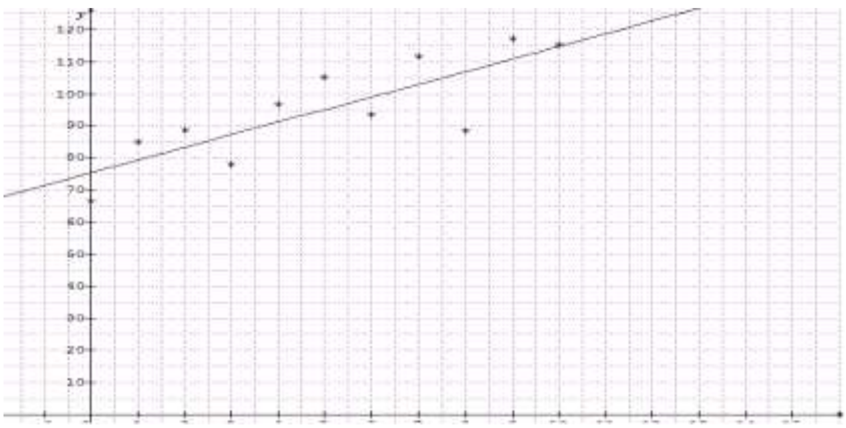
Le tableau suivant établit la production d'acier dans un pays européen en millions de tonnes pendant 11 années consécutives:

Rang x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
An	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Prix y	66,6	84,9	88,6	78	96,8	105,2	93,2	111,6	88 ,3	117	1

1. Représenter la série chronologique dans un repère orthogonal ; Unité 1cm pour 1 an en abscisse et 1cm pour 10 millions de tonnes d'acier en ordonnées.
2. Analyser la tendance générale de cette série et l'influence des variations accidentelles.

Solution

1 .



2 . La tendance générale de cette série est à la croissance. Cette série comporte des variations accidentelles en 2003 , 2006 et 2008 dues assurément aux crises économiques mondiales des années 2000 .

EXERCICES

1 On a mesuré de jeunes basketteurs lors d'un stage. Les tailles, en cm, sont les suivantes : 165 ; 175 ; 187 ; 165 ; 170 ; 181 ; 174 ; 184 ; 171 ; 166 ; 178 ; 177 ; 176 ; 174 ; 176.

1. Calculer la taille moyenne de ces basketteurs.
2. Quelle est la taille médiane de ces sportifs ? Justifier.
3. Calculer la variance et l'écart type de cette série statistique. En donner une signification.

2 Tableau : EVOLUTION DES EFFECTIFS ELEVES DANS LE SECONDAIRE GENERAL

Année	[2010 ; 2011[	[2011 ; 2012[	[2012 ; 2013[	[2013 ; 2014]
Effectifs	1 126 835	1 132 464	1 215 672	1 321 556

RAPPORT D'ANALYSE STATISTIQUE 2013-2014 - MENET/DPES/SDS&E

Construire l'histogramme et le diagramme circulaire de cette série statistique.

3 Tableau : Évolution de la population d'âge scolaire et totale du pays pour 2020

Age	3-5ans	6-11 ans	12-15 ans	16-18 ans
Effectifs (milliers)	2 477,5	4 239,4	2 375,2	1 577,9

Source : Institut National de la Statistique et ajustements par les auteurs, 2006

Construire le diagramme semi-circulaire de cette série statistique.

4 Une station-service a noté les achats de Gazole pour une journée donnée. Les résultats, répartis en classes (intervalles), sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Volume en litres	Nombre de clients
]0;10]	47
]10;20]	108
]20;30]	173
]30;40]	182
]40;50]	245
]50;60]	168
]60;70]	175
]70; 80]	68
]80; 90]	22
]90;100]	3

1. Calculer le volume moyen acheté par un client. (On arrondira le résultat au dixième)
2. Construire l'histogramme de cette série statistique.
3. a) Construire le polygone des effectifs cumulés croissants.
 b) Déterminer graphiquement la médiane, le 1er quartile et le 3^{e} quartile de cette série statistique et donner une signification de ces résultats.
 c) Retrouver la médiane par un calcul.

5 Une étude des achats d'un échantillon de 460 clients d'une grande surface a donné, un vendredi soir, les résultats suivants :

Classes d'achats en francs	Nombre de clients
[3000; 3500[	24
[3500; 4000[	32
[4000; 4500[	51
[4500; 5000[	70
[5000; 5500[	47
[5500; 6000[	41
[6000; 6500[	70
[6500; 7000[	58
[7000; 7500[	40
[7500; 8000[	27

1. Calculer le montant moyen des achats et l'écart type.
2. a) Construire le polygone des effectifs cumulés croissants.
b) Déterminer graphiquement la médiane de cette série et en donner une signification.
c) Retrouver la médiane par un calcul.

6 1. Représenter par un histogramme la répartition des salariés d'une entreprise suivant leur salaire mensuel net (en dizaine de milliers de francs).

Salaire	[8; 10[	[10; 12[	[12; 14[	[14; 16]
Effectif	24	20	9	8

2. Quelle est la classe modale ?
3. Calculer le salaire mensuel net moyen.
3. Calculant l'écart type de cette distribution et en donner une signification.
4.a) Compléter le tableau précédent.
b) Construire le polygone des effectifs cumulés croissants dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O, I, J).
On prendra 1 cm pour 20 000 francs en abscisse et 1 cm pour 2 salariés en ordonnées.
5. Déterminer graphiquement la médiane puis retrouver le résultat par calcul.
Donner une signification de la médiane.

7 La répartition des tailles en cm de 36 élèves d'une classe de première donne le tableau suivant :

Taille	Effectif
[150;155[	3
[155 ; 160[	5
[160;165[	6
[165 ;170[	8
[170 ;175[	8
[175 ;180]	6

1. Représenter cette série par l'histogramme des effectifs et le diagramme circulaire.
2. Construire le polygone des effectifs cumulés croissants.
3. Déterminer graphiquement la médiane de cette série statistique puis interpréter le résultat.

8 Les résultats d'un test de durée de vie de 100 ampoules électriques sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Durée de vie (en heures)	Nombre de tubes fluorescents
[300;400[	3
[400;500[	10
[500;600[	16

[600;700[	20
[700;800[	20
[800;900[	14
[900;1000[	10
[1000;1100[	5
[1100;1200[	2

1. Calculer la moyenne et l'écart type de cette série statistique.
2. Construire l'histogramme de cette série statistique.
3.a) Déterminer graphiquement la médiane, le 1er quartile et le 3^{e} quartile de cette série statistique et donner une signification de ces résultats.
b) Retrouver la médiane par un calcul.

9 Le tableau suivant donne le prix en milliers de francs du m² des logements neufs dans un quartier huppé achetés entre 2000 et 2007 :

Rang x	1	2	3	4
An	2000	2001	2002	2003
Prix y	24	27	30	33

Rang x	5	6	7	8
An	2004	2005	2006	2007
Prix y	36	39	42	45

1. Représenter la série chronologique dans un repère orthogonal ; Unité 2cm pour 1 an en abscisse et 1cm pour 4500 f en ordonnées.
2. Analyser la tendance générale de cette série.
3. Calculer la moyenne des prix .

10 La série ci-dessous indique les températures en °C dans une villes A chaque jour d'une même année (365 jours)

Température en °C	23	26	28	29	30	31
Effectifs	23	43	48	55	135	61

Calculer l'écart type pour la ville A.
Arrondir les résultats à 10^{-4}.
Interpréter le résultat.

11 On a effectué une étude sur la durée des communications au standard téléphonique d'une grande entreprise.
Les durées données en secondes sont regroupées en classes.

Durée en secondes	[30;50[	[50 ;70[	[70 ;90[
Effectifs	12	35	24
Effectifs cumulés croissants			

Durée en secondes	[90;110[	[110;130[	[130;150[
Effectifs	40	30	9
Effectifs cumulés croissants			

1. Calculer la moyenne et donner une interprétation du résultat obtenu.
On arrondira le résultat à la seconde près.
2. Compléter la ligne des effectifs cumulés croissants dans le tableau.
3. Construire le polygone des effectifs cumulés croissants.
4. Déterminer graphiquement la médiane puis le premier et troisième quartile.
Donner la signification du premier quartile.
5. Déterminer la médiane par interpolation linéaire.

12 Sur une route nationale, les gendarmes effectuent un contrôle de vitesse. Les relevés effectués sont présentés dans le tableau suivant :

Vitesse (en km/h)	[50 ;60[	[60 ;70[	[70 ;80[
Effectifs	3	17	40

Vitesse (en km/h)	[80;90[	[90;100[
Effectifs	131	122

Vitesse (en km/h)	[100 ;110[	[110;120[
Effectifs	56	25

1. Calculer la vitesse moyenne, en km/h, des automobilistes contrôlés (donner l'arrondie d'ordre 1)

2. Recopier et compléter ce tableau en calculant les fréquences et les fréquences cumulées croissantes des différentes classes (les fréquences seront exprimées en pourcentages arrondis au dixième).

3. Dans quelle classe se trouve la médiane de la série ?

4. Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes.

5. A l'aide de ce polygone, déterminer graphiquement la vitesse médiane, en km/h, de cette série.

6. Donner la signification de cette vitesse.

7. Sachant que sur route, la vitesse est limitée à 90 km/h, peut-on dire qu'il y a moins de 50 % des automobilistes qui sont en infraction ? (Justifier votre réponse)

7

SYSTEMES LINEAIRES

COMMENTAIRES

☞ Ce chapitre vise à résoudre des problèmes à l'aide des systèmes de deux inéquations du 1er degré dans IR×IR.
☞Ce chapitre complète l'étude des systèmes de deux équations du 1er degré dans IR×IR faite en classe de 2nde A en introduisant les systèmes de deux inéquations du 1er degré dans IR×IR.
☞ Dans la mesure du possible, tous les exemples de systèmes traités dans le cadre de ce chapitre, seront tirés de situations de la vie courante.
☞ On traitera quelques exemples de programmation linéaire.
La programmation linéaire n'est pas un savoir-faire exigible.
Dans la résolution de problèmes concrets aboutissant à un système d'équations ou d'inéquations du 1er degré dans IR×IR, on évaluera séparément les deux étapes suivantes : la mise en système d'équations ou d'inéquations et la résolution des systèmes.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
	☞ Représenter graphiquement les solutions d'une inéquation du 1er degré dans IR×IR. ☞ Justifier qu'un couple donné est solution ou non d'une inéquation ou d'un système de deux inéquations du 1er degré dans IR×IR. ☞ Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de deux inéquations du 1er degré dans IR×IR. ☞Résoudre des problèmes se ramenant à un système de deux inéquations du 1er degré dans IR×IR.

TRAVAUX PRATIQUES

Exercice résolu 1
Dans un parc zoologique, la visite coûte 1000 F pour les adultes et 400 F pour les enfants.
A la fin d'une journée, on sait que 108 personnes ont visité le zoo et que la recette du jour est de 70 200 F.

Parmi les personnes qui ont visité le zoo ce jour-là, quel est le nombre d'enfants ? Quel est le nombre d'adultes ?

Solution
Soit x le nombre d'enfants et y le nombre d'adultes qui ont visité ce zoo.
108 personnes ont visité ce zoo donc $x + y = 108$.
La recette est 70 200 F donc $400x + 1000y = 70\,200$.
On obtient :
$$\begin{cases} x+y=108 \\ 400x+1000y=70200 \end{cases}$$
On a :
$$\begin{cases} y=108-x \\ 400x+1000y=70200 \end{cases}.$$
Donc $$\begin{cases} y=108-x \\ 400x+1000(108-x)=70200 \end{cases}.$$
Donc $$\begin{cases} y=108-x \\ -600x=-37800 \end{cases}.$$
Donc $$\begin{cases} x=63 \\ y=45 \end{cases}.$$

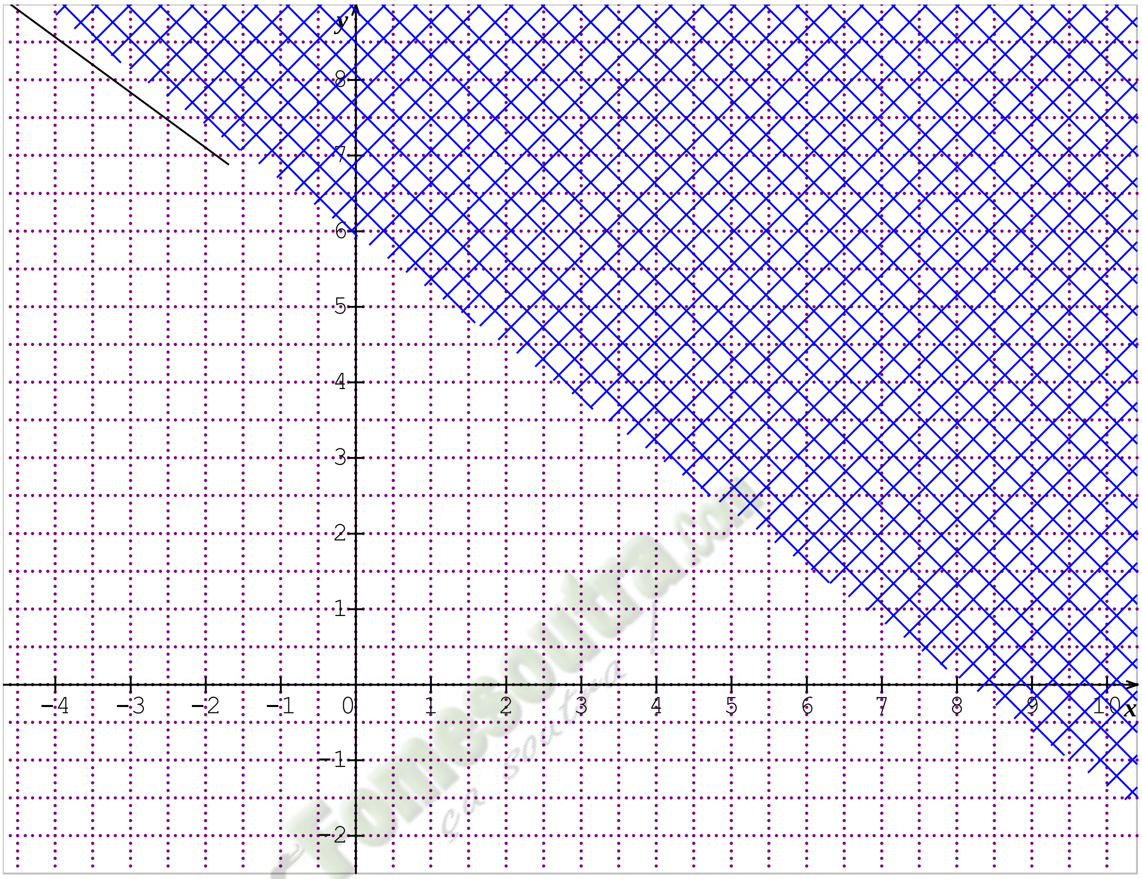
Il y a 45 adultes et 63 enfants dans ce groupe.

Exercice résolu 2
Une mère de famille voudrait acheter des poulets et des pintades pour la fête du nouvel an.
Sachant que chaque poulet coûte 2700 F et chaque pintade coûte 3500 F, combien de volailles de chaque sorte pourrait-elle acheter si elle souhaite ne pas dépenser plus de 22 000 ?

Solution
Soit x le nombre de poulets et y le nombre de pintades que cette mère de famille pourrait acheter.

On obtient : $2700x + 3500y \leq 22000$.
Donc $27x + 35y \leq 220$.
Donc $y \leq -\frac{27}{35}x + \frac{44}{7}$.
Soit (D) *la droite d'équation :* $y = -\frac{27}{35}x + \frac{44}{7}$.

Les solutions de l'inéquation $y \leq -\frac{27}{35}x + \frac{44}{7}$ *« sont au-dessous de (D) ».*
Les solutions de l'inéquation sont les coordonnées $(x; y)$ *des points situées dans la région non hachurée tels que* $x \in$ *IN** *et* $y \in$*IN**.



x *et* y *étant des entiers naturels non nuls, les solutions sont :* $(1; 1)$, $(1; 2)$, $(1; 3)$, $(1; 4)$, $(1; 5)$, $(2; 1)$, $(2; 2)$, $(2; 3)$, $(2; 4)$, $(2; 5)$, $(3; 1)$, $(3; 2)$, $(3; 3)$, $(3; 4)$, $(4; 1)$, $(4; 2)$, $(4; 3)$, $(5; 1)$, $(5; 2)$, $(6; 1)$.

Exercice résolu 3

Une élève se rend à KOKO le jour de marché pour acheter au moins 10 habits composés de camisoles et de jupes.
Sachant qu'une camisole est vendue ce jour-là à 400 F et une jupe à 700 F .
Combien de jupes et de camisoles pourra t'elle s'offrir avec 5000 F CFA ?

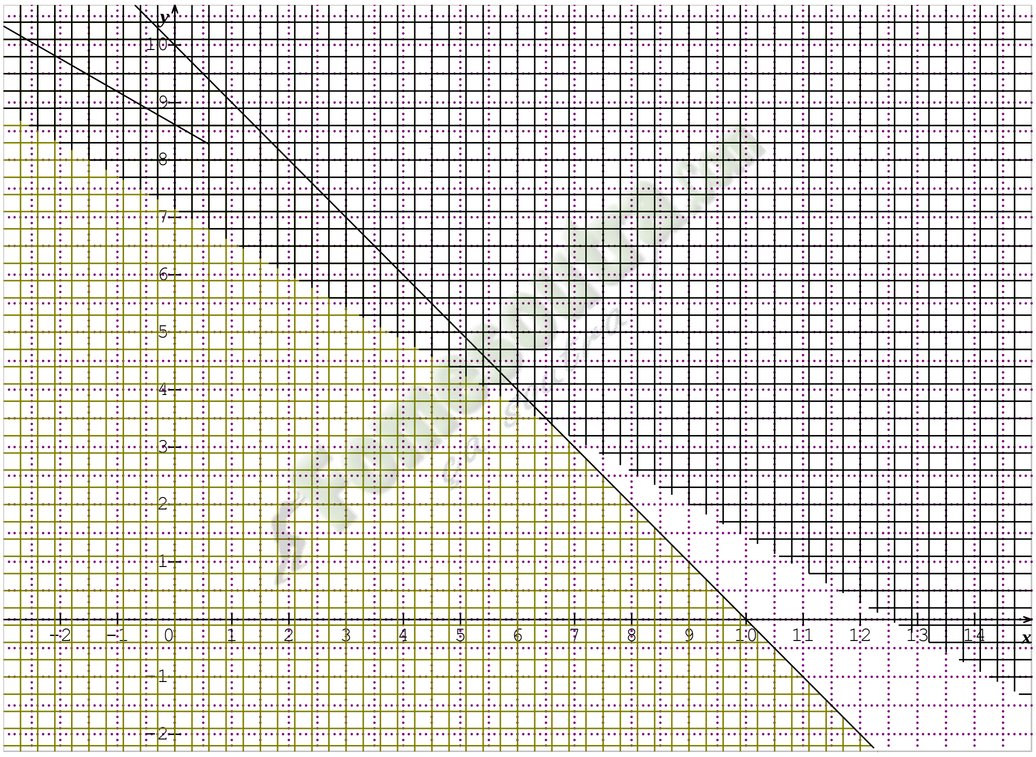
Solution
Notons x le nombre de camisoles achetées qui lui reviennent à 400x F et y le nombre de jupes achetées qui lui reviennent à 700y F.
On obtient :

$$\begin{cases} x + y \geq 10 \\ 400x + 700y \leq 5000 \end{cases}.$$

Donc : $\begin{cases} x+y \geq 10 \\ 4x+7y \leq 50 \end{cases}$.

Donc : $\begin{cases} y \geq 10-x \\ y \leq \frac{50}{7}-\frac{4}{7}x \end{cases}$.

Soit (D) *la droite d'équation :* $y = 10 - x$.
Soit (D') *la droite d'équation :* $y = \frac{50}{7} - \frac{4}{7}x$.
Les solutions de l'inéquation $y \geq 10 - x$ *« sont au-dessus de (D) ».*
Les solutions de l'inéquation $y \leq \frac{50}{7} - \frac{4}{7}x$ *« sont au-dessous de (D') ».*
Les solutions de l'inéquation sont les coordonnées $(x; y)$ *des points situées dans la région non hachurée tels que x ∈ IN* et y ∈IN*.*



Conclusion : x *et* y *étant des entiers naturels non nuls, les solutions sont :* $(7; 3)$, $(8; 2)$, $(9; 1)$, $(9; 2)$, $(10; 1)$.

Exercice résolu 4

Résoudre le système (I): $(x; y) \in IR \times IR$, $\begin{cases} 2x+3y+6 > 0 \\ -3x+y-3 < 0 \end{cases}$.

Solution

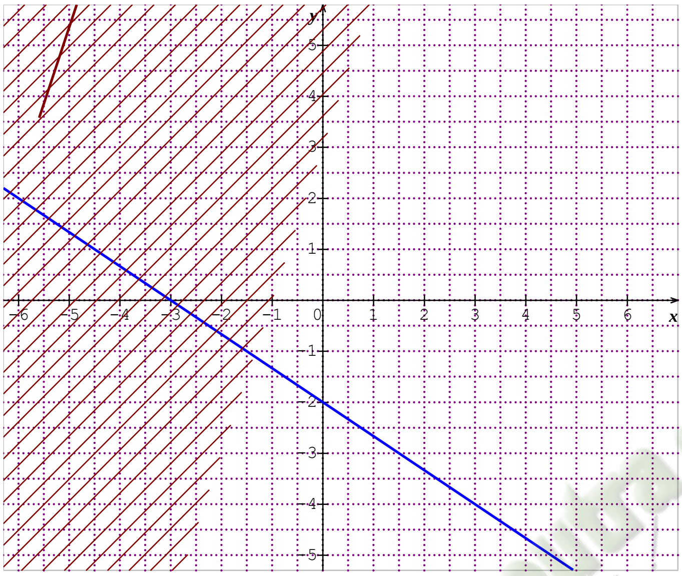
$$\begin{cases} 2x+3y+6 > 0 \\ -3x+y-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > -\frac{2}{3}x-2 \\ y < 3x+3 \end{cases}$$

Soit (D) et (D') les droites d'équations respectives 2x + 3y + 6 = 0 et – 3x + y -3 = 0 .

Les solutions de l'inéquation $y > -\frac{2}{3}x - 2$ *« sont au-dessus de (D) ».*

Les solutions de l'inéquation $y > -\frac{2}{3}x - 2$ *« sont au-dessous de (D') ».*

Les solutions de l'inéquation sont les coordonnées $(x; y)$ *des points situées dans la région non hachurée et qui n'appartiennent ni à (D), ni à (D').*



Exercice résolu 5

Un étudiant demande à un de ses amis de lui enregistrer une conférence. La conférence doit durer au plus 6 heures. Il ne peut se procurer que 7 cassettes de 60 mn à 1600 F l'une et 3 cassettes longues durée de 90 mn à 2400 F l'une.

L'étudiant veut déterminer le nombre de cassettes x de 60 mn et le nombre y de cassettes de 90 mn qu'il doit acheter pour couvrir la conférence et que la dépense soit minimale.

1. Déterminer le système d'inéquations portant sur x et y traduisant les contraintes de ce problème.
2. Dans le plan (P), montrer le domaine des contraintes.
3. Exprimer en fonction de x et de y le prix pour l'achat de x cassettes de 60 mn et de y cassettes de 90 mn.

Déterminer graphiquement, en expliquant votre méthode, les deux couples $(x_1 ; y_1)$ et $(x_2 ; y_2)$ donnant une dépense minimale puis calculer cette dépense.

1. Soit x le nombre entier de cassettes de 60mn et y le nombre entier de cassettes de 90m.

En premier lieu, il est simple de poser $x \leq 7$ *et* $y \leq 3$.

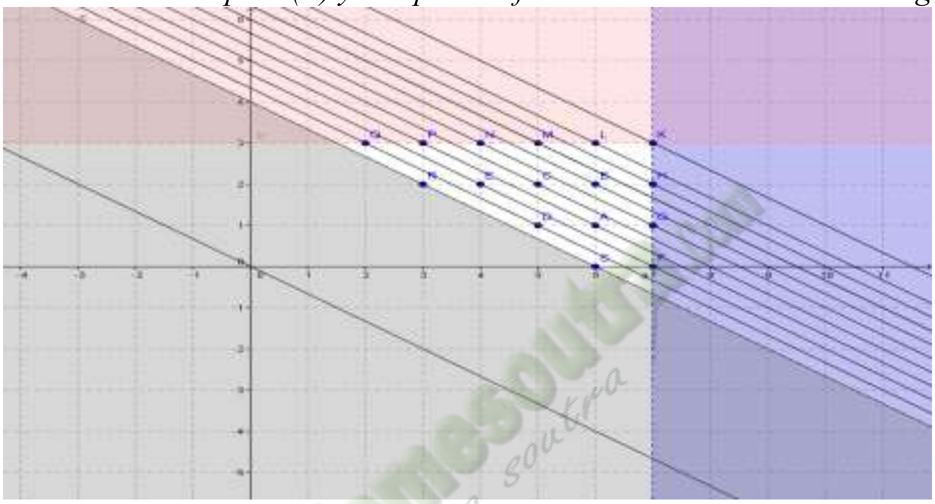
La conférence doit durer au maximum 6h c'est-à-dire 360 mn aussi, si nous voulons être sûr d'avoir toute la conférence, il faudra que le temps disponible sur les casettes soit supérieur ou égal à 360 mn.

Donc nous posons $60x + 90y \geq 360$ *soit après simplification par 30,* $2x + 3y \geq 12$.

Le système d'inéquations est donc :

$$\begin{cases} x \in IN, y \in IN \\ x \leq 7 \\ y \leq 3 \\ 2x + 3y \geq 12 \end{cases}$$

2. Pour tracer le domaine des contraintes, nous devons traiter chaque inéquation l'une après l'autre et barrer à chaque fois la région qui ne convient pas.
En premier, nous barrons les parties du plan où l'une des coordonnées ou les deux sont négatives en effet, x et y sont des entiers positifs dans ce problème.
$x \leq 7$ *. Nous traçons $x = 7$ et nous barrons le demi-plan qui se situe à droite de la droite tracée.*
$y \leq 3$ *. Nous traçons l'horizontale $y = 3$ et nous barrons le demi-plan qui se trouve au-dessus de la droite* $2x + 3y \geq 12$*. Nous traçons la droite d'équation $2x + 3y = 12$.*
Nous testons avec le point O(0 ;0), ce point ne convient pas car $2(0) + 3(0) = 0 \leq 12$. Nous barrons le demi-plan contenant O.
Le domaine des contraintes est constitué par les points à coordonnées entières de la région non hachurée du plan (P) y compris les frontières car nous avons les signes $\leq$ et $\geq$.



La solution est représentée ci-dessus, en fait, les coordonnées entières des points du domaine en blanc y compris les frontières.
Ici, il est assez facile de dresser l'ensemble des solutions : (2 ;3) ;(3 ;3) ;(4 ;3) ;(5 ;3) ;(6 ;3) ;(7 ;3) ;(3 ;2) ;(4 ;2) ;(5 ;2) ;(6 ;2) ;(7 ;2) ;(5 ;1) ;(6 ;1) ;(7 ;1)(6 ;0) ; (7 ;0).
3) Notons P(x ;y) le prix d'achat de x cassettes de 60mn et de y cassettes de 90mn.
On a : $P(x,y)= 1600x + 2400y$.
Traçons la droite (D) d'équation : $P(7 ;3)= 1600x + 2400y$ ou encore $2x + 3y = 23$.
Pour avoir tous les prix possibles, nous traçons des droites parallèles à (D) vers le bas en restant parallèle à cette droite. Nous recherchons parmi ces droites celle qui a la position la plus basse pour avoir une dépense minimale.
Ici la droite cherchée est celle qui passe par R(3 ;2) et S(6 ;0) .
Donc le prix d'achat minimum est $P(3 ;2) = 1600(3) + 2400(2) = 9600$ F. Nous aurons donc deux solutions coûtant 9600F : 3 cassettes de 60 mn et 2 cassettes de 90 mn ou bien 6 cassettes de 60 mn.

EXERCICES

1 Un troupeau est composé de dromadaires et de chameaux. On compte 90 têtes et 152 bosses. Sachant qu'un dromadaire a une bosse et un chameau 2, combien y a-t-il d'animaux de chaque espèce ?

2 On dispose de 34 pièces, les unes de 500 F, les autres de 200 F. Au total elles représentent une somme de 12 500 F.

Combien y a-t-il de pièces de chaque sorte ?

3 Soit l'inéquation (I) :
$(x; y) \in IR \times IR, -5x + 2y - 4 \geq 0.$
Parmi les couples suivants $(-2; 1)$, $(0; 0)$, $(3; 6)$, (-1 ;-1), $\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right)$, quels sont ceux qui sont solutions de (I) ?

4 Soit l'inéquation (I) :
$(x; y) \in IR \times IR, x + y > 0.$
Parmi les couples suivants $(0; 0)$, $(1; 0)$, (-3 ;-2), $\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right)$, quels sont ceux qui sont solutions de (I) ?

5 Soit l'inéquation (I) :
$(x; y) \in IR \times IR, x - 2y + 3 \leq 0.$
1. Parmi les couples suivants $(-1; 1)$, $(0; 0)$, $(3; 6)$, (-1 ;-1) quels sont ceux qui sont solutions de (I) ?
2. Représenter graphiquement les solutions de (I).

6 Représenter graphiquement dans IR×IR l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

a) $2y - 6 \geq 0$. b) $x + y - 4 > 0$.

c) $y \leq -2x - 1$. d) $y < x + 3$.

e) $-2x + 4 > 0$. f) $3y - 2x \geq 0$.

g) $3x + 3y - 1 \geq 0$. h) $y < \frac{2}{3}x - 1$.

i) $y - x - 1 \geq 0$. j) $y < x$.

7 Dans chaque ci-dessous, représenter graphiquement l'ensemble ses solutions dans IR×IR des systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} x > 0 \\ -2x + y < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y - 6 \geq 0 \\ -x + y < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ -x + y + 2 \geq 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y - 3 > 0 \\ -x + y + 5 < 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - 5y - 10 \geq 0 \\ y - 3x + 2 < 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 4x - 7y - 6 \leq 0 \\ -x - y + 2 \geq 0 \end{cases}$.

g) $\begin{cases} x \geq -1 \\ x + y < 2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y \geq 1 \\ y - 3x < 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x + y \leq 0 \\ x - y \geq 1 \end{cases}$

j) $\begin{cases} y + 4 \geq 0 \\ 2x \leq 5 + y \end{cases}$.

k) $\begin{cases} 2x + 3 \leq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$

l) $\begin{cases} y \geq 3 - x \\ y < 2x + 3 \end{cases}$

m) $\begin{cases} y \leq 0 \\ x \geq 0. \end{cases}$

8 Le responsable d'une cantine scolaire doit acheter au minimum 70 assiettes plates et 40 assiettes creuses .
Deux grossistes lui propose :
Le premier : un kit A de 10 assiettes plates et de 10 assiettes creuses à 10 000 FCFA.
Le deuxième : un kit B de 20 assiettes plates et 10 assiettes creuses à 12 500 FCFA.
On désigne par x le nombre de kits A et y le nombre de kits B qu'il doit acheter .

1. Justifier que x et y vérifie le système

$$(S) : \begin{cases} x \geq 0 \; et \; y \geq 0 \\ x + 2y \geq 7 \\ x + y > 4 \end{cases} .$$

2. Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de (S) .
3. On note D la dépense occasionnée par l'achat de x kits de A et y kits de B .
a) Etablir que D = $10000x + 12500y$.
b) Tracer la droite représentant D pour D = 12 500.
c) Pour quelle valeur de x et de y D est minimale ?
d) Calculer cette valeur minimale .

9 Une entreprise fabrique deux types de liquides A et B.
Le réseau commercial ne peut pas écouler plus de 100 litres par mois.
La fabrication du liquide A nécessite 3,5 heures de travail et celle du liquide B en nécessite 5 heures.
L'entreprise dispose au maximum de 452 heures par mois.
Le prix de vente est de 900 F pour un litre de A et de 1000 F pour un litre de B.
On désigne par x la production mensuelle de liquide A et par y la production mensuelle de liquide B, x et y exprimés en litres.
On se propose de déterminer la production mensuelle de A et de B qui donnera un chiffre d'affaire maximal.

1. Démontrer que les contraintes se traduisent par le système suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 100 \\ 3,5x + 5y \leq 452 \end{cases}$$

2. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, représenter ces contraintes.
3.a) Exprimer en fonction de x et de y, le chiffre d'affaire mensuel réalisé par la vente de x litres de A et y litres de B.
b) Expliquer pourquoi, nous pouvons avoir la solution en résolvant :

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 3,5x + 5y = 452 \end{cases} .$$

c) Résoudre ce système et calculer alors le chiffre d'affaire maximal.

10 Après une première sélection à un concours, on fait subir aux candidats des épreuves de mathématiques et de sciences physiques notées sur 20.
L'admission se fait alors aux conditions suivantes :
- toute note strictement inférieure à 8 à l'épreuve de mathématiques est éliminatoire ;
- toute note strictement inférieure à 10 à l'épreuve de sciences physiques est éliminatoire ;
- la somme de la note de sciences physiques et du double de la note de mathématiques doit être supérieure à 32.

1. On note respectivement x et y les notes obtenues aux épreuves de mathématiques et de sciences physiques par un candidat.

Donner le système de conditions sur x et y pour qu'un candidat soit admis.
2. Représenter graphiquement, dans un repère orthogonal, le système de conditions.
On hachurera ce qui ne convient pas.
3. Cinq candidats ont obtenu les résultats ci-dessous.

	A	B	C	D	E
X	10	12	7	11	14
Y	12	8	18	15	10

Placer sur le graphique les points de coordonnées (x ; y) représentant les résultats
des cinq candidats. Quels sont les candidats qui seront admis ?

11 Une couturière fabrique des pantalons suivant deux modèles A ou B.

Elle dispose de 15 m de tissu par semaine et travaille 40 heures par semaine.

Le modèle A nécessite 1 mètre de tissu et 4 heures de travail.

Le modèle B nécessite 1,50 mètre de tissu et 2 heures de travail.

On note x le nombre de pantalons du modèle A et y le nombre de pantalons du modèle B fabriqués par semaine.

1. Montrer que les productions hebdomadaires de la couturière sont soumises aux contraintes suivantes :

$$\begin{cases} x \geq 0 \; et \; y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 30 \\ 2x + y \leq 20. \end{cases}$$

2. Représenter graphiquement les contraintes de production dans un repère (O ; I, J).

On choisira 1 cm comme unité.

3. Utiliser le graphique pour répondre aux questions a et b.

a) Si la couturière produit dans sa semaine 8 pantalons du modèle A, combien de pantalons du modèle B peut-elle produire ? (Donner toutes les solutions.)

b) Si la couturière produit dans sa semaine 8 pantalons du modèle B, combien de pantalons du modèle A peut-elle produire ? (Donner toutes les solutions.)

4. Sur un pantalon du modèle A, la couturière fait un bénéfice de 1500 FCA et sur un pantalon du modèle B, un bénéfice de 1000 FCFA. On suppose qu'elle vend toute sa production.

a) Exprimer, en fonction de x et de y, le bénéfice hebdomadaire B qu'elle peut réaliser.

b) Représenter, sur le graphique précédent, les couples (x ; y) qui permettent de réaliser un bénéfice de 15 000 FCFA.c) Déterminer graphiquement le nombre de pantalons de chaque modèle à fabriquer par semaine pour que le bénéfice soit le plus grand possible.

Préciser alors ce bénéfice.

12 **PARTIE A**

1.a) Dans un repère orthonormé

(O ; I, J), construire les droites (D) et (D’) d’équations respectives :
$2x$ + y = 24 et $2x$ + 3y = 36.
b) Calculer les coordonnées du point K, intersection des droites (D) et (D’).
2. Déterminer graphiquement (en hachurant ce qui ne convient pas) l’ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x ; y) vérifient :

$$\begin{cases} x \geq 0 \ et \ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \leq 24 \\ 2x + 3y \leq 36. \end{cases}$$

PARTIE B

Un artisan fabrique des portes de placard. Les unes sont en bois rouge, les autres en bois bété.
En raison de contraintes liées à l’approvisionnement, cet artisan ne peut pas produire plus de 9 portes en bois bété par semaine.
La fabrication d’une porte en bois rouge dure 4 h et nécessite 2 m^2 de bois. Celle d’une porte en bois bété dure 2 h et nécessite 3 m^2 de bois.
L’artisan ne travaille pas plus de 48 heures par semaine et il ne peut pas entreposer plus de 36 m^2 de bois dans son atelier.
Soit x le nombre de portes en bois rouge fabriquées et y le nombre de portes en bois bété fabriquées par semaine
1. Déterminer, en justifiant les réponses, le système d’inéquations traduisant les contraintes de la production hebdomadaire de l’artisan.
2. Utiliser le graphique réalisé dans la partie A pour répondre aux questions suivantes.
a) Si l’artisan produit 3 portes en bois rouge, combien de portes en bois bété peut-il fabriquer ?
b) Si l’artisan produit 5 portes en bois bété, combien de portes en bois rouge peut-il fabriquer ?
3. L’artisan fait un bénéfice de 3 000 FCFA sur une porte en bois rouge et de 2 000 FCFA sur une porte en bois bété.
a) Exprimer en fonction de x et de y le bénéfice total réalisé, lorsque x portes en bois rouge et y portes en bois bété sont vendues.
On admet que la droite (Δ) d’équation $3x$ + 2y = 18 contient les points dont les coordonnées correspondent à un bénéfice de 18000 FCFA.
Construire la droite (Δ) sur le graphique.
b) Déterminer graphiquement le nombre de portes de chaque sorte à fabriquer par semaine, pour que le bénéfice soit maximal.
Quel est alors ce bénéfice ?