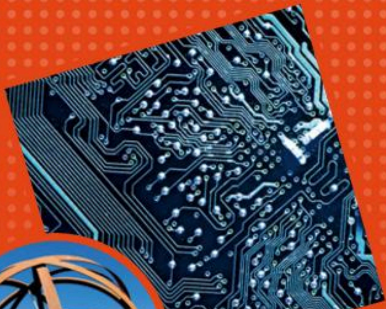
T^le

NOUVEAU PROGRAMME



MATHS EXPERTES

MANUEL COLLABORATIF

Cahier d'algo interactif et gratuit

LLS.fr/PythonXP

Module GeoGebra™ intégré

LLS.fr/GeoGebra

lelivrescolaire.fr
Éditeur de manuels scolaires collaboratifs et innovants

lelivrescolaire.fr
Éditeur de manuels scolaires collaboratifs et innovants

MATHS EXPERTES T^{le}

Certifié PEFC
Ce livre est issu de forêts gérées durablement et de sources contrôlées.
PEFC
10-32-2813
pefc-france.org

IMPRIM'VERT
Votre imprimeur agit pour l'environnement

LA COMMUNAUTÉ D'AUTEURS

lelivrescolaire.fr

Sous la coordination de Vincent Brée
Lycée Jean Jaurès, académie de Versailles

Notre comité scientifique

Irène Bros, IA-IPR, Académie de Dijon

Vincent Pantaloni, IA-IPR, Académie de Versailles

Jean-Jacques Seitz, IA-IPR, Académie de Clermont-Ferrand

Loïc de Raphelis-Soissan, Maître de conférences, Université d'Orléans

Philippe De Sousa, Auteur principal du manuel de Mathématiques spécialité

17 Auteurs

4 Auteurs harmonisateurs

67 Coauteurs

4 Professeurs documentalistes

… ont participé à l'écriture de ce manuel de Mathématiques !

Académie d'Aix-Marseille

Jérôme Calmeil, professeur certifié au Lycée Viala Lacoste (13)

Nelly Maly, professeure certifiée au Collège Viala Lacoste (13)

Académie d'Amiens

Nathalie Chalard, professeure certifiée au Lycée Sainte Famille (80)

Alexandra Laidet, professeure certifiée au Lycée Condorcet (02)

Anna Carla Russo, professeure agrégée au Lycée Jeanne Hachette (60)

Académie de Besançon

Cécile Santagata, professeure certifiée au Lycée Georges Cuvier (25)

Florence Virot, professeure certifiée au Collège Château Rance (70)

Académie de Bordeaux

Hassiba Viero, professeure certifiée au Lycée George Sand (47)

Falani Yendoukoh, professeur certifié au Lycée professionnel Prive Le Beau Rameau (64)

Académie de Clermont-Ferrand

Gérard Régnon, professeur certifié au Lycée Sainte-Procule (03)

Académie de Corse

Véronique Sadtler Raffali, professeure certifiée au Lycée Fesch (20)

Académie de Créteil

Rachid Bekhtaoui, professeur agrégé au Lycée Georges Clemenceau (93)

Jérôme Dieudonné, professeur agrégé au Lycée Les Pannevelles (77)

Loïc Evanno, professeur certifié au Lycée Étienne Bezout (77)

Jérémy Firozaly, professeur agrégé au Lycée Germaine Tillion (93)

Antoine Gildas Mba Obiang, professeur certifié au Lycée Bernard Palissy (94)

Claire Merlin, professeure certifiée au Lycée Charlotte Delbo (77)

Clément Storne, professeur certifié au Lycée Charlotte Delbo (77)

Yannick Vincent, professeur agrégé au Lycée Lucie Aubrac (93)

Académie de Dijon

Anthony Guinot, professeur agrégé au Lycée Lamartine (71)

Karine Rude, professeure agrégée au Lycée Lamartine (71)

Académie de Grenoble

Odile Chichignoud, professeure certifiée au Lycée Astier (07)

Marie-Noëlle Cotte, professeure certifiée au Lycée Camille Corot (38)

Sophie Meiss, professeure agrégée au Lycée Champollion (38)

Académie de Lille

François Bonomi, professeur certifié au Lycée Jean Perrin (59)

Marie-Claire Demarest, professeure certifiée au Lycée Notre-Dame Des Anges (59)

Frédéric Deschryver, professeur agrégé au Lycée Notre-Dame Des Dunes (59)

Marjory Godin, professeure certifiée au Collège Maxence Van Der Meersch (62)

Maximin Houset, professeur agrégé au Lycée Edmond Labbé (59)

Frédérique Hutin, professeure certifiée au Lycée Paul Duez (59)

Clément Jarnier, professeur agrégé au Lycée Giraux Sannier (62)

Julie Mikolajczak, professeure agrégée au Lycée Vauban (62)

Marie Morel, professeure certifiée au Lycée André Malraux (62)

Reynald Ponchant, professeur certifié au Lycée Albert Chatelet (62)

Académie de Lyon

Marie Darmé, professeure certifiée au Lycée Saint-Pierre (42)
Nathalie Giraudier, professeure au Lycée Étienne Gautier Ressins (42)
Sandrine Larôme, professeure certifiée au Lycée Pierre Termier (69)

Académie de Mayotte

Eric Nguyen Duy, professeur agrégé au Lycée Younoussa Bamana (97)

Académie de Montpellier

Delphine Adamski, professeure agrégée au Lycée Scholae (30)
Fanette Bianchi, professeure certifiée au Lycée André Chamson (30)

Académie de Nancy-Metz

Jacky Ledrappier, professeur certifié au Lycée Pierre Et Marie Curie (88)
Emmanuel Schneider, professeur certifié au Lycée Stanislas (54)
Camille Thiollier, professeure certifiée au Lycée Jean XXIII (57)

Académie de Nantes

Bertrand Bordonado, professeur certifié au Lycée Grand Air (44)
Gaël Guyot, professeur certifié au Lycée La Herdrie (44)

Académie de Normandie

Achalé Denis, professeur certifié au Lycée Georges Dumezil (27)
Aline Koch, professeure agrégée au Lycée Raymond Queneau (76)
Marie Lemercier, professeure certifiée au Collège Albert Camus (76)
Stanislas Nadolski, professeur agrégé au Lycée Jean Prévost (76)
Alexandra Noel, professeure certifiée au Lycée Institut Lemonnier (14)

Académie d'Orléans-Tours

Murielle Lavier, professeure certifiée au Lycée professionnel Chateauneuf (36)
Sandra Lemeunier, professeure agrégée au Lycée Grandmont (37)
Delphine Péron, professeure agrégée
Pascal Sesriault, professeur certifié au Lycée Grandmont (37)

Académie de Poitiers

Cathy Delord, professeure certifiée au Lycée Kyoto (86)
Fadel Hadek, professeur certifié au Lycée Saint-Joseph (79)
Pauline Magné, professeure certifiée au Lycée André Theuriet (86)

Académie de Reims

Sylvie Perceau, professeure certifiée au Collège Saint-Joseph (10)

Académie de Rennes

Pierre Bennejean, professeur au Lycée Saint-Thomas D'Aquin (56)
Emmanuel Braud, professeur certifié au Lycée Saint-Joseph - La Salle (56)
Marie-Annick Derrien, professeure agrégée au Lycée Saint-Joseph - Bossuet (22)
Christophe Herkelmann, professeur certifié au Lycée Saint-Joseph - La Salle (56)
Thierry-Alexandre Legros, professeur au Lycée Saint-Joseph - Bossuet (22)
Sophie Pesnel, professeure certifiée au Lycée Henri Avril (22)

Académie de Strasbourg

Stéphane Hamm, professeur agrégé au Lycée Heinrich-Nessel (67)
Pierre Le Gall, professeur agrégé au Lycée Heinrich-Nessel (67)
Jean-Paul Quelen, professeur agrégé à la retraite (67)
Philippe Rackette, professeur certifié au Lycée Saint-Étienne (67)
Schaeffer Quynh-Nhu, professeure agrégée au Lycée Général Leclerc (67)
Isabelle Schmitt, professeure certifiée au Lycée de Zillisheim (68)

Académie de Toulouse

Flora Brin, professeure certifiée au Lycée Charles De Gaulle (31)
François Desnoyer, professeur agrégé au Lycée Stéphane Hessel (31)
Brigitte Goulard, professeure certifiée au Lycée Maréchal Soult (81)
Maud Mazuy, professeure certifiée au Lycée Nelson Mandela (31)

Académie de Versailles

Luca Agostino, professeur agrégé au Lycée Plaine De Neauphle (78)
Raphaële Aubert, professeure certifiée au Lycée Notre-Dame De Bury (95)
Ilan Benhamou, professeur certifié au Lycée François-Joseph Talma (91)
Nathalie Chanvin, professeure certifiée au Lycée François-Joseph Talma (91)
Hélène Cochard, professeure agrégée au Lycée Blaise Pascal (91)
Laurence Eygasier, professeure agrégée au Lycée Notre-Dame De Bury (95)
Théo Giani, professeur agrégé au Lycée Eugène Ionesco (92)
Xavier Grand-Jacquot, professeur certifié au Lycée militaire de Saint-Cyr (78)
Florian Granger, professeur agrégé au Lycée Clément Ader (91)
David Nadjar, professeur agrégé au Lycée François-Joseph Talma (91)
Ridwan Puttaroo, professeur agrégé au Lycée de Villaroy (78)
Yaël Sebbah, professeure au Lycée Perceval (78)
Nicolas Varlot, professeur certifié au Lycée Jean-Pierre Vernant (92)

Reste du monde

Hakim Akkioui, professeur certifié au Lycée Liberté de Bamako (Mali)
Isabelle De Gracia Chaligné, professeure agrégée au Lycée français de New York (Etats-Unis)
Dominique De Luca, professeur certifié au Lycée Stendhal (Italie)
Sophie Dupouy, professeure certifiée au Lycée Francais Stanislas (Canada)
Daniel Rabbany, professeur à l'École française de Téhéran (Iran)
Marianne Steib-Abari, professeure agrégée au Lycée européen de Taipei (Taiwan)

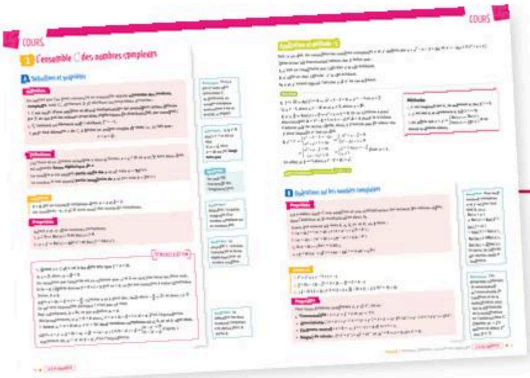
Vous souhaitez rejoindre notre communauté ?

Contactez-nous : auteur@lelivrescolaire.fr

Bienvenue dans votre manuel de Mathématiques !

Retrouvez dans chaque chapitre :

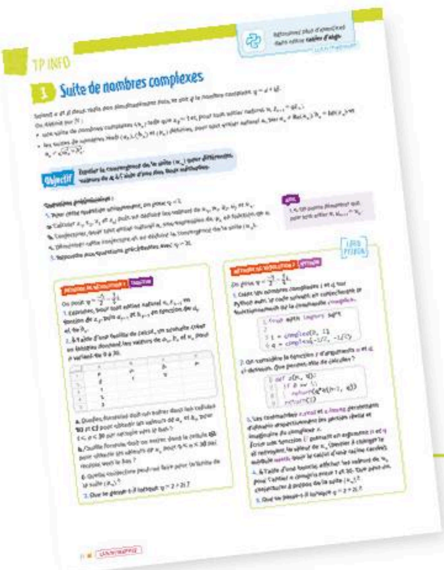
› En début de chapitre, **des exercices** pour faire le point sur **vos acquis** et **les notions** que vous allez travailler.



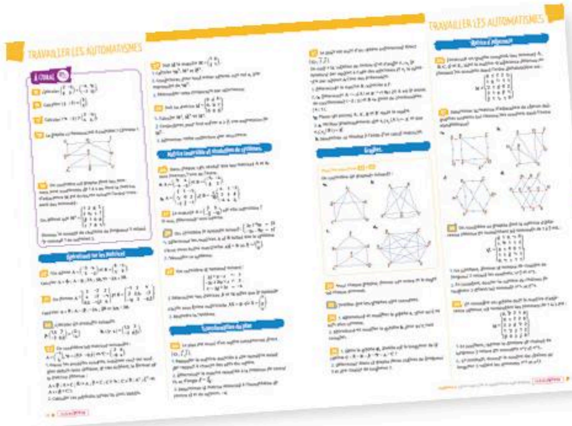
› **Un cours** illustré d'exemples et **d'exercices corrigés** pour vous aider à assimiler pas à pas les savoir-faire essentiels.

› **Des démonstrations** systématiques des théorèmes et des propriétés pour vous permettre de comprendre les mathématiques en profondeur.

› **Des exercices d'auto-évaluation corrigés** à la fin du manuel pour vous entraîner en autonomie.

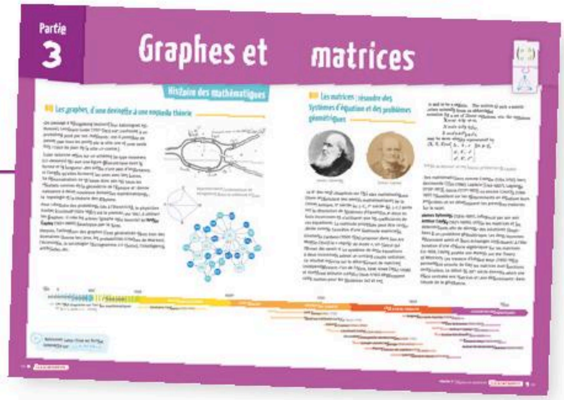


› Des **TP** pour vous permettre de résoudre des problèmes avec **différentes méthodes numériques** comme PYTHON, TABLEUR, GEOGEBRA et CALCULATRICE.



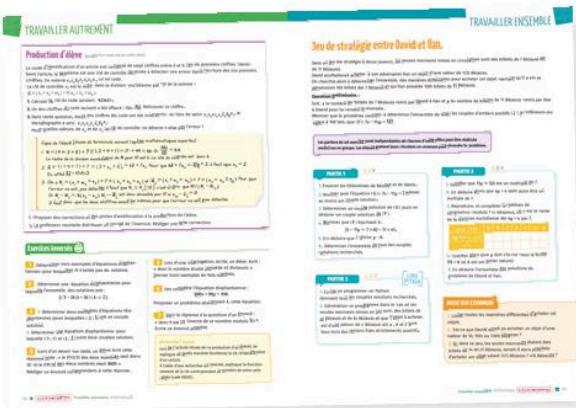
› De nombreux exercices d'application directe des formules du cours pour **travailler vos automatismes** de calcul.

Découvrez aussi au début et à la fin de chaque partie :



› Des pages au début de chaque partie présentent de **célèbres mathématiciens** ainsi que leurs découvertes.

› **Des activités utilisant des documents originaux** vous aide à replacer la découverte des notions étudiées dans leur contexte historique.



› À la fin de chaque partie, des **exercices inversés** vous permettent d'apprendre à réfléchir autrement.

› **Des activités à réaliser en groupe** sont également disponibles pour travailler l'intelligence collective et la communication.

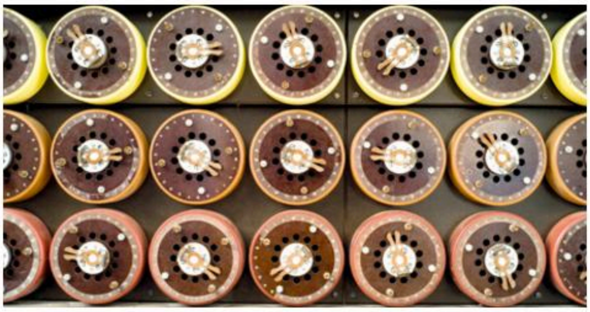
› Des pages à la fin de chaque partie vous permettent découvrir de **nouvelles notions** dans le prolongement du programme.

› **Des exercices** sont également présents pour vous initier au formalisme attendu après le bac.

SOMMAIRE

Partie 1 Nombres complexes

Partie 2 Arithmétique



Partie 3 Graphes et matrices

Les pictos utilisés dans le manuel

DÉMO — Exercice mettant en œuvre une démonstration au travers de raisonnements logiques.

LABO PYTHON — Exercice utilisant Python. Retrouvez notre Labo Python sur LLS.fr/Python

1 — Exercice dont le corrigé se trouve à la fin du manuel.

Exercice à réaliser à l'aide de la calculatrice.

Exercice permettant de vérifier que les connaissances de base sont acquises.

Exercice permettant de contrôler les connaissances avant un devoir.

Exercice permettant d'évaluer si les notions ont été comprises en profondeur.

Vers le supérieur

Cahier d'algorithmique et de programmation

GRATUIT Retrouvez **gratuitement** notre cahier d'**algorithmique** et de **programmation** interactif avec des fiches de cours et des exercices pour apprendre à coder directement sur une console Python. LLS.fr/PythonXP

100 % Numérique

python™

Ces démonstrations et algorithmes sont ceux du programme. Bien d'autres sont présents tout au long de ce manuel.

Les démonstrations du programme

Partie 1 Nombres complexes

- Conjugué,
  - d'un produit — Exercice 88 p. 39
  - d'un inverse — Exercice 89 p. 39
  - d'une puissance entière. — Exercice 90 p. 39
- Formule du binôme. — Exercice 68 p. 37
- Formule $|z|^2 = z\overline{z}$. — Cours p. 54
- Module d'un produit. Module d'une puissance. — Exercice 63 p. 69
- Démonstration d'une des formules d'addition. — Cours p. 57
- Factorisation de $z^n - a^n$ par $z - a$. — Cours p. 27
- Factorisation de $\mathrm{P}(z)$ par $z - a$ si $\mathrm{P}(a) = 0$. — Cours p. 28
- Le nombre de solutions d'une équation polynomiale est inférieur ou égal à son degré. — Cours p. 28
- Détermination de l'ensemble $\mathbb{U}_n$. — Activité C p. 51

Partie 2 Arithmétique

- Écriture du PGCD de a et b sous la forme $ax + by$, $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$. — Exercice 114 p. 140
- Théorème de Gauss. — Cours p. 126
- L'ensemble des nombres premiers est infini. — Activité B p. 146

Partie 3 Graphes et matrices

- Expression du nombre de chemins de longueur n reliant deux sommets d'un graphe à l'aide de la puissance n-ième de la matrice d'adjacence. — Exercice 84 p. 199
- Pour une chaîne de Markov, expression de la probabilité de passer de l'état i à l'état j en n transitions, de la matrice ligne représentant la distribution après n transitions. — Exercice 78 p. 227

Les algorithmes du programme

Partie 2 Arithmétique

- Algorithme d'Euclide de calcul du PGCD de deux nombres et calcul d'un couple de Bézout. — Cours p. 121
- Crible d'Ératosthène. — Activité A p. 146
- Décomposition en facteurs premiers. — Exercice 59 p. 160

Les problèmes possibles du programme

Partie 1 Nombres complexes

- Suite de nombres complexes définie par $z_{n+1} = az_n + b$. — Exercices 147 p. 46 et 142 p. 78
- Inégalité triangulaire pour deux nombres complexes ; cas d'égalité. — Exercice 145 p. 79
- Étude expérimentale de l'ensemble de Mandelbrot, d'ensembles de Julia. — TP 1 et 2 p. 64-65
- Racines carrées d'un nombre complexe, équation du second degré à coefficients complexes. — TP 2 p. 33 et exercice 150 p. 47
- Formules de Viète. — Exercice 148 p. 46
- Résolution par radicaux de l'équation de degré 3. — Exercice 149 p. 46
- Lignes trigonométriques de $\frac{2\pi}{5}$, construction du pentagone régulier à la règle et au compas. — Exercice 143 p. 78
- Somme des racines n-ièmes de l'unité. — Activité C p. 51
- Racines n-ièmes d'un nombre complexe. — Exercice 146 p. 79
- Transformation de Fourier discrète. — Exercice 144 p. 78

Partie 2 Arithmétique

- Détermination des racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers. — Exercice 121 p. 142
- Lemme chinois et applications à des situations concrètes. — Exercices 95 p. 137 et 115 p. 140
- Démonstrations du petit théorème de Fermat. — Cours p. 151 et exercice 80 p. 152
- Problèmes de codage (codes barres, code ISBN, clé du Rib, code Insee). — Exercices 127 p. 114 et 130 p. 115
- Étude de tests de primalité : notion de témoin, nombres de Carmichael. — TP 1 p. 154
- Problèmes de chiffrement (affine, Vigenère, Hill, RSA). — TP1 p. 130, exercice 17 p. 242 et exercice 119 p. 112
- Recherche de nombres premiers particuliers (Mersenne, Fermat). — Exercices 52 p. 159 et 82 p. 163
- Exemples simples de codes correcteurs. — Exercice 18 p. 243
- Étude du système cryptographique RSA. — TP 2 p. 155
- Détermination des triplets pythagoriciens. — Exercices 129 p. 114 et 122 p. 142
- Étude des sommes de deux carrés par les entiers de Gauss. — Exercice 15 p. 241
- Étude de l'équation de Pell-Fermat. — Exercice 16 p. 241

Partie 3 Graphes et matrices

- Étude de graphes eulériens. — Exercice 99 p. 204
- Interpolation polynomiale. — Exercices 53 p. 193 et 98 p. 203
- Marche aléatoire sur un graphe. Étude asymptotique. — Exercice 69 p. 226
- Modèle de diffusion d'Ehrenfest. — Exercice 83 p. 229 et TP 1 p. 218
- Modèle « proie-prédateur » discrétisé : évolution couplée de deux suites récurrentes. — Exercice 86 p. 230
- Algorithme PageRank. — TP 2 p. 219 et exercice 82 p. 229

Organisation du programme

L'enseignement de mathématiques expertes de la classe terminale s'organise autour des thèmes suivants :

- les nombres complexes, vus comme objets algébriques et géométriques ;
- l'arithmétique ;
- les matrices et les graphes.

Sans introduire explicitement les structures algébriques, cet enseignement introduit et étudie certains exemples fondamentaux : corps des nombres complexes, groupes des nombres complexes de module 1 et des racines n-ièmes de l'unité, anneau des entiers relatifs, d'une manière suffisamment approfondie pour préparer à des généralisations. De même, on aborde la notion générale d'équation algébrique, mais pas celle de polynôme formel. Le professeur peut mettre en évidence l'apparition dans divers contextes de notions communes : élément neutre, opposé ou inverse.

Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme propose quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoir à la maison...

Il peut être judicieux d'éclairer le cours par des éléments de contextualisation d'ordre historique, épistémologique ou culturel. L'histoire peut aussi être envisagée comme une source féconde de problèmes clarifiant le sens de certaines notions. Les items « Histoire des mathématiques » identifient quelques possibilités en ce sens. Pour les étayer, le professeur pourra, s'il le désire, s'appuyer sur l'étude de textes historiques.

Le programme propose des problèmes possibles, mais en aucun cas obligatoires. Leur nature est très diverse : certains d'entre eux sont un petit prolongement des notions du programme ; d'autres ouvrent des perspectives plus larges. Ils permettent une différenciation pédagogique et offrent des pistes pour l'épreuve orale terminale.

Nombres complexes

L'étude des nombres complexes est menée selon les lignes directrices suivantes.

D'un point de vue algébrique, les nombres complexes permettent de résoudre les équations de degré 2 à coefficients réels lorsque le discriminant est négatif. Plus généralement, les nombres complexes offrent un cadre privilégié pour l'étude des équations algébriques.

On met en évidence, dans un cadre général, la factorisation associée à une racine en établissant que le nombre de solutions d'une équation est majoré par son degré et en montrant que somme et produit des racines d'un polynôme se lisent sur le polynôme. Ces faits simples ouvrent la porte à de nombreuses et intéressantes activités. On peut par ailleurs revenir sur le cas des polynômes réels, en utilisant des techniques d'analyse.

Le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ peut être vu comme l'ensemble des nombres complexes. Cette observation prend tout son sens lorsqu'on réalise que de nombreuses notions de géométrie plane s'interprètent en termes de nombres complexes. On peut ainsi utiliser le calcul dans $\mathbb{C}$ pour résoudre de nombreuses questions de géométrie et de trigonométrie ; une bonne maîtrise des raisonnements et techniques fondés sur ce principe est un des objectifs principaux de cette partie.

Les racines n-ièmes de l'unité fournissent par ailleurs un pont intéressant entre équations polynomiales et géométrie.

1. Nombres complexes : point de vue algébrique	
Contenus	**Capacités exigibles**
• Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Partie réelle et partie imaginaire. Opérations. • Conjugaison. Propriétés algébriques. • Inverse d'un nombre complexe non nul. • Formule du binôme dans $\mathbb{C}$.	• Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes. • Résoudre une équation linéaire $az = b$. • Résoudre une équation simple faisant intervenir z et $\overline{z}$. • Pour une suite arithmétique ou géométrique, calculer le terme général, la somme de termes consécutifs, déterminer le sens de variation.
2. Nombres complexes : point de vue géométrique	
• Image d'un nombre complexe. Image du conjugué. Affixe d'un point, d'un vecteur. • Module d'un nombre complexe. Interprétation géométrique. • Relation $\|z\|^2 = z\overline{z}$. Module d'un produit, d'un inverse. • Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1. Stabilité de $\mathbb{U}$ par produit et passage à l'inverse. • Arguments d'un nombre complexe non nul. Interprétation géométrique. • Forme trigonométrique.	• Déterminer le module et les arguments d'un nombre complexe. • Représenter un nombre complexe par un point. Déterminer l'affixe d'un point.

3. Nombres complexes et trigonométrie	
• Formules d'addition et de duplication à partir du produit scalaire. • Exponentielle imaginaire, notation $e^{i\theta}$. Relation fonctionnelle. Forme exponentielle d'un nombre complexe. • Formules d'Euler : $\cos(\theta)=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$, $\sin(\theta)=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$. • Formule de Moivre : $\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)=(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n$.	• Passer de la forme algébrique d'un nombre complexe à sa forme trigonométrique ou exponentielle et inversement. • Effectuer des calculs sur des nombres complexes en choisissant une forme adaptée, en particulier dans le cadre de la résolution de problèmes. • Utiliser les formules d'Euler et de Moivre pour transformer des expressions trigonométriques, dans des contextes divers (intégration, suites, etc.), calculer des puissances de nombres complexes.
4. Équations polynomiales	
• Solutions complexes d'une équation du second degré à coefficients réels. • Factorisation de z^n-a^n par $z-a$. • Si P est un polynôme et $\mathrm{P}(a)=0$, factorisation de P par $z-a$. • Un polynôme de degré n admet au plus n racines.	• Résoudre une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels. • Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels dont une racine est connue. • Factoriser un polynôme dont une racine est connue.
5. Utilisation des nombres complexes en géométrie	
• Interprétation géométrique du module et d'un argument de $\frac{c-a}{b-a}$. • Racines n-ièmes de l'unité. Description de l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité. Représentation géométrique. Cas particuliers : $n=2,3,4$.	• Dans le cadre de la résolution de problème, utiliser les nombres complexes pour étudier des configurations du plan : démontrer un alignement, une orthogonalité, calculer des longueurs, des angles, déterminer des ensembles de points. • Utiliser les racines de l'unité dans l'étude de configurations liées aux polygones réguliers.

Arithmétique

Depuis la classe de seconde, l'élève connaît les ensembles de nombres usuels. L'enseignement de mathématiques expertes permet de revenir sur les plus familiers des nombres : les entiers.

Les résultats fondamentaux de l'arithmétique des entiers y sont présentés. Une place importante est faite à l'étude des congruences (arithmétique modulaire). Le cours est illustré par des applications variées (tests de divisibilité, exemples simples d'équations diophantiennes, problèmes de chiffrement).

Arithmétique	
Contenus	**Capacités exigibles**
• Divisibilité dans $\mathbb{Z}$. • Division euclidienne d'un élément de $\mathbb{Z}$ par un élément de $\mathbb{N}^*$. • Congruences dans $\mathbb{Z}$. Compatibilité des congruences avec les opérations. • PGCD de deux entiers. Algorithme d'Euclide. • Couples d'entiers premiers entre eux. • Théorème de Bézout. • Théorème de Gauss. • Nombres premiers. Leur ensemble est infini. • Existence et unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers. • Petit théorème de Fermat.	• Déterminer les diviseurs d'un entier, le PGCD de deux entiers. • Résoudre une congruence $ax=b[n]$. Déterminer un inverse de a modulo n lorsque a et n sont premiers entre eux. • Établir et utiliser des tests de divisibilité, étudier la primalité de certains nombres, étudier des problèmes de chiffrement. • Résoudre des équations diophantiennes simples.

Graphes et matrices

Prenant appui sur la résolution de problème et la modélisation, cette partie a pour objectif d'introduire les notions de graphes et de matrices en soulignant l'intérêt de les appliquer à d'autres disciplines, notamment les sciences économiques et sociales, les sciences de la vie et de la Terre, la physique-chimie, l'informatique etc.

Les matrices sont étudiées sous divers points de vue : modélisation de problèmes issus des autres disciplines, systèmes linéaires, transformations géométriques. Il s'agit de mettre en valeur l'efficacité du calcul matriciel pour représenter et résoudre des problèmes.

La notion de graphe est fondamentale pour les mathématiques discrètes et a des applications dans de nombreux domaines. Le programme la fait interagir avec les matrices. Une illustration exemplaire dans le domaine des probabilités, les chaînes de Markov, fait l'objet d'un développement spécifique.

Graphes et matrices

Contenus	Capacités exigibles
• Graphe, sommets, arêtes. Exemple du graphe complet. • Sommets adjacents, degré, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe connexe. • Notion de matrice (tableau de nombres réels). Matrice carrée, matrice colonne, matrice ligne. Opérations. Inverse, puissances d'une matrice carrée. • Exemples de représentations matricielles : matrice d'adjacence d'un graphe ; transformations géométriques du plan ; systèmes linéaires ; suites récurrentes. • Exemples de calcul de puissances de matrices carrées d'ordre 2 ou 3. • Suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = AU_n + C$. • Graphe orienté pondéré associé à une chaîne de Markov à deux ou trois états. • Chaîne de Markov à deux ou trois états. Distribution initiale, représentée par une matrice ligne π_0. Matrice de transition, graphe pondéré associé. • Pour une chaîne de Markov à deux ou trois états de matrice P, interprétation du coefficient (i, j) de P^n. Distribution après n transitions, représentée comme la matrice ligne $\pi_0 P^n$. • Distributions invariantes d'une chaîne de Markov à deux ou trois états.	• Modéliser une situation par un graphe. • Modéliser une situation par une matrice. • Associer un graphe orienté pondéré à une chaîne de Markov à deux ou trois états. • Calculer l'inverse, les puissances d'une matrice carrée. • Dans le cadre de la résolution de problèmes, utiliser le calcul matriciel, notamment l'inverse et les puissances d'une matrice carrée, pour résoudre un système linéaire, étudier une suite récurrente linéaire, calculer le nombre de chemins de longueur donnée entre deux sommets d'un graphe, étudier une chaîne de Markov à deux ou trois états (calculer des probabilités, déterminer une probabilité invariante).

Compétences mathématiques

Dans le prolongement des cycles précédents, on travaille les six grandes compétences :

• **chercher**, expérimenter, en particulier à l'aide d'outils logiciels ;

• **modéliser**, faire une simulation, valider ou invalider un modèle ;

• **représenter**, choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique...), changer de registre ;

• **raisonner**, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;

• **calculer**, appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes ;

• **communiquer** un résultat par oral ou par écrit, expliquer une démarche.

La résolution de problèmes est un cadre privilégié pour développer, mobiliser et combiner plusieurs de ces compétences. Cependant, pour prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer, l'élève doit disposer d'automatismes. Ceux-ci facilitent en effet le travail intellectuel en libérant l'esprit des soucis de mise en œuvre technique et élargissent le champ des démarches susceptibles d'être engagées. L'installation de ces réflexes est favorisée par la mise en place d'activités rituelles, notamment de calcul (mental ou réfléchi, numérique ou littéral). Elle est menée conjointement avec la résolution de problèmes motivants et substantiels, afin de stabiliser connaissances, méthodes et stratégies.

Partie 1

Nombres

Histoire des mathématiques

Quand les mathématiques font des découvertes


Niccolò Tartaglia (1499-1557)


Girolamo Cardano (1501-1576)

Les méthodes de résolution des équations ont progressé depuis l'Antiquité (voir pages 12 et 13 du manuel de première). Les algébristes italiens de la Renaissance travaillent sur des méthodes pour résoudre celles du 3e et du 4e degré. Scipione del Ferro (1465-1526), professeur à l'université de Bologne, détermine des méthodes, qu'il ne divulgue pratiquement pas, pour résoudre des équations de degré 3.

Quelques années plus tard, cependant, le mathématicien **Niccolò Tartaglia** (1499-1557) remporte un concours contre un des élèves de Del Ferro portant sur la résolution des équations du 3e degré, montrant ainsi qu'il connaît lui aussi une méthode pour résoudre ces équations. Tartaglia révèle sa méthode de résolution à **Girolamo Cardano** (1501-1576), qui la publie quelques années plus tard et sans l'accord de Tartaglia dans *Ars Magna* (1545). Le principe des méthodes utilisées (dites « de Cardan ») permet de transformer une équation du 3e degré en une équation du second degré. Cardan écrit au chapitre XXXVII de l'*Ars Magna* que certaines équations ont des solutions évidentes que ces formules ne permettent pas d'obtenir. En cherchant à résoudre l'équation $x(10-x)=40$, il trouve deux solutions qu'il note, même si ça n'a pas de sens, 5.$\tilde{p}$.R.$\tilde{m}$.15. et 5.$\tilde{m}$.R.$\tilde{m}$.15. , c'est-à-dire $5+\sqrt{-15}$ et $5-\sqrt{-15}$ de nos jours. Il qualifie sa découverte de « *tanto sottile quanto inutile* », mais un nouveau type de nombres vient cependant d'être découvert.

Quelques années plus tard, Rafael Bombelli (1526-1572) publie l'*Algebra*, un traité d'algèbre dans lequel il améliore les notations de l'époque, donne des règles opératoires sur ces nouveaux nombres découverts par Cardan et montre qu'ils peuvent tous se ramener à $\sqrt{-1}$. En utilisant ces nombres, on peut alors résoudre toutes les équations du 3e degré. Ces nombres seront par la suite appelés *imaginaires* par Descartes et enfin *complexes* par Gauss, puis utilisés par tous au même titre que les nombres déjà connus.

1500 — 1600

MONDE ARABE — RENAISSANCE ITALIENNE — FORT DÉVELOPPEMENT

Scipione del Ferro (1465-1526)
Niccolò Tartaglia (1499-1557)
Girolamo Cardano (1501-1576)
Rafael Bombelli (1526-1572)
Albert Girard (1595-1632)
René Descartes (1596-1650)

Retrouver cette frise au format interactif sur LLS.fr/MXPP12

complexes

i^2

De la découverte au symbolisme

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$$

Après la découverte de Cardan et les règles de calcul que leur a données Bombelli, l'utilisation des nombres complexes entre dans les pratiques. Même si les mathématiciens n'arrivent toujours pas à leur donner un sens concret, ces nouveaux nombres ne provoquent pas une crise de pensée, contrairement à la découverte des irrationnels chez les Grecs durant l'Antiquité. Descartes (1596-1650) les qualifie d'*imaginaires* et leur donne, comme Albert Girard (1595-1632), une forme symbolique. L'ensemble des travaux de tous ces mathématiciens révèle l'importance des notations mathématiques et souligne la différence entre formules de résolution symbolique et méthodes d'approximation. Euler (1707-1783), lui-même, utilise ces nombres dans bien des circonstances. Il remarque que la notation $\sqrt{-1}$ n'est pas cohérente avec toutes les propriétés des racines carrées réelles et propose de la remplacer par i. Le nombre i vérifie donc $\mathrm{i}^2 = -1$. On doit à Euler l'une des plus belles formules de l'histoire des mathématiques, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$, qui regroupe toutes les catégories de nombres connus.

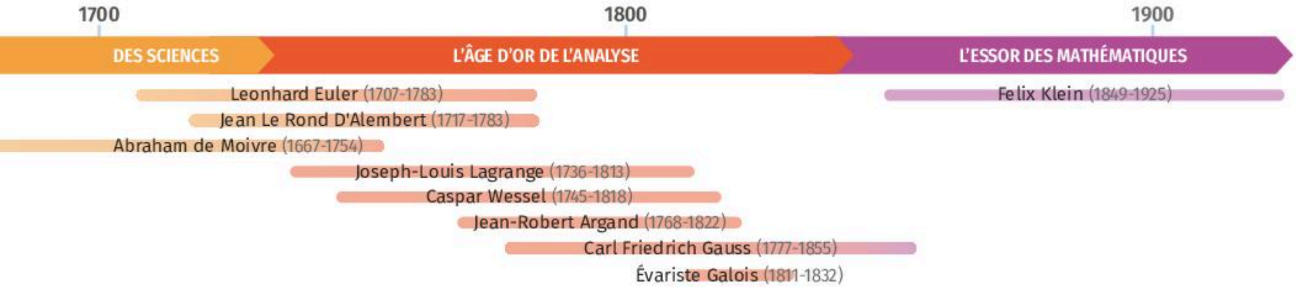
Et la géométrie donne du sens aux nombres complexes

De plus en plus de résultats apparaissent avec l'utilisation des nombres complexes et il est temps de chercher à enfin donner du sens à ce qu'on appelle encore aujourd'hui les *nombres imaginaires*. Le premier à présenter un article sur l'interprétation géométrique des nombres complexes est Caspar Wessel (1745-1818) en 1797.

Quelques années plus tard, c'est Jean-Robert Argand (1768-1822) qui interprète l'ensemble des nombres complexes comme une extension à deux dimensions des nombres réels. Gauss (1777-1855) viendra mettre la touche finale à la construction proposée par Argand. Les nombres imaginaires sont alors appelés *complexes*, et deviennent aussi concrets que les nombres réels.

À noter enfin que le mathématicien **Felix Klein** (1849-1925) introduit dans son *programme d'Erlangen* (1872) l'utilisation des complexes pour l'étude des similitudes directes du plan (voir Vers le supérieur p. 84).

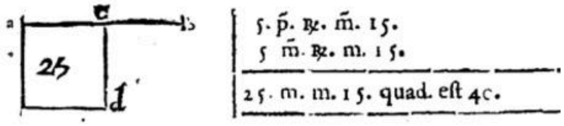
Felix Klein (1849-1925)



A L'*Algebra* et *il più di meno*

Une équation du second degré avec Cardan

Dans son livre l'*Ars Magna*, Cardan s'intéresse au problème consistant à trouver deux nombres tels que leur somme soit égale à 10 et dont le produit vaut 40.



Extrait du chapitre XXXVII de l'*Ars Magna* de Cardan.

1 Montrer que le problème revient à résoudre l'équation $x^2-10x+40=0$ et vérifier que cette équation n'a pas de solution réelle.

2 Cardan utilise une méthode similaire à celle de Diophante pour la résoudre (voir activité p. 88).
Il explique que sa méthode donne comme solutions $a=5+\sqrt{-15}$ et $b=5-\sqrt{-15}$, tout en précisant que $\sqrt{-15}$ n'a pas de sens.
En faisant comme si $\sqrt{-15}$ existait et vérifiait la propriété $(\sqrt{x})^2=x$ valable pour tout réel positif, calculer $a+b$ et ab. Que remarque-t-on ? Un nouveau nombre est né.

Bombelli et les équations du troisième degré

Rafael Bombelli publie son *Algebra* en 1572. Pour résoudre des équations, il améliore les méthodes de Cardan-Tartaglia-Del Ferro, propose de nouvelles techniques, ainsi que des notations symboliques plus efficaces. De plus, il prouve que toutes les racines carrées de nombres négatifs peuvent s'écrire en fonction de $\sqrt{-1}$, qu'il nomme « *più di meno* », et que c'est un nombre comme les autres que l'on peut utiliser dans les calculs. Il donne alors les règles de signes à appliquer (en version originale ci-contre).

Più uia più di meno, fà più di meno.
Meno uia più di meno, fà meno di meno.
Più uia meno di meno, fà meno di meno.
Meno uia meno di meno, fà più di meno.
Più di meno uia più di meno, fà meno.
Più di meno uia men di meno, fà più.
Meno di meno uia più di meno, fà più.
Meno di meno uia men di meno fà meno.

Extrait de l'*Algebra* de Rafael Bombelli.

1 À partir du texte de Bombelli, reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

	1	-1	$\sqrt{-1}$	$-\sqrt{-1}$
$\sqrt{-1}$				
$-\sqrt{-1}$				

Remarque :
- *Più* : $+$ (ou $+1$)
- *meno* : $-$ (ou -1)
- *uia* : multiplié par
- *fà* : fait
- *di meno* : $\sqrt{-1}$

Pour une équation de la forme $x^3=px+q$, grâce à l'usage de ses notations symboliques, Bombelli montre que, lorsque $\left(\frac{q}{2}\right)^2 \geqslant \left(\frac{p}{3}\right)^3$, une solution est égale à $\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$, avec $\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3$.

2 Cas de l'équation $x^3=-6x+20$.

a) Vérifier que l'on peut appliquer la formule donnée par Bombelli.

b) Développer $(1+\sqrt{3})^3$ et $(1-\sqrt{3})^3$ puis, en utilisant la formule de Bombelli et le fait que $\sqrt{108}=6\sqrt{3}$, déterminer une solution entière de l'équation $x^3=-6x+20$.

3 Page 294 de son *Algebra*, Bombelli aborde le cas de l'équation $x^3=15x+4$, qu'il note $\overset{3}{\breve{1}}.a\,\overset{1}{\breve{15}}.\,p.4$.

a) Expliquer pourquoi on ne peut pas appliquer la formule de Bombelli.

b) Vérifier que 4 est solution de l'équation.

c) Vérifier que les formules établies par Bombelli donneraient pour solution $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$.

d) Développer $(2+\sqrt{-1})^3$ et conclure.

1. Egualeà 15. p. 4.
5. 2.
5. 2.
25. 4.
5. 125.
125. R.q.p.di m.121.
Somma R.q.p.di m.121. Resta R.q.p.di m. 121.
R.c.L. 2.p.di m.11. R.c.L. 2.m.di m.11.
Lato 2.p.di m.1. 2.m.di m.1.
Sommati fanno 4. che è la ualuta del Tanto.

Extrait de l'*Algebra* de Rafael Bombelli.

B La formule d'Euler

Euler a montré que, en notation moderne, $\mathrm{e}^x = \lim\limits_{n \to +\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

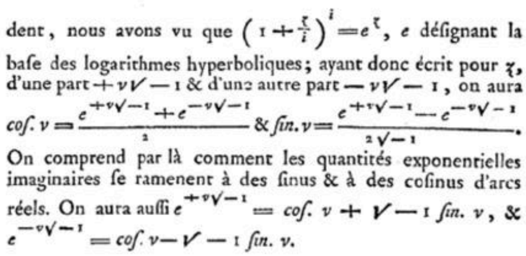
Pour un entier naturel non nul n, il développe $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ et écrit :

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+x+\frac{n(n-1)}{2n\times n}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3n\times 2n\times n}x^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4n\times 3n\times 2n\times n}x^4+\cdots$$

1 Lorsque n prend des valeurs infiniment grandes, Euler dit que 1, 2, etc. sont négligeables à côté de n. Que peut-on alors dire des fractions $\frac{n-1}{n}$ et $\frac{(n-1)(n-2)}{2n\times n}$, lorsque n devient infiniment grand ?

2 En notant $n! = n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 2\times 1$, montrer alors que $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots+\frac{1}{j!}x^j+\cdots$ lorsque n devient infiniment grand.

3 En raisonnant de façon similaire, Euler montre que $\cos(x) = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots$ et que $\sin(x) = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots$. En admettant que la formule $\mathrm{e}^x = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ reste vraie lorsque x est un nombre complexe, vérifier que $\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.



dent, nous avons vu que $\left(1+\frac{z}{i}\right)^i = e^z$, e déſignant la baſe des logarithmes hyperboliques; ayant donc écrit pour z, d'une part $+v\sqrt{-1}$ & d'une autre part $-v\sqrt{-1}$, on aura $coſ.\, v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$ & $ſin.\, v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}}-e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$.
On comprend par là comment les quantités exponentielles imaginaires ſe ramenent à des ſinus & à des coſinus d'arcs réels. On aura auſſi $e^{+v\sqrt{-1}} = coſ.\, v + \sqrt{-1}\, ſin.\, v$, & $e^{-v\sqrt{-1}} = coſ.\, v - \sqrt{-1}\, ſin.\, v$.

Extrait de *Introduction à l'analyse infinitésimale*, tome 1, Leonhard Euler.

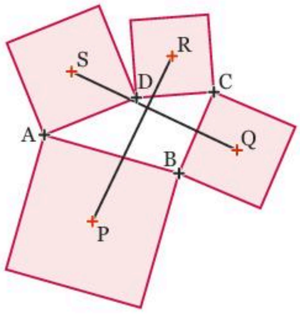
4 En prenant $x=\pi$, en déduire que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}+1=0$.

C Les nombres complexes et la géométrie

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.

Dans son programme d'Erlangen en 1872, Felix Klein caractérise les transformations du plan en utilisant les nombres complexes. Soient A et B les points d'affixe respective a et b.
Si A est l'image de B par la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ, alors $a-\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(b-\omega)$.

Soient ABCD un quadrilatère quelconque et P, Q, R et S les centres respectifs des carrés construits sur les côtés de ABCD, à l'extérieur de ABCD.
A est donc l'image de B par la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
On appelle a, b, c, d, p, q, r et s les affixes respectives de A, B, C, D, P, Q, R et S.



1 Montrer que $p = \frac{a-\mathrm{i}b}{1-\mathrm{i}}$. En procédant de même, déterminer r, s et q en fonction de a, b, c et d.

2 Montrer que $\frac{s-q}{r-p} = \mathrm{i}$. En déduire que $\mathrm{QS}=\mathrm{PR}$ et que $(\mathrm{PS})\perp(\mathrm{QR})$.

Nous venons de démontrer le théorème de Van Aubel.

Avant de commencer

Prérequis

1. Développer des expressions algébriques avec la double distributivité et les identités remarquables.
2. Factoriser des expressions algébriques en utilisant un facteur commun ou des identités remarquables.
3. Résoudre un système linéaire de deux équations du premier degré à deux inconnues.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations du second degré à coefficients réels.
5. Déterminer les racines d'une équation polynomiale à partir de ses racines évidentes.

Pour les exercices **1** *à* **3**

Développer et réduire les expressions.

1 Utiliser la double distributivité

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $\mathrm{A}(x) = (2 - 3x)(1 + 2x)$
2. $\mathrm{B}(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)(4x - 3)$
3. $\mathrm{C} = (3 - \sqrt{2})(2\sqrt{2} + 1)$

2 Utiliser les identités remarquables

1. $\mathrm{A} = (2\sqrt{3} + 3)^2$
2. $\mathrm{B} = (\sqrt{5} - 1)^2$
3. $\mathrm{C} = (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
4. $\mathrm{D} = (1 - 2\sqrt{3})^4$

3 Développer une expression littérale

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $\mathrm{A}(x) = (3x - 5)^2$
2. $\mathrm{B}(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$
3. $\mathrm{C}(x) = (2 - 3x)(3x + 2)$
4. $\mathrm{D}(x) = (x + 1)^3$
5. $\mathrm{E}(x) = (2x - 1)^4$

4 Factoriser une expression littérale

Factoriser dans $\mathbb{R}$ les expressions suivantes où x désigne un nombre réel.

1. $\mathrm{A}(x) = (x + 2)^2 - (2x + 4)(x - 1)$
2. $\mathrm{B}(x) = 4x^2 - 12x + 9$
3. $\mathrm{C}(x) = (x + 1)^2 - (3x + 2)^2$

5 Résoudre un système de deux équations à deux inconnues

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants d'inconnues x et y.

1. $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ 3x + y = -3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ 2x + 3y = -6 \end{cases}$

6 Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{R}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $(x + 2)^2 = (1 - 3x)^2$
2. $5x^2 + 9x - 2 = 0$
3. $x^2 + 1 = 2x$
4. $x^2 - 3x + 1 = 3x^2 - 8x - 2$

7 Déterminer les racines d'un trinôme

Après avoir déterminé une racine évidente du trinôme $x^2 - 6x - 7$, calculer la deuxième racine sans utiliser le discriminant.

8 Problème

Soit P la fonction polynôme de degré 3 définie, pour tout réel x, par $\mathrm{P}(x) = 15x^3 - x^2 - 12x + 4$.

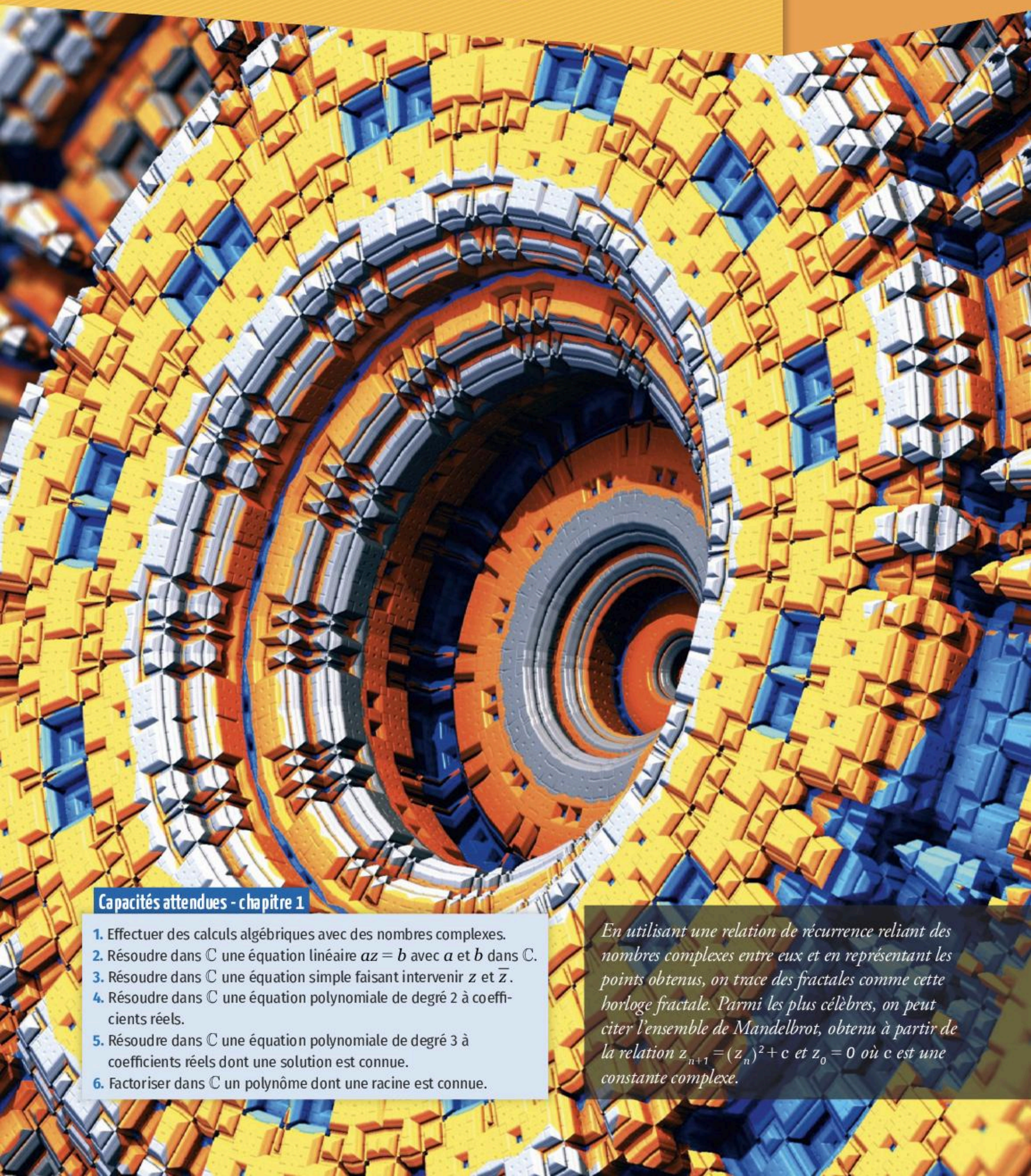
1. Montrer que -1 est une racine de P.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $\mathrm{P}(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$.

Anecdote

La notion de nombre complexe (due à Gauss) ne s'est imposée que très progressivement. Ainsi Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) décrit dans son *Cours d'Analyse* de 1821 une entité « imaginaire » telle que $\sqrt{-1}$ comme « une expression symbolique soumise à des règles fixes suivant des conventions établies » ou « un instrument de calcul qui ne signifie rien en lui-même mais permet d'arriver plus rapidement à la solution des problèmes que l'on se pose ». Mais ses travaux sur les fonctions d'une « variable imaginaire » le conduiront à leur donner vers 1847 un véritable statut, en leur associant soit des « quantités géométriques » soit des « équivalences algébriques ».

Nombres complexes : point de vue algébrique

Chapitre 1



Capacités attendues - chapitre 1

1. Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation linéaire $az = b$ avec a et b dans $\mathbb{C}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation simple faisant intervenir z et $\overline{z}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels.
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation polynomiale de degré 3 à coefficients réels dont une solution est connue.
6. Factoriser dans $\mathbb{C}$ un polynôme dont une racine est connue.

En utilisant une relation de récurrence reliant des nombres complexes entre eux et en représentant les points obtenus, on trace des fractales comme cette horloge fractale. Parmi les plus célèbres, on peut citer l'ensemble de Mandelbrot, obtenu à partir de la relation $z_{n+1} = (z_n)^2 + c$ *et* $z_0 = 0$ *où c est une constante complexe.*

A Introduction aux nombres complexes : équation de Bombelli

Objectif On souhaite utiliser une formule permettant de déterminer une solution de l'équation $(1) : x^3 - 15x - 4 = 0$, appelée **équation de Bombelli**.

Couverture de *L'Algebra* de Rafael Bombelli

Partie A : Résolution graphique

1 À l'aide de la calculatrice ou de GeoGebra, conjecturer graphiquement le nombre de solutions de l'équation (1).

2 Déterminer graphiquement la solution entière obtenue et vérifier ce résultat par le calcul.

Partie B : Résolution algébrique

1 On s'intéresse au cas général.
Soient p et q deux nombres réels et l'équation $(2) : x^3 + px + q = 0$ (appelée **équation de Cardan**).

a) Pour cette question uniquement, on pose $q = 0$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 + px = 0$ en fonction de p.

b) On reprend le cas général.
Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + px + q$.

c) En déduire que l'équation de Cardan admet au moins une solution réelle.

AIDE
1 a) Factoriser l'expression $x^3 + px$ et utiliser la propriété $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{A} = 0$ ou $\mathrm{B} = 0$.

2 Cardan a démontré que lorque $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geqslant 0$, toute équation de la forme $x^3 + px + q = 0$ admet au moins une solution réelle de la forme :

$$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

a) Dans le cas de l'équation (1), quelles sont les valeurs de p et q ? Quel problème survient lors de l'application de la formule de Cardan ?

b) Pour résoudre cette équation, Bombelli a imaginé un nombre qui n'est ni un nombre positif, ni un nombre négatif, mais dont le carré est égal à -1. Il le nomma « plus de moins » (en italien *più di meno*). On le note provisoirement $\sqrt{-1}$. On a ainsi, $(\sqrt{-1})^2 = -1$.
Exprimer la solution x_0 obtenue dans la question précédente en fonction de $\sqrt{-1}$.

c) Après avoir développé $(2 - \sqrt{-1})^3$ puis $(2 + \sqrt{-1})^3$, déterminer une solution entière de l'équation de Bombelli.

AIDE
2 c) Développer en utilisant $(\sqrt{-1})^2 = -1$.

Bilan **En calculant $(\sqrt{-1})^2$ de deux manières différentes et en utilisant les propriétés usuelles de calcul, justifier que cette écriture conduit à une absurdité.**

Histoire des maths

Raffaele Bombelli (1526-1573) et **Girolamo Cardano** (1501-1576), mathématiciens italiens de la Renaissance, se sont risqués à percer le « mystère et les secrets des équations du troisième degré ».

Bien des notations ont été proposées pour la quantité « imaginaire » $\sqrt{-1}$. Euler décidera en 1777 d'introduire pour lui-même le symbole $\mathbf{i}$ (comme imaginaire) et donc d'écrire $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = -1$. En 1831, Gauss reprendra la notation pour conforter son idée d'en faire des « nombres complexes » et Cauchy fera plus tard de même.

B Résolution dans $\mathbb{C}$ d'une équation du second degré à coefficients réels

Objectif On souhaite déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme P défini, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par $\mathrm{P}(z) = z^2 - 4z + 13$.

1 Le polynôme P admet-il des racines réelles ? Justifier.

2 **a)** Justifier que l'on peut écrire, pour tout nombre complexe z,

$$\mathrm{P}(z) = (z-2)^2 + 9.$$

b) Calculer $(3\mathrm{i})^2$ et en déduire une factorisation dans $\mathbb{C}$ du polynôme P en produit de polynômes du premier degré.

c) Déterminer dans $\mathbb{C}$ les racines du polynôme P.

AIDE
2 b) On utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ valable pour tous complexes a et b.

Bilan
1. Pour trois réels a, b et c avec $a \neq 0$, déterminer une méthode de résolution des équations de la forme $az^2 + bz + c = 0$ pour lesquelles le discriminant Δ est strictement négatif.
2. Que peut-on en conclure pour les équations du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$?

C Équation polynomiale de degré 4

Objectif Factoriser dans $\mathbb{C}$ un polynôme de degré n.

Notons P le polynôme défini, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par $\mathrm{P}(z) = z^4 - 3z^3 - 9z^2 + 63z - 52$.
Pour atteindre l'objectif de cette activité, il faut d'abord déterminer les racines de P.

1 **a)** Vérifier que 1 est une racine de P.

b) Justifier qu'il existe un polynôme Q de degré 3 tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{P}(z) = (z-1)\mathrm{Q}(z)$.

c) Vérifier que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\mathrm{Q}(z) = z^3 - 2z^2 - 11z + 52$.

2 Montrer que si le nombre complexe α est une racine de Q, alors son conjugué $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de Q.

3 **a)** À l'aide de la calculatrice, déterminer un entier k tel que $\mathrm{Q}(k) = 0$.

b) Déterminer le polynôme R de degré 2 tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Q}(z) = (z-k)\mathrm{R}(z)$.

4 **a)** Déterminer les racines de R puis factoriser ce polynôme.

b) En déduire une factorisation de P uniquement en produit de polynômes de degré 1.

AIDE
2 On suppose que $\mathrm{Q}(\alpha) = 0$ et on calcule $\mathrm{Q}(\overline{\alpha})$ en utilisant les propriétés du conjugué.

AIDE
3 b) On pourra écrire R sous la forme $\mathrm{R}(z) = az^2 + bz + c$ puis développer $(z-k)\mathrm{R}(z)$ et procéder à une identification des coefficients.

Bilan
Dans $\mathbb{C}$, un polynôme P de degré n non nul peut toujours être factorisé en produit de facteurs de degré 1. Conjecturer le nombre de facteurs d'un tel polynôme P. Quel est le nombre maximal de racines distinctes que peut avoir P ?

1 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

A Définitions et propriétés

Définition

On admet que l'on peut construire un ensemble appelé **ensemble des nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$, contenant $\mathbb{R}$ et vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles définies sur $\mathbb{R}$ et qui ont les mêmes propriétés algébriques (la distributivité, par exemple) ;

2. $\mathbb{C}$ contient un élément noté i vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$;

3. pour tout élément z de $\mathbb{C}$, il existe un unique couple de réels $(a\,;\,b)$ tel que :

$$z = a + \mathrm{i}b.$$

Remarque : Il n'y a pas d'ordre dans l'ensemble $\mathbb{C}$.
En particulier, un nombre complexe quelconque n'est ni positif, ni négatif.

Définitions

L'écriture d'un nombre complexe z sous la forme $z = a + \mathrm{i}b$ où a et b sont deux réels est appelée **forme algébrique de z**.

Le nombre a est appelé **partie réelle de z** et on note $a = \mathrm{Re}(z)$.

Le nombre b est appelé **partie imaginaire de z** et on note $b = \mathrm{Im}(z)$.

Remarque : Si $b = 0$, alors $z = a$ est un réel.
Si $a = 0$, alors $z = \mathrm{i}b$ est un **imaginaire pur**.

NOTATION

On note $\mathrm{i}\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

EXEMPLES

$3 + 2\mathrm{i}$ est un nombre complexe avec $a = 3$ et $b = 2$.
Les nombres -4 ; 0 et $2\mathrm{i}$ sont aussi des nombres complexes.

Remarque :
Attention ! La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel.

Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes.

1. $z = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$ et $\mathrm{Im}(z) = 0$.

2. $z = z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$.

Remarque : La propriété **2.** entraîne l'unicité de la forme algébrique pour un nombre complexe.

DÉMONSTRATION

1. Soient $z \in \mathbb{C}$ et a et b les réels tels que $z = a + \mathrm{i}b$.
Si $z = 0$, alors $a + \mathrm{i}b = 0$.
On raisonne par l'absurde et on suppose que a et b ne sont pas tous les deux nuls.
Si $b = 0$, l'égalité donne $a + 0 \times \mathrm{i} = 0$ soit $a = 0$, ce qui est contraire à notre hypothèse.
Sinon, $b \neq 0$.
Alors $a + \mathrm{i}b = 0 \Leftrightarrow \mathrm{i} = -\frac{a}{b}$. Comme a et b sont des réels alors $-\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ et donc $\mathrm{i} \in \mathbb{R}$.
Ce qui est impossible puisque i n'est pas un réel.
Par conséquent, $b = 0$, ce qui entraîne $a = 0$.
Réciproquement, si $a = b = 0$ alors, $z = a + \mathrm{i}b = 0 + \mathrm{i} \times 0 = 0$. D'où l'équivalence.

2. Soient $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ deux nombres complexes où a, b, a' et b' sont réels.
Alors $z = z' \Leftrightarrow a + \mathrm{i}b = a' + \mathrm{i}b' \Leftrightarrow (a - a') + \mathrm{i}(b - b') = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - a' = 0 \\ b - b' = 0 \end{cases}$ d'après **1.**
Autrement dit, $a = a'$ et $b = b'$, d'où l'équivalence.

Remarque : La différence de deux nombres complexes est définie dans la partie B.

Application et méthode - 1

Soit x un réel. On considère les nombres complexes z et z' définis par $z = x^2 - x - 2 + 3ix$ et $z' = -2x + i(x^2 + x + 1)$.

Déterminer les éventuelles valeurs de x telles que :

1. z soit un imaginaire pur. Calculer z le cas échéant.

2. z' soit un réel. Calculer z' le cas échéant.

3. z et z' soient égaux. Calculer z et z' le cas échéant.

SOLUTION

1. $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$.

Si $x = -1$, alors $z = -3i$ et si $x = 2$, alors $z = 6i$.

2. $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$. Or ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$ et $\Delta < 0$ donc le trinôme n'admet pas de racine réelle. Ainsi, il n'existe pas de valeur de x pour laquelle z' est un réel.

3. $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = -2x \\ x^2 + x + 1 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$ donc $x = 1$.

En effet, si $x = 1$ alors $z = -2 + 3i = z'$.

Méthode

1. z est imaginaire pur si, et seulement si, $\mathrm{Re}(z) = 0$.

2. z' est réel si, et seulement si, $\mathrm{Im}(z') = 0$.

3. On utilise que $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}$ et on résout le système obtenu.

Pour s'entraîner : exercices **31** et **32** p. 34

B Opérations sur les nombres complexes

Propriétés

On a défini dans $\mathbb{C}$ une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

Quels que soient les réels k, a, b, a' et b', on a donc :

1. $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$;

2. $(a + ib) - (a' + ib') = (a - a') + i(b - b')$

3. $k(a + ib) = (ka) + i(kb)$;

4. $(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Remarque : Pour tous nombres complexes z et z' et pour tout réel k, on a :
$\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$;
$\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$;
$\mathrm{Re}(kz) = k\mathrm{Re}(z)$;
$\mathrm{Im}(kz) = k\mathrm{Im}(z)$.
On parle de linéarité des parties réelle et imaginaire.

EXEMPLES

1. $i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$

2. $3 + 2i - (3i - 2) = 3 + 2i - 3i + 2 = 5 - i$

3. $(3 - 2i)(2 + 3i) = 3 \times 2 + 3 \times 3i - 2i \times 2 - 2 \times 3i^2 = 12 + 5i$

Propriétés

Pour tous nombres complexes z, z' et z'', on a :

- **Commutativité :** $z + z' = z' + z$ et $zz' = z'z$.
- **Associativité :** $(z + z') + z'' = z + (z' + z'') = z + z' + z''$ et $(zz') \times z'' = z \times (z'z'') = zz'z''$.
- **Éléments neutres :** $z + 0 = z$, $z + (-z) = 0$ et $z \times 1 = z$.
- **Règles de calculs :** $z(z' + z'') = zz' + zz''$ et $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$.

Remarque : Ces propriétés traduisent la commutativité et l'associativité de l'addition et de la multiplication, ainsi que la distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{C}$. L'égalité $zz' = z'z$ permet de définir z^n avec $n \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION

On écrit $z = a + \mathrm{i}b$, $z' = a' + \mathrm{i}b'$ et $z'' = a'' + \mathrm{i}b''$ avec a, b, a', b', a'' et b'' des réels.

Les démonstrations découlent de la définition et des propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$.

Conséquences

Pour tous réels a et b, on a :

$$(a+\mathrm{i}b)^2 = a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab \text{ ; } (a-\mathrm{i}b)^2 = a^2 - b^2 - 2\mathrm{i}ab \text{ ; } (a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2 + b^2.$$

Remarque : De manière générale, $\mathrm{Re}(z^2) \neq (\mathrm{Re}(z))^2$ et $\mathrm{Im}(z^2) \neq (\mathrm{Im}(z))^2$.

DÉMONSTRATION

On développe comme dans $\mathbb{R}$ en utilisant $\mathrm{i}^2 = -1$.

Binôme de Newton

Pour tous nombres complexes u et v et pour tout entier naturel n, on a :

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k.$$

Remarque : Pour tout entier k compris entre 0 et n, le coefficient $\binom{n}{k}$ a été défini dans le chapitre « Combinatoire et dénombrement » de mathématiques spécialité.

DÉMONSTRATION On démontre la formule du binôme de Newton par récurrence. Voir exercice 68 p. 37.

EXEMPLES

- $(2+\mathrm{i})^3 = \binom{3}{0}2^3\mathrm{i}^0 + \binom{3}{1}2^2\mathrm{i}^1 + \binom{3}{2}2^1\mathrm{i}^2 + \binom{3}{3}2^0\mathrm{i}^3 = 8 + 12\mathrm{i} - 6 - \mathrm{i} = 2 + 11\mathrm{i}$;
- $(1-\mathrm{i})^5 = \binom{5}{0}1^5\mathrm{i}^0 - \binom{5}{1}1^4\mathrm{i}^1 + \binom{5}{2}1^3\mathrm{i}^2 - \binom{5}{3}1^2\mathrm{i}^3 + \binom{5}{4}1^1\mathrm{i}^4 - \binom{5}{5}1^0\mathrm{i}^5$
  $= 1 - 5\mathrm{i} - 10 + 10\mathrm{i} + 5 - \mathrm{i} = -4 + 4\mathrm{i}$.

Remarque : Dans ce chapitre, on utilise la convention $0^0 = 1$.

Application et méthode - 2

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + \mathrm{i}$; $z_2 = 2 - 3\mathrm{i}$.

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants : $z = z_1^2 + z_2^2$, $z' = z_1^5$ et $z'' = z_2^4$.

SOLUTION

$z = (1+\mathrm{i})^2 + (2-3\mathrm{i})^2 = 1 - 1 + 2\mathrm{i} + 4 - 9 - 12\mathrm{i}$
$= -5 - 10\mathrm{i}$;

$z' = (1+\mathrm{i})^5 = 1 + 5\mathrm{i} + 10\mathrm{i}^2 + 10\mathrm{i}^3 + 5\mathrm{i}^4 + \mathrm{i}^5$
$= 1 + 5\mathrm{i} - 10 - 10\mathrm{i} + 5 + \mathrm{i} = -4 - 4\mathrm{i}$;

$z'' = (2-3\mathrm{i})^4$
$= 2^4 - 4 \times 2^3 \times 3\mathrm{i} + 6 \times 2^2 \times (3\mathrm{i})^2 - 4 \times 2 \times (3\mathrm{i})^3 + (3\mathrm{i})^4$
$= 16 - 96\mathrm{i} - 216 + 216\mathrm{i} + 81 = -119 + 120\mathrm{i}$.

Pour s'entraîner : exercices **29** et **30** p. 34

Méthode

- Pour calculer z, on utilise les identités remarquables.
- Pour calculer z' et z'', on applique la formule du binôme de Newton valable pour tous complexes u et v et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k.$$

Pour trouver facilement les coefficients binomiaux, on peut utiliser le triangle de Pascal basé sur la propriété :

$$\binom{k+1}{p} = \binom{k}{p} + \binom{k}{p-1}.$$

2 Nombres complexes conjugués

A Définition et propriétés algébriques

Définition

Le **conjugué** d'un nombre complexe z est le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par :

$$\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{i} \times \mathrm{Im}(z).$$

Remarque : Si z est un nombre complexe et si a et b sont les réels tels que $z = a + \mathrm{i}b$, alors $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.

EXEMPLES

1. $\overline{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ 2. Pour tout $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$, $\overline{a} = a$ et $\overline{\mathrm{i}b} = -\mathrm{i}b$. 3. Si $z = 3 + 2\mathrm{i}$, alors $\overline{z} = 3 - 2\mathrm{i}$.

Propriétés

Pour tout nombre complexe z, on a :

1. $\overline{\overline{z}} = z$;
2. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$;
3. $z - \overline{z} = 2\mathrm{i} \times \mathrm{Im}(z)$;
4. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$;
5. $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$;
6. $z \times \overline{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$.

Remarque : En notant $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels, on a $z\overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^+$.

DÉMONSTRATION

Soient z un nombre complexe et a et b les deux réels tels que $z = a + \mathrm{i}b$.

1. $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a + \mathrm{i}b}} = \overline{a - \mathrm{i}b} = a - (-\mathrm{i}b) = a + \mathrm{i}b = z$.
2. $z + \overline{z} = a + \mathrm{i}b + a - \mathrm{i}b = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$.
3. $z - \overline{z} = a + \mathrm{i}b - (a - \mathrm{i}b) = a + \mathrm{i}b - a + \mathrm{i}b = 2\mathrm{i}b = 2\mathrm{i} \times \mathrm{Im}(z)$.
4. $\overline{z} = z \Leftrightarrow z - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{i} \times \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$ (car $2\mathrm{i} \neq 0$). D'où $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
5. $\overline{z} = -z \Leftrightarrow z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.
6. $z \times \overline{z} = (\mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z))(\mathrm{Re}(z) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)) = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$.

Application et méthode - 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $2\overline{z} + 5 - 2\mathrm{i} = 4 + \mathrm{i} + 3\overline{z}$ **2.** $2z + \mathrm{i}\overline{z} = 5 - 2\mathrm{i}$

SOLUTION

1. $2\overline{z} + 5 - 2\mathrm{i} = 4 + \mathrm{i} + 3\overline{z} \Leftrightarrow \overline{z} = 1 - 3\mathrm{i} \Leftrightarrow z = 1 + 3\mathrm{i}$

2. On pose $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels.

On a ainsi $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$. L'équation s'écrit alors :

$2(a + \mathrm{i}b) + \mathrm{i}(a - \mathrm{i}b) = 5 - 2\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow 2a + b + \mathrm{i}(a + 2b) = 5 - 2\mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 5 \\ a + 2b = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow z = 4 - 3\mathrm{i}$.

Pour s'entraîner : exercices **33** p. 34 et **34** p. 35

Méthode

1. Pour les équations où $\overline{z}$ intervient seul, on résout de la même manière que pour les équations du premier degré dans $\mathbb{R}$ en isolant $\overline{z}$. On utilise ensuite $\overline{\overline{z}} = z$ pour conclure.
2. Pour les équations où z et $\overline{z}$ interviennent simultanément, on pose $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels et on utilise $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}$.

B Inverse et quotient

Définition

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe non nul.
L'**inverse de z** est le nombre complexe z' tel que $zz'=1$ et on le note $\frac{1}{z}$. On a alors :

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}=\frac{\overline{z}}{a^2+b^2}.$$

EXEMPLES

1. $\frac{1}{i}=-i$ **2.** $\frac{1}{1+2i}=\frac{1-2i}{1^2+2^2}=\frac{1-2i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

Définition

Soient $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ deux nombres complexes avec $z'\neq 0$.
Le **quotient de z par z'** est le nombre complexe noté $\frac{z}{z'}$ tel que $\frac{z}{z'}=z\times\frac{1}{z'}$. On a :

$$\frac{z}{z'}=\frac{a+ib}{a'+ib'}=\frac{(a+ib)(a'-ib')}{a'^2+b'^2}=\frac{z\times\overline{z'}}{a'^2+b'^2}.$$

EXEMPLE

$$\frac{1+i}{2i-3}=\frac{1+i}{-3+2i}=\frac{(1+i)(-3-2i)}{(-3)^2+2^2}=\frac{-3+2+i(-2-3)}{13}=\frac{-1-5i}{13}=-\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i$$

Remarque : L'égalité $\frac{1}{i}=-i$ est souvent utilisée pour simplifier des quotients dont le dénominateur est un imaginaire pur.

Remarque : Pour déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe $\frac{z}{z'}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\overline{z'}$.

Application et méthode - 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $(1+2i)z=3+i$ **2.** $(3+i)\overline{z}-2+4i=0$ **3.** $(1+i)z+(3-i)\overline{z}=2-6i$

SOLUTION

1. $(1+2i)z=3+i \Leftrightarrow z=\frac{3+i}{1+2i} \Leftrightarrow z=\frac{(3+i)(1-2i)}{1^2+2^2} \Leftrightarrow z=\frac{5-5i}{5} \Leftrightarrow z=1-i$

2. $(3+i)\overline{z}-2+4i=0 \Leftrightarrow (3+i)\overline{z}=2-4i$

$\Leftrightarrow \overline{z}=\frac{2-4i}{3+i} \Leftrightarrow \overline{z}=\frac{(2-4i)(3-i)}{3^2+1^2}$

$\Leftrightarrow \overline{z}=\frac{6-4+i(-2-12)}{10} \Leftrightarrow \overline{z}=\frac{2-14i}{10}$

$\Leftrightarrow \overline{z}=\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i \Leftrightarrow z=\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$

3. $(1+i)z+(3-i)\overline{z}=2-6i$

On pose $z=a+ib$. On a donc $\overline{z}=a-ib$.

L'équation s'écrit alors :

$(1+i)(a+ib)+(3-i)(a-ib)=2-6i$

$\Leftrightarrow (a-b)+i(b+a)+(3a-b)+i(-3b-a)=2-6i$

$\Leftrightarrow (4a-2b)-2ib=2-6i \Leftrightarrow \begin{cases}4a-2b=2\\ -2b=-6\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases} \Leftrightarrow z=2+3i.$

Pour s'entraîner : exercice **36** p. 35

Méthode

1. Pour les équations où z intervient seul, on se ramène à une équation de la forme $az=b$ avec a et b complexes, puis on calcule $z=\frac{b}{a}$ lorsque $a\neq 0$.

Pour déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe écrit sous la forme d'un quotient, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

2. On procède de même si $\overline{z}$ intervient seul. On utilise ensuite $\overline{\overline{z}}=z$ pour obtenir la solution cherchée.

3. Pour les équations où z et $\overline{z}$ interviennent simultanément, on pose $z=a+ib$ avec a et b réels et on utilise $z=z' \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')\\ \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')\end{cases}$.

C Conjugués et opérations

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z' et pour tout entier relatif n, on a :

1. $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$;
2. $\overline{(zz')}=\overline{z}\times\overline{z'}$;
3. Si $z\neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$;
4. Si $z'\neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$;
5. $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$ (avec $z\neq 0$ si $n<0$).

Remarque : Ces propriétés traduisent la compatibilité de la conjugaison avec les opérations dans $\mathbb{C}$.

DÉMONSTRATION

Soient $z=a+\mathrm{i}b$ et $z'=a'+\mathrm{i}b'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' réels.

1. et 2. : Voir exercice **88** p. 39.

3. Soit $z\neq 0$. Dans ce cas, on a également $\overline{z}\neq 0$.
Par définition des inverses, on a $z\times\frac{1}{z}=1\Leftrightarrow\overline{\left(z\times\frac{1}{z}\right)}=\overline{1}=1$ car 1 est réel.
D'après 2., on obtient $\overline{z}\times\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=1\Leftrightarrow\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$ car $\overline{z}\neq 0$.
D'où l'égalité, pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$.

4. Voir exercice **89** p. 39.

5. Dans un premier temps, on démontre la propriété par récurrence pour n entier naturel. Dans un deuxième temps, on démontre la propriété pour n entier négatif.
Voir exercice **90** p. 39.

EXEMPLES

1. $z_1=\overline{(1-2\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})}=\overline{(1-2\mathrm{i})}\times\overline{(2+3\mathrm{i})}=(1+2\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})=2+6+\mathrm{i}(-3+4)=8+\mathrm{i}$
2. $z_2=\overline{\left(\frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)}=\frac{\overline{\mathrm{i}}}{\overline{1+\mathrm{i}}}=\frac{-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{-\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{1^2+(-1)^2}=\frac{-\mathrm{i}+1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$
3. $z_3=\overline{(\mathrm{i}^3)}=(\overline{\mathrm{i}})^3=(-\mathrm{i})^3=\mathrm{i}$

Application et méthode - 5

Calculer sous forme algébrique le conjugué de $z=\frac{(3+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})^2}$.

SOLUTION

$$\overline{z}=\overline{\left(\frac{(3+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})^2}\right)}=\frac{\overline{(3+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}}{\overline{(1+2\mathrm{i})^2}}$$

$$\overline{z}=\frac{(3-2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})^2}=\frac{3+2+\mathrm{i}(3-2)}{1-4-4\mathrm{i}}=\frac{5+\mathrm{i}}{-3-4\mathrm{i}}$$

$$\overline{z}=\frac{(5+\mathrm{i})(-3+4\mathrm{i})}{(-3)^2+(-4)^2}=\frac{-15-4+\mathrm{i}(20-3)}{25}$$

$$\overline{z}=\frac{-19+17\mathrm{i}}{25}=-\frac{19}{25}+\frac{17}{25}\mathrm{i}$$

Pour s'entraîner : exercices **37** ; **38** et **39** p. 35

Méthode

- On utilise les propriétés de la conjugaison : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $\overline{(zz')}=\overline{z}\times\overline{z'}$; $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$.
- On applique les propriétés de distributivité pour réduire le numérateur et le dénominateur.
- On obtient la forme algébrique de z en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

3 Équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 2

A Résolution des équations du second degré à coefficients réels

Dans cette partie, a, b et c désignent trois nombres réels avec $a \neq 0$ et z est un nombre complexe. On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

Définition

On appelle **discriminant** du trinôme $az^2 + bz + c$ le nombre réel, noté Δ, défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Théorème

Soit (E): $az^2 + bz + c = 0$ une équation du second degré d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Si $\Delta > 0$, alors (E) admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une unique solution réelle : $z_0 = \frac{-b}{2a}$.

3. Si $\Delta < 0$, alors (E) admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Remarque : Si $\Delta < 0$, on calcule la première solution z_1 avec une des deux formules et la deuxième solution z_2 en utilisant $z_2 = \overline{z_1}$.

Remarque : Dans l'exercice 150 p. 47, on explicite une méthode permettant de résoudre l'équation à coefficients complexes $az^2 + bz + c = 0$.

DÉMONSTRATION

Les points **1.** et **2.** ont déjà été démontrés dans $\mathbb{R}$ en classe de première.

3. On écrit le trinôme sous forme canonique :

$a \neq 0$ donc $az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

Comme $\Delta < 0$, alors $-\Delta > 0$ donc $\Delta = -(-\Delta) = \mathrm{i}^2 \times (-\Delta)$.

Alors $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \mathrm{i}^2 \frac{-\Delta}{4a^2} = 0$ (en divisant par $a \neq 0$)

$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right) = 0$ (d'après les identités remarquables)

$\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 0$ ou $z + \frac{b}{2a} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 0$

$\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \mathrm{i}\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ ou $z + \frac{b}{2a} = -\mathrm{i}\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

$\Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ ou $z = -\frac{b}{2a} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ (ces solutions sont conjuguées)

$\Leftrightarrow z = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ ou $z = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

EXEMPLE

Pour résoudre $z^2 - 4z + 5 = 0$, on calcule le discriminant du trinôme $az^2 + bz + c$:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4.$$

Puisque $-4 < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes :

$$z_1 = 2 + \mathrm{i} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 2 - \mathrm{i}.$$

Application et méthode - 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $9z^2-6z+5=0$ **2.** $z=2-\dfrac{2}{z}$

SOLUTION

1. $\Delta=(-6)^2-4\times9\times5=-144<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées.

On a $\Delta=-144$ donc $\sqrt{|\Delta|}=12$. Les solutions sont donc $z_1=\dfrac{-(-6)-12\mathrm{i}}{2\times9}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}\mathrm{i}$ et $z_2=\overline{z_1}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\mathrm{i}$.

2. Pour $z\neq0$, $z=2-\dfrac{2}{z}\Leftrightarrow z^2-2z+2=0$.

$\Delta=(-2)^2-4\times1\times2=-4<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées. On a $\sqrt{|\Delta|}=2$ donc les solutions sont $z_1=\dfrac{-(-2)-2\mathrm{i}}{2}=1-\mathrm{i}$ et $z_2=\overline{z_1}=1+\mathrm{i}$.

Méthode

- On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac$.
- Si $\Delta\geqslant0$, on résout l'équation comme dans $\mathbb{R}$ et si $\Delta<0$, alors on écrit $\Delta=\left(\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}\right)^2$ et on calcule $z_1=\dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2=\overline{z_1}$.
- Il arrive de devoir d'abord se ramener à une équation de la forme $az^2+bz+c=0$.

Pour s'entraîner : exercices **43** et **44** p. 35

B Équations polynomiales à coefficients réels

Définitions

Soit n un entier naturel et soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres réels avec $a_n\neq0$.

On appelle **fonction polynôme de degré n à coefficients réels** (ou plus simplement **polynôme de degré n**), la fonction P définie sur $\mathbb{C}$ par $\mathrm{P}(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz^k$.

L'équation $\mathrm{P}(z)=0$ est appelée **équation polynomiale de degré n**.

Remarque : Un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.

NOTATION

On note $\deg(\mathrm{P})$ le degré du polynôme P.

Propriété 1

Soient z et a deux nombres complexes.

Pour tout entier naturel n non nul, $z^n-a^n=(z-a)\sum\limits_{k=0}^{n-1}z^{n-1-k}a^k$.

Remarque : Lorsque $a_n=1$, on dit que P est unitaire.

DÉMONSTRATION

Soient $a\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On veut montrer que $z^n-a^n=(z-a)\sum\limits_{k=0}^{n-1}z^{n-1-k}a^k$.

On développe : $(z-a)\sum\limits_{k=0}^{n-1}z^{n-1-k}a^k=\sum\limits_{k=0}^{n-1}z^{n-k}a^k-\sum\limits_{k=0}^{n-1}z^{n-1-k}a^{k+1}$.

D'une part, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}z^{n-k}a^k=z^na^0+z^{n-1}a+z^{n-2}a^2+\dots+z^{n-(n-1)}a^{n-1}$
$=z^n+z^{n-1}a+z^{n-2}a^2+\dots+za^{n-1}$ (car $a^0=1$).

D'autre part, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}z^{n-1-k}a^{k+1}=z^{n-1}a+z^{n-2}a^2+\dots+z^{n-1-(n-2)}a^{n-1}+z^{n-1-(n-1)}a^n$
$=z^{n-1}a+z^{n-2}a^2+\dots+za^{n-1}+a^n$ (car $z^0=1$).

Donc, par différence, les termes se simplifient deux à deux sauf le premier et le dernier, ce qui donne bien $(z-a)\sum\limits_{k=0}^{n-1}z^{n-1-k}a^k=z^n-a^n$.

Remarque : La propriété **1.** donne que, pour tout entier naturel n non nul, z^n-a^n se factorise par $z-a$.

Remarque : Une telle opération de simplification de la somme est appelée **télescopage**.

Propriété 2

Soit a un nombre complexe.

Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1.

Si $\mathrm{P}(a)=0$, alors P se factorise par $z-a$. Autrement dit, si $\mathrm{P}(a)=0$, alors il existe un polynôme Q avec $\deg(\mathrm{Q})=\deg(\mathrm{P})-1$ tel que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\mathrm{P}(z)=(z-a)\mathrm{Q}(z)$.

Remarque : Si $\mathrm{P}(a)=0$, alors a est appelé **racine** du polynôme P.

DÉMONSTRATION

On considère un polynôme complexe P de degré $n\geqslant 1$ à coefficients réels.

Il existe alors $n+1$ réels notés α_0 ; … ; α_n avec $\alpha_n\neq 0$ tels que, pour tout nombre complexe z, $\mathrm{P}(z)=\sum_{p=0}^{n}\alpha_p z^p$.

Soit $a\in\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{P}(a)=0$.

Alors, d'après la propriété précédente, pour tout entier naturel non nul p :

$$z^p-a^p=(z-a)\sum_{k=0}^{p-1}z^{p-1-k}a^k.$$

Comme $\mathrm{P}(a)=0$, alors, pour tout nombre complexe z,

$$\mathrm{P}(z)=\mathrm{P}(z)-\mathrm{P}(a)=\sum_{p=0}^{n}\alpha_p z^p-\sum_{p=0}^{n}\alpha_p a^p$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{P}(z)=\sum_{p=1}^{n}\alpha_p(z^p-a^p)=(z-a)\sum_{p=1}^{n}\alpha_p\left(\sum_{k=0}^{p-1}z^{p-1-k}a^k\right)$$

$$=(z-a)\sum_{p=1}^{n}\alpha_p(z^{p-1}+az^{p-2}+\dots+a^{p-2}z+a^{p-1})=(z-a)\mathrm{Q}(z).$$

Puisque α_n est non nul, Q est un polynôme de degré $n-1$, d'où le résultat.

Propriété 3

Pour tout entier naturel n, un polynôme de degré n admet au plus n racines.

DÉMONSTRATION

Pour $n\in\mathbb{N}$, on note R_n la proposition « Un polynôme de degré n admet au plus n racines. » On souhaite démontrer que R_n est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Initialisation : Un polynôme de degré 0 est une constante non nulle.
Ce polynôme n'a donc pas de racine, c'est-à-dire qu'il a au plus 0 racine.
On en déduit que R_0 est vraie.

Hérédité : On considère un entier naturel k quelconque tel que R_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit vérifiant « Un polynôme de degré k admet au plus k racines. » On souhaite démontrer que R_{k+1} est vraie, autrement dit que « Un polynôme de degré $k+1$ admet au plus $k+1$ racines. »

Soit P un polynôme de degré $k+1$.

Si P n'a pas de racine, il en compte alors 0 et $0<k+1$, donc R_{k+1} est vraie.

Si P admet au moins une racine a, alors, d'après la propriété précédente, il se factorise par $z-a$: il existe donc un polynôme Q de degré k tel que, pour tout nombre complexe z, $\mathrm{P}(z)=(z-a)\mathrm{Q}(z)$.

D'après l'hypothèse de récurrence, Q a au plus k racines, ce qui fait que P en a au plus $k+1$.

Ainsi, R_0 est vraie et, pour tout entier naturel k, si R_k est vraie, alors R_{k+1} est vraie aussi. D'après le principe de récurrence, on déduit que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, R_n est vraie. Un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}$ admet donc au plus n racines.

EXEMPLES

1. Pour tout nombre complexe z, on a $z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$.

2. Soit P le polynôme complexe défini par $P(z)=z^3-2z^2+z-2$.
2 est une racine de P donc P se factorise par $z-2$ et on a, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=(z-2)(z^2+1)$. On trouve exactement trois racines pour P : 2, i et $-$i.

Application et méthode - 7

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=2z^3+3z-5$.

1. Montrer que 1 est une racine de P.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=(z-1)(az^2+bz+c)$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

SOLUTION

1. $P(1)=2\times1^3+3\times1-5=2+3-5=0$ donc 1 est bien une racine de P.

2. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=(z-1)(az^2+bz+c)$
$\Leftrightarrow P(z)=az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b-a=0 \\ c-b=3 \\ -c=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=a=2 \\ c=3+b=5 \\ c=5 \end{cases}$$
, donc, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=(z-1)(2z^2+2z+5)$.

3. $P(z)=0 \Leftrightarrow z=1$ ou $2z^2+2z+5=0$.

On calcule le discriminant de $2z^2+2z+5$:

$\Delta=2^2-4\times2\times5=-36$ donc $2z^2+2z+5=0$ admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\frac{-2-6i}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$ et $z_2=\overline{z_1}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$.

Conclusion : $S_{\mathbb{C}}=\left\{1\,;-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\,;-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right\}$.

Pour s'entraîner : exercices **46** et **47** p. 35

Méthode

1. On vérifie que $P(1)=0$.

2. On développe le produit et on identifie terme à terme les coefficients des deux polynômes pour obtenir un système de quatre équations à trois inconnues a, b et c que l'on résout.

3. On utilise la propriété : « Un produit est nul si, et seulement si, au moins l'un de ses facteurs est nul. » et on résout l'équation du second degré en calculant son discriminant $\Delta=b^2-4ac$.

Propriétés (admises)

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $P(z)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k z^k$ un polynôme de degré n à coefficients réels (avec $\alpha_n\neq0$).

Alors :

- la somme de toutes ses racines est égale à $-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$;
- le produit de toutes ses racines est égal à $(-1)^n\frac{\alpha_0}{\alpha_n}$.

Remarque : Ce sont les **formules de Viète**. Elles sont démontrées dans l'exercice **148** p. 46.

Remarque : « Toutes ses racines » signifie que si plusieurs racines sont égales (racines doubles ou triples par exemple), alors il faut toutes les considérer individuellement dans la somme et le produit.

EXEMPLE

Soient $z_1=1+2i$ et $z_2=1-2i$ les racines d'un polynôme unitaire P.
Comme $z_1+z_2=2$ et $z_1z_2=z_1\overline{z_1}=1^2+2^2=5$, alors z_1 et z_2 sont les racines du trinôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^2-2z+5$.

FICHE DE RÉVISION

1 L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres z écrits sous forme algébrique $z = a + \mathrm{i}b$ où a et b sont deux nombres réels et i est un nombre tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. Cela permet de :

- ✔ prolonger les propriétés sur les opérations de $\mathbb{R}$ dans un autre ensemble le contenant (comme par exemple l'associativité, la commutativité et la distributivité) ;
- ✔ déterminer les solutions d'équations insolubles dans $\mathbb{R}$ (comme, par exemple, $x^2 = -4$).

2 Dans la forme algébrique, a est la partie réelle de z et b est sa partie imaginaire. Le conjugué de z est le nombre $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$. Cela permet de :

- ✔ déterminer l'inverse d'un nombre complexe non nul sous forme algébrique ;
- ✔ calculer le quotient de deux nombres complexes sous forme algébrique.

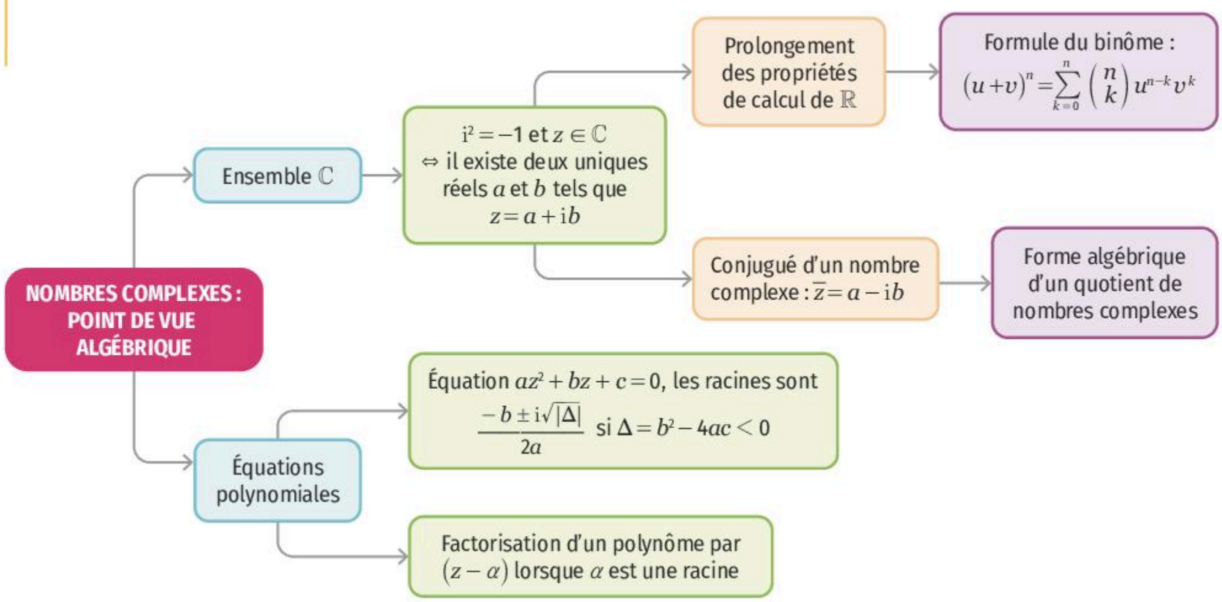
3 Pour tous complexes u et v et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k$ (formule du binôme de Newton). Cela permet de :

- ✔ développer une expression en utilisant les mêmes identités remarquables que dans $\mathbb{R}$ (celles apprises en seconde) ;
- ✔ généraliser les identités remarquables à des degrés supérieurs à 2.

4 Un polynôme P de degré n admet au maximum n racines dans $\mathbb{C}$ et se factorise par $(z - \alpha)$ lorsque α est une racine de P. Cela permet de :

- ✔ factoriser un polynôme dont une racine est connue ;
- ✔ résoudre une équation de degré supérieur ou égal à 3 à l'aide d'une factorisation ;
- ✔ résoudre une équation de degré deux dans un cas particulier : un polynôme $az^2 + bz + c$ (où a, b et c sont des réels tels que $a \neq 0$) admet pour racines $\dfrac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ lorsque $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

CARTE MENTALE



Téléchargez cette fiche de révision au format PDF sur lls.fr/MXPfiche1

QCM réponse unique

9 Soient $z_1 = 2+3i$ et $z_2 = 1-2i$ deux nombres complexes. La forme algébrique de $z_1 z_2$ est :

a $-4-i$. b $8-i$. c $2+6i$. d $8+i$.

10 La partie imaginaire de $\frac{2+3i}{1-2i}$ est égale à :

a $-\frac{3}{2}$. b $-\frac{3}{2}i$. c $\frac{7}{5}i$. d $\frac{7}{5}$.

11 Le conjugué de $(1-i)(1+i)^3$ est :

a $-4i$. b $4i$. c $1-4i$. d $1+4i$.

12 Les racines complexes du polynôme P défini dans $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^2 - 2z + 10$ sont :

a $3-i$ et $3+i$. b $1-3i$ et $1+3i$.

c $2-2i$ et $2+2i$. d $1-3i$ et $3+i$.

QCM réponses multiples

[Une ou plusieurs bonnes réponses par question]

13 L'inverse de i^5 est :

a un réel. b un imaginaire pur.

c égal à i^3. d égal à -1.

14 Le quotient $\frac{1+i}{1-i}$:

a est un réel.

b est un imaginaire pur.

c est égal à i.

d a pour conjugué $-i$.

15 On considère l'équation $(E): z^3 - 1 = 0$.

a (E) admet trois solutions dans $\mathbb{C}$.

b (E) a pour solutions 1, i et $-i$.

c (E) admet une solution réelle et deux solutions complexes conjuguées.

d (E) a pour solutions 1, $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16 Soit P le polynôme défini dans $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 + 3z^2 - 4$. Alors le polynôme P :

a se factorise par $z-1$.

b se factorise par $z+1$.

c se factorise par $z+2i$.

d admet quatre racines réelles.

Problème

17 Soient z_1 et z_2 les nombres complexes définis par $z_1 = 1+i$ et $z_2 = \overline{z_1}$.

1. **a.** Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 \times z_2$.

b. Déterminer le polynôme unitaire P de degré 2 dont les racines sont z_1 et z_2.

2. Soit Q le polynôme de degré 3 défini sur $\mathbb{C}$ par $Q(z) = z^3 - 6z^2 + 10z - 8$.

a. Montrer que Q se factorise par P et déterminer le nombre complexe α tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $Q(z) = (z-\alpha)P(z)$.

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Q(z) = 0$.

Retrouvez plus d'exercices dans notre **cahier d'algo**
LLS.fr/PythonXP

1 Suite de nombres complexes

Soient α et β deux réels non simultanément nuls et soit q le nombre complexe $q = \alpha + \mathrm{i}\beta$.
On définit sur $\mathbb{N}$:

- une suite de nombres complexes (z_n) telle que $z_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = qz_n$;
- les suites de nombres réels (a_n), (b_n) et (u_n) définies, pour tout entier naturel n, par $a_n = \mathrm{Re}(z_n)$, $b_n = \mathrm{Im}(z_n)$ et $u_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

Objectif **Étudier la convergence de la suite (u_n) pour différentes valeurs de q à l'aide d'une des deux méthodes.**

Questions préliminaires :

1. Pour cette question uniquement, on pose $q = \mathrm{i}$.

a. Calculer z_1, z_2, z_3 et z_4, puis en déduire les valeurs de u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4.

b. Conjecturer, pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.

c. Démontrer cette conjecture et en déduire la convergence de la suite (u_n).

2. Répondre aux questions précédentes avec $q = 2\mathrm{i}$.

AIDE
1. c. On pourra démontrer que, pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n$.

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 1 **TABLEUR**

On pose $q = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

1. Exprimer, pour tout entier naturel n, z_{n+1} en fontion de z_n, puis a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.

2. À l'aide d'une feuille de calcul, on souhaite créer un tableau donnant les valeurs de a_n, b_n et u_n pour n variant de 0 à 30.

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	u_n
2	0	1	0	
3	1			
4	2			
5	3			

a. Quelles formules doit-on entrer dans les cellules **B3** et **C3** pour obtenir les valeurs de a_n et b_n pour $1 \leqslant n \leqslant 30$ par recopie vers le bas ?

b. Quelle formule doit-on entrer dans la cellule **D2** pour obtenir les valeurs de u_n pour $0 \leqslant n \leqslant 30$ par recopie vers le bas ?

c. Quelle conjecture peut-on faire pour la limite de la suite (u_n) ?

3. Que se passe-t-il lorsque $q = 2 + 2\mathrm{i}$?

LABO PYTHON

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 2 **PYTHON**

On pose $q = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

1. Créer les nombres complexes i et q sur Python avec le code suivant en conjecturant le fonctionnement de la commande **complex**.

```
from math import sqrt

i = complex(0, 1)
q = complex(-1/2, -1/2)
```

2. On considère la fonction **z** d'arguments **n** et **q** ci-dessous. Que permet-elle de calculer ?

```
def z(n, q):
    if n >= 1:
        return(q*z(n-1, q))
    return(1)
```

3. Les commandes **z.real** et **z.imag** permettent d'obtenir respectivement les parties réelle et imaginaire du complexe z.
Écrire une fonction **U** prenant en argument **n** et **q** et renvoyant la valeur de u_n (penser à charger le module **math** pour le calcul d'une racine carrée).

4. À l'aide d'une boucle, afficher les valeurs de u_n pour l'entier n compris entre 1 et 30. Que peut-on conjecturer à propos de la suite (u_n) ?

5. Que se passe-t-il lorsque $q = 2 + 2\mathrm{i}$?

2 Racines carrées d'un nombre complexe

Soient a et b deux nombres réels non simultanément nuls et α le nombre complexe défini par $\alpha = a + \mathrm{i}b$.
On appelle (E) l'équation $z^2 = \alpha$ d'inconnue z dans $\mathbb{C}$.

Objectif **À l'aide d'une des deux méthodes, déterminer sous forme algébrique les solutions de l'équation (E) appelées racines carrées du nombre complexe α.**

Questions préliminaires :

1. Montrer que si z est solution de l'équation (E), alors $-z$ l'est également.

2. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -9$.

b. Démontrer que tout nombre réel strictement négatif α admet exactement deux racines carrées imaginaires pures dans $\mathbb{C}$ que l'on exprimera en fonction de α.

3. Plus généralement, on pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.

a. Calculer z^2 sous forme algébrique puis traduire l'équation (E) en un système de deux équations à deux inconnues (x et y).

b. Calculer $(z \times \overline{z})^2$ en fonction de α et $\overline{\alpha}$, puis en déduire que $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$.

c. À l'aide des résultats obtenus aux questions **3. a.** et **3. b.**, exprimer x^2 et y^2 en fonction de a et b.

d. Que peut-on dire des signes de x et y si $b > 0$? Et si $b < 0$?

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 1 **GEOGEBRA**

1. a. Avec le logiciel GeoGebra, créer deux curseurs a et b dans $[-10 ; 10]$ avec un incrément de 1.

b. Tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{b}{2x}$.

c. Tracer les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $x = \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$ et $x = -\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$.

AIDE
Dans GeoGebra, la racine carrée se note **sqrt**.

2. À l'aide des curseurs, de la courbe représentative de f et des droites d_1 et d_2, conjecturer graphiquement les racines carrées des nombres complexes $3 - 4\mathrm{i}$ et $-3 - 4\mathrm{i}$.

AIDE
On détermine d'abord les deux valeurs de x possibles puis on en déduit les valeurs de y correspondantes.

3. Démontrer ces conjectures à l'aide des formules établies dans les questions préliminaires.

LABO PYTHON

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 2 **PYTHON**

On souhaite écrire un programme sous Python qui détermine les deux racines carrées du nombre complexe $a + \mathrm{i}b$. On note $z = x + \mathrm{i}y$ une racine carrée de ce nombre.

1. Compléter la fonction **RacineCarree** d'arguments **a** et **b** qui permet de déterminer x et y en fonction de a et b d'après les formules établies dans les questions préliminaires. On peut ajouter des lignes au programme.

```python
from math import *

def RacineCarree(a, b):
    Z = complex(a, b)
    X = ...
    x1 = sqrt(X)
    ...
```

2. a. Utiliser ce programme pour afficher les deux racines carrées du nombre complexe $3 - 4\mathrm{i}$.

b. Quelles sont les solutions de l'équation $z^2 = -3 - 4\mathrm{i}$?

Remarque : Python utilise la lettre j pour désigner le nombre complexe i comme, par exemple, dans l'affichage ci-contre.

```python
Z = complex(3, -4)
print(Z)
```

```
(3-4j)
```

À L'ORAL

18 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes suivants.

1. $a = 3 + 2\mathrm{i}$ **2.** $b = -2\mathrm{i} + 4$

3. $c = \dfrac{3 + 5\mathrm{i}}{2}$ **4.** $d = \dfrac{2\mathrm{i} - 1}{\sqrt{2}}$

5. $e = 4\mathrm{i}$ **6.** $f = 0$

7. $g = \mathrm{i}^2$ **8.** $h = \mathrm{i}^7$

19 On considère un réel a et le nombre complexe $z = a^2 + 1 + 2\mathrm{i}(a^2 - 3)$.

1. Déterminer les éventuelles valeurs de a pour lesquelles z est un réel.

2. Déterminer les éventuelles valeurs de a pour lesquelles z est un imaginaire pur.

20 Déterminer mentalement les formes algébriques des nombres suivants.

1. $Z_1 = (2 + 4\mathrm{i})^2$

2. $Z_2 = (3 - 2\mathrm{i})^2$

3. $Z_3 = (1 + \mathrm{i})^3$

21 Déterminer les conjugués des nombres suivants.

1. $A = 3 + 2\mathrm{i}$ **2.** $B = \mathrm{i}$

3. $C = 3\mathrm{i} - 4$ **4.** $D = -5 - 6\mathrm{i}$

22 VRAI / FAUX L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
« Pour tous nombres complexes a et b, le conjugué de $(a + \mathrm{i}b)^2$ est $a^2 + b^2 - 2\mathrm{i}ab$. »

23 On considère les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} \text{ et } z_2 = \frac{1 - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}.$$

Sans effectuer le calcul, justifier que $z_1 + z_2$ est un nombre réel.

24 Résoudre mentalement dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 4z + 5 = 0.$$

25 On considère la fonction polynôme P définie, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par $P(z) = z^3 - 12z^2 + 37z - 40$.
On admet qu'il existe un réel k tel que :

$$P(z) = (z - k)(z^2 - 4z + 5).$$

En déduire une racine réelle de P.

Forme algébrique

Pour les exercices 26 à 30

Déterminer les formes algébriques des nombres complexes donnés.

26 **1.** $a = 2 + 2\mathrm{i} - 3\mathrm{i} - 3$ **2.** $b = 1 + \mathrm{i} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{i}\right)$

3. $c = -2 + 3\mathrm{i} - (3 - 3\mathrm{i})$ **4.** $d = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i} - \left(-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)$

27 **1.** $a = -(1 + \mathrm{i}) + 2\mathrm{i}\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\right)$

2. $b = 2\mathrm{i}(1 - \mathrm{i}) - 3\mathrm{i}(1 + \mathrm{i})$

3. $c = -\sqrt{2}(\sqrt{2} - 2\mathrm{i}\sqrt{2}) - \sqrt{3}(\mathrm{i}\sqrt{3} - 2\sqrt{3})$

4. $d = \mathrm{i}\sqrt{2}(2\sqrt{2} - \mathrm{i}) + 2\mathrm{i}\sqrt{3}(\mathrm{i} - \sqrt{3})$

28 **1.** $a = (2 + \mathrm{i})(1 + 3\mathrm{i})$ **2.** $b = \left(\frac{3}{2} - 2\mathrm{i}\right)\left(2 + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)$

3. $c = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)(1 + 2\mathrm{i})$ **4.** $d = \left(-\frac{2}{3} - \mathrm{i}\right)(3 - 4\mathrm{i})$

29 **1.** $a = (3 + 5\mathrm{i})^2$ **2.** $b = \left(3\mathrm{i} - \frac{1}{3}\right)^2$

3. $c = (2 + 3\mathrm{i})(2 - 3\mathrm{i})$ **4.** $d = (\mathrm{i}\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{3})$

30 **1.** $a = (2 + \mathrm{i})^3$ **2.** $b = (1 - 2\mathrm{i})^4$

3. $c = (1 - \mathrm{i})^5$ **4.** $d = (1 + \mathrm{i})^5$

31 Soient a et b deux réels et z_1 et z_2 deux nombres complexes définis par $z_1 = a^2 + a + \mathrm{i}(b^2 + 1)$ et $z_2 = 3a^2 - 3 + 2\mathrm{i}b$.
Déterminer les éventuelles valeurs de a et b telles que z_1 et z_2 soient égaux.

32 Soient x un réel et deux nombres complexes z_1 et z_2 définis par $z_1 = 3x - 3 + \mathrm{i}(x^2 + 1)$ et $z_2 = x^2 - x + \mathrm{i}(x^2 - 1)$.

1. Déterminer les éventuelles valeurs de x telles que $z_1 + z_2$ soit un imaginaire pur.

2. Déterminer les éventuelles valeurs de x telles que $z_1 + z_2$ soit un réel.

Résolution d'équations

Pour les exercices 33 et 34

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes d'inconnue z.
On écrira les solutions sous forme algébrique.

33 **1.** $3z - 2\mathrm{i} + 4 = \mathrm{i} - 2z$ **2.** $3\mathrm{i} - 2z + 1 = \mathrm{i}(\mathrm{i}z + 4) - 2$

3. $3(z + \mathrm{i}) - 2z = \mathrm{i} + z$ **4.** $(1 + 5\mathrm{i})\overline{z} - 2 = 2 + \mathrm{i}\overline{z} + \overline{z}$

34 **1.** $2z-3i\overline{z}=-5-i$
2. $iz+\overline{z}-3=7-\overline{z}+5i$
3. $2z-i\overline{z}=i(3+z)+\overline{z}$
4. $2i(z+1)+3\overline{z}+1=3z-i\left(\overline{z}+\frac{5}{2}\right)$

Inverse et quotient

35 Écrire les nombres suivants sous forme algébrique.

1. $a=\dfrac{1}{3+2i}$ **2.** $b=\dfrac{4}{-2-i}$
3. $c=\dfrac{1+i}{1+i}$ **4.** $d=\dfrac{6+4i}{-5-3i}$

36 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

1. $3z-i=iz-2$ **2.** $2(1+z)-i=(1+i)z$
3. $(1+i)z-2=2-iz$ **4.** $z(1+2i)+3=3(iz-1)$

Opérations et conjugués

Pour les exercices 37 à 39
Écrire le conjugué de z sous forme algébrique.

37 **1.** $z=i(2+2i)-3i(1+2i)$
2. $z=-2i(1+i)+\frac{3}{2}i(2-4i)$
3. $z=(2+i)(1+3i)$
4. $z=(2i-3)(3+i)$

38 **1.** $z=(1+i)^2$ **2.** $z=(2+i)^3$
3. $z=(1-i)^4$ **4.** $z=(3+2i)^3$

39 **1.** $z=\dfrac{1}{i}$ **2.** $z=\dfrac{1}{1+i}$
3. $z=\dfrac{2+i}{1-2i}$ **4.** $z=\dfrac{1-i}{2i-1}$
5. $z=\dfrac{3+2i}{2i-3}$ **6.** $z=\dfrac{-1-i}{2+i}$

Pour les exercices 40 à 42
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

40 VRAI / FAUX « Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\overline{2+iz}=2-iz$. »

41 VRAI / FAUX « $\dfrac{2+i}{3-i}-\dfrac{2-i}{3-i}$ est un imaginaire pur. »

42 VRAI / FAUX « Pour tout entier naturel n, $(4+2i)^n+(4-2i)^n$ est un réel. »

Équations polynomiales

Pour les exercices 43 et 44
Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes. On écrira les solutions éventuelles sous forme algébrique.

43 **1.** $z^2-2z+5=0$ **2.** $z^2-4z+13=0$
3. $4z^2+4z+5=0$ **4.** $2z^2+6z+5=0$

44 **1.** $z^2+z=3z-3$ **2.** $(z+1)^2-2z=0$
3. $z+6=-\dfrac{13}{z}$ **4.** $z=1-\dfrac{1}{z}$

45 Après avoir écrit chacune des expressions sous la forme z^n-a^n avec $a\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, factoriser ces expressions le plus possible.

1. z^3-1 **2.** z^3+27 **3.** z^4-16 **4.** z^5-i

46 Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^4+z^3+2z^2+z+1$.
Peut-on factoriser P par $(z-i)$? Justifier.

Pour les exercices 47 à 50
Montrer que le nombre a est une racine du polynôme P, puis factoriser P en produit de polynômes de degré 1.

47 $P(z)=z^3+4z^2+6z+4$ et $a=-2$.

48 $P(z)=2z^3-14z^2+38z-26$ et $a=1$.

49 $P(z)=z^4-2z^3+z^2+2z-2$ et $a=-1$.

50 $P(z)=z^4-z^3-5z^2-z-6$ et $a=i$.

AIDE
Montrer que $-i$ est une racine du polynôme de degré 3 obtenu après la première factorisation.

51 Dans chacun des cas suivants, déterminer deux nombres complexes z_1 et z_2 sachant que leur somme est égale à S et que leur produit est égal à P.

1. $S=0$; $P=9$ **2.** $S=25$; $P=26$
3. $S=1$; $P=\dfrac{13}{2}$ **4.** $S=2\sqrt{2}$; $P=3$
5. $S=\dfrac{5}{3}$; $P=-\dfrac{2}{3}$ **6.** $S=0$; $P=1$

DIFFÉRENCIATION

Parcours 1 : exercices 55 ; 59 ; 79 ; 84 ; 94 ; 111 ; 116 et 120
Parcours 2 : exercices 57 ; 60 ; 67 ; 85 ; 96 ; 112 et 122
Parcours 3 : exercices 65 ; 102 ; 124 ; 127 et 130

1 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

Exercices FLASH

52 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres suivants.

1. $z_1 = 2$ 2. $z_2 = -3\text{i}$ 3. $z_3 = \text{i} - 3$
4. $z_4 = z_1 + z_3$ 5. $z_5 = z_2 \times z_3$

53 Dans chacun des cas suivants, déterminer les réels a et b vérifiant l'égalité.

1. $a + 3\text{i} = 2 + \text{i}(1 - b)$
2. $2 + a + \text{i}(b^2 + b) = \text{i}(2b - \text{i}a^2) + 3a + 3$

54 Écrire chacun des nombres suivants sous forme algébrique.

1. $z_1 = (3 - 2\text{i}) - (3 + 2\text{i})$ 2. $z_2 = 2(1 + \text{i}) + \text{i}(2\text{i} - 1)$
3. $z_3 = (1 + \text{i})(3 + 2\text{i})$ 4. $z_4 = (1 - \text{i})^3$
5. $z_5 = (1 - \text{i})^5$

Pour les exercices 55 à 60

Écrire les nombres complexes sous forme algébrique.

55 [Calculer.]

1. $z = (3 - 5\text{i}) + (3\text{i} - 2)$ 2. $z = (2\text{i} - 3) + (-1 - 2\text{i})$
3. $z = -\left(1 - \frac{3}{2}\text{i}\right) + \left(\frac{1}{2}\text{i} + 2\right)$ 4. $z = \left(3 - \frac{2}{3}\text{i}\right) - \left(2 + \frac{1}{3}\text{i}\right)$

56 [Calculer.]

1. $z = (-3 + 2\text{i}) + (2 - 5\text{i})$ 2. $z = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{i}\right) + (-2 - \text{i})$
3. $z = -\left(2 - \frac{1}{4}\text{i}\right) + \left(\frac{1}{3}\text{i} - 1\right)$ 4. $z = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\text{i}\right) - \left(\frac{2}{3}\text{i} - \frac{1}{4}\right)$

57 [Calculer.]

1. $z = (3 - \text{i}\sqrt{3}) + (2\text{i}\sqrt{3} - 5)$
2. $z = (2\sqrt{2} + 2\text{i}\sqrt{3}) - (3\text{i}\sqrt{3} - \sqrt{2})$
3. $z = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\text{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (\sqrt{3} - \text{i}\sqrt{2})$
4. $z = \left(2\sqrt{3} - \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\text{i}\sqrt{2}\right)$
5. $z = \left(\text{i}\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\text{i}\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

58 [Calculer.]

1. $z = 2(1 - 3\text{i}) - 3(1 - 2\text{i})$ 2. $z = -2(1 + \text{i}) + 3(2 - \text{i})$
3. $z = \frac{1}{2}(3 - \text{i}) - \frac{\text{i}}{3}(1 + \text{i})$ 4. $z = -\frac{3\text{i}}{2}(1 - \text{i}) - 2\text{i}\left(\frac{1}{2} - \text{i}\right)$

59 [Calculer.]

1. $z = (3 + \text{i})(1 + 4\text{i})$ 2. $z = (2 + 3\text{i})(2\text{i} - 1)$
3. $z = (5 - \text{i})(2 - 2\text{i})$ 4. $z = \left(\frac{3}{2}\text{i} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\text{i} - \frac{2}{3}\right)$

60 [Calculer.]

1. $z = (3 + \text{i}\sqrt{3})(2\text{i}\sqrt{3} + 5)$
2. $z = (2\sqrt{2} + \text{i}\sqrt{3})(3\text{i}\sqrt{3} - \sqrt{2})$
3. $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
4. $z = \left(2\sqrt{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} - \text{i}\sqrt{2})$
5. $z = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

61 [Raisonner.]

1. Déterminer la forme algébrique des puissances suivantes du nombre i :

$$a = \text{i}^2 \,;\, b = \text{i}^3 \,;\, c = \text{i}^4 \,;\, d = \text{i}^5.$$

2. Soit k un entier naturel. Calculer sous forme algébrique les puissances entières du nombre i :

$$a' = \text{i}^{4k} \,;\, b' = \text{i}^{4k+1} \,;\, c' = \text{i}^{4k+2} \,;\, d' = \text{i}^{4k+3}.$$

62 [Calculer.]

1. a. Calculer le nombre complexe z_1 défini par :

$$z_1 = 1 + \text{i} + \text{i}^2 + \text{i}^3.$$

b. En déduire le calcul de $z_2 = \text{i}^{2020} + \text{i}^{2021} + \text{i}^{2022} + \text{i}^{2023}$.

2. De manière plus générale, calculer, pour tout entier naturel n, $z = \text{i}^n + \text{i}^{n+1} + \text{i}^{n+2} + \text{i}^{n+3}$.

Pour les exercices 63 à 67

Écrire les nombres complexes sous forme algébrique.

63 [Calculer.]

1. $z = (2 + 3\text{i})^2$ 2. $z = (1 - \text{i}\sqrt{2})^2$
3. $z = \left(\frac{1}{2}\text{i} - 1\right)^2$ 4. $z = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\text{i}\right)^2$

64 [Calculer.]

1. $z = \left(\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ 2. $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$
3. $z = (2\sqrt{3} - \text{i}\sqrt{2})^2$

65 [Calculer.]

1. $z=\left(3+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(3-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$

2. $z=\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\mathrm{i}\right)$

3. $z=\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4. $z=\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$

5. $z=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

6. $z=\left(\mathrm{i}\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

66 [Calculer.]

1. $z=(1-\mathrm{i})^3$ **2.** $z=\left(\frac{1}{3}-\mathrm{i}\right)^3$

3. $z=(1+2\mathrm{i})^4$ **4.** $z=(\sqrt{2}-\mathrm{i})^4$

67 [Calculer.]

1. $z=(1+\mathrm{i})^5$ **2.** $z=(1-2\mathrm{i})^5$ **3.** $z=(1+\mathrm{i})^5(1-\mathrm{i})^5$

4. $z=(2+\mathrm{i})^5$ **5.** $z=(2-2\mathrm{i})^5$ **6.** $z=(2+\mathrm{i})^5(2-\mathrm{i})^5$

68 [Raisonner.] DÉMO

Soient u et v deux nombres complexes.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note R_n la proposition :

$$(u+v)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u^{n-p}v^p.$$

On souhaite démontrer par récurrence que la proposition R_n est vraie pour tout entier naturel n.

1. Vérifier que R_0 est vraie.

2. Soit k un entier naturel tel que R_k est vraie, c'est-à-dire tel que $(u+v)^k=\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}u^{k-p}v^p$.

On souhaite montrer que R_{k+1} est vraie, autrement dit que $(u+v)^{k+1}=\sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p}u^{k+1-p}v^p$.

a. Montrer que :

$$(u+v)^{k+1}=u\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}u^{k-p}v^p+v\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}u^{k-p}v^p.$$

b. En déduire que :

$$(u+v)^{k+1}=\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}u^{k+1-p}v^p+\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}u^{k-p}v^{p+1}.$$

c. Remplacer p par $p-1$ dans la deuxième somme en remarquant que si $p-1$ varie de 0 à k, alors p varie de 1 à $k+1$. En déduire que :

$$(u+v)^{k+1}=\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}u^{k+1-p}v^p+\sum_{p=1}^{k+1}\binom{k}{p-1}u^{k+1-p}v^p.$$

d. Sachant que $\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}$, que $\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0}$ et que $\binom{k+1}{p}=\binom{k}{p}+\binom{k}{p-1}$, en déduire que :

$$(u+v)^{k+1}=\sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p}u^{k+1-p}v^p.$$

3. Conclure.

69 ALGO [Calculer.]

Soient $z_1=a_1+\mathrm{i}b_1$ et $z_2=a_2+\mathrm{i}b_2$ des nombres complexes où a_1, b_1, a_2 et b_2 désignent des réels.
Écrire un algorithme qui calcule la partie réelle et la partie imaginaire de la somme z_1+z_2 lorsque l'utilisateur saisit la partie réelle et la partie imaginaire de z_1 et de z_2.

70 ALGO [Calculer.]

Soient $z_1=a_1+\mathrm{i}b_1$ et $z_2=a_2+\mathrm{i}b_2$ deux nombres complexes où a_1, b_1, a_2 et b_2 désignent des réels.
Écrire un algorithme qui calcule la partie réelle et la partie imaginaire du produit $z_1\times z_2$ lorsque l'utilisateur saisit la partie réelle et la partie imaginaire de z_1 et de z_2.

Pour les exercices 71 à 73

Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

71 VRAI / FAUX [Calculer.]

1. « i^2 est positif. »

2. « Le produit de $1+\mathrm{i}$ par $3+3\mathrm{i}$ est égal à $6\mathrm{i}$. »

3. « Le nombre complexe $z=(2\mathrm{i}-1)^2+2(2\mathrm{i}-1)+5$ est égal à 0. »

4. « Le nombre complexe $z=(2-\mathrm{i}\sqrt{3})^2+4(2-\mathrm{i}\sqrt{3})+7$ est égal à 0. »

72 VRAI / FAUX [Raisonner.]

1. « La partie réelle du nombre complexe $z=(2-\mathrm{i})+3\mathrm{i}(\mathrm{i}-2)$ est égale à -1. »

2. « Les nombres complexes $z_1=(2-\mathrm{i})+3\mathrm{i}(\mathrm{i}-2)$ et $z_2=(-2+\mathrm{i})-3\mathrm{i}(-2-\mathrm{i})$ ont des parties imaginaires opposées. »

3. « Les nombres complexes $z_1=(2+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$ et $z_2=(\mathrm{i}-2)(\mathrm{i}+3)$ ont la même partie réelle. »

4. « Le nombre complexe $z=(2+\mathrm{i})^2$ est un réel. »

73 VRAI / FAUX [Raisonner.]

1. « Soient a et b deux réels. Les nombres complexes $z_1=a(a-1)+\mathrm{i}(b^2+1)$ et $z_2=a-1+2\mathrm{i}b$ sont opposés pour un unique couple $(a\,;b)$. »

2. « Quel que soit le réel b, le nombre complexe $z=(2+\mathrm{i}b)(2b+\mathrm{i})$ a une partie imaginaire non nulle. »

3. « Soient a et b deux réels. Les nombres complexes $z_1=(4a^2-a-1)+\mathrm{i}b(b-1)$ et $z_2=3a-2+\mathrm{i}(b-1)$ sont égaux pour un unique couple $(a\,;b)$. »

4. « Il n'existe pas de valeur du réel a pour laquelle le nombre complexe $z=(a+\mathrm{i})^3$ est un nombre réel. »

74 [Calculer.]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes (on écrira les solutions sous forme algébrique).

1. $8z+5i=3-z+2i$
2. $2i+3z=i(4-iz)$
3. $3z+2i=2i(iz-1)+1$
4. $(1+i)z-i=(2i+1)(1+iz)+2$

75 [Calculer.]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacun des systèmes de deux équations à deux inconnues suivants (on écrira les solutions sous forme algébrique).

1. $\begin{cases} z_1+2z_2=2-4i \\ 2z_1-z_2=-1+7i \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3z_1+2z_2=-4+11i \\ 5z_1-z_2=-\frac{9}{2}+14i \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3z_1+2z_2=\frac{3}{2} \\ 2z_1+z_2=1-\frac{1}{2}i \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2z_1+3z_2=3-i \\ 3z_1+5z_2=5-i \end{cases}$

2 Nombres complexes conjugués

Exercices FLASH

76 Écrire sous forme algébrique le conjugué de chacun des nombres suivants.

1. $z_1=-2$
2. $z_2=-\frac{3i}{4}$
3. $z_3=i-2$
4. $z_4=z_1+z_2$
5. $z_5=z_2\times z_3$
6. $z_6=z_2(z_3+z_4)$

77 Calculer chacun des nombres suivants et les écrire sous forme algébrique.

1. $z_1=\overline{10-(2+3i)}$
2. $z_2=\overline{(2-3i)(i+2)}$
3. $z_3=\overline{\left(\frac{1}{2i+4}\right)}$
4. $z_4=\overline{\left(\frac{i+3}{1-4i}\right)}$

78 VRAI/FAUX Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :

« La solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $-\frac{1}{\overline{z}}=3+2i$ est $-\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$. »

79 [Calculer.]

Écrire sous forme algébrique chacun des nombres proposés.

1. $a=\overline{0}$
2. $b=\overline{i}$
3. $c=\overline{-i}$
4. $d=\overline{1+i}$
5. $e=\overline{1-i}$
6. $f=\overline{3+2i}$
7. $g=\overline{\frac{1}{2}-2i}$
8. $h=\overline{\frac{\sqrt{2}}{2}+2i\sqrt{2}}$

Pour les exercices 80 à 83

Écrire sous forme algébrique le nombre complexe donné puis déterminer la forme algébrique de son conjugué.

80 [Calculer.]

1. $a=3(1+i)-2i(1-2i)$
2. $b=\sqrt{2}(1-i)+2\sqrt{2}i(1+i)$
3. $c=\frac{3}{2}i\left(1+\frac{1}{2}i\right)-\frac{1}{2}(2i+1)$
4. $d=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)-i\frac{\sqrt{2}}{2}(2+i)$

81 [Calculer.]

1. $a=(1+i)(2-3i)$
2. $b=(-1-i)(3-2i)$
3. $c=(\sqrt{2}+i\sqrt{3})(-2\sqrt{2}+3i\sqrt{3})$
4. $d=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

82 [Calculer.]

1. $a=(1+i)^2$
2. $b=(1-i)^2$
3. $c=(1+i)(1-i)$
4. $d=(\sqrt{2}-i\sqrt{3})(i\sqrt{3}+\sqrt{2})$

83 [Calculer.]

1. $a=(2-i)^3$
2. $b=(\sqrt{2}+2i)^4$
3. $c=\left(2i-\frac{1}{2}\right)^4$

Pour les exercices 84 à 87

Écrire sous forme algébrique chacun des nombres proposés.

84 [Calculer.]

1. $a=\frac{1}{3i}$
2. $b=\frac{1}{2+i}$
3. $c=\frac{1}{2i-3}$
4. $d=\frac{1}{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}$

85 [Calculer.]

1. $a=\frac{1}{3i-\sqrt{3}}$
2. $b=\frac{1}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$
3. $c=\frac{1}{2\sqrt{2}-i}$
4. $d=\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}$

86 [Calculer.]

1. $a=\frac{3i}{2+i}$
2. $b=\frac{1+i}{2i}$
3. $c=\frac{1+2i}{2-3i}$
4. $d=\frac{2-3i}{3-2i}$

87 [Calculer.]

1. $a=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{3}}{2+i}$
2. $b=\frac{2i-\sqrt{2}}{3+i}$
3. $c=\frac{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-1+i}$
4. $d=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$

88 [Raisonner.] DÉMO

Soient a, b, c et d quatre nombres réels et z et z' les nombres complexes définis par $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$.

1. Montrer que $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

2. a. Écrire le produit $z \times z'$ sous forme algébrique.

b. En déduire que $\overline{(z \times z')} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

89 [Raisonner.] DÉMO

Soient z et z' deux nombres complexes avec z' non nul.

Démontrer que $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

90 [Raisonner.] DÉMO

Soit z un nombre complexe.

1. Pour tout entier naturel n, on appelle P_n la proposition « $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ ».

Démontrer, par récurrence, que la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n.

2. On suppose $z \neq 0$ et on note n un entier strictement négatif.

a. Exprimer z^{-n} en fonction de z^n.

b. À l'aide de la question **1.**, justifier que $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

3. Conclure.

91 ALGO [Calculer.]

Écrire un algorithme qui calcule la partie réelle et la partie imaginaire du conjugué $\overline{z}$ de z lorsque l'utilisateur saisit la partie réelle et la partie imaginaire de z.

92 ALGO [Calculer.]

Écrire un algorithme qui prend en arguments la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe z et qui retourne :

- « 0 n'a pas d'inverse » si z est égal à 0 ;
- la partie réelle et la partie imaginaire de son inverse $\frac{1}{z}$ sinon.

93 ALGO [Calculer.]

1. Écrire un algorithme qui prend en arguments les parties réelle et imaginaire de deux nombres complexes z_1 et z_2 et qui retourne :

- « le quotient n'existe pas » si z_2 est égal à 0 ;
- la partie réelle et la partie imaginaire de $\frac{z_1}{z_2}$ sinon.

2. Implémenter cet algorithme et le tester pour $z = \frac{3 - \mathrm{i}}{4 + 2\mathrm{i}}$.

Pour les exercices 94 à 97

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations proposées. On écrira les solutions sous forme algébrique.

94 [Calculer.]

1. $\mathrm{i}z + 3(z - \mathrm{i}) = 0$

2. $(4 + \mathrm{i})z = 4 - z$

3. $(2\mathrm{i} + 1)z = 1 + \mathrm{i} - 2\mathrm{i}z$

4. $\frac{z + 1}{z - 2} = 3\mathrm{i}$

95 [Calculer.]

1. $(5 + 2\mathrm{i})\overline{z} - 2 = \mathrm{i}$

2. $2\mathrm{i}(1 - 2\overline{z}) + \overline{z} = \mathrm{i}\overline{z} - 1$

3. $2\mathrm{i}\overline{z} - \mathrm{i} = 2(\overline{z} - 5) + \mathrm{i}$

4. $\frac{\overline{z} - 2\mathrm{i}}{\overline{z} - 1} + 1 + \mathrm{i} = 0$

96 [Calculer.]

1. $z = \frac{\overline{z}}{2}$

2. $z - 2 = 3\mathrm{i} + 2\overline{z}$

3. $\frac{z}{\mathrm{i} - 1} - \mathrm{i}\overline{z} = \frac{1}{\mathrm{i} + 1}$

4. $z \times \overline{z} = 2z - 1$

5. $\overline{z} - 1 = z \times \overline{z} - \mathrm{i}$

97 [Raisonner, Calculer.]

1. $z = \overline{z}$

2. $z = -\overline{z}$

3. $z = \mathrm{i}\overline{z}$

4. $z = -\mathrm{i}\overline{z}$

5. $z^2 = z \times \overline{z}$

98 [Calculer.]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacun des systèmes de deux équations à deux inconnues suivants.

AIDE

On commencera par écrire le système uniquement en fonction de z_1 et z_2 et sans conjugué.

1. $\begin{cases} \frac{1}{2}z_1 + z_2 = 2 \\ \frac{1}{2}\overline{z_1} + \mathrm{i} \times \overline{z_2} = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3z_1 - 2z_2 = 4\mathrm{i} - 2 \\ \overline{z_1} + 2\overline{z_2} = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} z_1 - z_2 = 3 - 4\mathrm{i} \\ \overline{z_1} + 2\overline{z_2} = 8 - \mathrm{i} \end{cases}$

4. $\begin{cases} 6z_1 - 3z_2 = 12 + \mathrm{i} \\ 3\overline{z_1} - \overline{z_2} = 6 \end{cases}$

Pour les exercices 99 à 101

Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

99 VRAI/FAUX [Calculer.]

Soient $z_1 = 1 - 3\mathrm{i}$ et $z_2 = 2\mathrm{i} + 3$.

1. « Le conjugué de la somme $z_1 + z_2$ est égal à $4 + \mathrm{i}$. »

2. « Le conjugué du produit $z_1 \times z_2$ est égal à $9 - 7\mathrm{i}$. »

3. « Le conjugué de $(z_1)^3$ est égal à $-26 - 18\mathrm{i}$. »

4. « Le conjugué de $(z_1 \times \overline{z_2})^2$ est égal à $112 - 66\mathrm{i}$. »

100 VRAI/FAUX [Raisonner.]

1. « $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$ est l'inverse de $1+\mathrm{i}$. »
2. « Les nombres complexes $\frac{1}{1+\mathrm{i}}$ et $\frac{1}{1-\mathrm{i}}$ ont la même partie réelle. »
3. « $\frac{4+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ est le conjugué de $1-3\mathrm{i}$. »
4. « $(1+\mathrm{i})^3$ est le conjugué de $\frac{4}{1+\mathrm{i}}$. »
5. « Le conjugué de $(1+2\mathrm{i})(2\mathrm{i}+3)$ est $(1-2\mathrm{i})(2\mathrm{i}-3)$. »
6. « Soient $z_1=\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ et $z_2=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$. Alors $z_1+z_2\in\mathbb{R}$ et $z_1-z_2\in\mathrm{i}\mathbb{R}$. »

101 VRAI/FAUX [Raisonner.]

1. « Le nombre complexe $-2-\frac{1}{2}\mathrm{i}$ est le conjugué de la solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\mathrm{i}z-3+\mathrm{i}=(2+\mathrm{i})z+1$. »
2. « Le nombre complexe $-1-3\mathrm{i}$ est solution de l'équation $2\mathrm{i}\times\overline{z}=5(1-\mathrm{i})-\overline{z}$. »
3. « L'équation $2z-\mathrm{i}\times\overline{z}=3+\mathrm{i}+2\overline{z}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$. »
4. « Les nombres complexes z_1 et z_2 vérifiant $\begin{cases}2z_1-z_2=1+3\mathrm{i}\\ \overline{z_1}+2\overline{z_2}=3+\mathrm{i}\end{cases}$ sont conjugués. »

102 DEVOIR MAISON [Raisonner.]

Soit z un nombre complexe non nul.
Indiquer pour chacun des nombres suivant, s'il s'agit d'un nombre réel ou d'un nombre imaginaire pur. Justifier.

1. $z_1=z+\overline{z}$
2. $z_2=z-\overline{z}$
3. $z_3=z^2+(\overline{z})^2$
4. $z_4=z^2-(\overline{z})^2$
5. $z_5=\frac{z+\overline{z}}{z-\overline{z}}$ avec $z\neq\overline{z}$
6. $z_6=\frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}$ avec $z\neq-\overline{z}$
7. $z_7=\frac{z^2+(\overline{z})^2}{z\times\overline{z}}$
8. $z_8=\frac{z^2-(\overline{z})^2}{z\times\overline{z}}$

103 [Démontrer.]

1. Montrer que, pour tout nombre complexe $z\neq0$, le nombre complexe $\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}$ est un nombre réel.
2. Montrer que, pour tout nombre complexe $z\neq0$, le nombre complexe $\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}$ est un nombre imaginaire pur.

104 [Raisonner.]

Soient deux nombres complexes $z=a+\mathrm{i}b$ et $z'=a'+\mathrm{i}b'$ où a, b, a' et b' sont des réels vérifiant $1+zz'\neq0$.
On suppose que $a^2+b^2=1$ et $a'^2+b'^2=1$.
Montrer que le quotient $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est un réel.

3 Équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 2

Exercices FLASH

105 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2+16=0$.

106 Déterminer deux nombres complexes u et v sachant que leur somme est égale à 3 et que leur produit est égal à 5.

107 VRAI/FAUX L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

« Les polynômes P_1 et P_2 définis sur $\mathbb{C}$ par $P_1(z)=z^3+1$ et $P_2(z)=z^3-z^2+2$ ont un facteur commun de la forme $z-a$ avec a réel. »

Pour les exercices 108 à 112

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations proposées. On écrira les solutions sous forme algébrique.

108 [Calculer.]

1. $(z+3\mathrm{i})(2z-3+\mathrm{i})=0$
2. $(z-2\mathrm{i})(\mathrm{i}z+1)=0$
3. $(\mathrm{i}z+1+\mathrm{i})(3\mathrm{i}z-1)=0$
4. $((1+\mathrm{i})z-1)((2+\mathrm{i})z+1)=0$

109 [Calculer.]

1. $z^2+1=0$
2. $z^2+2=0$
3. $z^2+16=0$
4. $z^2+20=0$
5. $z^2+\frac{1}{4}=0$
6. $z^2+\frac{1}{3}=0$
7. $z^2+\frac{11}{4}=0$
8. $z^2+\frac{3}{2}=0$

110 [Calculer.]

1. $z^2+z=0$
2. $z^2+2\mathrm{i}z=0$
3. $2\mathrm{i}z^2+3z=0$
4. $(1+\mathrm{i})z^2=(2-\mathrm{i})z$
5. $(1+2\mathrm{i})z^2+(2\mathrm{i}-1)z=0$

111 [Calculer.]

1. $z^2+z+1=0$
2. $z^2+4z+13=0$
3. $4z^2-4z+17=0$
4. $2z^2+2z+5=0$
5. $z^2-\sqrt{2}z+1=0$
6. $9z^2-6z+19=0$

112 [Calculer.]

1. $z = -\frac{3}{z}$
2. $\frac{z}{4} = 1 - \frac{2}{z}$
3. $\frac{5}{z^2} = \frac{3}{z} - \frac{1}{2}$
4. $5z - 2 = -\frac{26}{5z}$

Pour les exercices 113 et 114

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations proposées. On écrira les solutions sous forme algébrique.

113 [Calculer.]

1. $z^4 + z^2 - 6 = 0$
2. $z^4 + z^2 - 2 = 0$
3. $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$
4. $8z^4 + 6z^2 + 1 = 0$
5. $8z^4 + 22z^2 + 15 = 0$
6. $z^3 + 5z + \frac{4}{z} = 0$
7. $z^2 + 2 = \frac{3}{z^2}$
8. $\frac{2}{z^4} + \frac{7}{z^2} = -3$

114 [Calculer.]

1. $z^4 - 2z^2 - 3 = 0$
2. $z^4 - 3z^2 - 10 = 0$
3. $z^4 - 2z^2 - 8 = 0$
4. $2z^4 - z^2 - 3 = 0$
5. $z^3 - 4z = \frac{21}{z}$
6. $\frac{z^3}{4} = z + \frac{3}{z}$
7. $z^5 - 2z = 4z^3 + 3z$

115 ALGO [Calculer.] LABO PYTHON

1. Écrire un algorithme en langage naturel qui retourne le nombre de solutions dans $\mathbb{C}$ d'une équation du second degré à coefficients réels $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$ et leurs valeurs.
2. Programmer cet algorithme en Python.

AIDE

On définit un nombre complexe $a + ib$ sous Python en écrivant **complex (a,b)**.

À SAVOIR

Python note j le nombre complexe i.

Pour les exercices 116 et 117

Dans chacun des cas suivants, calculer les nombres complexes z_1 et z_2 dont on donne la somme $z_1 + z_2$ et le produit z_1z_2, puis les écrire sous forme algébrique.

116 [Calculer.]

1. $z_1 + z_2 = 6$ et $z_1z_2 = 13$.
2. $z_1 + z_2 = 10$ et $z_1z_2 = 26$.
3. $z_1 + z_2 = 1$ et $z_1z_2 = 1$.
4. $z_1 + z_2 = \sqrt{2}$ et $z_1z_2 = \frac{3}{4}$.

117 [Calculer.]

1. $z_1 + z_2 = -1$ et $z_1z_2 = \frac{5}{4}$.
2. $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$ et $z_1z_2 = 6$.
3. $z_1 + z_2 = -\sqrt{3}$ et $z_1z_2 = 1$.
4. $z_1 + z_2 = -\sqrt{2}$ et $z_1z_2 = 1$.

118 [Calculer.]

Écrire chacun des polynômes à coefficients complexes suivants sous la forme $z^n - a^n$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, puis les factoriser par $z - a$ dans $\mathbb{C}$.

1. $P(z) = z^3 + 1$
2. $P(z) = z^3 - 8$
3. $P(z) = z^3 + i$
4. $P(z) = z^3 + 8i$
5. $P(z) = z^5 - 32i$

119 [Calculer.]

Écrire chacun des polynômes à coefficients réels suivants en produit de facteurs de la forme $z - \alpha$ avec α dans $\mathbb{C}$.

1. $P(z) = z^3 + 4z$
2. $P(z) = z^3 + z^2 + z + 1$
3. $P(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2$
4. $P(z) = z^5 - z$
5. $P(z) = z^5 + 3z^3 + z^2 + 3$
6. $P(z) = z^5 - z^4 + 5z^3 - 5z^2 + 4z - 4$

AIDE

Pour **5.**, remarquer que $z^5 + 3z^3$ se factorise par z^3.

120 [Calculer.]

Soit le polynôme P à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 + z^2 - 2.$$

1. Montrer que 1 est une racine du polynôme P.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$.

AIDE

On obtient $P(z) = (z-1)(z^2 + 2z + 2)$.

3. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

121 [Calculer.]

Soit P le polynôme à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4.$$

1. Déterminer une racine réelle, notée α, du polynôme P.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z - \alpha)(az^2 + bz + c)$.
3. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

122 [Calculer.]

On considère le polynôme P à coefficients complexes défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^3-2(\sqrt{2}-i)z^2+(3-4i\sqrt{2})z+6i$.

1. Montrer que $-2i$ est une racine du polynôme P.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z, $P(z)=(z+2i)(az^2+bz+c)$.

3. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

On écrira les solutions sous forme algébrique.

123 [Calculer.]

On considère le polynôme P à coefficients complexes défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^3-(4+i)z^2+(5+4i)z-5i$.

1. Montrer que le polynôme P admet dans $\mathbb{C}$ une racine imaginaire pure $i\alpha$ (avec α réel) que l'on déterminera.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z, $P(z)=(z-i\alpha)(az^2+bz+c)$.

3. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$. On écrira les solutions sous forme algébrique.

124 [Calculer.]

Soit P le polynôme à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z)=z^4+2z^3-z^2+2z+1.$$

1. Vérifier que 0 n'est pas une racine du polynôme P.

2. Pour $z\neq 0$, on pose $u=z+\frac{1}{z}$.

a. Exprimer u^2-3 en fonction de z.

b. Calculer $\frac{P(z)}{z^2}$ pour $z\neq 0$ et l'exprimer en fonction de u.

3. En déduire les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme P.
On les écrira sous forme algébrique.

125 [Calculer.]

Soit P le polynôme à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z)=z^4+2z^3-5z^2-2z+1.$$

1. a. Vérifier que 0 n'est pas une racine du polynôme P.

b. Pour $z\neq 0$, on pose $u=z-\frac{1}{z}$.

Calculer $\frac{P(z)}{z^2}$ pour $z\neq 0$ et l'exprimer en fonction de u.

2. En déduire les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme P.
On les écrira sous forme algébrique.

126 [Calculer.]

On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante (E): $z^4-(1+\sqrt{3})z^3+(2+\sqrt{3})z^2-(1+\sqrt{3})z+1=0$.

Soit P le polynôme à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^4-(1+\sqrt{3})z^3+(2+\sqrt{3})z^2-(1+\sqrt{3})z+1$.

1. a. Montrer que 0 n'est pas une racine du polynôme P.

b. Pour $z\neq 0$, on pose $u=z+\frac{1}{z}$.

Calculer $\frac{P(z)}{z^2}$ pour $z\neq 0$ et l'exprimer en fonction de u.

2. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E_1): u^2-(1+\sqrt{3})u+\sqrt{3}=0.$$

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations (E_2): $z+\frac{1}{z}=1$ et (E_3): $z+\frac{1}{z}=\sqrt{3}$.

3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).
On les écrira sous forme algébrique.

127 [Calculer.]

On considère trois nombres complexes u, v et w et le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=(z-u)(z-v)(z-w)$.

1. Développer le polynôme P et l'écrire sous la forme az^3+bz^2+cz+d en exprimant les coefficients complexes a, b, c et d en fonction de u, v et w.

2. À l'aide des expressions obtenues précédemment, déterminer les nombres u, v et w tels que :

$$\begin{cases} u+v+w=1 \\ u\times v+u\times w+v\times w=1. \\ u\times v\times w=1 \end{cases}$$

128 GEOGEBRA [Représenter.]

On souhaite étudier les racines d'un polynôme symétrique de degré 2 à coefficients réels, c'est-à-dire un polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=az^2+bz+a$, où a et b sont deux réels tels que $a\neq 0$.

1. Montrer qu'un nombre complexe u est une racine dans $\mathbb{C}$ du polynôme P si, et seulement si, u est solution d'une équation (E) de la forme $z^2+\alpha z+1=0$ où α est un réel que l'on exprimera en fonction des réels a et b.

2. a. Avec GeoGebra, créer un curseur α dans $[-5\,;5]$ avec un incrément de 0,1 et tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2+\alpha x+1.$$

b. Conjecturer pour quelles valeurs de α la fonction f admet deux racines réelles.

c. Démontrer cette conjecture.

3. a. Montrer que si le nombre complexe u est une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E), alors $\overline{u}$ en est également une.

b. Montrer que si le nombre complexe u est une solution non nulle dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E), alors $\frac{1}{u}$ en est également une.

c. En déduire que si $\alpha\in]-2\,;2[$, alors l'équation (E) admet deux racines complexes à la fois inverses et conjuguées.

4. Déterminer, suivant les valeurs de $\frac{b}{a}$, le nombre de racines réelles ou complexes du polynôme symétrique P.

129 GEOGEBRA [Représenter.]

On souhaite étudier les racines réelles d'un polynôme symétrique de degré 3 à coefficients réels, c'est-à-dire un polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $\mathrm{P}(z)=az^3+bz^2+bz+a$ où a et b sont deux réels tels que $a\neq 0$.

1. Montrer qu'un nombre complexe u est une racine dans $\mathbb{C}$ du polynôme P si, et seulement si, u est solution d'une équation (E) de la forme $z^3+\alpha z^2+\alpha z+1=0$ où α est un réel qu'on exprimera en fonction de a et b.

2. a. Avec GeoGebra, créer un curseur α dans $[-5\,;\,5]$ avec un incrément de 0,1 et tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3+\alpha x^2+\alpha x+1.$$

b. À l'aide de la courbe représentative de f, conjecturer une solution réelle évidente de l'équation (E).

c. Démontrer cette conjecture.

3. a. Vérifier que, pour tout $z\in\mathbb{C}$:

$$z^3+1=(z+1)(z^2-z+1).$$

b. Montrer qu'il existe un polynôme symétrique Q de degré 2 (voir exercice précédent) tel que, pour tout nombre complexe z, $\mathrm{P}(z)=(z+1)\mathrm{Q}(z)$.

c. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles le polynôme P admet exactement trois racines réelles.

4. Application : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$2z^3+z^2+z+2=0.$$

130 [Calculer.]

On souhaite étudier les racines réelles d'un polynôme symétrique de degré 4 à coefficients réels, c'est-à-dire un polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $\mathrm{P}(z)=az^4+bz^3+cz^2+bz+a$, où a, b et c sont trois réels tels que $a\neq 0$.

1. Montrer qu'un nombre complexe u est une racine dans $\mathbb{C}$ du polynôme P si, et seulement si, u est solution d'une équation (E) de la forme $z^4+\alpha z^3+\beta z^2+\alpha z+1=0$ où α et β sont deux réels qu'on exprimera en fonction de a, b et c.

2. a. Montrer que 0 n'est pas solution de l'équation (E).

b. Soit $\mathrm{Q}(z)=z^4+\alpha z^3+\beta z^2+\alpha z+1$.
Calculer, pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, $\dfrac{\mathrm{Q}(z)}{z^2}$.

c. On pose, pour $z\in\mathbb{C}^*$, $\mathrm{Z}=z+\dfrac{1}{z}$. Exprimer $z^2+\dfrac{1}{z^2}$ en fonction de Z puis montrer que $\mathrm{Q}(z)=0$ si, et seulement si, Z est solution d'une équation du second degré à coefficients réels.

3. On suppose que Z est un réel k et solution de l'équation du second degré obtenue à la question **2. c.** Déterminer pour quelles valeurs de k l'équation $z+\dfrac{1}{z}=k$ admet deux solutions réelles distinctes.

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+2z^3+3z^2+2z+1=0$.

Pour les exercices **131** *à* **133**

Pour chaque affirmation, justifier si elle est vraie ou fausse.

131 VRAI/FAUX [Raisonner.]

1. « L'équation $3z^2-2z+1=0$ admet deux solutions réelles distinctes. »

2. « Les nombres complexes conjugués $2+\mathrm{i}$ et $2-\mathrm{i}$ sont solutions de l'équation $z+\dfrac{5}{z}=4$. »

3. « Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2-4z+5=0$ sont les opposés des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2+4z+5=0$. »

4. « La partie réelle des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2-6z+10=0$ est égale à 3. »

132 VRAI/FAUX [Raisonner.]

1. « Le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $\mathrm{P}(z)=z^3+1$ se factorise dans $\mathbb{C}$ par $z+1$. »

2. « Les polynômes P_1 et P_2 définis sur $\mathbb{C}$ par $\mathrm{P}_1(z)=z^4-1$ et $\mathrm{P}_2(z)=z^3+1$ ont un facteur commun dans $\mathbb{C}$. »

3. « Le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $\mathrm{P}(z)=z^2-\mathrm{i}$ n'a pas de racine dans $\mathbb{C}$. »

AIDE

On pourra calculer $(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2})^2$.

133 VRAI/FAUX [Raisonner.]

1. « Deux nombres complexes conjugués dont la somme et le produit sont tous les deux égaux à 1 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2-z+1=0$. »

2. « Si z est une racine dans $\mathbb{C}$ du polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $\mathrm{P}(z)=z^4-2z^2-3$, alors son conjugué $\overline{z}$ en est aussi une. »

3. « Le polynôme P à coefficients complexes défini sur $\mathbb{C}$ par $\mathrm{P}(z)=z^3+\mathrm{i}z^2+z+\mathrm{i}$ admet trois racines distinctes dans $\mathbb{C}$. »

4. « Les polynômes P_1 et P_2 à coefficients complexes définis sur $\mathbb{C}$ par $\mathrm{P}_1(z)=z^3+\mathrm{i}z^2-2z-2\mathrm{i}$ et $\mathrm{P}_2(z)=z^3-\mathrm{i}z^2+2z-2\mathrm{i}$ ont une racine imaginaire pure commune. »

134 Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et P le polynôme défini pour tout $z\in\mathbb{C}$ par $\mathrm{P}(z)=z^n-1$.

On admet que P admet n racines distinctes.

Calculer le produit de ces n racines, appelées racines de l'unité.

135 [Calculer, Communiquer.]

On considère le polynôme P à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^4-8z^3+41z^2-128z+400$.

1. Montrer que si z est une racine du polynôme P, alors son conjugué $\overline{z}$ en est aussi une.

2. a. Soit b un réel. Déterminer $P(ib)$ en fonction de b puis l'écrire sous forme algébrique .

b. Montrer que le polynôme P admet exactement deux racines imaginaires pures dans $\mathbb{C}$ et les calculer.

3. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z, $P(z)=(z^2+16)(az^2+bz+c)$.

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

136 [Calculer, Chercher.]

1. On considère le polynôme P à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par $P(u)=u^4-1$.

a. Factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}$ en produit de facteurs du premier degré à coefficients complexes.

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(u)=0$.

2. On considère l'équation (E): $\left(\frac{1-2z}{z-2}\right)^4=1$.

En utilisant les résultats de la question **1. b.**, résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

137 [Calculer, Chercher.]

On considère le polynôme P à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^6-1$.

1. a. Factoriser l'expression u^3-v^3 pour tous nombres complexes u et v.

b. En remarquant que $z^6=(z^2)^3$, déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=(z^2-1)(az^4+bz^2+c)$.

2. a. Calculer $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ et $\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

b. En déduire les six racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme P.

138 [Calculer, Raisonner.]

1. On considère l'équation du second degré à coefficients complexes :

$$(E): z^2-(6+2i)z+7+6i=0.$$

a. Montrer que, pour tout nombre complexe z,

$$z^2-(6+2i)z=(z-(3+i))^2-8-6i.$$

b. En déduire que l'équation (E) équivaut à

$$(z-(3+i))^2=1.$$

c. Résoudre alors l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

2. En appliquant une méthode analogue, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré à coefficients complexes :

$$(E'): z^2+(2+4i)z+6+4i=0.$$

139 [Calculer, Chercher.]

On considère l'équation à coefficients complexes :

$$(E): 2z^2-(1+6i)z+3i=0.$$

1. Démontrer que l'équation (E) admet un unique nombre imaginaire pur comme solution et le déterminer.

2. L'équation (E) admet-elle comme solution un nombre réel ? Justifier.

3. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

140 [Chercher, Représenter.]

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On appelle A le point de coordonnées $(2\,;0)$.

À tout nombre complexe $z\neq 2$, on associe le nombre complexe $z'=\frac{2-iz}{2-z}$.

On écrit $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ où x, y, x' et y' sont des nombres réels.

Soit $M(x\,;y)$ un point du plan distinct de A et $M'(x'\,;y')$ le point qui lui est associé par la transformation $z\mapsto z'$.

Le but de l'exercice est de déterminer la nature de l'ensemble des points M quand z' vérifie certaines conditions.

1. Soit B le point de coordonnées $(2\,;1)$.

Déterminer les coordonnées $(x'\,;y')$ du point B', image du point B par la transformation définie précédemment.

2. Soit C' le point de coordonnées $(1\,;2)$.

Déterminer les coordonnées $(x\,;y)$ du point C dont l'image est le point C'.

3. Calculer z' sous forme algébrique et exprimer sa partie réelle x' et sa partie imaginaire y' en fonction de x et y.

4. Déterminer une équation de l'ensemble E_1 des points $M(x\,;y)$, distincts de A, tels que z' soit un réel et préciser sa nature.

5. Déterminer une équation de l'ensemble E_2 des points $M(x\,;y)$, distincts de A, tels que z' soit un imaginaire pur et préciser sa nature.

141 [Chercher, Représenter.]

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On appelle J le point de coordonnées $(0\,;1)$.

À tout nombre complexe $z\neq i$, on associe le nombre complexe $z'=\frac{iz}{i-z}$.

On écrit $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ où x, y, x' et y' sont quatre nombres réels.

Soit $M(x\,;y)$ un point du plan distinct de J et $M'(x'\,;y')$ le point qui lui est associé par la transformation $z\mapsto z'$.

1. Déterminer les éventuels points $M(x\,;y)$ du plan pour lesquels M' et M sont confondus.

2. Déterminer les coordonnées du point I' associé au point $I(1\,;0)$.

3. Déterminer les coordonnées du point A tel que le point associé A' ait pour coordonnées $(2\,;0)$.

4. Déterminer une équation de l'ensemble E_1 des points $M(x\,;y)$, distincts de J, tels que z' soit un réel et préciser sa nature.

5. Déterminer une équation de l'ensemble E_2 des points $M(x\,;y)$, distincts de J, tels que z' soit un imaginaire pur et préciser sa nature.

142 DEVOIR MAISON [Chercher, Représenter.]

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
À tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe $z' = \dfrac{2i - z^2}{z \times \overline{z} + 1}$.
On écrit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont quatre réels.
Soit $M(x\,;y)$ un point du plan et $M'(x'\,;y')$ le point qui lui est associé par la transformation $z \mapsto z'$.

1. Justifier que le nombre complexe z' est défini pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2. Existe-t-il des valeurs de z telles que z' soit égal à 1 ? Justifier.

3. a. Démontrer que z' est réel si, et seulement si, $(z - \overline{z})(z + \overline{z}) = 4i$.

b. Déterminer l'ensemble E_1 des points $M(x\,;y)$ tels que z' soit un réel.

4. Déterminer l'ensemble E_2 des points $M(x\,;y)$ tels que z' soit un imaginaire pur.

143 [Chercher, Représenter.]

Équation à paramètre

On considère le polynôme P à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^2 - 2z + 9$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 6$.

2. Soit m un réel. On considère l'équation $(E) : P(z) = m$ d'inconnue z dans $\mathbb{C}$.
Pour quelles valeurs de m l'équation (E) admet-elle deux solutions complexes conjuguées ? Justifier.

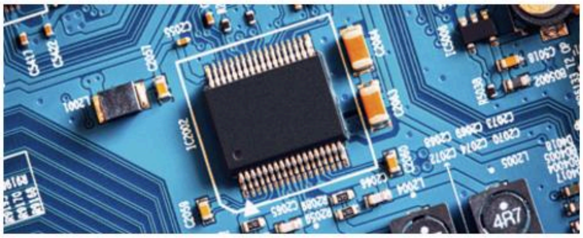
3. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
On écrit $z = x + iy$ et $z' = P(z) = x' + iy'$ où x, y, x' et y' désignent quatre réels.

a. Exprimer la forme algébrique de $P(z)$ en fonction de x et y.

b. Déterminer l'ensemble E des points $M(x\,;y)$ tels que z' soit un réel.

144 EN ÉLECTRONIQUE [Calculer, Modéliser.]

On représente parfois les résistances de certains composants électroniques par des nombres complexes.



Par exemple, l'impédance d'une résistance pure est représentée par le nombre réel $Z_R = R$. C'est le seul composant à avoir une impédance réelle, tandis que l'impédance d'une bobine d'inductance L est représentée par le nombre complexe $Z_L = iL\omega$ où ω désigne la pulsation du signal et dépend de l'intensité du courant présent dans le circuit.
Lorsqu'ils sont montés en parallèle, ces composants peuvent être remplacés par un composant unique associé à l'impédance Z vérifiant $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{Z_R} + \dfrac{1}{Z_L}$.
Donner la forme algébrique de l'impédance Z en fonction de R, de L et de ω.

À SAVOIR

En électricité, le nombre complexe i est noté j pour qu'il n'y ait pas de confusion avec l'intensité du courant.

145 [Calculer, Chercher.]

Suite de nombres complexes

Soient α et β deux nombres réels. On définit une suite récurrente d'ordre 2 par la donnée de u_0, de u_1 et de la relation de récurrence $(1) : u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$, valable pour tout entier naturel n.

1. a. Soit r un nombre complexe non nul et (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = r^n$.
Montrer que si (u_n) vérifie la relation (1), alors r est solution de l'équation $(2) : r^2 - \alpha r - \beta = 0$.

b. On suppose que r_1 et r_2 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (2).
Montrer que s'il existe λ et μ dans $\mathbb{C}$ tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$, alors la suite (u_n) vérifie la relation (1).

2. On admet que si une suite (u_n) vérifie la relation (1), alors il existe deux nombres complexes λ et μ tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$, où r_1 et r_2 désignent les solutions de l'équation $r^2 = \alpha r + \beta$.
Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} v_0 = 1\,;\ v_1 = 2 \\ v_{n+2} = 4v_{n+1} - 5v_n \end{cases}.$$
Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

146 GEOGEBRA TABLEUR [Représenter, Communiquer.]

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout nombre complexe z, on définit le nombre complexe $f(z)=\frac{1}{2}(1-i)z+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

On pose $z_0=2+i$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1}=f(z_n)$.

On écrit, pour tout entier naturel n, $z_n=x_n+iy_n$, avec x_n et y_n réels. On a ainsi $x_0=2$ et $y_0=1$.

Pour tout entier naturel n, on appelle P_n le point de coordonnées $(x_n\,;y_n)$ dans le repère.

1. a. Calculer z_1 et z_2 et en déduire les coordonnées des points P_1 et P_2.

b. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

2. a. À l'aide du tableur de GeoGebra, représenter dans le repère les points P_n pour n allant de 0 à 30.

AIDE

Après avoir complété le tableur avec deux colonnes x_n et y_n, sélectionner toutes les valeurs, faire un clic droit et choisir « Créer liste de points ».

b. Qu'observe-t-on ?

3. Soit J le point de coordonnées $(0\,;-1)$. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (d_n) par $d_n=JP_n$.

a. Pour tout entier naturel n, exprimer d_n en fonction de x_n et y_n.

b. À l'aide d'un tableur ou de GeoGebra, représenter le nuage de points de coordonnées $(n\,;d_n)$ dans un repère orthonormé. Qu'observe-t-on ?

c. Conjecturer la limite de la suite (d_n).

4. a. Montrer qu'il existe un unique nombre complexe ω tel que $f(\omega)=\omega$.

b. Comment peut-on interpréter les observations faites à la question **2. b.** sur les points P_n ?

147 [Raisonner, Représenter.]

Suite de nombres complexes

Soit α un nombre complexe non nul et différent de 1.

On définit la suite (z_n) de nombres complexes par $z_0=0$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1}=\alpha z_n-i$.

1. a. Calculer z_1, z_2 et z_3 en fonction de α.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $z_n=\frac{1-\alpha^n}{\alpha-1}\times i$.

2. Uniquement dans cette question, on pose $\alpha=i$.

a. Montrer que $z_4=0$.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+4} en fonction de n, puis en fonction de z_n.

c. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On pose, pour tout entier naturel n, $z_n=x_n+iy_n$ et on appelle P_n les points de coordonnées $(x_n\,;y_n)$.

Placer les points P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4 dans le repère.

148 APPROFONDISSEMENT [Chercher, Calculer.]

Partie A : Formules de Viète, cas $n=3$

On considère un polynôme P de degré 3 à coefficients réels défini dans $\mathbb{C}$ par $P(z)=\alpha_3z^3+\alpha_2z^2+\alpha_1z+\alpha_0$, où α_3, α_2, α_1 et α_0 sont réels tels que $\alpha_3\neq0$.

On appelle z_1, z_2 et z_3 ses trois racines dans $\mathbb{C}$, éventuellement confondues.

1. Factoriser P en produit de facteurs de degré 1.

2. Montrer que $z_1+z_2+z_3=-\frac{\alpha_2}{\alpha_3}$ et $z_1z_2z_3=-\frac{\alpha_0}{\alpha_3}$.

Partie B : Formules de Viète, cas $n=4$

On considère un polynôme P de degré 4 à coefficients réels défini dans $\mathbb{C}$ par $P(z)=\alpha_4z^4+\alpha_3z^3+\alpha_2z^2+\alpha_1z+\alpha_0$, où α_4, α_3, α_2, α_1 et α_0 sont réels tels que $\alpha_4\neq0$.

On appelle z_1, z_2, z_3 et z_4 ses quatre racines dans $\mathbb{C}$, éventuellement confondues.

Montrer que $z_1+z_2+z_3+z_4=-\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$ et $z_1z_2z_3z_4=\frac{\alpha_0}{\alpha_4}$.

Partie C : Formules de Viète, cas général

Soient n un entier naturel non nul et P un polynôme de degré n à coefficients réels défini dans $\mathbb{C}$ par $P(z)=\alpha_nz^n+\ldots+\alpha_0$.

On admet qu'un tel polynôme admet nécessairement n racines $z_1\,;\ldots\,;z_n$ (éventuellement confondues).

1. Justifier que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a $P(z)=\alpha_n(z-z_1)\ldots(z-z_n)$.

2. Démontrer les formules de Viète explicitées dans le cours.

149 APPROFONDISSEMENT [Chercher, Communiquer.]

Résolution par radicaux des équations de degré 3

Partie A : Retour sur la méthode de Cardan

On considère l'équation (E): $x^3+px=q$ où p et q sont réels.

On souhaite obtenir une méthode pour calculer une solution réelle x d'une équation de cette forme.

On cherche x sous la forme $x=u+v$ avec u et v réels.

1. Montrer que si $x=u+v$, alors $x^3=u^3+v^3+3u\times v\times x$.

2. En déduire que si on obtient des réels u et v tels que $\begin{cases}u^3+v^3=q\\ u\times v=-\frac{p}{3}\end{cases}$ alors $x=u+v$ est une solution de (E).

3. a. On pose $s=u^3$ et $t=v^3$. Montrer que les systèmes $\begin{cases}u^3+v^3=q\\ u\times v=-\frac{p}{3}\end{cases}$ et $\begin{cases}s^2-qs-\frac{p^3}{27}=0\\ t=q-s\end{cases}$ sont équivalents.

b. Expliquer comment obtenir une solution x cherchée.

4. Application : Avec la méthode de Cardan, trouver la solution réelle positive de l'équation $x^3+24x=56$.

5. Peut-on appliquer la méthode de Cardan à l'équation de Bombelli $x^3-15x-4=0$? Justifier.

Partie B : Résolution d'une équation de degré 3

Soient a, b, c et d quatre nombres réels avec $a \neq 0$. On considère l'équation $(\mathrm{E}'): ax^3+bx^2+cx+d=0$.

1. On pose $x=\mathrm{X}-\dfrac{b}{3a}$.

Montrer que résoudre l'équation (E') équivaut à résoudre $\mathrm{X}^3+p\mathrm{X}=0=q$ où p et q sont deux réels qu'on exprimera en fonction de a, b, c et d.

2. Application : En utilisant la question 1. puis la partie A (méthode de Cardan), résoudre l'équation $x^3-2x^2+x-2=0$.

150 APPROFONDISSEMENT [Calculer, Raisonner.]

Partie A : Racine carrée d'un nombre complexe

Soit $\alpha=a+\mathrm{i}b$ un nombre complexe, où a et b sont réels. On cherche à déterminer s'il existe un nombre complexe z tel que $z^2=\alpha$.

On pose $z=x+\mathrm{i}y$, où x et y sont deux réels.

1. Montrer que si z est une solution de l'équation $z^2=\alpha$, alors il en est de même de $-z$.

2. Montrer que z est solution de $z^2=\alpha$ si, et seulement si, x et y vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

3. **a.** Montrer que si $b>0$, alors une solution de l'équation $z^2=\alpha$ est donnée par

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}.$$

Déterminer une deuxième solution de l'équation étudiée.

b. Montrer que si $b<0$, alors une solution de l'équation $z^2=\alpha$ est donnée par

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}-\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}.$$

Déterminer une deuxième solution de l'équation dans ce cas.

4. À l'aide de la question 2., déterminer tous les nombres complexes z tels que :

a. $z^2=2\mathrm{i}$. **b.** $z^2=3-4\mathrm{i}$.

Partie B : Résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes

Soient a, b et c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2+bz+c=0$.

1. Montrer que résoudre l'équation $az^2+bz+c=0$ équivaut à résoudre l'équation $a\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a}=0$ en posant $\Delta=b^2-4ac$.

2. Soit $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2=\Delta$.
Montrer que les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$ sont données par $\dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b+\delta}{2a}$.

3. Application : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2+(3\mathrm{i}-4)z+1-7\mathrm{i}=0.$$

Complexes Arithmétique Matrices Graphes

Exercices transversaux en lien avec ce chapitre : 3, 4, 5, 7, 8, 11 et 15 p. 238

Le Grand Oral

Entraînez-vous au Grand Oral et enregistrez-vous sur LLS.fr/GrandOralMaths

Comme le suggère le programme, les problèmes abordés en maths expertes peuvent servir d'appui à des questions de Grand Oral. Voici un exemple, basé sur l'enseignement de spécialité, utilisant des notions de ce chapitre.

1. Sur la formule du binôme de Newton

Rappeler l'énoncé de la formule du binôme de Newton dans $\mathbb{C}$.

Démontrer cette formule en utilisant des arguments de dénombrement et de combinatoire.

2. Sur la résolution des équations du second degré

Rappeler une expression des solutions de l'équation à coefficients réels $az^2+bz+c=0$ $(a \neq 0)$ lorsque $\Delta<0$.

Ces résultats s'utilisent lors de l'étude de suites linéaires récurrentes d'ordre 2 $(au_{n+2}=bu_{n+1}+cu_n)$ et dans l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre 2 $(af''+bf'+cf=0)$.

Se renseigner sur ces méthodes de résolution et exposer un exemple au jury.

Méthodologie	Consulter les fiches méthode de ce manuel pour le Grand Oral p. 244

Avant de commencer

Prérequis

1. Déterminer la forme algébrique et conjuguée d'un nombre complexe.
2. Savoir résoudre des équations ou systèmes d'équations faisant intervenir z et $\overline{z}$.
3. Savoir résoudre des équations polynomiales.
4. Maitriser la fonction exponentielle.
5. Connaître les relations trigonométriques et les valeurs trigonométriques remarquables.
6. Savoir étudier des situations de parallélisme et d'orthogonalité dans le plan.

1 Écrire un nombre complexe sous forme algébrique

1. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a. $z_1 = (5+i)(3i-2)$ **b.** $z_2 = \dfrac{2-6i}{1+i}$

2. Déterminer la forme algébrique du conjugué du nombre complexe $z_3 = \dfrac{1+3i}{i-5} + 1$.

2 Résoudre des équations dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $3z - 2i = 0$ **2.** $(8-3i)z + 2i = z$

3. $4\overline{z} + i + 7 = 3 - 5i$ **4.** $8iz + 2\overline{z} + 1 = 3 + 4i$

3 Résoudre une équation du second degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $3z^2 - 5z + 1 = 0$ **2.** $z^2 + z + 1 = 0$

3. $z^2 - \sqrt{2}z + 3 = 2$ **4.** $(z^2 - 4z + 2)(z^2 - z + 1) = 0$

4 Résoudre une équation polynomiale

1. On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - 5z^2 + 11z - 10.$$

a. Montrer que 2 est une racine de P.

b. En déduire une factorisation du polynôme P.

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : 2z^3 + 7z^2 + 9z + 4 = 0.$$

5 Utiliser les propriétés de la fonction exponentielle

Soit x un nombre réel.
Simplifier les écritures suivantes.

1. $e^{3x} \times e^{2x-1}$ **2.** $\dfrac{e^{x^2}}{e^{x-3}}$

3. $(e^{x+2})^2$ **4.** $\dfrac{(e^{x-1})^3 \times e^{3-5x}}{e^{-2x+6}}$

6 Utiliser les fonctions trigonométriques

1. À l'aide d'un cercle trigonométrique, déterminer le cosinus et le sinus des angles suivants exprimés en radian.

a. $\dfrac{-2\pi}{3}$ **b.** $\dfrac{23\pi}{6}$ **c.** $\dfrac{25\pi}{4}$ **d.** $\dfrac{-11\pi}{2}$

2. Pour chaque cas, déterminer une valeur de x vérifiant les conditions données :

a. $\cos(x) = -1$ et $\sin(x) = 0$.

b. $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système $\begin{cases} \cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(x) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

7 Utiliser des propriétés géométriques

On considère un plan muni d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$, d'unité le centimètre.

1. Placer le point A tel que $\widehat{IOA} = \dfrac{5\pi}{6}$ rad et $OA = 3$ cm.

2. Déterminer la nature du triangle BCD tel que $B(1 ; 3)$, $C(-1 ; 1)$ et $D(1 ; -1)$.

8 Problème

On considère un plan muni d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$.
Soient A, B et C trois points définis par :

- $\widehat{IOA} = \dfrac{3\pi}{4}$ rad et $OA = 2\sqrt{2}$;
- B appartient au cercle trigonométrique de centre O tel que $\widehat{IOB} = \dfrac{3\pi}{2}$ rad ;
- C a pour coordonnées $C(3 ; 1)$.

Déterminer la nature du triangle ABC.

Anecdote

Il a fallu plus de deux siècles pour que les nombres « imaginaires », qui ne sont au départ que des fictions utiles aux calculs algébriques, prennent un statut nouveau, qu'il soit algébrique ou géométrique. C'est Gauss qui, en 1831, introduit les « nombres complexes » en lien avec leur représentation dans un plan.

Nombres complexes, point de vue géométrique

Chapitre 2

Capacités attendues - chapitre 2

1. Représenter un nombre complexe par un point.
2. Déterminer le module et les arguments d'un nombre complexe.
3. Passer de la forme algébrique à une forme trigonométrique ou exponentielle et inversement.
4. Utiliser les nombres complexes pour étudier des configurations du plan dans le cadre de la résolution de problèmes.
5. Utiliser les formules d'Euler et de Moivre pour transformer des expressions trigonométriques dans des contextes divers (intégration, suites, etc.).
6. Utiliser les racines de l'unité dans l'étude de configurations liées aux polygones réguliers.

Les nombres complexes ont, après leur apparition, eu différentes utilisations et ont ainsi permis des avancées dans plusieurs domaines des mathématiques : calcul intégral, suites, écriture complexe des transformations du plan, transformation de Fourier discrète, fonctions holomorphes…
L'électricité, les trajectoires des planètes et la navigation, par exemple, sont autant de domaines dans lesquels les nombres complexes ont permis de grandes découvertes.

A Des nombres complexes à la géométrie

Objectif Découvrir les notions d'affixes de points et de vecteurs.

Remarque : Un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ est direct lorsque $(\vec{u}\,;\vec{v})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

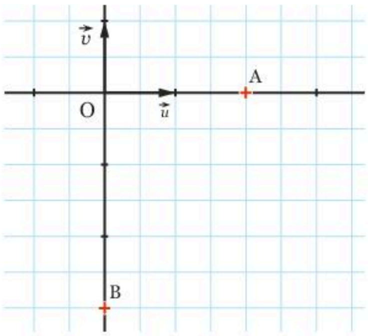
Remarque : On note le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ à la place de $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$ pour éviter les confusions possibles avec le nombre i.

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.

On peut représenter les nombres complexes dans le plan en associant à chaque nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$ le point de coordonnées $(x\,;y)$.

On dit alors que M est le **point image** de z et inversement que z est l'**affixe** du point M. On note $\mathrm{M}(z)$.

On considère les points A et B placés sur la figure ci-contre et le point C de coordonnées $(2\,;-2\sqrt{3})$.



1 **a)** Démontrer que $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\frac{-\pi}{3}+2k\pi\,;k\in\mathbb{Z}$.

b) Reproduire la figure et placer précisément le point C.

2 Donner les nombres complexes associés à chacun des points A, B et C, notés respectivement z_{A}, z_{B} et z_{C}.

3 À quelle condition un nombre complexe est-il représenté par un point de l'axe des abscisses ? Par un point de l'axe des ordonnées ?

4 Le nombre complexe z associé à un point M est aussi représenté par un vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$. On dit que le vecteur $\vec{w}$ a pour **affixe** z, et on note $z_{\vec{w}}=z$.

a) Quelles sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$?

b) Déterminer le point D tel que $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

c) En déduire l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

5 Déterminer l'affixe du point I, milieu du segment $[\mathrm{BC}]$.

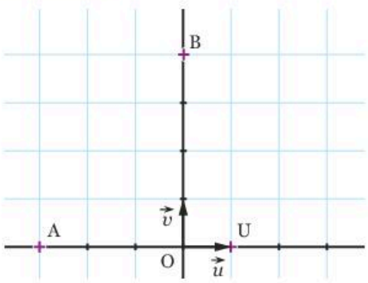
Bilan **Si A et B sont deux points d'affixe respective z_{A} et z_{B}, exprimer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ en fonction de z_{A} et z_{B}, puis celle du milieu du segment $[\mathrm{AB}]$.**

B Forme algébrique et formes trigonométriques

Objectif Déterminer une forme trigonométrique d'un nombre complexe écrit sous sa forme algébrique.

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et U placés sur la figure ci-contre et le point C d'affixe $z_{\mathrm{C}}=-3+3\mathrm{i}$. On note z_{A} et z_{B} les affixes respectives de A et B.



1 **a)** Reproduire la figure, placer C et déterminer les affixes des points A et B.

b) Calculer la longueur OA.
On appelle **module** de z_{A}, que l'on note $|z_{\mathrm{A}}|$, la longueur OA.

c) Calculer $|z_{\mathrm{B}}|$ et $|z_{\mathrm{C}}|$.

2 **a)** Donner une mesure en radian des angles $(\overrightarrow{\mathrm{OU}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}})$ et $(\overrightarrow{\mathrm{OU}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OB}})$.

b) En utilisant les coordonnées de C, déterminer les valeurs de $\cos(\overrightarrow{\mathrm{OU}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ et $\sin(\overrightarrow{\mathrm{OU}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OC}})$, puis en déduire une mesure α de l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{OU}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OC}})$. Cette mesure est un **argument** du nombre complexe z_{C}, affixe de C.

c) La mesure précédente est-elle unique ? Justifier.

d) Qu'en conclure concernant la notion d'argument d'un nombre complexe ?
On note $\arg(z_C) = \alpha + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3 **a)** Vérifier que $z_C = |z_C|[\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)]$.
Cette écriture de z_C est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe z_C.

b) Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de z_C en fonction de son module $|z_C|$ et de α.

4 **a)** Placer le point D d'affixe $z_D = 3\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Déterminer une forme trigonométrique de z_D.

b) Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe $z = -4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}$.

Bilan **Proposer une méthode permettant de déterminer le module et un argument de $z = x + \mathrm{i}y$.**

C Racines n-ièmes de l'unité

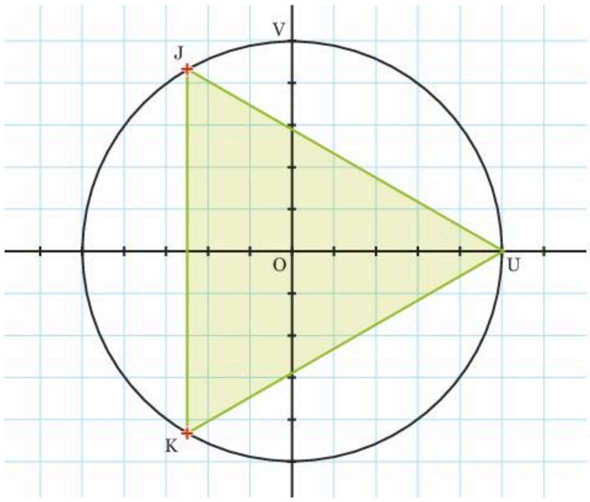
Objectif Découvrir l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité.

Soit n est un entier naturel non nul. On considère l'équation complexe $z^n = 1$.
Les solutions de cette équation sont appelées **racines n-ièmes de l'unité**. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble de ces solutions.

1 Déterminer les ensembles $\mathbb{U}_1$ et $\mathbb{U}_2$.

2 **a)** Déterminer l'ensemble $\mathbb{U}_4$.

b) Démontrer que le polygone, dont les sommets ont pour affixes les racines quatrièmes de l'unité, est un carré.



3 On considère le repère orthonormé $(\mathrm{O} ; \mathrm{U}, \mathrm{V})$ ci-contre. On admet que le triangle UJK est équilatéral.

a) Déterminer les affixes des points U, J et K sous forme exponentielle.

On note j l'affixe du point J.

b) Démontrer que l'affixe de K est j^2.

c) Justifier que 1, j et j^2 sont solutions de l'équation $z^3 = 1$.

d) Démontrer que z est solution de $z^3 = 1$ si, et seulement si, $\begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{2\pi}{3}k \end{cases}$, où k est un entier relatif. Pour quelles raisons peut-on affirmer que l'équation admet exactement trois solutions ?

4 Pour $n = 2$, $n = 3$ puis $n = 4$, démontrer que la somme des racines n-ièmes de l'unité est égale à 0.

Bilan **Déterminer l'ensemble $\mathbb{U}_n$ en précisant le nombre d'éléments le constituant, puis démontrer que la somme des racines n-ièmes de l'unité est égale à 0.**
Conjecturer une propriété du polygone dont les n sommets correspondent à l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

1 Géométrie et nombres complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ nommé **plan complexe**.

A Affixe d'un point et affixe d'un vecteur

Définitions

Soit M le point du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

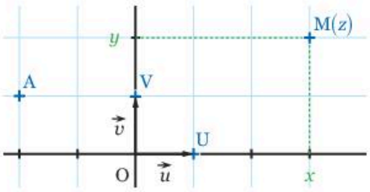
1. On appelle **affixe du point M** le nombre complexe z défini par $z=x+\mathrm{i}y$.

2. On appelle **affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$** le nombre complexe z.

3. Un **vecteur $\vec{w}$ a pour affixe z** lorsque $\vec{w}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, où M est le point d'affixe z.

EXEMPLE

Les points U, V et A ont pour affixe respective $z_{\mathrm{U}}=1$, $z_{\mathrm{V}}=\mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{A}}=-2+\mathrm{i}$.



Propriétés

Soient $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ deux vecteurs du plan complexe d'affixe respective z_1 et z_2.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2}$ a pour affixe z_1+z_2.

2. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors le vecteur $\lambda\overrightarrow{w_1}$ a pour affixe λz_1.

DÉMONSTRATION

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes dont les formes algébriques sont données par $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ et $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$.

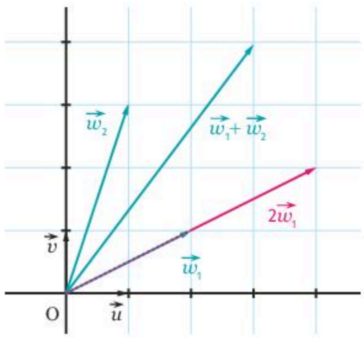
Ainsi $\overrightarrow{w_1}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w_2}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$.

1. $\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}$.

Donc : $z_{\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2}}=x_1+x_2+\mathrm{i}(y_1+y_2)$
$=(x_1+\mathrm{i}y_1)+(x_2+\mathrm{i}y_2)=z_1+z_2$.

2. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. $\lambda\overrightarrow{w_1}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda y_1\end{pmatrix}$.

Donc : $z_{\lambda\overrightarrow{w_1}}=\lambda x_1+\mathrm{i}\lambda y_1=\lambda(x_1+\mathrm{i}y_1)=\lambda z_1$.



EXEMPLE

Soient $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ deux vecteurs du plan complexe d'affixe respective $z_1=3\mathrm{i}+5$ et $z_2=1-\mathrm{i}$. Le vecteur $5\overrightarrow{w_1}-\overrightarrow{w_2}$ a pour affixe $5z_1-z_2=24+16\mathrm{i}$.

Remarque : Un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ est **direct** lorsque $(\vec{u}\,;\vec{v})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

NOTATIONS

On note respectivement :

- $\mathrm{M}(z)$
- $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(z)$
- $\vec{w}(z)$

Remarques :

- Un nombre complexe écrit sous forme algébrique $z=x+\mathrm{i}y$ peut se représenter par le point $\mathrm{M}(x\,;y)$ ou par le vecteur $\vec{w}(x\,;y)$.
- L'axe des abscisses est appelé **axe des réels**. L'axe des ordonnées est appelé **axe des imaginaires purs**.

Remarque : On dit que l'application qui associe son affixe à un vecteur du plan complexe est **linéaire**.

Remarque : On retrouve le lien $z_{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}=z_{\mathrm{M}}-z_{\mathrm{O}}$
$=z_{\mathrm{M}}$.

Propriétés

Soient A et B deux points du plan complexe d'affixe respective z_A et z_B.
1. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}$.
2. Le point I d'affixe z_I est le milieu de $[\mathrm{AB}]$ si, et seulement si, $z_\mathrm{I} = \dfrac{z_\mathrm{A} + z_\mathrm{B}}{2}$.

DÉMONSTRATION

Par définition, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ ont pour affixe respective z_A et z_B.
1. D'après la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$.
En utilisant la propriété **1.** précédente, on obtient : $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_{\overrightarrow{\mathrm{OB}}} - z_{\overrightarrow{\mathrm{OA}}} = z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}$.
2. I est le milieu de $[\mathrm{AB}]$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AI}}$.
En utilisant la propriété **2.** précédente, on obtient que $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = 2z_{\overrightarrow{\mathrm{AI}}}$.
D'où $z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A} = 2(z_\mathrm{I} - z_\mathrm{A})$ donc $z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A} = 2z_\mathrm{I} - 2z_\mathrm{A}$, soit $z_\mathrm{I} = \dfrac{z_\mathrm{A} + z_\mathrm{B}}{2}$.

Remarque : On obtient la réciproque en remontant les calculs.

EXEMPLES

1. A et B ont pour affixe respective $z_\mathrm{A} = 2 - 3\mathrm{i}$ et $z_\mathrm{B} = -1 + 5\mathrm{i}$. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a donc pour affixe $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A} = -1 + 5\mathrm{i} - (2 - 3\mathrm{i}) = -3 + 8\mathrm{i}$.
Le milieu I du segment $[\mathrm{AB}]$ a pour affixe $z_\mathrm{I} = \dfrac{z_\mathrm{A} + z_\mathrm{B}}{2} = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}$.
2. Soient A, B et C trois points d'affixe respective $z_\mathrm{A} = 6 - 3\mathrm{i}$, $z_\mathrm{B} = -2 - \mathrm{i}$ et $z_\mathrm{C} = 2 - 2\mathrm{i}$.
On a $z_\mathrm{C} = \dfrac{z_\mathrm{A} + z_\mathrm{B}}{2}$ donc C est le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$.

Application et méthode - 1

Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixe respective $z_\mathrm{A} = 5 - 2\mathrm{i}$, $z_\mathrm{B} = -1 - \mathrm{i}$ et $z_\mathrm{C} = 3 + 4\mathrm{i}$.
Déterminer l'affixe du point D tel que $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

SOLUTION

On a $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A} = -6 + \mathrm{i}$ et $z_{\overrightarrow{\mathrm{BC}}} = z_\mathrm{C} - z_\mathrm{B} = 4 + 5\mathrm{i}$
d'où $z_{3\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}}} = 3z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} - z_{\overrightarrow{\mathrm{BC}}} = -22 - 2\mathrm{i}$.
De plus, $z_{\overrightarrow{\mathrm{AD}}} = z_\mathrm{D} - 5 + 2\mathrm{i}$. Or $3\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$.
Donc $z_\mathrm{D} - 5 + 2\mathrm{i} = -22 - 2\mathrm{i}$, soit $z_\mathrm{D} = -17 - 4\mathrm{i}$.

Pour s'entraîner : exercices **27** p. 66 et **53** p. 68

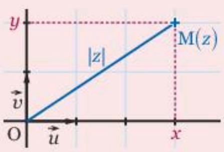
Méthode

- On calcule les affixes des différents vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $3\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et l'affixe de $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$.
- On traduit l'égalité vectorielle $3\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ par une égalité d'affixes.
- On résout l'équation obtenue.

B Module d'un nombre complexe

Définition

Soit M le point d'affixe z. Le **module** de z, noté $|z|$, est la distance OM, c'est-à-dire $|z| = \mathrm{OM}$.



Remarque : Par définition, $|z|$ est un nombre réel supérieur ou égal à 0.

Propriété

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

DÉMONSTRATION

$|z| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{OM} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{O}$ et M confondus $\Leftrightarrow z = 0$.

Propriété

Pour tout nombre complexe écrit sous forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$, on a :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } |z|^2 = z \times \overline{z}.$$

DÉMONSTRATION

Soit M d'affixe z. Alors M a pour coordonnées $(x\,;y)$. Le plan complexe étant orthonormé, on a $|z| = \mathrm{OM} = \sqrt{(x_\mathrm{M} - x_\mathrm{O})^2 + (y_\mathrm{M} - y_\mathrm{O})^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Par ailleurs, $|z|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$ puisque $x^2 + y^2 \geqslant 0$.

De plus, $z \times \overline{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 - (\mathrm{i}y)^2 = x^2 + y^2$. D'où $|z|^2 = z \times \overline{z}$.

Remarque : Pour $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

EXEMPLE

Le module de $z = 6 - 8\mathrm{i}$ est $|z| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$.

Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes et n un entier relatif non nul. On a :

1. $|\overline{z}| = |z|$ et $|-z| = |z|$.

2. • $|z \times z'| = |z| \times |z'|$;
• $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ (si $z' \neq 0$) ;
• $|z^n| = |z|^n$ (avec $z \neq 0$ si $n < 0$).

3. Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

Remarque : L'inégalité triangulaire étend celle valable sur $\mathbb{R}$ avec la valeur absolue.

DÉMONSTRATION Se reporter à l'exercice **63** p. 69 pour les points **1.** et **2.**, puis à l'exercice **145** p. 79 pour le point **3.**.

Application et méthode - 2

Déterminer les modules des nombres complexes $z_1 = (3 - 2\mathrm{i})(2 + 5\mathrm{i})$, $z_2 = (1 - 3\mathrm{i})^3$ et $z_3 = \dfrac{1 + \mathrm{i}}{3 - 2\mathrm{i}}$.

SOLUTION

On obtient :

- $|z_1| = |3 - 2\mathrm{i}| \times |2 + 5\mathrm{i}| = \sqrt{13} \times \sqrt{29} = \sqrt{377}$
- $|z_2| = |1 - 3\mathrm{i}|^3 = \sqrt{10}^3 = 10\sqrt{10}$
- $|z_3| = \dfrac{|1 + \mathrm{i}|}{|3 - 2\mathrm{i}|} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\dfrac{2}{13}} = \dfrac{\sqrt{26}}{13}$

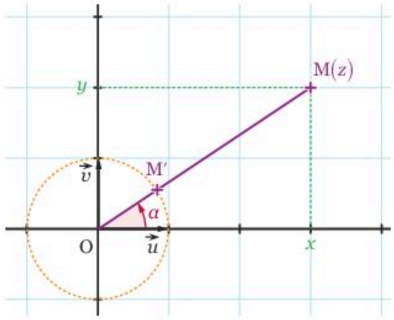
Pour s'entraîner : exercices **29** et **30** p. 67

Méthode

- Calculer le module des différents termes de l'expression, puis utiliser les égalités $|z \times z'| = |z| \times |z'|$, $|z^n| = |z|^n$ ou $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.
- Penser à simplifier le résultat obtenu en utilisant les opérations sur les racines carrées de nombres réels.

C Arguments d'un nombre complexe

Dans cette sous-partie, on suppose M distinct de O, c'est-à-dire $z \neq 0$.
On considère M' le point de la demi-droite $[\mathrm{OM})$ appartenant au cercle trigonométrique.
On note α un réel associé au point M' du cercle trigonométrique.



Définition

Le réel α est appelé **mesure, en radian, de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}})$**. On note :
$$(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}) = \alpha + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Définitions

Lorsque M est le point d'affixe z, avec $z \neq 0$, un **argument de** z, noté $\arg(z)$, est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}})$, soit $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}) = \arg(z) + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

La mesure d'angle appartenant à $]-\pi\,;\pi]$ est appelée **argument principal de** z.

> **Remarques :**
> - Si z est nul, l'angle orienté $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}})$ n'est pas défini. On ne peut donc pas parler d'argument de 0.
> - Un argument de z n'est pas unique puisque l'angle orienté $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}})$ admet une infinité de mesures, toutes égales à un multiple de 2π près.

Propriétés

On considère un nombre complexe z non nul.

1. $\arg(z) = 0 + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow z$ est un réel strictement positif.
2. $\arg(z) = \pi + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow z$ est un réel strictement négatif.
3. $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow z$ est un imaginaire pur vérifiant $\mathrm{Im}(z) > 0$.
4. $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow z$ est un imaginaire pur vérifiant $\mathrm{Im}(z) < 0$.

> **Remarque :** Ces propriétés permettent de démontrer le parallélisme ou l'orthogonalité de droites.

DÉMONSTRATION

1. $\arg(z) = 0 + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}) = 0 + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ colinéaires de même sens $\Leftrightarrow z$ est un réel strictement positif.
2. $\arg(z) = \pi + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}) = \pi + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ colinéaires de sens contraire $\Leftrightarrow z$ est un réel strictement négatif.
3. $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}) = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \mathrm{M}$ appartient à la demi-droite $[\mathrm{OV}) \Leftrightarrow z$ est un imaginaire pur vérifiant $\mathrm{Im}(z) > 0$.
4. $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}) = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \mathrm{M}$ appartient à la demi-droite $[\mathrm{OW})$, où W est le point d'affixe $-\mathrm{i} \Leftrightarrow z$ est un imaginaire pur tel que $\mathrm{Im}(z) < 0$.

EXEMPLES

1. $\arg(-2) = \pi + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ car -2 est un réel strictement négatif.
2. $\arg\left(\frac{5}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ car $\frac{5}{2}\mathrm{i}$ est un imaginaire pur et $\frac{5}{2} > 0$.

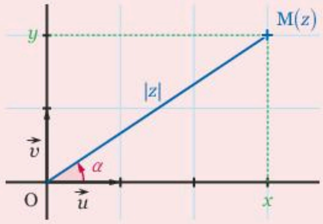
2 Formes trigonométriques et exponentielles

Dans cette partie, on considère un nombre complexe z non nul et M le point d'affixe $z=x+\mathrm{i}y$, où x et y sont réels. On note $\alpha=\arg(z)+k\times 2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

A Formes trigonométriques

Propriété

Pour tout nombre complexe non nul $z=x+\mathrm{i}y$, où x et y sont réels, on a $x=|z|\cos(\alpha)$ et $y=|z|\sin(\alpha)$.
De plus, $z=|z|(\cos(\alpha)+\mathrm{i}\sin(\alpha))$ où $\alpha=\arg(z)+k\times 2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.



Remarque : Lorsque $z\neq 0$, on a : $\cos(\alpha)=\dfrac{x}{|z|}$ et $\sin(\alpha)=\dfrac{y}{|z|}$.

DÉMONSTRATION

On a $\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\|\vec{u}\|\times\mathrm{OM}\times\cos(\vec{u};\overrightarrow{\mathrm{OM}})=1\times|z|\times\cos(\alpha)$.
Or le repère est orthonormé donc $\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=1\times x+0\times y=x$. Ainsi, $x=|z|\cos(\alpha)$.
De plus $\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\|\vec{v}\|\times\mathrm{OM}\times\cos(\vec{v};\overrightarrow{\mathrm{OM}})=1\times|z|\times\sin(\vec{u};\overrightarrow{\mathrm{OM}})=|z|\times\sin(\alpha)$.
Or $\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=0\times x+1\times y=y$ donc $y=|z|\sin(\alpha)$.
Donc $z=x+\mathrm{i}y=|z|\cos(\alpha)+\mathrm{i}|z|\sin(\alpha)=|z|(\cos(\alpha)+\mathrm{i}\sin(\alpha))$.

Définition

Tout nombre complexe $z\neq 0$ s'écrit sous la forme $z=|z|(\cos(\alpha)+\mathrm{i}\sin(\alpha))$ appelée **forme trigonométrique de z**.

Remarque : Un nombre complexe $z\neq 0$ admet une infinité de formes trigonométriques $|z|(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$, où $\theta=\alpha+k\times 2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

EXEMPLE

$z=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ est une forme trigonométrique de $z=\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}$.

Propriété

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls, on a :

$$z=z'\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=|z'|\\ \arg(z)=\arg(z')+k\times 2\pi\quad(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

Remarque : Autrement dit, z et z' sont égaux si, et seulement si, ils ont le même module et le même argument à 2π près.

DÉMONSTRATION

- On suppose que $z=z'$. Alors, $|z|=|z'|$ et $\arg(z)=\arg(z')+k\times 2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.
- Réciproquement, on suppose que $|z|=|z'|$ et $\arg(z)=\arg(z')+k\times 2\pi=\alpha+k\times 2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.
  Alors, $z=|z|(\cos(\alpha)+\mathrm{i}\sin(\alpha))=|z'|(\cos(\alpha)+\mathrm{i}\sin(\alpha))=z'$.

Propriétés (Formules d'addition)

Pour tous réels a et b, on a :

1. $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ et
$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
2. $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$ et
$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$

DÉMONSTRATION

1. Soient a et b deux réels et on définit dans le plan complexe les points $M_1(\cos(a)+i\sin(a))$ et $M_2(\cos(b)+i\sin(b))$ appartenant au cercle trigonométrique.
Ainsi, $OM_1=OM_2=1$ et $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_1})=\arg(z_{M_1})+k\times 2\pi=a+k\times 2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$,
$(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_2})=\arg(z_{M_2})+k\times 2\pi=b+k\times 2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.
On a $(\overrightarrow{OM_1}\,;\overrightarrow{OM_2})=(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_2})-(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_1})+k\times 2\pi=b-a+k\times 2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.
On obtient donc $\cos(\overrightarrow{OM_1}\,;\overrightarrow{OM_2})=\cos(b-a)=\cos(-(a-b))=\cos(a-b)$.
D'une part, $\overrightarrow{OM_1}\cdot\overrightarrow{OM_2}=OM_1\times OM_2\times\cos(\overrightarrow{OM_1}\,;\overrightarrow{OM_2})=\cos(a-b)$ et, d'autre part, le repère étant orthonormé, $\overrightarrow{OM_1}\cdot\overrightarrow{OM_2}=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$.
D'où $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$.
Par ailleurs, $\cos(a+b)=\cos(a-(-b))=\cos(a)\cos(-b)+\sin(a)\sin(-b)$
soit $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ puisque $\cos(-b)=\cos(b)$ et $\sin(-b)=-\sin(b)$.
2. Pour tout réel x, $\cos(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ et $\sin(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.
Pour tous réels a et b,
$$\begin{aligned}\sin(a+b)&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a+b)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right)\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos(b)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin(b)\\&=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)\end{aligned}$$
Pour tous réels a et b,
$$\begin{aligned}\sin(a-b)&=\sin(a+(-b))=\sin(a)\cos(-b)+\cos(a)\sin(-b)\\&=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b).\end{aligned}$$

Remarque : Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non nuls, on admet la relation de Chasles des angles orientés : $(\vec{u}\,;\vec{w})=(\vec{u}\,;\vec{v})+(\vec{v}\,;\vec{w})+k\times 2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ et $(\vec{v}\,;\vec{u})=-(\vec{u}\,;\vec{v})+k\times 2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Propriétés (Formules de duplication)

Pour tout réel a, on a :

1. $\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$
2. $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$

DÉMONSTRATION Voir exercice **82** p. 71.

Propriétés

Pour tous nombres complexes non nuls z et z' et pour tout entier naturel n, on a :

1. $\arg(\bar{z})=-\arg(z)+k\times 2\pi$ et $\arg(-z)=\arg(z)+\pi+k\times 2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
2. $\arg(z\times z')=\arg(z)+\arg(z')+k\times 2\pi$ et $\arg(z^n)=n\arg(z)+k\times 2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
3. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')+k\times 2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Remarque : L'égalité **2.** est en réalité vraie pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

DÉMONSTRATION Voir exercice **78** p. 71.

Application et méthode - 3

1. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $z = 4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$.

2. Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe $z' = -5 - 5\mathrm{i}\sqrt{3}$.

SOLUTION

1. On sait que $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc
$z = 4\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

2. On a $|z'| = \sqrt{(-5)^2 + (-5\sqrt{3})^2} = 10$.

De plus, $\cos(\alpha) = \frac{x}{|z|} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha) = -\frac{5\sqrt{3}}{10} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$ convient.

Une forme trigonométrique de z est donc :

$z = 10\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$.

Pour s'entraîner : exercices **33** et **34** p. 67

Méthode

1. Pour passer d'une forme trigonométrique à la forme algébrique d'un nombre complexe, on doit déterminer les valeurs de $\cos(\alpha)$ et de $\sin(\alpha)$ puis on développe.
2. Pour passer de la forme algébrique à une forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul, on doit :
   - calculer le module de z ;
   - calculer $\cos(\alpha) = \frac{x}{|z|}$ et $\sin(\alpha) = \frac{y}{|z|}$;
   - obtenir une valeur de α correspondant.

B Formes exponentielles imaginaires

Définition

Pour tout réel α, on définit l'**exponentielle imaginaire** (ou exponentielle complexe) de α par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)$.

Remarque : $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$.

Propriété (Relation fonctionnelle de l'exponentielle imaginaire)

Pour tous réels α et α', $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\alpha')}$.

Remarque : Cette relation permet notamment de retrouver les formules d'addition.

DÉMONSTRATION Voir exercice **94** p. 72.

Propriété

Pour tout réel α, on a $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}| = 1$ et $\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}) = \alpha + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

DÉMONSTRATION Voir exercice **90** p. 72.

Définition

Tout nombre complexe $z \neq 0$ s'écrit sous une de ses **formes exponentielles** $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, où $\alpha = \arg(z) + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Propriété

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ et $z' = |z'|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha'}$.
Alors $z \times z' = |z| \times |z'| \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\alpha')}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z^n = |z|^n \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\alpha}$ et $\frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\alpha')}$.

DÉMONSTRATION Voir exercice **95** p. 72.

EXEMPLE

Pour $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}$, on a $zz' = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{11\pi}{12}}$.

Application et méthode - 4

Déterminer une forme exponentielle du nombre $z = (-1-i)(3+3i\sqrt{3})$.

SOLUTION

$|z| = |-1-i| \times |3+3i\sqrt{3}| = \sqrt{2} \times \sqrt{36} = 6\sqrt{2}$.

$\arg(z) = \arg(-1-i) + \arg(3+3i\sqrt{3}) + k \times 2\pi$

$= \frac{-3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi = \frac{-5\pi}{12} + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Par conséquent, $z = 6\sqrt{2}\, e^{\frac{-5i\pi}{12}}$

Méthode

- On détermine le module et un argument de chaque facteur.
- On utilise les propriétés opératoires pour conclure.

Pour s'entraîner : exercices **35** et **36** p. 67

C Formules d'Euler et de Moivre

Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

DÉMONSTRATION Voir exercice **101** p. 73.

Formule de Moivre

Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$.

DÉMONSTRATION Voir exercice **104** p. 73.

Application et méthode - 5

Exprimer $\cos^3(x)$ en fonction d'une somme de cosinus de la forme $\cos(nx)$, où $n \in \mathbb{N}$.

On dit que l'on **linéarise** $\cos^3(x)$.

SOLUTION

D'après les formules d'Euler, on a : $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

Donc : $\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{(e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2 e^{-ix} + 3e^{ix}(e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3}{8}$

$= \frac{e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}}{8} = \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8}$

$= \frac{1}{4} \times \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$

Méthode

Pour linéariser, il faut se servir des formules d'Euler, puis développer.
On utilise ensuite les propriétés opératoires sur les exponentielles complexes, puis on utilise de nouveau les formules d'Euler.

Pour s'entraîner : exercices **42** p. 67 et **103** p. 73

3 Applications géométriques

A Démontrer avec les nombres complexes

Propriété

Soient A et B deux points d'affixe respective z_A et z_B dans le plan complexe.
La distance AB est égale à $\mathrm{AB} = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|$.

DÉMONSTRATION

Dans un repère orthonormé, $\mathrm{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = |(x_B - x_A) + (y_B - y_A)\mathrm{i}|$
$= |(x_B + \mathrm{i}y_B) - (x_A + \mathrm{i}y_A)| = |z_B - z_A|$.

Remarque : Calculer des distances permet de démontrer qu'un triangle est rectangle, qu'un point appartient à un cercle, à la médiatrice d'un segment, etc.

Propriétés

Soient A et B deux points d'affixe respective z_A et z_B dans le plan complexe.
1. L'ensemble (E) des points M du plan d'affixe z vérifiant $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la médiatrice du segment $[\mathrm{AB}]$.
2. Si r est un nombre réel strictement positif, alors l'ensemble (E') des points M du plan d'affixe z vérifiant $|z - z_A| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r.

DÉMONSTRATION

1. $\mathrm{M} \in (\mathrm{E}) \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow \mathrm{AM} = \mathrm{BM} \Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de $[\mathrm{AB}]$.
2. $\mathrm{M} \in (\mathrm{E}') \Leftrightarrow |z - z_A| = r \Leftrightarrow \mathrm{AM} = r \Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre A et de rayon r.

Propriétés

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts d'affixe respective z_A, z_B et z_C.
1. $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = \arg(z_B - z_A) + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
2. $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Remarque : Calculer des mesures d'angles orientés permet de démontrer le parallélisme ou l'orthogonalité de droites, l'alignement de points, etc.

DÉMONSTRATION

1. On sait que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour affixe $z_B - z_A$. On considère le point M d'affixe $z_B - z_A$.
Alors $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ d'où $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}) + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
On a donc $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}) = \arg(z_B - z_A) + k' \times 2\pi \ (k' \in \mathbb{Z})$.
On obtient bien $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}) + k \times 2\pi = \arg(z_B - z_A) + k'' \times 2\pi \ (k'' \in \mathbb{Z})$.
2. D'après la relation de Chasles sur les angles orientés, on a :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}) &= (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\vec{u}) + (\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}) + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})\\ &= -(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}) + (\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}) + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})\\ &= \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A) + k \times 2\pi = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Application et méthode - 6

Soient A, B et C trois points d'affixe respective $a=-1-\mathrm{i}$, $b=3$ et $c=-2+3\mathrm{i}$.

Déterminer la nature du triangle ABC.

SOLUTION

On calcule : $\dfrac{b-a}{c-a}=\dfrac{4+\mathrm{i}}{-1+4\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$.

Donc $\left|\dfrac{b-a}{c-a}\right|=1 \Leftrightarrow \dfrac{|b-a|}{|c-a|}=1 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=1 \Leftrightarrow \mathrm{AB}=\mathrm{AC}$.

On en déduit que le triangle ABC est isocèle en A. De plus,

$\arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right)=-\dfrac{\pi}{2}+k\times 2\pi \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=-\dfrac{\pi}{2}+k\times 2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Le triangle est donc isocèle rectangle en A.

Pour s'entraîner : exercices **39**, **40** et **41** p. 67

Méthode

On calcule le nombre complexe $\dfrac{b-a}{c-a}$, puis son module et un de ses arguments.

On conclut en fonction des valeurs obtenues :

- si le module est 1, alors $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$;
- si un argument est $-\pi$ ou π, à 2π près, alors les points sont alignés ;
- si un argument est $-\dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{\pi}{2}$, à 2π près, alors les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

B Racines n-ièmes de l'unité

Définition

On appelle **cercle unité**, et on note $\mathbb{U}$, l'ensemble des nombres complexes de module 1.
On a donc $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C}\,,|z|=1\}$.

Remarque : $z\in\mathbb{U}$ signifie que le point $\mathrm{M}(z)$ appartient au cercle trigonométrique. Autrement dit, $z\in\mathbb{U}\Leftrightarrow \exists\theta\in\mathbb{R}$, $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
On a $0\notin\mathbb{U}$.

Propriété

On considère deux nombres complexes z et z' dans $\mathbb{U}$. On a $zz'\in\mathbb{U}$ et $\dfrac{z}{z'}\in\mathbb{U}$.

Remarque : Ces propriétés traduisent la stabilité de $\mathbb{U}$ par produit et passage à l'inverse.

DÉMONSTRATION Voir exercice **124** p. 75.

Définition

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on appelle **racines n-ièmes de l'unité** les solutions de l'équation complexe $z^n=1$.

Propriétés

1. On a $\mathbb{U}_n=\{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{n}}\,,k\in\mathbb{N}\,,0\leqslant k\leqslant n-1\}$. $\mathbb{U}_n$ est composé d'exactement n éléments.

2. Si $n\geqslant 3$, alors les points dont les affixes sont les racines n-ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés.

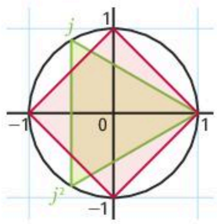
NOTATION

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

DÉMONSTRATION Voir activité **C** p. 51 pour le point **1.**. Le point **2.** est admis.

EXEMPLE

D'après l'activité **C**, $\mathbb{U}_1=\{1\}$, $\mathbb{U}_2=\{-1\,;1\}$,
$\mathbb{U}_3=\{1\,;\mathrm{j}\,;\mathrm{j}^2\}$, avec $\mathrm{j}=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$, et $\mathbb{U}_4=\{-1\,;-\mathrm{i}\,;1\,;\mathrm{i}\}$.



L'ESSENTIEL

FICHE DE RÉVISION

1 **Dans un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, on peut associer, à tout point M de coordonnées $(x\,;y)$, le nombre complexe $z = x + iy$. On dit que z est l'affixe du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.**
On appelle module de z le nombre réel $|z| = OM = \sqrt{x^2+y^2}$ et, pour $z \neq 0$, on appelle arguments de z les nombres $\arg(z) = (\vec{u}\,,\overrightarrow{OM}) + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Cela permet de :

- ✔ étudier des configurations géométriques ;
- ✔ résoudre des problèmes d'alignement de points et de parallélisme ou d'orthogonalité de droites.

2 **Pour tout nombre complexe non nul de forme algébrique $z = x + iy$, on peut déterminer une forme trigonométrique $|z|\,(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ et une forme exponentielle $|z|\,e^{i\alpha}$.**
De plus, on a $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{|z|}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{y}{|z|}$. Cela permet de :

- ✔ simplifier le calcul de module et d'arguments d'un nombre complexe défini par une somme, un produit ou un quotient de nombres complexes ;
- ✔ résoudre des problèmes géométriques, en particulier ceux en lien avec des calculs d'angles.

3 **Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ (formules d'Euler) et $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$ (formule de Moivre). Cela permet de :**

- ✔ linéariser des expressions trigonométriques ;
- ✔ simplifier l'étude de certaines suites et intégrales.

4 **L'ensemble des solutions complexes de $z^n = 1$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) est $\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2i\pi k}{n}}, k \in \mathbb{N}, 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}$.**
Cela permet de :

- ✔ résoudre certaines équations polynomiales dans $\mathbb{C}$;
- ✔ étudier des configurations liées aux polygones réguliers.

CARTE MENTALE

Toutes les mesures d'angles et d'arguments sont données à un multiple de 2π près.

NOMBRES COMPLEXES : POINT DE VUE GÉOMÉTRIQUE

Dans un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on associe à tout point $M(x\,;y)$ le nombre complexe $z = x + iy$

Le module de z est $|z| = OM = \sqrt{x^2+y^2}$

$z \times \overline{z} = |z|^2$; $AB = |z_B - z_A|$
$|z \times z'| = |z| \times |z'|$; $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ si $z' \neq 0$

Un argument de $z \neq 0$ est $\arg(z) = \alpha = (\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$

$\cos(\alpha) = \dfrac{x}{|z|}$; $\sin(\alpha) = \dfrac{y}{|z|}$
$\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$
$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
$(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

Forme trigonométrique :
Pour tout $z \neq 0$,
$z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$

$\cos(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$
$\sin(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$

Forme exponentielle :
Pour tout $z \neq 0$,
$z = |z|e^{i\alpha}$

$\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) = (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n$

Téléchargez cette fiche de révision au format PDF sur lls.fr/MXPfiche2

QCM réponse unique

9 Soient A, B et C trois points d'affixe respective $z_A = 3+2i$, $z_B = -1+5i$ et $z_C = i-1$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ a pour affixe :

a $-8+2i$
b $-4-5i$
c $4+5i$
d $8-2i$

10 Le module de $4-3i$ est égal à :

a 7
b $\sqrt{7}$
c 5
d 25

11 Une forme trigonométrique de $-\frac{3}{2}+3i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est :

a $-3\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$
b $3\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$
c $3\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$
d $3\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

12 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\cos(x)+i\sin(x))^5$ est égal à :

a $\cos^5(x)+i\sin^5(x)$
b $5\cos(x)+5i\sin(x)$
c $\cos(5x)+\sin(5x)$
d $\cos(5x)+i\sin(5x)$

QCM réponses multiples [Une ou plusieurs bonnes réponses par question]

13 Soient A, B et C trois points distincts d'affixe respective a, b et c tels que $\frac{b-a}{c-a} = -i$. Alors :

a ABC est équilatéral.
b ABC est isocèle en A.
c ABC est rectangle en A.
d ABC est scalène (triangle dont les trois côtés sont de mesures différentes).

14 Soient z et z' deux nombres complexes vérifiant $z = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $z' = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$. Alors :

a $z^3 = 27e^{-i\frac{\pi}{2}}$
b $\frac{z}{z'} = \frac{3}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$
c $z \times z' = 6e^{i\frac{7\pi}{12}}$
d $z \times z' = \frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2} + \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}i$

15 On considère le nombre complexe $z = -3\sqrt{3}-3i$.
Alors :

a une forme trigonométrique de z est $z = 6\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$.
b une forme exponentielle de z est $z = 6e^{-\frac{5i\pi}{6}}$.
c une forme exponentielle de z est $z = -6e^{\frac{5i\pi}{6}}$.
d une forme exponentielle de iz est $z = 6e^{-\frac{i\pi}{3}}$.

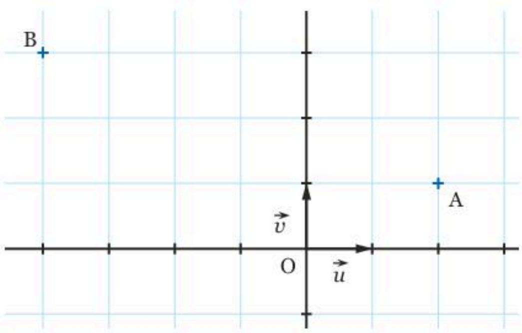
16 Pour tout réel x, on a $\sin^3(x) =$

a $\frac{1}{8}i(e^{ix}-e^{-ix})^3$
b $-\frac{\sin(3x)+3\sin(x)}{4}$
c $-\frac{1}{8}i(e^{ix}-e^{-ix})^3$
d $-\frac{\sin(3x)-3\sin(x)}{4}$

Problème

17 On se place dans un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
On considère le point C d'affixe $c = \sqrt{3}-1+(2+3\sqrt{3})i$.

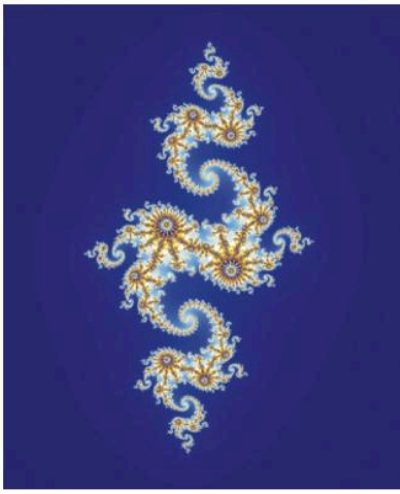
1. Déterminer graphiquement les affixes des points A et B.
2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. Déterminer l'affixe du pied de sa hauteur issue de C.
4. Déterminer l'affixe du centre de gravité de ABC.



Retrouvez plus d'exercices dans notre **cahier d'algo**
LLS.fr/PythonXP

1 Ensembles de Julia

Soient ω et c deux nombres complexes. On considère une suite de nombres complexes (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $z_0 = \omega$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = z_n^2 + c$.
Pour tout entier naturel n, on note $u_n = |z_n|$.
L'**ensemble de Julia**, noté J_c, est l'ensemble des nombres complexes ω tels que la suite (u_n) est bornée.



Objectif **Étudier des propriétés de l'ensemble de Julia J_0, c'est-à-dire lorsque $c = 0$, à l'aide d'une des deux méthodes.**

Questions préliminaires :

On pose $c = 0$.

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) lorsque $\omega = 0$? Lorsque $|\omega| = 1$?

2. Quels nombres complexes appartiennent alors précisément à l'ensemble de Julia J_0 ?

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 1 **GEOGEBRA**

1. a. Construire le cercle de centre $\mathrm{A}(0\,;0)$ et de rayon 1 et choisir une fenêtre graphique comprise entre −3 et 3 en abscisse et en ordonnée.

b. Placer un nombre complexe z_0 de manière aléatoire dans le plan en utilisant l'outil correspondant.

c. Construire alors les points z_1 à z_9 puis déplacer z_0. Que peut-on observer en fonction de la position de z_0 ?

2. Démontrer que, si $0 < |\omega| < 1$, alors la suite (u_n) est décroissante et converge, et que si $|\omega| > 1$, alors la suite (u_n) est croissante et diverge.

3. Que vient-on de démontrer pour l'ensemble J_0 ?

LABO PYTHON

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 2 **PYTHON**

On note, pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ et $\omega = \alpha + \mathrm{i}\beta$, où α, β, x_n et y_n sont des réels.

1. Exprimer les termes x_{n+1} et y_{n+1} en fonction des termes x_n et y_n.

2. a. Reproduire et compléter l'algorithme suivant, qui permet d'obtenir les valeurs successives de (u_n) pour n allant de 1 à 10 pour α et β donnés.

```
Fonction Julia (α , β) :
    x ← α
    y ← β
    Pour k allant de 1 à 10 faire :
        a ← x
        b ← y
        x ← ...
        y ← ...
        U ← ...
        Afficher U
    Fin Pour
```

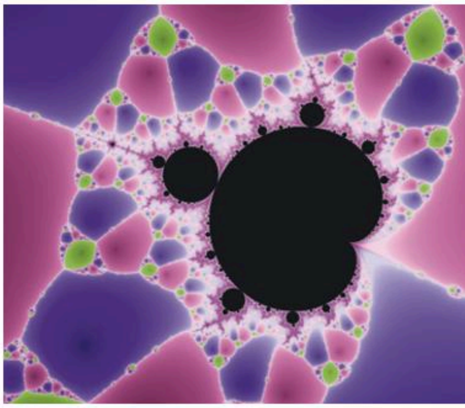
b. Programmer et tester cet algorithme avec Python pour des valeurs w telles que $0 < |\omega| < 1$ et $|\omega| > 1$. Que peut-on en conjecturer pour l'ensemble de Julia J_0 ?

3. Démontrer que si $0 < |\omega| < 1$, alors la suite (u_n) est décroissante et converge, et que si $|\omega| > 1$, alors la suite (u_n) est croissante et diverge.

4. Que vient-on de démontrer pour l'ensemble J_0 ?

2 Ensemble de Mandelbrot

Soit c un nombre complexe. On considère une suite de nombres complexes (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $z_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = z_n^2 + c$.
Pour tout entier naturel n, on note $u_n = |z_n|$.
L'**ensemble de Mandelbrot**, noté $\mathcal{M}$, est l'ensemble des nombres complexes c tels que la suite (u_n) est bornée.



Objectif Étudier quelques propriétés de l'ensemble de Mandelbrot à l'aide d'une des deux méthodes.

Question préliminaire :

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ et $c = a + \mathrm{i}b$, où a, b, x_n et y_n sont des réels.
Exprimer les termes x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de a, b, x_n et y_n.

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 1 TABLEUR

1. a. Reproduire la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C	D
1	a	-0,2		
2	b	0,3		
3	n	x_n	y_n	u_n
4	0			
5	1			
6	2			
7	3			

b. Quelles formules faut-il saisir dans les cellules **B4**, **C4**, **B5**, **C5** et **D4** pour obtenir les valeurs de la suite (u_n) dans la colonne **D** ?

c. Obtenir les 30 premières valeurs de la suite (u_n).

2. Conjecturer l'éventuelle convergence de la suite (u_n) pour $c = -0{,}2 + 0{,}3\mathrm{i}$.

3. Déterminer trois valeurs de c qui appartiennent à $\mathcal{M}$, puis trois valeurs de c qui ne lui appartiennent pas.

Histoire des maths

En 1980, pour la première fois, **Benoît Mandelbrot** parvient à représenter cet ensemble à l'aide d'un ordinateur.

LABO PYTHON

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 2 PYTHON

Les mathématiciens ont prouvé que, dès qu'il existe un terme de la suite (u_n) dépassant strictement 2, alors cette suite n'est pas bornée.

1. Reproduire et compléter l'algorithme suivant et expliquer l'affichage obtenu.

```
Fonction Mandelbrot (a , b) :
    x ← 0
    y ← 0
    n ← 0
    U ← ...
    Tant que U ⩽ 2 et n ⩽ 30 :
        X ← x
        Y ← y
        x ← ...
        y ← ...
        U ← ...
        n ← n+1
    Si n = 31 :
        Afficher « oui »
    Sinon :
        Afficher « non »
```

2. Programmer et tester cet algorithme avec Python pour les valeurs $c = -0{,}2 + 0{,}3\mathrm{i}$ et $c = 0{,}6 + 0{,}6\mathrm{i}$. Quelles conclusions concernant l'ensemble $\mathcal{M}$ peut-on obtenir à l'aide de ce programme ?

À L'ORAL

18 Soient A, B et C trois points d'affixe respective $a = 4-5\text{i}$, $b = 2\text{i}-3$ et $c = 1+\text{i}$.

1. Déterminer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $-2\overrightarrow{CB}$.

2. Déterminer l'affixe du milieu du segment $[AC]$.

19 On considère le nombre complexe $z = 4-3\text{i}$.

1. Calculer le module de z.

2. En déduire le module de $\overline{z}$.

20 Soit z un nombre complexe de module 5 et d'argument $\frac{13\pi}{3}$.

1. Déterminer l'argument principal de z.

2. Déterminer une forme trigonométrique, une forme exponentielle et la forme algébrique de z.

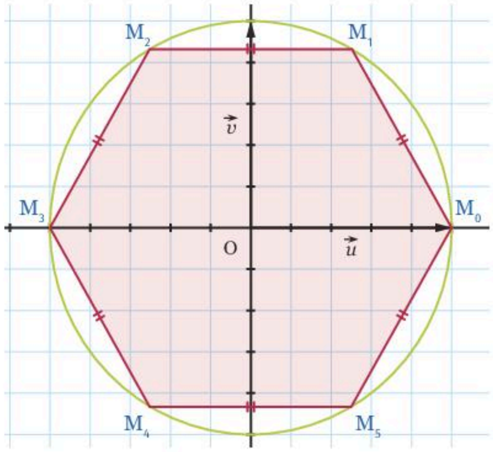
21 Soient z et z' deux nombres complexes définis par $z = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z' = 6e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.
Déterminer une forme exponentielle de zz', z'^3 et $\frac{z}{z'}$.

22 Soient A, B et C trois points distincts d'affixe respective a, b et c tels que $3(b-a) = -\text{i}(c-a)$.
Quelle est la nature du triangle ABC ?

23 Déterminer la nature des ensembles de points M d'affixe z du plan complexe vérifiant :

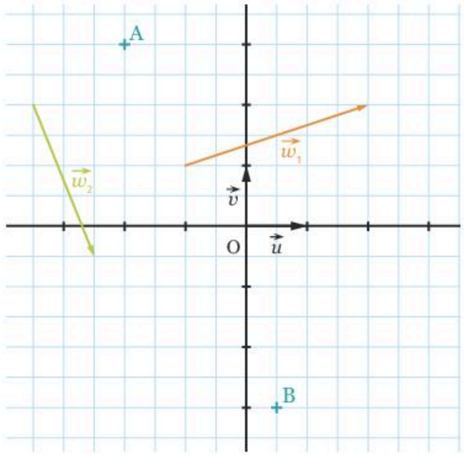
1. $|z-3+5\text{i}| = 4$ **2.** $|z+1-2\text{i}| = |z+5|$

24 En utilisant les données de la figure ci-dessous, déterminer une forme exponentielle de l'affixe des points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5.



Affixe

25 En utilisant le graphique ci-dessous, donner les affixes des points A et B, puis des vecteurs $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$.



Pour les exercices **26** *et* **27**

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, les points A, B et C d'affixe respective a, b et c.

26 On donne $a = 3+5\text{i}$, $b = -\frac{1}{4}+2\text{i}$ et $c = 3\text{i}$.
Soient $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ deux vecteurs d'affixe respective $3-4\text{i}$ et $2\text{i}-\frac{4}{5}$.
Faire une figure, placer les points A, B et C, puis des représentants des vecteurs $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$.

27 On donne $a = -\frac{1}{2}+3\text{i}$, $b = 1-\frac{4}{5}\text{i}$ et $c = 2\text{i}-7$.
Déterminer les affixes des points D, E, F, G et H définis par :

1. $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ **2.** $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

3. F est le milieu du segment $[AC]$.

4. G est le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

5. H est le point de coordonnées $(4\,;-\sqrt{2})$.

28 Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C et D d'affixe respective $a = 5-3\text{i}$, $b = 2$, $c = \text{i}-2$ et $d = 1-2\text{i}$.

1. Placer ces points dans le plan complexe. Que peut-on conjecturer sur la nature du quadrilatère ABCD ?

2. Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

3. Déterminer l'affixe du point d'intersection des droites (AC) et (BD).

Module et arguments

Pour les exercices **29** *et* **30**

Calculer le module du nombre complexe z.

29

1. $z=3\sqrt{3}$
2. $z=2\mathrm{i}+1$
3. $z=\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{3}$

30

1. $z=(2-2\mathrm{i})(3+5\mathrm{i})$
2. $z=(4\mathrm{i}-3)^3$
3. $z=\dfrac{-2-3\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$
4. $z=\dfrac{(2-\mathrm{i})^3}{6-5\mathrm{i}}$

31 Dans chaque cas, on donne un nombre complexe z et son module.

a. $z=6\mathrm{i}$ et $|z|=6$.

b. $z=\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}$ et $|z|=2$.

c. $z=-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $|z|=4$.

d. $z=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}-\dfrac{7}{2}\mathrm{i}$ et $|z|=7$.

1. Déterminer $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$, où α est un argument de z.
2. Déterminer alors une valeur de α.

32 Déterminer un argument des nombres complexes suivants.

1. $z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$
2. $z=7\mathrm{i}$
3. $z=\dfrac{-9\sqrt{3}}{2}+\dfrac{9}{2}\mathrm{i}$
4. $z=4\sqrt{3}-4\mathrm{i}$

Formes trigonométriques et exponentielles

33 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

1. $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$
2. $z=\sqrt{3}(\cos(\pi)+\mathrm{i}\sin(\pi))$
3. $z=6\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right)\right)$
4. $z=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

34 Déterminer une forme trigonométrique pour chaque nombre complexe donné.

1. $z=-5$
2. $z=\pi\mathrm{i}$
3. $z=-\dfrac{7}{2}-\dfrac{7\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$
4. $z=4\mathrm{i}-4\sqrt{3}$
5. $z=1+\mathrm{i}$
6. $z=-3+3\mathrm{i}$

35 Déterminer une forme exponentielle des nombres complexes suivants.

1. $z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$
2. $z=-\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}$
3. $z=\dfrac{-\sqrt{5}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

36 On considère les deux nombres complexes $z=3\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$ et $z'=12\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$. Déterminer une forme exponentielle des nombres donnés.

1. $3z$
2. $-3z'$
3. zz'
4. $\dfrac{z}{z'}$
5. z^3
6. $z^3z'^2$

Problèmes géométriques

37 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, soient A, B et C trois points d'affixe respective $a=-1+2\mathrm{i}$, $b=4+3\mathrm{i}$ et $c=-6+\mathrm{i}$.

1. Déterminer la longueur AB.
2. Déterminer une mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{\mathrm{BA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{BC}})$.

38 Soit ABC un triangle rectangle isocèle en B tel que $(\overrightarrow{\mathrm{BA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{BC}})=-\dfrac{\pi}{2}+k\times 2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. Déterminer $\dfrac{c-b}{a-b}$, où a, b et c sont les affixes respectives des points A, B et C.

Pour les exercices **39** *à* **41**

Dans chaque cas, A, B et C sont trois points d'affixe respective a, b et c.
Déterminer la nature du triangle ABC.

39 $a=1+2\mathrm{i}$, $b=-2+3\mathrm{i}$ et $c=-1+6\mathrm{i}$.

40 $a=6+3\mathrm{i}$, $b=-1+2\mathrm{i}$ et $c=3-\mathrm{i}$.

41 $a=2\mathrm{i}-1$, $b=3+2\mathrm{i}$ et $c=1+3\mathrm{i}$.

Formules trigonométriques

42 Linéariser les expressions suivantes.

1. $\cos^2(x)$
2. $\sin^3(x)$
3. $\cos^2(x)\sin(x)$

43 À l'aide de la formule de Moivre, exprimer, pour tout réel θ, $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

Racines de l'unité

44 Soit M un point du plan complexe d'affixe z appartenant à $\mathbb{U}$.
On donne $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}})=\dfrac{7\pi}{4}+k\times 2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.
Déterminer une forme exponentielle, puis une forme trigonométrique et la forme algébrique de z.

45 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^7=1$.

ENTRAÎNEMENT

DIFFÉRENCIATION

Parcours 1 : exercices 50 ; 61 ; 65 ; 67 ; 75 ; 88 ; 112 ; 126 et 128
Parcours 2 : exercices 55 ; 64 ; 69 ; 76 ; 79 ; 92 ; 113 et 130
Parcours 3 : exercices 56 ; 83 ; 84 ; 97 ; 103 ; 115 ; 123 et 127

1 Géométrie et nombres complexes

Exercices FLASH

46 Soient A et B deux points du plan complexe d'affixe respective $a = \frac{2}{3} - 5i$ et $b = 3i - 3$.
Déterminer l'affixe du milieu I du segment [AB].

47 Soit z le nombre complexe $z = (1-2i)(5+3i)$.
Déterminer de deux manières différentes le module de z.

48 Donner l'argument principal des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = 5$
2. $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $z_3 = \frac{5}{3}i$
4. $z_4 = -\frac{1}{6}i$

49 [Raisonner.] DÉMO

Dans le plan complexe, on considère un point M d'affixe $z = x + iy$, où x et y sont deux réels.
Soient M_1, M_2 et M_3 les points d'affixe respective $\overline{z}$, $-z$ et $-\overline{z}$. On pourra s'aider d'une figure.

1. a. Démontrer que, pour tout point A de l'axe des réels, $AM = AM_1$.
Que peut-on en conclure pour l'axe des abscisses par rapport au segment $[MM_1]$?
b. On considère la transformation du plan qui, à tout point M, associe le point M_1.
Quelle est la nature de cette transformation ?

2. a. Démontrer que le point O d'affixe 0 est le milieu du segment $[MM_2]$.
b. On considère la transformation du plan qui, à tout point M, associe le point M_2.
Quelle est la nature de cette transformation ?

3. a. Démontrer que, pour tout point B de l'axe des imaginaires purs, $BM = BM_3$.
Que peut-on en conclure pour l'axe des ordonnées par rapport au segment $[MM_3]$?
b. On considère la transformation du plan qui, à tout point M, associe le point M_3.
Quelle est la nature de cette transformation ?

4. Si A a pour affixe $3 + 2i$, expliquer comment construire ses symétriques par rapport à chaque axe du repère ?

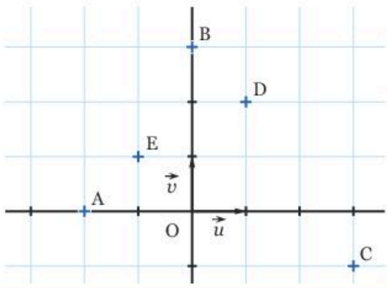
50 [Représenter.]

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit A le point d'affixe $a = 3 - 7i$.

1. Déterminer l'affixe de A_1, symétrique de A par rapport à l'axe des imaginaires purs.
2. Déterminer l'affixe de A_2, symétrique de A par rapport à O.
3. Déterminer l'affixe de A_3, symétrique de A par rapport à l'axe des réels.

Pour les exercices 51 à 54

On considère le repère orthonormé et les points suivants.



51 [Représenter.]

Donner l'affixe des points A, B, C, D et E.

52 [Calculer.]

Calculer le module de l'affixe de chaque point représenté dans le repère.

53 [Calculer.]

1. Déterminer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire l'affixe du vecteur $3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
3. Déterminer l'affixe du point F tel que B est le milieu du segment [FC].

54 [Chercher.]

1. Déterminer l'affixe du point G tel que AGED est un parallélogramme.
2. Déterminer l'affixe du centre du parallélogramme AGED.

55 [Calculer.]

On considère le plan complexe. Démontrer de deux façons différentes que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme avec $A(5+2i)$, $B(-1+3i)$, $C(-2-i)$ et $D(4-2i)$.

56 [Chercher.]

Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixe respective $a = 3i - 1$, $b = 2 + i$ et $c = 8 - 3i$.

1. Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

2. Soit D le point d'affixe $3 - i$.
Déterminer l'affixe du point E de l'axe des imaginaires purs tel que les droites (ED) et (BC) sont parallèles.

57 [Chercher.]

1. H est appelé **barycentre** des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1 ; −1 et 3, lorsque :

$$1\overrightarrow{HA} - 1\overrightarrow{HB} + 3\overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$

Déterminer l'affixe de H en fonction de celle des points A, B et C.

2. Le centre de gravité du triangle ABC est le barycentre des points A, B et C affectés chacun du coefficient 1.
Déterminer l'affixe du centre de gravité du triangle ABC en fonction de celle des points A, B et C.

58 [Calculer.]

Vérifier le résultat suivant obtenu avec une calculatrice.

$$\left|\frac{3}{5} - \frac{1}{7}i\right|$$

$$\frac{\sqrt{466}}{35} \approx 0.6167724$$

59 [Représenter.]

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit A un point d'affixe a vérifiant $OA = 4$.

1. Déterminer le module de l'affixe de A_1, symétrique de A par rapport à l'axe des imaginaires purs.

2. Déterminer le module de l'affixe de A_2, symétrique de A par rapport à O.

3. Déterminer le module de l'affixe de A_3, symétrique de A par rapport à l'axe des réels.

60 [Calculer.]

Soient les nombres complexes $z = -\frac{2}{5} + \frac{1}{3}i$ et $z' = 3 - 5i$.
Calculer, puis vérifier à l'aide d'une calculatrice, le module des nombres complexes suivants.

1. z **2.** z' **3.** $-iz$
4. $\overline{z}$ **5.** $-z' \times \overline{z}$ **6.** $z + 2z'$

61 [Calculer.]

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = 9 + 5i$ **2.** $z_2 = \frac{2}{3} - \sqrt{2}i$
3. $z_3 = 2 + \sqrt{3} + 3i$ **4.** $z_4 = 5i - \frac{\sqrt{5}}{3}$

62 PYTHON [Modéliser.]

Voici un programme écrit en Python.

```python
from math import*
def complexe(x, y):
    a = sqrt((x**2 + y**2))
    return a
```

1. À quoi cet algorithme sert-il ?

2. Que l'algorithme retourne-t-il lorsque l'utilisateur entre les valeurs $x = -4$ et $y = 3$?

63 [Raisonner.] DÉMO

Dans le plan complexe, on considère deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec x, y, x' et y' des nombres réels.

1. Démontrer que $|\overline{z}| = |z|$ et $|-z| = |z|$.

2. a. Démontrer que $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $|z^n| = |z|^n$.

3. On suppose dans cette question que $z' \neq 0$.

a. Exprimer la forme algébrique de $\frac{z}{z'}$ en fonction de x, y, x' et y'.

b. En déduire que $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

c. En déduire alors que, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$:

$$|z^n| = |z|^n.$$

64 [Calculer.]

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants, puis vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

1. $z_1 = (7 - 4i)(1 + 5i)$ **2.** $z_2 = (\sqrt{7} + 3i)^4$
3. $z_3 = \frac{5}{2 + 3i}$ **4.** $z_4 = \frac{-i}{3 - 3i}$
5. $z_5 = \frac{5 + 3i}{1 + i}$ **6.** $z_6 = \frac{(2i - 4)^2}{-1 + 2i}$

65 [Représenter.]

Dans un plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, placer les points A, B, C, D, E et F d'affixe respective a, b, c, d, e et f et vérifiant les conditions suivantes, où k désigne un entier relatif.

1. $|a| = 2$ et $\arg(a) = 0 + k \times 2\pi$.

2. $|b| = 3$ et $\arg(b) = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$.

3. $|c| = \frac{1}{2}$ et $\arg(c) = -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$.

4. $|d| = 5$ et $\arg(d) = \frac{3\pi}{4} + k \times 2\pi$.

5. $|e| = 1$ et $\arg(e) = -\frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi$.

6. $|f| = \frac{5}{4}$ et $\arg(f) = \pi + k \times 2\pi$.

66 [Calculer.]

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$. Dans chaque cas, on donne une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}})$, où M est le point d'affixe z. Déterminer la mesure principale de $\arg(z)$.

1. π **2.** 2π **3.** $\frac{3\pi}{2}$ **4.** $-\frac{17\pi}{3}$

5. $\frac{23\pi}{6}$ **6.** $-\frac{7\pi}{4}$ **7.** $\frac{12\pi}{3}$ **8.** $-\frac{9\pi}{2}$

67 [Raisonner.]

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$. Soit A le point d'affixe a vérifiant $|a|=4$ et $\arg(a)=-\frac{\pi}{6}+k\times 2\pi$, où $k\in\mathbb{Z}$.

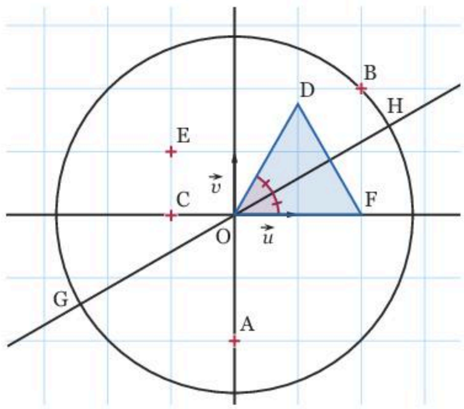
1. Déterminer le module et un argument de l'affixe de A_1, symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Déterminer le module et un argument de l'affixe de A_2, symétrique de A par rapport à O.

3. Déterminer le module et un argument de l'affixe de A_3, symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.

68 [Représenter.]

On considère le graphique suivant dans lequel le triangle OFD est équilatéral.



En utilisant les données de la figure, déterminer, lorsque cela a un sens, l'argument principal de l'affixe de chaque point.

69 [Calculer.]

Soient A, B, C et D quatre points du plan complexe d'affixe respective a, b, c et d.

On donne, avec $k\in\mathbb{Z}$, $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\frac{23\pi}{3}+k\times 2\pi$ $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OB}})=-\frac{7\pi}{2}+k\times 2\pi$, $\arg(c)=\frac{5\pi}{6}+k\times 2\pi$ et $\arg(d)=-\frac{3\pi}{4}+k\times 2\pi$.

1. Déterminer la mesure principale de $\arg(a)$ puis de $\arg(b)$.

2. Donner une mesure en radian des angles orientés $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ et $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OD}})$.

2 Formes trigonométriques et exponentielles

Exercices FLASH

70 Déterminer une forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1=3\mathrm{i}$ **2.** $z_2=-2$

3. $z_3=-5\mathrm{i}$ **4.** $z_4=\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

71 En déduire une forme exponentielle des nombres complexes de l'exercice précédent.

72 On considère le nombre complexe $z=5\mathrm{i}(1-\mathrm{i})$.

Déterminer de deux manières différentes l'argument principal de z.

73 [Représenter.]

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$. Sans calculer la forme algébrique, placer les points suivants dont l'affixe est écrite sous une forme trigonométrique.

1. A d'affixe $z_{\mathrm{A}}=3[\cos(0)+\mathrm{i}\sin(0)]$.

2. B d'affixe $z_{\mathrm{B}}=2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$.

3. C d'affixe $z_{\mathrm{C}}=\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$.

4. D d'affixe $z_{\mathrm{D}}=4\left[\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{4}\right)\right]$.

74 [Représenter.]

Pour chacun des nombres complexes suivants, déterminer le module et l'argument principal.

1. $z_1=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right]$

2. $z_2=2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right]$

3. $z_3=5\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

4. $z_4=-\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

75 [Calculer.]

Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants.

1. $z_1=3\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

2. $z_2=5\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

3. $z_3=5\left[\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right]$

4. $z_4=3\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$.

76 [Calculer.]

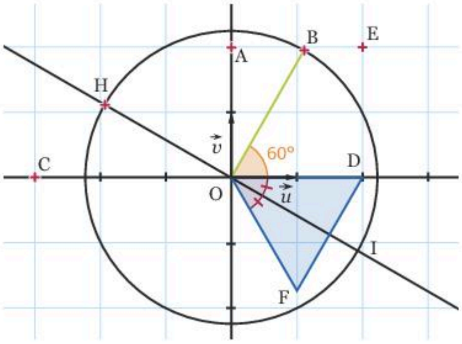
Déterminer une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ **2.** $z_2 = \pi\mathrm{i}$

3. $z_3 = 6 + 6\sqrt{3}\mathrm{i}$ **4.** $z_4 = -2 + 2\mathrm{i}$

77 [Représenter.]

En utilisant les données de ce graphique, déterminer, lorsque cela a un sens, une forme trigonométrique de l'affixe de chaque point. Le triangle OFD est équilatéral.



78 [Raisonner.] DÉMO

Soient r et r' deux réels strictement positifs et θ et θ' deux réels. Dans le plan complexe, on considère les deux nombres complexes $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ et $z' = r'(\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta'))$.

1. a. Déterminer une forme trigonométrique de $\overline{z}$ et $-z$.

b. En déduire que $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et que $\arg(-z) = \pi + \arg(z) + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

2. a. Déterminer une forme trigonométrique de $z \times z'$.

b. En déduire que :
$\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

c. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\arg(z^n) = n\arg(z) + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

3. a. Déterminer une forme trigonométrique de $\frac{1}{z'}$.

b. En déduire que $\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z') + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

c. Démontrer que :
$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

d. Exprimer alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n)$ en fonction de $\arg(z)$ et de n.

79 [Calculer.]

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $\arg(z) = \frac{\pi}{5} + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $\arg(z') = -\frac{3\pi}{7} + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Déterminer l'argument principal de :

1. zz' **2.** $\frac{z'}{z}$ **3.** z^4 **4.** $\frac{z^3}{z'}$

80 ALGO [Chercher]

Soit z un nombre complexe non nul tel que $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y des réels. On note $r = |z|$.

On définit, pour tout $a \in [-1\,;\,1]$, $\arccos(a)$ comme l'unique nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ vérifiant $\cos(x) = a$.

1. Déterminer $\arccos(1)$ et $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. Compléter l'algorithme suivant permettant d'obtenir l'argument principal a de z.

```
r ← …
c ← x/r
Si … :
    a ← arccos(c)
Sinon :
    a ← …
Retourner a
```

81 [Communiquer.]

Les nombres complexes suivants ne sont pas écrits sous forme trigonométrique. Expliquer pourquoi puis, lorsque cela est possible, écrire ces nombres sous forme trigonométrique.

1. $z_1 = -\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

2. $z_2 = 6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

3. $z_3 = 2\mathrm{i}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

4. $z_4 = \left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

5. $z_5 = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$

6. $z_6 = 0[\cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi)]$

82 [Raisonner.] DÉMO

1. En utilisant les formules d'addition, démontrer que, pour tout réel a, on a :

a. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
$= 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$

b. $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$

2. En déduire une expression de $\cos(a)$ et de $\sin(a)$ en fonction de $\cos\left(\frac{a}{2}\right)$ et de $\sin\left(\frac{a}{2}\right)$.

83 [Calculer.]

1. Calculer la valeur exacte des nombres suivants.

a. $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$. **b.** $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

c. $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$. **d.** $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

2. En déduire une forme trigonométrique du nombre suivant : $z = 3(\sqrt{2} - \sqrt{6}) + 3\mathrm{i}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$.

84 [Calculer.]

1. Exprimer $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$, où $x \in \mathbb{R}$.

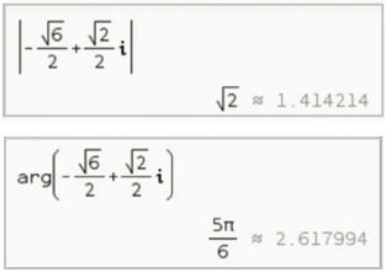
2. En déduire la valeur exacte de $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(x)\mathrm{d}x$ et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x)\mathrm{d}x$.

85 [Calculer.]

Factoriser, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'expression $\cos^2(x) - \sin(2x)$.

86 [Communiquer.]

En utilisant l'écran de calculatrice suivant, donner une forme trigonométrique, puis une forme exponentielle de $\frac{\sqrt{6}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$.



87 [Représenter.]

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$. Placer les points suivants dont on donne l'affixe sous une forme exponentielle.

1. A d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.
2. B d'affixe $z_{\mathrm{B}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
3. C d'affixe $z_{\mathrm{C}} = 3\mathrm{e}^{-\frac{5\mathrm{i}\pi}{4}}$.
4. D d'affixe $z_{\mathrm{D}} = 2\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}}$.

88 [Calculer.]

Déterminer une forme exponentielle des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{3\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$
2. $z_2 = \mathrm{i}\pi$
3. $z_3 = 6 + 6\mathrm{i}\sqrt{3}$
4. $z_4 = -2 + 2\mathrm{i}$

89 [Raisonner.]

Pour chaque nombre complexe suivant, déterminer le module et l'argument principal.

1. $z_1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{3}}$
2. $z_2 = \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$
3. $z_3 = -2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}$
4. $z_4 = \mathrm{e}^{-\frac{5\mathrm{i}\pi}{4}}$

90 [Raisonner.] DÉMO

Soit θ un nombre réel.

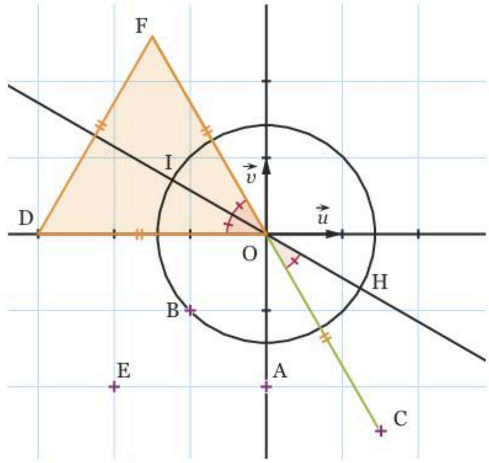
1. Rappeler la définition du nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

2. En déduire que $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 1$.

3. Justifier que $\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \theta + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

91 [Représenter.]

En utilisant les données de ce graphique, déterminer, lorsque cela a un sens, une forme exponentielle de l'affixe de chaque point. Le codage indique $\mathrm{DF} = \mathrm{OF} = \mathrm{OD} = \mathrm{OC}$.



92 [Calculer.]

Déterminer une forme exponentielle des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = -3 - 3\mathrm{i}$
2. $z_2 = \frac{7}{2} + \frac{7\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$
3. $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $z_4 = \frac{3}{2}\mathrm{i} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

93 [Calculer.]

Déterminer une forme trigonométrique, puis la forme algébrique des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
2. $z_2 = 3\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{2}}$
3. $z_3 = 6\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}$
4. $z_4 = \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$

94 [Raisonner.] DÉMO

On rappelle que, pour tout réel α, on a :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha).$$

Démontrer que, pour tous réels α et α', $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\alpha')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha'}$.

Cette relation est appelée **relation fonctionnelle** de l'exponentielle imaginaire.

95 [Raisonner.] DÉMO

Soient r et r' deux réels strictement positifs et α et α' deux nombres réels.

On considère les nombres complexes non nuls $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ et $z' = r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha'}$.

1. a. Démontrer que $z \times z' = r \times r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\alpha')}$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z^n = r^n\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\alpha}$.

2. Démontrer que $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\alpha')}$.

96 [Calculer.]

Soient z et z' deux nombres complexes définis par $z=3e^{\frac{3i\pi}{5}}$ et $z'=\frac{2}{5}e^{-\frac{2i\pi}{7}}$.

Déterminer une forme exponentielle des nombres complexes suivants.

1. $z\times z'$ **2.** $\frac{z'}{z}$ **3.** z'^5 **4.** $\frac{z}{z'^3}$

97 [Calculer.]

Déterminer la forme algébrique des nombres suivants.

1. $z_1=3e^{\frac{i\pi}{6}}\times e^{\frac{5i\pi}{3}}$ **2.** $z_2=\left(\sqrt{3}e^{-\frac{5i\pi}{2}}\right)^4$

3. $z_3=e^{-\frac{2i\pi}{3}}+e^{\frac{3i\pi}{4}}$ **4.** $z_4=4e^{-\frac{4i\pi}{3}}-2e^{\frac{i\pi}{6}}$

98 [Calculer, Raisonner.]

1. Calculer de deux manières différentes la forme algébrique du produit $e^{\frac{2i\pi}{3}}\times e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

99 EN ÉLECTRICITÉ [Modéliser.]

En électricité, on utilise la notion d'impédance complexe, notée $\underline{Z}$. L'impédance du circuit est $|\underline{Z}|$.

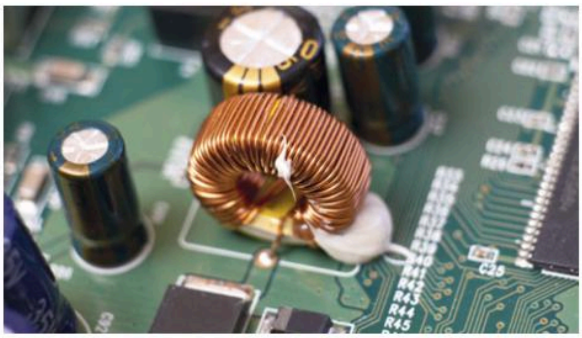
1. Dans un circuit RLC (composé d'une résistance R, d'un condensateur C et d'une bobine d'inductance L) en série, $\underline{Z}$ s'exprime par $\underline{Z}=\mathrm{R}+\left(\mathrm{L}\omega-\frac{1}{\mathrm{C}\omega}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Écrire l'impédance complexe sous forme algébrique, puis calculer l'impédance du circuit pour $\mathrm{R}=90\ \Omega$, $\mathrm{L}\omega=10\ \Omega$ et $\mathrm{C}\omega=20\ \Omega^{-1}$.

2. Dans un circuit RLC en parallèle, $\underline{Z}$ s'exprime par :

$$\frac{1}{\underline{Z}}=\frac{1}{\mathrm{R}}+\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{2}}\mathrm{L}\omega}+\mathrm{C}\omega e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Écrire l'impédance complexe sous forme algébrique, puis calculer l'impédance du circuit pour $\mathrm{R}=15\ \Omega$, $\mathrm{L}\omega=80\ \Omega$, $\mathrm{C}\omega=100\ \Omega^{-1}$.



100 [Raisonner.] DÉMO

Soient a et b deux nombres réels. On considère les nombres complexes non nuls $z=e^{ia}$ et $z'=e^{ib}$.

En calculant de deux manières différentes $z\times z'$, puis $\frac{z}{z'}$, retrouver les formules d'addition.

101 [Raisonner.] DÉMO

On rappelle que, pour tout réel θ, on a :

$$e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta).$$

Démontrer les formules d'Euler.

Histoire des maths

Leonhard Euler (1707-1783) est un mathématicien suisse. Ses domaines de recherches sont vastes : analyse (il introduit le calcul différentiel et intégral), théorie des nombres, etc. Son nom est associé à plusieurs objets mathématiques : fonction indicatrice d'Euler, constante d'Euler, droite d'Euler, etc.

102 [Calculer.]

En utilisant les formules d'Euler, démontrer que, pour tout réel x :

1. $\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$ **2.** $\sin(2x)=2\cos(x)\sin(x)$

103 [Calculer.]

Linéariser les expressions suivantes, où x est un réel.

1. $\cos^4(x)$ **2.** $\sin^5(x)$

3. $\cos^2(x)\sin^3(x)$ **4.** $\cos^3(x)+2\sin^3(x)$

104 [Raisonner.] DÉMO

On rappelle que, pour tout réel θ, on a $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.

Démontrer par récurrence les formules de Moivre.

Histoire des maths

Abraham De Moivre (1667-1754) est un mathématicien français exilé à Londres. Son étude des racines n-ièmes d'un nombre le mettent sur la voie des relations qui portent son nom.

105 [Calculer.]

Soit x un nombre réel.

1. Développer $(\cos(x)+i\sin(x))^3$.

2. À l'aide de la formule de Moivre, exprimer $\cos(3x)+i\sin(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

3. Démontrer que :

a. $\cos(3x)=4\cos^3(x)-3\cos(x)$

b. $\sin(3x)=-4\sin^3(x)+3\sin(x)$

106 [Chercher.]

En utilisant la méthode de l'exercice précédent, exprimer, pour tout réel x, $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ puis $\sin(5x)$ en fonction de $\sin(x)$.

107 [Calculer.]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^5(x)$.

1. Linéariser l'expression $\cos^5(x)$.

2. En déduire la valeur exacte de $\int_0^{\frac{5\pi}{6}} f(x)\mathrm{d}x$.

108 [Calculer.]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^2(x)\cos^3(x).$$

1. Linéariser l'expression $\sin^2(x)\cos^3(x)$.

2. En déduire la valeur exacte de $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\mathrm{d}x$.

3 Applications géométriques des nombres complexes

Exercices FLASH

109 Soient A, B et C trois points distincts du plan complexe d'affixe respective a, b et c.

Expliciter deux méthodes permettant de démontrer que ces points sont alignés.

110 Soient A, B, C et D quatre points du plan complexe d'affixe respective a, b, c et d.

On suppose que ABCD est un trapèze de base $[AB]$ et $[CD]$ vérifiant $AB = 3CD$.

Traduire les données de l'énoncé en utilisant les affixes des quatre points.

111 **1.** Écrire sous forme exponentielle et algébrique les racines quatrièmes de l'unité.

2. Les nombres complexes obtenus correspondent à l'affixe de points formant un polygone particulier. Lequel ?

112 [Calculer.]

Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixe respective $a = 4 + \mathrm{i}$, $b = 1 + 3\mathrm{i}$ et $c = 4 - \frac{5}{2}\mathrm{i}$.

1. Calculer la longueur AB.

2. Le point C appartient-il au cercle de centre A passant par B ?

113 [Calculer.]

Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixe respective $a = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$, $b = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} - 2 + \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} - 2\sqrt{3}\right)\mathrm{i}$.

Déterminer la nature du triangle ABC.

AIDE

On calculera des longueurs avant d'essayer de calculer des angles.

114 [Communiquer.]

Soient A, B, C et D quatre points du plan complexe d'affixe respective $a = 3 - 2\mathrm{i}$, $b = \mathrm{i} - 1$, $c = -1 - 2\mathrm{i}$ et $d = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

1. Calculer les longueurs AD, BD et CD.

2. Que représente D pour le triangle ABC ?

115 [Communiquer.]

Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixe respective $a = \frac{8}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{11}{6}\mathrm{i}$, $b = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}$ et $c = 2 + \mathrm{i}$.

1. Calculer $\frac{b - c}{a - c}$.

2. Que peut-on en conclure concernant les points A, B et C ?

116 [Chercher.]

D'après bac S, Centres étrangers, juin 2018

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(4z^2 - 20z + 37)(2z - 7 + 2\mathrm{i}) = 0.$$

Démontrer que les solutions de cette équation sont les affixes de points appartenant à un même cercle, dont le centre est le point P d'affixe 2.

AIDE

Commencer par résoudre l'équation.

117 [Chercher.]

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

2. Déterminer la nature du triangle OAB, où O, A et B sont respectivement le point d'affixe 0 et les deux solutions de (E).

118 [Calculer.]

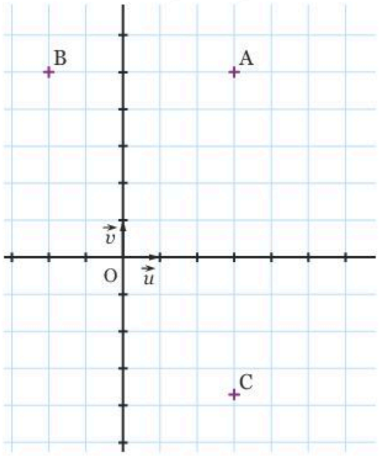
Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixe respective $a = 2 + \mathrm{i}$, $b = 4 - \mathrm{i}$ et $c = -2 - 3\mathrm{i}$.

1. Calculer $\frac{a - b}{c - a}$.

2. Que peut-on en conclure concernant les droites (AB) et (AC) ?

119 [Calculer.]

Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixe respective a, b et $c = 3 + 5(1 - \sqrt{3})\mathrm{i}$.



1. Déterminer graphiquement les affixes a et b.

2. Déterminer une mesure en radian des angles $(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC})$.

3. En déduire une mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{BCA}$.

120 [Calculer.]

Soient A, B, C et D quatre points du plan complexe d'affixe respective $a = 4 + 2\mathrm{i}$, $b = 2 - 2\mathrm{i}$, $c = 1 + 2\mathrm{i}$ et $d = -2 - 4\mathrm{i}$.

1. Calculer $\frac{a-b}{c-d}$.

2. Que peut-on en conclure concernant les droites (AB) et (CD) ?

121 [Chercher.]

Relier chaque ensemble (E) à la relation correspondante.

Ensemble (E)	**Relation**
1. Médiatrice de [AB] avec A$(-1-3\mathrm{i})$ et B$(2+\mathrm{i})$.	**a.** $\lvert z - 3 + 4\mathrm{i}\rvert = \sqrt{3}$
2. Cercle de centre A$(3-4\mathrm{i})$ et de rayon $\sqrt{3}$.	**b.** $\lvert z + 3 - 4\mathrm{i}\rvert = 0$
3. Médiatrice de [AB] avec A$(1+3\mathrm{i})$ et B$(-2-\mathrm{i})$.	**c.** $\lvert z + 3 - 4\mathrm{i}\rvert = \sqrt{3}$
4. Point d'affixe $-3+4\mathrm{i}$.	**d.** $\lvert z - 2 - \mathrm{i}\rvert = \lvert z + 1 + 3\mathrm{i}\rvert$
5. Cercle de centre A$(-3+4\mathrm{i})$ et de rayon $\sqrt{3}$.	**e.** $\lvert z\rvert = \sqrt{3}$
6. Cercle de centre A(0) et de rayon $\sqrt{3}$.	**f.** $\lvert z - 1 - 3\mathrm{i}\rvert = \lvert z + 2 + \mathrm{i}\rvert$

122 [Représenter.]

Déterminer puis représenter graphiquement l'ensemble (E) des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant :

1. $\left\lvert z - 2 + \frac{3}{4}\mathrm{i}\right\rvert = 3$

2. $\lvert z + 4 - \sqrt{3}\mathrm{i}\rvert = \lvert z - \mathrm{i}\rvert$

3. $\lvert z + \mathrm{i} - 3\rvert = -2$

4. $\lvert z + 1 - 3\mathrm{i}\rvert = \lvert 2 - 4\mathrm{i} - z\rvert$

5. $\lvert z + 5 - 2\mathrm{i}\rvert = 0$

6. $\lvert z - 3\mathrm{i} - 2\rvert = \lvert 1 - 5\mathrm{i}\rvert$

123 [Représenter.]

Déterminer puis représenter graphiquement l'ensemble (E) des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant :

1. $\left\lvert \overline{z} - 2 + \frac{3}{4}\mathrm{i}\right\rvert = 3$

2. $\lvert \mathrm{i}z - 2\mathrm{i}\rvert = 1$

3. $\lvert 3\mathrm{i}z\rvert = \lvert 3\mathrm{i}z + 3 - 9\mathrm{i}\rvert$

4. $\lvert \overline{z} - 1 + \mathrm{i}\rvert = \lvert \overline{z} - 5 + \mathrm{i}\rvert$

124 [Raisonner.] DÉMO

Soient z et z' deux nombres complexes appartenant à $\mathbb{U}$.

1. Montrer que zz' appartient à $\mathbb{U}$.

2. Justifier que z et z' ne peuvent pas être nuls puis montrer que $\frac{z}{z'}$ appartient à $\mathbb{U}$.

125 [Représenter.]

On considère dans le plan complexe les points A_k d'affixe $e^{\frac{2ik\pi}{7}}$, où k entier compris entre 0 et 6.
Quelle est la nature du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$?

126 [Calculer.]

On considère le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.
Démontrer que j et j^2 sont des racines troisièmes de l'unité.

127 [Raisonner.]

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 1$.

2. a. Montrer que résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = (1+\mathrm{i})^5$ revient à résoudre l'équation $Z^5 = 1$, où Z est à exprimer en fonction de z.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = (1+\mathrm{i})^5$.

128 [Raisonner.]

Montrer que z appartient à $\mathbb{U}$ si, et seulement si, $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

129 [Raisonner.]

Soient a, b et c trois nombres complexes appartenant à $\mathbb{U}$. Montrer que $\lvert ab + bc + ca\rvert = \lvert a + b + c\rvert$.

130 [Raisonner.]

Soit z un nombre complexe appartenant à $\mathbb{U}$.
Calculer $\lvert 1 + z\rvert^2 + \lvert 1 - z\rvert^2$.

131 [Calculer, Chercher.]

Soient A et B deux points du plan complexe d'affixe respective $a = 5 + 2\mathrm{i}$ et $b = 8\mathrm{i} - 1$.

1. Soit M le point d'affixe $z = -2 + (5 + \sqrt{2})\mathrm{i}$.

M appartient-il au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$?

2. Existe-il des points appartenant au cercle $\mathcal{C}$ dont l'affixe est un imaginaire pur ?

132 VRAI / FAUX [Communiquer, Raisonner.]

D'après bac S, Liban, juin 2010

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

1. **Proposition 1 :**

Soit le nombre complexe $z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Si l'entier naturel n est un multiple de 3, alors z^n est un nombre réel.

2. **Proposition 2 :**

On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}, \vec{v})$, le point A d'affixe $a = 2 - \mathrm{i}$ et le point B d'affixe $b = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}a$.

Le triangle OAB est rectangle isocèle.

3. **Proposition 3 :**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}, \vec{v})$, on associe à tout point M du plan d'affixe z non nulle, le point M′ d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{-10}{\overline{z}}$, où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

Il existe un point M tel que O, M et M′ ne sont pas alignés.

133 [Chercher, Communiquer.]

D'après bac S, Liban, mai 2018

1. Donner les formes exponentielle et trigonométrique des nombres complexes $1 + \mathrm{i}$ et $1 - \mathrm{i}$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = (1 + \mathrm{i})^n + (1 - \mathrm{i})^n.$$

a. Déterminer une forme trigonométrique de S_n.

b. Pour chacune des deux affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Affirmation A : Pour tout entier naturel n, le nombre complexe S_n est un nombre réel.

Affirmation B : Il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $S_n = 0$.

134 [Chercher, Calculer.]

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^n$.

En utilisant la formule de Moivre, déterminer une forme trigonométrique de u_n en fonction de n.

135 [Calculer, Représenter.]

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}, \vec{v})$. Tout point M du plan distinct de O admet pour affixe $z = r(\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha))$, où r est un réel strictement positif et α est un réel. On dit que M a pour **coordonnées polaires** $(r\,, \alpha)$ relativement au **pôle** O et à **l'axe polaire** $(\mathrm{O}\,;\vec{u})$.

1. Que représentent géométriquement r et α ?

2. **a.** Exprimer l'abscisse et l'ordonnée de M en fonction de r et de α.

b. Soit M le point de coordonnées polaires $\left(3, -\dfrac{31\pi}{4}\right)$. Déterminer les coordonnées cartésiennes de M, puis l'affixe de M sous forme algébrique.

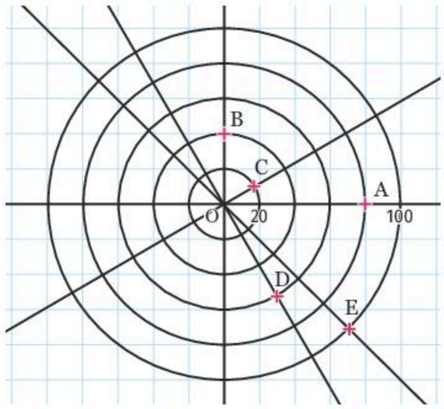
c. Soit M le point d'affixe $5\mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{3}}$.

Déterminer les coordonnées polaires de M.

3. **Application :**

Un sonar marin permet de détecter la position d'un objet à l'aide de coordonnées polaires et de la profondeur.

Voici une représentation graphique obtenue à l'aide d'un sonar en utilisant pour unité le kilomètre :



Le pôle est le point O et l'axe polaire est l'axe porté par la demi-droite $[\mathrm{OA})$.

Ainsi, le point C a pour coordonnées polaires $\left(20, \dfrac{\pi}{6}\right)$.

On donne $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right) = -\dfrac{\pi}{3} + k \times 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $\widehat{\mathrm{EOA}} = 45^\circ$.

a. À l'aide des données précédentes, déterminer les coordonnées polaires des points de la figure distincts de O.

b. Reproduire la figure et placer le point F de coordonnées polaires $\left(120, \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

c. Soit G le point d'affixe $40(-\sqrt{3} + \mathrm{i})$. Déterminer les coordonnées polaires de G et le placer sur la figure.

d. Le commandement d'un sous-marin repère une baleine située entre 60 km et 100 km avec un angle par rapport à l'axe polaire situé entre $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.

Colorier la zone de recherche.

136 DEVOIR MAISON [Chercher, Raisonner.]

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par :
$z_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = 3iz_n - 1$.
On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout entier naturel n, on note M_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)\ :\ z = 3iz - 1$. On note A le point dont l'affixe est la solution de cette équation.

2. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (u_n) par $u_n = z_n + \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$$u_{n+1} = 3i \times u_n.$$

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i\right) \times 3^n \times i^n$.

3. a. Démontrer que la distance AM_n diverge vers $+\infty$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, A, M_n et M_{n+2} sont alignés.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les droites (AM_n) et (AM_{n+1}) sont perpendiculaires.

137 [Calculer, Raisonner.]

D'après bas S, Amérique du Nord, juin 2010

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
On considère les points A d'affixe i, B d'affixe $-2i$ et D d'affixe 1.
On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct, c'est-à-dire que $\left(\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right) = \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.
Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe $z \neq i$, associe le point M′ d'affixe z' définie par $z' = \frac{2z - i}{iz + 1}$.

1. Démontrer que le point E a pour affixe :
$$z_E = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i).$$

2. Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D′ associé au point D par l'application f.

3. a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, $(z' + 2i)(z - i) = 1$.

b. En déduire que, pour tout point M d'affixe $z \neq i$, $BM' \times AM = 1$ et $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{BM'}\right) = -\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}\right) + k \times 2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

4. a. Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

b. En utilisant les résultats de la question **3. b.**, placer le point E′ associé au point E par l'application f.
On laissera apparents les traits de construction.

5. Quelle est la nature du triangle BD′E′ ? Justifier.

138 [Chercher, Communiquer.]

D'après bac S, Amérique du Sud, novembre 2018

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
On considère les points A, B, C et D distincts d'affixe respective z_A, z_B, z_C et z_D tels que : $\begin{cases} z_A + z_C = z_B + z_D \\ z_A + iz_B = z_C + iz_D \end{cases}$.
Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

139 [Raisonner, Représenter.]

D'après bac S, Pondichéry, avril 2012

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 2 cm, on désigne par A et B les points d'affixe respective 1 et -1.
Soit f la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M′ d'affixe z' tel que $z' = \frac{1 - z}{\overline{z} - 1}$.

1. Soit C le point d'affixe $z_C = -2 + i$.

a. Calculer l'affixe $z_{C'}$ du point C′, image de C par la transformation f, puis placer les points C et C′ dans un repère.

b. Montrer que le point C′ appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

c. Montrer que les points A, C et C′ sont alignés.

2. Déterminer et représenter sur la figure, l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.

3. Montrer que, pour tout point M distinct de A, le point M′ appartient au cercle $\mathcal{C}$.

4. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\frac{z' - 1}{z - 1}$ est réel.
Que peut-on en déduire pour les points A, M et M′ ?

5. Placer un point D et construire son image D′ par la transformation f et ce, uniquement à la règle non graduée et au compas.

140 VRAI / FAUX [Calculer, Communiquer.]

D'après bac S, Amérique du Nord, mai 2019

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Dans ce qui suit, z désigne un nombre complexe.
Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier.

1. L'équation $z - i = i(z + 1)$ a pour solution $\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2. Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, le nombre complexe $1 + e^{2ix}$ admet pour forme exponentielle $2\cos(x)e^{-ix}$.

3. Un point M d'affixe z tel que $|z - i| = |z + 1|$ appartient à la droite d'équation $y = -x$.

4. L'équation $z^5 + z - i + 1 = 0$ admet une solution réelle.

141 [Calculer, Raisonner.]

On considère deux réels p et q.

1. Déterminer une expression factorisée de $e^{ip}+e^{iq}$ par $e^{i\frac{p+q}{2}}$.

Cette factorisation est appelée **factorisation par l'angle moitié** et les applications de cette factorisation sont multiples. On en donne quelques exemples dans les questions suivantes.

2. a. Déterminer une factorisation de $\cos(p)+\cos(q)$ et $\sin(p)+\sin(q)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\sin(2x)-\sin(6x)=0$.

3. On considère un réel x distinct de $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

a. Calculer, pour tout entier naturel n, $\sum_{p=0}^{n} e^{ipx}$.

b. Démontrer que $\sum_{p=0}^{n} \cos(px) = \dfrac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

c. Déterminer une égalité similaire pour $\sum_{p=0}^{n} \sin(px)$.

142 APPROFONDISSEMENT

Suite de nombres complexes

D'après bac S, Nouvelle-Calédonie, novembre 2018

On définit la suite de nombres complexes (z_n) de la manière suivante : $z_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1}=\frac{1}{3}z_n+\frac{2}{3}\mathrm{i}$.

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point du plan d'affixe z_n.

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=z_n-\mathrm{i}$ et on note B_n le point d'affixe u_n.

On note enfin C le point d'affixe i.

1. Exprimer, pour tout entier naturel n, u_{n+1} en fonction de u_n.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\times(1-\mathrm{i})$.

a. Pour tout entier naturel n, calculer, en fonction de n, le module de u_n.

b. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty}|z_n-\mathrm{i}|=0$.

c. Quelle interprétation géométrique peut-on donner de ce résultat ?

3. a. Soit n un entier naturel.

Déterminer un argument de u_n.

b. Démontrer que, lorsque n décrit l'ensemble des entiers naturels, les points B_n sont alignés.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite d'équation $y=-x+1$.

143 APPROFONDISSEMENT [Calculer, Représenter.]

Pentagone régulier

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\mathrm{E}) : z^2+z-1=0$.

b. Déterminer une forme exponentielle des racines cinquièmes de l'unité. Quel polygone forment les points d'affixes les racines cinquièmes de l'unité ?

2. On note $\omega=e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

Montrer que :

a. $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$

b. $\omega^3=\overline{\omega^2}$ et $\omega^4=\overline{\omega}$.

3. a. En déduire que $\omega+\overline{\omega}$ est solution de (E).

b. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points U et V d'affixe respective 1 et i et le point A d'affixe $-\frac{1}{2}$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et passant par V.

a. Déterminer l'affixe du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la demi-droite $[\mathrm{OU})$.

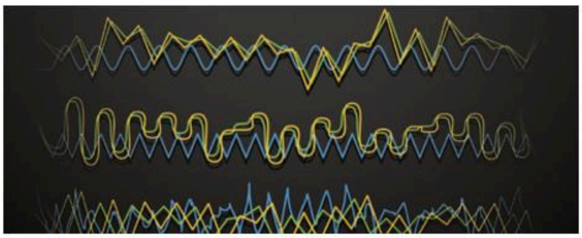
b. En déduire une méthode de construction d'un pentagone régulier à la règle non graduée et au compas, puis effectuer cette construction.

144 APPROFONDISSEMENT

Transformée de Fourier Discrète

La transformée de Fourier discrète (TFD) est un outil mathématique permettant, entre autres, l'étude des signaux numériques.

La TFD d'une séquence de n nombres complexes $(z_0\,;z_1\,;\ldots\,;z_{n-1})$ est la donnée de la séquence de n nombres complexes $(\mathrm{Z}_0\,;\mathrm{Z}_1\,;\ldots\,;\mathrm{Z}_{n-1})$ définis, pour tout entier p compris entre 0 et $n-1$, par $\mathrm{Z}_p=\sum_{k=0}^{n-1} z_k\omega^{-kp}$, où $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$.



1. Calculer la TFD de la séquence de nombres suivante $(0\,;1\,;1)$.

2. On admet que, pour tout entier naturel p allant de 0 à $n-1$, on a $z_p=\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Z}_k\omega^{kp}$.

On parle de transformation inverse de Fourier discrète.

Calculer la transformée inverse de Fourier discrète de la séquence $(3\,;-5\,;\mathrm{i})$.

145 APPROFONDISSEMENT [Calculer, Raisonner.] DÉMO

Inégalité triangulaire

Partie A : Démonstration de l'inégalité triangulaire

Soient z et z' deux nombres complexes quelconques.

L'objectif de cet exercice est de démontrer l'inégalité triangulaire : $|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z, $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$ et que $\mathrm{Re}(z) \leqslant |z|$.

2. a. Montrer que $|z+z'|^2=|z|^2+|z'|^2+2\mathrm{Re}(z\times\overline{z'})$.

b. Développer $(|z|+|z'|)^2$.

3. Déduire des questions précédentes que :

$$|z+z'| \leqslant |z|+|z'|.$$

Partie B : Cas d'égalité

L'objectif de la suite de l'exercice est de déterminer les cas d'égalité de l'inégalité triangulaire. On va donc déterminer à quelles conditions sur z et z' on a l'égalité $|z+z'|=|z|+|z'|$.

1. Démontrer que l'égalité est vérifiée si $z=0$ ou $z'=0$.
On suppose par la suite que $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.

2. Quelles conditions le nombre complexe z doit-il vérifier pour que $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)=2|z|$?

3. a. Démontrer que $|z+z'|=|z|+|z'|$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z=\lambda\dfrac{z'}{|z'|^2}$.

b. On considère M et M′ d'affixe respective z et z'. Comment peut-on interpréter géométriquement la condition d'égalité de l'inégalité triangulaire pour les points M et M′ ?

Partie C : Applications

Soient z_1, z_2, ... et z_n, n nombres complexes.

1. Montrer que $|z_1+z_2+\ldots+z_n| \leqslant |z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|$.

2. En déduire que, pour tous nombres complexes a et b, $|1+a|+|a+b|+|b| \geqslant 1$.

146 APPROFONDISSEMENT [Calculer, Raisonner.]

Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Soient r un nombre strictement positif et α un réel. Soient a le nombre complexe $a=re^{i\alpha}$ et n un entier naturel non nul.

L'objectif est de résoudre dans $\mathbb{C}$ des équations de la forme $z^n=a$.

Les solutions de cette équation sont appelées racines n-ièmes de a.

1. Résoudre l'équation pour $n=1$.

2. a. Démontrer que $-3+4i=(1+2i)^2$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2=-3+4i$.

3. a. Déterminer une forme exponentielle de $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$.

b. Justifier que $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ est solution de $z^3=-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$.

c. Déterminer une forme exponentielle de $-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$.

d. Justifier que résoudre $z^3=-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$ revient à résoudre $Z^3=1$ avec $Z=\dfrac{z}{2e^{\frac{\pi}{4}i}}$.

e. En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3=-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$.

4. En reprenant la méthode précédente, déterminer les racines 2-ièmes de i (également appelées **racines carrées** de i).

Complexes Arithmétique Matrices Graphes

Exercices transversaux en lien avec ce chapitre : 1, 9 et 10 p. 238

Le Grand Oral

Entraînez-vous au Grand Oral et enregistrez-vous sur LLS.fr/GrandOralMaths

Comme le suggère le programme, les problèmes abordés en maths expertes peuvent servir d'appui à des questions de Grand Oral. Voici un exemple, basé sur l'enseignement de spécialité, utilisant des notions de ce chapitre.

Dans le cadre de l'enseignement de spécialité, vous avez défini la notion d'intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle $[a\,;b]$.

1. Rappeler la définition de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque f est positive sur $[a\,;b]$.

2. Expliquer à travers quelques exemples comment les notions du chapitre permettent de linéariser une expression trigonométrique, puis justifier l'intérêt de la linéarisation dans le cadre d'un calcul d'intégrale.

3. Les calculs d'intégrales de fonctions trigonométriques sont essentiels dans certaines branches de la physique telles que le traitement du signal. Expliquer pourquoi en vous appuyant sur des recherches documentaires.

Méthodologie	Consulter les fiches méthode de ce manuel pour le Grand Oral p. 244

Production d'élève

On donne ci-dessous un énoncé d'exercice et une copie d'élève.

1. Trouver les erreurs de l'élève et préciser les endroits où la rédaction est incomplète.

2. Le professeur souhaite distribuer un corrigé détaillé de l'exercice. Rédiger une telle correction.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ par $f(z)=\frac{2z+1}{z-1}$.
On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.
On pose A, B et C les points d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}}=f\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\mathrm{i}\right)$, $z_{\mathrm{B}}=f(4)$ et $z_{\mathrm{C}}=f\left(1-\frac{3}{5}\mathrm{i}\right)$.

1. Déterminer l'affixe du point A sous forme exponentielle, du point B sous forme trigonométrique et du point C sous forme algébrique.

2. Déterminer les longueurs AB et AC. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

3. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}})$. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

1. $z_A=f\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i\right)=\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i}{-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}i}=-2\frac{1-i}{1+i}=2i=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\exp\left(\frac{\pi}{2}\right)$,
$z_B=f(4)=3=3$ et $z_C=f\left(1-\frac{3}{5}i\right)=\dfrac{3-\frac{6}{5}i}{-\frac{3}{5}i}=2+5i$.

2. On a $|3-2i|=3^2+(2i)^2=5$ et $|2+3i|=2^2+(3i)^2=-5$.
On ne peut rien en déduire concernant le triangle ABC.

3. On a $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})=\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\arg\left(\frac{3-2i}{2+3i}\right)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$.
Le triangle ABC est donc rectangle en A.

Exercices inversés

1 Déterminer l'expression de trois nombres complexes dont le conjugué est égal à l'inverse.

2 **1.** Déterminer l'expression d'un polynôme du second degré admettant deux racines réelles.
2. Déterminer l'expression d'un polynôme du second degré à coefficients réels admettant deux racines complexes.
3. Déterminer l'expression d'un polynôme du second degré admettant deux racines imaginaires pures.

3 Dans chaque cas, écrire un énoncé possible d'un exercice sur des nombres complexes amenant à la conclusion suivante :
1. « ABC est un triangle équilatéral. »
2. « ABC est un triangle rectangle en B. »
3. « ABCDE est un pentagone régulier. »

4 Déterminer les affixes de trois points A, B et C tels que C soit le milieu de [AB].

5 **1.** Déterminer l'expression de trois nombres complexes de module 3.
2. Déterminer l'expression de trois nombres complexes ayant pour argument principal $\frac{2\pi}{3}$.

6 Dans chaque cas, écrire un énoncé possible d'un exercice sur les nombres complexes, amenant à la conclusion suivante :
1. « B est le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses. »
2. « C se trouve sur la médiatrice de [AB]. »
3. « Les points A, B et C sont alignés. »

Recherche / Exposé
Les nombres complexes ont-ils été acceptés rapidement et facilement par l'ensemble de la communauté mathématique ? Donner d'autres exemples de notions mathématiques, pour lesquelles il a fallu attendre de nombreuses années avant qu'elles ne soient pleinement exploitées.

Pas si complexe que ça.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$, on associe, à tout point M d'affixe $z \neq -2$, le point M′ d'affixe $z' = \dfrac{\mathrm{i}z+3+3\mathrm{i}}{z+2}$.

On note $f : z \mapsto z'$ cette transformation du plan et on cherche à déterminer quelques propriétés de cette transformation.

Les parties de cet exercice sont indépendantes et chacune d'entre elles peut être réalisée seul(e) ou en groupe. Les élèves mettent leurs résultats en commun pour résoudre le problème.

PARTIE 1

1. Exprimer sous forme algébrique l'affixe de :

a. A′, l'image par f du point A d'affixe $z_A = 4-2\mathrm{i}$.

b. B, l'unique antécédent par f du point B′ d'affixe $z_{B'} = 2-4\mathrm{i}$.

2. On considère $z = x+\mathrm{i}y$ une solution de l'équation $(\mathrm{G}) : z^2 = 15+8\mathrm{i}$, où x et y sont des réels.

a. Montrer alors que $\begin{cases} x^2-y^2=15 \\ xy=4 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$.

AIDE

On rappelle que $|z|^2 = x^2+y^2$.

b. En déduire une solution de (G).

3. Un point M d'affixe z est dit invariant par f lorsque $f(z) = z$.

a. Montrer que si z est l'affixe d'un point invariant, alors z est solution de :

$$(\mathrm{F}) : z^2+(2-\mathrm{i})z-3-3\mathrm{i} = 0.$$

b. À l'aide de la question **2.**, en déduire les affixes des points fixes de f.

Remarque : Pour résoudre une équation du second degré à coefficients complexes $az^2+bz+c=0$:
- on calcule $\Delta = b^2-4ac$;
- on détermine $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$;
- les solutions sont alors données par $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$.

PARTIE 2

1. Soit $z = x+\mathrm{i}y$, où x et y sont réels.
Montrer alors que :

$$z' = \frac{3x+y+6}{(x+2)^2+y^2} + \mathrm{i}\,\frac{x^2+5x+y^2-3y+6}{(x+2)^2+y^2}.$$

2. Décrire précisément l'ensemble des points M lorsque :

a. M′ appartient à l'axe des abscisses.

b. M′ appartient à l'axe des ordonnées.

c. $\mathrm{Re}(z') = \mathrm{Im}(z')$.

PARTIE 3

1. Déterminer les complexes z_C et z_D tels que :

$$z' = \frac{\mathrm{i}(z-z_C)}{z-z_D}.$$

2. Interpréter géométriquement le module et un argument de $\dfrac{\mathrm{i}(z-z_C)}{z-z_D}$.

3. Décrire précisément l'ensemble des points M, dans les cas où M′ appartient :

a. à l'axe des abscisses.

b. à l'axe des ordonnées.

c. au cercle de centre O et de rayon 1.

MISE EN COMMUN

1. Déterminer sous forme exponentielle les affixes des points fixes de cette transformation.

2. Caractériser l'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ tels que :

a. $z' = \overline{z}$. **b.** $z' = -\overline{z}$. **c.** $|z'| = 1$.

1 Les groupes

A Loi de composition interne

Soit E un ensemble non vide.

Définitions

- On appelle **loi de composition interne** $*$ sur E, une application qui, à tout couple $(a\,;b)$ d'éléments de E, associe un unique élément de E, que l'on note $a*b$.
- Une loi de composition interne $*$ est dite **associative** lorsque, pour tout $(a\,,b\,,c)\in \mathrm{E}^3$:
$$(a*b)*c=a*(b*c).$$
- Une loi de composition interne $*$ est dite **commutative** lorsque, pour tout $(a\,,b)\in \mathrm{E}^2$:
$$a*b=b*a.$$

EXEMPLES

1. La soustraction $-$ ne définit pas une loi de composition interne sur $\mathbb{N}$. En effet, en choisissant $3\in\mathbb{N}$ et $5\in\mathbb{N}$, on a $3-5=-2\notin\mathbb{N}$.

2. La soustraction $-$ définit en revanche une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}$.
Pour tous $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$, on a bien $a-b\in\mathbb{Z}$.
- Cette loi n'est pas commutative sur $\mathbb{Z}$.
On a $3-2=1$ et $2-3=-1$ et donc $3-2\neq 2-3$.
- Cette loi n'est pas associative sur $\mathbb{Z}$.
On a $(3-2)-1=1-1=0$ et $3-(2-1)=3-1=2$ et donc $(3-2)-1\neq 3-(2-1)$.

1 On considère l'application f_1 définie pour tous nombres complexes z et z' par $f_1(z\,;z')=z+z'$.

1. Justifier que f_1 définit une loi de composition interne sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que cette loi est commutative et associative.

2 On considère l'application f_2 définie pour tous nombres complexes z et z' par $f_2(z\,;z')=z\times z'$.

1. Montrer que f_2 définit une loi de composition interne sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que cette loi est commutative et associative.

3 1. Justifier que la soustraction est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$.

2. Est-elle associative ? Commutative ?

4 Soit $*$ la loi de composition interne définie, pour tous x et x' réels, par $x*x'=x^{x'}$.

1. Cette loi est-elle commutative ?
2. Cette loi est-elle associative ?

5 1. La division définit-elle une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{R}^*$?

2. Justifier que la division n'est ni associative, ni commutative sur $\mathbb{R}^*$.
3. On admet que la division définit une loi de composition interne sur $\mathrm{E}=\{-1\,;1\}$. Est-elle associative sur E ? Commutative ?

6 1. On désigne par $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

a. Montrer que le produit matriciel définit une loi de composition interne sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Montrer que le produit matriciel est associatif sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c. Est-il commutatif ?

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Justifier que le produit matriciel définit une loi de composition interne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

B Notion de groupe

Définitions

- On dit que $e \in \mathrm{E}$ est un **élément neutre** pour la loi $*$ lorsque, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $e * x = x * e = x$.
- Si E possède un élément neutre e pour la loi $*$, un élément $x \in \mathrm{E}$ est **inversible** s'il existe $y \in \mathrm{E}$ tel que $x * y = y * x = e$. On dit que y est l'**inverse** de x.
- On dit que $(\mathrm{E}, *)$ est un **groupe** lorsque la loi $*$ est une loi de composition interne associative sur E, qu'il existe un élément neutre pour cette loi et que tout élément de E est inversible pour cette loi.
- Lorsque la loi est commutative, on dit que le groupe est **commutatif** ou **abélien**.

EXEMPLE

$(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe :
- $+$ définit une loi de composition interne associative sur $\mathbb{Z}$;
- il existe un élément neutre $e = 0$ pour cette loi : pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a + 0 = 0 + a = a$;
- tout élément $a \in \mathbb{Z}$ admet un inverse pour la loi $+$: $-a$.

7 On souhaite montrer que $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe.

1. a. Soient z et z' deux nombres complexes de module 1. Montrer que $z \times z'$ est un nombre complexe de module 1.

b. Justifier que $\times$ est une loi de composition interne associative sur $\mathbb{U}$.

2. a. Montrer que $\mathbb{U}$ possède un élément neutre pour $\times$.

b. Soit $z \in \mathbb{U}$. Montrer que $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

3. Conclure quant à l'objectif de l'exercice.

8 **1.** Montrer que la multiplication $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^*$. Est-elle associative ?

2. Montrer que $\mathbb{R}^*$ possède un élément neutre pour $\times$. Donner sa valeur.

3. Tout élément de $\mathbb{R}^*$ possède-t-il un inverse pour $\times$?

4. Que peut-on déduire des questions précédentes ?

9 Les couples suivants sont-ils des groupes ?

1. $(\mathbb{N}, +)$ **2.** $(\mathbb{C}, \times)$ **3.** $(\mathbb{Z}^*, \times)$

C Notion de sous-groupe

Définitions

Soit $(\mathrm{G}, *)$ un groupe. On dit que $(\mathrm{H}, *)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{G}, *)$ lorsque :

1. H est inclus dans G ; **2.** l'élément neutre de $(\mathrm{G}, *)$ appartient à H ;

3. pour tous x et y de H, $x * y \in \mathrm{H}$; **4.** pour tout x de H, l'inverse de x pour $*$ appartient à H.

10 **1.** Montrer que $(\{-1 ; 1\}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

2. $(\{-1 ; 1\}, +)$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$?

3. $(\mathbb{N}, +)$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$?

4. $(\mathbb{Q}^*, \times)$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$?

11 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $n\mathbb{Z} = \{nk, k \in \mathbb{Z}\}$.

Montrer que $(n\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

12 Soit $(\mathrm{G}, *)$ un groupe dont on note e l'élément neutre.

Montrer que $(\{e\}, *)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{G}, *)$.

2 Similitudes

Dans toute cette partie, on considère un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Définitions

1. On appelle **transformation du plan** toute fonction qui, à tout point M du plan, associe un unique point M′ du plan, et telle que tout point du plan possède un, et un seul, antécédent par cette fonction.

2. Soit $\vec{t}$ un vecteur. La **translation** de vecteur $\vec{t}$ est la transformation du plan qui, à tout point M, associe le point M′ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{t}$.

3. Soient Ω un point du plan et k un réel non nul. L'**homothétie** de centre Ω et de rapport k est une transformation du plan qui, à tout point M du plan, associe le point M′ tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

4. Soient Ω un point du plan et θ un réel. La **rotation** de centre Ω et d'angle θ est une transformation du plan qui, à tout point M du plan, associe le point M′ tel que $\Omega M = \Omega M'$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M} ; \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une **similitude directe** lorsqu'il existe deux nombres complexes $a \neq 0$ et b tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par $f(z) = (3+\mathrm{i})z + 2 + \mathrm{i}$. f est une similitude directe.
Cette application n'a qu'un point fixe, c'est-à-dire un complexe vérifiant $f(z_0) = z_0$ (avec $z_0 = -1$).

13 On considère une similitude directe qui transforme le point A d'affixe 4 en le point A′ d'affixe $1 - 6\mathrm{i}$ et le point B d'affixe $2 + 4\mathrm{i}$ en le point B′ d'affixe $7 - 3\mathrm{i}$.

1. Justifier que, pour tout point M d'affixe z, l'image M′ par cette similitude directe est $z' = az + b$, où a et b sont deux nombres à déterminer.

2. A-t-on $AA' = BB'$?

3. Cette transformation du plan est-elle une translation ? Une rotation ? Une homothétie ? Justifier.

14 Dans cet exercice, M désigne un point du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$. Le point M′ d'affixe $z' \in \mathbb{C}$ est l'image du point M par une transformation du plan.

1. On suppose que la transformation du plan est une translation de vecteur $\vec{t}$ d'affixe b.
Montrer que $z' = z + b$.

2. On suppose que la transformation du plan est une homothétie de centre Ω, d'affixe ω, et de rapport k.
Montrer que $z' = \omega + k(z - \omega)$.

3. On suppose que la transformation du plan est une rotation de centre Ω, d'affixe ω, et d'angle θ.
Montrer que $z' = \omega + e^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$.

4. Justifier que les transformations précédentes sont toutes des similitudes directes.

15 **D'après bac S, Antilles - Guyane, juin 2012**

Soit la transformation f qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3}{2}(1 - \mathrm{i})z + 4 - 2\mathrm{i}.$$

1. Montrer que cette transformation admet un unique point fixe Ω d'affixe $\omega = -2 - 2\mathrm{i}$.

2. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $z' - \omega = a(z - \omega)$. On précisera la valeur de a.

3. Déterminer une forme exponentielle de a.

4. En déduire que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie. On précisera ses éléments caractéristiques.

16 **D'après bac S, La Réunion, juin 2011**

Soit la transformation f qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' tel que $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + \mathrm{i})z$.
Montrer que f est une rotation dont on précisera ses éléments caractéristiques.

17 On dit qu'une transformation du plan f conserve les longueurs lorsque, pour tous points A et B du plan, si A′ et B′ désignent les images respectives de A et B par f, on a $A'B' = AB$.
Quelles sont les conditions pour qu'une similitude directe conserve les longueurs ?

LLS.fr/MXPP84

Problème de concours

18 **D'après ENSTIM MPSI, 2004**

On désigne par E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, où a, b et c sont des nombres réels.

1. Démontrer que E, muni de l'addition des matrices, est un groupe commutatif.

2. a. Si A et B sont deux éléments de E, AB appartient-il à E ?

b. Si A et B sont deux éléments de E, a-t-on $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$?

c. Tout élément non nul de E est-il inversible pour le produit ?

3. On désigne par G l'ensemble des matrices de E telles que $a > 0$ et $b > 0$.
Démontrer que G est un groupe multiplicatif.

19 **D'après concours des écoles des mines, 2006**

Soit f la fonction qui à un complexe z associe, lorsque c'est possible, $f(z) = \dfrac{z^2}{z-2\mathrm{i}}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.

2. a. Déterminer les racines carrées complexes de $8-6\mathrm{i}$.

b. En déduire tous les antécédents de $1+\mathrm{i}$ par f.

3. Soit h un nombre complexe. Discuter, suivant les valeurs de h, le nombre d'antécédents de h par f.

4. On désigne par $f(\mathcal{D})$ l'ensemble des éléments de z' de $\mathbb{C}$ tel qu'il existe $z \in \mathcal{D}$ vérifiant $z' = f(z)$.

Si $f(\mathcal{D}) = \mathbb{C}$, on dit que f est surjective.

a. Déterminer l'ensemble $f(\mathcal{D})$.

b. La fonction f est-elle surjective ?

5. On dit que f est injective lorsque, pour tous nombres z et z' de $\mathcal{D}$, si $f(z) = f(z')$ alors $z = z'$.

La fonction f est-elle injective ?

Soit g la fonction définie sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et telle que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, $g(z) = |z-2\mathrm{i}|^2 \dfrac{z^2}{z-2\mathrm{i}} + z^3$.

6. Soit $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe appartenant à $\mathcal{D}$.

a. Montrer que la partie réelle de $g(z)$ est $2x^3 - 2xy^2 - 4xy$.

b. Déterminer la partie imaginaire de z.

20 **D'après ENAC, 2016**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.

Soit $\theta \in \,]-\pi\,;\,\pi[$. On considère le nombre complexe $z = 1 + \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

1. Le module de z vaut :

a. $|z| = \sqrt{2+2\cos\theta}$.

b. $|z| = 2$.

c. $|z| = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

d. $|z| = \sqrt{2} + \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

2. Un argument de z vérifie :

a. $\alpha = \dfrac{\theta}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b. $\alpha = \dfrac{\theta}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c. $\tan\alpha = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

d. $\tan\alpha = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. On obtient alors :

a. $z = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.

b. $z = 2\left|\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.

c. $z = 2\left|\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right|\left(\cos\left|\dfrac{\theta}{2}\right| + \mathrm{i}\sin\left|\dfrac{\theta}{2}\right|\right)$.

d. $z = 2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left(1 + \mathrm{i}\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$.

21 **D'après ENAC, 2018**

Soit a un paramètre réel. On considère l'équation :

$$2(1+\mathrm{i})z^2 + 2(a+\mathrm{i})z + \mathrm{i}a(1-\mathrm{i}) = 0.$$

Déterminer les solutions de cette équation.

AIDE

Soient a, b et c trois nombres complexes avec $a \neq 0$.
On admet que l'équation du second degré à coefficients complexes $az^2 + bz + c = 0$ se résout de la même manière que les équations à coefficients réels :

- on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$;
- on détermine $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\Delta = \delta^2$;
- on en déduit les solutions données par $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$.

Avant	Maintenant	Après
Les ensembles de nombres usuels : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Propriétés sur les nombres réels.	Les nombres complexes $\mathbb{C}$. Utilisation des nombres complexes en géométrie plane. Résolution d'équations polynomiales.	Étude des similitudes directes. Étude des structures algébriques particulières : les groupes, les anneaux, les corps, les algèbres, les espaces vectoriels.

Partie 2 Arithmétique

Histoire des mathématiques

La science des nombres

L'arithmétique désigne de façon générale la science des nombres. Plus spécifiquement, depuis l'Antiquité, beaucoup de résultats de l'arithmétique sont liés à l'étude des nombres entiers : des caractéristiques de certains d'entre eux aux relations des uns avec les autres, comme les nombres premiers, pairs, impairs, amis, parfaits, etc. On peut citer aussi les triplets pythagoriciens, les nombres triangulaires, les nombres polygonaux de Diophante, les nombres de Mersenne, de Fermat, de Gauss, de Sophie Germain, ceux de Carmichael et bien d'autres encore.

Bien que souvent considérée comme très théorique, l'arithmétique a cependant permis de mieux comprendre l'infini et les différents ensembles de nombres. Elle trouve de nos jours de nombreuses applications notamment en informatique (systèmes de cryptographie ou codes correcteurs d'erreur).

Certaines conjectures compréhensibles de tous restent encore de nos jours non démontrées, comme la conjecture de Christian Goldbach (1742) qui écrit que « *tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers* ». (Ci-dessus : lettre de Goldbach exposant sa conjecture à Euler.)

-500 | 0 | 500 | 800 | 1500 | 1600 | 1700

MATHÉMATIQUES GRECQUES | MONDE ARABE | RENAISSANCE ITALIENNE | FORT DÉVELOPPEMENT DES SCIENCES

- Pythagore (-580 ; -495)
- Euclide (environ -300)
- Nicomaque de Gérase (Ier et IIe siècle)
- Théon de Smyrne (Ier et IIe siècle)
- Diophante (IIIe siècle)
- Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638)
- Marin Mersenne (1588-1648)
- Pierre de Fermat (1607-1665)

Retrouver cette frise au format interactif sur LLS.fr/MXPP86

Le grand théorème de Fermat

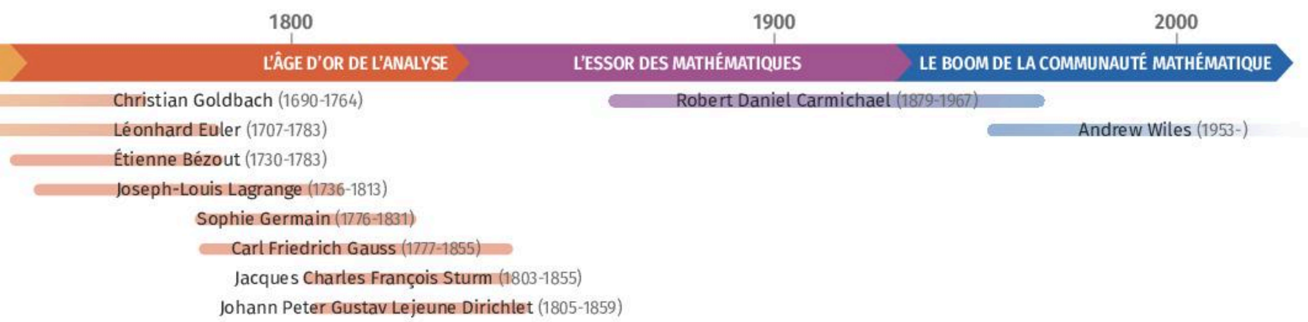
Fermat

Andrew Wiles

La compréhension des problèmes arithmétiques est souvent très aisée, mais leur résolution peut générer des recherches et des raisonnements particulièrement délicats. En lisant une édition de son époque des *Arithmétiques* de Diophante, **Fermat** (1607-1665) rédige l'énoncé d'un résultat que l'on appellera le grand théorème de Fermat : « *Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, il n'existe pas de nombres entiers strictement positifs x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$* ». Il ajoute dans la marge : « *J'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir* ». Nous n'avons aujourd'hui encore pas retrouvé la trace d'une telle démonstration. Beaucoup de mathématiciens à travers l'histoire se sont attachés à essayer de démontrer ce qui n'était alors qu'une conjecture. Ce n'est qu'en 1993 (puis en 1994) que le mathématicien **Andrew Wiles** présente ses travaux et précise que le grand théorème de Fermat est un corollaire de ses résultats. Il aura donc fallu plus de 300 ans pour parvenir à une démonstration du résultat et faire appel à de nombreuses branches des mathématiques qui n'existaient pas au XVII^e^ siècle. Une démonstration reposant sur les outils dont disposait Fermat est toujours à l'étude aujourd'hui.

Sophie Germain

Mathématicienne et philosophe, Sophie Germain (1776-1831) s'est passionnée pour les mathématiques à l'âge de treize ans en lisant les œuvres d'Archimède. Afin de s'intégrer dans un milieu exclusivement masculin, elle choisit le pseudonyme d'Antoine Auguste Le Blanc pour correspondre avec Lagrange et Gauss et apporte des avancées notables sur la démonstration du théorème de Fermat et sur la théorie des nombres.
À la fin de sa vie, elle travaille sur les mathématiques des surfaces et, en 1816, elle devient la première femme à recevoir le prix de l'Académie des Sciences et à pouvoir assister à ses séances de travail.

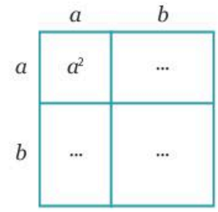


A Diophante, le père de l'inconnue

Diophante est un mathématicien de l'Antiquité ayant certainement vécu au IIIe siècle après J.-C. Il a surtout travaillé en arithmétique dans la résolution des équations. Son œuvre majeure, *les Arithmétiques*, ne nous est parvenue qu'à travers des copies et interprétations successives.

Durant l'Antiquité, l'écriture symbolique n'existait pas et la résolution des équations devait s'appuyer sur des résultats provenant de la géométrie. Voici quelques problèmes étudiés par Diophante.

Dans les questions qui vont suivre, nous avons besoin de connaître une identité remarquable démontrée par Euclide dans *Les Éléments* à partir du gnomon (une figure qui interprète des produits en termes d'aire).



1 Le gnomon ci-contre permet d'obtenir l'identité remarquable bien connue $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Compléter ce gnomon et expliquer en quoi il constitue une démonstration visuelle de cette identité remarquable.

Avec une méthode similaire, Diophante a montré que $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + ab$.

2 **Livre I problème 27 des *Arithmétiques* : *Trouver deux nombres dont la somme est 20 et le produit est 96*.**

Avec nos connaissances actuelles concernant les équations du second degré, ce problème se résout facilement. Mais Diophante ne connaissait pas ce formalisme et procéda donc différemment. Afin de ne pas avoir deux valeurs à chercher à ce problème, il propose de les écrire à partir d'une *inconnue* qu'il nomme « *nombre non dit* » en grec ancien. Il la définit comme étant la moitié de leur différence.
En se servant de la deuxième identité donnée à la question **1**, il indique ensuite que le carré de leur demi-somme doit être égal à 100 (car $\left(\frac{20}{2}\right)^2 = 100$), donc que le carré de l'*inconnue* augmenté du produit des deux nombres cherchés vaut 100. Ainsi, 96 augmenté du carré de l'*inconnue* vaut 100. Le carré de l'*inconnue* vaut donc 4, donc cette *inconnue* vaut 2. Il en résulte que la plus grande des solutions vaut $10+2$ soit 12 et que l'autre vaut $10-2$ soit 8. Il précise enfin que sa méthode fonctionne, à condition que le carré de la demi-somme à trouver soit plus grand que leur produit.

a) Soient a et b les deux nombres à trouver, S leur somme et P leur produit. Avec nos notations actuelles, montrer que $a = \frac{S}{2}+x$ et $b = \frac{S}{2}-x$, où x correspond à l'*inconnue* (la moitié de la différence entre a et b).

b) Résoudre le problème en utilisant la deuxième identité de la question **1** et donner alors les solutions proposées par Diophante en fonction de S et P.

c) En utilisant le principe de Diophante, sans les formules trouvées à la question **2 b)**, déterminer deux nombres dont la somme vaut 40 et le produit 364.

3 **Livre II problème 8 : *Partager 16 en deux carrés.***

On cherche ici deux nombres dont la somme de leur carré vaut 16. Soit l'*inconnue* l'une de ces valeurs. Diophante propose d'écrire la deuxième valeur sous la forme m fois l'*inconnue* (où m est un nombre strictement positif, de préférence entier) moins 4 (car $4 = \sqrt{16}$). En prenant $m = 2$, il obtient alors une équation du premier degré qu'il sait résoudre et dont la solution est $\frac{16}{5}$. De là, il trouve que l'autre valeur recherchée est donc $\frac{12}{5}$.

a) En appliquant la méthode de Diophante, retrouver que $\frac{16}{5}$ et $\frac{12}{5}$ sont bien solutions du problème, autrement dit que $\left(\frac{16}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2 = 16$.

b) On note a, b et c trois nombres qui vérifient $a^2+b^2 = c^2$. On suppose que a est l'*inconnue*.
En utilisant nos notations actuelles et en suivant la méthode de Diophante, montrer que $a = \frac{2mc}{1+m^2}$, puis déterminer b en fonction de m et c.

B Les nombres de Mersenne

Marin Mersenne (1588-1648) est un religieux à la culture encyclopédique qui s'intéresse particulièrement aux sciences. En 1644, il publie ses *Cogitata Physico-Mathematica* et, dans le paragraphe XIX de l'introduction, évoque les nombres parfaits et fait allusion à des nombres qui s'écrivent sous la forme $2^n - 1$. Ce paragraphe a inspiré de nombreux problèmes mathématiques abordés notamment par Euler, Legendre et Gauss.
En voici une traduction en français.


Marin Mersenne (1588-1648)

À ce point, il sera utile de noter que les 28 nombres présentés par Petrus Bungus comme parfaits dans le chapitre XXVIII de son livre sur les nombres, ne sont pas tous parfaits. En effet, 20 sont imparfaits, de sorte qu'il n'y en a que 8 parfaits, à savoir 6, 28, 496, 8 128, 3 355 033 614, 8 589 869 056, 137 438 691 328 et 2 305 843 008 139 952 128. (...)

De plus, les nombres parfaits sont si rares que jusqu'à présent, seuls onze ont pu être trouvés, c'est-à-dire trois de plus que ceux de Bungus ; car il n'y a pas d'autres nombres parfaits en dehors de ces huit, à moins de dépasser l'exposant 62, en $1+2+2^2+\ldots$ Le neuvième nombre parfait est la puissance de l'exposant 68 moins 1 ; le dixième, la puisssance de l'exposant 128 moins 1 ; le onzième, enfin, la puissance 258 moins 1, c'est-à-dire la puissance 257, diminuée de l'unité, multipliés par la puissance 256.

Extrait du paragraphe XIX de *Cogitata Physico-Mathematica* de Marin Mersenne.

1 a) Un nombre parfait est un nombre égal à la somme de ses diviseurs positifs stricts.
Vérifier que 6 et 28 sont bien des nombres parfaits.

b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

c) Pour aborder les nombres parfaits, on utilisera la propriété suivante.
« Pour tous entiers a et n supérieurs ou égaux à 2, a^n-1 est divisible par $a-1$. »
Démontrer ce théorème en déterminant la valeur de la somme $1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}$.

2 a) En utilisant la propriété précédente, montrer que si n n'est pas un nombre premier, alors 2^n-1 n'est pas un nombre premier.

b) Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $\mathrm{M}_n = 2^n - 1$.
Étudier la primalité des nombres $\mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3, \cdots, \mathrm{M}_{10}$.

c) À ce stade, on pourrait conjecturer que si n est premier, alors M_n est aussi premier.
Montrer que M_{11} n'est pas premier, bien que 11 le soit.

AIDE
2 a) On pourra noter k et m les entiers tels que $n=km$, puis utiliser le fait que $2^n-1=(2^k)^m-1$.

Remarques :
- Le deuxième paragraphe de Mersenne est surprenant : en effet, il indique qu'il faut aller au-delà de la puissance 62 pour trouver des nombres parfaits. Or, justement, M_{61} est un nombre premier, et $2^{60}\mathrm{M}_{61}$ est un nombre parfait (valeur trouvée en 1883 par Pervouchine).
- Mersenne parle également des puissances 68 et 258 comme des nombres parfaits. Or les nombres M_{67} et M_{257} ne sont pas premiers.
- Le 20 décembre 2018, Patrick Laroche trouve le plus grand des nombres premiers connus à ce jour : $2^{82589933}-1$.
Il s'écrit avec 24 862 048 chiffres. C'est un nombre de Mersenne.

Avant de commencer

Prérequis

1. Utiliser la parité d'un nombre.
2. Connaître les principaux critères de divisibilité.
3. Utiliser la notion de diviseur.
4. Savoir raisonner par récurrence.
5. Savoir écrire un algorithme et utiliser le langage Python.

1 Travailler avec la parité des nombres

1. Démontrer que la somme de deux nombres pairs est un nombre pair.

2. Démontrer que le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.

3. Reproduire et compléter les tableaux suivants.

+	Pair	Impair
Pair		
Impair		

×	Pair	Impair
Pair		
Impair		

2 Rédiger une démonstration

1. Montrer que 7 et 11 sont la différence de deux carrés.

2. Démontrer que tout entier naturel impair peut s'écrire comme la différence de deux carrés successifs.

3 Comprendre une fonction Python

Soit la fonction **inconnue** écrite en Python.

```
def inconnue(a, b):
    r = False
    if a/b == a//b:
        r = True
    return r
```

Que permet de déterminer cette fonction ?

4 Déterminer des diviseurs

Justifier que 2020 est divisible par 5 et par 10.
Est-il divisible par 3 ?

5 Diviseurs communs

Lors d'un tournoi de jeu de société, on compte 60 hommes et 40 femmes inscrits.

Les organisateurs veulent créer des équipes mixtes contenant toutes le même nombre x d'hommes et y de femmes.

Comment les équipes peuvent-elles être constituées sachant qu'une équipe doit comprendre au moins quatre personnes et au plus dix personnes ?

6 Adapter une démarche de recherche

2 020 peut-il s'exprimer comme la somme de quatre entiers consécutifs ?

7 Travailler avec la récurrence

Soit (U_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $\mathrm{U}_{n+1} = 2^{n+1} + \mathrm{U}_n$ et de premier terme $\mathrm{U}_0 = 2$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, U_n est pair.

8 Problème

1. Soit n un entier naturel.
Démontrer que n et n^2 ont la même parité.

2. Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.
Il existe alors deux entiers a et b, avec b non nul, tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.
Quitte à la simplifier, on suppose que $\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible.

a. Démontrer que a^2 est pair, puis en déduire la parité de a.

b. Démontrer alors que b est pair.

c. Déduire une contradiction des questions précédentes. Que peut-on en conclure ?

Anecdote

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) est un célèbre mathématicien et physicien originaire de la principauté du Brunswick. D'une famille pauvre, son instituteur J.G. Büttner et son assistant Martin Bartels lui ont permis de développer ses talents mathématiques précoces. Il publie ses premiers résultats dès 19 ans et à 24 ans, il introduit les congruences étudiées dans ce chapitre dans ses *Discussions arithmétiques*, qui deviendra très vite une référence en arithmétique.

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Chapitre
3

L'arithmétique est une branche des mathématiques qui étudie les propriétés des entiers.
Euclide, Diophante, Fermat, Gauss et, plus récemment, Andrew Wiles ont contribué aux avancées dans ce domaine.
L'arithmétique est aujourd'hui au centre des problèmes liés à l'informatique (codage, cryptographie).
Les bases de l'arithmétique sont les opérations enseignées à l'école primaire. Dans ce chapitre, nous allons gravir une nouvelle marche en étudiant les notions de divisibilité dans $\mathbb{Z}$ et de congruence.

Capacités attendues - chapitre 3

1. Déterminer les diviseurs d'un entier.
2. Montrer qu'un entier a est divisible par un entier b.
3. Déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne.
4. Déterminer des restes à l'aide de congruences.
5. Résoudre des équations avec des congruences.
6. Démontrer des critères de divisibilité.
7. Étudier des problèmes de codage et de chiffrement.

A Multiples et diviseurs

Objectif Revoir la notion de multiples et de diviseurs.

1 Éline et Lucie montent un escalier comportant moins de 40 marches.
Éline les monte trois par trois et il lui reste une marche à gravir.
Lucie les monte deux par deux et il lui reste également une marche à gravir.
Combien cet escalier peut-il comporter de marches ?

2 Compléter la fonction Python ci-contre afin qu'elle donne les listes de tous les multiples positifs inférieurs ou égaux à d de deux nombres entiers naturels a et b, les valeurs de a, b et d étant saisies par l'utilisateur.

En utilisant la fonction **mult**, retrouver les résultats de la première question.

```python
from math import*
def mult(a, b, d):
  c1 = floor(...)
  c2 = floor(...)
  l1 = []
  l2 = []
  for i in range(1, c1 + 1):
    l1.append(...)
  for i in range(1, c2 + 1):
    l2.append(...)
  return(l1, l2)
```

AIDE

2 La fonction **floor** donne la partie entière d'un nombre.
La fonction **append** permet d'ajouter un élément à la fin d'une liste.

3 On suppose dans la suite que l'escalier possède 37 marches.

a) Donner la liste des diviseurs positifs de 36.

b) Louis se trouve déjà sur la première marche de l'escalier.

De « combien de façons » (une par une, deux par deux, etc.) peut-il monter les marches de l'escalier pour arriver pile en haut, sachant qu'il ne peut pas monter les marches plus de quatre par quatre ?

4 Si a et b sont deux entiers, on dit que b est un **multiple** de a lorsqu'il existe un entier k tel que $b = ka$.
On dit aussi que a est un **diviseur** de b ou que a **divise** b et on note $a \mid b$.
Compléter les propositions suivantes.

a) $25 \mid 125$ signifie que 25 est un ... de 125.

b) $26 \mid 312$ signifie que 312 est un ... de 26.

c) Comment peut-on noter que 75 est divisible par 5 ?

Bilan **Pour deux entiers naturels a et b, dans quel cas peut-on dire que a divise b ?**

B À la bonne heure !

Objectif Revoir la division euclidienne dans $\mathbb{N}$ et introduire cette division dans $\mathbb{Z}$.

On observe les grandes aiguilles de deux horloges : la première horloge H_1 avance chaque heure de 1 minute, alors que la seconde H_2 retarde de 2 minutes chaque heure. Les deux horloges sont simultanément réglées à midi pile.

1 **a)** Lorsque la grande aiguille de H_1 a fait un tour complet, combien de minutes se sont en réalité écoulées ?

b) Lorsque la grande aiguille de H_2 a fait un tour complet, combien de minutes se sont en réalité écoulées ?

2 La grande aiguille de H_1 est maintenant sur le 7 alors que celle de H_2 est sur le 1. On cherche à savoir combien de minutes n se sont écoulées depuis midi et le nombre de tours q effectué par chacune des grandes aiguilles (on admet qu'elles ont effectivement réalisé le même nombre de tours d'horloge).

a) Justifier que l'on peut écrire $n = 59q + 35$.

b) En déduire alors la valeur de q puis celle de n et interpréter les résultats obtenus.

3 En écrivant $n = 59q + 35$, on dit que l'on a effectué la division euclidienne de n par 59, où q est le quotient et 35 le reste.

a) Si a et b sont deux entiers naturels avec b non nul, rappeler la définition de la division euclidienne de a par b dans $\mathbb{N}$.

b) Écrire la division euclidienne de 142 par 23.

4 Sachant que le reste r doit vérifier $0 \leqslant r < 23$, écrire alors la division euclidienne de -142 par 23 dans $\mathbb{Z}$.

Bilan **En s'appuyant sur la définition de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$, donner la définition de la division euclidienne d'un élément de $\mathbb{Z}$ par un élément de $\mathbb{N}^*$.**

C La magique « preuve par 9 »

Objectif Introduire la notion de congruence.

Charlie a écrit $28 \times 13 = 341$ mais son grand-père, sans effectuer le calcul, lui affirme que son résultat est faux.

1 a) Écrire les divisions euclidiennes de 28 par 9 et de 13 par 9.

b) En déduire le reste de la division de 28×13 par 9.

c) Déterminer le reste de la division euclidienne de 341 par 9, puis justifier la réponse du grand père de Charlie.

2 a) Justifier que les nombres 457 et 16 ont le même reste dans la division euclidienne par 9.
On dira alors que 457 est **congru à 16 modulo 9** et on écrira $457 \equiv 16[9]$ ou $457 \equiv 7[9]$ ou bien encore $16 \equiv 7[9]$.

b) Justifier que $128 \equiv 2[9]$ (128 est congru à 2 modulo 9).

c) Indiquer, en justifiant, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :
$123 \equiv 101[9]$; $2\,365 \equiv 7[9]$; $1\,234 \equiv 19[9]$ et $289 \equiv 11[9]$.

3 Soient x, y, a et b quatre entiers naturels tels que $x \equiv a[9]$ et $y \equiv b[9]$.

a) Démontrer que $x + y \equiv a + b[9]$.

b) Démontrer que $x \times y \equiv a \times b[9]$.

AIDE
3 a) $x \equiv a\,[9]$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 9k + a$.

4 a) Un élève écrit que $2635 + 1271 = 3806$.
La preuve par 9 remet-elle en cause ce résultat ?

b) Un élève écrit que $457 \times 128 = 58\,396$.
La preuve par 9 remet-elle en cause ce résultat ?

Rappel : Exemple de « preuve par 9 » : $41 \times 12 = 492$. On vérifie avec la preuve par 9 : d'une part, $4 + 1 = 5$; $1 + 2 = 3$. Le produit des chiffres obtenus vaut $5 \times 3 = 15$ et $1 + 5 = 6$ et, d'autre part, $4 + 9 + 2 = 15$ et $1 + 5 = 6$.

5 D'après la calculatrice, $1\,235 \times 151 = 186\,485$.
En se trompant dans la multiplication, un élève obtient $184\,685$.

a) Que donne la « preuve par 9 » ?

b) Que peut-on en conclure ?

Bilan **Si a, b et n sont trois entiers naturels avec $n \neq 0$, définir $a \equiv b\,[n]$ puis lister les opérations compatibles avec cette relation.**

1 Relation de divisibilité dans $\mathbb{Z}$

A Diviseurs et multiples

Définition

Soient a et b deux entiers relatifs. On dit que a **divise** b lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $b = ka$. On dit que a est un **diviseur** de b. On note $a \mid b$.

Remarque : On dit aussi que b est un **multiple** de a et que b **est divisible par** a.

EXEMPLE

$-124 = -31 \times 4$. On a donc $-31 \mid -124$ et $4 \mid -124$.

Remarque : Pour tout entier a, $1 \times a = a$ donc 1 divise a et a divise a.
De plus, $0 \times a = 0$ donc tout entier divise 0.
L'ensemble des diviseurs de 0 est $\mathbb{Z}$.

Conséquence

Soit n un entier relatif non nul.

Tout diviseur de n est compris entre $-|n|$ et $|n|$.

Tout entier relatif non nul n a donc un nombre fini de diviseurs.

Propriété

Soient a et b deux entiers relatifs. On a les équivalences suivantes :

$$a \mid b \Leftrightarrow (-a) \mid b \Leftrightarrow a \mid (-b) \Leftrightarrow (-a) \mid (-b).$$

Remarque : a et $-a$ ont les mêmes diviseurs.

DÉMONSTRATION Voir exercice 59 p. 106.

Remarque : Soit b un entier non nul.
Si $a \mid b$, alors $|a| \leqslant |b|$.

Application et méthode - 1

Déterminer les entiers naturels a et b vérifiant $a^2 - b^2 = 35$.

SOLUTION

Soient a et b deux entiers naturels.

$a^2 - b^2 = 35 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 35$

a et b étant deux entiers naturels, on a $a + b \geqslant 0$ et $a - b$ doit donc également être positif car 35 est positif.

De plus, $a - b$ et $a + b$ sont des diviseurs positifs de 35 avec $a - b \leqslant a + b$. Les diviseurs positifs de 35 sont 1, 5, 7 et 35.

a et b vérifient donc $a^2 - b^2 = 35 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ a+b=35 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a-b=5 \\ a+b=7 \end{cases}$.

On obtient $\begin{cases} a=18 \\ b=17 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a=6 \\ b=1 \end{cases}$.

Réciproquement, les couples $(18 ; 17)$ et $(6 ; 1)$ vérifient l'équation.

Ainsi, les couples d'entiers $(a ; b)$ solutions de l'équation $a^2 - b^2 = 35$ sont exactement $(18 ; 17)$ et $(6 ; 1)$.

Méthode

- On factorise pour obtenir un produit d'entiers. On obtient une équation du type $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = 35$ où A et B sont donc des diviseurs positifs de 35.
- On recherche les conditions que l'on a sur a et b sachant qu'il s'agit d'entiers naturels : dans cet exemple $a > b$.
- Après avoir déterminé les diviseurs de 35, on écrit les systèmes vérifiés par a et b. La résolution de ces systèmes nous donne les solutions cherchées.

Pour s'entraîner : exercices 29 p. 104 et 58 p. 106

B Propriétés de la divisibilité

Propriété

Soient a, b et c trois entiers relatifs. Si $a \mid b$ et $b \mid c$, alors $a \mid c$.

Remarque : Une telle propriété est appelée **propriété de transitivité**.

DÉMONSTRATION

$a \mid b$ signifie qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$.

$b \mid c$ signifie qu'il existe un entier $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $c = k'b$.

On a alors $c = k'b = k'(ka) = k'ka$. Or kk' est un entier relatif donc $a \mid c$.

EXEMPLE

On a $19 \mid 38$ et $38 \mid 114$ donc $19 \mid 114$.

Propriétés

Soient a, b et c trois entiers relatifs.
- Si $a \mid b$ et $a \mid c$ alors, quels que soient les entiers m et n, on a $a \mid (mb + nc)$.
- En particulier, si $a \mid b$, alors $a \mid (a+b)$ et $a \mid (a-b)$.

Vocabulaire : Si $a \mid b$ et $a \mid c$, on dit que a divise toute **combinaison linéaire** de b et c, soit tout entier de la forme $mb + nc$ (où m et n sont des entiers relatifs).

DÉMONSTRATION

- $a \mid b$ signifie qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$.
  $a \mid c$ signifie qu'il existe un entier $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $c = k'a$.

Ainsi, $mb + nc = mka + nk'a = a(mk + nk')$. Or $mk + nk'$ est un entier relatif donc $a \mid (mb + nc)$.

- On a $a \mid b$ et $a \mid a$ donc la propriété précédente donne $a \mid (a+b)$ et $a \mid (a-b)$.

Application et méthode - 2

Déterminer tous les entiers n tels que $(2n+7) \mid (n-3)$.

SOLUTION

$(2n+7) \mid (n-3)$ et $(2n+7) \mid (2n+7)$. On a donc $(2n+7) \mid [(2n+7) - 2(n-3)]$, d'où $(2n+7) \mid 13$.

Les diviseurs de 13 sont -13, -1, 1 et 13 donc
$2n+7 = -1 \Leftrightarrow n = -4$; $2n+7 = -13 \Leftrightarrow n = -10$;
$2n+7 = 1 \Leftrightarrow n = -3$; $2n+7 = 13 \Leftrightarrow n = 3$.

Les solutions possibles sont -4, -10, -3 et 3.

Réciproquement, les entiers obtenus sont-ils solutions ?

Pour $n = -4$, on a $2n+7 = -1$ et $n-3 = -7$, or $-1 \mid -7$ donc -4 est bien solution. On raisonne de même pour les autres valeurs. On en déduit que les solutions sont -4, -10, -3 et 3.

Pour s'entraîner : exercices **30** et **32** p. 104

Méthode

- On recherche une combinaison linéaire de $(n-3)$ et de $(2n+7)$ de manière à éliminer l'entier inconnu n. On prend par exemple $1(2n+7) - 2(n-3) = 13$.
- On obtient alors que $(2n+7)$ divise l'entier 13 qui est indépendant de n.
- On raisonne alors par disjonction de cas en recherchant les diviseurs de 13.
- Les solutions **possibles** sont alors les résultats trouvés. Il faut ensuite vérifier par le calcul que ces résultats correspondent bien à des entiers solutions.

2 Division euclidienne

A Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Théorème

Soient a et b deux entiers naturels avec $b \neq 0$.

Alors il existe un unique couple d'entiers naturels $(q\,;r)$ satisfaisant les deux conditions : $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$. Cette relation est la **division euclidienne** de a par b.

q s'appelle le **quotient de la division euclidienne** de a par b.

r s'appelle le **reste de la division euclidienne** de a par b.

Remarque : a s'appelle le **dividende** et b le **diviseur** dans la division euclidienne de a par b.

Remarque : Soient a et b deux entiers naturels avec $b \neq 0$. $b \mid a$ si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

NOTATION

On note $\mathrm{E}(x)$ la partie entière du réel x.

Remarque : Si $x \geqslant 0$, alors $\mathrm{E}(x) \geqslant 0$.

DÉMONSTRATION

Soient a et b deux entiers naturels avec b non nul.

Existence

La partie entière d'un réel x est l'entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$. On note $n = \mathrm{E}(x)$. Posons alors $q = \mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\right)$. On a $\frac{a}{b} \geqslant 0$ donc $q = \mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\right) \geqslant 0$. Par définition, $q \leqslant \frac{a}{b} < q+1$ ou encore $qb \leqslant a < b(q+1)$ puisque b est strictement positif.
Autrement dit, on a $bq - bq \leqslant a - bq < bq + b - bq$ soit enfin $0 \leqslant a - bq < b$.
En posant $r = a - bq$, on a, d'une part, $a = bq + r$ et, d'autre part, $0 \leqslant r < b$. On a donc bien prouvé l'existence d'un couple $(q\,;r)$ vérifiant les conditions demandées.

Unicité

Supposons qu'il existe deux couples d'entiers naturels $(q\,;r)$ et $(q'\,;r')$ vérifiant les deux conditions, c'est-à-dire $\begin{cases} a = qb + r \text{ avec } 0 \leqslant r < b \\ a = q'b + r' \text{ avec } 0 \leqslant r' < b \end{cases}$. On a alors :

- $qb + r = qb' + r'$, c'est-à-dire $b(q' - q) = r - r'$ et donc $b \mid (r - r')$.
- $0 \leqslant r < b$ et, puisque $0 \leqslant r' < b$, on a $-b < -r' \leqslant 0$.

Ainsi, $b \mid (r - r')$ avec $-b < r - r' < b$ donc $r - r' = 0$ et $r = r'$.
On a alors $q' - q = 0$ donc $q' = q$. D'où l'unicité.

Propriété

Soit b un entier naturel tel que $b \geqslant 2$. Tout entier a s'écrit sous une, et une seule, des formes bq, $bq+1$, $bq+2$, ... , $bq+(b-1)$, où q est un entier.

DÉMONSTRATION

Soit a un entier.

En effectuant la division euclidienne de a par b non nul, il existe deux entiers naturels q et r tels que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.

Par unicité du quotient et du reste $a = bq$ ou $a = bq + 1$ ou $a = bq + 2$ ou $a = bq + 3$... ou $a = bq + (b-1)$.

Remarque : Ainsi, dans la division par 2, le reste est 0 ou 1. Tout entier s'écrit sous la forme $2k$ ou $2k+1$.
On retrouve donc qu'un entier est pair ou impair.

Application et méthode - 3

Soit n un entier naturel. Posons $\mathrm{A} = n(n-2)(n+2)$. Démontrer que A est un multiple de 3.

SOLUTION

Soit n un entier naturel. On a trois cas possibles.

1er cas : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k$.

$\mathrm{A} = 3k(3k-2)(3k+2)$ donc A est divisible par 3.

2e cas : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k+1$.

$\mathrm{A} = (3k+1)(3k+1-2)(3k+1+2) = (3k+1)(3k-1)(3k+3)$

$= 3(3k+1)(3k-1)(k+1)$ donc A est divisible par 3.

3e cas : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k+2$.

$\mathrm{A} = (3k+2)(3k+2-2)(3k+2+2) = (3k+2)(3k)(3k+4)$
donc A est divisible par 3.

Méthode

D'après le résultat du cours sur la division euclidienne, on sait que tout entier n s'écrit sous une des trois formes suivantes :

$n = 3k$; $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$.

On raisonne par disjonction de cas en distinguant les trois cas possibles et en démontrant le résultat dans chacun des cas.

Pour s'entraîner : exercices **38** et **39** p. 105

B Division euclidienne d'un entier relatif par un entier naturel non nul

Théorème : division euclidienne (admis)

Pour tout entier relatif a et tout entier naturel b non nul, il existe un unique couple d'entiers $(q\ ;r)$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.

q est un entier **relatif** et r est un entier **naturel**.

Remarque : On définit de même la division euclidienne d'un entier relatif a par un relatif non nul b : il existe un unique couple d'entiers $(q\ ;r)$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < |b|$.

EXEMPLE

Sachant que $524 = 30 \times 17 + 14$, on a $-524 = -30 \times 17 - 14$.
Le reste ne peut pas être négatif donc il ne peut pas valoir -14.
On écrit $-524 = -30 \times 17 - 17 + 17 - 14$ soit $-524 = -31 \times 17 + 3$.
Le reste de la division euclidienne de -524 par 17 est 3 et le quotient est -31.

Application et méthode - 4

Dans la division euclidienne de -37 par l'entier naturel non nul b, le reste est 14.

Quelles sont les valeurs possibles du diviseur et du quotient ?

SOLUTION

La division euclidienne de -37 par b donne $-37 = qb + 14$ avec $14 < b$ soit $qb = -51$.

Les diviseurs de -51 sont -51, -17, -3, -1, 1, 3, 17 et 51.

Or $b > 14$, on a alors $b = 17$ ou $b = 51$.

Pour $b = 17$, on a $-37 = 17 \times (-3) + 14$ et $q = -3$.

Pour $b = 51$, on a $-37 = 51 \times (-1) + 14$ et $q = -1$.

Méthode

On écrit la division euclidienne de -37 par b :
$-37 = qb + 14$, ce qui nous donne une équation du type $q \times b = n$.
Pour déterminer les entiers solutions d'une telle équation, on recherche les diviseurs de n.
De plus, la division euclidienne impose que $0 \leqslant r < b$.
On en déduit les entiers solutions.

Pour s'entraîner : exercices **44** et **45** p. 105

3 Congruences

A Définition

Définition

Soient m un entier naturel non nul, et a et b deux entiers relatifs.

On dit que a et b sont **congrus modulo m** lorsqu'ils ont le même reste dans la division euclidienne par m.

On dit aussi que a est **congru à b modulo m**.

NOTATION

On note $a \equiv b[m]$; $a \equiv b(m)$ ou $a \equiv b \bmod m$.

EXEMPLE

$15 = 2 \times 7 + 1$ et $21 = 2 \times 10 + 1$ donc $15 \equiv 21[2]$.

Théorème

Soient m un entier naturel non nul et a et b deux entiers relatifs.

$a \equiv b[m]$ si, et seulement si, $m | (a - b)$.

Remarque : En particulier, si $a \equiv 0\ [m]$, alors $m | a$.

DÉMONSTRATION Voir exercice 96 p. 109.

B Congruences et opérations

Propriété

Soient a, b et c trois entiers relatifs et m un entier naturel non nul.

Si $a \equiv b[m]$ et $b \equiv c[m]$, alors $a \equiv c[m]$.

Remarque : On dit que la relation de congruence est **transitive**.

DÉMONSTRATION

D'après les hypothèses, a et b ont le même reste dans la division euclidienne par m, et b et c ont le même reste dans la division euclidienne par m, donc a et c ont le même reste dans la division euclidienne par m donc $a \equiv c[m]$.

EXEMPLE

$251 \equiv 8[3]$ et $8 \equiv 2[3]$ donc $251 \equiv 2[3]$.

Propriétés

Soient a, b, c et d quatre entiers relatifs et m un entier naturel non nul.

1. **Compatibilité avec l'addition**
Si $a \equiv b[m]$ et $c \equiv d[m]$, alors $a + c \equiv b + d[m]$.
2. **Compatibilité avec la multiplication**
Si $a \equiv b[m]$ et $c \equiv d[m]$, alors $a \times c \equiv b \times d[m]$.
3. **Compatibilité avec les puissances**
Soit p un entier naturel non nul. Si $a \equiv b[m]$, alors $a^p \equiv b^p[m]$.

Cas particuliers : $c \equiv c[m]$ donc, si $a \equiv b[m]$, alors $a + c \equiv b + c[m]$ et $a \times c \equiv b \times c[m]$.

Attention : Il n'y a pas de compatibilité avec la division : $62 \equiv 26[4]$ mais 31 et 13 ne sont pas congrus modulo 4.

DÉMONSTRATION Voir exercice 97 p. 109.

Application et méthode - 5

Montrer en utilisant un tableau de congruence que, pour tout entier relatif n, $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 3.

SOLUTION

On dresse un tableau de congruence de n modulo 3.

$n \equiv \ldots[3]$	0	1	2
$(n+1) \equiv \ldots[3]$	1	2	$3 \equiv 0$
$(2n+1) \equiv \ldots[3]$	1	$3 \equiv 0$	$5 \equiv 2$
Produit $n(n+1)(2n+1) \equiv \ldots[3]$	$0 \times 1 \times 1 \equiv 0$	$1 \times 2 \times 0 \equiv 0$	$2 \times 0 \times 2 \equiv 0$

On remarque que, pour tout entier n, $n(n+1)(2n+1) \equiv 0\,[3]$, c'est-à-dire que $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 3.

Méthode

On recherche les restes possibles de n dans la division par 3 (conséquence de la division euclidienne).
On complète le tableau de congruence pour obtenir, dans la dernière ligne, les restes possibles de la division de $n(n+1)(2n+1)$ par 3.
Ces restes étant toujours nuls, on en déduit que, pour tout entier n, $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 3.

Pour s'entraîner : exercices **50** et **51** p. 105

C Inverse modulo m

Définition

Soient a un entier relatif et m un entier naturel non nul.
On dit que a est **inversible modulo m** lorsqu'il existe un entier b tel que $a \times b \equiv 1[m]$.

EXEMPLE

8 est inversible modulo 3 car $8 \times 2 \equiv 1[3]$. 2 est donc un inverse de 8 modulo 2.

Application et méthode - 6

1. Démontrer que 3 est inversible modulo 5.

2. Montrer que 4 n'admet pas d'inverse modulo 6.

SOLUTION

1. Soit b un entier relatif. On établit un tableau de congruence modulo 5.

$b \equiv \ldots[5]$	0	1	2	3	4
$3b \equiv \ldots[5]$	0	3	1	4	2

On a donc $3 \times 2 \equiv 1[5]$ donc 2 est un inverse de 3 modulo 5.
Cet inverse n'est d'ailleurs pas unique : tout entier s'écrivant $5k+2$, avec $k \in \mathbb{Z}$, est un inverse de 3 modulo 5.

2. Soit c un entier relatif. On établit un tableau de congruence modulo 6.

$c \equiv \ldots[6]$	0	1	2	3	4	5
$4c \equiv \ldots[6]$	0	4	2	0	4	2

Il n'existe pas d'entier c tel que $4c \equiv 1[6]$. Donc 4 n'admet pas d'inverse modulo 6.

Méthode

1. On recherche un entier b tel que $3b \equiv 1[5]$.
Pour cela, on établit un tableau de congruence modulo 5, en recherchant les restes possibles de $3b$ modulo 5.
Dans le tableau, on recherche s'il existe un entier b tel que $3b \equiv 1[5]$.
Dans ce cas, on observe que l'entier 2 est une solution.
2. On établit un tableau de congruence modulo 6. On observe que $4c$ n'est jamais congru à 1 modulo 6.

Pour s'entraîner : exercices **52** et **53** p. 105

FICHE DE RÉVISION

1 Soient trois entiers a, b et c. On dit que a divise b lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $b = k \times a$. On note $a \mid b$. De plus, si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors, pour tous entiers m et n, $a \mid (mb + nc)$. Cela permet de :

- ✔ déterminer les diviseurs d'un entier ;
- ✔ montrer qu'un entier b est divisible par un entier a ;
- ✔ déterminer des solutions entières d'équations en se ramenant à une équation du type $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{C}$ où les diviseurs de C sont connus ;
- ✔ déterminer les diviseurs communs à deux entiers.

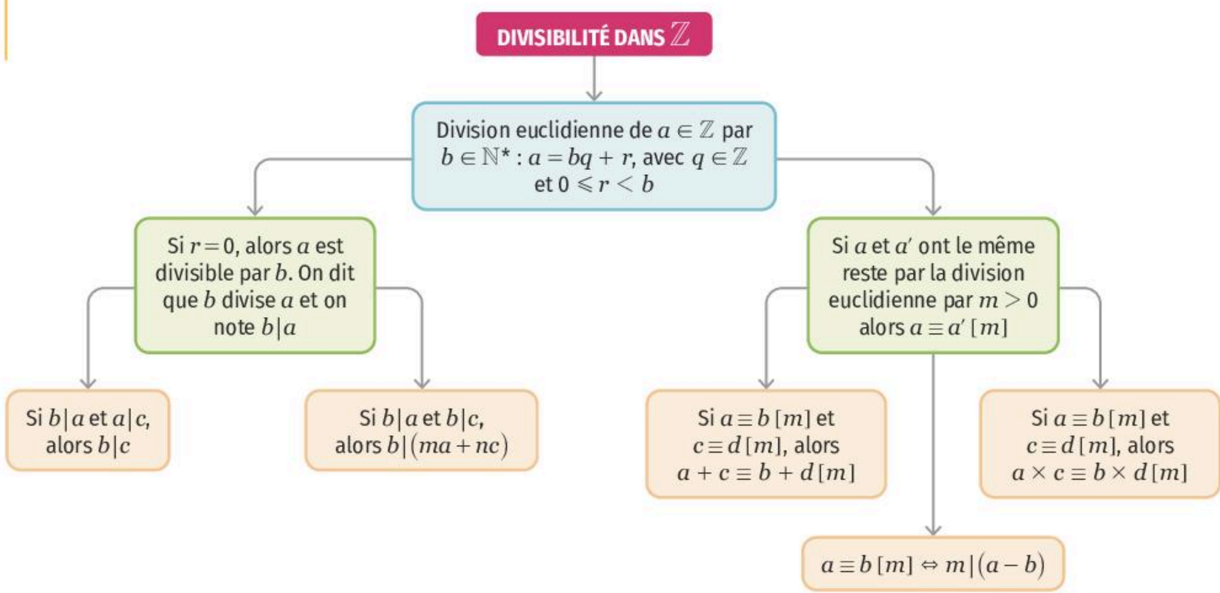
2 Soient deux entiers a et b avec b strictement positif. Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est déterminer l'unique couple d'entiers $(q\ ;\ r)$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$. Cela permet de :

- ✔ raisonner par disjonction de cas pour établir une divisibilité ;
- ✔ résoudre des problèmes de codage (clé de contrôle).

3 Soient deux entiers relatifs a et b, et m un entier naturel non nul. a et b sont congrus modulo m lorsqu'ils ont le même reste dans la division euclidienne par m. On note $a \equiv b\,[m]$. De plus, $a \equiv b\,[m] \Leftrightarrow m \mid (b - a)$. Cela permet de :

- ✔ établir les propriétés sur les congruences (compatibilité avec l'addition et la multiplication) ;
- ✔ établir un test de divisibilité ;
- ✔ étudier des problèmes de chiffrement ;
- ✔ résoudre une équation du type $ax \equiv b\,[m]$.

CARTE MENTALE



Téléchargez cette fiche de révision au format PDF sur lls.fr/MXPfiche3

QCM réponse unique

9 Soit n un entier. Si $n-4$ divise $7n+2$, alors :

a $n-4$ divise 28.
b 30 divise $n-4$.
c n divise 34.
d $n-4$ divise 30.

10 L'égalité $1887 = 45 \times 41 + 42$:

a est la division euclidienne de 1887 par 41.
b signifie que 1887 est divisible par 45.
c signifie que 41 est le quotient dans la division euclidienne de 1887 par 45.
d signifie que 45 est la partie entière de $\frac{1887}{41}$.

11 Dans la congruence modulo 5, $23\,512^4$ est congru à :

a 2
b 17
c 1
d 8

12 Soient a et b deux entiers et m un entier naturel non nul. Si $ab \equiv 0[m]$, alors :

a a et b sont divisibles par m.
b au moins l'un des deux entiers est nul.
c $a \equiv 0[m]$ ou $b \equiv 0[m]$.
d ab est divisible par m.

QCM réponses multiples

[Une ou plusieurs bonnes réponses par question]

13 Dans l'affirmation « Pour tout entier naturel n, $n(4n^2-1)$ est divisible par k », k peut prendre les valeurs :

a 2
b 3
c 7
d -3

14 L'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $4x \equiv 3[7]$ est :

a $\{6\}$.
b les entiers x de la forme $6+3k$, $k \in \mathbb{Z}$.
c les entiers x de la forme $6+7k$, $k \in \mathbb{Z}$.
d les entiers x tels que $x \equiv -1[7]$.

15 Soient a et b deux entiers relatifs et m un entier naturel non nul. Si $a \equiv b[m]$, alors :

a $a^2 \equiv b^2[m^2]$.
b $a^3 \equiv b^3[m]$.
c $b-a$ est un multiple de m.
d $\frac{a}{2} \equiv \frac{b}{2}[m]$.

16 $7^{2n} - 387^n$ est un multiple de 13 pour :

a tous les entiers n.
b tous les entiers naturels n.
c les entiers naturels pairs.
d les entiers naturels impairs supérieurs à 1.

Problème

17

1. a. Calculer, pour tout entier n compris entre 1 et 6, les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3^{n+6} \equiv 3^n[7]$.

c. Calculer le reste dans la division euclidienne de 3^{2019} par 7.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7.

e. En déduire que, pour tout entier naturel n, 7 ne divise pas 3^n.

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = 1+3+3^2+\ldots+3^{n-1}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{1}{2}(3^n-1)$.

b. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles 7 divise u_n.

3. On considère les suites (v_n) et (w_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par $v_n = \frac{1}{2}(5^n-1)$ et $w_n = v_n - u_n$.
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles 4 divise w_n.

Retrouvez plus d'exercices dans notre **cahier d'algo**
LLS.fr/PythonXP

1 Numération : changement de base

Un système de numération est un procédé permettant d'écrire les entiers à l'aide d'un nombre fini de symboles. Presque chaque civilisation a eu son système de numération. Ces derniers sont classés en trois groupes : les numérations additives (numération romaine par exemple), les numérations hybrides et les numérations de position (comme les numérations babylonienne, chinoise, ou maya).

Le système que nous utilisons est basé sur la position des chiffres. En regroupant les unités par paquets de 10, on a défini les dizaines puis, en regroupant à nouveau les dizaines en paquets de 10, on a défini les centaines, etc.

Ainsi, on écrit $2\,358 = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 8 \times 10^0$. C'est le **système décimal** (ou système en base 10).

Il existe d'autres bases de numération. Parmi elles, on peut noter le système sexagésimal (en base 60) dans la numération babylonienne, le système vigésimal (en base 20) dans la numération maya. Actuellement, le système binaire (en base 2) et le système hexadécimal (en base 16) sont utilisés en électronique et en informatique.

Par exemple, en informatique, le bit est une information qui ne prend que deux valeurs notées 0 ou 1. Et comme tout entier s'écrit comme une somme de puissances de 2 de façon unique, le nombre 21 s'écrit en base 2 : $\overline{10101}^2$.

En effet, $21 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1$.

Par ailleurs, l'écriture hexadécimale permet d'écrire les codes binaires de manière plus compacte et, inversement, une telle écriture est facilement convertible en binaire car $16 = 2^4$.

Objectif

À l'aide d'une des deux méthodes, passer du système de numération décimal à un système en base b où b est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Un entier n est écrit en base b lorsqu'on a trouvé :
- **un entier naturel i ;**
- **$i+1$ nombres entiers naturels a_0 ; a_1 ; … ; a_i tous strictement inférieurs à b tels que $n = a_i b^i + a_{i-1} b^{i-1} + \ldots + a_1 b + a_0$.**

Les nombres a_i sont les chiffres de n dans la base b.

LABO PYTHON

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 1 **PYTHON**

Étude théorique

Pour déterminer l'écriture en base b d'un nombre n, on effectue la division euclidienne de n par b qu'on écrit $n = bq_0 + r_0$.

On réitère le procédé avec q_0, c'est-à-dire qu'on écrit $q_0 = bq_1 + r_1$. On construit ainsi deux suites (q_n) et (r_n).

1. Montrer que la suite (q_n) est décroissante puis qu'il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $q_n = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde).

2. On suppose que l'on a atteint le premier quotient nul. En déduire alors l'écriture du nombre n en base b et expliquer pourquoi elle est unique.

Programmation

1. Écrire un algorithme en langage Python permettant d'obtenir l'écriture en base 7 d'un nombre n écrit dans le système décimal.

2. Le modifier pour écrire un nombre n du système décimal en une base b que l'on saisira en argument d'une fonction.

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 2 **TABLEUR**

On veut utiliser un tableur pour trouver les valeurs a_i de l'écriture d'un nombre n en base 7.

	A	B	C	D	E	F
1	Dividende	Quotient	Valeur de a_i en base b	Puissance i de b		Valeur de la base
2	543			0		7
3				=D2+1		
4						
5						

1. a. Quelles formules faut-il saisir et recopier en **B2**, **C2** et **A3** pour obtenir les valeurs a_i ?

b. Recopier les formules vers le bas jusqu'à obtenir 0 dans la colonne **A**.

c. En déduire l'écriture de 543 en base 7.

2. Quelles modifications faut-il apporter pour obtenir l'écriture d'un nombre n en une base b donnée en **F2** ?

Tester avec l'écriture de 543 en base 8, puis dans le système binaire.

2 La conjecture de Syracuse

Soit n un entier naturel.

On considère l'algorithme suivant :

- si n est pair, on le divise par 2, c'est-à-dire que n prend la valeur $\frac{n}{2}$;
- si n est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1 au résultat, c'est-à-dire que n prend la valeur $3n+1$.

On recommence le procédé avec la nouvelle valeur de n.

On définit ainsi une suite de nombres (U_n) de premier terme U_0, que l'on conjecture toujours aboutir, après un nombre fini d'opérations, à la séquence 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; etc. Ce résultat n'est pas encore démontré à ce jour.

Questions préliminaires :

1. Montrer la conjecture dans le cas où $U_0 = 4$, $U_0 = 2$ et $U_0 = 1$.

2. Écrire les différentes étapes pour $U_0 = 17$ jusqu'à obtenir pour dernières valeurs 4 ; 2 ; 1.

3. a. Démontrer que s'il existe un entier naturel non nul p tel que U_p est un multiple de 3, alors U_{p-1} est un multiple de 3.

b. En déduire que U_{p-1} est pair, puis que $U_0 = 2^p U_p$.

AIDE

3. a. On pourra raisonner pas contraposée et par disjonction des cas.

Objectif Tester la conjecture de Syracuse à l'aide de l'une des deux méthodes.

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 1 **TABLEUR**

On rappelle que la syntaxe de la condition « Si alors » avec un tableur est :

SI (Condition ; valeur si condition vraie ; valeur si condition fausse) et que la fonction **MOD(a ; b)** donne le reste de la division de a par b.

On saisit une valeur de U_0 dans la cellule **B2**.

	A	B
1	n	U_n
2	0	6
3	1	3
4	2	10
5	3	5
6	4	16
7	5	8
8	6	4
9	7	2
10	8	1

Quelle formule doit-on saisir en **B3** pour obtenir dans la colonne **B** les valeurs de la suite de Syracuse en recopiant la cellule **B3** vers le bas ?

LABO PYTHON

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 2 **PYTHON**

Compléter le programme ci-dessous prenant en entrée le premier terme U_0 d'une suite de Syracuse et retournant en sortie la liste des termes successifs de cette suite. On arrêtera le programme une fois la séquence 4, 2, 1 atteinte.

```python
def syracuse(u):
    L = [u]
    while u != ... :
        if ... :
            u = u/2
            L.append(u)
        else:
            u = ...
            L.append(u)
    return L
```

Histoire des maths

La conjecture de Syracuse est énoncée en 1937 par le mathématicien allemand Lothar Collatz et est popularisée par son compatriote Helmut Hasse lors d'un voyage à l'université de Syracuse aux États-Unis. Elle a particulièrement mobilisé les mathématiciens durant la guerre froide.

Si l'énoncé de la conjecture est très simple, aucune démonstration de ce résultat n'existe à ce jour.

À L'ORAL

18 Justifier qu'il n'existe pas d'entiers a et b tels que $14a+20b=2019$.

19 Compléter par les mots « multiple » ou « diviseur ».

1. 12 est un ... de 24.
2. 50 est un ... de 5.
3. 284 est un ... de 852.
4. 3 est un ... de 231.
5. 10 est un ... de 100.
6. 0 est un ... de 37.
7. -8 est un ... de 0.
8. -4 est un ... de 4.

20 On a $337=27\times12+13$.

1. Donner le reste de la division euclidienne de 337 par 27.
2. Donner le reste de la division euclidienne de 337 par 12.

21 Sachant que $1013=125\times8+13$, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de :

1. 1013 par 125.
2. 1013 par 8 ;
3. -1013 par 125.

22 Sachant que $1027=253\times4+15$, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de :

1. 1027 par 253.
2. 1027 par 4.
3. -1027 par 4.

23 Effectuer la division euclidienne de 351 par 10. En déduire l'écriture de la division euclidienne de 351 par 11.

24 Soit $n=12k+7$, où $k\in\mathbb{Z}$.

1. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 12.
2. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 3.

25 Sachant que $27\equiv2[5]$, donner une écriture des entiers supérieurs à 27 et inférieurs à 100 congrus à 2 modulo 5.

Notion de diviseurs

26 1. Déterminer les diviseurs positifs de 38.
2. Déterminer les diviseurs positifs de 30.
3. En déduire les diviseurs positifs communs aux deux nombres.

27 Déterminer, dans $\mathbb{Z}$, les diviseurs communs de 12 et de 50.

28 On appelle diviseur strict de l'entier naturel n tout diviseur d de n vérifiant $0<d<n$.

Deux entiers naturels distincts sont dits **amicaux** lorsque chacun de ces entiers est égal à la somme des diviseurs stricts positifs de l'autre.

1. Vérifier que 220 et 284 sont des entiers amicaux.
2. Déterminer les sommes des diviseurs positifs de 48 et de 75. Quelle relation y-a-t-il entre ces deux sommes ? Ces nombres sont dits **quasi-amicaux**.

29 Déterminer dans chaque cas les entiers naturels x et y tels que :

1. $x^2-y^2=12$.
2. $x^2-y^2=-15$.

Propriétés de la divisibilité

30 1. Déterminer les entiers relatifs n tels que 6 divise $n+5$.
2. Déterminer les entiers naturels n tels que 6 divise $n+5$.

31 1. Déterminer les entiers naturels n tels que $2n-7$ divise 5.
2. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n+4$ divise 6.

32 Déterminer tous les entiers naturels n tels que $2n+5$ divise $n-2$.

33 Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $4n+1$ divise $n-3$.

34 Soit n un entier naturel distinct de 1. On définit la fonction f par $f(n)=\dfrac{n^2+3n-2}{n-1}$.

1. Déterminer les nombres a, b et c tels que, pour tout entier naturel n différent de 1, $f(n)=an+b+\dfrac{c}{n-1}$.
2. En déduire les valeurs de n pour lesquelles $f(n)$ est un entier.

Pour les exercices 35 à 37

Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x\,;y)$ vérifiant l'égalité donnée.

35 $(x-4)(y+3)=4$

36 $x+y=xy$

37 $x+y=2xy$

Division euclidienne

38 Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $N = n(n+2)(n-5)(n+5)$ est divisible par 4.

39 Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $N = 2n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3.

40 **1.** Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+2)^2 = n(n+4)+4.$$

2. À quelle condition 4 est-il le reste de la division euclidienne de $(n+2)^2$ par n ?

41 **1.** Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+3)^2 = n(n+6)+9.$$

2. À quelle condition 9 est-il le reste de la division euclidienne de $(n+3)^2$ par n ?

42 Le reste de la division euclidienne de a par 7 est 4 ; le reste de la division euclidienne de b par 7 est 6.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $a+b$ par 7.

2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $a-b$ par 7.

43 **1.** Dans la division euclidienne de 2 512 par un entier naturel b, le quotient est 54.

Le reste peut-il valoir 7 ?

2. Dans la division euclidienne de 31 631 par un entier naturel b, le quotient est 253.

Le reste peut-il valoir 6 ?

44 Dans la division euclidienne de 97 par un entier b le reste est 6.

Donner les valeurs possibles de b et du quotient.

45 Dans la division euclidienne de -10 par l'entier naturel non nul b, le reste vaut 2.

Quelles sont les valeurs possibles du diviseur b et du quotient q ?

Congruences

46 Soient a et b deux entiers.

1. On donne $a \equiv 16\,[5]$. Quel est le reste de la division euclidienne de a par 5 ?

2. On donne $b \equiv 17\,[3]$. Quel est le reste de la division euclidienne de b par 3 ?

47 Soient deux entiers a et b tels que $a \equiv 7\,[13]$ et $b \equiv 4\,[13]$.

1. Donner le reste de la division euclidienne par 13 de :

a. $a+b$ **b.** ab **c.** a^3 **d.** a^2-b^2

2. Que dire de $2b-3a$?

48 On donne deux entiers a et b tels que $a \equiv 2\,[5]$ et $b \equiv 3\,[5]$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de a^2+b par 5.

2. Démontrer que $3a+3b$ est divisible par 5.

49 On donne deux entiers a et b tels que $a \equiv 1\,[7]$ et $b \equiv 2\,[7]$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $5a^2+2b^2$ par 7.

2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2b^2-5a^2$ par 7.

50 **1.** Reproduire et compléter le tableau de congruence modulo 3 suivant où n désigne un entier relatif.

$n \equiv \ldots[3]$	0	1	2
$n^2 \equiv \ldots[3]$			
$2n \equiv \ldots[3]$			
$n^2+2n \equiv \ldots[3]$			

2. En déduire les valeurs de n pour lesquelles n^2+2n est divisible par 3.

51 En utilisant un tableau de congruence, démontrer que, pour tout entier relatif n, $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6.

52 **1.** Démontrer que 5 admet un inverse modulo 11.

2. Montrer que 6 n'a pas d'inverse modulo 10.

3. 3 admet-il un inverse modulo 12 ?

53 **1.** Compléter le tableau de congruence modulo 8 suivant où x désigne un entier relatif.

$x \equiv \ldots[8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$5x \equiv \ldots[8]$								

2. En déduire les solutions de l'équation $5x \equiv 7\,[8]$.

3. Déterminer un inverse modulo 8 de 5.

4. Montrer que $5x$ est divisible par 8 si, et seulement si, x est divisible par 8.

DIFFÉRENCIATION

Parcours 1 : exercices 61 ; 65 ; 79 ; 80 ; 99 et 108
Parcours 2 : exercices 63 ; 67 ; 84 ; 89 ; 102 et 117
Parcours 3 : exercices 66 ; 74 ; 90 ; 105 et 112

1 Relation de divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Exercices FLASH

54 **1.** Donner deux nombres impairs consécutifs et vérifier que leur somme est divisible par 4.

2. Démontrer, dans le cas général, que la somme de deux entiers impairs consécutifs est divisible par 4.

55 Démontrer que la somme des carrés de quatre entiers consécutifs est divisible par 2.

56 Dans chaque cas, déterminer tous les entiers naturels n tels que :

1. 11 divise $n+3$. **2.** 6 divise $3n-9$.

57 Dans chaque cas, déterminer tous les entiers naturels n tels que :

1. $n+6$ soit divisible par n ;

2. $n+11$ soit divisible par $n-1$;

3. $n-3$ divise $n+2$.

58 Déterminer tous les entiers naturels x et y tels que $x^2-4y^2=36$.

59 [Raisonner.] DÉMO

Soient a et b deux entiers relatifs.

1. a. Démontrer que si $a \mid b$, alors $(-a) \mid b$.

b. Montrer que si $(-a) \mid b$, alors $a \mid (-b)$.

c. Démontrer que si $a \mid (-b)$ alors $(-a) \mid (-b)$.

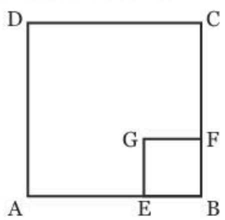
d. Démontrer que si $(-a) \mid (-b)$, alors $a \mid b$.

2. Quel enchaînement d'implications a-t-on montré ? Quelles équivalences peut-on en déduire ?

60 [Représenter.]

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un carré de côté x cm où x est un entier naturel et EBFG est un carré de côté 3 cm.

Déterminer les valeurs possibles de x afin que l'aire du polygone AEGFCD soit égale à celle d'un carré de côté y, où y est un entier naturel.



61 [Calculer.]

On définit la fonction f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(n)=\frac{3n^2+2n-1}{n+4}.$$

1. Déterminer les nombres a, b et c tels que :

$$f(n)=an+b+\frac{c}{n+4}.$$

2. Pour quelles valeurs de n l'image de n par la fonction f est-elle un entier ?

62 [Calculer.]

Soit n un entier naturel. On définit le nombre $f(n)$ par :

$$f(n)=\frac{5n^2+10n-2}{n^2+1}.$$

1. Déterminer les nombres a, b et c tels que :

$$f(n)=a+\frac{bn+c}{n^2+1}.$$

2. Existe-t-il des valeurs de n pour lesquelles $f(n)$ est un entier ?

63 [Raisonner.]

On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=2^{3n}-3^n$.

1. Calculer a_1, a_2 et a_3 puis conjecturer l'existence d'un diviseur de a_n pour $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Démontrer cette conjecture par récurrence.

64 [Raisonner.]

1. Déterminer les diviseurs de 24.

2. Quels sont les entiers naturels n tels que n^2-24 soit le carré d'un entier naturel ?

65 [Chercher.]

Dans le plan rapporté à un repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y=\frac{6}{x}$.

Déterminer les points de $\mathcal{H}$ à coordonnées entières.

66 [Communiquer.]

Soit P un polynôme du second degré à coefficients entiers défini par $P(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.

On suppose que $b^2-4ac>0$, c'est-à-dire que le polynôme admet deux racines réelles distinctes.

1. Démontrer que le produit des racines est $\frac{c}{a}$.

2. En déduire que si x_1 est une racine entière de P, alors $x_1 \mid c$.

3. Sans la résoudre, préciser si l'équation $x^2-7x+3=0$ admet des solutions entières.

4. Déterminer les polynômes de la forme $P(x)=ax^2+bx+6$ admettant deux racines entières dont l'une est 2.

67 [Raisonner.]

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $9^n - 2^n$ est divisible par 7.

68 [Raisonner.]

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 5^n$ est divisible par 3.

69 [Calculer.]

Soient a et b deux entiers relatifs.

Démontrer que : $13 \mid (8a+5b) \Leftrightarrow 13 \mid (5a+8b)$.

70 [Calculer.]

Soient a et b deux entiers relatifs.

Démontrer que : $11 \mid (6a+5b) \Leftrightarrow 11 \mid (5a+6b)$.

71 [Calculer.]

1. Soit n un entier naturel. Déterminer tous les entiers naturels éventuels d tels que $d \mid (n+6)$ et $d \mid (2n+3)$.

2. En déduire les couples d'entiers naturels $(n\,;d)$ tels que $d \mid (n+6)$ et $d \mid (2n+3)$.

72 [Chercher.]

1. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de n la somme S définie par $S = 1+3+3^2+\ldots+3^{n-1}$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $3^n - 1$ est pair.

73 [Chercher.]

1. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de n la somme S définie par $S = 1+7+7^2+\ldots+7^{n-1}$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $7^n + 35$ est divisible par 6.

74 [Raisonner.]

On souhaite démontrer la propriété suivante : « Pour tout entier naturel non nul n, n^2 divise $(n+1)^n - 1$. »

Soit n un entier naturel non nul. On donne la formule du binôme de Newton valable pour tous réels a et b :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

1. Développer $(n+1)^n$.

2. Exprimer $\binom{n}{n-1}$ en fonction de n.

3. En déduire la propriété énoncée.

75 [Compétence.]

Soient a, b, x et y quatre entiers vérifiant $a = x+y$ et $b = 2x+3y$.

1. Justifier que tout diviseur de x et de y divise a et b.

2. Exprimer x et y en fonction de a et b.

3. Justifier que tout diviseur de a et de b divise x et y.

4. Déterminer les diviseurs communs aux quatre entiers 20 ; 30 ; 50 et 130.

2 Division euclidienne

Exercices FLASH

76 VRAI / FAUX Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse.

1. Si le quotient dans la division euclidienne d'un entier a par 6 est 4, alors le quotient dans la division euclidienne $3a$ par 6 est 12.

2. Si le quotient dans la division euclidienne d'un entier a par 7 est 5 et le quotient dans la division euclidienne d'un entier b par 7 est 3, alors le quotient dans la division euclidienne de $a+b$ par 7 est 8.

3. Si le quotient dans la division euclidienne d'un entier a par 6 est 5 et le quotient dans la division euclidienne d'un entier b par 6 est 1, alors $a+b$ est divisible par 6.

77 On donne $3\,782 = 251 \times 15 + 17$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 3 782 par 251.

2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 3 782 par 15.

3. Déterminer le reste de la division euclidienne de $-3\,782$ par 251.

78 Soit a un entier naturel tel que le reste de la division euclidienne de a par 4 vaut 2.

Déterminer les restes possibles de la division euclidienne de a par 16.

79 [Calculer.]

Dans chacun des cas suivants, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

1. $a = -51$ et $b = 6$.

2. $a = -40$ et $b = 3$.

3. $a = -40$ et $b = 11$.

80 [Calculer.]

Sachant que le reste de la division euclidienne d'un entier a par 7 est 6, déterminer le reste de la division euclidienne de $2a$ par 7, de $-3a$ par 7 et de $4a$ par 7.

81 [Chercher.]

La différence de deux entiers naturels est 116.

Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 4 et le reste est 8. Quels sont ces deux nombres ?

82 [Chercher.]

La somme de deux entiers naturels est 708.

Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 12 et le reste est 6. Quels sont ces deux nombres ?

83 [Chercher.]

Soient p et q deux entiers naturels avec p non nul. Que peuvent valoir le diviseur p et le quotient q d'une division dont le dividende est 500 et le reste 71 ?

84 [Chercher.]

Déterminer les entiers naturels n qui, dans la division euclidienne de n par 4, ont un quotient égal à deux fois le reste.

85 [Chercher.]

Déterminer les entiers naturels n qui, dans la division euclidienne de n par 6, ont un reste égal à deux fois le quotient.

86 [Raisonner.]

Soit n un entier naturel non nul.

On recherche le reste de la division euclidienne de $(n+2)^3$ par n.

Jeanne fait le raisonnement suivant.

> *Pour tout entier naturel n, on a*
> $(n+2)^3 = n(n^2+6n+12)+8$.
> *Donc le reste de la division euclidienne de $(n+2)^3$ par n est 8.*

Jules choisit alors un exemple.

> $(6+2)^3 = 512$ *et* $512 = 85 \times 6 + 2$ *donc le reste n'est pas égal à 8.*

Retrouver l'erreur commise par Jeanne.

87 [Chercher.]

Déterminer un entier naturel n non nul tel que la division euclidienne de n par 58 donne un reste égal au cube du quotient.

88 [Chercher.]

Soit a un entier naturel. Si on divise a par 5, le reste est 4. Quelle peut être la valeur du reste de la division euclidienne de a par 25 ?

89 [Raisonner.]

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'entier défini par $P(n) = n^3 + 3n^2 + 11n + 20$.

1. Déterminer l'entier r tel que :

$$P(n) = (n+2)(n^2+n+9) + r.$$

2. Justifier que r est le reste de la division euclidienne de $P(n)$ par $n+2$.

90 [Calculer.]

1. Soit $a = 135$ un entier écrit en base 10.
Effectuer la division euclidienne de a par 2, puis les divisions euclidiennes successives des quotients par 2.
En déduire l'écriture de a en base 2 (voir TP 1 p. 102).

2. Soit $N = \overline{11010110}^2$ un entier écrit en base 2.
Écrire ce nombre en base 10.

3. On souhaite écrire N en base 16 (base hexadécimale).
En base 16, il faut introduire d'autres symboles.
Les symboles correspondant aux « chiffres » en base 16 sont $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; A ; B ; C ; D ; E ; F\}$.

a. Écrire la division euclidienne de N par 16.

b. En déduire l'écriture de N dans la base hexadécimale.

4. Soit $P = \overline{2A14E}^{16}$ écrit en base hexadécimale.
Donner l'écriture de P en base 10.

5. On donne 7, D et 5, trois nombres écrits en base hexadécimale.

a. Donner l'écriture de ces nombres en base 2.

b. Le nombre $\overline{7D5}^{16}$ est écrit en base 16. Donner son écriture en base 2.

6. a. En remarquant que $16 = 2^4$, justifier la méthode utilisée ci-dessous pour écrire en base 2 un nombre donné en base 16.

Base 16	*7*	*D*	*5*
Base 2	*0111*	*1101*	*0101*

L'écriture de $\overline{7D5}^{16}$ donné en base 16 est donc $\overline{11111010101}^{2}$ en base 2.

b. Écrire $\overline{A2C}^{16}$ en base 2.

91 [Calculer.]

Soit n un entier naturel non nul.

On considère l'entier $P_n = n^3 - n$.

1. Calculer P_1, P_2 et P_3 et donner le reste de la division par 6 de P_1, de P_2 et de P_3.
Quelle conjecture peut-on faire ?

2. a. Factoriser P_n.

b. Démontrer par disjonction de cas la conjecture de la question **1.**.

3 Congruences

Exercices FLASH

92 Sans calculatrice, compléter les égalités.

1. $54 \equiv \ldots[7]$ 2. $85 \equiv \ldots[7]$ 3. $139 \equiv \ldots[7]$
4. $25 \equiv \ldots[11]$ 5. $100 \equiv \ldots[11]$ 6. $2500 \equiv \ldots[11]$

93 Dans chacun des cas, déterminer les restes dans la division euclidienne de a, b et c par 26 sachant que $a \equiv 55\,[26]$; $b \equiv 110\,[26]$ et $c \equiv -39\,[26]$.

94 Sachant que $a \equiv 7\,[13]$ et $b \equiv 4\,[13]$, déterminer les restes dans la division euclidienne par 13 de :

1. $a+b$ 2. ab 3. $2b-3a$ 4. a^2+b^2

95 On considère l'équation $(\mathrm{E}) : 2x+3 \equiv 0\,[7]$.

1. Trouver un entier naturel x solution de cette équation.
2. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation (E).

96 [Raisonner.] DÉMO

Soit m un entier naturel non nul.
Le but de l'exercice est de démontrer que, quels que soient les entiers a et b, $a \equiv b\,[m] \Leftrightarrow m \mid (a-b)$.

1. On souhaite démontrer que $a \equiv b\,[m] \Rightarrow m \mid (a-b)$.

a. Sachant que $a \equiv b\,[m]$, écrire les divisions euclidiennes de a et b par m.

b. En déduire que $a-b$ est un multiple de m.

2. On souhaite démontrer que $m \mid (a-b) \Rightarrow a \equiv b\,[m]$.

a. Écrire la division euclidienne de a par m. On notera r le reste de cette division euclidienne.

b. Traduire la relation $m \mid (a-b)$.

c. En déduire que a et b ont le même reste dans la division euclidienne par m.

97 [Raisonner.] DÉMO

Dans cet exercice, on note m un entier naturel non nul et a, b, c et d quatre entiers relatifs.

1. **Compatibilité de la relation de congruence avec l'addition**
On suppose que $a \equiv b\,[m]$ et $c \equiv d\,[m]$.
Démontrer alors que $a+c \equiv b+d\,[m]$.

AIDE

On pourra utiliser la propriété démontrée dans l'exercice 96 et la transitivité de la relation de divisibilité.

2. **Compatibilité de la relation de congruence avec la multiplication**
On suppose que $a \equiv b\,[m]$ et $c \equiv d\,[m]$.
Démontrer que $a \times c \equiv b \times d\,[m]$.

3. **Compatibilité de la relation de congruence avec les puissances**
On suppose que $a \equiv b\,[m]$.
Démontrer par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a^p \equiv b^p\,[m]$.

4. **Application :** Sachant que $a \equiv 5\,[7]$ et $b \equiv 3\,[7]$, déterminer le reste dans la division euclidienne par 7 de $3a^2-b^2$.

98 [Chercher.]

Soient a et b deux entiers relatifs.

1. Développer $(a+b)^3$.
2. En déduire que $(a+b)^3$ est un multiple de 3 si, et seulement si, a^3+b^3 est un multiple de 3.
3. Trouver tous les entiers relatifs x tels que $(x+2)^3$ soit un multiple de 3 avec $-5 \leqslant x \leqslant 5$.

99 [Calculer.]

1. Compléter les tables d'addition et de multiplication modulo 3.

+	0	1	2
0			
1			
2			

×	0	1	2
0			
1			
2			

2. L'entier 2 admet-il un inverse modulo 3 ? Si oui, préciser quel est cet inverse.

100 [Calculer.]

1. Justifier que tout entier n est congru modulo 7 à -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ou 3.
2. En déduire les restes possibles de x^2 dans la division euclidienne par 7.
3. Quels sont les restes possibles de x^4 dans la division euclidienne par 7 ?

101 [Raisonner.]

Soit n un entier naturel.

1. Démontrer par récurrence que $\mathrm{S}_n = 0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Quelle condition n doit-il vérifier pour que S soit pair ? Justifier.

102 [Chercher.]

1. Montrer que $A = 2\,305^{2019} + 1106^{2019}$ est divisible par 9.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B = 5^n \times 12 - 12^n \times 5$ est divisible par 7.

103 [Chercher.]

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n, le reste dans la division euclidienne de 3^n par 5.

2. En déduire le reste de la division euclidienne de 243^{942} par 5.

104 [Chercher.]

1. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de 5^n par 6 ?

2. En déduire le reste de la division euclidienne de $15\,365^{221}$ par 6.

105 [Chercher.]

1. Quel est le chiffre des unités de 9^{231} ? Justifier.

2. Quel est le chiffre des unités de 4^{125} ? Justifier.

106 [Calculer.]

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les systèmes suivants.

1. $\begin{cases} x \equiv 2[7] \\ -3 < x < 10 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x+2 \equiv 4[5] \\ -3 < x < 10 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x \equiv 6[4] \\ -4 < x < 12 \end{cases}$

107 [Calculer.]

L'objectif de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x \equiv 2[5]$.

1. Utiliser un tableau de congruence pour déterminer les restes possibles de $3x$ dans la division euclidienne par 5.

2. En déduire les solutions de l'équation dans $\mathbb{Z}$.

108 [Calculer.]

1. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $6x \equiv 2[7]$.

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $7x \equiv 2[11]$.

3. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $4x \equiv 0[10]$.

4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $5x + 2 \equiv 13[5]$.

109 [Calculer.]

Soit n est un entier naturel non nul. On pose :

$$U_n = 3^{n+3} - 4^{4n+2}.$$

1. Calculer U_1, U_2 et U_3.

2. En remarquant que $3 \equiv -8[11]$, démontrer que $3^{n+3} \equiv (-1)^{n+1} \times 2^{3n+9}[11]$.

3. a. Démontrer que $U_n \equiv (-1)^{n+1} \times 2^{3n+9} - 2^{8n+4}[11]$.

b. En déduire que $U_n \equiv 2^{3n+9}\left((-1)^{n+1} - 2^{5(n-1)}\right)[11]$.

4. Déterminer le reste de 2^5 dans la division euclidienne par 11. En déduire que $2^{5(n-1)} \equiv (-1)^{n-1}[11]$.

5. Déduire des questions précédentes que U_n est divisible par 11.

110 [Raisonner.]

Critère de divisibilité par 3

1. Soit $\overline{abc}$ un entier naturel écrit en base 10, c'est-à-dire $\overline{abc} = a \times 10^2 + b \times 10 + c$.

a. Démontrer que $\overline{abc} \equiv a + b + c[3]$.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante de divisibilité par 3 de $\overline{abc}$.

2. Généralisation : Soit A un entier naturel.
On note a_0 ; … ; a_n les entiers compris entre 0 et 9, $a_n \neq 0$, tels que $A = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0}$ en base 10.

a. Exprimer l'entier A en fonction de a_0 ; … ; a_n et des puissances de 10.

b. Déterminer les restes possibles dans la division euclidienne de 10^n par 3.

c. En déduire une condition nécessaire et suffisante de divisibilité par 3.

111 [Raisonner.]

Critère de divisibilité par 9

Démontrer qu'un entier est divisible par 9 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 9.

112 [Représenter, Modéliser.]

LABO PYTHON

1. Soit x un entier relatif. Démontrer la proposition : « x impair $\Leftrightarrow x^2 \equiv 1[8]$. »

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x^2 = 8y + 1$.

3. En déduire l'ensemble des points à coordonnées entières de la parabole d'équation $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}$.

4. Le programme ci-dessous permet d'obtenir les coordonnées des points à coordonnées entières d'une fonction du second degré quelconque pour une abscisse comprise entre 1 et n.

```python
from math import *

def f(a, b, c, x):
    return a*x**2 + b*x + c

def coord_entieres(a, b, c, n):
    for i in range(0, n + 1):
        if f(a, b, c, i) == floor(f(a, b, c, i)):
            print([i, f(a, b, c, i)])
```

Comment modifier ce programme pour qu'il donne tous les points à coordonnées entières d'abscisses comprises entre $-n$ et n ?

113 [Communiquer.]

Une association culturelle affecte à chacun de ses membres un numéro d'adhérent lors de son inscription. Ce numéro comporte 7 chiffres et s'écrit donc $c_0c_1c_2c_3c_4c_5c_6$. Le premier chiffre c_o correspond à l'activité de l'adhérent :

- 1 pour un adhérent suivant l'activité « Informatique » ;
- 2 pour un adhérent suivant l'activité « Travaux artistiques » ;
- 3 pour un adhérent suivant l'activité « Lecture ».

Les deux chiffres c_1 et c_2 du numéro d'adhérent correspondent à son année de naissance (par exemple, 91 pour un adhérent né en 1991 et 02 pour un adhérent né en 2002).

Les trois chiffres suivants sont donnés lors de l'adhésion à l'association.

Le dernier chiffre est appelé clé de contrôle. Il est calculé automatiquement de la manière suivante :

on calcule la somme $s = c_0 + c_1 + 2c_2 + 3(c_3 + c_4 + c_5)$; on effectue ensuite la division euclidienne de s par 9 ; le reste obtenu est la clé de contrôle.

1. a. Le numéro 1 024 578 peut-il être le numéro d'un adhérent ? Justifier.

b. Le numéro 2 923 517 peut-il être le numéro d'un adhérent ? Justifier.

2. Un adhérent né en 1982 et inscrit à l'activité « Travaux artistiques », se voit attribuer par l'association lors de son inscription le numéro 123.
Déterminer la clé de contrôle.

3. Lors de la saisie d'un numéro d'adhérent, une erreur est commise sur le chiffre correspondant à l'activité de l'adhérent. Cette erreur peut-elle être détectée par la clé de contrôle ?

4. Lors de la saisie de son numéro, un adhérent intervertit les chiffres de son année de naissance. Cette erreur peut-elle être détectée par la clé de contrôle ?

114 VRAI / FAUX [Communiquer.]

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Si $n \equiv 3[7]$, alors $n^3 + 1$ est divisible par 7.

2. Pour tout entier naturel n, $2^{2n} + 1$ est divisible par 3.

3. Si x est solution de $x^2 - x \equiv 0[5]$, alors $x \equiv 1[5]$.

4. Si un entier naturel A a pour écriture décimale $\overline{abc}$ et un entier B a pour écriture décimale $\overline{bac}$, alors $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ est divisible par 9.

115 [Raisonner.]

Soient n un entier naturel non nul, et les entiers $\mathrm{A}_n = 7^n + 9^n$ et $\mathrm{B}_n = 3^{2n} - 2^n$.

1. Montrer que A_n est divisible par 8 pour tout entier naturel n impair.

2. Montrer que B_n n'est pas divisible par 2.

3. Déterminer x tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{B}_n \equiv x[7]$.

116 [Raisonner]

On considère l'équation $(\mathrm{E}) : 4x^2 + 3y^2 = 11$.

1. Montrer que si un couple d'entiers $(x\,;y)$ est solution de (E), alors $4x^2 \equiv 2[3]$.

2. En déduire que l'équation (E) n'admet pas de solution entière.

117 [Calculer.]

D'après bac S, Métropole, juin 2009

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. a. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel k, on a $2^{3k} \equiv 1[7]$.

b. Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?

2. Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.

On considère le nombre $\mathrm{N} = a \times 10^3 + b$. On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

a. Vérifier que $10^3 \equiv -1[7]$.

b. En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

118 [Raisonner, Modéliser.] LABO PYTHON

Suite et congruence

On considère la suite (U_n) définie, pour tout entier naturel n, par $\mathrm{U}_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.

1. Calculer U_0, U_1 et U_2.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{U}_{n+3} \equiv \mathrm{U}_n[7]$.

3. En déduire les valeurs de n pour lesquelles U_n est divisible par 7.

4. Recopier et compléter la fonction Python donnée ci-dessous afin qu'elle affiche les indices i des termes de la suite vérifiant $\mathrm{U}_i \equiv 0[7]$.

```python
from math import*
def indice(n):
    ...
    for i in range(n+1):
        u = ...
        if u ... 7 == 0:
            l.append(...)
    return l
```

119 APPROFONDISSEMENT [Calculer, Communiquer.]

Le **chiffrement de Vigenère** introduit le principe de clé se présentant généralement sous la forme d'un mot (ou d'une phrase) que l'on répète. Plus la clé est longue et variée, mieux le texte sera chiffré.

On considère la méthode de chiffrement suivante.

À chaque lettre de l'alphabet, on fait correspondre sa position dans l'alphabet, c'est-à-dire un entier entre 0 et 25 (A correspondant à 0, B à 1, etc.)

À chaque lettre à coder, on associe l'entier x correspondant. À chaque lettre de la clé, on associe l'entier y correspondant.

On détermine l'entier z, où z est le reste de $x+y$ dans la division euclidienne par 26.

La lettre chiffrée sera obtenue avec le nombre z.

Exemple : Codage du mot VIGENERE en utilisant la clé DEUX. On obtient le mot YMABQILB.

Mot à coder	V	I	G	E	N	E	R	E
x	21	8	6	4	13	4	17	4
Clé	D	E	U	X	D	E	U	X
y	3	4	20	23	3	4	20	23
z	24	12	0	1	16	8	11	1
Mot codé	Y	M	A	B	Q	I	L	B

1. On considère le chiffrement de Vigenère utilisant la clé MATH. Vérifier que le mot DIVISIBILITE est codé par PIOPEIUPXIML.

2. On veut déchiffrer le mot ECBLZTBMUQNL, la clé étant toujours MATH.

a. Montrer que déchiffrer la lettre E revient à résoudre l'équation $x \equiv 18[26]$. En déduire la lettre déchiffrée.

b. Déchiffrer le reste du mot.

120 [Calculer, Chercher.]

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n, le reste dans la division euclidienne de 5^n par 9.

2. Montrer que $2021^{2021} \equiv 2[9]$.

3. On pose $A = 2021^{2021}$.

Démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8 084 chiffres.

121 [Chercher, Communiquer.]

D'après bac S, Centres étrangers, juin 2005

Partie A

Soit N un entier naturel impair. On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.

2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.

3. Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier. On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a\,;b)$ vérifiant la relation $(E) : a^2 - 250\,507 = b^2$.

1. Soit X un entier naturel.

a. Donner, dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 puis ceux de X^2 modulo 9.

b. Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$, puis en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2.

c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.

2. Justifier que si le couple $(a\,;b)$ vérifie la relation (E), alors $a \geqslant 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501\,;b)$.

3. On suppose que le couple $(a\,;b)$ vérifie la relation (E).

a. Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.

b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505+9k\,;b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

122 [Calculer, Communiquer.]

Les entiers naturels 1 ; 11 ; 111 ; ... sont des **rep-units**. On appelle ainsi les entiers naturels s'écrivant uniquement avec des 1.

On note N_p le rep-unit comprenant p fois le chiffre 1.

Par exemple, $N_4 = 1111$. On a alors $N_p = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k$.

Partie A : Étude de quelques cas particuliers

1. Montrer que N_3 et N_6 sont divisibles par 3.

2. Montrer que N_4 est divisible par 11.

3. Montrer que N_6 est divisible par 111.

Partie B : Divisibilité par 7 et par 11

1. **a.** Démontrer que $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$.

b. En déduire que $9 \mid (10^p - 1)$.

2. **a.** Déterminer le reste de la division par 7 de 10^p suivant les valeurs de p.

b. En déduire les valeurs de p pour lesquelles N_p est divisible par 7 (on pourra utiliser un tableau de congruence).

3. **a.** Vérifier que $10 \equiv -1[11]$.

b. En déduire que si p est pair, alors N_p est divisible par 11.

123 [Calculer, Raisonner.]

D'après bac S, Centres étrangers, juin 2019

Certains nombres entiers peuvent se décomposer en somme ou en différence de cubes d'entiers naturels.

Par exemples : $13 = 4^3 + 7^3 + 7^3 - 9^3 - 2^3$;
$13 = 2^3 + 2^3 - 1^3 - 1^3 - 1^3$ et $13 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$.

Dans tout ce qui suit, on écrira pour simplifier « somme » de cubes à la place de « somme ou différence de cubes d'entiers naturels ». Les deux premiers exemples montrent que 13 peut se décomposer en somme de 5 cubes. Le troisième exemple montre que 13 peut se décomposer en somme de 4 cubes.

1. a. En utilisant l'égalité $13 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$ donner une décomposition de 40 en somme de 5 cubes.

b. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$6n = (n+1)^3 + (n-1)^3 - n^3 - n^3.$$

En déduire une décomposition de 48 en somme de 4 cubes, puis une décomposition de 40 en somme de 5 cubes différente de celle donnée en **1. a.**

2. Le nombre 40 est une somme de 4 cubes :

$$40 = 4^3 - 2^3 - 2^3 - 2^3.$$

On veut savoir si 40 peut être décomposé en somme de 3 cubes.

a. Produire sans justifier le tableau de congruence modulo 9 de n^3.

b. Prouver que 40 ne peut pas être décomposé en somme de 3 cubes.

124 [Chercher, Communiquer.]

Soient a et b deux entiers naturels avec $1 \leqslant a \leqslant 9$ et $0 \leqslant b \leqslant 9$.

On considère le nombre $\overline{ab \ldots ab}$ écrit dans le système décimal. Ce nombre est donc composé uniquement des chiffres ab répétés n fois, où n désigne un entier naturel non nul.

1. a. On considère le nombre $\overline{ababab}$. Écrire ce nombre en fonction de a, de b et des puissances de 10.

b. En déduire que $\overline{ababab}$ est un multiple de $\overline{ab}$.

2. a. Calculer la somme
$S = 1 + 10^2 + 10^4 + 10^6 + \ldots + 10^{2n-2}$.

b. Exprimer $\overline{ab \ldots ab}$ en fonction de S et de $\overline{ab}$.

3. a. Montrer que si un entier naturel N divise $\overline{ab}$, alors N divise $\overline{ab \ldots ab}$.

b. La réciproque est-elle vraie ? Justifier.

125 [Calculer, Raisonner.]

Le but de l'exercice est de démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel. On suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\sqrt{3} = \dfrac{a}{b}$.

Quitte à simplifier, on suppose cette fraction irréductible.

1. Reproduire et compléter le tableau de congruence modulo 5 afin de déterminer les restes de la division euclidienne de a^2 par 5.

$a \equiv \ldots[5]$	0	1	2	3	4
$a^2 \equiv \ldots[5]$					

2. Déterminer les restes possibles de la division euclidienne de $3b^2$ par 5.

3. En déduire que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

126 ALGO [Calculer, Modéliser.]

D'après bac S, Amérique du Nord, mai 2013

Partie A

Dans l'algorithme ci-contre, les variables a, b et c représentent des entiers naturels.

```
c ← 0.
Tant que a ⩾ b, faire :
    c ← c+1
    a ← a−b
Fin Tant que
```

1. On prend $a = 13$ et $b = 4$.

Donner les valeurs de a et de c obtenues à la sortie de cet algorithme en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.

2. Que permet de calculer cet algorithme ?

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante.

- **Étape 1 :** à la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.
- **Étape 2 :** on calcule le reste de la division euclidienne de $9m+5$ par 26 et on le note p.
- **Étape 3 :** au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.

2. Écrire un algorithme qui, à une valeur de m entrée par l'utilisateur, affiche la valeur de p, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Partie C

1. Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1[26]$.

2. Démontrer alors l'équivalence :

$$9m + 5 \equiv p\,[26] \Leftrightarrow m \equiv 3p - 15\,[26].$$

3. Décoder alors la lettre B.

127 **APPROFONDISSEMENT** [Calculer, Communiquer.]

Les publications, comme les journaux et les périodiques, sont identifiées par un numéro ISSN (International Standard Serial Number). L'impression de l'ISSN sur les publications en série est obligatoire.

Le numéro ISSN est composé de deux groupes de quatre chiffres séparés par un tiret : $abcd - efgh$.

Par exemple, le journal *Ouest-France* a pour ISSN 0999-2138 et la revue *Paris Match* a pour ISSN 0397-1635.

Les sept premiers caractères sont des chiffres qui caractérisent la publication.

Le dernier caractère, situé à la huitième position, est la clé de contrôle. Cette clé de contrôle est prise dans la liste des 11 caractères suivants : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X (où X représente le nombre 10).

Pour déterminer cette clé, on calcule le nombre $\mathrm{S} = 8a + 7b + 6c + 5d + 4e + 3f + 2g$ puis on détermine le reste de la division euclidienne de $-\mathrm{S}$ par 11.
Ce reste constitue la clé de contrôle.

1. Le numéro ISSN du journal *Ouest-France* a été donné ci-dessus. Retrouver la clé de contrôle en détaillant les différentes étapes de calcul.

2. On donne les sept premiers caractères du numéro ISSN du *Journal de Mickey* : 2495-454. Déterminer la clé de contrôle.

3. Sur le journal *Le Monde*, un des caractères du numéro ISSN est illisible. On le note n. On a alors : $03n5 - 2037$.

a. Déterminer S en fonction de n.

b. En déduire que $6n \equiv 10\,[11]$.

c. En déduire la valeur de n.

128 [Chercher, Communiquer.]

En binaire, un nombre s'écrit avec les chiffres 0 ou 1.
Un **octet binaire** est composé de huit chiffres, par exemple 11010010.

Chaque octet binaire est complété par un bit supplémentaire m (dit **bit de parité**) de la façon suivante : on calcule la somme s des huit chiffres constituant l'octet et on prend m tel que $s + m \equiv 0\,[2]$.

1. Pour $\mathrm{A} = 11010010$, calculer m.

2. Démontrer que si un des chiffres de l'octet est modifié, le bit de parité détecte l'erreur.

3. a. Lors de la transmission d'un octet, combien d'erreurs de transmission peuvent se produire ?

b. Dans quels cas les erreurs de transmission seront-elles détectées ? Justifier.

129 **APPROFONDISSEMENT** [Calculer, Chercher.]

D'après bac S, Centres étrangers, juin 2015

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls $(x\,;y\,;z)$ tels que $x^2 + y^2 = z^2$.

Ces triplets sont nommés **triplets pythagoriciens**, en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et notés en abrégé « TP ».

Ainsi $(3\,;4\,;5)$ est un TP car $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Partie A : Généralités

1. Démontrer que si $(x\,;y\,;z)$ est un TP et p un entier naturel non nul, alors $(px\,;py\,;pz)$ est aussi un TP.

2. Démontrer que si $(x\,;y\,;z)$ est un TP, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.

3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel n non nul peut s'écrire de façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair : $n = 2^{\alpha} \times k$, où α est un entier naturel (éventuellement nul) et k un entier naturel impair. L'écriture $n = 2^{\alpha} \times k$ sera nommée décomposition de n dans la suite du problème.

Voici par exemple les décompositions des entiers 9 et 120 : $9 = 2^0 \times 9$ et $120 = 2^3 \times 15$.

a. Donner la décomposition de l'entier 192.

b. Soient x et z deux entiers naturels non nuls dont les décompositions sont $x = 2^{\alpha} \times k$ et $z = 2^{\beta} \times m$.

Écrire la décomposition des entiers naturels $2x^2$ et z^2.

c. En examinant l'exposant de 2 dans la décomposition de $2x^2$ et dans celle de z^2, montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls $(x\,;z)$ tels que $2x^2 = z^2$.

On admet que la question **3.** de la partie **A.** permet d'établir que les trois entiers naturels x, y et z sont deux à deux distincts. Comme, de plus, les entiers naturels x et y jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP $(x\,;y\,;z)$, les trois entiers naturels x, y et z seront rangés dans l'ordre suivant : $x < y < z$.

Partie B : Recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. Sachant que $2\,015 = 5 \times 403$ et en utilisant le TP donné dans le préambule, déterminer un TP de la forme $(x\,;y\,;2\,015)$.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$(2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2 = (2n^2+2n+1)^2.$$

Déterminer un TP de la forme $(2\,015\,;y\,;z)$.

3. a. En remarquant que $403^2 = 169 \times 961$, déterminer un couple d'entiers naturels non nuls $(x\,;z)$ tels que : $z^2 - x^2 = 403^2$, avec $x < 403$.

b. En déduire un TP de la forme $(x\,;2\,015\,;z)$.

130 APPROFONDISSEMENT [Calculer, Chercher.]

Le numéro INSEE d'une personne est inscrit sur sa carte vitale. Ce numéro d'identification unique A de chaque individu est formé de 13 chiffres :

- le sexe (1 pour un homme et 2 pour une femme) ;
- l'année de naissance (les deux derniers chiffres) ;
- le mois de naissance (écrit avec deux chiffres) ;
- le lieu de naissance (cinq chiffres correspondant au département et à la commune) ;
- le numéro d'ordre d'inscription des naissances dans la commune (3 chiffres).

Une clé de contrôle K de deux chiffres complète le numéro INSEE.
La clé est calculée de la manière suivante :
on calcule le reste r de la division de l'identifiant A par 97 et on pose alors : $K = 97 - r$.

1. On donne le numéro INSEE suivant : 2021299320121. Déterminer la clé de contrôle de ce numéro.

2. a. En remarquant que $A = S \times 10^{12} + N \times 10^{6} + M$ où S, N et M sont des entiers naturels, montrer que $A \equiv 50S + 27N + M[97]$.

b. En déduire que $K = 97 - r_1$ où r_1 est le reste de la division euclidienne de $50S + 27N + M$ par 97.

3. a. On suppose que lors d'une saisie d'un code INSEE, une erreur est commise sur le premier chiffre de l'identifiant. Montrer que cette erreur est détectée par la clé.

b. Montrer qu'une erreur sur un, et un seul, des chiffres du nombre N est détectée par la clé.

c. Montrer que si l'on intervertit les deux premiers chiffres du nombre N, l'erreur est détectée par la clé.

131 DEVOIR MAISON [Chercher, Calculer.]

Critères de divisibilité

On souhaite poursuivre l'étude de critères de divisibilité tels que ceux démontrés aux exercices **110** et **111**.

Partie A : Critère de divisibilité par 5 et par 10

1. Montrer qu'un nombre entier N est divisible par 10 si, et seulement si, son chiffre des unités est 0.

AIDE

On pourra commencer par écrire N sous la forme $N = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$ où, pour tout k compris entre 0 et n, $0 \leqslant a_k \leqslant 9$ et $a_n \neq 0$.

2. Montrer qu'un nombre entier N est divisible par 5 si, et seulement si, son chiffre des unités est 5 ou 0.

Partie B : Critère de divisibilité par 11

1. Montrer qu'un nombre entier N est divisible par 11 si, et seulement si, la différence entre son nombre de dizaines et son chiffre des unités est divisible par 11.

AIDE

On pourra commencer par écrire $N = 10a + b$, où a désigne le nombre de dizaines de N et b son chiffre des unités.

2. En utilisant ce critère de divisibilité, déterminer si le nombre 1067 est divisible par 11.
Le nombre 333 est-il divisible par 11 ?

Complexes Arithmétique Matrices Graphes

Exercices transversaux en lien avec ce chapitre : 2, 4, 6, 7, 12, 14, 15, 17 et 18 p. 238

Le Grand Oral

Entraînez-vous au Grand Oral et enregistrez-vous sur LLS.fr/GrandOralMaths

Comme le suggère le programme, les problèmes abordés en maths expertes peuvent servir d'appui à des questions de Grand Oral. Voici un exemple, basé sur l'enseignement de spécialité, utilisant des notions de ce chapitre.

Dans le programme de spécialité, vous avez étudié un nouveau type de démonstration : le raisonnement par récurrence.

1. Rappeler les grands principes de ce raisonnement.

2. Utiliser ce type de démonstration pour démontrer une divisibilité analogue à celles des exercice **67** et **68**, puis expliquer comment les outils introduits dans ce chapitre permettent de faciliter l'étude de ce type de problème.

Méthodologie	Consulter les fiches méthode de ce manuel pour le Grand Oral p. 244

Avant de commencer

Prérequis

1. Déterminer les diviseurs d'un entier.
2. Écrire la division euclidienne d'un entier relatif par un entier naturel non nul.
3. Déterminer un reste modulo n.
4. Exécuter des opérations sur des congruences.

1 Déterminer les diviseurs d'un entier

Un entier naturel est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts, c'est-à-dire de tous ses diviseurs positifs sauf lui-même.
Par exemple, $6 = 1 + 2 + 3$ donc 6 est parfait.
18 est-il parfait ? Et 28 ?

2 Simplifier une fraction

Déterminer les diviseurs communs à 777 et 441, puis simplifier la fraction $\frac{777}{441}$.

3 Résoudre une équation diophantienne

Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ tels que $x^2 - y^2 = 21$.

4 Résoudre un problème de diviseurs

On souhaite répartir 80 hommes et 60 femmes en équipes mixtes de mêmes effectifs et de même répartition hommes/femmes.
Quel est le plus grand nombre d'équipes possible ? Quelle serait la composition des équipes dans ce cas ?

5 Utiliser la définition de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Soit n un entier naturel ayant le même quotient dans la division euclidienne par 23 et par 17, et admettant un reste de 1 dans celle par 23.
Quelles sont les valeurs possibles du reste dans la division euclidienne de n par 17 ?

6 Déterminer un entier conditionné par une relation de divisibilité

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $n - 4$ divise $n + 17$.

7 Écrire une division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

1. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de -522 par 12.
2. Soit n un entier naturel. Écrire la division euclidienne de $15n - 8$ par $4n + 3$.

8 Déterminer un inverse modulo un entier

À l'aide d'un tableau de congruence, déterminer les entiers naturels a tels que $4a \equiv 1\,[13]$.

9 Opérer sur les congruences

Soient a et b deux entiers tels que $a \equiv 0\,[4]$ et $b \equiv 0\,[18]$.
A-t-on nécessairement $ab \equiv 0\,[72]$?

10 Opérer sur les congruences

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ?
« Si a est un entier tel que $a \equiv 0\,[27]$, alors $a \equiv 0\,[9]$. »

11 Problème

Comment peut-on mesurer 1 minute avec un sablier de 13 minutes et un sablier de 5 minutes ?

Anecdote

La difficulté mathématique pour établir un calendrier où les dates des équinoxes et solstices restent les mêmes, est que la durée d'une année solaire n'équivaut pas à un nombre entier de jours. Jules César, se fiant aux conseils de l'astronome alexandrin Sosigène, a établi le calendrier julien avec un système d'années bissextiles. Mais ce système, grossièrement correct, induisait un décalage que le pape Grégoire XIII a corrigé en octobre 1582, suivant les recommandations du mathématicien jésuite Christopher Clavius (1538-1612), d'où le nom de calendrier grégorien qui est depuis le nôtre (voir TP2). Mais d'autres pays, comme la Grèce, n'ont adopté ce calendrier qu'au XXe siècle. À cause des années bissextiles comptées en trop, ils ont alors dû supprimer treize jours !

Chapitre 4

PGCD et applications

La machine Enigma est une machine électromécanique à rotors, inventée en 1920 par l'allemand Arthur Scherbius. Elle fut utilisée par l'armée allemande dès 1928. Sa particularité est d'utiliser un chiffrement polyalphabétique, c'est-à-dire qu'une lettre n'est pas systématiquement codée par la même lettre : grâce aux rotors activés par des signaux électriques, les permutations effectuées changent à chaque lettre, ce qui rend le message impossible à déchiffrer par une simple analyse fréquentielle.

Capacités attendues - chapitre 4

1. Déterminer le PGCD de deux entiers.
2. Connaître et utiliser les théorèmes de Bézout et de Gauss.
3. Résoudre une congruence $ax \equiv b\ [n]$, résoudre une équation diophantienne simple.
4. Déterminer l'inverse de a modulo n lorsque a et n sont premiers entre eux.

A Problème de pavage

Objectif Découvrir et appliquer l'algorithme d'Euclide pour déterminer l'ensemble des diviseurs communs à deux entiers.

On souhaite paver une surface rectangulaire de 250 cm par 70 cm à l'aide de carreaux carrés identiques de dimensions entières.

1 Quelle condition la longueur c du côté d'un carreau doit-elle vérifier pour que les carreaux remplissent la surface sans qu'on ait besoin de les couper ?

2 Soient a et b deux entiers naturels non nuls avec $a > b$.

a) Montrer que les diviseurs communs à a et b sont exactement les diviseurs communs à b et r, où r désigne le reste de la division euclidienne de a par b.

b) On appelle PGCD de a et b le plus grand diviseur commun de a et b. En déduire que le PGCD de a et b est égal au PGCD de b et r.

AIDE
2 a) Écrire la division euclidienne de a par b : elle permet d'écrire r comme combinaison linéaire de a et b.

3 Pour tout réel x, on note $\mathrm{E}(x)$ la partie entière de x, l'unique entier tel que $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1$. On considère l'algorithme suivant.

1.	$a \leftarrow 250$
2.	$b \leftarrow 70$
3.	$r \leftarrow 250 - 70 \times \mathrm{E}\left(\frac{250}{70}\right)$
4.	Tant que $r \neq 0$ faire :
5.	$a \leftarrow b$
6.	$b \leftarrow r$
7.	$r \leftarrow a - b \times \mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\right)$
8.	Fin Tant que
9.	Afficher b

a) À quoi les nombres $250 - 70 \times \mathrm{E}\left(\frac{250}{70}\right)$ et $a - b \times \mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\right)$ (lignes 3 et 7) correspondent-ils ?

b) Exécuter cet algorithme à la main en recopiant et complétant le tableau suivant.

a	250			
b	70			
r	...			

c) Pourquoi peut-on être sûr, sans l'exécuter, que cet algorithme se termine nécessairement ?

d) Que représente le nombre affiché en sortie ?
Que peut-on déduire sur les dimensions possibles du pavage ?

Bilan

Cet algorithme de divisions successives porte aujourd'hui le nom d'Euclide. Euclide a en réalité décrit un algorithme voisin dans son livre *Les Éléments* pour expliciter une méthode de détermination du PGCD de deux entiers naturels non nuls.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Expliquer comment on peut déterminer l'ensemble des diviseurs communs à a et b connaissant leur PGCD.

B Un problème de Bachet

Objectif Utiliser le théorème de Bézout en « remontant » l'algorithme d'Euclide.

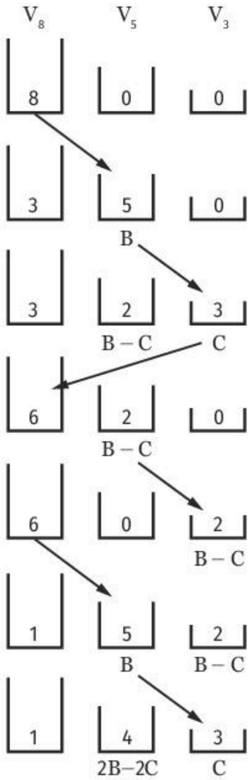
Deux bons compagnons ont 8 pintes de vin à partager entre eux également, lesquelles sont dans un vase contenant justement 8 pintes, et pour faire leur partage ils n'ont que deux autres vases dont l'un contient 5 pintes et l'autre 3. On demande comment ils pourront partager justement leur vin, ne se servant que de ces trois vases.

AIDE
Une pinte est une unité de mesure d'un volume.

Ce problème est posé par Bachet de Méziriac (1581-1638) dans *Problèmes plaisants et délectables* (1612). L'énoncé ci-dessus est tiré d'une réédition commentée de 1874.

Une des méthodes qu'il donne consiste à remplir le vase V_5 (de cinq pintes) et à le vider dans le vase V_3 (de trois pintes) et ce jusqu'à obtenir une quantité de quatre pintes dans l'un des vases.

Le problème revient donc à déterminer combien de fois il faut remplir entièrement V_5 et combien de fois il faut lui retirer trois pintes pour qu'il contienne quatre pintes.



1 Écrire le problème sous la forme $mx - py = 4$ avec $(m\,;p) \in \mathbb{N}^2$ et déterminer un couple $(x\,;y)$ solution.

2 Bachet raisonne en prenant le problème par la fin : quatre pintes, ce sont cinq pintes dont on a retiré une pinte. Comment retirer une pinte ? Il suffit par exemple que le vase de trois pintes en contienne déjà deux.

a) Comment mesurer un volume de deux pintes avec les vases V_3 et V_5 ?

b) Observer le schéma ci-contre et expliquer pourquoi à la fin du processus le vase V_5 contient un volume de $2B - 2C$.

3 Cherchons maintenant à obtenir un volume de une pinte avec des vases de seize et neuf pintes.

a) Écrire l'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD de 16 et 9.
Soient r_1 et r_2 les restes des deux premières divisions euclidiennes obtenues.

b) À l'aide de la troisième division euclidienne, écrire le nombre 1 comme combinaison linéaire de r_1 et r_2.

c) À l'aide de la deuxième division euclidienne, écrire le nombre 2 comme combinaison linéaire de 9 et r_1, puis justifier comment obtenir $1 = 7 \times 4 - 3 \times 9$.

d) En déduire une combinaison linéaire de 9 et 16 égale à 1. Conclure.

Bilan

Le théorème de Bézout indique que si le PGCD de deux entiers naturels a et b est 1, alors il existe un couple d'entiers relatifs $(u\,;v)$ tel que $au + bv = 1$.

En prenant $a = 12$ et $b = 5$ et en s'appuyant sur le raisonnement de la question 3, expliciter une démarche permettant de trouver u et v tels que $12u + 5v = 1$. Ce couple est-il unique ?

1 PGCD

A Définition et propriétés

Définition

Soient a et b deux entiers relatifs non simultanément nuls.

L'ensemble des diviseurs communs à a et b est une partie non vide de $\mathbb{Z}$ (elle contient 1) et majorée (par le maximum entre $|a|$ et $|b|$).

Cet ensemble admet un plus grand élément appelé **Plus Grand Diviseur Commun de *a* et *b*** noté $\mathrm{PGCD}(a\,;b)$.

Remarque : On utilise le lemme suivant : « Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un unique plus grand élément. »

Propriétés

Soient a et b deux entiers relatifs non simultanément nuls.
On a $\mathrm{PGCD}(a\,;b) = \mathrm{PGCD}(|a|;|b|)$ et, pour tout couple $(a\,;b) \in \mathbb{N}^2$ avec $a \neq 0$:

1. $\mathrm{PGCD}(a\,;b) \geqslant 1$; $\mathrm{PGCD}(0\,;a) = a$; $\mathrm{PGCD}(1\,;a) = 1$;
2. a divise b si, et seulement si, $\mathrm{PGCD}(a\,;b) = a$;
3. $\mathrm{PGCD}(a\,;b) = \mathrm{PGCD}(a-b\,;b)$ (Méthode de la soustraction).

Remarque : On a $\mathrm{PGCD}(a\,;0) = |a|$ et, par convention, $\mathrm{PGCD}(0\,;0) = 0$.

DÉMONSTRATION Voir exercice 67 p. 134.

Remarque : Un nombre entier et son opposé ont les mêmes diviseurs. On se restreint donc au cas des entiers naturels.

EXEMPLE

$\mathrm{PGCD}(229\,;225) = \mathrm{PGCD}(229-225\,;225) = \mathrm{PGCD}(4\,;225) = 1$ car 1 est le seul diviseur positif commun à 4 et 225.

Application et méthode - 1

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $\mathrm{PGCD}(n\,;700) = 25$ et $n \leqslant 700$.

SOLUTION

Les diviseurs positifs de 700 sont les suivants.

1	2	4	5	7	10	14	20	25
700	350	175	140	100	70	50	35	28

Si $\mathrm{PGCD}(n\,;700) = 25$, alors 25 divise n. Donc n est un multiple de 25. Les multiples de 25 inférieurs à 700 sont les suivants.

25	~~50~~	75	~~100~~	125	~~150~~	~~175~~
~~200~~	225	~~250~~	275	~~300~~	325	~~350~~
375	~~400~~	425	~~450~~	475	~~500~~	~~525~~
~~550~~	575	~~600~~	625	~~650~~	675	~~700~~

Or n ne peut pas être un multiple de 50, 100, 175 ou 350 car on aurait alors $\mathrm{PGCD}(n\,;700) \geqslant 50$.

L'ensemble cherché est donc {25 ; 75 ; 125 ; 225 ; 275 ; 325 ; 375 ; 425 ; 475 ; 575 ; 625 ; 675}.

Méthode

- Lister les diviseurs positifs de 700.
- Lister les multiples de 25 et rayer ceux qui sont des diviseurs de 700, sauf 25.
- Rayer les multiples des nombres rayés.
- L'ensemble cherché est constitué des multiples de 25 restants.

Pour s'entraîner : exercices 28 et 29 p. 132

B Algorithme d'Euclide

Dans cette partie, a et b sont deux entiers naturels non nuls avec $a > b$.

Propriété

On note q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
Avec ces notations, $\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}(b\,;r)$.

DÉMONSTRATION

- Soit d un diviseur commun à a et b. Par définition, $a = bq + r$ donc $r = a - bq$. r s'écrit donc comme une combinaison linéaire de a et de b et d divise à la fois a et b. Donc d divise r. En particulier, d est un diviseur commun à b et r.
- De même, a est une combinaison linéaire de b et r, donc tout diviseur commun à b et r divise a.

Ainsi, l'ensemble des diviseurs communs à a et b est confondu avec l'ensemble des diviseurs communs à b et r. Ils ont donc le même plus grand élément d'où $\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}(b\,;r)$.

LOGIQUE

Pour montrer l'égalité de deux PGCD, on montre que les ensembles dont ils sont les plus grands éléments sont les mêmes. La propriété d'unicité du plus grand élément permet de conclure.

EXEMPLE

$546 = 60 \times 9 + 6$ donc $\text{PGCD}(546\,;60) = \text{PGCD}(60\,;6) = \text{PGCD}(6 \times 10\,;6) = 6$.

Algorithme d'Euclide

On définit par récurrence la suite des entiers $r_0, r_1, \dots, r_n$ tels que :

- r_0 est le reste de la division euclidienne de a par b ;
- si $r_0 \neq 0$, r_1 est le reste de la division euclidienne de b par r_0 ;
- pour tout $k \in \{1\,;\dots;\,n-1\}$, si $r_k \neq 0$, alors r_{k+1} est le reste de la division euclidienne de r_{k-1} par r_k.

Alors, cette suite d'entiers est nulle à partir d'un certain rang et la dernière valeur non nulle prise par cette suite est le PGCD de a et b.

Remarque : Euclide présente un algorithme voisin au début du livre VII des *Éléments* comme une méthode pour déterminer le PGCD de deux entiers.

DÉMONSTRATION

Soit r_0 le reste de la division euclidienne de a par b. Par définition du reste d'une division euclidienne, $0 \leqslant r_0 < b$ et on sait que $\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}(b\,;r_0)$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. Supposons qu'on ait construit $r_0, r_1, \dots, r_{m-1}$ non nuls et r_m tels que, pour tout $k \in \{1\,;\dots;\,m-1\}$, r_{k+1} soit le reste de la division euclidienne de r_{k-1} par r_k.

Alors, $0 \leqslant r_m < r_{m-1} < \dots < b$ et $\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}(b\,;r_0) = \dots = \text{PGCD}(r_{m-1}\,;r_m)$.

- Si $r_m = 0$, alors $\text{PGCD}(r_{m-1}\,;r_m) = r_{m-1}$.
- Si $r_m \neq 0$, le reste r_{m+1} de la division euclidienne de r_{m-1} par r_m vérifie $0 \leqslant r_{m+1} < r_m < \dots < b$, et $\text{PGCD}(r_{m-1}\,;r_m) = \text{PGCD}(r_m\,;r_{m+1})$.

Par récurrence, on en déduit que la suite d'entiers naturels (r_n) est strictement décroissante jusqu'au premier terme égal à 0. Elle est donc nulle à partir d'un certain rang.

Soit alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $r_{n_0} = 0$ et $r_{n_0-1} > 0$.

Par construction, $\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}(r_0\,;r_1) = \dots = \text{PGCD}(r_{n_0-1}\,;r_{n_0}) = r_{n_0-1}$.

Application et méthode - 2

Appliquer l'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD de 450 et 198.

SOLUTION

$450 = 198 \times 2 + 54$

$198 = 54 \times 3 + 36$

$54 = 36 \times 1 + 18$

$36 = 18 \times 2 + 0$

Le dernier reste non nul obtenu en appliquant l'algorithme d'Euclide vaut 18 donc on en déduit que $\mathrm{PGCD}(450\ ;198) = 18$.

Méthode

Si b divise a, alors $\mathrm{PGCD}(a\ ;b) = b$.
Sinon, on effectue la division euclidienne de a par b.
Tant que le reste r est non nul, on remplace $(a\ ;b)$ par $(b\ ;r)$ et on recommence.
$\mathrm{PGCD}(a\ ;b)$ est le dernier reste non nul.

Pour s'entraîner : exercices **37** et **38** p. 132

C Corollaires de l'algorithme d'Euclide

Corollaire

Pour tous entiers naturels non nuls a, b et k, on a $\mathrm{PGCD}(ka\ ;kb) = k \times \mathrm{PGCD}(a\ ;b)$.

Remarque : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{PGCD}(ka\ ;kb) = |k|\mathrm{PGCD}(a\ ;b)$.

DÉMONSTRATION Voir exercice **75** p. 135.

Corollaire

Soient a et b deux entiers non simultanément nuls.

d est un diviseur commun à a et b si, et seulement si, d divise $\mathrm{PGCD}(a\ ;b)$.

LOGIQUE

Ce corollaire est une équivalence. On doit donc démontrer deux implications : le sens direct et la réciproque.

DÉMONSTRATION

Soit $(a\ ;b) \in \mathbb{Z}^2$. On suppose que a et b ne sont pas simultanément nuls et on note $d \in \mathbb{Z}$ un diviseur commun à a et b.

Montrons que d divise $\mathrm{PGCD}(a\ ;b)$. Pour cela, montrons par récurrence que d divise tous les restes de la suite construite par l'algorithme d'Euclide.

Initialisation : soient respectivement q et r_0 le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

Alors $r_0 = a - bq$ donc d divise r_0 comme combinaison linéaire de a et b.

Hérédité : on suppose qu'on a construit la suite $r_0, r_1, \ldots, r_m$ telle que, pour tout $k \in \{1\ ;\ldots\ ;m-1\}$, r_{k+1} soit le reste de la division euclidienne de r_{k-1} par r_k dont on note q_k le quotient et qu'on a montré que r_m et r_{m-1} sont divisibles par d.

Alors $r_{m-1} = q_m r_m + r_{m+1}$ donc $r_{m+1} = r_{m-1} - r_m q_m$ est encore divisible par d.

Conclusion : par récurrence, on déduit que, pour tout $k \in \{1\ ;\ldots\ ;m\}$, r_k est divisible par d. Comme $\mathrm{PGCD}(a\ ;b)$ est le dernier terme non nul de cette suite, $\mathrm{PGCD}(a\ ;b)$ est divisible par d.

Réciproquement, si d divise $\mathrm{PGCD}(a\ ;b)$, comme $\mathrm{PGCD}(a\ ;b)$ divise a et b, alors d divise aussi a et b par transitivité.

En conclusion, les diviseurs de $\mathrm{PGCD}(a\ ;b)$ sont bien les diviseurs communs à a et b.

Application et méthode - 3

Déterminer les entiers naturels n inférieurs à 450 tels que $\text{PGCD}(n\,;270)=45$.

SOLUTION

On a $45|n$ donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 45m$.
Or $n \leqslant 450$ donc $m \leqslant 10$.
De plus, $45 = \text{PGCD}(n\,;270) = \text{PGCD}(45m\,;45\times 6) = 45\times\text{PGCD}(m\,;6)$,
donc $\text{PGCD}(m\,;6)=1$. On en déduit que $m\in\{1\,;5\,;7\}$ donc $n\in\{45\,;225\,;315\}$.

Méthode

Introduire l'entier m tel que $n = 45m$ et raisonner à partir du PGCD de m et $\frac{270}{45}=6$.

Pour s'entraîner : exercices **41** et **42** p. 133

2 Nombres premiers entre eux

A Définition

Définition

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

On dit que a et b sont **premiers entre eux** lorsque leurs seuls diviseurs communs sont 1 et -1. Autrement dit, a et b sont premiers entre eux lorsque $\text{PGCD}(a\,;b)=1$.

Remarque : Deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux.

EXEMPLE

18 et 35 sont premiers entre eux car 35 est un multiple de 1 ; 5 ; 7 et 35 alors que 18 n'est divisible par aucun de ces nombres autres que 1. Donc le PGCD de 18 et 35 vaut 1.

Propriété

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

Soient $d = \text{PGCD}(a\,;b)$ et a', b' les entiers tels que $a = da'$ et $b = db'$.

Alors a' et b' sont premiers entre eux.

Réciproquement, s'il existe $d\in\mathbb{N}$ et a', b' des entiers premiers entre eux tels que $a = da'$ et $b = db'$, alors d est le PGCD de a et b.

DÉMONSTRATION

Soient $d' = \text{PGCD}(a'\,;b')$ et k_1 et k_2 les entiers tels que $a' = d'k_1$ et $b' = d'k_2$.

On doit montrer que $d = 1$.

En effet, $a = dd'k_1$ et $b = dd'k_2$ donc dd' est un diviseur commun à a et b. Comme $d = \text{PGCD}(a\,;b)$, on a nécessairement $dd' \leqslant d$ donc, puisque $d > 0$, $d' = 1$.

Réciproquement, $\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}(da'\,;db') = d\text{PGCD}(a'\,;b') = d$ car a' et b' sont premiers entre eux.

EXEMPLE

$36 = 12\times 3$ et $60 = 12\times 5$. Puisque 3 et 5 sont premiers entre eux, alors $\text{PGCD}(60\,;36) = 12$.

Application et méthode - 4

Déterminer l'ensemble des couples $(a\ ;b)\in\mathbb{N}^2$ tels que $\begin{cases} ab=300 \\ \text{PGCD}(a\ ;b)=5 \end{cases}$.

SOLUTION

Puisque $\text{PGCD}(a\ ;b)=5$, il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux tels que $\begin{cases} a=5a' \\ b=5b' \end{cases}$.

On a alors $ab=25a'b'$ donc $25a'b'=300$ et ainsi $a'b'=12$.

Or $12=1\times12=2\times6=3\times4$.

Comme a' et b' doivent être premiers entre eux, les couples possibles sont $(1\ ;12)$, $(12\ ;1)$, $(3\ ;4)$ et $(4\ ;3)$, ce qui donne pour $(a\ ;b)$ les couples $(5\ ;60)$, $(60\ ;5)$, $(15\ ;20)$ et $(20\ ;15)$.

Réciproquement, chacun de ces couples est solution du système.

Méthode

- Introduire les entiers a' et b' premiers entre eux tels que $\begin{cases} a=5a' \\ b=5b' \end{cases}$.
- Écrire une équation vérifiée par le produit $a'b'$ et lister les couples d'entiers premiers entre eux vérifiant cette équation.
- En déduire les valeurs possibles pour a et b.

Pour s'entraîner : exercices **33** et **34** p. 132

B Théorème de Bézout

Lemme (admis)

Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Théorème de Bézout

Soit $(a\ ;b)$ un couple d'entiers relatifs non nuls.

Alors a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=1$.

DÉMONSTRATION Voir exercice **114** p. 140.

Remarque : Le théorème de Bézout donne l'existence d'entiers u et v mais ne donne pas de méthode pour en déterminer.

Remarque : Il n'y a pas unicité des entiers u et v tels que $au+bv=1$.

Application et méthode - 5

Déterminer deux entiers u et v tels que $29u+12v=1$.

SOLUTION

Puisque 29 est un nombre premier, 29 et 12 sont premiers entre eux. Il existe donc deux entiers u et v tels que $29u+12v=1$.

D'après l'algorithme d'Euclide, on a les égalités suivantes :

$29=12\times2+5\,(\text{E}_1)$; $12=5\times2+2\,(\text{E}_2)$ et $5=2\times2+1\,(\text{E}_3)$.

D'après (E_3), on a $1=5-2\times2$ et, d'après (E_2), on a $2=12-5\times2$.

Donc, $1=5-2\times(12-5\times2)=5\times5-2\times12$.

D'après (E_1), on a $5=29-2\times12$ d'où $1=5\times(29-2\times12)-2\times12$ soit finalement $1=29\times5+12\times(-12)$.

On a donc trouvé $u=5$ et $v=-12$.

Méthode

- On commence par justifier qu'il existe bien un couple d'entiers $(u\ ;v)$ tel que $29u+12v=1$.
- On applique l'algorithme d'Euclide pour connaître tous les restes successifs jusqu'au reste égal à 1.
- On utilise les divisions euclidiennes obtenues en « remontant » l'algorithme d'Euclide pour déterminer u et v.

Pour s'entraîner : exercices **43** et **44** p. 133

C Identité de Bézout et application aux équations diophantiennes

Identité de Bézout

Pour tout couple $(a\ ;\ b) \in \mathbb{Z}^{*2}$, il existe $(u\ ;\ v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = \text{PGCD}(a\ ;\ b)$.

Remarque : Le couple $(u\ ;\ v)$ n'est pas unique.

DÉMONSTRATION

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls et on pose $d = \text{PGCD}(a\ ;\ b)$.

Il existe deux entiers a' et b' tels que $a = a'd$ et $b = b'd$ et tels que $\text{PGCD}(a'\ ;\ b') = 1$.

D'après le théorème de Bézout, il existe $(u\ ;\ v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a'u + b'v = 1$.

On a alors $au + bv = a'du + b'dv = d(a'u + b'v) = \text{PGCD}(a\ ;\ b)$.

Remarque : L'identité de Bézout est en réalité vraie pour $(a\ ;\ b) \in \mathbb{Z}^2$.

EXEMPLE

Le PGCD de 84 et 18 est 6 donc il existe des entiers u et v tels que $84u + 18v = 6$.
Pour les déterminer, on peut se ramener à l'équation diophantienne $14u + 3v = 1$ dont une solution est $(-1\ ;\ 5)$. On vérifie : $-84 + 18 \times 5 = -84 + 90 = 6$.

Remarque : On appelle **équation diophantienne** une équation à coefficients entiers, dont on cherche une solution entière (ou rationnelle).

Corollaire

Soient a, b et c trois entiers tels que a et b ne sont pas simultanément nuls.

L'équation $ax + by = c$ admet des couples d'entiers $(x\ ;\ y)$ solutions si, et seulement si, le nombre c est un multiple de $\text{PGCD}(a\ ;\ b)$.

DÉMONSTRATION Voir exercice 88 p. 136.

EXEMPLES

1. L'équation $12x + 4y = 32$ admet des couples d'entiers $(x\ ;\ y)$ parmi ses solutions car $\text{PGCD}(12\ ;\ 4) = 4$ et $4 \mid 32$.
2. L'équation $2x + 6y = 3$ n'admet pas de couples de solutions entières car $\text{PGCD}(2\ ;\ 6) = 2$ et 2 ne divise pas 3.

Application et méthode - 6

Après avoir justifié son existence, déterminer un entier a tel que $30a \equiv 1[23]$.

SOLUTION

30 et 23 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Bézout, il existe un couple d'entiers relatifs $(a\ ;\ b)$ tel que $30a + 23b = 1$ donc il existe un entier a tel que $30a \equiv 1[23]$.

L'algorithme d'Euclide et sa remontée permettent d'obtenir $1 = 30 \times 10 - 23 \times 13$.

On en déduit que $(10\ ;\ -13)$ est un couple solution et donc que 10 est un inverse de 30 modulo 23 : $30 \times 10 \equiv 1[23]$.

Pour s'entraîner : exercices **48** et **49** p. 133

Méthode

Il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $30a \equiv 1[23]$ si, et seulement si, il existe $(a\ ;\ b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $30a + 23b = 1$.

- Vérifier que cette équation admet une solution en écrivant l'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD de 30 et 23.
- Remonter les lignes de l'algorithme d'Euclide en partant de l'avant-dernière (reste égal à 1) pour écrire 1 comme combinaison linéaire des deux derniers restes, puis des deux restes précédents, jusqu'à obtenir une combinaison linéaire de 30 et 23.

3 Théorème de Gauss et applications

A Théorème de Gauss

Théorème

Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls.
Si $a|bc$ et si a et b sont premiers entre eux, alors $a|c$.

Remarque : La condition a et b premiers entre eux est essentielle.
Par exemple, 4 divise le produit $2 \times 6 = 12$ mais 4 ne divise ni 2 ni 6.

DÉMONSTRATION

Supposons que a divise bc et que a et b sont premiers entre eux.
Alors $\mathrm{PGCD}(a\,;b)=1$ donc d'après le théorème de Bézout, il existe $(u\,;v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au+bv=1$.
On a donc $auc+bvc=c$. Or $a \mid bc$ par hypothèse et $a \mid auc$ donc $a \mid (auc+bvc)$.
Ainsi, $a \mid c$.

EXEMPLE

Soit n un diviseur impair de $210 = 105 \times 2$. Comme n est premier avec 2 (car n est impair), le théorème de Gauss permet d'affirmer que n divise 105.

Application et méthode - 7

1. Déterminer le PGCD de 65 et 91.

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $65\mathrm{X} = 91\mathrm{Y}$.

SOLUTION

1. On applique l'algorithme d'Euclide : $91 = 65 \times 1 + 26$;
$65 = 26 \times 2 + 13$ et $26 = 13 \times 2 + 0$ donc $\mathrm{PGCD}(91\,;65) = 13$.

2. En divisant par 13 on obtient $65\mathrm{X} = 91\mathrm{Y} \Leftrightarrow 5\mathrm{X} = 7\mathrm{Y}$.

Or $5\mathrm{X} = 7\mathrm{Y} \Rightarrow 7 \mid 5\mathrm{X}$, et 5 et 7 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, $7|5\mathrm{X} \Rightarrow 7 \mid \mathrm{X}$.

Ainsi, si $(\mathrm{X}\,;\mathrm{Y})$ est solution de (E_0), alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{X} = 7k$. Donc, si $5\mathrm{X} = 7\mathrm{Y}$, on a $5 \times 7k = 7 \times \mathrm{Y}$, d'où $\mathrm{Y} = 5k$.

Réciproquement, on vérifie que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $(7k\,;5k)$ est un couple solution : $65 \times 7k = 455k$ et $91 \times 5k = 455k$.

Donc, pour tout entier k, $(7k\,;5k)$ est un couple solution.

Finalement, l'ensemble des solutions de (E_0) est $\{(7k\,;5k),\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Méthode

1. On applique l'algorithme d'Euclide : le dernier reste non nul est le PGCD cherché.
2. On simplifie l'équation par le PGCD pour obtenir deux nombres premiers entre eux et on utilise alors le théorème de Gauss pour obtenir une expression de X et Y.
   On vérifie que le couple obtenu est bien solution de l'équation.

Pour s'entraîner : exercices **51** et **52** p. 133

B Corollaire du théorème de Gauss

Corollaire

Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

Si b et c sont premiers entre eux et divisent tous les deux a, alors bc divise a.

Remarque : Comme pour le théorème de Gauss, la condition b et c sont premiers entre eux est primordiale. Par exemple, 15 divise 45 et 9 divise 45, mais $9 \times 15 = 135$ ne divise pas 45.

DÉMONSTRATION

Soient b et c deux diviseurs de a premiers entre eux et b' et c' les entiers tels que $bb' = a$ et $cc' = a$.

Alors $bb' = cc'$, donc $b \mid cc'$.

Comme b et c sont premiers entre eux, alors, d'après le théorème de Gauss, b divise c'.

Soit alors m l'entier tel que $c' = bm$. On a donc $a = cc' = cbm$. D'où bc divise a.

EXEMPLE

Soit $n \in \mathbb{N}$. $n(n^2-1) = n(n-1)(n+1) = (n-1)n(n+1)$ est le produit de 3 entiers consécutifs, donc $n(n^2-1)$ est divisible par 2 et par 3.
Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, alors le corollaire de Gauss énoncé ci-dessus affirme que $n(n^2-1)$ est divisible par 6.

Application et méthode - 8

Montrer que, pour tout entier naturel n, $5n^2(n^2+11)$ est un multiple de 30.

SOLUTION

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5n^2(n^2+11)$ est un multiple de 5. Écrivons la table de congruence par 6.

Reste de n (mod 6)	0	1	2	3	4	5
Reste de n^2 (mod 6)	0	1	4	3	4	1
Reste de n^2+11 (mod 6)	5	0	3	2	3	0
Reste de $5n^2(n^2+11)$ (mod 6)	0	0	$60 \equiv 0$	$30 \equiv 0$	$60 \equiv 0$	0

Finalement, pour tout entier naturel n, $5n^2(n^2+11)$ est un multiple de 6.

Or, c'est aussi un multiple de 5.

Comme 5 et 6 sont premiers entre eux, le corollaire du théorème de Gauss ci-dessus donne que $5n^2(n^2+11)$ un multiple de 30.

Méthode

Il faut montrer que, pour tout entier naturel n, $5n^2(n^2+11)$ est un multiple de 6 et de 5. On utilise une table de congruence modulo 6.

Pour s'entraîner : exercices **60** et **61** p. 133

L'ESSENTIEL

FICHE DE RÉVISION

1 D'après l'algorithme d'Euclide, le PGCD des entiers naturels a et b est égal au dernier reste non nul lorsqu'on effectue les divisions euclidiennes successives. Cela permet de :

- ✔ déterminer le PGCD de deux entiers ;
- ✔ montrer que deux entiers sont premiers entre eux en vérifiant que leur PGCD vaut 1.

2 D'après l'identité de Bézout, pour tout couple $(a\ ;\ b) \in (\mathbb{Z})^2$, il existe $(u\ ;\ v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = \text{PGCD}(a\ ;\ b)$. Cela permet de :

- ✔ montrer que deux entiers sont premiers entre eux ;
- ✔ déterminer si un entier est inversible modulo un entier naturel non nul ;
- ✔ démontrer le théorème de Gauss ;
- ✔ déterminer si une équation diophantienne de la forme $ax + by = c$ admet une solution.

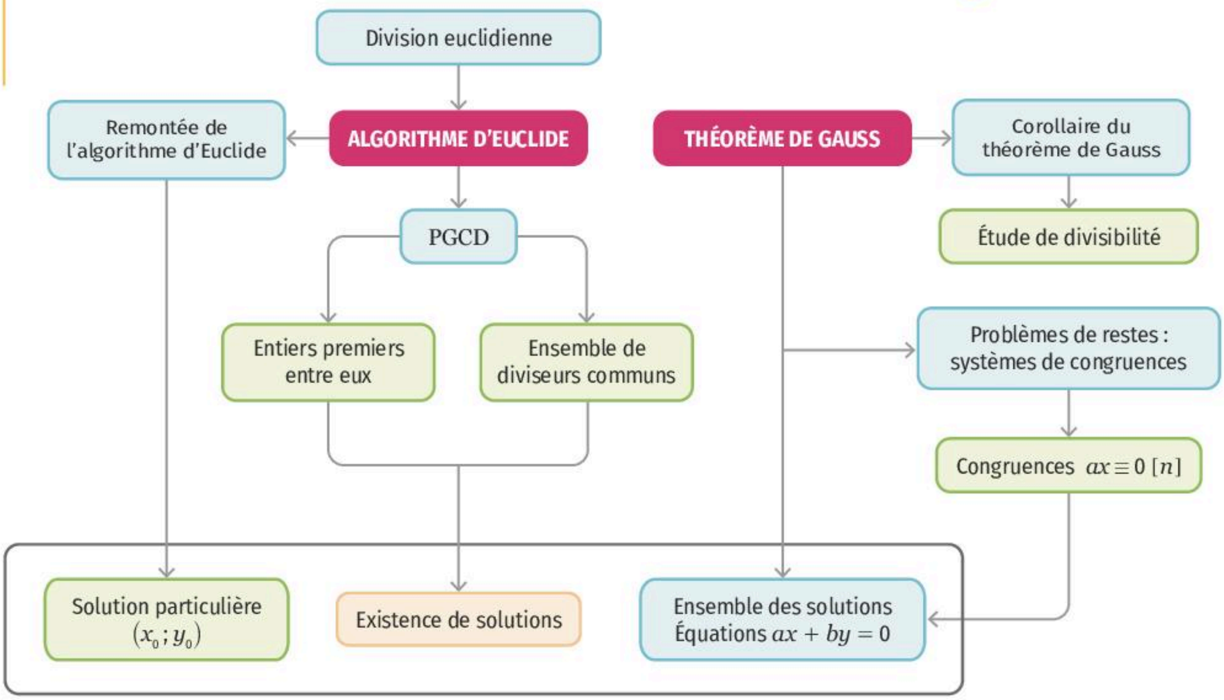
3 D'après le théorème de Gauss, pour tous entiers relatifs non nuls a, b et c, si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c. Cela permet de :

- ✔ résoudre une équation diophantienne de la forme $ax = by$;
- ✔ résoudre une congruence de la forme $ax \equiv 0\,[n]$ lorsque a et n sont deux entiers naturels premiers entre eux.

4 D'après le corollaire du théorème de Gauss, pour tous entiers relatifs non nuls a, b et c, si b et c sont premiers entre eux et divisent a, alors bc divise a. Cela permet d' :

- ✔ établir la divisibilité d'un nombre par le produit de deux entiers premiers entre eux.

CARTE MENTALE



Équations diophantiennes $ax + by = c$ (ou $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$)

Téléchargez cette fiche de révision au format PDF sur lls.fr/MXPfiche4

QCM réponse unique

12 Soit n un entier naturel tel que $\text{PGCD}(n\,;75)=25$ et $\text{PGCD}(n\,;20)=5$.
n peut être égal à :

a 100 b 35 c 25 d 70

13 Pour tous entiers naturels a et b non nuls et divisibles par 68 :

a $\text{PGCD}(a\,;b)\mid 68$.
b $\text{PGCD}(a\,;b)$ est un multiple de 68.
c il existe $(x\,;y)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $ax+by=68$.
d il existe deux entiers relatifs x et y premiers entre eux tels que $ax+by=1$.

14 Soit $a\in\mathbb{N}$. Quelle est la relation entre les propositions A : « $12a\equiv 0\,[3]$ » et B : « $a\equiv 0\,[3]$ » ?

a $\text{A}\Leftrightarrow\text{B}$ b $\text{B}\Rightarrow\text{A}$
c $\text{A}\Rightarrow\text{B}$ d Aucune.

15 Soit $(a\,;b)\in\mathbb{N}^2$ tel que $11a=56b$.
On peut alors affirmer que :

a $\text{PGCD}(a\,;b)=1$.
b a divise b.
c 11 divise b.
d b divise 11.

QCM réponses multiples [Une ou plusieurs bonnes réponses par question]

16 Parmi ces équations, quelles sont celles qui admettent des solutions dans $\mathbb{Z}^2$?

a $51x+39y=0$ b $51x+39y=1$
c $51x+39y=3$ d $51x+39y=2\,019$

17 Soient a, x et n trois entiers.
La congruence $ax\equiv 1\,[n]$ signifie que :

a il existe $b\in\mathbb{Z}$ tel que $ax-bn=1$.
b $ax=n+1$.
c a et n sont premiers entre eux.
d n divise $ax-1$.

18 Le PGCD de $3n-1$ et $5n$ est égal à :

a 1 pour tout $n\in\mathbb{N}$.
b 5 si, et seulement si, 5 divise $3n-1$.
c 5 pour tout $n\in\mathbb{N}$.
d 5 si, et seulement si, 5 divise $n-2$.

19 Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que 2, 6 et 15 divisent n ?

a 10 divise n. b 12 divise n.
c 30 divise n. d 60 divise n.

Problème

20 Dans cet exercice, on souhaite résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système de congruences $\begin{cases} z\equiv 0\,[35] \\ z\equiv 6\,[27] \end{cases}$.

1. a. Écrire une équation diophantienne équivalente à ce système.

b. Justifier que cette équation admet des solutions puis en déterminer une particulière.

c. En déduire toutes les solutions du système de congruences.

2. Un astronome observe une planète dont le cycle est de 35 jours. Six jours plus tard, il observe une autre planète donc le cycle est de 27 jours. Combien de temps devra-t-il attendre, au minimum, pour pouvoir observer ces deux planètes simultanément ?

Retrouvez plus d'exercices dans notre **cahier d'algo**

LLS.fr/PythonXP

1 Chiffrement affine

On a reçu un message codé à l'aide du chiffrement affine défini de la manière suivante : à chaque lettre du message est associé un entier x entre 0 et 25 selon l'ordre alphabétique. À chaque entier x, on associe l'entier y tel que $\begin{cases} y \equiv 11x+8\,[26] \\ 0 \leqslant y \leqslant 25 \end{cases}$.
Enfin, on remplace la lettre du message par la lettre associée à y.
On cherche à décoder le message suivant : IZIV JUNSVW.

Questions préliminaires :

1. Justifier que, pour tout $x \in \{0\,;\,\ldots\,;\,25\}$, l'entier y ainsi défini est le reste de la division euclidienne de $11x+8$ par 26 et que $y = 11x+8-26\times \mathrm{E}\left(\dfrac{11x+8}{26}\right)$, où $\mathrm{E}(\ )$ désigne la partie entière.

2. Écrire le message reçu sous forme d'une suite d'entiers.

Objectif **Comprendre la construction d'un codage affine et chercher à quelle condition une fonction de décodage existe à l'aide d'une des deux méthodes.**

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 1 GEOGEBRA

1. Ouvrir GeoGebra et associer un tableur à côté du graphique. Dans la colonne **A** du tableur, entrer les entiers x de 0 à 25 et dans la colonne **C** les valeurs correspondantes de $11x+8$.

2. Entrer en **B1** une formule permettant d'obtenir par recopie vers le bas les valeurs de y associées à chaque entier.

AIDE
La fonction **floor** désigne la partie entière.

3. Sélectionner les colonnes **A** et **B**, puis créer une liste de points. Afficher les noms de ces points dans le graphique et vérifier que le point A a pour abscisse 0, le point B pour abscisse 1, C pour abscisse 2, etc. Il est possible de renommer les points manuellement si nécessaire.

4. Par lecture graphique, décoder le message reçu.

5. Modifier le tableur pour que la fonction de codage soit $10x+8$ au lieu de $11x+8$.
Pouvez-vous décoder le message reçu ? Pourquoi ?

6. Tester d'autres valeurs et conjecturer une condition sur la valeur de a pour que le message codé par $ax+8$ soit décodable.

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 2 PYTHON

LABO PYTHON

1. a. Créer une liste vide **chiffrage = []**.

b. À l'aide d'une boucle bornée, pour chaque valeur de l'entier x allant de 0 à 25, compléter la liste **chiffrage** avec la valeur de y correspondante déterminée dans la question préliminaire **1.**.

2. a. Compléter le code de la question précédente en y ajoutant le code ci-dessous. La méthode **index** sert à obtenir l'indice d'un élément d'une liste.

```
6  mcode = [8, 25, 8, 21, 9, 20, 13, 18, 21, 22]
7  mdecode = []
8  alpha = "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"
9  mclair = " "
10
11 for i in range(len(mcode)):
12   n = chiffrage.index(mcode[i])
13   mdecode.append(n)
14   mclair = mclair + alpha[n]
```

b. Expliquer la ligne 6 puis la boucle **for** entre les lignes 11 et 14.

3. Que se passe-t-il quand on remplace $11x+8$ par $10x+8$ dans la définition de **chiffrage** ? Afficher la liste **chiffrage** et expliquer pourquoi le programme ne peut pas fonctionner.

4. a. Ajouter une ligne de commande permettant d'afficher la liste **chiffrage** triée et tester plusieurs fonctions.

b. Conjecturer une condition sur a pour que le message codé par $ax+8$ soit décodable.

Pour aller plus loin

Déterminer un entier b tel que $11b \equiv 1\,[26]$ et en déduire que $x \equiv b(y-8)\,[26]$.
Déterminer alors une fonction de décodage.

2 Établir un calendrier

Dans le calendrier julien, les années sont divisées en 365 jours et on ajoute un jour tous les quatre ans (années bissextiles). Cependant, ce calendrier entraîne un décalage non négligeable avec le comportement des astres sur plusieurs siècles.

Questions préliminaires :

On estime qu'une année est composée de 365,2422 jours. On pose $\mathrm{A} = 365 + \frac{2\,422}{10\,000}$.

Le choix optimal serait donc de rajouter 2 422 jours sur chaque période de 10 000 ans.

Pour obtenir une méthode plus pratique, on écrit le développement en fractions continues de A : on pose $q_0 = 365$, $r_0 = 10\,000$ et $r_1 = 2\,422$ et on définit, par divisions euclidiennes successives, les suites d'entiers (q_n) et (r_n) telles que, pour tout $n \geqslant 1$, $r_{n-1} = r_n \times q_n + r_{n+1}$ et $0 \leqslant r_{n+1} < r_n$.

Pour finir, on définit la suite (A_n), pour tout entier naturel n, par $\mathrm{A}_0 = q_0 + \frac{1}{q_1}$, $\mathrm{A}_1 = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}}$, etc.

Les termes A_n sont appelés **développement en fractions continues**.

1. a. Vérifier que $q_1 = 4$ et $r_2 = 312$ et en déduire la valeur de A_0.

b. Déterminer q_2 et en déduire une valeur approchée de A_1 à 10^{-2} près.

2. a. Justifier alors le choix du calendrier julien.

b. Quelle est l'erreur commise chaque année avec cette méthode ? Chaque siècle ?

c. Les années multiples de 4 sont-elles toutes bissextiles ? Comment justifier ce choix ?

Objectif **Obtenir et interpréter un développement en fractions continues afin de déterminer plusieurs approximations d'un même nombre à l'aide d'une des deux méthodes.**

LABO PYTHON

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 1 **PYTHON**

On donne l'algorithme en Python ci-dessous correspondant au calendrier choisi par les Perses.

```
from fractions import*
q = [365]
r = [10000, 2422]
for i in range(3):
    q.append(int(r[i]/r[i+1]))
    r.append(r[i] - r[i+1]*int(r[i]/r[i+1]))
B = Fraction(1, q[1] + Fraction(1, q[2] +
Fraction(1, q[3])))
print(B)
```

1. Quelle est la nature des variables **q** et **r** créées en début de programme ? Pourquoi a-t-on choisi ce type de variables plutôt que des variables numériques ?

2. Que représentent les nombres **int(r[i]/r[i+1])** et **r[i]-r[i+1]*int(r[i]/r[i+1])** ?

3. Interpréter le résultat affiché après exécution : combien de jours les Perses ajoutaient-ils sur combien d'années ?

4. Modifier ce programme afin qu'il affiche l'erreur commise et le nombre d'années au bout desquelles l'erreur atteint un jour entier (appelé « validité »).

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 2 **TABLEUR**

1. Charger la feuille de calcul LLS.fr/MXPcalendrier. Quelles formules doit-on entrer en **A3** et en **B4** afin de déterminer les dix premiers termes des suites (q_n) et (r_n) ?

2. Afin de calculer les valeurs approchées de A sans entrer à la main les formules de chaque fraction continue, on a entré dans les colonnes **C** et **D** les formules qui calculent le numérateur et le dénominateur des fractions A_0 ; A_1 ; A_2 ; ...

Expliquer pourquoi la formule **=C2-365*D2** entrée en **F2** permet de remplir la colonne **F** puis interpréter les résultats de la ligne 5 correspondant à l'approximation choisie par les Perses.

3. On appelle **validité** le nombre d'années au bout desquelles l'erreur atteint un jour entier. Remplir les colonnes **G** et **H** en arrondissant les résultats de la colonne **H** à l'entier. Interpréter les résultats affichés ligne 11.

Pour aller plus loin

Écrire la fraction continue A_3 donnée par les valeurs q_0 à q_4.

À L'ORAL

21 Déterminer le PGCD des entiers suivants.

1. 12 et 54. 2. 45 et 540. 3. 56 et 105.

22 On veut découper une planche rectangulaire de 204 cm par 138 cm en carrés de même taille et sans perte.
Donner toutes les dimensions possibles de ces carrés.

23 Pour chacune des équations diophantiennes suivantes, déterminer en justifiant si elles admettent ou non un couple d'entiers $(x\,;y)$ solution.

1. $51x+39y=2020$ 2. $51x+39y=2019$
3. $23x+42y=2\,021$

24 On dispose de 78 clés USB et de 120 stylos à partir desquels on souhaite constituer des lots identiques sans qu'il ne reste d'objet.
1. Quel est le plus grand nombre de lots réalisables ?
2. De combien de clés USB et de combien de stylos ces lots sont-ils constitués ?

25 Pour chacune des équations diophantiennes suivantes, déterminer sans calculatrice un couple d'entiers solution.

1. $15x-4y=1$ 2. $21x+6y=3$

26 Déterminer l'ensemble des couples d'entiers $(x\,;y)$ vérifiant les équations suivantes.

1. $12x+5y=0$ 2. $51x+18y=0$

27 On possède un nombre d'objets inférieur à 500. Si on les range par 10 ou par 9, il en reste toujours 3. Combien peut-on avoir d'objets ?

PGCD

28 Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $\text{PGCD}(72\,;n)=6$ et $n\leqslant 72$.

29 Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $\text{PGCD}(180\,;n)=12$ et $n\leqslant 180$.

30 Par soustractions successives, montrer que :

1. $\text{PGCD}(123\,;76)=1$. 2. $\text{PGCD}(98\,;38)=2$.

31 Écrire la division euclidienne de 1 420 par 24 et en déduire le PGCD de 1 420 et 24.

32 Justifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, le PGCD de $26n+7$ et n est 7 si n est un multiple de 7 et 1 si n n'est pas un multiple de 7.

33 Déterminer l'ensemble des couples $(x\,;y)\in\mathbb{N}^2$ tels que $xy=6348$ et $\text{PGCD}(x\,;y)=23$.

34 Déterminer l'ensemble des couples $(m\,;n)\in\mathbb{N}^2$ tels que :
1. $mn=5400$ et $\text{PGCD}(m\,;n)=15$.
2. $m^2-n^2=1620$ et $\text{PGCD}(m\,;n)=6$.

35 Déterminer l'ensemble des couples $(a\,;b)\in\mathbb{N}^2$ tels que $a+b=72$ et $\text{PGCD}(a\,;b)=9$.

36 Démontrer les propositions suivantes.
1. Tout entier est premier avec son successeur.
2. Tout entier impair est premier avec l'entier impair suivant.
3. Pour tout couple d'entiers pairs successifs, leur PGCD est égal à 2.

Algorithme d'Euclide

37 À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD de 345 et 195.

38 Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD de chacun des couples suivants.

1. 246 et 189. 2. 365 et -12. 3. 21 312 et 840.

39 Soit n un entier naturel non nul.
1. Démontrer que le reste de la division euclidienne de $21n+4$ par $16n+3$ est égal à $5n+1$.
2. a. Effectuer la division euclidienne de $16n+3$ par $5n+1$.
b. En déduire que $\text{PGCD}(21n+4\,;16n+3)=1$.
3. En suivant le même raisonnement, déterminer le PGCD de $18n+7$ et $2n+1$.

40 Soit n un entier naturel non nul.
1. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD de $19n+24$ et $8n+10$ suivant la parité de n.

2. En déduire que la fraction $\frac{19n+24}{8n+10}$ est irréductible si, et seulement si, n est impair.

41 Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $\mathrm{PGCD}(n\ ;\ 342) = 19$ et $0 \leqslant n \leqslant 342$.

42 Déterminer l'ensemble des entiers m tels que $\mathrm{PGCD}(m+200\ ;\ 196) = 4$ et $-20 \leqslant m \leqslant 20$.

Théorème de Bézout

43 **1.** Démontrer que les nombres 24 et 13 sont premiers entre eux.

2. Déterminer alors deux entiers relatifs u et v tels que $24u + 13v = 1$.

44 Dans chacun des cas suivants, justifier l'existence d'un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers vérifiant l'équation donnée puis en déterminer un.

1. $31u + 70v = 1$ **2.** $25u + 72v = 1$

45 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer à l'aide du théorème de Bézout que $5n - 7$ et $2n - 3$ sont premiers entre eux.

46 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $9n + 11$ et $5n + 6$ sont premiers entre eux.

47 Démontrer que, pour tout entier naturel n, $8n + 3$ et $6n + 2$ sont premiers entre eux.

Équations diophantiennes

48 À l'aide de la remontée de l'algorithme d'Euclide, déterminer un inverse de 134 modulo 57. Autrement dit, déterminer un entier a tel que $134a \equiv 1[57]$.

49 Pour chacun des nombres suivants, déterminer s'il est inversible modulo 33 et, le cas échéant, en donner un inverse : $a = 3$, $b = 8$, $c = 44$, $d = 10$ et $e = 5$.

50 Déterminer, si elle existe, une solution particulière des équations diophantiennes suivantes.

1. $336u + 445v = 1$ **2.** $426u - 68v = 2$ **3.** $301u + 24v = 3$

Théorème de Gauss

51 À l'aide du théorème de Gauss, déterminer l'ensemble des couples d'entiers $(u\ ;\ v)$ tels que $38u - 65v = 0$.

52 À l'aide du théorème de Gauss, déterminer l'ensemble des couples $(x\ ;\ y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

1. $76x = 112y$ **2.** $12(x+3) = 5(y-4)$

53 Lister l'ensemble des couples d'entiers naturels $(x\ ;\ y)$ tels que $\begin{cases} 7x = 19y \\ x \leqslant 100 \end{cases}$.

54 Déterminer l'ensemble des entiers x tels que :

1. $8x \equiv 0\,[55]$ **2.** $6x \equiv 12\,[35]$ **3.** $54x \equiv 0\,[62]$

55 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer, à l'aide du théorème de Gauss, les affirmations suivantes.

1. $3n \equiv 0\,[4] \Leftrightarrow n \equiv 0\,[4]$

2. Si $(n+1) \mid 5n$, alors $n = 0$ ou $n = 4$.

56 **1.** Montrer que si un entier a vérifie $\begin{cases} a \equiv 0\,[45] \\ a \equiv 0\,[8] \end{cases}$, alors $a \equiv 0\,[360]$.

2. Montrer que si un entier b vérifie $\begin{cases} b \equiv 0\,[15] \\ b \equiv 0\,[9] \end{cases}$, alors on n'a pas nécessairement $b \equiv 0[135]$.

57 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\begin{cases} n \equiv 6\,[22] \\ n \equiv 6\,[40] \end{cases}$.

1. Montrer qu'il existe deux entiers relatifs $(k\ ;\ \ell)$ tels que $22k = 40\ell$.

2. En déduire l'ensemble des valeurs possibles de n.

58 Montrer que si un entier a vérifie $\begin{cases} a \equiv 0\,[22] \\ a \equiv 0\,[20] \end{cases}$, alors $a \equiv 0\,[220]$.

59 **1.** Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation diophantienne (E_0) : $11\mathrm{X} = 15\mathrm{Y}$.

2. Déterminer une solution particulière $(x_0\ ;\ y_0)$ de l'équation (E) : $11x - 15y = 3$.

3. Montrer que $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) si, et seulement si, $(x - x_0\ ;\ y - y_0)$ est solution de (E_0).

4. En déduire dans $\mathbb{Z}^2$ l'ensemble des solutions de l'équation $11x - 15y = 3$.

60 Soit n un entier naturel.

1. Justifier que, parmi les nombres n, $n+1$ et $n+2$, l'un est divisible par 3 et au moins un est divisible par 2.

2. En déduire que $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.

61 Montrer à l'aide du théorème de Gauss les affirmations suivantes (on pourra s'aider de tableaux de congruence).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 120 divise $n(n^2-1)(n^2-4)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 6 divise $n(2n+1)(n+1)$.

DIFFÉRENCIATION

Parcours 1 : exercices 72 ; 76 ; 86 ; 91 ; 102 et 106
Parcours 2 : exercices 68 ; 71 ; 94 ; 105 et 107
Parcours 3 : exercices 79 ; 90 ; 93 et 103

1 PGCD

Exercices FLASH

62 Déterminer l'ensemble des diviseurs communs à 6 102 et 2 028.

63 On définit, pour tout entier $n \geqslant 1$, la suite (u_n) par $u_n = \frac{1}{n} \times \mathrm{PGCD}(24 ; n)$.
La suite (u_n) est-elle convergente ?

64 Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{PGCD}(3n+4 ; 4n+3) = 7 \Leftrightarrow n \equiv 1\,[7]$.

65 [Calculer.]

Soit n un entier naturel non nul. Quand on divise 364 par n, le reste vaut 12 et quand on divise 140 par n, le reste vaut 2. Quelles sont les valeurs possibles de n ?

66 TABLEUR [Modéliser.]

Soit n un entier naturel non nul. On souhaite partager un groupe de 654 femmes et 491 hommes en n équipes mixtes.

En répartissant les femmes, il en reste 24 sans équipe. En répartissant les hommes, il en reste 11 sans équipe.

On souhaite déterminer le nombre n d'équipes qui ont été faites à l'aide d'un tableur.

1. Justifier que $n \geqslant 25$.
2. Entrer dans la colonne **A** les entiers de 25 à 100, en **B1** une formule permettant d'obtenir le nombre de femmes sans équipe pour chaque valeur de n et en **C1** une formule permettant d'obtenir le nombre d'hommes sans équipe pour chaque valeur de n.
3. Entrer en **D1** une formule qui renvoie 1 si les valeurs en **B1** et **C1** sont respectivement égales à 24 et 11 et qui renvoie 0 sinon.
4. Déterminer alors le nombre d'équipes.
5. Quel PGCD doit-on déterminer pour vérifier ce résultat ?

67 [Raisonner.] DÉMO

Soient a et b deux entiers naturels non simultanément nuls. On note d le PGCD de a et b.

1. Justifier que d ne peut pas être négatif ou nul. En déduire alors la valeur minimale de d.
2. Démontrer que $d = a$ lorsque $b = 0$ et $d = 1$ lorsque $b = 1$.
3. **a.** On suppose que $a \mid b$. Déterminer alors la valeur de d.
b. On suppose maintenant que $d = a$. Quelle relation existe-t-il entre a et b ? Quelle équivalence a-t-on démontrée ?
4. Démontrer que si $a \geqslant b$, alors $d = \mathrm{PGCD}(a-b ; b)$.

68 [Communiquer.]

Soient n un entier naturel, $\alpha = 2n+1$ et $\beta = n+3$.

1. Montrer que $\mathrm{PGCD}(\alpha ; \beta)$ divise 5.
2. Montrer que si $n \equiv 2\,[5]$, alors 5 est un diviseur commun à α et β.
3. En déduire que $\mathrm{PGCD}(\alpha ; \beta) = 5$ si, et seulement si, $n \equiv 2\,[5]$.

69 [Raisonner.]

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Montrer que le PGCD de n^2-1 et $3(n+1)$ vaut $3(n+1)$ si $n \equiv 1\,[3]$ et $n+1$ sinon.

70 TABLEUR [Modéliser.]

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. À l'aide d'une feuille de calcul, conjecturer l'expression du PGCD de n^2+3n+2 et $n+1$ en fonction de n.
2. À l'aide d'une feuille de calcul, conjecturer l'expression du PGCD de n^2+3n+2 et $2(n+1)$ en fonction de n.
3. Démontrer ces résultats.

71 [Raisonner.]

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\mathrm{PGCD}(n ; n+4) = 4 \Leftrightarrow n \equiv 0\,[4].$$
2. Peut-on en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fraction $\frac{n}{n+4}$ peut être simplifiée si, et seulement si, $n \equiv 0\,[4]$? Justifier.

72 [Raisonner.]

Soit n un entier naturel non nul.
Montrer que $\mathrm{PGCD}(2n+1 ; n+5) = \mathrm{PGCD}(9 ; n+5)$.

73 [Calculer.]

1. Conjecturer à l'aide des tables de valeurs des suites $(n-1)_{n \geqslant 2}$ et $(n^2-3n+5)_{n \geqslant 2}$ les valeurs de n pour lesquelles la fraction $\dfrac{n^2-3n+5}{n-1}$ est réductible.

2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathrm{PGCD}(n-1\,;n^2-3n+5)=\mathrm{PGCD}(n-1\,;3)$ et valider ou réfuter la conjecture émise précédemment.

3. Conjecturer les valeurs de n pour lesquelles $\dfrac{n^2-3n+5}{n-1}$ est un nombre entier.

4. Démontrer ce résultat.

74 ALGO [Calculer.]

On considère l'algorithme suivant où a et b sont des entiers naturels donnés par l'utilisateur.

```
Tant que a ≠ b faire :
    a , b ← min(b − a ; a), max(b − a ; a)
Afficher a.
```

Remarque : La double affectation permet de calculer a et b simultanément ; la valeur utilisée pour calculer **max(b-a ; a)** est l'ancienne valeur de a et non **min(b-a ; a)**.

1. Appliquer cet algorithme à la main en prenant pour valeurs initiales $a=56$ et $b=96$.

2. Que représente le résultat affiché en sortie ?

75 [Raisonner.] DÉMO

Soient a, b et k trois entiers naturels non nuls.
On veut démontrer que $\mathrm{PGCD}(ka\,;kb)=k\times\mathrm{PGCD}(a\,;b)$.

1. Écrire la division euclidienne de a par b (en appelant q le quotient et r le reste) puis écrire la division euclidienne de ka par kb.

2. En utilisant l'algorithme d'Euclide et la suite des restes des divisions euclidiennes successives, démontrer alors que $\mathrm{PGCD}(ka\,;kb)=k\times\mathrm{PGCD}(a\,;b)$.

76 EN PHYSIQUE [Calculer.]

Un son complexe est composé d'une harmonique A de fréquence 440 hertz, d'une harmonique B de fréquence 520 hertz et d'une harmonique C de fréquence 780 hertz. On admet que la fréquence de ce son est égale au PGCD des fréquences des harmonies.
Quelle est la fréquence de ce son complexe ?

77 PYTHON [Calculer.] LABO PYTHON

1. Programmer en Python un algorithme qui prend en argument deux entiers naturels et qui calcule leur PGCD en utilisant l'algorithme d'Euclide.

2. Tester cet algorithme pour les couples suivants : $(45\,;9)$, $(9\,;45)$ et $(60\,;12)$.

Donne-t-il le même résultat quand le couple $(a\,;b)$ donné vérifie $a<b$ ou $a>b$?

78 VRAI / FAUX [Raisonner.]

Déterminer, en justifiant, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $2^{445} \equiv 2\,[15]$.

2. $\mathrm{PGCD}(2^{445}+4\,;15)=3$.

79 [Calculer.]

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Factoriser n^2+2n-3 et n^2+4n+3.

2. Déterminer le PGCD de $n+1$ et $n-1$ selon la parité de n.

3. En déduire, en fonction de n, une expression de $\mathrm{PGCD}(n^2+2n-3\,;n^2+4n+3)$.

80 TABLEUR [Modéliser.]

On souhaite découper une surface rectangulaire en carrés de mêmes dimensions.

On cherche la taille maximale du côté des carrés.

On commence par construire un carré dont le côté est égal à la largeur du rectangle.

Dans le rectangle qui reste, on construit encore un carré dont le côté est égal à la nouvelle largeur et ainsi de suite jusqu'à ce que le rectangle restant soit un carré. Le rectangle total sera alors découpable en carrés de ces dernières dimensions.

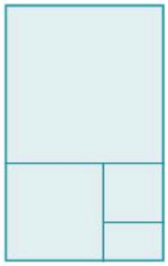
1. Ouvrir une feuille de calcul. Entrer les dimensions initiales 6 102 et 2 028 en **A1** et **B1**.
Quelles formules faut-il entrer en **A2** et **B2** pour obtenir les longueurs successives des rectangles obtenus dans la colonne **A** et leurs largeurs dans la colonne **B** ?

2. Étirer ces formules vers le bas afin de compléter les colonnes **A** et **B**. Quand peut-on s'arrêter ? Quelle est la dimension des carrés permettant de partager ce rectangle ?

3. Afin de réduire le nombre de lignes dans le tableur, on entre respectivement en **A2** et en **B2** les formules **=MAX(B1 ; MOD(A1 ; B1))** et **=MIN(B1 ; MOD(A1 ; B1))**.
Que calculent ces formules ? En combien d'étapes retrouve-t-on le résultat cherché ?

81 PYTHON [Modéliser.] LABO PYTHON

Dans son testament, un homme partage son terrain rectangulaire de longueur et de largeur entières de la manière suivante. Il donne à son premier héritier une parcelle carrée de dimensions entières la plus grande possible. Il donne au 2ᵉ la parcelle carrée la plus grande possible dans le reste du champ, au 3ᵉ la parcelle carrée la plus grande possible dans ce qu'il reste, et ainsi de suite jusqu'à ce que la totalité du champ soit attribuée.



1. Justifier que sa méthode de partage se termine effectivement quelles que soient les dimensions initiales du champ.

2. Reproduire et compléter le programme suivant afin qu'il calcule et affiche la longueur du côté de chaque parcelle et le nombre de parcelles de chaque taille.

```
def parcelle(l, L):
  while ... :
    print('Côté :', b ,'Nombre :', ...)
    l, L = L, ...
```

AIDE

On utilise respectivement les commandes **a//b** et **a %b** pour le quotient et le reste de la division euclidienne de **a** par **b**.

3. Si le terrain initial mesure 96 m de longueur et 56 m de largeur, quel est le nombre d'héritiers ?

2 Nombres premiers entre eux

Exercices FLASH

82 Justifier l'existence d'un couple d'entiers $(u\,;v)$ tels que $130u+231v=1$ et en déterminer un.

83 Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer à l'aide du théorème de Bézout que $\mathrm{PGCD}(4n+3\,;2n+1)=1$.

84 Pour quelles valeurs entières n l'équation $24x+32y=n$ admet-elle des solutions entières ?

85 Soit $n\in\mathbb{N}$. Donner une combinaison linéaire de $4n+3$ et $3n+4$ égale à 7.

Peut-on en déduire que $\mathrm{PGCD}(4n+3\,;3n+4)=7$?

86 [Calculer.]

On considère l'équation diophantienne $4x-27y=1$.

1. Justifier que cette équation admet des couples d'entiers solutions et en déterminer un.

2. Soit $(x_0\,;y_0)$ une solution particulière. On définit les suites arithmétiques (x_n) de premier terme x_0 et de raison 27 et (y_n) de premier terme y_0 et de raison 4. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, le couple $(x_n\,;y_n)$ est solution.

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer, en utilisant la question **1.**, dix couples solutions de l'équation.

87 [Représenter.]

1. Montrer que l'équation $(\mathrm{E}) : 54x+42y=24$ est équivalente à $9x+7y=4$ et qu'elle admet une solution dans $\mathbb{Z}^2$.

2. Déterminer une solution particulière de (E).

3. Justifier que les solutions entières de l'équation (E) sont, dans un repère du plan, des coordonnées de points de la droite d'équation $y=-\frac{9}{7}x+\frac{4}{7}$.

4. À l'aide du mode tableur de la calculatrice et en utilisant la fonction $x\mapsto-\frac{9}{7}x+\frac{4}{7}$, construire, à l'aide d'une valeur initiale et d'un pas bien choisi, un tableau ne faisant apparaître que des points de la droite à coordonnées entières.

88 [Raisonner.] DÉMO

Le but de cet exercice est de démontrer la propriété : « Pour tous a, b, c entiers tels que a et b ne soient pas simultanément nuls, l'équation $ax+by=c$ admet des solutions si, et seulement si, c est un multiple de $\mathrm{PGCD}(a\,;b)$. »

1. Montrer que si l'équation $ax+by=c$ admet des solutions, alors $\mathrm{PGCD}(a\,;b)\,|\,c$.

2. Réciproquement, supposons que c est un multiple de $\mathrm{PGCD}(a\,;b)$. Soit c' l'entier tel que $c=c'\mathrm{PGCD}(a\,;b)$.

Déduire de l'identité de Bézout qu'il existe un couple solution de l'équation $ax+by=c$.

89 [Raisonner.]

Soit $(m\,;n)\in\mathbb{N}^{*2}$. Montrer qu'il existe $(a\,;b)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $\frac{1}{nm}=\frac{a}{n}+\frac{b}{m}$ si, et seulement si, m et n sont premiers entre eux.

90 [Communiquer.]

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Justifier que si n n'est pas un multiple de 3, alors n et 3 sont premiers entre eux.

2. En utilisant le théorème de Bézout, montrer que si n est premier avec 3, alors n^3 est premier avec 9.

3. Démontrer par contraposée la proposition :
« Pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul, si $9 \mid n^3$, alors $3 \mid n$. »

91 [Calculer.]

On souhaite constituer des colis de bloc-notes et de cartouches d'encre. Un bloc-note pèse 702 g et une cartouche d'encre pèse 45 g.

1. Le service de livraison propose des tarifs pour des colis de poids inférieur à 2 kg, 3 kg, 4,5 kg ou 9 kg. Parmi ces poids, quels sont ceux qui peuvent être exactement atteints avec ces fournitures ? Justifier.

2. Déterminer une constitution possible pour un colis pesant exactement 4,5 kg.

3. Déterminer, à l'aide de la remontée de l'algorithme d'Euclide, un couple de Bézout associé aux entiers 702 et 45. Peut-on utiliser ce couple dans ce contexte ?

92 VRAI / FAUX [Calculer.]

Déterminer en justifiant si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

1. Il existe un entier naturel n tel que $\frac{n-7}{18}$ et $\frac{n-8}{15}$ soient tous les deux entiers.

2. Il existe un entier naturel n tel que $\frac{n-3}{16}$ et $\frac{n-11}{12}$ soient tous les deux entiers.

93 APPROFONDISSEMENT [Communiquer.]

On souhaite chiffrer un texte en français avec des accents, ce qui donne un alphabet à 35 lettres. Chaque lettre est alors associée à un entier entre 0 et 34.

1. On choisit la fonction de chiffrement affine $f : x \mapsto 10x+3$ qui, à tout entier $x \in \{0 ; \ldots ; 34\}$, associe l'entier $y \in \{0 ; \ldots ; 34\}$ tel que $y \equiv 10x+3\,[35]$.

a. Soit $y \in \{0 ; \ldots ; 34\}$.
Montrer que si $y \equiv 10x+3\,[35]$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $10x+35k = y-3$.

b. Pour quelles valeurs de y cette équation admet-elle des solutions entières ?

c. Que peut-on en déduire pour cette fonction de chiffrement ?

2. On choisit la fonction de chiffrement affine $g : x \mapsto 8x+5$ qui, à tout entier $x \in \{0 ; \ldots ; 34\}$, associe l'entier $y \in \{0 ; \ldots ; 34\}$ tel que $y \equiv 8x+5\,[35]$.

a. Justifier qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $8a \equiv 1\,[35]$ puis déterminer un tel entier.

b. En déduire que, pour tout $y \in \{0 ; \ldots ; 34\}$, l'équation $y \equiv 8x+5\,[35]$ admet une unique solution $x \in \{0 ; \ldots ; 34\}$ et écrire la fonction de décodage permettant de la déterminer.

c. Quel est l'entier qui est chiffré par 9 avec cette fonction de chiffrement ?

94 [Communiquer.]

On souhaite chiffrer un texte en français en tenant compte des accents, ce qui donne un alphabet à 35 lettres. On a choisi la fonction de chiffrement affine $h : x \mapsto 7x+1$ qui, à tout entier $x \in \{0 ; \ldots ; 34\}$, associe l'entier $y \in \{0 ; \ldots ; 34\}$ défini par $y \equiv h(x)\,[35]$.
L'objectif est de montrer que cette fonction de codage est ambigüe.

1. Montrer par l'absurde et en utilisant le théorème de Bézout que $7x+1$ ne peut pas être congru à 2 modulo 35. Que peut-on en déduire sur la lettre associée au nombre 2 dans le message chiffré ?

2. On souhaite décoder la lettre associée au nombre 8.

a. Déterminer deux entiers $x \in \{0 ; \ldots ; 34\}$ codés par 8.

b. Combien d'entiers $x \in \{0 ; \ldots ; 34\}$ sont codés par 8 ?

95 [Calculer.]

On cherche à résoudre un problème de la forme $\begin{cases} x \equiv a\,[3] \\ x \equiv b\,[5] \\ x \equiv c\,[7] \end{cases}$
où a, b et c sont des entiers naturels non nuls.

1. Montrer que s'il existe des entiers α, β et γ tels que $\begin{cases} 35 \times \alpha \equiv 1\,[3] \\ 21 \times \beta \equiv 1\,[5] \\ 15 \times \gamma \equiv 1\,[7] \end{cases}$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$,
$x = 35\alpha \times a + 21\beta \times b + 15\gamma \times c + 105 \times k$ est solution du système.

2. Justifier l'existence de ces entiers α, β et γ puis déterminer un triplet qui convient.

3. En déduire un ensemble de solutions du système.
A-t-on démontré que cet ensemble les contient toutes ?

96 [Représenter.]

D'après bac S, Centres étrangers, juin 2009

On note (E) l'équation $3x+2y=29$.

1. a. Déterminer un couple d'entiers solution de (E).

b. On admet que les solutions sont données, pour tout entier k, par $(11-2k ; 3k-2)$.
Préciser les couples solutions pour lesquels on a à la fois $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

2. Soient S la surface d'équation $4z = xy$ dans un repère et P son intersection avec le plan d'équation $3x+2y=29$.

a. Soit $(x ; y ; z)$ un point de P à coordonnées entières.
Montrer que $\mathrm{PGCD}(x ; 4) = 1$ et en déduire que 4 divise y.

b. Construire une table de congruence modulo 4 afin de déterminer, parmi les solutions de (E), lesquelles vérifient $y \equiv 0\,[4]$.

c. En déduire l'expression des coordonnées des points de P à coordonnées entières.

3 Théorème de Gauss et applications

Exercices FLASH

97 Déterminer tous les entiers qui, divisés par 204 ou 156, donnent un reste égal à 15.

98 Dans un repère, représenter l'ensemble des points $(x\,;y)$ à coordonnées entières comprises entre -10 et 10 tels que $3x=4y$.

99 Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $6|4n$ et $4|5n$.

100 [Calculer.]

1. Déterminer l'unique couple $(a\,;b)\in\mathbb{N}^2$ tel que $\mathrm{PGCD}(a\,;b)=21$ et $3a=5b$.

2. Déterminer l'ensemble des couples $(a\,;b)\in\mathbb{Z}^2$ tels que $\mathrm{PGCD}(a\,;b)=18$ et $7a=4b$.

101 [Communiquer.]

1. Soit $(a\,;b\,;c)\in\mathbb{N}^3$ tel que $\mathrm{PGCD}(a\,;b)=1$.
Écrire l'identité de Bézout pour le couple $(a\,;b)$ et en déduire que tout diviseur commun à a et bc divise c.

2. Montrer que, pour tout $(a\,;b\,;c)\in\mathbb{N}^3$, si $\mathrm{PGCD}(a\,;b)=1$ et $\mathrm{PGCD}(a\,;c)=1$, alors $\mathrm{PGCD}(a\,;bc)=1$.

102 [Calculer.]

On souhaite constituer des colis de 4 500 g avec des bloc-notes et des cartouches d'encre. Un bloc-note pèse 702 g et une cartouche d'encre pèse 45 g.
On note x le nombre de bloc-notes et y le nombre de cartouches d'encre.

1. Justifier que x et y sont deux entiers naturels solution de l'équation $(\mathrm{E}) : 702x+45y=4\,500$.

2. Déterminer une solution particulière $(x_0\,;y_0)$ de cette équation dans $\mathbb{Z}^2$.

3. Montrer que si $(x_0\,;y_0)\in\mathbb{Z}^2$ est une solution de l'équation (E), alors tout couple $(x\,;y)\in\mathbb{Z}^2$ solution de (E) vérifie $702(x-x_0)=45(y_0-y)$.

4. En déduire dans $\mathbb{Z}^2$ l'ensemble des solutions de (E).

5. En déduire les valeurs possibles de x et de y dans ce problème.

103 [Raisonner.]

Soient a et b deux entiers naturels. On admet que a et b ont une infinité de multiples communs positifs et qu'il en existe un plus petit que les autres, noté $\mathrm{PPCM}(a\,;b)$.

1. a. Justifier que l'ensemble des multiples communs positifs à a et b est non vide.

b. Lister les cinq premiers multiples strictement positifs de 24 et de 36, puis en déduire $\mathrm{PPCM}(24\,;36)$.
On souhaite démontrer que le produit de deux nombres entiers naturels est égal au produit de leur PGCD et de leur PPCM.

2. Vérifier que $24\times36=\mathrm{PGCD}(24\,;36)\times\mathrm{PPCM}(24\,;36)$.

3. Soient $(a\,;b)\in\mathbb{N}^2$. On pose $d=\mathrm{PGCD}(a\,;b)$ et on considère $(a'\,;b')\in\mathbb{N}^2$ tel que $a=da'$ et $b=db'$.
Justifier que $a'b'd$ est un multiple commun positif à a et b.

4. a. Que peut-on dire de a' et b' ?

b. Soit $m\in\mathbb{N}$. Montrer que si m est un multiple commun positif à a et b, alors m est un multiple de $a'b'd$.

5. En déduire que $a'b'd$ est le plus petit multiple commun positif à a et b.

6. On note $m=a'b'd$ le plus petit multiple commun positif de a et b. Montrer que $m\times d=a\times b$.

104 [Raisonner .]

Soient deux entiers naturels a et b premiers entre eux.
Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, a et b^n sont premiers entre eux.

105 [Raisonner.]

Soient a, b et c trois entiers naturels et n un entier naturel non nul.

1. Montrer que si n et c sont premiers entre eux, alors $ac\equiv bc\,[n]\Rightarrow a\equiv b\,[n]$.

2. Montrer par un contre-exemple que cette implication est fausse si on ne suppose pas n et c premiers entre eux.

106 [Calculer.]

Un groupe d'amis a mangé pendant plusieurs jours au restaurant de leur hôtel. Ils avaient le choix entre le menu du jour à 24 € et le menu gastronomique à 45 €. L'addition s'élevant à 903 €, ils cherchent à retrouver combien de fois chaque menu a été choisi.
On note a le nombre de menus du jour et b le nombre de menus gastronomiques choisis.

1. Écrire une équation diophantienne associée à cette situation.

2. Montrer qu'une solution de cette équation est $(a_0\,;b_0)=(2\,;19)$.

3. Montrer que si $(a\,;b)\in\mathbb{Z}^2$ est une solution de l'équation, alors $8(a-2)=15(19-b)$.

4. En déduire l'ensemble des solutions cherchées.

5. S'ils savent seulement que le nombre de repas pris est un multiple de 7, peuvent-ils connaître la répartition des choix de menus ?

107 [Calculer.]

Soit un entier n tel que le reste de la division euclidienne de n par 18 et de n par 50 soit égal à 2.

1. Montrer que les quotients respectifs k et m de ces divisions euclidiennes vérifient $18k = 50m$.

2. Déterminer le reste de la division euclidienne de n par 15.

108 VRAI / FAUX [Raisonner.]

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
« Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $(a\,;b) \in \mathbb{Z}^2$:
$$ab \equiv 0\,[n] \Rightarrow a \equiv 0\,[n] \text{ ou } b \equiv 0\,[n]. \text{ »}$$

109 TABLEUR [Modéliser.]

On cherche l'ensemble des entiers n congrus à 2 modulo 3 et à 1 modulo 5.

1. Dans une feuille de calcul, entrer dans la colonne **A** les entiers de -8 à 30, puis dans les colonnes **B** et **C** les restes respectifs de ces entiers modulo 3 et 5.

2. Dans la colonne **D**, entrer une formule à recopier vers le bas qui affiche 1 si l'entier correspondant à la ligne est solution au problème et 0 sinon. Combien de solutions existe-t-il entre -8 et 30 ? Comment semblent-elles réparties ?

AIDE
La formule **=MOD(a ; b)** permet d'obtenir le reste de la division euclidienne de a par b.

3. Montrer que si n et n_0 sont solutions du problème, alors $n - n_0 \equiv 0\,[15]$. En déduire le reste de la division euclidienne de tout n solution du problème par 15.

110 GEOGEBRA [Représenter.]

Dans un repère du plan, on cherche les points à coordonnées entières de la droite d'équation $15x + 4y = 1$.

1. Sur GeoGebra, tracer la droite d'équation $15x + 4y = 1$ et vérifier que le point de cette droite d'abscisse -1 a une ordonnée entière.

2. Justifier que si $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$ sont les coordonnées d'un point de cette droite, alors $x + 1$ est un multiple de 4.

3. Créer un curseur n allant de -12 à 12 avec un pas de 4, puis le point de la droite d'abscisse $n - 1$.

4. Déterminer la distance verticale entre deux points consécutifs à coordonnées entières de la droite.

111 [Chercher.]

Le cycle solaire est une révolution de 28 ans après lesquels chaque jour de la semaine revient à la même date.

Le cycle lunaire est une période de 19 ans après lesquels les lunaisons retombent aux mêmes dates du mois.

Ces deux cycles ont commencé simultanément en l'an -457.

Donner l'ensemble des années auxquelles ces deux cycles se trouvent à nouveau coordonnés, c'est-à-dire que les lunaisons et les jours des semaines se trouvent aux mêmes dates qu'en -457.

Histoire des maths

Carl-Friedrich Gauss (1777-1855) est l'un des plus célèbres mathématiciens Européens du XIXe siècle. À 19 ans, il détermina une méthode pour construire un polygone régulier à 17 côtés à la règle et au compas et indiqua en général quels sont ceux qu'on peut ou non construire de cette façon. Dans sa thèse soutenue en 1799, il utilise les nombres imaginaires (qu'il appellera plus tard « complexes ») pour factoriser tous les polynômes et démontre le théorème fondamental de l'algèbre énoncé par d'Alembert. C'est dans ses *Disquisitiones arithmaticae* publiées en 1801 et qui reste une référence en arithmétique, qu'on trouve le théorème qui porte son nom. La même année, il détermine la trajectoire de Cérès, une planète naine qui venait d'être aperçue pour la première fois et introduit à cette occasion la méthode des moindres carrés. Il travaillera aussi sur l'électromagnétisme, les probabilités et sur la géométrie.

112 [Calculer, Communiquer.]

D'après bac S, Polynésie, juin 2014

Un magicien propose le tour suivant : « Multipliez par 12 le numéro de votre jour de naissance. Ajoutez à ce résultat le numéro de votre mois de naissance multiplié par 31. Je vais deviner votre date de naissance ».

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(\mathrm{E_0}) : 12\mathrm{X} = 31\mathrm{Y}$.

2. Déterminer une solution particulière dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $(\mathrm{E_1}) : 12x + 31y = 1$.

3. En déduire une solution particulière $(x_0\,;\,y_0) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation $(\mathrm{E}) : 12x + 31y = 503$.

4. Montrer que si $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution de l'équation (E), alors le couple $(x - x_0\,;\,y_0 - y)$ est solution de $(\mathrm{E_0})$. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

5. Justifier que (E) admet une unique solution vérifiant $1 \leqslant y \leqslant 12$ et la déterminer. Quelle est la date de naissance d'une personne obtenant 503 ?

6. a. On considère l'algorithme suivant.

```
Pour x allant de 1 à 31 faire :
    Pour y allant de 1 à 12 faire :
        z ← 12x + 31y
        Afficher z
    Fin Pour
Fin Pour
```

Modifier cet algorithme afin qu'il prenne en argument un nombre entier m et retourne les valeurs de x et de y telles que $12x + 31y = m$ et $1 \leqslant y \leqslant 12$.

b. Programmer et exécuter cet algorithme afin de déterminer la date de naissance d'une personne qui obtient 355.

113 [Calculer, Raisonner.]

Soit n un entier naturel tel que $n \equiv 9\,[17]$ et $n \equiv 3\,[5]$.

1. Montrer qu'il existe un couple $(u\,;\,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $n = 17u + 9$, $n = 5v + 3$ et $5v - 17u = 6$.

2. Justifier que l'équation $5v - 17u = 6$ admet des solutions entières et en déterminer une.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $5v - 17u = 6$ puis en déduire que $n \in \{43 + 85k\,,\, k \in \mathbb{Z}\}$.

4. Montrer que, pour tout entier relatif k, $43 + 85k$ est solution du problème. Conclure.

114 [Communiquer, Raisonner.] DÉMO

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.
On pose $d = \mathrm{PGCD}(a\,;\,b)$.

1. On considère deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

a. Justifier que d divise $au + bv$.

b. En déduire alors que a et b sont premiers entre eux.

2. On suppose à présent que a et b sont premiers entre eux (on a alors $d = 1$). On cherche à démontrer qu'il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.
On note E l'ensemble des entiers strictement positifs pouvant s'écrire sous la forme $au + bv$.

Justifier que l'ensemble E n'est pas vide ; autrement dit qu'il existe un entier $k > 0$ tel que $au + bv = k$.

On admet pour toute la suite que E admet un plus petit élément noté c.

3. a. Écrire la division euclidienne de a par c en notant q le quotient et r le reste.

b. Justifier qu'il existe deux entiers U et V tels que $r = a\mathrm{U} + b\mathrm{V}$ et en déduire que si $r > 0$, alors $r \in \mathrm{E}$.

c. En déduire alors que $r = 0$ et donc que $c \mid a$.

4. a. Démontrer que $c \mid b$.

b. En déduire alors que $c = 1$.

c. Conclure en rédigeant intégralement la propriété démontrée par les questions **2.** à **4.**.

5. Quelle équivalence cet exercice a-il permis de démontrer ?

115 [Calculer, Chercher.]

Théorème des restes chinois

Dix-sept pirates ont gagné un gros butin. Ils comptent qu'en prenant tous la même part, il reste trois pièces pour le cuisinier chinois.
Un soir, une mutinerie éclate au cours de laquelle six pirates sont tués. Ils comptent alors qu'en se répartissant le butin, il reste quatre pièces pour le cuisinier.
Or, avant qu'ils aient distribué cet argent, cinq autres membres meurent du scorbut. Le cuisinier chinois compte alors qu'en donnant la même somme à chaque pirate restant, il lui reviendra cinq pièces.
On cherche à déterminer de combien de pièces est constitué ce butin.

1. Soit b le butin des pirates. Traduire l'énoncé par un système de trois congruences.

2. À la fin, chaque pirate a 84 pièces de plus que dans le premier partage.
Montrer que si $b \in \mathbb{N}$ est une solution du système, alors il existe trois entiers naturels x, y et z tels que $17x - 11y = 1$, $11y - 6z = 1$ et $z - x = 84$.

3. Déterminer l'ensemble des solutions de chacune des deux premières équations.

4. En utilisant l'équation $z - x = 84$, donner la relation entre les deux paramètres définissant les solutions des équations $17x - 11y = 1$ et $11y - 6z = 1$.

5. En déduire la valeur de ces paramètres, puis la solution du problème.

116 [Calculer, Chercher.]

Chiffrement

1. a. Déterminer un entier u_0 tel que $5u_0 \equiv 1\,[28]$.

b. Soient u et v deux entiers tels que $5u + 28v = 1$.
Montrer que $5u - 5u_0 \equiv 0\,[28]$ et en déduire les valeurs de u et v telles que $u \in \{0 ; \dots ; 28\}$.

2. On chiffre un message de la manière suivante : à chaque lettre est associé un entier entre 0 et 25 en suivant l'ordre alphabétique.

Un entier $n \in \{0 ; \dots ; 25\}$ sera codé par l'unique entier $m \in \{0 ; \dots ; 28\}$ tel que $m \equiv n^5\,[29]$.

a. Soient $n \in \{0 ; \dots ; 25\}$ et $m \in \{0 ; \dots ; 28\}$ la version chiffrée de n. Montrer que $m^{17} \equiv n \times n^{28\times 3}\,[29]$.

b. On admet que $n^{28} \equiv 1\,[29]$.
Déduire de ce qui précède que la fonction de décodage consiste à calculer le reste de la division euclidienne de m^{17} par 29.

117 DEVOIR MAISON [Communiquer, Modéliser.]

Un distributeur de pièces ne dispose que de deux sortes de pièces de montants a et b, où a et b sont des entiers naturels non nuls. Pour distribuer une somme S, il doit trouver une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de a et b.

1. On suppose que $a = 2$ et que b est un entier impair supérieur ou égal à 3.

a. Montrer que le distributeur peut payer toutes les sommes paires.

Soient $\mathrm{S} \geqslant b$ un entier naturel impair et respectivement q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de S par b.

b. Montrer que si q est impair, alors r est pair, et que si q est pair, alors $b + r$ est pair. En déduire que le distributeur peut payer toutes les sommes supérieures ou égales à b.

c. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre, qui prend en argument la somme à payer supposée impaire et retourne les nombres n_a et n_b de pièces de chaque valeur à donner.

```
Demander S
q ← E(S/b)
r ← S − b×q
Si q est impair :
    n_a = …
    n_b = …
    S = …
Sinon :
    n_a = …
    n_b = …
    S = …
```

2. Supposons que a et b sont deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 et premiers entre eux.
On souhaite montrer qu'on ne peut pas payer la somme $ab - a - b$.

Supposons donc par l'absurde qu'il existe $(x ; y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $ax + by = ab - a - b$.

a. Montrer qu'il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 1 = kb$.

b. En déduire que $y = a - 1 - ak$.

c. Montrer que l'égalité $x + 1 = kb$ implique que $k > 0$ et que l'égalité $y = a - 1 - ak$ implique que $k < 1$.

d. Conclure.

118 [Calculer, Raisonner.]

Soit $(a ; b)$ un couple d'entiers strictement positifs tels que $a^2 = b^3$. On note $d = \mathrm{PGCD}(a ; b)$. Soient x et y les entiers tels que $a = dx$ et $b = dy$.

1. Montrer le lemme suivant : « Pour tous entiers x et y premiers entre eux, $y \mid x^2 \Rightarrow y \mid x$. »

2. Montrer que $x^2 = dy^3$.

3. Justifier que $y \mid x$ et en déduire que $y = 1$.

4. En déduire que a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

5. Soit x un entier naturel non nul.

a. Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne de x^2 par 7 ? Et de x^6 par 7 ?

b. En déduire que si n est le carré d'un entier et le cube d'un autre entier, alors $n \equiv 0\,[7]$ ou $n \equiv 1\,[7]$.

119 [Calculer, Chercher.]

Une jeune fille portait des œufs pour les vendre au marché. Elle rencontra un jeune homme qui voulut jouer avec elle et qui cassa tous ses œufs sans les lui rembourser.
Le juge condamna le jeune homme à payer les œufs. Mais le juge ne savait pas combien il y en avait et le demanda à la jeune fille.
Elle prétendit ne pas les avoir comptés, mais qu'elle avait essayé de les ranger par 2 et qu'il restait 1 œuf, puis par 3 et qu'il en restait encore 1, puis par 4 par 5 et par 6 et que, dans chaque cas, il en restait 1 et enfin par 7 et que cette fois il n'y avait pas d'œuf en reste.

1. Traduire cet énoncé par un système de congruences.

2. En déduire que le nombre d'œufs n vérifie $n \equiv 1\,[60]$ et $n \equiv 0\,[7]$.

3. En déduire qu'il existe des entiers a et b tels que $n = 7a = 60b + 1$ et déterminer l'ensemble des couples $(a\,;\,b)$ d'entiers vérifiant $7a = 60b + 1$.

4. En déduire le plus petit nombre d'œufs possible de la jeune fille.

120 UN PROBLÈME CHINOIS

Le problème des cent volailles a été énoncé au Ve siècle en Chine : « Un coq vaut cinq pièces, une poule trois pièces et trois poussins valent une pièce. Avec cent pièces, on achète cent volailles. Combien y a-t-il de coqs, de poules et de poussins ? »
L'auteur donne une méthode pour trouver toutes les solutions à partir d'une solution particulière : accroître les coqs chaque fois par 4, décroître les poules chaque fois par 7 et accroître les poussins chaque fois par 3.

1. Soient x le nombre de coqs, y le nombre de poules et z le nombre de poussins.
Montrer que $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifie $\begin{cases} z = 100 - x - y \\ 14x + 8y = 200 \end{cases}$.

2. Soit $(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ une solution particulière.

a. Montrer que $7(x - x_0) = 4(y_0 - y)$ et en déduire les expressions de x et y en fonction de x_0 et y_0. Vérifier que cela confirme la méthode donnée.

b. Justifier que le nombre de poussins augmente de 3 entre chaque triplet solution.

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'ensemble des triplets de solutions.

121 RACINES RATIONNELLES D'UN POLYNÔME

Partie A : Étude d'un cas particulier

Le but est de déterminer les éventuelles solutions rationnelles de l'équation polynomiale $15x^3 - 7x + 3 = 0$.

1. a. Soit $x \in \mathbb{Z}$.
Que peut-on dire du PGCD de x et x^3 ?

b. Supposons qu'il existe une solution entière x.
Justifier que x ne peut valoir que -3 ; -1 ; 1 ou 3.

c. Conclure sur l'existence de solutions entières.

2. Soient p et q deux entiers relatifs premiers entre eux et tels que $\frac{p}{q}$ soit solution de l'équation.

a. Montrer $15p^3 - 7pq^2 = -3q^3$.

b. En appliquant le théorème de Gauss, démontrer que p divise 3.

c. De même, montrer que q divise $15p^3$, puis que q divise 15.

d. En déduire les valeurs positives possibles de $\frac{p}{q}$.
Sont-elles solutions ?

Partie B : Étude d'un cas plus général

1. Soient a, b et c trois entiers naturels non nuls.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $c \mid a \times b^n$ et $\mathrm{PGCD}(b\,;\,c) = 1$, alors $c \mid a$.

2. On considère l'équation polynomiale à coefficients entiers $a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$.
Soit $(p\,;\,q) \in \mathbb{Z}^2$ avec $q \neq 0$ tel que $\frac{p}{q}$ soit solution de cette équation avec $\mathrm{PGCD}(p\,;\,q) = 1$.

a. Montrer que :
$a_5p^5 + a_4p^4q + a_3p^3q^2 + a_2p^2q^3 + a_1pq^4 = -a_0q^5$.
En déduire que p divise a_0.

b. De même, montrer que q divise a_5.

3. Application

a. Déduire de ce qui précède que l'ensemble des rationnels non entiers solutions de l'équation $2x^5 + 41x^4 - 7x - 6 = 0$ est inclus dans $\left\{\frac{1}{2}\,;\,\frac{-1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\,;\,\frac{-3}{2}\right\}$.

b. En déduire l'ensemble des solutions rationnelles de cette équation.

122 TRIPLETS PYTHAGORICIENS

Un triplet pythagoricien est un triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ d'entiers naturels non nuls tels que $x^2 + y^2 = z^2$ (E).

1. Peut-il y avoir des solutions si $z = 1$ ou $z = 2$?

2. Supposons que $z > 2$ et que $(x\,;\,y\,;\,z)$ est un triplet pythagoricien. Que peut-on dire du PGCD de x et y ?

3. Montrer que si x et y ont la même parité, alors z est pair, et que s'ils sont de parités différentes, alors z est impair.

4. On suppose dans la suite que x est pair.
Soit x' tel que $x = 2x'$.
Vérifier que $4x'^2 = (z - y)(z + y)$.

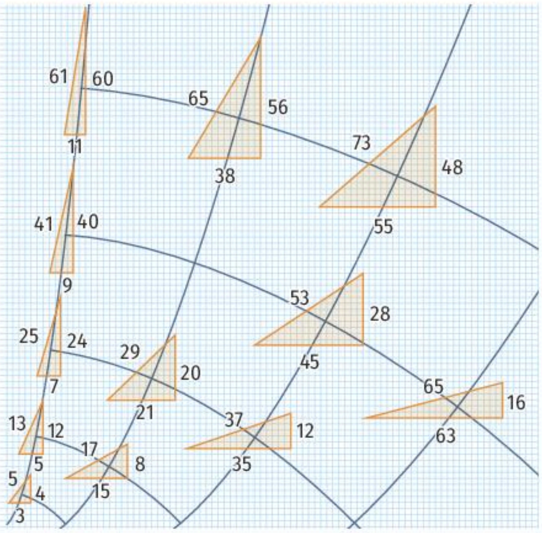
5. Justifier que $z - y$ et $z + y$ sont pairs et montrer que si $\mathrm{PGCD}(y\,;\,z) = 1$, alors $\mathrm{PGCD}\left(\frac{z-y}{2}\,;\,\frac{z+y}{2}\right) = 1$.

6. On suppose dans la suite de l'exercice que $\mathrm{PGCD}(y\,;z)=1$. On admet le lemme suivant : « Soient a, b, c trois entiers naturels tels que $\mathrm{PGCD}(a\,;b)=1$ et $ab=c^2$. Alors il existe deux entiers relatifs u et v premiers entre eux tels que $a=u^2$ et $b=v^2$. »

En déduire qu'il existe deux entiers relatifs premiers entre eux tels que $\dfrac{z-y}{2}=u^2$ et $\dfrac{z+y}{2}=v^2$.

7. En déduire que z est la somme des carrés de deux entiers, et exprimer x et y en fonction de ces entiers.

8. Application : Les équations $x^2+y^2=25$ et $x^2+y^2=49$ admettent-elles des solutions ?



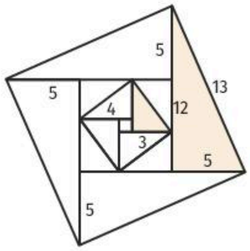
Exemples de triplets pythagoriciens représentés par des triangles rectangles.

123 CASSE-TÊTE

Un jour, dans une auberge, s'arrête un groupe de voyageurs. Des hommes, mais aussi des femmes, en moindre nombre mais tout autant affamées, s'attablent. Il est convenu à l'issue du repas que les hommes paieront chacun 19 sous et les femmes 13 sous chacune. L'aubergiste récolte ainsi exactement 1000 sous.
Combien y avait-il d'hommes et de femmes dans ce groupe ?

124 DÉFI

Un triangle pythagoricien est un triangle rectangle dont les trois côtés ont des mesures entières.
Le triangle de mesures 3, 4 et 5 est par exemple un triangle pythagoricien.
Déterminer les 20 triplets pythagoriciens qu'on obtiendrait si on construisait les triangles successifs comme sur le schéma ci-dessous.



AIDE

- Le petit côté du triangle augmente toujours de 2.
- Le tout petit carré central a pour côté 1. Quel est le côté du carré au centre de la 2^{e} série de triangles ?

i^2 ℕ ℤ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
Complexes Arithmétique Matrices Graphes

Exercices transversaux en lien avec ce chapitre :
13, 14, 16 et 17 p. 238

Le Grand Oral

Entraînez-vous au Grand Oral et enregistrez-vous sur LLS.fr/GrandOralMaths

Comme le suggère le programme, les problèmes abordés en maths expertes peuvent servir d'appui à des questions de Grand Oral. Voici un exemple, basé sur l'enseignement de spécialité, utilisant des notions de ce chapitre.

Dans le cadre de l'enseignement de spécialité, vous avez étudié le théorème des valeurs intermédiaires.

1. Citer ce théorème en précisant ses hypothèses de validité.

2. a. Utiliser ce théorème pour montrer que l'équation $8x^3+15x^2+22x-3=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

b. Quelle méthode connaissez vous pour obtenir une approximation de la valeur de la solution α ?

3. Expliquer en quoi les méthodes du chapitre permettent de déterminer les éventuelles solutions rationnelles de l'équation $8x^3+15x^2+22x-3=0$.

Quelle valeur de la solution obtient-on ?

4. Citer des exemples de situations concrètes faisant intervenir une équation de cette forme.

Méthodologie	Consulter les fiches méthode de ce manuel pour le Grand Oral p. 244

Avant de commencer

Prérequis

1. Connaître les règles de divisibilité par 2, par 3, par 5, par 9, par 10 et par les puissances de 2.
2. Factoriser une expression algébrique.
3. Effectuer des divisions euclidiennes.
4. Calculer un PGCD avec l'algorithme d'Euclide.
5. Calculer avec des puissances.
6. Calculer et simplifier des congruences.

1 Trouver un diviseur

Pour chacun des nombres suivants déterminer, sans calculatrice, au moins un de ses diviseurs qui n'est pas 1 ou lui-même :
16 ; 190 ; 39 ; 951 ; 121 ; 365 ; 187.

2 Critères de divisibilité

Dans chaque cas, indiquer si l'entier n divise l'entier m sans effectuer la division.

1. $m = 15\,335\,410$ et $n = 5$.
2. $m = 15\,513\,552$ et $n = 9$.
3. $m = 8\,596\,312$ et $n = 3$.
4. $m = 542\,468\,530$ et $n = 4$.
5. $m = 454\,548\,128$ et $n = 8$.

3 Factoriser une expression algébrique

1. Factoriser dans $\mathbb{R}$ les expressions suivantes, où p désigne un nombre réel.

a. $p^2 - 1$ **b.** $9 - (p+2)^2$

c. $16 - 8p + p^2$ **d.** $16 - 25(p-1)^2$

2. On considère un entier naturel n non nul. Factoriser $4^n - 1$ en produit de deux entiers.

4 Effectuer des divisions euclidiennes

Dans chaque cas, écrire la division euclidienne de m par n.

1. $m = 547$ et $n = 65$.
2. $m = 332$ et $n = 1\,124$.
3. $m = 3\,578$ et $n = 3\,575$.

5 Déterminer un PGCD

En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD de m et de n dans chacun des cas.

1. $m = 77$ et $n = 35$. 2. $m = 175$ et $n = 300$.
3. $m = 1\,873$ et $n = 1\,871$. 4. $m = 140$ et $n = 475$.

6 Calculer avec des puissances

Soient n et m deux entiers naturels non nuls. Simplifier, si possible, les expressions suivantes.

1. $3^2 \times 3^n$ 2. $5^n \times 7^n$ 3. $(3^m)^n$
4. $\dfrac{2^n}{2^{n-2}}$ 5. $\dfrac{1}{m} \times m^n$ 6. 2^{m^n}

7 Étude de congruences

Recopier et compléter en simplifiant au maximum et sans calculatrice les relations de congruence suivantes.

1. $15 \times 43 \equiv \ldots [7]$ 2. $86 \times 107 \equiv \ldots [4]$
3. $1\,804 \times 1\,911 \equiv \ldots [100]$ 4. $4^{50} \equiv \ldots [7]$
5. $3^8 \equiv \ldots [10]$

8 Problème

On considère deux entiers $n = 14\,535$ et $m = 495$.

1. Justifier que n et m sont divisibles par 9.
2. Justifier que n et m sont divisibles par 5.
3. Déduire des questions précédentes que 45 divise le PGCD de m et de n.
4. Effectuer les divisions euclidiennes de m et de n par 45. On note a et b les quotients obtenus.
5. Calculer le PGCD de a et de b en utilisant l'algorithme d'Euclide, puis en déduire le PGCD de m et de n.

Anecdote

Le n-ième nombre de Smarandache-Wellin est la concaténation des n premiers nombres premiers en base 10.

Les cinq premiers nombres de Smarandache-Wellin sont donc 2 ; 23 ; 235 ; 2 357 ; 235 711.

On a actuellement seulement démontré que sept d'entre eux sont premiers : le 1er, le 2e, le 4e, le 128e, le 174e, le 342e et le 435e.

On ignore s'il existe un huitième nombre de Smarandache-Wellin premier mais le 1 429e est un nombre premier probable. Il contient 5 719 chiffres.

Chapitre 5

Nombres premiers

Capacités attendues - chapitre 5

1. Déterminer si un nombre est premier ou non.
2. Dresser la liste des nombres premiers inférieurs à un nombre entier donné.
3. Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers.
4. Déterminer les diviseurs d'un nombre entier.
5. Déterminer le PGCD de deux nombres entiers à l'aide d'une décomposition en produit de facteurs premiers.
6. Calculer des puissances modulo un nombre premier en utilisant le petit théorème de Fermat.

Pour savoir si un nombre est premier ou non, il est nécessaire de réaliser un test de primalité. Si le nombre à tester est grand, le temps de calcul peut être très long, ce qui explique l'utilisation de supercalculateurs.

A Crible d'Eratosthène

Objectif Utiliser l'algorithme d'Eratosthène pour déterminer une liste de nombres premiers.

1 Reproduire la grille de nombres ci-contre.

2 Barrer le nombre 1 qui n'est pas premier puis entourer le nombre 2 qui est premier.
Rayer ensuite tous les multiples de 2 strictement supérieurs à 2.

3 Entourer le nombre 3 qui est premier.
Rayer ensuite tous les multiples de 3 strictement supérieurs à 3.

4 4 est un multiple de 2. Il est donc déjà rayé. On entoure alors le nombre suivant qui n'est pas encore barré, à savoir 5.
On barre ensuite l'ensemble des multiples de 5 strictement supérieurs à 5.
Poursuivre l'algorithme.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Bilan **Pourquoi les nombres entourés dans le tableau sont-ils exactement les nombres premiers compris entre 1 et 100 ?**

B Une infinité de nombres premiers

Objectif Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Dans le livre IX des *Éléments*, Euclide indique la proposition 20 suivante :
« Les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposée. »
Autrement dit, si on suppose qu'il existe au moins n nombres premiers, on peut alors démontrer qu'il en existe au moins $n+1$.
Supposons par l'absurde qu'il existe exactement n nombres premiers distincts, dont la liste est : $p_1, p_2, \dots, p_n$.
Soit N l'entier naturel défini par $\mathrm{N} = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$.

1 Justifier que, pour tout $k \in \{1 ; \dots ; n\}$, $\mathrm{N} \neq p_k$.

2 On suppose par l'absurde que le nombre N défini précédemment n'est pas premier.

a) Compléter, pour tout $i \in \{1 ; \dots ; n\}$, la congruence $\mathrm{N} \equiv \dots [p_i]$.

b) En déduire que N n'est divisible par aucun des nombres premiers listés précédemment.

c) Terminer le raisonnement.

Bilan **On a démontré que s'il existe n nombres premiers distincts, alors il en existe au moins $n+1$.**
En quoi ce raisonnement démontre-t-il qu'il existe une infinité de nombres premiers ?
Quel type de raisonnement obtient-on ?

C Applications de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers

Objectif Déterminer l'ensemble des diviseurs d'un entier et le PGCD de deux entiers en se servant de la décomposition en produit de facteurs premiers.

1 **a)** Déterminer la liste des diviseurs de 24.

b) Donner la décomposition de 24 en produit de nombres premiers puis, en utilisant un arbre, expliquer comment on aurait pu obtenir le nombre de diviseurs de 24 sans avoir à les déterminer.

2 On considère l'entier $p = 3^2 \times 5^3 \times 29$. Combien p admet-il de diviseurs ? Établir la liste de ces diviseurs.

3 **a)** On considère les entiers $n = 24$ et $m = 20$. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD de m et de n.

b) Déterminer la décomposition de n et de m en produit de facteurs premiers.

c) Donner la décomposition en produit de facteurs premiers du PGCD de n et de m.
Quel lien peut-on faire entre cette décomposition et celles de n et de m ?

4 Soient k et ℓ deux entiers naturels dont on donne la décomposition en produit de facteurs premiers :
$k = 2^3 \times 3 \times 19$ et $\ell = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 11$. Déterminer $\text{PGCD}(k\,;\ell)$.

Bilan **Connaissant la décomposition en produit de facteurs premiers de deux entiers n et m supérieurs ou égaux à 2, expliciter une méthode permettant de déterminer :**

- **le nombre et la liste des diviseurs positifs de n ;**
- **le PGCD de n et m.**

D Fermat, congruences et nombres premiers

Objectif Découvrir le petit théorème de Fermat.

Soit a un entier relatif.

1 On considère l'entier $p = 5$. Reproduire et compléter le tableau suivant donnant les puissances cinquièmes modulo p. Que remarque-t-on ?

a modulo 5	0	1	2	3	4
a^5 modulo 5					

2 Construire de même un tableau donnant les puissances septièmes modulo 7, puis un tableau donnant les puissances onzièmes modulo 11.
Dans tous ces cas, quelle propriété semble être vérifiée ?

AIDE
2 Effectuer les simplifications au fur et à mesure que l'on calcule les puissances permet de ne pas avoir à faire de calculs trop compliqués.

3 Quelle condition suffisante sur p peut-on conjecturer pour que, quel que soit l'entier a, $a^p \equiv a\,[p]$?

4 Dans cette question, p est un nombre premier et a désigne un entier non divisible par p.
En supposant que la conjecture émise à la question précédente est exacte, montrer que $a^{p-1} \equiv 1\,[p]$.
Quel théorème d'arithmétique utilise-t-on pour cela ?

Bilan **Soit p un nombre premier et a un entier relatif. À quelle condition peut-on affirmer que $a^{p-1} \equiv 1\,[p]$?**

1 L'ensemble des nombres premiers

A Définition

Définition

Un entier naturel est un **nombre premier** s'il admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Remarque : 1 n'est pas un nombre premier car il n'admet qu'un seul diviseur positif : lui-même.
0 n'est pas non plus un nombre premier car il admet une infinité de diviseurs.

EXEMPLE

La liste des nombres premiers inférieurs à 100 est la suivante : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

B Test de primalité

Propriété

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 est divisible par un nombre premier.

DÉMONSTRATION

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On note P_n la proposition : « Tout entier naturel compris entre 2 et n admet un diviseur premier. »

Initialisation : Pour $n = 2$

2 est divisible par 2 qui est premier donc on en déduit que P_2 est vraie.

Hérédité : On considère un entier naturel $k \geqslant 2$ tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence). On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie.

Puisque P_k est vraie, tous les entiers naturels compris entre 2 et k admettent un diviseur premier. Il suffit donc de montrer que $k+1$ admet un diviseur premier.

- Si $k+1$ est premier, il admet alors un diviseur premier : lui-même.
- Sinon, il existe deux entiers a et b compris entre 2 et k tels que $k+1 = ab$.

a étant un entier naturel inférieur ou égal à k, l'hypothèse de récurrence donne l'existence d'un diviseur premier de a noté p.

D'où $p \mid a$ et $a \mid (k+1)$ donc $p \mid (k+1)$ et ainsi P_{k+1} est vraie.

Ainsi, P_2 est vraie et, pour tout entier $k \geqslant 2$, si P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 2$, P_n est vraie donc que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 est divisible par un nombre premier.

Remarque : La propriété P_n est un peu particulière ici : elle concerne tout entier inférieur ou égal à n et pas seulement l'entier n. On dit qu'il s'agit d'une propriété de **récurrence forte**.

Propriété

Tout entier $n \geqslant 2$ qui n'est pas premier admet un diviseur premier p compris entre 2 et $\sqrt{n}$.

DÉMONSTRATION Voir exercice 42 p. 157.

Remarque : On peut donc tester la primalité d'un entier n en étudiant sa divisibilité par les nombres premiers compris entre 2 et $\sqrt{n}$.

Application et méthode - 1

Montrer que l'entier 53 est premier.

SOLUTION

Supposons par l'absurde que 53 n'est pas premier.

D'après les propriétés précédentes, il existe alors un diviseur premier de 53 inférieur à $\sqrt{53}$. Comme $7 < \sqrt{53} < 8$, on doit tester tous les nombres premiers strictement inférieurs à 8, à savoir 2 ; 3 ; 5 et 7.

- D'après les critères de divisibilité, il est clair que 53 n'est ni divisible par 2, ni par 3, ni par 5.
- 7 ne divise pas 53 car le reste de la division euclidienne de 53 par 7 est 4.

Finalement, aucun de ces nombres ne divise 53, donc 53 est premier.

Méthode

Pour démontrer qu'un entier n est un nombre premier :

- on dresse la liste de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$;
- on vérifie qu'aucun de ces nombres ne divise n, en montrant par exemple que le reste de la division euclidienne de n par ces nombres n'est pas nul.

Pour s'entraîner : exercices **23**, **24** et **25** p. 156

C Une infinité de nombres premiers

Propriété

Il existe une infinité de nombres premiers.

DÉMONSTRATION Voir activité B p. 146.

EXEMPLE

On peut démontrer, en utilisant un raisonnement similaire, qu'il existe également une infinité de nombres premiers de la forme $4n+3$ (voir exercice **51** p. 158).
Par exemple, $3=4\times0+3$, $7=4\times1+3$ et $11=4\times2+3$ sont premiers.
Certains nombres premiers, cependant, ne peuvent pas s'écrire sous cette forme.
C'est notamment le cas de 2 ou de 5. De même, tout nombre s'écrivant sous la forme $4n+3$ n'est pas nécessairement premier. C'est notamment le cas de $15=4\times3+3$.

2 Décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers

A Existence et unicité de la décomposition

Propriété

Tout entier n supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers.
Plus précisément, si $n \geqslant 2$, il existe des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_k$ et des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tels que $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$.
Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

DÉMONSTRATION Voir exercices **59** et **64** p. 160.

Application et méthode - 2

Décomposer l'entier 132 en produit de facteurs premiers.

SOLUTION

132 est divisible par 2 car $132 = 2 \times 66$.

66 est lui-même divisible par 2, on a donc : $132 = 2^2 \times 33$.

Finalement, comme 33 est divisible par 3, on peut écrire $132 = 2^2 \times 3 \times 11$, qui est la décomposition en produit de facteurs premiers de 132.

Pour s'entraîner : exercices **26** et **27** p. 156

Méthode

- On cherche un diviseur premier du nombre en question, en s'aidant éventuellement des règles de divisibilité.
- On effectue alors la division du nombre par le facteur premier et on recommence l'opération avec le quotient obtenu.

B Application à la détermination des diviseurs d'un entier

Propriétés

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 dont la décomposition en produit de facteurs premiers est la suivante : $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$. Alors :

- les diviseurs de n sont exactement les nombres de la forme :
$$p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots \times p_k^{\beta_k}, \text{ avec } 0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i\,;$$
- le nombre de diviseurs de n est égal à $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \ldots \times (\alpha_k + 1)$.

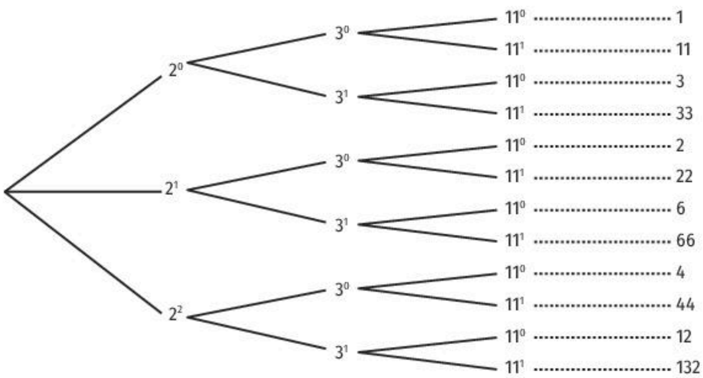
DÉMONSTRATION Voir exercice **65** p. 160.

Application et méthode - 3

Déterminer l'ensemble des diviseurs de 132.

SOLUTION

$132 = 2^2 \times 3 \times 11$ donc ses diviseurs sont de la forme $2^{\beta_1} \times 3^{\beta_2} \times 11^{\beta_3}$, avec $0 \leqslant \beta_1 \leqslant 2$, $0 \leqslant \beta_2 \leqslant 1$ et $0 \leqslant \beta_3 \leqslant 1$.
L'arbre suivant permet de déterminer toutes les combinaisons de puissances possibles.



Méthode

Pour déterminer les diviseurs d'un nombre :

- on commence par chercher la décomposition de ce nombre en produit de facteurs premiers ;
- l'énumération des diviseurs se fait alors de manière méthodique, en listant toutes les combinaisons de puissances possibles.
On peut, pour cela, utiliser un arbre.

Finalement, les diviseurs de 132 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 11 ; 12 ; 22 ; 33 ; 44 ; 66 et 132.

Pour s'entraîner : exercices **28** et **29** p. 156

C Application à la détermination du PGCD et du PPCM

Propriété

Soient m et n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. On suppose, quitte à utiliser des exposants nuls, que m et n peuvent s'écrire sous forme de produit de facteurs premiers de la manière suivante :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k} \text{ et } m = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots \times p_k^{\beta_k}$$

On a alors :

- $\text{PGCD}(m\,;n) = p_1^{\min(\alpha_1;\beta_1)} \times p_2^{\min(\alpha_2;\beta_2)} \times \ldots \times p_k^{\min(\alpha_k;\beta_k)}$.
- $\text{PPCM}(m\,;n) = p_1^{max(\alpha_1;\beta_1)} \times p_2^{max(\alpha_2;\beta_2)} \times \ldots \times p_k^{max(\alpha_k;\beta_k)}$.

Remarque : Si a et b sont deux entiers non nuls, on appelle **plus petit multiple commun de a et de b**, et on note $\text{PPCM}(a\,;b)$, le plus petit des multiples communs positifs de a et de b.

DÉMONSTRATION Voir exercice 67 p. 161.

EXEMPLE

Les décompositions de 24 et de 84 en produit de facteurs premiers sont $24 = 2^3 \times 3^1 \times 7^0$ et $84 = 2^2 \times 3^1 \times 7^1$.
Par conséquent, $\text{PGCD}(24\,;84) = 2^2 \times 3^1 \times 7^0 = 12$.
On a également $\text{PPCM}(24\,;84) = 2^3 \times 3^1 \times 7^1 = 168$.

Remarque : En général, l'algorithme d'Euclide est plus efficace pour calculer le PGCD.

3 Le petit théorème de Fermat

Propriété

Si p est un nombre premier, alors, pour tout nombre entier a, $a^p \equiv a\,[p]$.

DÉMONSTRATION Voir exercice 80 p. 162.

EXEMPLE

Le nombre 5 est premier.
On peut donc affirmer que $12^5 \equiv 12\,[5]$, soit encore $12^5 \equiv 2\,[5]$.
En effet, $12^5 = 248\,832 = 49\,766 \times 5 + 2$.

Petit théorème de Fermat

Si p est un nombre premier et si a est un entier non divisible par p, alors :

$$a^{p-1} \equiv 1\,[p].$$

Remarque : Si a est divisible par p, on a $a^{p-1} \equiv 0\,[p]$.

DÉMONSTRATION

D'après la propriété précédente, p divise $a^p - a = a \times (a^{p-1} - 1)$. Or p est premier et il ne divise pas a, il est donc premier avec a.

Ainsi, d'après le théorème de Gauss, on en déduit que p divise $a^{p-1} - 1$, ce qui signifie exactement que $a^{p-1} \equiv 1\,[p]$.

Remarque : Si p est un nombre premier qui divise ab, alors p divise a ou p divise b. Cela est une application du théorème de Gauss.

EXEMPLE

7 n'est pas divisible par 5 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $7^4 \equiv 1\,[5]$.

L'ESSENTIEL

FICHE DE RÉVISION

1 Un entier naturel n est premier lorsqu'il possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même. Pour savoir si n est premier, il suffit de tester s'il est divisible par des entiers compris entre 2 et $\sqrt{n}$. Cela permet de :

✔ déterminer si l'entier n est un nombre premier ou non ;

✔ trouver un diviseur de n afin de déterminer ensuite une factorisation de l'entier n.

2 Le crible d'Eratosthène permet de connaître l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à un entier n. Cela permet de :

✔ savoir facilement si un nombre inférieur ou égal à n est premier ou non ;

✔ savoir quels sont les diviseurs premiers potentiels d'un nombre n et faciliter ainsi les tests de primalité.

3 Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 se décompose de façon unique en produit de nombres premiers. Cela permet de :

✔ déterminer l'ensemble des diviseurs d'un entier, en les énumérant à l'aide d'un arbre ;

✔ déterminer le nombre de diviseurs, en regardant uniquement les exposants apparaissant dans la décomposition ;

✔ déterminer le PGCD de deux entiers.

4 Le petit théorème de Fermat : si p est un nombre premier et si a est un entier non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1\,[p]$. Cela permet de :

✔ calculer des puissances modulo p en simplifiant les calculs.

CARTE MENTALE

n est un entier supérieur ou égal à 2.

NOMBRES PREMIERS

Test de primalité pour savoir si un entier est premier ou non (on teste les diviseurs entre 1 et $\sqrt{n}$)

Si n est premier

On peut utiliser le petit théorème de Fermat pour simplifier des calculs modulo n : si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1\,[p]$

Si n n'est pas premier, on peut le décomposer en produit de facteurs premiers (la décomposition est unique à l'ordre des facteurs près) $n = p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$

Déterminer le nombre de diviseurs de n : $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$

Déterminer l'ensemble des diviseurs de n en utilisant un arbre

Déterminer des PGCD (favoriser toutefois l'algorithme d'Euclide)

Téléchargez cette fiche de révision au format PDF sur lls.fr/MXPfiche5

QCM réponse unique

9 Lequel des nombres suivants est premier ?

a 252 b 407 c 449 d 507

10 Si $n = 2^3 \times 3^4 \times 11 \times 17$, combien n admet-il de diviseurs ?

a 80 b 13 c 12 d 9

11 Quel est le PGCD de $2^2 \times 3^3 \times 11^5 \times 29$ et de $2^7 \times 3 \times 31$?

a $2^7 \times 3^3 \times 11^5 \times 29 \times 31$ b $2^2 \times 3$

c $2 \times 3 \times 11 \times 29 \times 31$ d $2^9 \times 3^4 \times 11^5 \times 29 \times 31$

12 Quel est le reste de la division euclidienne de 2^{32} par 17 ?

a 4 b 1 c 17 d 16

QCM réponses multiples

[Une ou plusieurs bonnes réponses par question]

13 Parmi les nombres suivants, indiquer lesquels divisent $3^2 \times 5^3 \times 7 \times 19$.

a 75 b 14 c 35 d 27

14 Lesquels des nombres suivants sont premiers ?

a 1 b 11 c 317 d 319

15 On sait que $n = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11^2$ et que le PGCD de n et de m est égal à 84. Indiquer, parmi les valeurs ci-dessous, celles qui pourraient correspondre à m.

a $2^2 \times 3 \times 7^2 \times 11$ b $2^2 \times 3 \times 7^2$

c $2^2 \times 7^2$ d $2^2 \times 3 \times 7 \times 43$

16 Parmi les nombres suivants, deux sont égaux modulo 11. Lesquels ?

a 3^{12} b 1 c -2 d 3^{24}

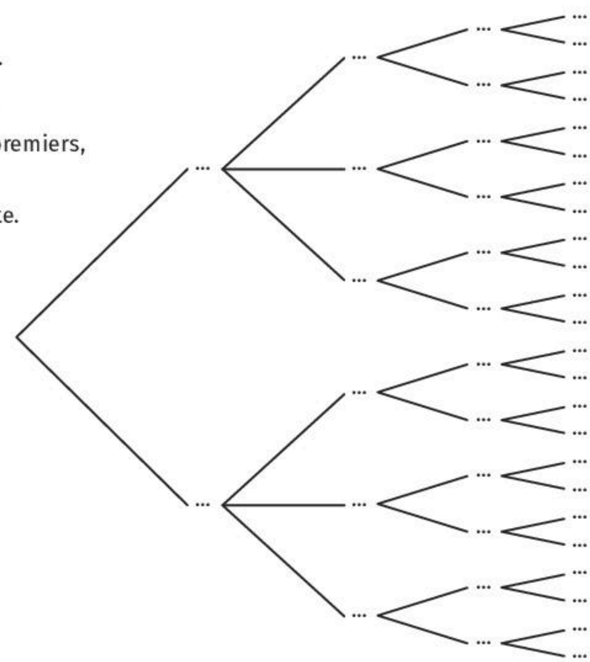
Problème

17 On considère les trois entiers $a = 31$, $b = 19$ et $c = 1\,530$.

1. Montrer que les entiers a et b sont des nombres premiers.

2. Déterminer la décomposition de c en produit de facteurs premiers, les facteurs premiers étant rangés dans l'ordre croissant.

3. En déduire le nombre de diviseurs de c et en dresser la liste. On pourra compléter l'arbre ci-contre.



4. Déterminer le PGCD de b et c.

5. a. Montrer que $c^{540} \equiv 1\,[b]$.

AIDE

On pourra utiliser le petit théorème de Fermat pour simplifier les calculs.

b. Montrer que $c^{540} \equiv 1\,[a]$.

c. Déduire des questions précédentes que $c^{540} \equiv 1\,[ab]$.

Retrouvez plus d'exercices dans notre **cahier d'algo**
LLS.fr/PythonXP

1 Test de primalité de Fermat

Objectif **Utiliser un test probabiliste de primalité afin d'évaluer si un entier n est premier ou non, à l'aide d'une des deux méthodes.**

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 1 **TABLEUR**

1. a. Dans un tableur, entrer la liste des 46 premiers nombres entiers strictement supérieurs à 2 dans la colonne **A**.
Dans la cellule **B3**, entrer la formule :
=MOD(2^(A3-1);A3).
Étendre ensuite la formule à toute la colonne.

	A	B
1	n	2^(n-1) modulo n
2		
3	3	= MOD(2^(A3-1);A3)
4	4	
5	5	
6	6	
7	7	
8	8	
9	9	
10	10	
11	11	
12	12	
13	13	
14	14	
15	15	

b. À quoi la commande **MOD** sert-elle ?

2. D'après le petit théorème de Fermat, quel nombre est affiché dans la colonne **B** lorsque n est premier ?

3. Si une cellule de la colonne **B** n'est pas égale à 1, que peut-on dire du nombre n correspondant ?

4. a. Lister l'ensemble des entiers n inférieurs à 46 dont la cellule de la colonne **B** est égale à 1.
Que remarque-t-on ?

b. Combien vaut 2^{40} modulo 561 ? En déduire $2^{560}\,[561]$. Le nombre 561 est-il premier ?

c. Finalement, que peut-on dire lorsque la cellule de la colonne **B** est égale à 1 ?

LABO PYTHON

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 2 **PYTHON**

1. Dans la fonction ci-dessous on considère un entier $n \geqslant 3$.

```python
def testfermat(n):
    F = 2**(n-1) % n
    return F
```

À quoi sert la commande **%** ?

2. a. D'après le petit théorème de Fermat, que renvoie l'algorithme lorsque n est un nombre premier ?

b. Que peut-on dire lorsque la valeur de **F** affichée en sortie d'algorithme n'est pas égale à 1 ?

c. Tester cet algorithme pour une dizaine de valeurs afin de vérifier les observations. Que remarque-t-on pour $n = 561$? Cet entier est-il premier ?

3. Les observations ci-dessus servent à élaborer un test permettant de déterminer si le nombre n a des chances d'être premier.

```python
1 def testfermat2(n):
2   F = 2**(n-1) % n
3   if ... :
4     return("Peut-être premier")
5   else :
6     return("Pas premier")
```

a. Compléter la condition à tester ligne 3.

b. Tester l'algorithme avec quelques valeurs puis tester l'algorithme pour $n = 154\,515\,677$.

c. Quel est l'avantage et l'inconvénient de cet algorithme par rapport à celui consistant à tester l'ensemble des diviseurs possibles entre 1 et $\sqrt{n}$?

Histoire des maths

Les entiers p qui ne sont pas premiers mais qui vérifient $a^{p-1} \equiv 1\,[p]$, dès lors que a et p sont premiers entre eux, sont appelés les **nombres de Carmichael**, du nom du mathématicien américain Robert Daniel Carmichael (1879-1967), qui s'est tout particulièrement intéressé aux propriétés de ces nombres. Il a été démontré en 1994 qu'il existe en fait une infinité de nombres de Carmichael.

2 Système cryptographique RSA

Une personne A cherche à recevoir des messages de manière sécurisée et une personne B cherche à lui en envoyer. Les messages sont numérisés et transformés en une suite d'entiers. L'objectif est donc de transmettre des entiers sans que quiconque, autre que la personne A, puisse les décrypter.

Pour cela, la personne A choisit deux nombres premiers p et q puis calcule les produits $\mathrm{N} = pq$ et $n = (p-1)(q-1)$. Elle choisit également un entier naturel c premier avec n. La personne A publie le couple $(\mathrm{N}\ ;\ c)$, appelé **clé publique**, permettant à quiconque de lui envoyer un nombre crypté.

- Pour crypter un entier a compris entre 0 et $\mathrm{N}-1$, la personne B calcule le reste b dans la division euclidienne de a^c par N. Le nombre crypté qu'elle envoie à la personne A est b.
- Pour décrypter le message, la personne A commence par calculer l'unique entier d compris entre 0 et $n-1$ tel que $cd \equiv 1\,[n]$. Il est alors possible de montrer que cet entier d vérifie $b^d \equiv a\,[\mathrm{N}]$, ce qui permet donc à la personne A de retrouver le nombre a.

Question préliminaire :

Pourquoi la personne A est-elle, en pratique, la seule capable de calculer l'entier d et de déchiffrer les messages ?

Objectif Mettre en œuvre l'algorithme de cryptage et de décryptage du système RSA dans le cas où $p = 5$, $q = 11$ (c'est-à-dire $\mathrm{N} = 55$ et $n = 40$) et $c = 23$, à l'aide d'une des deux méthodes.

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 1 | TABLEUR

1. La personne B veut crypter le nombre $a = 3$. Réaliser une feuille de calcul comme ci-dessous afin de calculer l'entier b dans la cellule **D2**.

	A	B	C	D
1	N	c	a	b
2	55	23	3	= MOD(C2^B2;A2)

Quelle est la valeur de l'entier b que la personne B doit transmettre à la personne A ?

2. a. À l'aide d'une feuille de calcul, calculer toutes les valeurs de $c \times d$, pour d compris entre 0 et $n-1$. Vérifier que l'entier d, que doit calculer la personne A, est égal à 7.

b. Réaliser la feuille de calcul suivante donnant la liste des valeurs de b^d modulo N, en faisant dérouler la formule écrite en **C2**.

	A	B	C
1	d	b	b^d modulo N
2	7	1	= MOD(B2^A$2;55)
3		2	
4		3	
5		4	

Vérifier que la personne A va bien retrouver la valeur de a, si elle reçoit la valeur b transmise par la personne B dans la question **1.**.

LABO PYTHON

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 2 | PYTHON

1. Écrire en Python une fonction **cryptage**, prenant en argument **a**, **N** et **c** et permettant à B de trouver l'entier b. Faire un test avec $a = 8$.

2. Pour déchiffrer le message, la personne A doit déterminer l'entier d, compris entre 0 et $n-1$, tel que $cd \equiv 1[n]$. Elle écrit le programme ci-dessous.

```
1 def chercher_exposant(c, n):
2     F = 0
3     d = 0
4     while ... :
5         d = d + 1
6         F = c*d % n
7     return(d)
```

a. Expliquer chaque ligne du programme puis compléter la ligne 4.

b. Déterminer l'entier d pour $c = 23$ et $n = 40$.

c. Quelle méthode plus efficace pourrait-on utiliser pour déterminer d ?

3. Écrire une fonction en langage Python ayant pour arguments **b**, **d** et **N** et retournant l'entier **a**.

Pour aller plus loin

Voir exercice 77 p. 162.

À L'ORAL

18 Pour chacun des nombres suivants, indiquer s'il est premier ou non.

1. 1 **2.** 49 **3.** 61 **4.** 93 **5.** 72

19 Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier $31^2 - 16^2$.

20 VRAI / FAUX Déterminer en justifiant si l'affirmation suivante est vraie ou fausse.

« Pour tout $n \geqslant 5$, l'entier $n!$ admet 2^n diviseurs. »

21 Dans chaque cas, déterminer le PGCD de n et de m.

1. $n = 4$ et $m = 6$. **2.** $n = 9$ et $m = 6$.
3. $n = 77$ et $m = 14$. **4.** $n = 120$ et $m = 12$.
5. $n = 51$ et $m = 111$.

22 Dans chaque cas, déterminer le reste de la division euclidienne de n par p.

1. $n = 3^{16}$ et $p = 17$. **2.** $n = 6^{11}$ et $p = 11$.
3. $n = 2^{16}$ et $p = 5$. **4.** $n = 2^{20}$ et $p = 17$.
5. $n = 28^{31}$ et $p = 29$.

Test de primalité

23 Pour chacun des nombres suivants, indiquer s'il est premier ou non.

1. 69 **2.** 51 **3.** 79 **4.** 91 **5.** 94

24 Pour chacun des nombres suivants, indiquer s'il est premier ou non.

1. 143 **2.** 149 **3.** 173 **4.** 269 **5.** 539

25 Pour chacun des nombres suivants, indiquer s'il est premier ou non.

1. 1049 **2.** 1051 **3.** 1053 **4.** 1055 **5.** 1057

Décomposition en produit de facteurs premiers

26 Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de chacun des entiers suivants.

1. 40 **2.** 42 **3.** 81 **4.** 98 **5.** 105 **6.** 113

27 Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de chacun des entiers suivants.

1. 143 **2.** 147 **3.** 308 **4.** 1024 **5.** 1715 **6.** 9180

Applications de la décomposition en produit de facteurs premiers

28 On donne la décomposition en produit de facteurs premiers de chacun des nombres suivants. Déterminer le nombre de diviseurs de chacun de ces entiers.

1. $a = 45 = 3^2 \times 5$ **2.** $b = 64 = 2^6$
3. $c = 108 = 2^2 \times 3^3$ **4.** $d = 179$
5. $e = 13\,110 = 2 \times 3 \times 5 \times 19 \times 23$

29 On donne la décomposition en produit de facteurs premiers de chacun des nombres suivants. Déterminer, pour chacun de ces nombres, l'ensemble de ses diviseurs.

1. $a = 105 = 3 \times 5 \times 7$ **2.** $b = 33 = 3 \times 11$
3. $c = 108 = 2^2 \times 3^3$ **4.** $d = 363 = 3 \times 11^2$
5. $e = 53\,361 = 3^2 \times 7^2 \times 11^2$ **6.** $f = 30\,625 = 5^4 \times 7^2$

30 Dans chaque cas, on donne la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers m et n. Déterminer le PGCD de ces deux nombres.

1. $m = 5^2$ et $n = 5 \times 7$.
2. $m = 2^2 \times 7$ et $n = 2 \times 5 \times 7$.
3. $m = 2^3 \times 3 \times 5$ et $n = 2^2 \times 5 \times 7$.
4. $m = 5 \times 11 \times 17^3$ et $n = 5 \times 11 \times 23^4$.
5. $m = 157$ et $n = 151$.
6. $m = 5 \times 7 \times 31^3$ et $n = 5 \times 7 \times 19$.
7. $m = 2 \times 5^3 \times 41 \times 43^2$ et $n = 2^4 \times 3 \times 5^5 \times 29^3$.

31 Dans chaque cas, on donne les valeurs de deux entiers m et n. Déterminer le PGCD de ces deux nombres.

1. $m = 15$ et $n = 21$. **2.** $m = 8$ et $n = 32$.
3. $m = 12$ et $n = 18$. **4.** $m = 126$ et $n = 28$.
5. $m = 135$ et $n = 225$. **6.** $m = 175$ et $n = 33$.

Petit théorème de Fermat

32 Compléter en simplifiant au maximum les congruences suivantes.

1. $2^{16} \equiv \ldots [17]$ **2.** $5^4 \equiv \ldots [5]$ **3.** $4^{18} \equiv \ldots [19]$
4. $7^5 \equiv \ldots [5]$ **5.** $50^{11} \equiv \ldots [11]$

33 Compléter en simplifiant au maximum les congruences suivantes.

1. $4^{28} \equiv \ldots [29]$ **2.** $50^{59} \equiv \ldots [59]$ **3.** $5^{60} \equiv \ldots [59]$
4. $33^5 \equiv \ldots [11]$ **5.** $87^{15} \equiv \ldots [29]$

DIFFÉRENCIATION

Parcours 1 : exercices **37** ; **44** ; **57** ; **58** ; **61** et **72**
Parcours 2 : exercices **40** ; **47** ; **60** ; **66** et **74**
Parcours 3 : exercices **39** ; **46** ; **59** ; **64** et **75**

1 L'ensemble des nombres premiers

Exercices FLASH

34 Parmi les nombres suivants, indiquer ceux qui sont des nombres premiers :

1 ; 2 ; 5 ; 17 ; 27 ; 29 ; 31 ; 78 ; 87 ; 97 ; 99 ; 101 ; 103.

35 Les entiers suivants ne sont pas des nombres premiers. Indiquer un diviseur premier pour chacun d'eux.

49 ; 10 650 ; 1 015 ; 774 ; 1 911 ; 121

36 Combien y a-t-il de nombres premiers inférieurs ou égaux à 30 ?

37 [Calculer.]

En utilisant la calculatrice, indiquer les nombres premiers parmi les entiers suivants :

4 247 ; 5 099 ; 7 429 ; 7 639.

38 VRAI / FAUX [Communiquer.]

Déterminer en justifiant si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. « La somme de deux entiers consécutifs peut être un nombre premier. »

2. « La somme de trois entiers impairs consécutifs peut être un nombre premier. »

3. « Pour tout entier p supérieur ou égal à 2, l'entier p^2-1 n'est pas premier. »

39 [Calculer.]

1. On souhaite déterminer tous les entiers naturels n tels que les nombres $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$, $n+13$ et $n+15$ soient premiers.

a. Parmi les entiers n compris entre 0 et 5, quels sont ceux qui conviennent ?

b. Montrer qu'aucun nombre n strictement supérieur à 5 ne convient.

AIDE

On pourra, pour cela, raisonner par disjonction de cas en fonction des valeurs de n modulo 5.

2. En utilisant la même méthode qu'à la question **1**, déterminer tous les entiers naturels n tels que les nombres n, $n+2$, $n+6$, $n+8$, $n+12$ et $n+14$ soient premiers.

40 [Calculer.]

1. Prouver que, pour tout entier naturel n, l'un des trois entiers n, $n+10$ et $n+20$ est un multiple de 3.

2. En déduire l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles les entiers n, $n+10$ et $n+20$ sont tous les trois des nombres premiers.

41 [Chercher.]

Déterminer trois nombres premiers de la forme n^4+m^4 où m et n désignent des entiers naturels.

42 [Raisonner.] DÉMO

Soit n un entier naturel non premier supérieur à 2.

On veut démontrer que n admet au moins un diviseur premier p vérifiant $p \leqslant \sqrt{n}$.

1. Justifier qu'il existe deux entiers naturels a et b supérieurs ou égaux à 2 tels que $n = ab$.

2. On suppose par l'absurde que a et b sont tous les deux strictement supérieurs à $\sqrt{n}$.
Déterminer alors un minorant strict de ab et aboutir à une contradiction.

3. En déduire que n admet un diviseur premier p inférieur à $\sqrt{n}$.

43 [Raisonner.]

On considère trois entiers naturels consécutifs et non nuls que l'on note n, $n+1$ et $n+2$.

1. Montrer que la somme $n+(n+1)+(n+2)$ n'est pas un nombre premier.

2. Montrer de même que la somme de cinq entiers consécutifs n'est pas un nombre premier.

3. Montrer que si k est un entier naturel impair et supérieur à 5, alors la somme de k entiers consécutifs n'est pas un nombre premier.

44 [Calculer.]

Deux nombres premiers sont appelés des **nombres premiers jumeaux** lorsque leur différence est égale à 2. Les nombres 3 et 5, par exemple, sont des nombres premiers jumeaux.

1. Donner cinq autres exemples de couples de nombres premiers jumeaux inférieurs à 100.

2. Montrer que les nombres 1 619 et 1 621 sont des nombres premiers jumeaux.

45 [Calculer.]

1. Montrer que pour tous nombres réels x et y :
$$x^3-y^3=(x-y)\times(x^2+xy+y^2).$$

2. Déterminer l'ensemble des nombres premiers de la forme x^3-8, où x est un nombre entier.

3. Déterminer l'ensemble des nombres premiers de la forme x^3+1, où x est un nombre entier.

46 [Chercher.]

1. Justifier que pour tous nombres réels x et y :
$$x^4+4y^4=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2).$$

2. Déterminer l'ensemble des nombres premiers de la forme x^4+4, où x est un nombre entier.

3. Montrer que l'entier 285^4+4^{285} n'est pas premier. Pourquoi n'est-il pas envisageable de répondre à cette question en utilisant simplement un test classique de primalité tel que celui présenté dans le cours ?

47 [Raisonner.]

On considère un nombre premier p supérieur ou égal à 5. L'objectif de l'exercice est de démontrer que p^2-1 est divisible par 24.

1. Vérifier que cette propriété est vraie pour $p=5$, $p=7$ et $p=11$.

2. a. Justifier que $p\equiv1\,[3]$ ou $p\equiv2\,[3]$.

b. En déduire que p^2-1 est divisible par 3.

3. Montrer que p^2-1 est divisible par 8.

4. Déduire des questions **2.** et **3.** que $p^2-1\equiv0\,[24]$ et conclure.

48 [Communiquer.]

On demande à un élève de donner une suite de six nombres consécutifs qui ne sont pas premiers. Voici sa réponse : « Les nombres suivants ne sont pas premiers : $7!+2$; $7!+3$; $7!+4$; $7!+5$; $7!+6$; $7!+7$. »

1. Justifier, sans calculatrice, que la liste donnée par l'élève répond bien à la question.

2. On considère un entier naturel $n\geqslant2$.

Est-il toujours possible de trouver une suite de n nombres entiers consécutifs qui ne sont pas premiers ? Justifier.

49 [Chercher.]

D'après bac S, Polynésie, septembre 2003

1. Montrer que si p est un nombre premier supérieur ou égal à 7, alors p^4-1 est divisible par 240. On pourra montrer que p^4-1 est divisible par 3, par 16 et par 5.

2. Existe-t-il quinze nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $p_1^4+p_2^4+\ldots+p_{15}^4$ soit un nombre premier ?

50 PYTHON [Modéliser.]

LABO PYTHON

On considère un entier n supérieur ou égal à 2.

Le programme ci-dessous, écrit en langage Python, renvoie **True** dans le cas où n est premier et **False** dans le cas contraire.

```
1  def testpremier(n):
2      k = 2
3      R = 1
4      while ... :
5          R = n % k
6          k = k + 1
7      if k == n + 1:
8          return True
9      else:
10         return False
```

1. À quoi la commande **%** correspond-elle ? Quelle est l'utilité de la variable **R** dans cet algorithme ?

2. Programmer cet algorithme en complétant la ligne 4.

3. Tester cet l'algorithme afin de déterminer si les nombres $k=1067$, $\ell=20\,903$ et $m=57\,590\,009$ sont premiers ou non.

4. En pratique, si le nombre n est premier et supérieur ou égal à 3, il est nécessairement impair. Si n est impair, il s'avère alors inutile de tester la divisibilité de n par les nombres pairs. Afin de rendre l'algorithme précédent plus efficace, le modifier en tenant compte de cette remarque.

51 [Communiquer, Raisonner.]

1. L'objectif de cette question est de montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n+3$, avec $n\in\mathbb{N}$, c'est-à-dire une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.
Pour cela, on suppose par l'absurde qu'il n'en existe qu'un nombre fini que l'on note $p_1, p_2, \ldots, p_k$.
On pose alors $\mathrm{N}=4\times p_1p_2\ldots p_k+3$.

On suppose que, pour tout entier i compris entre 1 et k, on a $p_i>3$.

a. Justifier que $\{p_i, i\in\mathbb{N}^*, 1\leqslant i\leqslant k\}$ est non vide.

b. Si q est un diviseur premier de N, montrer que q est impair, puis que $q\equiv1\,[4]$.

AIDE

Si q est impair, alors il est de la forme $4m+1$ ou $4m+3$.

c. Aboutir à une contradiction, puis en déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n+3$.

2. En appliquant la même méthode, montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6n+5$.

52 [Raisonner.]

On considère un entier $n \geqslant 2$ et on définit l'entier $M_n = 2^n - 1$, appelé n-ième **nombre de Mersenne**.

1. Vérifier que M_2, M_3 et M_5 sont premiers.

2. Dans cette question, on suppose que n n'est pas un nombre premier. Par conséquent, il existe un nombre premier $p \geqslant 2$ et un entier $k \geqslant 2$ tels que $n = pk$.

a. Montrer que :

$$2^n - 1 = (2^p - 1) \times \left(1 + 2^p + (2^p)^2 + \ldots + (2^p)^{k-1}\right).$$

b. En déduire que M_n est divisible par $2^p - 1$.

3. Déduire de la question précédente que si M_n est un nombre premier, alors n est un nombre premier.

4. Montrer que la réciproque n'est pas vraie : si l'entier n est premier, alors l'entier M_n n'est pas nécessairement premier.

AIDE

On pourra considérer le cas $n = 11$.

Histoire des maths

Marin Mersenne (1588-1648) a étudié les nombres de la forme $2^n - 1$ au début du XVII^e siècle, ce qui explique leur appellation. Il n'était néanmoins pas le premier : les mathématiciens grecs s'étaient déjà intéressés à ces nombres dès l'Antiquité. Aujourd'hui encore, ces nombres sont utilisés dans la recherche de grands nombres premiers. Le plus grand nombre premier connu aujourd'hui, découvert en décembre 2018, est d'ailleurs un nombre de Mersenne. Il s'agit de $2^{82\,589\,933} - 1$, qui comporte près de 25 millions de chiffres en écriture décimale.

53 PYTHON [Modéliser.]

On considère un entier n supérieur ou égal à 2. L'algorithme ci-dessous, écrit en langage Python, renvoie la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

```
1  from math import *
2  def eratosthene(n):
3      L = range(2, n+1)
4      k = 2
5      while k <= sqrt(n) :
6          D = []
7          E = []
8          for j in L :
9              if j % k == 0 :
10                 D.append(j)
11         for m in L :
12             if m == k or not (m in D) :
13                 E.append(m)
14         k = L[L.index(k) + 1]
15         L = E
16     return(L)
```

1. a. Rappeler la signification des différentes commandes utilisées dans l'algorithme (**range**, **sqrt**, **%**, **append**, **not**, **index**).

b. À chaque étape de l'algorithme, que fait-on avec les listes **D** et **E** ?

c. Pourquoi a-t-on choisi la condition $k \leqslant \sqrt{n}$ à la ligne 5 et non pas $k \leqslant n$?

d. Effectuer à la main les opérations successives de l'algorithme, en prenant l'exemple de $n = 7$ en entrée.

2. Implémenter le programme puis le tester pour différentes valeurs de n.

3. a. Quelle commande Python permet de calculer le nombre d'éléments d'une liste ? Utiliser cette commande afin de déterminer le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à 1 000.

b. Il est possible, bien que très délicat, de démontrer que lorsque n est grand, le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n est environ égal à $\frac{n}{\ln(n)}$. Vérifier cette propriété pour $n = 1\,000$.

Histoire des maths

En 1896, **Charles-Jean de la Vallée Poussin** (1866-1962) a démontré qu'il y a environ $\frac{n}{\ln(n)}$ nombres premiers inférieurs à n lorsque n est grand. Il a découvert cette preuve indépendamment de Jacques Hadamard qui, lui aussi, est parvenu à démontrer ce résultat la même année. Cette propriété a en fait été conjecturée dès la fin du XVIII^e siècle par Johann Carl Friedrich Gauss et par Adrien-Marie Legendre.

2 Décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers

Exercices FLASH

54 Déterminer la décomposition en facteurs premiers des nombres entiers suivants : 17 ; 56 ; 85 ; 96.

55 Indiquer la liste des diviseurs des entiers suivants.

1. 17 **2.** $2 \times 7 \times 11$ **3.** $2^2 \times 3^5$

56 Dans chaque cas, déterminer le PGCD des entiers m et n.

1. $m = 2 \times 3 \times 5$ et $n = 3 \times 7$. **2.** $m = 2^3$ et $n = 3^2$.
3. $m = 2^2 \times 5^3$ et $n = 2 \times 7$.

57 [Calculer.]

Déterminer l'ensemble des diviseurs des entiers suivants.

1. 153 **2.** 330 **3.** 352 **4.** 840

58 [Calculer.]

Pour chaque fraction, déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers du numérateur et du dénominateur, puis en déduire une simplification en fraction irréductible.

1. $\frac{48}{90}$ **2.** $\frac{375}{1\,089}$ **3.** $\frac{4\,641}{2\,457}$

59 [Raisonner.] DÉMO

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On veut montrer qu'il existe des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_\ell$ et des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell$ tels que $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_\ell^{\alpha_\ell}$.
Pour cela, on va raisonner par récurrence sur la proposition P_n : « Tout entier r compris entre 2 et n se décompose en produit de nombres premiers. »

1. Pour quelle valeur de n doit-on initialiser le raisonnement ? Rédiger cette étape.

2. On suppose qu'il existe un entier k tel que pour tout entier $2 \leqslant h \leqslant k$, P_h est vraie. Rédiger la suite du raisonnement par récurrence, en utilisant une disjonction des cas en fonction de la primalité de $k+1$, puis conclure.

60 [Chercher.]

Déterminer les trois plus petits entiers naturels n tels que $n^2 - 1$ soit le produit de trois nombres premiers distincts.

61 [Calculer.]

Dans chaque cas, déterminer le PGCD des entiers m et n.

1. $m = 24$ et $n = 80$.

2. $m = 179$ et $n = 181$.

3. $m = 3\,757$ et $n = 2\,873$.

62 [Raisonner.]

1. On considère un entier naturel $n \geqslant 4$ dont la décomposition en produit de facteurs premiers est :
$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}.$$
Démontrer que n est un carré parfait si, et seulement si, tous les exposants α_i sont des entiers pairs.

2. Existe-t-il un entier naturel n tel que n et $2n$ soient des carrés parfaits ? Justifier.

3. Montrer que n est un carré parfait si, et seulement si, il admet un nombre impair de diviseurs.

4. On choisit au hasard un nombre entier compris entre 1 et 100. Quelle est la probabilité qu'il admette un nombre pair de diviseurs ?

63 PYTHON [Modéliser.]

Le programme ci-dessous, rédigé en langage Python, permet de déterminer la décomposition d'un nombre entier en produit de facteurs premiers.

```python
D = []
def factorisation(n):
    if n > 1 :
        k = 1
        R = 1
        while R > 0:
            k = k + 1
            R = n % k
        D.append(k)
        return factorisation(n/k)
    print(D)
```

1. Expliquer la signification des commandes **%** et **append**. Expliquer également le rôle de chacune des variables présentes dans l'algorithme.

2. Effectuer à la main les opérations successives de l'algorithme, en prenant l'exemple de $n = 24$ en entrée.

3. Pourquoi est-on sûr que les entiers qui apparaissent dans la liste **D** sont nécessairement des nombres premiers ?

4. Implémenter le programme puis le tester pour différentes valeurs de n.

5. Élaborer un algorithme plus efficace permettant d'éviter certains calculs.

64 [Raisonner.] DÉMO

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$ et $q_1^{\beta_1} \times q_2^{\beta_2} \times \dots \times q_s^{\beta_s}$, deux décompositions de n en produit de facteurs premiers, ces nombres premiers étant rangés dans l'ordre croissant.
En utilisant le théorème de Gauss, montrer que ces décompositions sont en réalité identiques.

65 [Raisonner.] DÉMO

1. On considère un entier n dont la décomposition en produit de facteur premiers est $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$.

a. Montrer que si, pour tout entier i compris entre 1 et k, $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$, alors l'entier $p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_k^{\beta_k}$ divise n.

b. Réciproquement, montrer que si un entier naturel d divise $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$, alors d admet une décomposition en produit de facteur premiers de la forme $d = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_k^{\beta_k}$ avec, pour tout $i \in \{1 ; \dots ; k\}$, $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$.

2. En raisonnant à l'aide d'un arbre de dénombrement, exprimer le nombre de diviseurs que possède n en fonction des exposants $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

66 [Chercher.]

Montrer que, pour tout $n \leqslant 10^9$, la décomposition de n en produit de facteurs premiers fait apparaître moins de dix facteurs premiers distincts.

67 [Raisonner.] DÉMO

On considère deux nombres entiers n et m dont la décomposition en produit de facteurs premiers est $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$ et $m = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots \times p_k^{\beta_k}$, les exposants nuls étant admis.

1. Montrer que :
$\mathrm{PGCD}(m\,;n) = p_1^{\min(\alpha_1;\beta_1)} \times p_2^{\min(\alpha_2;\beta_2)} \times \ldots \times p_k^{\min(\alpha_k;\beta_k)}$.

2. Montrer que :
$\mathrm{PPCM}(m\,;n) = p_1^{\max(\alpha_1;\beta_1)} \times p_2^{\max(\alpha_2;\beta_2)} \times \ldots \times p_k^{\max(\alpha_k;\beta_k)}$.

68 [Calculer.]

1. Montrer que pour tous entiers naturels n et m :

$$\mathrm{PGCD}(m\,;n) \times \mathrm{PPCM}(m\,;n) = m \times n.$$

2. Soient m et n deux entiers naturels. Déterminer l'ensemble des couples $(m\,;n)$ tels que :

$$\mathrm{PGCD}(m\,;n) = 12 \text{ et } \mathrm{PPCM}(m\,;n) = 60.$$

3. Reprendre la question précédente avec :

$$\mathrm{PGCD}(m\,;n) = 6 \text{ et } \mathrm{PPCM}(m\,;n) = 180.$$

69 [Calculer.]

1. Déterminer tous les nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 admettant exactement six diviseurs.

2. Déterminer quel est le plus petit entier naturel admettant exactement 21 diviseurs.

3. Déterminer tous les couples de nombres entiers naturels dont le PPCM est 24.

3 Le petit théorème de Fermat

Exercices FLASH

70 Calculer, en simplifiant au maximum, les puissances suivantes.

1. 22^4 modulo 5. **2.** 35^6 modulo 7.
3. 12^{17} modulo 17.

71 Pour chaque cas déterminer, sans poser la division euclidienne, le reste de la division euclidienne de n par p.

1. $n = 2^{16}$ et $p = 17$ **2.** $n = 3^{19}$ et $p = 19$
3. $n = 4^{13}$ et $p = 7$

72 [Calculer.]

Dans chaque cas, déterminer le reste de la division euclidienne de n par p.

1. $n = 3^{52}$ et $p = 23$. **2.** $n = 4^{89}$ et $p = 29$.

3. $n = 15^{100}$ et $p = 97$.

73 [Calculer.]

1. On note $n = 3^{4\times 6}$.

a. Justifier que $n \equiv 1\,[5]$.

b. Justifier que $n \equiv 1\,[7]$.

c. En déduire que $n \equiv 1\,[35]$.

d. Calculer, en simplifiant au maximum, 3^{75} modulo 35.

2. En utilisant la même méthode que précédemment, montrer que $3^{72} \equiv 1\,[95]$. Calculer ensuite 3^{75} modulo 95.

3. Calculer 4^{207} modulo 55.

74 [Communiquer.]

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $4^n \equiv 1\,[3]$.

2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.

3. Pour $1 \leqslant n \leqslant 4$, déterminer le reste de la division euclidienne de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.

4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?

5. À l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

75 [Chercher.]

Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $15^{15^n} \equiv 1\,[11]$.

76 [Raisonner.]

1. En utilisant le petit théorème de Fermat, déterminer le chiffre des unités de 3^{80}.

AIDE

On pourra commencer par étudier 3^{80} modulo 5 et 3^{80} modulo 2.

2. En utilisant la même méthode, déterminer le chiffre des unités de 7^{28}.

77 [Chercher.]

Le but de cet exercice est de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^7 - n$ est divisible par 14.

1. En utilisant le petit théorème de Fermat, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^7 - n$ est divisible par 7.

2. Montrer que $n^7 - n$ est divisible par 2. Conclure.

78 **SYSTÈME DE CRYPTOGRAPHIE RSA** [Calculer, Modéliser.]

D'après bac S, Centres étrangers, juin 2018

Le but de cet exercice est d'envisager une méthode de cryptage à clé publique d'une information numérique, appelée système RSA. Les questions **1.** et **2.** sont des questions préparatoires, la question **3.** aborde le cryptage et la question **4.** le décryptage.

1. Cette question envisage de calculer le reste dans la division euclidienne par 55 de certaines puissances de 8.

a. Vérifier que $8^7 \equiv 2\,[55]$. En déduire le reste dans la division euclidienne de 8^{21} par 55.

b. Vérifier que $8^2 \equiv 9\,[55]$, puis déduire de la question **a.** le reste dans la division euclidienne par 55 de 8^{23}.

2. Dans cette question, on considère l'équation (E) : $23x - 40y = 1$, dont les solutions sont des couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs.

a. Justifier le fait que (E) admet au moins un couple solution.

b. Donner une solution particulière de (E).

c. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solutions de (E).

d. En déduire qu'il existe un unique entier d vérifiant les conditions $0 \leqslant d < 40$ et $23d \equiv 1\,[40]$.

3. Cryptage dans le système RSA

Une personne A choisit deux nombres premiers p et q, puis calcule les produits $\mathrm{N} = pq$ et $n = (p-1)(q-1)$. Elle choisit également un entier naturel c premier avec n. La personne A publie le couple $(\mathrm{N}\,;\,c)$, qui est une clé publique permettant à quiconque de lui envoyer un nombre crypté. Les messages sont numérisés et transformés en une suite d'entiers compris entre 0 et $\mathrm{N}-1$.
Pour crypter un entier a, on calcule le reste b dans la division euclidienne par N du nombre a^c. Le nombre crypté est alors l'entier b.
Dans la pratique, cette méthode est sûre si la personne A choisit des nombres premiers p et q très grands, s'écrivant avec plusieurs dizaines de chiffres. On va l'envisager ici avec des nombres plus simples : $p = 5$ et $q = 11$. La personne A choisit aussi $c = 23$.

a. Calculer les nombres N et n, puis justifier que la valeur de c vérifie la condition voulue.

b. Un émetteur souhaite envoyer à la personne A le nombre $a = 8$.
Déterminer la valeur du nombre crypté b.

4. Décryptage dans le système RSA

La personne A calcule dans un premier temps l'unique entier naturel d vérifiant les conditions $0 \leqslant d < n$ et $cd \equiv 1\,[n]$. Elle garde secret ce nombre d qui lui permet, à elle seule, de décrypter les nombres qui lui ont été envoyés cryptés avec sa clé publique.

Pour décrypter un nombre crypté b, la personne A calcule le reste a dans la division euclidienne par N du nombre b^d, et le nombre en clair - c'est-à-dire le nombre avant cryptage - est le nombre a. Pour cette question, les nombres choisis par A sont encore $p = 5$, $q = 11$ et $c = 23$.

a. Quelle est la valeur de d ?

b. En appliquant la règle de décryptage, retrouver le nombre en clair lorsque le nombre crypté est $b = 17$.

Remarque : On pourra aussi consulter le TP 2 p. 155.

79 [Calculer, Chercher.]

On définit la fonction d'Euler de la manière suivante :
$\varphi : \begin{cases} \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \\ n \mapsto \varphi(n) \end{cases}$, où $\varphi(n)$ désigne le nombre d'entiers naturels inférieurs ou égaux à n et premiers avec n.

1. Déterminer $\varphi(5)$, $\varphi(7)$, $\varphi(8)$, $\varphi(9)$ et $\varphi(10)$.

2. Si p est un nombre premier, exprimer $\varphi(p)$ en fonction de p.

3. Si p est un nombre premier et si k est un entier naturel non nul, montrer que $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.

4. On admet que si a et b sont deux entiers premiers entre eux, alors $\varphi(ab) = \varphi(a) \times \varphi(b)$.
On considère un nombre entier n qui se décompose en produit de facteurs premiers de la façon suivante : $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_r^{\alpha_r}$. Montrer alors que :

$$\varphi(n) = n \times \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \times \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

5. Déterminer le nombre d'entiers compris entre 1 et 945 et premiers avec 945.

80 **PETIT THÉORÈME DE FERMAT** [Raisonner.] DÉMO

Le but de l'exercice est de démontrer la propriété suivante du cours : « Si p est un nombre premier, alors, pour tout nombre entier a, $a^p \equiv a\,[p]$. »
Dans tout l'exercice, p désigne un nombre premier fixé.

1. Montrer que, pour tout entier k compris entre 1 et $p-1$, p divise $k!\binom{p}{k}$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.

2. On va démontrer par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(a)$: « $a^p \equiv a\,[p]$ » est vraie, pour tout entier a compris entre 0 et $p-1$.

a. Vérifier que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

b. On suppose que $\mathcal{P}(b)$ est vraie pour un certain b tel que $0 \leqslant b \leqslant p-1$. Montrer en utilisant le résultat de la question préliminaire que $\mathcal{P}(b+1)$ est vraie.

3. Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel a, $a^p \equiv a\,[p]$.

81 [Calculer, Modéliser.]

D'après bac S, Pondichéry, mai 2018

À toute lettre de l'alphabet, on associe un nombre entier entre 0 et 25 : 0 à A, 1 à B, ... et 25 à Z.

Alice veut communiquer de manière sécurisée. Elle choisit deux nombres premiers p et q et un entier naturel B tel que $1 \leqslant B < pq$. Elle publie les nombres $n = p \times q$ et B et garde secrets les nombres p et q. Si Bob veut envoyer un message secret à Alice, il le code lettre par lettre.

Le codage d'une lettre représentée par l'entier x est le nombre y tel que $y \equiv x(x+B)[n]$ et $0 \leqslant y < n$.

Dans tout l'exercice, on prend $p = 3$, $q = 11$ et $B = 13$.

1. Bob veut envoyer la lettre N à Alice. Quel nombre crypté doit-il lui transmettre ?

2. Alice a reçu un message crypté qui commence par le nombre 3. Elle doit donc déterminer l'entier x compris entre 0 et 25 tel que $x(x+13) \equiv 3\,[33]$.

a. Montrer que cette équation équivaut à :

$$(x+23)^2 \equiv 4\,[33].$$

b. En déduire que $x(x+13) \equiv 3\,[33]$ si, et seulement si, $\begin{cases}(x+23)^2 \equiv 1\,[3]\\(x+23)^2 \equiv 4\,[11]\end{cases}$.

c. Déterminer les entiers a tels que :

$$0 \leqslant a < 3 \text{ et } a^2 \equiv 1\,[3].$$

d. Déterminer les entiers b tels que :

$$0 \leqslant b < 11 \text{ et } b^2 \equiv 4\,[11].$$

e. En déduire que l'entier x recherché est congru à 0 ou 2 modulo 3 et qu'il est congru à 8 ou 1 modulo 11.

3. En énumérant les différentes possibilités, Alice peut-elle connaître la première lettre du message envoyé par Bob ? Cette méthode de chiffrement est-elle utilisable pour décoder un message lettre par lettre ? Justifier.

82 APPROFONDISSEMENT [Chercher, Communiquer.]

Nombres de Fermat

On considère un entier $n \geqslant 1$ et on définit l'entier $F_n = 2^{2^n} + 1$ appelé n-ième **nombre de Fermat**.

1. En utilisant la calculatrice, montrer que F_1, F_2, F_3 et F_4 sont des nombres premiers.

2. Soit p un nombre premier impair. On note k_0 le plus petit entier k non nul tel que $2^k \equiv 1\,[p]$. Justifier que k_0 existe, puis montrer que, pour tout entier ℓ non nul tel que $2^\ell \equiv 1\,[p]$, k_0 divise ℓ.

3. Dans cette question, on suppose $n \geqslant 5$. Soit p un diviseur premier de F_n.
L'objectif est de montrer que $p \equiv 1\,[2^{n+1}]$.

a. Justifier que p est impair, puis montrer que $2^{2^n} \equiv -1\,[p]$ et que $2^{2^{n+1}} \equiv 1\,[p]$.

b. En utilisant le résultat de la question **2.**, en déduire que 2^{n+1} est le plus petit entier k tel que $2^k \equiv 1\,[p]$.

c. Justifier que $2^{p-1} \equiv 1\,[p]$.

d. En utilisant de nouveau le résultat de la question **2.**, déduire des questions précédentes que $p \equiv 1\,[2^{n+1}]$.

4. En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer un diviseur premier de F_5 inférieur à 1000.

Le Grand Oral

Entraînez-vous au Grand Oral et enregistrez-vous sur LLS.fr/GrandOralMaths

Comme le suggère le programme, les problèmes abordés en maths expertes peuvent servir d'appui à des questions de Grand Oral. Voici un exemple, basé sur l'enseignement de spécialité, utilisant des notions de ce chapitre.

Plusieurs points du chapitre peuvent être utilisés pour illustrer des notions rencontrées au cours de l'enseignement de spécialité. En voici quelques exemples.

1. La décomposition d'un entier naturel supérieur ou égal à 2 en produit de facteurs premiers est l'occasion d'illustrer une méthode du chapitre Combinatoire et dénombrement pour déterminer le nombre de diviseurs positifs de cet entier naturel.

2. On dispose d'un résultat donnant une approximation du nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à un entier n : ce nombre vaut environ $\dfrac{n}{\ln(n)}$. Ce résultat est connu sous le nom du **théorème des nombres premiers** (voir exercice **53** page 159) et expose une application surprenante de la fonction logarithme népérien étudiée au cours de l'enseignement de spécialité.

3. La fonction logarithme peut également être utilisée pour déterminer le nombre de chiffres d'un nombre entier strictement positif écrit en base 10. Expliquer comment puis appliquer ce résultat à la détermination du nombre de chiffres de 8^{32}.

Méthodologie	Consulter les fiches méthode de ce manuel pour le Grand Oral p. 244

Production d'élève

On donne ci-dessous un énoncé d'exercice et une copie d'élève.

1. Trouver les erreurs de l'élève et préciser les endroits où la rédaction est incomplète.

2. Le professeur souhaite distribuer un corrigé détaillé de l'exercice. Rédiger une telle correction.

Le code d'identification d'un article est composé de sept chiffres entre 0 et 9. Les six premiers chiffres identifient l'article, le septième est une clé de contrôle destinée à détecter une erreur dans l'écriture des six premiers chiffres. On notera $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ un tel code.
La clé de contrôle x_7 est le reste dans la division euclidienne par 10 de la somme :
$\mathrm{N} = (x_1 + x_3 + x_5) + 7(x_2 + x_4 + x_6)$.

1. Calculer la clé du code suivant : 923451 •.

2. Un des chiffres du code suivant a été effacé : 134 • 752. Retrouver ce chiffre.

3. Dans cette question, deux des chiffres du code ont été intervertis : au lieu de saisir $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$, le dactylographe a saisi $x_1x_3x_2x_4x_5x_6x_7$.
Pour quelles valeurs de x_2 et de x_3 la clé de contrôle ne détecte-t-elle pas l'erreur ?

1. $N = (9+3+5) + 7 \times (2+4+1) = 17 + 49 = 66$. Or, $\frac{66}{10} = 6{,}6$.
Le reste de la division euclidienne de N par 10 est 6. La clé de contrôle est donc 6.

2. $N = (1+4+7) + 7 \times (3 + x_4 + 5) = 68 + 7x_4$. Pour que $68 + 7x_4 = 10q + 2$, il faut que $x_4 = 2$.
En effet $82 = 10 \times 8 + 2$.

3. On a $N_1 = (x_1 + x_3 + x_5) + 7 \times (x_2 + x_4 + x_6)$ et $N_2 = (x_1 + x_2 + x_5) + 7 \times (x_3 + x_4 + x_6)$. Pour que l'erreur ne soit pas détectée, il faut que $N_1 \equiv N_2 [10]$, c'est-à-dire que $10 \mid (N_1 - N_2)$.
Or, $N_1 - N_2 = 6(x_2 - x_3)$. $N_1 - N_2$ est donc divisible par 10 si $x_2 - x_3 = 0$.
Il faut donc que les deux chiffres soient les mêmes pour que l'erreur ne soit pas détectée.

Exercices inversés

1 Déterminer trois exemples d'équations diophantiennes pour lesquelles il n'existe pas de solution.

2 Déterminer une équation diophantienne pour laquelle l'ensemble des solutions est :

$$\{(3-2k\,;5+3k) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

3 **1.** Déterminer deux exemples d'équations diophantiennes pour lesquelles $(2\,;5)$ est un couple solution.

2. Déterminer une équation diophantienne pour laquelle $(1\,;1)$ et $(3\,;2)$ sont deux couples solutions.

4 Lors d'un devoir sur table, un élève écrit cette réponse juste : « Le PGCD des deux nombres vaut donc 30 et le PPCM des deux nombres vaut 3600. »
Rédiger un énoncé correspondant à cette réponse.

5 Lors d'une interrogation écrite, un élève écrit : « Donc le nombre étudié possède 45 diviseurs. »
Donner trois exemples de tels nombres.

6 On considère l'équation diophantienne :

$$150x + 90y = 930.$$

Proposer un problème aboutissant à cette équation.

7 Voici la réponse à la question d'un énoncé : « Donc 9 est un inverse de ce nombre modulo 14. »
Écrire un énoncé possible.

Recherche / Exposé
Lors de l'activité (étude de la production d'un élève), on explique de quelle manière fonctionne la clé d'identification d'un article.
À l'aide d'une recherche sur internet, expliquer le fonctionnement de la clé correspondant au numéro de votre carte vitale (code INSEE).

Jeu de stratégie entre David et Ilan

Dans un jeu de stratégie à deux joueurs, les seules monnaies mises en circulation sont des pièces de sept Bézauss et de onze Bézauss.
David souhaiterait acheter à son adversaire Ilan un objet d'une valeur de 123 Bézauss.
On cherche alors à déterminer l'ensemble des manières différentes d'acheter cet objet, sachant qu'il a en sa possession 100 pièces de sept Bézauss et qu'Ilan possède 100 pièces de onze Bézauss.

Question préliminaire :

Soit x le nombre de pièces de sept Bézauss remis par David à Ilan et y le nombre de pièces de onze Bézauss remis par Ilan à David pour lui rendre la monnaie.
Montrer que le problème consiste à déterminer l'ensemble de tous les couples d'entiers positifs $(x\,;y)$ inférieurs ou égaux à 100 tels que $(\mathrm{F}) : 7x - 11y = 123$.

Les parties de cet exercice sont indépendantes et chacune d'entre elles peut être réalisée seul(e) ou en groupe. Les élèves mettent leurs résultats en commun pour résoudre le problème.

PARTIE 1

★★☆

1. Énoncer les théorèmes de Bézout et de Gauss.
2. Montrer que l'équation $(\mathrm{G}) : 7x - 11y = 1$ admet au moins un couple solution.
3. Déterminer un couple solution de (G) puis en déduire un couple solution de (F).
4. Montrer que (F) équivaut à :
$$7x - 11y = 7 \times 82 - 11 \times 41.$$
5. En déduire que 7 divise $y - 6$.
6. Déterminer l'ensemble de tous les couples solutions recherchés.

PARTIE 2

★☆☆

1. Justifier que $11y + 123$ doit être un multiple de 7.
2. En déduire alors que $4y + 4$ doit aussi être un multiple de 7.
3. Reproduire et compléter le tableau de congruence modulo 7 ci-dessous, où r est le reste de la division euclidienne de $4y + 4$ par 7.

$y \equiv \ldots[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$4y + 4 \equiv \ldots[7]$							
$r =$							

4. Justifier alors que y doit s'écrire sous la forme $7k + 6$, où k est un entier naturel.
5. En déduire l'ensemble des solutions du problème de David et Ilan.

PARTIE 3

★★★

LABO PYTHON

1. Écrire un programme en Python donnant tous les couples solutions recherchés.
2. Généraliser ce programme dans le cas où les seules monnaies mises en jeu sont des pièces de a Bézauss et de b Bézauss et que l'objet à acheter est d'une valeur de c Bézauss, où a, b et c sont tous trois des entiers fixés strictements positifs.

MISE EN COMMUN

1. Lister toutes les manières différentes d'acheter cet objet.
2. Est-ce que David aurait pu acheter un objet d'une valeur de 10, 100 ou 1000 Bézauss ?
3. Si, dans ce jeu, les seules monnaies étaient des pièces de quatorze et vingt-et-un Bézauss, serait-il alors possible d'acheter un objet valant 123 Bézauss ? 476 Bézauss ?

1 Les polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$

Définitions

1. On appelle polynôme à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{R}$ toute suite de nombres réels nulle à partir d'un certain rang. Pour tout entier naturel k, on note X^k la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_k = 1$ et, pour tout $n \neq k$, $a_n = 0$. L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}[X]$.

2. Soient $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
On définit la somme de A et B, notée $A + B$, comme étant la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On définit le produit de A et B, noté $A \times B$, comme étant la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $c_j = \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}$.

3. Si $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un polynôme non nul, on pose $d = \max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$.
Le nombre d est appelé **degré de A** et est noté $\deg(A)$. Par convention, le polynôme nul a pour degré $-\infty$.

4. $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un polynôme non nul de degré d ; on peut exprimer A de la façon suivante : $A = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$.

EXEMPLE

Le polynôme $(1\,;-2\,;4\,;0\,;\ldots\,;0\,;\ldots)$ correspond à $1 - 2X + 4X^2$. Il s'agit d'un polynôme de degré 2.

1 **1.** On considère les polynômes
$A = (-1\,;3\,;-5\,;2\,;0\,;0\,;\ldots)$ et $B = (1\,;0\,;1\,;0\,;0\,;\ldots)$.

a. Déterminer le polynôme $C = A + B$.

b. Déterminer le polynôme $D = A \times B$.

2. a. Justifier que l'on peut écrire $A = -1 + 3X - 5X^2 + 2X^3$.

b. Exprimer les polynômes B, C et D en fonction de X.

3. a. Soient n et p deux entiers naturels non nuls et λ et μ deux réels. En utilisant les définitions d'un polynôme et du produit de deux polynômes, montrer que $\lambda X^n \times \mu X^p = \lambda\mu X^{n+p}$.

b. Soient P, Q et R trois polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Montrer que $(P + Q) \times R = P \times R + Q \times R$.

4. À l'aide de la question **3.** et des notations pour A et B introduites à la question **2.**, retrouver l'expression du polynôme D en fonction de X.

2 Dans la suite, on admet que si P et Q sont deux polynômes quelconques, $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
Soient P et Q deux polynômes quelconques vérifiant $P \times Q = 0$. On suppose par l'absurde que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$.

1. Que peut-on dire du degré de $P \times Q$?

2. Exprimer le degré de P en fonction du degré de Q.

3. En déduire que les polynômes P et Q sont des polynômes constants.

4. En déduire l'ensemble des polynômes P et Q tels que $P \times Q = 0$.

3 On considère les polynômes $P = 1 + X + X^2 + X^3$, $Q = -5 + 4X$ et $R = 1 - X^3$.

1. Déterminer le degré de ces polynômes.

2. a. Déterminer l'expression du polynôme $P \times Q$, puis l'expression du polynôme $P \times R$.

b. Préciser le degré de ces polynômes.

c. Que peut-on conjecturer concernant le degré de $P \times Q$ si P et Q sont quelconques ?

d. Démontrer cette conjecture.

3. Peut-on dire que $\deg(P + Q) = \max(\deg(P)\,;\deg(Q))$? Justifier.

4 Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et Q deux polynômes à coefficients réels.
On définit $P \circ Q$ comme étant le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$.

1. On suppose que $P = 1 + X + X^2$ et $Q = X^3 + 2$.

a. Déterminer le polynôme $P \circ Q$.

b. Que peut-on dire du degré de $P \circ Q$? Justifier.

2. Démontrer que $\deg(P \circ P) = \deg(P)^2$.

3. Soit P un polynôme tel que $P \circ P = P$.

a. Montrer que $\deg(P) = 0$ ou $\deg(P) = 1$.

b. En déduire l'ensemble des polynômes P qui vérifient $P \circ P = P$.

5 Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

2 Divisibilité dans $\mathbb{R}[X]$

Définitions

1. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$.
On dit que A **divise** B lorsqu'il existe un polynôme C de $\mathbb{R}[X]$ tel que $B = AC$.

2. Division euclidienne de deux polynômes : Pour tous A et B de $\mathbb{R}[X]$, avec B non nul, il existe deux polynômes uniques Q et R de $\mathbb{R}[X]$ tels que $A = BQ + R$, avec $\deg(R) < \deg(B)$.
On dit alors que Q est le **quotient** et R le **reste** de la division euclidienne de A par B.

3. Pour deux polynômes A et B, si A divise B et B divise A, on dit que A et B sont **associés**.

4. On dit que deux polynômes A et B sont **premiers entre eux** si les seuls diviseurs communs à A et à B sont les polynômes de degré 0 (donc les réels non nuls).

6 On considère le polynôme $P = X^3 - 4X^2 - 16X + 24$.
Peut-on trouver trois réels a, b et c tels que :

$$P = (aX^2 + bX + c)(X - 6)\ ?$$

Que peut-on en déduire ?

7 Soient deux polynômes non nuls A et B.

1. On suppose dans cette question qu'il existe un réel non nul λ tel que $B = \lambda A$. Justifier que A et B sont associés.

2. On suppose que A divise B. Comparer $\deg(A)$ et $\deg(B)$.

3. On suppose que A divise B et que B divise A.

a. Montrer que $\deg(A) = \deg(B)$.

b. Montrer qu'il existe un réel non nul λ tel que $A = \lambda B$.

8 On considère les polynômes
$A = 3X^3 + 17X^2 + 5X - 25$ et $B = X^2 + 4X - 5$.

1. Déterminer les valeurs α telles que $B(\alpha) = 0$.
On note $\mathcal{S}$ l'ensemble de ces valeurs.

2. Soit $\alpha \in \mathcal{S}$. Calculer $A(\alpha)$.

3. On note Q et R respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de A par B.

a. Justifier qu'il existe deux réels a et b tels que $R = aX + b$.

b. Montrer que $a = b = 0$. Que peut-on en déduire ?

9 On considère les polynômes $A = X^4 + 2$ et $B = X^2 + 3X - 10$.

1. On note respectivement Q et R le quotient et le reste dans la division euclidienne de A par B.
Déterminer le degré de R.

2. Déterminer les valeurs α telles que $B(\alpha) = 0$.

3. En déduire les polynômes Q et R.

10 Soient P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et a un nombre réel.

1. On suppose que $X - a$ divise P. Montrer que $P(a) = 0$.

2. On suppose que $P(a) = 0$.

a. Justifier qu'il existe $A \in \mathbb{R}[X]$ et un nombre réel λ tels que $P = A(X - a) + \lambda$.

b. Déterminer la valeur de λ.

c. Que peut-on en déduire ?

3. Le polynôme $X^3 + 2X^2 - 4X - 6$ est-il divisible par $X + 5$? Justifier.

11 Soient A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$.
On admet qu'il existe un unique polynôme D vérifiant les conditions suivantes :

- $D|A$ et $D|B$;
- D est unitaire : le coefficient dominant (associé au terme de plus haut degré) vaut 1 ;
- si un polynôme unitaire E divise A et B, alors $E|D$.

Ce polynôme est appelé PGCD de A et B.

On admet aussi qu'il existe deux polynômes U et V à coefficients dans $\mathbb{R}$ tels que $AU + BV = D$.

1. a. On suppose que A et B sont premiers entre eux. Déterminer le PGCD de A et B.

b. On suppose qu'il existe deux polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$.
Montrer que A et B sont premiers entre eux.

2. Les polynômes $X^2 + X + 1$ et $X + 1$ sont-ils premiers entre eux ? Justifier.

3. Soit C un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

a. Montrer que si A et B sont premiers entre eux et si A divise BC, alors A divise C.

b. Montrer que si A et B sont premiers entre eux et si A et B divisent C, alors AB divise C.

3 Polynômes irréductibles

Dans cette partie, l'ensemble $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définitions

1. On dit qu'un polynôme appartient à $\mathbb{K}[X]$ lorsque ses coefficients sont dans $\mathbb{K}$.
2. On appelle **polynôme irréductible** de $\mathbb{K}[X]$ tout polynôme P dont le degré est supérieur ou égal à 1 et dont les seuls diviseurs sont :
   → les éléments de $\mathbb{K}^*$;
   → les polynômes de la forme λP, où $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
3. **Théorème de d'Alembert :** Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

EXEMPLE

X^2-1 n'est pas un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$ car $X^2-1=(X+1)(X-1)$ et donc $(X+1)\mid(X^2-1)$.

12 On considère un polynôme P irréductible de $\mathbb{K}[X]$.
On suppose qu'il existe deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P = AB$.

Montrer que $\deg(A)=0$ ou $\deg(B)=0$.

13 Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.
On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha)=0$.

Montrer que P n'est pas irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

14 Les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants sont-ils irréductibles ?

1. $P = X^2-1$ 2. $Q = X^4+1$ 3. $R = X^3+2X^2-4X+3$

15 On considère le polynôme $P = X^2+X+1$.

1. Justifier que P est à la fois un élément de $\mathbb{R}[X]$ et un élément de $\mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Le polynôme P est-il irréductible dans $\mathbb{C}[X]$? Justifier.

16 Dans cet exercice, on souhaite déterminer les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

1. On suppose que P est de degré 1. Le polynôme P est-il irréductible ?
2. a. On suppose que le degré de P est supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $X-\alpha$ divise P.
   b. Que peut-on en déduire ?
3. Déterminer tous les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
4. Justifier que tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ peut s'exprimer comme produit de polynômes irréductibles.

17 On considère les polynômes
$P = X^3-9X^2+26X-24$ et $Q = X^3-7X^2+7X+15$.

1. a. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que :
$$P=(X-3)(aX^2+bX+c).$$
   b. En déduire une décomposition du polynôme P en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
2. a. Les polynômes P et Q ont une racine commune. Déterminer cette racine.
   b. En déduire une décomposition du polynôme Q en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

18 On considère dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4+2X^2+1$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de réel α tel que $P(\alpha)=0$.
2. Peut-on dire que le polynôme P est irréductible ? Justifier.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme de degré 2 soit irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

19 1. Montrer que les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré 2 dont le discriminant est négatif sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ non constant.
Justifier qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha)=0$. Que peut-on dire de $\overline{\alpha}$?
3. On suppose que le degré de P est strictement supérieur à 2.
Montrer que P n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
4. En déduire les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Problème de concours

20 **D'après Concours Communs Polytechniques, 2016**

L'objectif de ce problème est l'étude des polynômes d'interpolation de Hermite.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et on note $\mathbb{R}(X)$ l'ensemble des éléments de la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ avec Q non nul.

Si $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on note P′ le polynôme dérivé de P défini par : $P'=\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$.

Les propriétés des opérations sur la dérivation des polynômes sont semblables à celles des fonctions.

Partie A

Soit n un entier naturel non nul.

1. Soient P et Q deux polynômes non nuls à coefficients complexes.

a. Démontrer que si P et Q n'ont aucune racine complexe commune, alors P et Q sont premiers entre eux.

AIDE

On pourra raisonner par l'absurde.

b. On suppose que P et Q sont premiers entre eux. Montrer que si P et Q divisent un troisième polynôme R à coefficients complexes, alors il en est de même du polynôme PQ.

2. Soit $(P_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$.

On considère le polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ et la fraction rationnelle $Q\in\mathbb{R}(X)$, définis par :

$$P=\prod_{i=1}^{n} P_i \text{ et } Q=\frac{P'}{P}.$$

Montrer par récurrence que $Q=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i'}{P_i}$.

Partie B

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, p un entier naturel non nul, $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille d'éléments de I distincts deux à deux.

1. a. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ et $a\in\mathbb{R}$. Montrer que si $P(a)=P'(a)=0$, alors $(X-a)^2$ divise P.

b. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré $2p-1$ tel que, pour tout entier i avec $1\leqslant i\leqslant p$, $P(x_i)=0$ et $P'(x_i)=0$.

Montrer que $P=0$.

2. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré $2p-1$.

Soit ϕ la fonction qui à P associe $(P(x_1); P(x_2); \ldots ; P(x_p); P'(x_1); P'(x_2); \ldots ; P'(x_p))$.

Soient P et Q de degré $2p-1$ tels que $\phi(P)=\phi(Q)$.

Montrer que $P=Q$.

3. Pour tout entier i tel que $1\leqslant i\leqslant p$, on considère le polynôme $Q_i=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}\left(\frac{X-x_j}{x_i-x_j}\right)^2$.

Soient deux entiers i et k compris entre 1 et p.

a. Calculer $Q_i(x_k)$.

b. Montrer que $\begin{cases} Q_i'(x_k)=0 \text{ si } k\neq i \\ Q_i'(x_i)=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{p}\frac{2}{x_i-x_j} \text{ sinon.}\end{cases}$

4. Soient $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ deux familles de réels quelconques. On admet qu'il existe un polynôme P_H de $\mathbb{R}[X]$ de degré $2p-1$, appelé polynôme d'interpolation de Hermite, tel que, pour tout entier i vérifiant $1\leqslant i\leqslant p$, on a $P_H(x_i)=a_i$ et $P_H'(x_i)=b_i$.

a. Montrer que ce polynôme est unique.

b. Montrer que

$$P_H=\sum_{i=1}^{p}[(1-Q_i'(x_i)(X-x_i))a_i+(X-x_i)b_i]Q_i.$$

c. Déterminer le polynôme d'interpolation de Hermite lorsque $p=2$, $x_1=-1$, $x_2=1$, $a_1=1$, $a_2=0$, $b_1=-1$ et $b_2=2$.

Avant	Maintenant	Après
Arithmétique dans $\mathbb{N}$. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$. Notion de division euclidienne. Nombres premiers.	Théorèmes usuels de l'arithmétique : théorème de Gauss, théorème de Bézout. Notion de congruence, travail avec le reste de la division euclidienne. Décomposition en produit de facteurs premiers. Utilisation des nombres premiers en cryptographie.	Arithmétique des polynômes ou plus généralement dans un anneau euclidien. Utilisation des théorèmes de Gauss et de Bézout dans un cadre plus général. Utilisation des morphismes d'anneaux.

Partie 3 Graphes et

Histoire des mathématiques

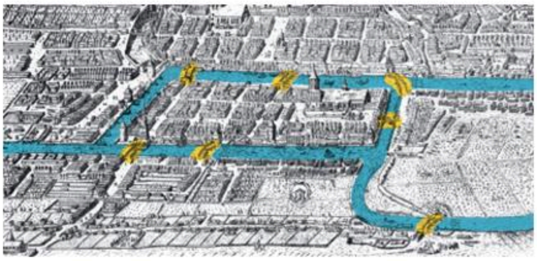
Les graphes, d'une devinette à une nouvelle théorie

De passage à Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad en Russie), Leonhard Euler (1707-1783) est confronté à un problème posé par ses habitants : est-il possible de passer par tous les ponts de la ville une, et une seule, fois ? (Voir le plan de la ville ci-contre.)

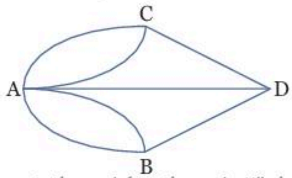
Euler raisonne alors sur un schéma de type nouveau (ci-contre) qui est une figure géométrique dont la forme et la longueur des arêtes n'ont pas d'importance, ni l'angle qu'elles forment les unes avec les autres. Sa démonstration ne se base donc pas sur tous les résultats connus de la géométrie de l'époque et donne naissance à deux nouveaux domaines mathématiques : la topologie et la théorie des graphes.

Pour résoudre des problèmes liés à l'électricité, le physicien Gustav Kirchhoff (1824-1887) est le premier, en 1847, à utiliser les graphes. Il créa les arbres (graphe sans boucle) qu'**Arthur Cayley** (1821-1895) développa par la suite.

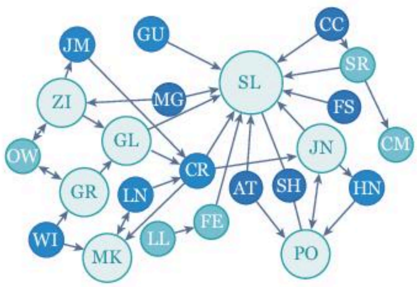
Depuis, l'utilisation des graphes s'est généralisée dans bien des domaines comme les jeux, les probabilités (chaînes de Markov), l'économie, la sociologie (sociogramme ci-contre), l'intelligence artificielle, etc.



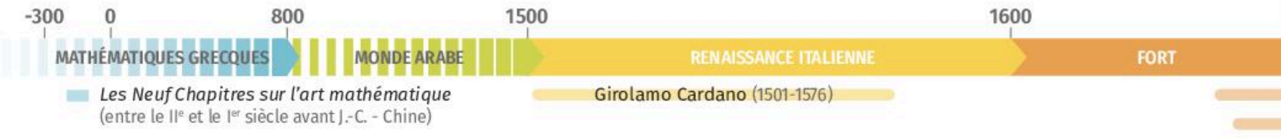
Plan de la ville de Königsberg en 1613.



Représentation schématique de Königsberg selon la méthode d'Euler



Exemple de sociogramme



Retrouver cette frise au format interactif sur LLS.fr/MXPP170

matrices

Les matrices : résoudre des systèmes d'équation et des problèmes géométriques

James Sylvester

Arthur Cayley

Le 8e des neuf chapitres sur *l'Art des mathématiques* (livre récapitulant les savoirs mathématiques de la Chine Antique, IIe siècle av. J.-C., Ier siècle ap. J.-C.) porte sur la résolution de systèmes d'équations à deux ou trois inconnues en n'utilisant que les coefficients de ces équations. La méthode proposée peut être considérée comme l'ancêtre d'une méthode matricielle.

Girolamo Cardano (1501-1576) propose dans son *Ars Magna* (1545) la *« regula de modo »*, un calcul qui permet de savoir si un système de deux équations à deux inconnues admet un unique couple solution. Ce résultat ouvrira sur le déterminant de matrices. Indépendamment l'un de l'autre, Seki Kowa (1642-1708) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) développent cette notion pour les systèmes 3×3 et 4×4.

The notion of such a matrix arises naturally from an abbreviated notation for a set of linear equations, viz. the equations

$$X = ax + by + cz,$$
$$Y = a'x + b'y + c'z,$$
$$Z = a''x + b''y + c''z,$$

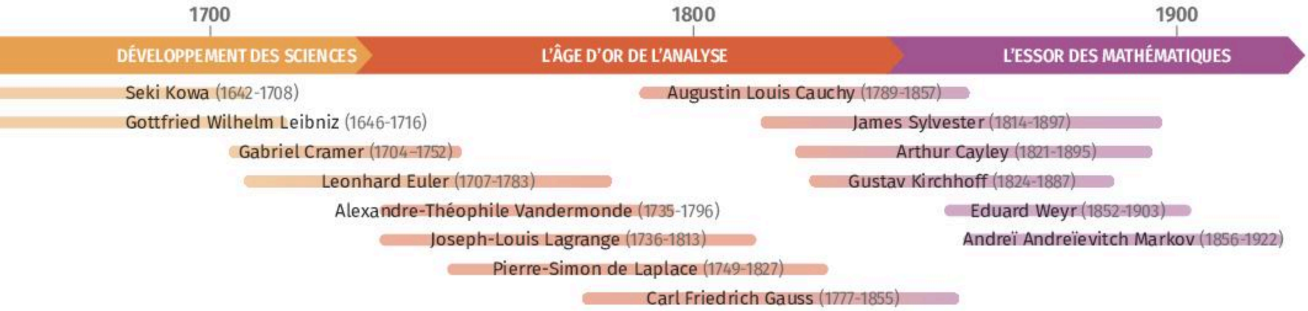
may be more simply represented by

$$(X, Y, Z) = \left(\begin{array}{|ccc|} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)(x, y, z),$$

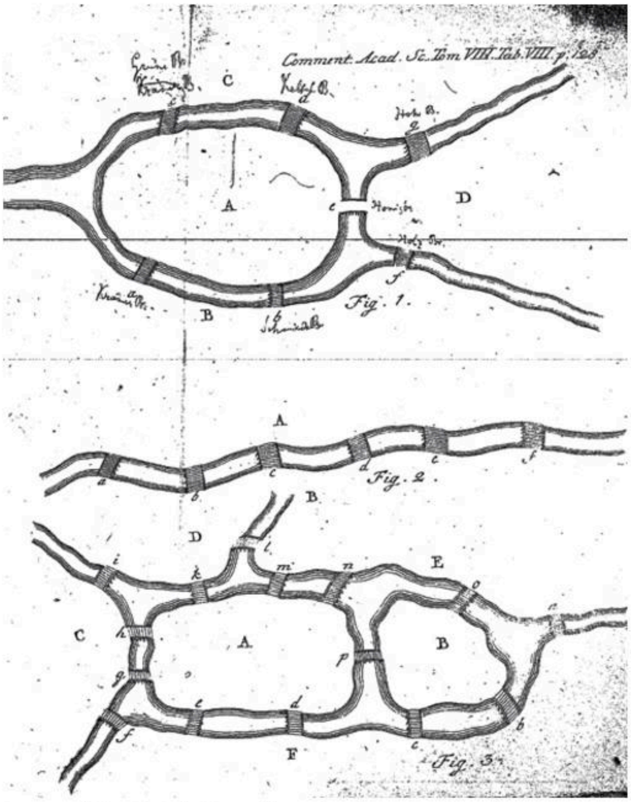
Extrait de *Memoir on the Theory of Matrices* de Cayley

Des mathématiciens comme Cramer (1704-1752), Vandermonde (1735-1796), Laplace (1749-1827), Lagrange (1736-1813), Gauss (1777-1855) ou encore Cauchy (1789-1857) travaillent sur les déterminants, en étudiant leurs propriétés et en développant les premières théories sur le sujet.

James Sylvester (1814-1897), influencé par son ami **Arthur Cayley** (1821-1895), utilise les matrices et les déterminants afin de donner des solutions simplifiées à un problème géométrique. Les deux hommes deviennent amis et leurs échanges contribuent à l'élaboration d'une théorie algébrique sur les matrices. En 1858, Cayley publie son *Memoir on the Theory of Matrices*. Les travaux d'Eduard Weyr (1852–1903) permettent ensuite de lier les matrices aux fonctions vectorielles. Le début du XXe siècle donnera alors une place centrale aux matrices et aux déterminants dans l'étude de la géométrie.



A Les ponts de Königsberg et d'ailleurs



Images tirées de *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* de Leonhard Euler.

En réponse au problème des ponts de Königsberg (voir page 170), Leonhard Euler rédige un article appelé *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis,* que l'on trouve dans les mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin (1759).

Les trois figures ci-contre en sont extraites. Cet article a donné naissance à la théorie des graphes.

La figure 1 représente la situation de Königsberg et la figure 3 une situation inventée par Euler pour illustrer le résultat qu'il venait de découvrir. La figure 2 sert à établir une partie de son résultat : si l'itinéraire à suivre contient n ponts à emprunter une et une seule fois, alors il reliera $n+1$ zones.

1 Tout d'abord, Euler constate que le nombre de ponts qui relient chacune des quatre zones de Königsberg est impair et donc que le problème n'a pas de solution. Expliquer ce raisonnement.

Dans la suite de *Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis*, Euler s'attache à trouver un raisonnement généralisable à toute situation.

2 Dans les paragraphes 11 et 12, Euler montre que si le nombre de ponts qui donnent sur une région A est impair, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel p tel que le nombre de ponts soit égal à $2p-1$, alors l'itinéraire passe p fois par cette région A.

a) À partir de la figure 1, compléter le tableau ci-dessous de la situation de Königsberg.

Zones	A	B	C	D	Somme
Nombres de ponts	5	3	3	3	
p					

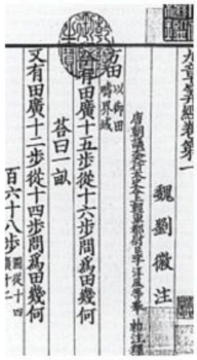
b) Expliquer pourquoi le problème des ponts de Königsberg n'a pas de solution.

3 Dans les paragraphes 13 à 15, Euler démontre le résultat général : si le nombre de ponts qui donnent sur une région A est pair, c'est-à-dire que s'il existe un entier naturel p tel que le nombre de ponts soit égal à $2p$, alors cette région A devra figurer $p+1$ fois dans l'itinéraire si on part de cette région, ou p fois si on ne fait qu'y passer. Il s'invente la ville représentée en figure 3. En complétant le tableau ci-dessous, déterminer si on peut suivre ou non un parcours dans cette ville, en empruntant une, et une seule, fois chaque pont.

Zones	A	B	C	D	E	F	Somme
Nombres de ponts							
p							

B *Fangcheng* et la naissance des matrices

Fangcheng, ou *Fang Sheng*, désigne le nom du 8e chapitre du livre chinois *Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique*, rédigé au début de la période Han entre le IIe siècle avant J.-C. et le Ier siècle après J.-C., et qui reprend les savoirs mathématiques chinois connus alors. *Fangcheng* signifie « comparaison des dispositions ». Les méthodes utilisées dans ce chapitre permettent de résoudre des systèmes de 2 ou 3 équations à 2 ou 3 inconnues, en n'utilisant que des tableaux de nombres qui sont les coefficients de ces équations.


魏 劉 徽 注
方田 以御田疇界域
有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
百六十八步

Extrait de *Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique.*

1 Premier problème : Deux équations à deux inconnues

3 ballots de riz de bonne qualité et 2 ballots de basse qualité produisent 18 unités de riz, alors que 2 ballots de riz de bonne qualité et 1 de basse qualité produisent 11 unités de riz.

Combien d'unités de riz les ballots de chaque qualité permettent-ils d'obtenir ?

a) Répondre au problème à l'aide d'un système d'équations.

b) Voici la méthode présentée dans le livre.

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 11 & 18 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 4 & 3 \\ 22 & 18 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 18 \end{array}\right|$$

Expliquer l'origine du premier tableau de nombres, puis les calculs sur les colonnes pour obtenir le 2e et le 3e tableau. Comment retrouve-t-on les solutions obtenues en 1 a) ?

c) En utilisant cette méthode, résoudre le système $\begin{cases} 6x+3y &= 48 \\ 6x+5y &= 52 \end{cases}$.

2 Deuxième problème : Trois équations à trois inconnues

3 ballots de riz de bonne qualité, 2 ballots de qualité moyenne et 1 ballot de basse qualité produisent 39 unités de riz. 2 ballots de riz de bonne qualité, 3 ballots de qualité moyenne et 1 ballot de basse qualité produisent 34 unités de riz. 1 ballot de riz de bonne qualité, 2 ballots de qualité moyenne et 3 ballots de basse qualité produisent 26 unités de riz.

Combien d'unités de riz les ballots de chaque qualité permettent-ils d'obtenir ?

a) On note respectivement x, y et z le nombre de ballots de riz de bonne, moyenne et basse qualité.

Écrire un système de trois équations à trois inconnues correspondant au problème donné.

b) Voici les étapes de calcul que l'on retrouve dans le livre.

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}\right| \xrightarrow{3C_2} \left|\begin{array}{ccc} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{array}\right| \xrightarrow{C_2-C_3} \left|\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{array}\right| \xrightarrow{C_2-C_3 \text{ et } 3C_1} \left|\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \\ 78 & 24 & 39 \end{array}\right| \xrightarrow{C_1-C_3} \left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array}\right|$$

$$\xrightarrow{5\times C_1} \left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \\ 195 & 24 & 39 \end{array}\right| \xrightarrow{\dots} \left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 15 & 5 & 2 \\ 39 & 1 & 1 \\ 171 & 24 & 39 \end{array}\right| \xrightarrow{\dots} \left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & 2 \\ 38 & 1 & 1 \\ 147 & 24 & 39 \end{array}\right| \xrightarrow{\dots} \left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 2 \\ 37 & 1 & 1 \\ 123 & 24 & 39 \end{array}\right| \xrightarrow{\dots} \left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array}\right|$$

Analyser ces suites de tableaux, compléter les opérations mises en jeu et trouver la solution au problème.

c) En s'inspirant des tableaux ci-dessus, résoudre le système $\begin{cases} 3x+3y+3z &= 42 \\ x+2y+4z &= 26. \\ 2x+4y+10z &= 57 \end{cases}$

Avant de commencer

Prérequis

1. Utiliser un tableur.
2. Savoir résoudre un système de deux équations à deux inconnues.
3. Connaître les transformations planes.
4. Connaître le cosinus et le sinus des angles remarquables.

1 Utiliser un tableur

Sur la feuille de calcul ci-dessous figurent les compositions de quatre bouquets de fleurs ainsi que le prix unitaire par fleur.

	A	B	C	D
1		Rose	Œillet	Gerbera
2	Bouquet 1	5	9	3
3	Bouquet 2	7	12	5
4	Bouquet 3	9	10	9
5	Bouquet 4	13	11	7
6				
7		Prix unitaire		
8	Rose	2,8		
9	Œillet	1,15		
10	Gerbera	1,4		

1. a. Calculer à la main le nombre total de fleurs de chaque sorte en regroupant les quatre bouquets.

b. Quelle formule de calcul doit-on écrire en **B6** et étendre vers la droite pour calculer ce total ?

2. a. Calculer le prix total du bouquet 1.

b. Quelle formule doit-on écrire dans la feuille de calcul pour calculer ce coût ?

c. Calculer le prix total des quatre bouquets.

3. Donner deux formules de calcul différentes pour calculer le prix total des quatre bouquets.

2 Résoudre des systèmes de deux équations à deux inconnues

1. Résoudre le système suivant par substitution.

$$\begin{cases} 3x - y = 19 \\ 6x + 8y = 8 \end{cases}$$

2. Résoudre le système suivant par combinaison linéaire.

$$\begin{cases} 7x - 6y = 11 \\ 5x - 4y = 4 \end{cases}$$

3 Modéliser par une mise en équation

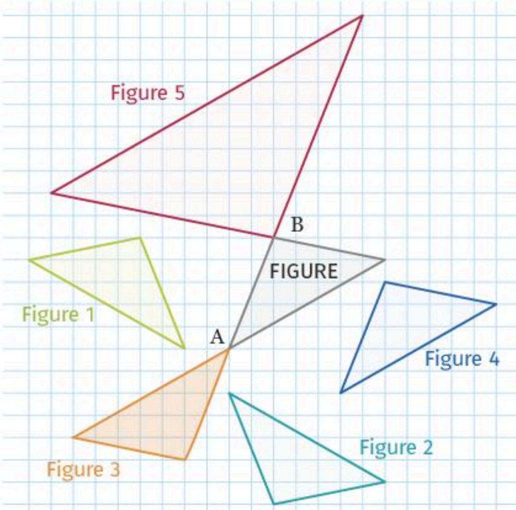
À la boulangerie, Aliou achète trois pains au chocolat et cinq croissants pour 7,10 €.

Assane achète dix pains au chocolat et huit croissants pour 16,30 €.

Déterminer le prix unitaire du croissant et du pain au chocolat.

4 Reconnaître une transformation du plan

Les figures 1 à 5 ont été obtenues par une transformation du plan, à partir de la figure originale nommée FIGURE.



Déterminer la nature de chacune de ces transformations planes.

5 Connaître les valeurs remarquables de cosinus et sinus

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	π
$\cos(x)$					
$\sin(x)$					

Anecdote

Le théorème des quatre couleurs stipule qu'il faut au plus quatre couleurs pour colorier des zones sur une carte sans que deux zones adjacentes soient coloriées de la même couleur.

Ce problème peut être modélisé par un graphe, dont les sommets sont les différentes zones à colorier et les arêtes représentent les frontières communes entre ces zones.

Calcul matriciel et applications aux graphes

Chapitre 6

Capacités attendues - chapitre 6

1. Modéliser une situation par une matrice.
2. Calculer l'inverse et les puissances d'une matrice carrée.
3. Utiliser le calcul matriciel pour résoudre un système linéaire.
4. Modéliser une situation par un graphe.
5. Utiliser le calcul matriciel pour calculer le nombre de chemins de longueur donnée entre deux sommets d'un graphe.

Internet est le réseau informatique mondial. Il permet aux ordinateurs du monde entier de communiquer entre eux. Ces communications sont possibles grâce à des câbles sous-marins qui traversent les océans pour relier les continents. La théorie des graphes abordée dans ce chapitre permet de modéliser des réseaux.

A Une facture de couture

Objectif Découvrir la notion de matrice et quelques opérations associées.

Afin de fabriquer des vêtements, on utilise du tissu, du fil et des boutons.

Les tableaux ci-contre récapitulent les quantités nécessaires pour coudre une robe, une chemise ou un jean, ainsi que les prix par fourniture.

	Tissu en mètres	Longueur de fil en mètre	Nombre de boutons
Robe	2,70	1,50	3
Chemise	1,70	0,70	5
Jean	1,50	0,50	1

	Prix
Tissu au mètre	9,95
Longueur de fil en mètre	1,99
Bouton à l'unité	0,50

On peut résumer chacun des tableaux en ne conservant que les nombres. On obtient alors différents tableaux de nombres appelés **matrices**, notées ici M et P.

On a $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2{,}70 & 1{,}50 & 3 \\ 1{,}70 & 0{,}70 & 5 \\ 1{,}50 & 0{,}50 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 9{,}95 \\ 1{,}99 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

M est une matrice possédant autant de lignes que de colonnes. On dit que M est une **matrice carrée**. Elle est ici de taille 3.

P est une matrice formée d'une unique colonne. On dit que P est une **matrice colonne**.

1 **a)** Calculer le prix de fabrication d'une robe. Faire de même pour une chemise et pour un jean.

b) Résumer les résultats obtenus en une matrice colonne T, contenant une ligne pour chaque article en conservant l'ordre robe, chemise, puis jean.

On admet que l'on peut écrire $\mathrm{M} \times \mathrm{P} = \mathrm{T}$.

2 On souhaite fabriquer dix robes, dix chemises et dix jeans.

a) Écrire la matrice N contenant trois lignes et trois colonnes pour résumer les quantités nécessaires à cette nouvelle fabrication.

b) Quelle opération peut-on conjecturer entre M et N ?

Bilan

Conjecturer une méthode pour multiplier :
- **une matrice par un nombre réel ;**
- **une matrice carrée de taille 3 par une matrice colonne à 3 lignes.**

B Un réseau social

Objectif Découvrir la notion de graphe.

Adeline, Bakary, Camille, Damien, Élodie, Farid et Gabriel sont inscrits sur un réseau social.

- Adeline est amie avec Bakary, Élodie et Farid.
- Bakary est ami avec Adeline, Damien et Farid.
- Camille est amie avec Élodie et Gabriel.
- Damien est ami avec Bakary, Élodie et Gabriel.

1 Reproduire et compléter le schéma précédent, en traçant des segments représentant la relation d'amitié qui lie deux personnes.
Un tel schéma s'appelle un **graphe**. Les personnes sont représentées par les **sommets** et les relations d'amitié sont matérialisées par les **arêtes**.

2 L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets. Quel est l'ordre du graphe représenté ?

3 **a)** Deux sommets sont **adjacents** lorsqu'ils sont reliés par une arête.
Citer deux sommets qui sont adjacents et deux sommets qui ne le sont pas.

b) Un graphe est **complet** lorsque tous ses sommets sont adjacents. Est-ce le cas ici ?

4 Une chaîne est une suite d'arêtes consécutives reliant deux sommets.
Par exemple, la chaîne Gabriel - Camille - Élodie est une chaîne de **longueur** 2.

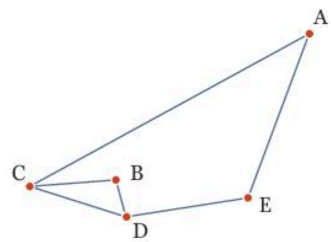
a) Déterminer deux chaînes reliant Adeline à Gabriel et préciser leur longueur.

b) Un graphe est **connexe** lorsque, pour tout couple de sommets distincts, il existe une chaîne les reliant.
Est-ce le cas ici ?

Bilan **Dans le contexte de l'énoncé, comment interpréter le fait que le graphe soit complet ? Soit connexe ?**

C Voyage en train

Objectif Utiliser le calcul matriciel pour calculer le nombre de chaînes de longueur donnée entre deux sommets d'un graphe.



Les sommets du graphe ci-contre représentent différentes villes d'un pays. Les liaisons ferroviaires les reliant sont représentées par des arêtes.

1 Reproduire et compléter le tableau ci-dessous avec un 1 lorsque l'on peut se rendre directement d'une ville à l'autre en train sans faire étape par une autre ville et avec un 0 si c'est impossible.

	A	B	C	D	E
A	0				
B		0			
C			0		
D				0	
E					0

2 Notons M la matrice carrée dont les coefficients sont les nombres obtenus dans le tableau précédent.
À l'aide de la calculatrice, déterminer M^2 et M^3.

3 Déterminer le nombre de chemins composés de deux arêtes pour aller de la ville D à la ville A et comparer ce nombre avec le coefficient $m_{4,1}$ de la matrice M^2.

4 Déterminer le nombre de chemins composés de 3 arêtes pour aller de la ville C à la ville D et comparer ce nombre avec le coefficient $m_{4,3}$ de la matrice M^3.

Bilan **Pour un graphe donné, conjecturer une méthode permettant de calculer le nombre de chaînes de longueur k entre deux sommets.**

1 Notion de matrice

Soient m, n et p trois entiers naturels non nuls.

A Notion de matrice et opérations

Définition

Une **matrice** de taille (ou format) $n \times p$ est un tableau de nombres réels à n lignes et p colonnes.

EXEMPLE

$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0{,}5 & 4 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes donc de taille 2×3.

Définitions

Lorsque $n = 1$, on dit que M est **une matrice ligne**, formée d'une seule ligne.

Lorsque $p = 1$, on dit que M est **une matrice colonne**, formée d'une seule colonne.

Lorsque $n = p$, on dit que M est **une matrice carrée** d'ordre n.

Une **matrice diagonale** est une matrice carrée, dont tous les termes sont nuls sauf lorsque $i = j$.

La **matrice identité** d'ordre n est la matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1. On la note I_n.

La **matrice nulle** de taille $n \times p$, notée $\mathrm{O}_{n,p}$, est la matrice de taille $n \times p$, dont tous les coefficients sont nuls.

EXEMPLES

1. $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{9} & -15 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

3. $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{O}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ désignent respectivement la matrice identité et la matrice nulle d'ordre 3.

Définition

Deux matrices A et B de taille $n \times p$ sont **égales** lorsque, pour tous $i \in \{1 ; \dots ; n\}$ et $j \in \{1 ; \dots ; p\}$, on a $a_{i,j} = b_{i,j}$.

Définition

Une matrice carrée d'ordre n est **symétrique** lorsque, pour tous $i \in \{1 ; \dots ; n\}$ et $j \in \{1 ; \dots ; n\}$, on a $a_{i,j} = a_{j,i}$.

EXEMPLE

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -11 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique.

NOTATION

On note $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ ou encore $(a_{i,j})$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$ la matrice à n lignes et p colonnes, où $a_{i,j}$ désigne le coefficient situé à la i-ième ligne et j-ième colonne.

NOTATION

- On note $\mathrm{Diag}(d_1 ; \dots ; d_n)$ la matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont respectivement $d_1 ; \dots ; d_n$.
- Lorsque la matrice nulle est carrée, on la note 0_n.

Remarque : On peut aussi définir des matrices à coefficients complexes.

Remarque : Deux matrices sont donc égales lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients situés à la même position sont égaux.

NOTATION

Si $\mathrm{A} = (a_{i,j})$, on note ${}^t\mathrm{A} = (a_{j,i})$ la matrice **transposée** de A.

B Opérations sur les matrices

Définitions

Soient $\mathrm{A}=(a_{i,j})$ et $\mathrm{B}=(b_{i,j})$ deux matrices de taille $n\times p$.

- La **somme des matrices A et B**, notée $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, est la matrice $\mathrm{C}=(c_{i,j})$ de taille $n\times p$ telle que, pour tous $1\leqslant i\leqslant n$ et $1\leqslant j\leqslant p$, on a $c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$.
- Le **produit de la matrice A par un réel λ**, noté $\lambda\mathrm{A}$, est la matrice $\mathrm{M}=(m_{i,j})$ de taille $n\times p$ telle que, pour tous $1\leqslant i\leqslant n$ et $1\leqslant j\leqslant p$, on a $m_{i,j}=\lambda\times a_{i,j}$.

Remarques : On obtient ainsi la somme de deux matrices de même taille en additionnant les coefficients de même emplacement.
On obtient une matrice $\lambda\mathrm{A}$ en multipliant tous les coefficients de A par λ.

Propriétés

Soient A, B et C trois matrices de même taille et α et β deux réels.

- $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{B}+\mathrm{A}$ (commutativité de la somme de matrices)
- $\mathrm{A}+(\mathrm{B}+\mathrm{C})=(\mathrm{A}+\mathrm{B})+\mathrm{C}$ (associativité de la somme de matrices)
- $1\times\mathrm{A}=\mathrm{A}\times1=\mathrm{A}$
- $(\alpha+\beta)\mathrm{A}=\alpha\mathrm{A}+\beta\mathrm{A}$
- $\alpha(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\alpha\mathrm{A}+\alpha\mathrm{B}$

DÉMONSTRATION Voir exercices 58 p. 194 et 59 p. 195.

Définition

On appelle **opposée** de A la matrice $\mathrm{M}=(-1)\mathrm{A}$, notée $-\mathrm{A}$, telle que, pour tous $1\leqslant i\leqslant n$ et $1\leqslant j\leqslant p$, on a $m_{i,j}=-a_{i,j}$.
De plus, on note $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ la matrice $\mathrm{A}+(-\mathrm{B})$.

Remarque : L'égalité $\mathrm{M}+\mathrm{A}=\mathrm{B}$ équivaut à l'égalité $\mathrm{M}=\mathrm{B}-\mathrm{A}$.

EXEMPLES

Soient $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&-5&0\\2&3&-1\end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}4&3&2\\-3&-3&-1\end{pmatrix}$ deux matrices de taille 2×3.

On a $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1&-5&0\\2&3&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&3&2\\-3&-3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&2\\-1&0&-2\end{pmatrix}$;

$2\mathrm{A}=2\times\begin{pmatrix}1&-5&0\\2&3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-10&0\\4&6&-2\end{pmatrix}$; $3\mathrm{B}=3\times\begin{pmatrix}4&3&2\\-3&-3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&9&6\\-9&-9&-3\end{pmatrix}$ et

$2\mathrm{A}-3\mathrm{B}=\begin{pmatrix}2&-10&0\\4&6&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12&9&6\\-9&-9&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&-19&-6\\13&15&1\end{pmatrix}$.

Définition

Soient $\mathrm{L}=(\ell_{1,1}\ \ \ell_{1,2}\ \ \dots\ \ \ell_{1,n})$ une matrice ligne de taille $1\times n$ et $\mathrm{C}=\begin{pmatrix}c_{1,1}\\c_{2,1}\\\vdots\\c_{n,1}\end{pmatrix}$ une matrice colonne de taille $n\times1$. Alors le produit $\mathrm{L}\times\mathrm{C}$ est le nombre réel défini par :

$$\mathrm{L}\times\mathrm{C}=(\ell_{1,1}\ \ \ell_{1,2}\ \ \dots\ \ \ell_{1,n})\times\begin{pmatrix}c_{1,1}\\c_{2,1}\\\vdots\\c_{n,1}\end{pmatrix}=\ell_{1,1}\times c_{1,1}+\ell_{1,2}\times c_{2,1}+\dots+\ell_{1,n}\times c_{n,1}$$

Remarque : Pour que le produit $\mathrm{L}\times\mathrm{C}$ soit défini, L doit avoir autant de colonnes que C a de lignes.

EXEMPLE

Si $\mathrm{L}=(4\ \ 2\ \ 1)$ et $\mathrm{C}=\begin{pmatrix}8\\-3\\-2\end{pmatrix}$, alors $\mathrm{L}\times\mathrm{C}=4\times8+2\times(-3)+1\times(-2)=24$.

Définition

Si A est une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$, le **produit des matrices A et B**, noté $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ ou AB, est la matrice $\mathrm{C} = (c_{i,j})$ de taille $m \times p$ telle que, pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times b_{k,j}$.
Autrement dit, l'élément $c_{i,j}$ est le produit de la i-ième ligne de A par la j-ième colonne de B.

Remarque : Lorsque les produits $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ et $\mathrm{B} \times \mathrm{A}$ sont définis, on a en général $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \times \mathrm{A}$. Le produit matriciel n'est pas commutatif.

Propriétés

Soient A, B et C trois matrices et λ un nombre réel. Sous réserve de définition des produits et des sommes, on a :
- $(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \times \mathrm{C} = \mathrm{A} \times (\mathrm{B} \times \mathrm{C}) = \mathrm{A} \times \mathrm{B} \times \mathrm{C}$
- $\mathrm{A} \times (\mathrm{B} + \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) + (\mathrm{A} \times \mathrm{C})$ et $(\mathrm{A} + \mathrm{B}) \times \mathrm{C} = (\mathrm{A} \times \mathrm{C}) + (\mathrm{B} \times \mathrm{C})$
- $(\lambda \mathrm{A}) \times \mathrm{B} = \lambda \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ et $\mathrm{A} \times (\lambda \mathrm{B}) = \lambda \mathrm{A} \times \mathrm{B}$
- $\mathrm{I}_n \times \mathrm{A} = \mathrm{A} \times \mathrm{I}_n = \mathrm{A}$

Remarque : La multiplication est :
- associative ;
- distributive par rapport à l'addition.

Définition

Soient A une matrice carrée d'ordre n et k un entier naturel non nul.
La **puissance k-ième** de A, notée A^k, est la matrice $\mathrm{A}^k = \underbrace{\mathrm{A} \times \mathrm{A} \times \mathrm{A} \times \ldots \times \mathrm{A}}_{k \text{ fois}}$.

Remarque : Si A est non nulle, alors $\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_n$.

Application et méthode - 1

Soient $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ quatre matrices.

Calculer, lorsque cela est possible, les produits $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \times \mathrm{C}$, $\mathrm{C} \times \mathrm{D}$ et $\mathrm{B} \times \mathrm{C}$.

SOLUTION

- On peut calculer $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ car A a trois colonnes et B a trois lignes.

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \times 1 + 3 \times 4 + (-1) \times (-2) = 16.$$

- On ne peut pas calculer $\mathrm{A} \times \mathrm{C}$ car A possède trois colonnes et C possède deux lignes.

- On peut calculer $\mathrm{C} \times \mathrm{D}$ car C a trois colonnes et D a trois lignes.

$$\mathrm{C} \times \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -19 & 5 \end{pmatrix}$$

- On ne peut pas calculer $\mathrm{B} \times \mathrm{C}$ car B a une colonne et C a deux lignes. On remarque, en revanche, que le produit $\mathrm{C} \times \mathrm{B}$ est bien défini.

Pour s'entraîner : exercices **22** et **23** p. 190

Méthode

1. Pour déterminer si le produit peut se calculer, il faut vérifier que la deuxième matrice a autant de lignes que la première a de colonnes.
2. Chaque coefficient de la matrice est la somme des produits des coefficients de la ligne par ceux de la colonne correspondante.

On peut placer les matrices ainsi :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \\ \mathrm{M} = \mathrm{C} \times \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -19 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a : $m_{1,1} = 2 \times 1 + 3 \times 4 + (-1) \times (-2) = 16$
$m_{1,2} = 2 \times 0 + 3 \times (-1) + (-1) \times (-3) = 0$
$m_{2,1} = 1 \times 1 + (-5) \times 4 + 0 \times (-2) = -19$
$m_{2,2} = 1 \times 0 + (-5) \times (-1) + 0 \times (-3) = 5$

C Inverse de matrice et résolution de système

Définition

Une matrice carrée A de taille n est **inversible** lorsqu'il existe une matrice carrée B de taille n telle que $A \times B = B \times A = I_n$.

NOTATION

La matrice B, notée A^{-1}, est unique et est appelée **matrice inverse** de A.

Définition

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. Le **déterminant** de A est le réel, noté $\det(A)$, défini par $\det(A) = ad - bc$.

Remarque : On reconnaît la formule du déterminant des vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

Propriété

Une matrice carrée est inversible si, et seulement si, son déterminant est non nul.
En particulier, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

DÉMONSTRATION Voir exercice 60 p. 195.

Propriété (admise)

Soient A une matrice carrée de taille n et X et B deux matrices colonnes à n lignes.
Si A est inversible, alors le système d'écriture matricielle $AX = B$ admet une unique solution donnée par la matrice colonne $X = A^{-1} \times B$.

Remarque : Si A n'est pas inversible, alors soit le système n'a pas de solution soit il en admet une infinité.

EXEMPLE

Si $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $AX = \begin{pmatrix} 6x+2y \\ -8x+5y \end{pmatrix}$ donc le système $\begin{cases} 6x+2y = 3 \\ -8x+5y = 12 \end{cases}$ peut s'écrire $AX = B$ avec $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Remarque : Lorsqu'il existe, l'inverse d'une matrice se détermine généralement à l'aide de la calculatrice.

Application et méthode - 2

Résoudre le système $\begin{cases} 5x+2y = 16 \\ 4x+3y = 17 \end{cases}$.

SOLUTION

On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix}$.
Ainsi, le système peut s'écrire $AX = B$.
$\det(A) = 5 \times 3 - 2 \times 4 = 15 - 8 = 7$ d'où $\det(A) \neq 0$ et A est donc inversible. La calculatrice nous permet de trouver

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$ et $X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Le système a donc pour unique solution le couple $(x\,;y) = (2\,;3)$.

Pour s'entraîner : exercices **27** et **28** p. 190

Méthode

1. On détermine la matrice carrée A et la matrice colonne B telles que le système s'écrit sous la forme $AX = B$.
2. Si la matrice A n'est pas inversible, le système n'a pas de solution.
   Si la matrice A est inversible, on détermine son inverse A^{-1} à l'aide de la calculatrice.
3. Lorsqu'elle existe, la solution du système est $X = A^{-1} \times B$.

D Matrices et transformations du plan

On se place dans un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.
Soient a, b, c et d quatre nombres réels.

Définition

Une **translation** de vecteur $\vec{t}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ qui, à tout point $M(x\,;y)$ du plan, associe son point image $M'(x'\,;y')$ tel que $\overrightarrow{MM'}=\vec{t}$ se définit matriciellement comme la somme des matrices colonnes $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Remarque : Un repère orthonormé est direct lorsqu'une mesure de l'angle $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ est $\frac{\pi}{2}$.

Propriété (admise)

Pour les transformations géométriques planes suivantes, on définit la **matrice de transformation** $T=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ qui, à tout point $M(x\,;y)$ du plan, associe son point image $M'(x'\,;y')$ tel que $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$:
- pour une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses, on a $T=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$;
- pour une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées, on a $T=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$;
- pour une rotation de centre O d'angle θ, on a $T=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$;
- pour une homothétie de centre O et de rapport $k\in\mathbb{R}$, on a $T=\begin{pmatrix}k & 0\\0 & k\end{pmatrix}$.

Remarque : La translation est la seule transformation usuelle s'exprimant sous forme additive. Les autres s'expriment sous forme multiplicative.

Remarque : En particulier, pour une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, on a $T=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$.

EXEMPLE

La matrice associée à la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ est la matrice $T=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Application et méthode - 3

Dans un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne $A(2\,;4)$ et $B(5\,;3)$.

1. Calculer les coordonnées de l'image A′ de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

2. Calculer les coordonnées de l'image B′ de B par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$.

SOLUTION

1. Pour déterminer les coordonnées de A′, on utilise
$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2\sqrt{3}\\\sqrt{3}+2\end{pmatrix}$ donc $A'(1-2\sqrt{3}\,;\sqrt{3}+2)$.

2. Pour déterminer les coordonnées de B′, on utilise
$\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}$ donc $B'(10\,;0)$.

Méthode

1. On détermine la matrice correspondant à chaque transformation ;
2. On calcule ensuite les coordonnées des points images, de manière additive pour une translation et de manière multiplicative pour une autre transformation de référence.

Pour s'entraîner : exercices **30** p. 190 et **57** p. 194

2 Les graphes

Définitions

Un **graphe** est une représentation composée de **sommets** (des points) reliés par des **arêtes** (segments).

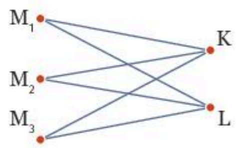
Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes sont munies d'un sens de parcours.

L'**ordre** d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.

Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet, sans tenir compte de leur éventuel sens de parcours.

EXEMPLE

Le graphe ci-contre est d'ordre 5.
Les sommets K et L sont de degré 3.
Les sommets M_1, M_2 et M_3 sont de degré 2.



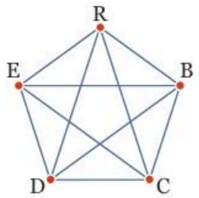
Définitions

Deux sommets sont **adjacents** lorsqu'ils sont reliés par au moins une arête.

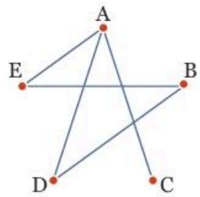
Un graphe est **complet** lorsque tous ses sommets sont deux à deux adjacents.

EXEMPLES

1. Le graphe ci-dessous est complet : tous ses sommets sont deux à deux adjacents.



2. Le graphe ci-dessous n'est pas complet : les sommets A et B, par exemple, ne sont pas adjacents.



Définitions

Pour un graphe non orienté, une **chaîne** est une suite d'arêtes consécutives reliant deux sommets (éventuellement confondus).

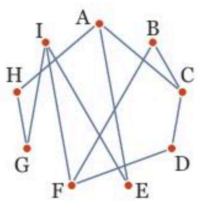
La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes la composant.

Pour un graphe orienté, un **chemin** est une suite d'arêtes consécutives reliant deux sommets (éventuellement confondus) en tenant compte du sens de parcours des arêtes.

EXEMPLES

1. Sur le graphe ci-contre, $\mathrm{A}-\mathrm{E}-\mathrm{I}-\mathrm{G}-\mathrm{H}$ est une chaîne de longueur 4.

2. De même, $\mathrm{A}-\mathrm{C}-\mathrm{B}-\mathrm{F}-\mathrm{D}-\mathrm{C}-\mathrm{A}$ est une chaîne de longueur 6.

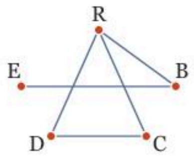


Définition

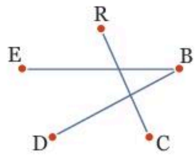
Un graphe non orienté est **connexe** lorsque chaque couple de ses sommets peut être relié par une chaîne.

EXEMPLES

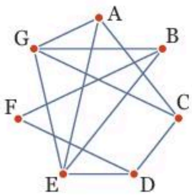
1. Un graphe connexe :



2. Un graphe non connexe : on ne peut pas relier R et B par une chaîne.



Application et méthode - 4



On considère le graphe ci-contre.

Le graphe est-il complet ? Connexe ? Justifier les réponses.

SOLUTION

Les sommets A et B, par exemple, ne sont pas adjacents donc ce graphe n'est pas complet.

La chaîne $A - C - D - E - G - B - F$ passe par tous les sommets donc ce graphe est connexe.

Pour s'entraîner : exercices **33** et **34** p. 191

Méthode

- Le graphe est complet si chaque sommet est relié à tous les autres.
- Le graphe est connexe si on peut trouver une chaîne passant par tous les sommets.

3 Application du calcul matriciel aux graphes

Définition

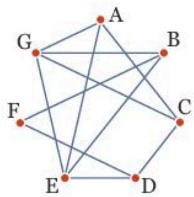
Soit n un entier naturel non nul. On considère un graphe d'ordre n (orienté ou non) dont les sommets sont numérotés de 1 à n, puis rangés dans l'ordre croissant.
La **matrice d'adjacence** de ce graphe est la matrice carrée de taille n, dont le coefficient $a_{i,j}$ est égal au nombre d'arêtes partant du sommet i pour arriver au sommet j.

Remarque : La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.

EXEMPLE

En notant M la matrice d'adjacence du graphe ci-contre obtenue en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique,

$$\text{on a } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Propriété

Soient n et k deux entiers naturels non nuls et M la matrice d'adjacence d'un graphe d'ordre n, dont les sommets sont numérotés de 1 à n et rangés dans l'ordre croissant.

Le terme de la i-ème ligne et de la j-ième colonne de la matrice M^k donne le nombre de chaînes (ou de chemins) de longueur k reliant le sommet i au sommet j.

Remarque : $\mathrm{M}^1 = \mathrm{M}$ donne le nombre de chaînes (ou de chemins) de longueur 1 reliant deux sommets.

DÉMONSTRATION Voir exercice **84** p. 198.

EXEMPLE

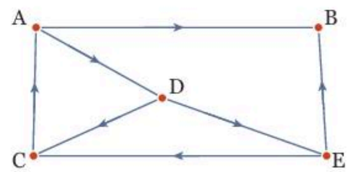
En reprenant l'exemple précédent, on a $\mathrm{M}^4 = \begin{pmatrix} 23 & 20 & 13 & 20 & 16 & 5 & 23 \\ 20 & 20 & 12 & 18 & 14 & 4 & 18 \\ 13 & 12 & 22 & 6 & 27 & 12 & 17 \\ 20 & 18 & 6 & 21 & 8 & 2 & 20 \\ 16 & 14 & 27 & 8 & 35 & 17 & 24 \\ 5 & 4 & 12 & 2 & 17 & 10 & 11 \\ 23 & 18 & 17 & 20 & 24 & 11 & 31 \end{pmatrix}$.

Il existe donc 27 chaînes de longueur 4 reliant le sommet C au sommet E.

On a $\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ donc il n'existe aucune chaîne de longueur 2 reliant le sommet B au sommet F.

Application et méthode - 5

On considère le graphe orienté ci-contre.



1. Déterminer la matrice d'adjacence M de ce graphe en classant les sommets par ordre alphabétique.

2. a. Déterminer le nombre de chemins de longueur 3 reliant A à C.

b. Déterminer le nombre de chemins de longueur 3 reliant C à B.

SOLUTION

1. On a $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a. On a $\mathrm{M}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Il y a donc une unique chaîne de longueur 3 reliant A à C. On constate qu'il n'y a pas de chemin de longueur 3 reliant C à A.

b. D'après la matrice M^3, il n'y a donc pas de chemin de longueur 3 reliant C à B.

Méthode

1. On détermine la matrice d'adjacence M en prenant garde à l'orientation des arêtes.
2. • On souhaite déterminer le nombre de chemins de longueur 3 : cela nécessite donc de connaître M^3.
   • On repère ensuite le coefficient demandé dans cette matrice.

Pour s'entraîner : exercices **38** et **39** p. 191

L'ESSENTIEL

FICHE DE RÉVISION

1 Une matrice de taille (ou format) $n \times p$ est un tableau de nombres réels à n lignes et p colonnes. Cela permet de :

✔ définir de nouvelles opérations : sommes de matrices, produits de matrices et multiplication d'une matrice par un réel ;

✔ réaliser des calculs rapidement avec une grande quantité de valeurs ;

✔ modéliser les transformations du plan et déterminer les coordonnées d'un point image par une de ces transformations.

2 Une matrice carrée A de taille n est inversible lorsqu'il existe une matrice carrée A^{-1} de taille n telle que $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$. Cela permet de :

✔ résoudre des systèmes d'équations linéaires : si $AX = B$, alors $X = A^{-1} \times B$.

3 Un graphe est une représentation composée de sommets et d'arêtes. Cela permet de :

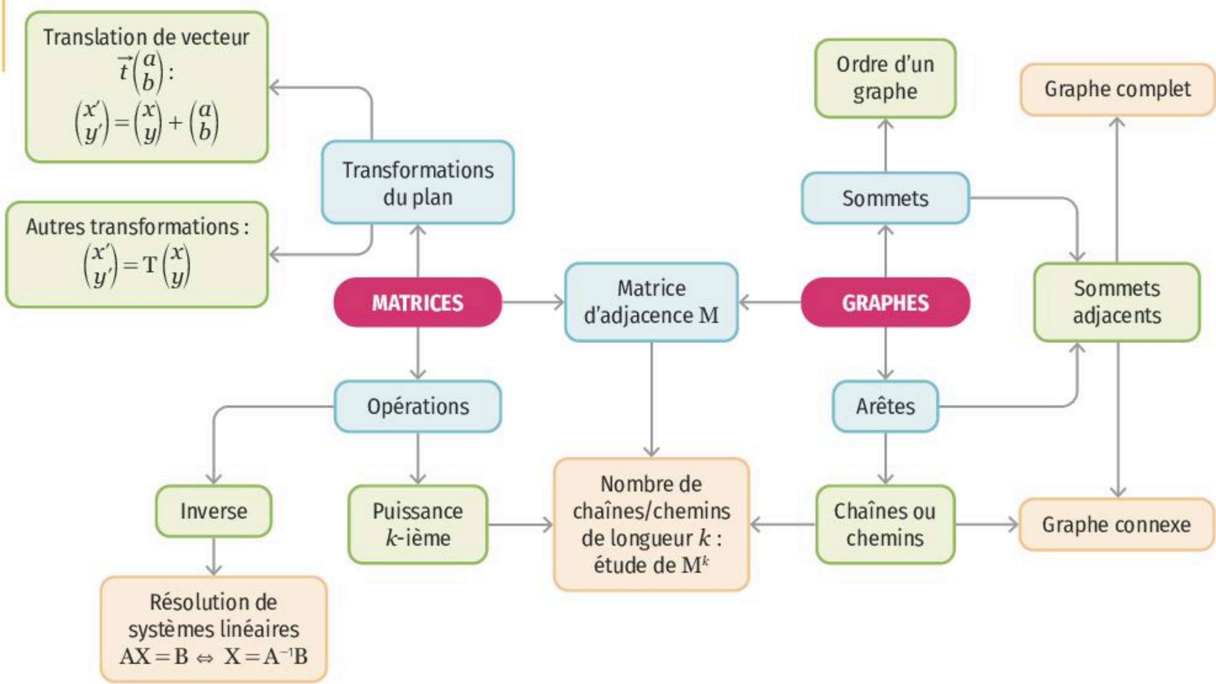
✔ modéliser des situations relevant de flux entre différents lieux.

4 La matrice d'adjacence M d'un graphe donne le nombre d'arêtes reliant les différents sommets entre eux. Cela permet de :

✔ résumer un graphe de façon synthétique ;

✔ déterminer le nombre de chaînes ou de chemins de longueur k en calculant M^k.

CARTE MENTALE



Téléchargez cette fiche de révision au format PDF sur lls.fr/MXPfiche6

QCM réponse unique

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$, $B=(2\ \ 5)$ et $C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & -4 & 5\end{pmatrix}$.

6 Le produit $A\times B\times C$ est :

a) une matrice colonne à deux lignes.
b) une matrice ligne à trois colonnes.
c) matrice carrée d'ordre 2.
d) non défini.

7 Le produit $B\times A\times C$ est :

a) une matrice colonne.
b) une matrice ligne.
c) une matrice carrée.
d) non défini.

8 L'inverse de A est :

a) non défini.
b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
c) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$
d) $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$

9 Le produit $A\times C$ est une matrice :

a) carrée d'ordre 3.
b) carrée d'ordre 2.
c) de taille 2×3.
d) de taille 3×2.

QCM réponses multiples

[Une ou plusieurs bonnes réponses par question]

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ et on considère la matrice $A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

10 La matrice A est associée à :

a) une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses.
b) une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$.
c) une rotation de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$.
d) une rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

11 La matrice A :

a) n'est pas inversible.
b) est inversible.
c) vérifie $A^3=I_2$.
d) a pour inverse A^2.

On considère la matrice $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

12 B est :

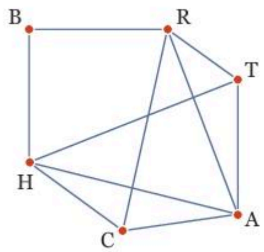
a) la matrice d'adjacence d'un graphe.
b) la matrice d'adjacence d'un graphe complet.
c) la matrice identité.
d) l'inverse de la matrice $-B$.

13 On a :

a) $B^4=4B^2+2B-I_4$.
b) $B^{-1}=B^4-4B^2-2B$.
c) $B^{-1}=-B^3+4B+2I_4$.
d) $B^{-1}=B^3-4B-2I_4$.

Problème

14 **D'après bac ES, Amérique du Sud, novembre 2019**



Au village départ d'une course cyclosportive, les différents stands présents sont :

- le stand des vélos de routes (R) ;
- le stand des BMX (B) ;
- le stand des compteurs et GPS (C) ;
- le stand des VTT (T) ;
- le stand de l'habillement (H) ;
- le stand des accessoires et pièces détachées (A).

Le graphe ci-contre représente le plan du village départ : les sommets correspondent aux stands et les arêtes aux allées qui les relient.

1. Ce graphe est-il complet ? Est-il connexe ?

2. Écrire la matrice d'adjacence M associée à ce graphe en classant les sommets dans l'ordre alphabétique.

3. Combien peut-on trouver de chaînes de longueur 4 reliant le stand des BMX au stand des compteurs et GPS ?

Retrouvez plus d'exercices dans notre **cahier d'algo**
LLS.fr/PythonXP

1 La fougère de Barnsley

Les matrices peuvent être utilisées pour représenter des transformations du plan (rotation, symétrie, etc.). Nous allons utiliser cette représentation matricielle des transformations du plan pour tracer une suite aléatoire de points $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

- Le premier point de cette suite est $\mathrm{A}_0(0\,;0)$;
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $(x_n\,;y_n)$ les coordonnées de A_n et on a :
  - $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec une probabilité de 0,01 ;
  - $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}04 \\ -0{,}04 & 0{,}85 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}6 \end{pmatrix}$ avec une probabilité de 0,85 ;
  - $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}26 \\ 0{,}23 & 0{,}22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}6 \end{pmatrix}$ avec une probabilité de 0,07 ;
  - $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}15 & 0{,}28 \\ 0{,}26 & 0{,}24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}44 \end{pmatrix}$ avec une probabilité de 0,07.

La suite de points ainsi obtenue forme une fractale appelée **fougère de Barnsley**.

Questions préliminaires :

1. Quelles sont les coordonnées possibles du point A_1 ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que A_n admette pour coordonnées (0,5 ; 1). Calculer les coordonnées possibles de A_{n+1}.

Objectif Tracer la fougère de Barnsley en utilisant une des deux méthodes.

LABO PYTHON

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 1 PYTHON

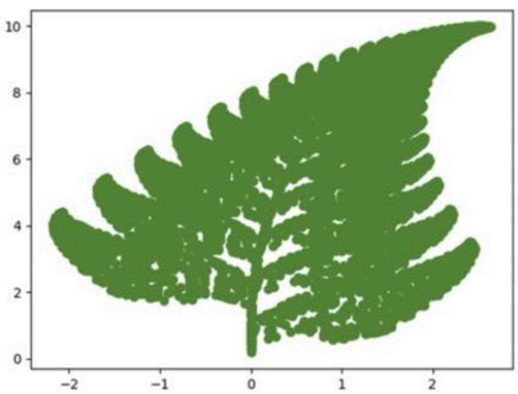
Télécharger le programme Python de cette construction sur LLS.fr/FougerePython.

1. a. Expliquer les lignes 4 et 18 du programme : quel rôle jouent-elles ?

b. Compléter la ligne 17 du programme.

2. Compléter les lignes 26, 28 et 30 du programme Python.

3. Utiliser le programme Python pour tracer la fougère de Barnsley pour 400, 10 000, puis 100 000 points.



MÉTHODE DE RÉSOLUTION 2 GEOGEBRA

Télécharger le fichier GeoGebra de cette construction sur LLS.fr/FougereGeoGebra.

1. Ouvrir la fenêtre tableur de ce fichier GeoGebra, puis entrer en **D4** une formule permettant d'obtenir un nombre aléatoire compris entre 0 et 1.

2. Expliquer les formules = A4(1,1) et = A4(2,1) entrées en **B4** et **C4** : que permettent-elles de faire ? À quoi correspondent (1,1) et (2,1) dans ces formules ?

3. Compléter la formule inscrite en **A5** de manière à ce qu'elle contienne les coordonnées du point A_1.

4. Copier vers le bas les formules entrées en **A5**, **B4**, **C4** et **D4** de manière à faire apparaître dans la colonne **B** les abscisses et dans la colonne **C** les ordonnées des 400 premiers points A_n de la suite.

5. Sélectionner la plage contenant ces deux coordonnées, faire un clic droit, puis sélectionner **Créer** et enfin l'outil **Liste de points**, pour afficher la fougère de Barnsley dans la fenêtre graphique.

2 Le pivot de Gauss

LABO PYTHON

Le pivot de Gauss est un processus permettant de déterminer l'inverse d'une matrice inversible. Ce processus s'effectue par étapes, chaque étape consistant en l'une des opérations suivantes :

- échanger entre elles deux lignes de la matrice ;
- multiplier une ligne de la matrice par un nombre réel non nul ;
- ajouter ou soustraire deux lignes de la matrice (éventuellement multipliées par des réels non nuls).

L'objectif du pivot de Gauss est d'obtenir, à la fin du processus, la matrice identité.

$$\begin{pmatrix}2&3\\1&5\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Inverser la première et deuxième ligne}} \begin{pmatrix}1&5\\2&3\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Soustraire deux fois la première ligne à la deuxième}} \begin{pmatrix}1&5\\0&-7\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Multiplier la deuxième ligne par } \frac{-1}{7}} \begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Soustraire cinq fois la deuxième ligne à la première}} \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Pour obtenir l'inverse de la matrice, il suffit alors d'appliquer les mêmes opérations dans le même ordre à la matrice identité.

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Inverser la première et deuxième ligne}} \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Soustraire deux fois la première ligne à la deuxième}} \begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Multiplier la deuxième ligne par } \frac{-1}{7}} \begin{pmatrix}0&1\\\frac{-1}{7}&\frac{2}{7}\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Soustraire cinq fois la deuxième ligne à la première}} \begin{pmatrix}\frac{5}{7}&\frac{-3}{7}\\\frac{-1}{7}&\frac{2}{7}\end{pmatrix}$$

Il n'y a pas unicité dans l'enchaînement des opérations.

Questions préliminaires :

1. À l'aide du pivot de Gauss, déterminer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix}3&9\\1&2\end{pmatrix}$.

2. Que se passe-t-il lorsqu'on essaye d'appliquer le pivot de Gauss sur la matrice $\begin{pmatrix}1&3\\2&6\end{pmatrix}$? Quelle explication peut-on donner à ce résultat ?

Objectif **Utiliser le pivot de Gauss pour déterminer l'inverse d'une matrice de taille 3×3 inversible.**

En Python, une matrice peut s'écrire sous la forme d'une liste de listes. Par exemple, en Python, la matrice $\begin{pmatrix}3&9\\1&2\end{pmatrix}$ peut s'écrire **[[3,9],[1,2]]**.

Dans les prochaines questions, on va programmer les opérations élémentaires pouvant être utilisées dans l'algorithme du pivot de Gauss.

1. Écrire une fonction Python **echange_ligne** permettant d'échanger deux lignes données d'une matrice carrée.

2. Écrire une fonction Python **multiplication_reel** permettant de multiplier une ligne donnée de la matrice par un réel non nul saisi en argument.

3. Écrire une fonction Python **combinaison_lineaire** qui remplace une ligne de la matrice par une combinaison linéaire de cette ligne et d'une autre.

4. Télécharger l'algorithme du pivot de Gauss pour une matrice 3×3 sur LLS.fr/PivotGauss et utiliser cet algorithme pour déterminer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\5&6&0\end{pmatrix}$.

Remarque : Cette méthode d'inversion est en réalité bien antérieure à Gauss. Elle est notamment référencée dans le huitième chapitre du livre chinois *Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique*, dont l'écriture est estimée au 1er siècle avant J.-C. (voir l'activité B sur l'histoire des mathématiques p. 173).

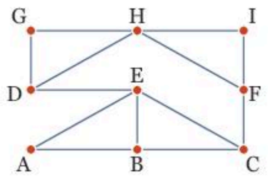
À L'ORAL

15 Calculer $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -7 & 12 \end{pmatrix}$.

16 Calculer $\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

17 Calculer $\begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

18 Le graphe ci-dessous est-il complet ? Connexe ?



19 On considère un graphe dont les sommets sont numérotés de 1 à 4 et dont la matrice d'adjacence M est écrite en suivant l'ordre croissant des sommets.

On admet que $M^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \\ 8 & 1 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

Donner le nombre de chemins de longueur 5 reliant le sommet 1 au sommet 3.

Opérations sur les matrices

20 On donne $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$.

Calculer $A + B$; $A - B$; $2A$; $3B$ et $-2A + 3B$.

21 On donne $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0{,}5 & -1{,}5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 7 & 2{,}5 & -3 \\ -8 & 2 & -0{,}5 \end{pmatrix}$.

Calculer $A + B$; $A - B$; $-2A$; $3B$ et $2A - 3B$.

22 Calculer les produits suivants.

1. $\begin{pmatrix} 1{,}5 & 3 \\ -2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1{,}5 & 3 \\ -2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

23 On considère les matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Parmi les produits suivants, indiquer ceux qui sont bien définis puis indiquer, le cas échéant, le format de la matrice obtenue :

$A \times B$; $A \times C$; $B \times A$; $B \times C$; $C \times A$; $C \times B$; A^2 ; C^2 et $A \times (B \times C)$.

2. Calculer ces produits lorsqu'ils sont définis.

24 Soit M la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2, M^3 et M^4.

2. Conjecturer, pour tout entier naturel non nul n, une expression de M^n.

3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

25 Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2, M^3 et M^4.

2. Conjecturer, pour tout entier $n \geqslant 3$, une expression de M^n.

3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Matrice inversible et résolution de systèmes

26 Dans chaque cas, vérifier que les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

27 La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

28 On considère le système suivant : $\begin{cases} 2x + 5y = 13 \\ -3x - 8y = 11 \end{cases}$.

1. Déterminer les matrices A et B telles que le système s'écrit sous forme matricielle $AX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

2. Résoudre ce système.

29 On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ -3x + 2y + z = 3 \\ x - 3y + 2z = -4 \end{cases}.$$

1. Déterminer les matrices A et B telles que le système s'écrit sous forme matricielle $AX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

2. Résoudre le système.

Transformation du plan

30 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Rappeler la matrice associée à une symétrie axiale par rapport à chacun des axes du repère.

2. Déterminer la matrice associée à la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

3. Déterminer la matrice associée à l'homothétie de centre O et de rapport -4.

31 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

On note r la rotation de centre O et d'angle π, s_1 la symétrie par rapport à l'axe des abscisses et s_2 la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

1. Déterminer la matrice R associée à r.

2. a. Déterminer $A' = r(A)$ et $B' = r(B)$ où A est le point de coordonnées $(-2\,;3)$ et B le point de coordonnées $(4\,;1)$.

b. Placer les points A, A′, B et B′ dans le repère.

3. a. Vérifier graphiquement que $s_1(s_2(A)) = A'$ et que $s_1(s_2(B)) = B'$.

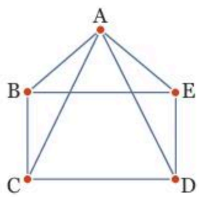
b. Démontrer ce résultat à l'aide d'un calcul matriciel.

Graphes

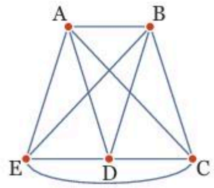
Pour les exercices **32** *à* **35**

On considère les graphes suivants.

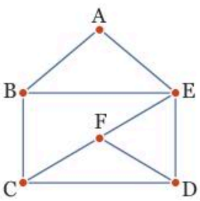
a.



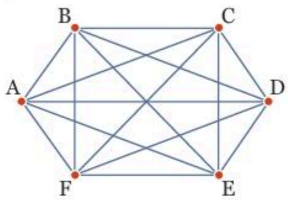
b.



c.



d.



32 Pour chaque graphe, donner son ordre et le degré de chaque sommet.

33 Justifier que les graphes sont connexes.

34 **1.** Reproduire et modifier le graphe **a.** pour qu'il ne soit plus connexe.

2. Reproduire et modifier le graphe **c.** pour qu'il soit complet.

35 **1.** Dans le graphe **d.**, quelle est la longueur de la chaîne $C-E-B-A-F-A-C$?

2. Déterminer dans ce graphe deux chaînes de longueur 3 et une chaîne de longueur 7.

3. Déterminer dans ce graphe une chaîne de longueur 4 reliant B à A.

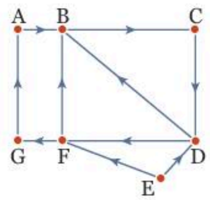
Matrice d'adjacence

36 Construire un graphe composé des sommets A, B, C, D et E, dont la matrice d'adjacence obtenue en classant les sommets dans l'ordre alphabétique est :

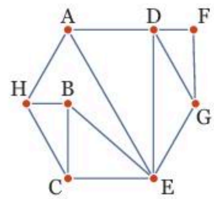
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

37 Déterminer la matrice d'adjacence de chacun des graphes suivants (on rangera les sommets dans l'ordre alphabétique).

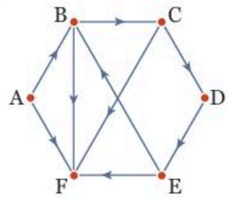
1.



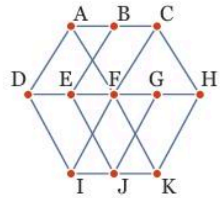
2.



3.



4.



38 On considère un graphe dont la matrice d'adjacence obtenue en numérotant les sommets de 1 à 5 est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. En justifiant, donner le nombre de chaînes de longueur 2 reliant les sommets n°3 et n°5.

2. En justifiant, donner le nombre de chaînes de longueur 2 reliant les sommets n°1 et n°4.

39 On considère un graphe dont la matrice d'adjacence obtenue en numérotant les sommets de 1 à 5 est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. En justifiant, donner le nombre de chemins de longueur 3 reliant le sommet n°2 au sommet n°5.

2. En justifiant, donner le nombre de chemins de longueur 3 reliant le sommet n°1 au sommet n°3.

DIFFÉRENCIATION

Parcours 1 : exercices **44** ; **48** ; **51** ; **55** ; **71** ; **76** et **86**
Parcours 2 : exercices **47** ; **50** ; **54** ; **57** ; **75** ; **81** et **83**
Parcours 3 : exercices **53** ; **62** ; **63** ; **65** ; **73** et **84**

1 Notion de matrice

Exercices FLASH

40 1. Écrire le système suivant sous forme matricielle : $\begin{cases} 5x+3y+4z = -2 \\ 2x+3y+z = -2. \\ x+y+z = -2 \end{cases}$

2. Résoudre le système.

41 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

42 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

43 [Modéliser.]

Une agence de voyage réserve des vols vers trois destinations (la Guadeloupe, la Martinique et la Réunion) auprès de deux compagnies aériennes (Air Tourterelle et Air Pigeon).

Le nombre de passagers pour la première semaine d'octobre est donné par la matrice $P_1 = \begin{pmatrix} 180 & 120 & 70 \\ 220 & 105 & 90 \end{pmatrix}$.

Les deux lignes correspondent respectivement aux fréquentations des vols d'Air Tourterelle et d'Air Pigeon alors que les trois colonnes correspondent respectivement aux vols en direction de la Guadeloupe, de la Martinique et de la Réunion.

1. Que représente le coefficient 105 de la matrice P_1 ?
2. Pour la deuxième semaine d'octobre, la fréquentation diminue de quinze passagers pour chaque vol.

a. Écrire la matrice P_2 correspondante.

b. Calculer $P_1 + P_2$. À quoi cette matrice correspond-elle ?

3. Pour la troisième semaine d'octobre, la fréquentation augmente de 10 % pour chaque vol par rapport à la deuxième semaine.
Écrire la matrice P_3 correspondante (on arrondira au besoin les coefficients à l'unité inférieure).
4. Avec les vacances d'automne, la fréquentation des vols d'Air Tourterelle augmente de 20 % et celle d'Air Pigeon de 25 % par rapport à la troisième semaine.
Écrire la matrice P_4 correspondante en arrondissant à l'unité inférieure.
5. a. Déterminer la matrice P correspondant au total de passagers pour chaque vol sur l'ensemble du mois d'octobre.

b. Durant les quatre premières semaines du mois d'octobre, combien compte-t-on de passagers ayant voyagé en Guadeloupe avec la compagnie Air Tourterelle ? Avec Air Pigeon ?

44 [Modéliser.]

Un lycée commande régulièrement des feutres pour tableau blanc au prix de 0,90 € l'unité, des ramettes de 500 feuilles A4 à 4 € l'unité, des ramettes de feuilles A3 à 9 € l'unité et des enveloppes à 11,50 € le lot de 500.

On définit la matrice colonne $P = \begin{pmatrix} 0{,}90 \\ 4 \\ 9 \\ 11{,}50 \end{pmatrix}$ qui donne le prix de ces fournitures.

1. Pour la rentrée, le lycée Jean Jaurès commande 750 feutres, 50 ramettes de feuilles A4, 30 ramettes de feuilles A3 et 2 000 enveloppes.

a. Traduire ces quantités par une matrice ligne Q.

b. Quel produit doit-on effectuer pour calculer le coût total de la commande ?

2. Le fournisseur reçoit les commandes de trois lycées : Jean Jaurès, Léonard de Vinci et Jean Lurçat.
Les quantités commandées sont respectivement données par la matrice $R = \begin{pmatrix} 750 & 50 & 30 & 4 \\ 1\,000 & 80 & 40 & 8 \\ 1\,500 & 100 & 80 & 12 \end{pmatrix}$.

a. À quoi le coefficient 1 000 correspond-il ? Interpréter également le coefficient 100.

b. Calculer, à l'aide d'un produit matriciel, la facture pour chacun des lycées.

45 [Calculer.]

Trouver les coefficients manquants.

1. $\begin{pmatrix} -1 & ? & 7 \\ ? & 5 & -2 \\ 4 & -6 & ? \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ? & 2 & 5 \\ -5 & 3 & ? \\ -7 & ? & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 12 \\ -10 & 8 & 12 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -2 & ? & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ ? \\ 20 \end{pmatrix}$

46 [Calculer.]

Soient a et b deux réels et $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$.

1. Quelle relation existe-t-il entre a et b lorsque A n'est pas inversible ?
2. Déterminer a et b tels que $\begin{cases} \text{A soit inversible} \\ A^{-1} = A \end{cases}$.

47 [Raisonner.]

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et prouver que $A^3=-I_2$.

2. Exprimer, pour tout entier naturel n, A^{3n}, A^{3n+1} et A^{3n+2} en fonction de n.

48 [Raisonner.]

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

1. Calculer $A\times B$ et $A\times C$.

2. En déduire que A n'est pas inversible.

49 [Calculer.]

1. On définit la matrice $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{pmatrix}$.

a. Justifier que la matrice A est inversible.

b. Déterminer les coefficients a, b, c et d de la matrice $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

2. En déduire une écriture matricielle et une solution des systèmes suivants.

a. $\begin{cases}3x+4y = 2\\ 5x+7y = 4\end{cases}$ **b.** $\begin{cases}7x-4y = -21\\ -5x+3y = 11\end{cases}$

50 [Calculer.]

1. Vérifier que les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 2 & -3 & -2\\ -2 & 4 & 3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre.

2. En déduire une écriture matricielle et une solution des systèmes suivants.

a. $\begin{cases}x-2y-2z = 4\\ 2x-3y-2z = 5\\ -2x+4y+3z = -3\end{cases}$ **b.** $\begin{cases}x+2y+2z = -7\\ 2x+y+2z = 12\\ -2x-z = 9\end{cases}$

51 [Modéliser.]

Pour le cross des élèves de première, un lycée a commandé 120 bouteilles d'eau et 180 paquets de biscuits pour la somme de 238,80 €.

Pour le cross des élèves de terminale, l'établissement a commandé 100 bouteilles d'eau et 190 paquets de biscuits pour un total de 238,20 €.

1. Modéliser cette situation sous forme d'un système (S) de deux équations à deux inconnues x et y correspondant respectivement au prix d'une bouteille d'eau et à celui d'un paquet de biscuits.

2. Déterminer les matrices A, X et B telles que le système (S) s'écrit sous forme matricielle $AX=B$.

3. Résoudre le système à l'aide de la calculatrice. Interpréter la solution.

52 [Modéliser.]

Lors d'un concours d'admission à une école d'enseignement supérieur, quatre étudiants ont obtenu les résultats suivants.

	Français	Maths	Anglais	Culture générale	TOTAL coefficienté
Albert	10	8	15	16	211
Betty	17	12	7	11	208
Charles	8	15	9	13	206
Diane	12	7	14	10	190

Ils souhaitent connaître les coefficients attribués à chaque matière.

On note respectivement a, b, c et d les coefficients de français, mathématiques, anglais et culture générale.

1. Écrire un système de quatre équations d'inconnues a, b, c et d qui traduit ce problème.

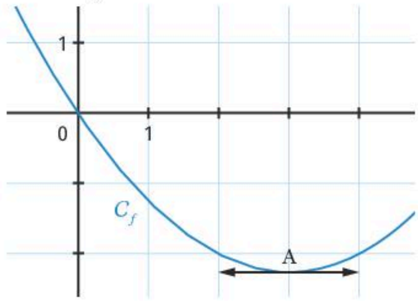
2. Donner une écriture matricielle de ce système sous la forme $AX=B$ en explicitant les matrices A, X et B.

3. Résoudre le système et interpréter les solutions.

53 [Représenter.]

On se place dans un repère orthonormé.

On cherche à déterminer la fonction f dont la courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.



On admet que f est une fonction du second degré de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$.

Le but de l'exercice est donc de déterminer les coefficients a, b et c.

On sait que C_f passe par l'origine du repère et par le point A de coordonnées $(3\,;-2{,}25)$ où la tangente à C_f est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Traduire ces informations par trois équations d'inconnues a, b et c.

2. En déduire un système (S) de deux équations à deux inconnues a et b.

3. Déterminer les matrices A, X et B pour lesquelles (S) équivaut à $AX=B$

4. Résoudre ce système et trouver l'expression de f.

54 [Modéliser.]

Une société fabrique et vend une quantité x d'objets, exprimée en milliers.

Le coût de fabrication, exprimé en milliers d'euros, de x milliers d'objets est donné par $\mathrm{C}(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres réels qu'on souhaite déterminer.

On sait que le coût de fabrication de 4 000 objets s'élève à 63 000 €, que celui de 10 000 objets est de 165 000 €, et que celui de 20 000 objets vaut 415 000 €.

1. Justifier que les informations sur C peuvent se traduire sous la forme du système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\begin{cases} 16a + 4b + c = 63 \\ 100a + 10b + c = 165 \\ 400a + 20b + c = 415 \end{cases}$$

2. Montrer que le système obtenu s'écrit sous la forme $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$, où $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et A et B sont deux matrices à préciser.

3. À l'aide d'un calcul matriciel et de la calculatrice, déterminer a, b et c. En déduire une expression de $\mathrm{C}(x)$.

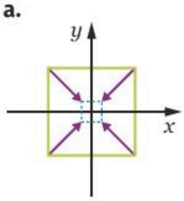
4. Déterminer alors le coût de fabrication de 30 000 objets.

55 [Représenter.]

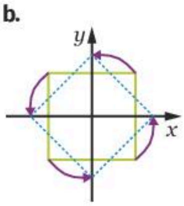
À chaque matrice de transformation T, associer la transformation correspondante, sachant que le carré bleu est l'image du carré vert par cette transformation.

1. $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

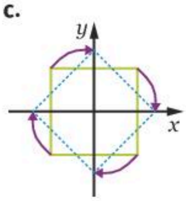
a.



b.

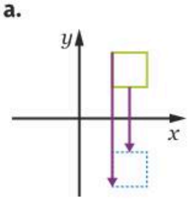


c.

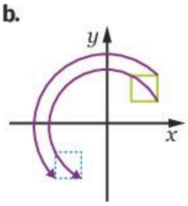


2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

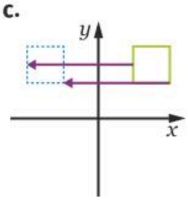
a.



b.



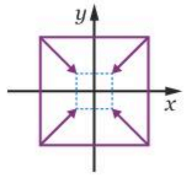
c.



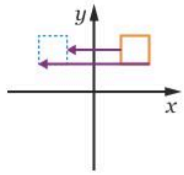
56 [Représenter.]

Pour chacune des transformations planes ci-dessous, écrire la matrice de transformation correspondante.

1. Le carré bleu est obtenu suite à l'homothétie de centre l'origine du repère et de rapport $\frac{1}{3}$.

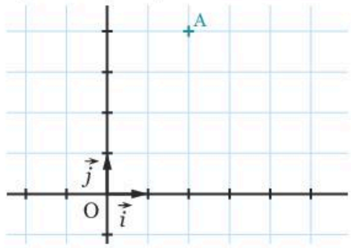


2. Le carré bleu est le symétrique du carré orange par rapport à l'axe des ordonnées.



57 [Représenter.]

On considère, dans le repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$, le point $\mathrm{A}(2\,;4)$.



1. a. Placer dans le repère ci-dessus le point A′, symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées. Déterminer graphiquement ses coordonnées.

b. Retrouver les coordonnées de A′ à l'aide d'un calcul matriciel.

2. Soit A″ l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Déterminer les coordonnées de A″ à l'aide d'un calcul matriciel.

3. On considère le point $\mathrm{C}(3\,;1)$.

a. Déterminer par le calcul les coordonnées de C′, image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

AIDE

On pourra commencer par travailler dans le repère $\left(\mathrm{A}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

b. Placer le point C′ dans le repère ci-dessus et vérifier la cohérence du résultat obtenu.

58 [Raisonner.] DÉMO

Soient A, B et C trois matrices de même taille. Démontrer les propriétés suivantes :

1. $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{B} + \mathrm{A}$ (commutativité).

2. $\mathrm{A} + (\mathrm{B} + \mathrm{C}) = (\mathrm{A} + \mathrm{B}) + \mathrm{C}$ (associativité).

59 [Raisonner.] DÉMO

Soient M et M' deux matrices de même taille.
Soient α et β sont deux nombres réels.
Démontrer les propriétés suivantes :

1. $1 \times \mathrm{M} = \mathrm{M}$

2. $(\alpha+\beta)\mathrm{M} = \alpha\mathrm{M} + \beta\mathrm{M}$

3. $\alpha(\mathrm{M}+\mathrm{M}') = \alpha\mathrm{M} + \alpha\mathrm{M}'$

60 [Raisonner.] DÉMO

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 où a, b, c et d sont quatre nombres réels. On note $\det(\mathrm{A}) = ad - bc$ son déterminant et on considère la matrice carrée B définie par $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

On cherche à démontrer l'équivalence : A est inversible si, et seulement si, $\det(\mathrm{A}) \neq 0$.

Question préliminaire : Calculer $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ et $\mathrm{B} \times \mathrm{A}$.

Partie A : Implication réciproque

On suppose que $\det(\mathrm{A}) \neq 0$. Justifier que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.

Partie B : Implication directe

On cherche maintenant à démontrer que si A est inversible, alors $\det(\mathrm{A}) \neq 0$. Cela revient à démontrer la contraposée : si $\det(\mathrm{A}) = 0$, alors A n'est pas inversible. On suppose donc que $\det(\mathrm{A}) = 0$ et, par l'absurde, que A est inversible.

1. Justifier que l'on peut alors écrire $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1} \times \mathrm{A} \times \mathrm{B}$.

2. En calculant le produit $\mathrm{A}^{-1} \times (\mathrm{A} \times \mathrm{B})$ de deux manières différentes, démontrer que $\mathrm{B} = 0_2$.

3. Quelles sont alors les valeurs de a, b, c et d ?

4. Déterminer alors la matrice A. Est-elle inversible ?

5. Conclure.

61 [Raisonner.]

Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n.
Montrer qu'il existe une unique matrice inverse de A.

62 [Raisonner.]

Soit n un entier naturel non nul.
Soient $\mathrm{D} = \mathrm{Diag}(d_1\,;\,\dots\,;\,d_n)$ et $\mathrm{D}' = \mathrm{Diag}(d'_1\,;\,\dots\,;\,d'_n)$ deux matrices diagonales d'ordre n.

1. a. Calculer DD' et $\mathrm{D}'\mathrm{D}$.

b. On suppose que tous les coefficients diagonaux de D sont non nuls. Montrer alors que D est inversible et déterminer son inverse.

2. Montrer que si D est inversible, alors tous ses éléments diagonaux sont non nuls (on pourra raisonner par l'absurde).

63 [Calculer.]

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On considère la matrice carrée J_n d'ordre n formée uniquement de 1.

1. Exprimer J_n^2 en fonction de n et de J_n.

2. En déduire que J_n n'est pas inversible.

64 VRAI / FAUX

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (si la réponse est fausse, donner un contre-exemple) :

1. Pour toutes matrices A et B, $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ existe.

2. Pour toute matrice carrée A d'ordre n, $\mathrm{A} \times 0_n = \mathrm{A}$.

3. Pour toute matrice carrée A d'ordre n, $\mathrm{A} \times \mathrm{I}_n = \mathrm{A}$.

4. Pour toutes matrices carrées A et B d'ordre n, $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \times \mathrm{A}$.

65 [Calculer.]

Soient A et B deux matrices carrées non nulles d'ordre n telles que $\mathrm{A}+\mathrm{B} = \mathrm{I}_n$.
Soit M une matrice carrée d'ordre n telle qu'il existe deux réels non nuls et distincts λ et μ tels que :

$$\mathrm{M} = \lambda\mathrm{A} + \mu\mathrm{B} \text{ et } \mathrm{M}^2 = \lambda^2\mathrm{A} + \mu^2\mathrm{B}.$$

1. a. Montrer que :

$$(\mathrm{M} - \lambda\mathrm{I}_n)(\mathrm{M} - \mu\mathrm{I}_n) = (\mathrm{M} - \mu\mathrm{I}_n)(\mathrm{M} - \lambda\mathrm{I}_n) = 0_n.$$

b. En déduire que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = 0_n$ et que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ et $\mathrm{B}^2 = \mathrm{B}$.

2. Démontrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{M}^p = \lambda^p\mathrm{A} + \mu^p\mathrm{B}.$$

3. Application :

Soient $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 8 & -18 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer λ et μ tels que $\mathrm{M} = \lambda\mathrm{A} + \mu\mathrm{B}$ et $\mathrm{M}^2 = \lambda^2\mathrm{A} + \mu^2\mathrm{B}$.

b. En déduire M^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

66 [Calculer.]

1. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\mathrm{A}^2 = \alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{I}_3.$$

b. En déduire que la matrice A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3.

c. Déterminer la matrice A^{-1}.

2. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer $(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3)^3$.

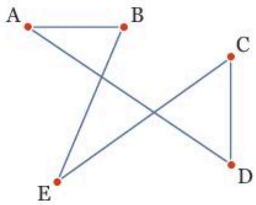
b. En déduire que A est inversible et préciser A^{-1}.

2 Les graphes

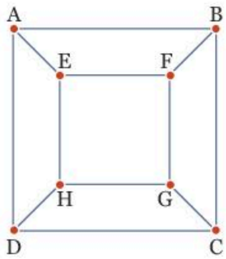
Exercices FLASH

67 Construire un graphe d'ordre 5 possédant un sommet de degré 1, un sommet de degré 3 et tel que tous ses autres sommets soient de degré pair.

68 Ajouter autant d'arêtes que nécessaire pour que le graphe ci-contre soit complet.



69 Quelle est la longueur de la plus petite chaîne passant par tous les sommets du graphe ci-dessous et revenant au sommet de départ ?



70 [Raisonner.]

Soit n un entier naturel non nul. Justifier que si un graphe simple d'ordre n (c'est-à-dire un graphe ayant au plus une arête entre deux sommets et sans boucle) est complet, alors chaque sommet est de degré $n-1$.

71 [Modéliser.]

Pour se rendre de Paris à New York en avion, un voyageur a plusieurs choix de vols parmi lesquels on trouve :

→ des **vols directs**
- Paris - New York

→ des **vols avec une escale**
- Paris - Londres - New York
- Paris - Zurich - New York
- Paris - Lisbonne - New York
- Paris - Boston - New York

→ des **vols avec deux escales**
- Paris - Zurich - Toronto - New York
- Paris - Zurich - Montréal - New York
- Paris - Montréal - Ottawa - New York
- Paris - Madrid - Londres - New York

Représenter ces différents vols sur un graphe orienté, dont les sommets seront les villes par lesquelles transite le voyageur.

72 [Modéliser.]

À la fin de la seconde, un élève orienté en première générale a le choix de suivre ou non l'enseignement de spécialité mathématiques.

Un élève n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité en première peut suivre l'enseignement facultatif mathématiques complémentaires en terminale.

Un élève ayant suivi l'enseignement de spécialité en première peut l'abandonner et ne plus faire de mathématiques, l'abandonner et suivre l'enseignement facultatif mathématiques complémentaires ou le poursuivre en terminale.

S'il poursuit l'enseignement de spécialité en terminale, il peut choisir de suivre l'enseignement facultatif mathématiques expertes.

Représenter les différents parcours en mathématiques possibles d'un lycéen par un graphe, dont les sommets seront les différents enseignements possibles.

73 [Raisonner.]

1. Montrer que la somme des degrés des sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes.

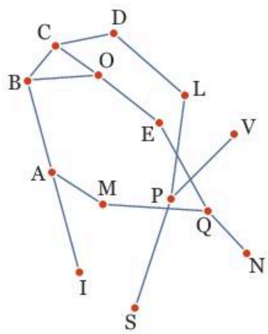
2. a. Un octogone et toutes ses diagonales forment un graphe. Quel est le nombre d'arêtes de ce graphe ?

b. Qu'en est-il si l'on considère un polygone qui a 1000 côtés ?

3. Un club d'échecs souhaite organiser un tournoi pour quinze joueurs. Lors des phases de sélection, on souhaite que chaque joueur en affronte cinq autres. Est-ce possible ?

74 [Modéliserer.]

Le graphe ci-contre représente les autoroutes entre les principales villes de la région Hauts-de-France : Abbeville (A), Boulogne-sur-Mer (B), Calais (C), Dunkerque (D), Lens (E), Beauvais (I), Lille (L), Amiens (M), Laon (N), Saint-Omer (O), Péronne (P), Saint-Quentin (Q), Senlis (S) et Valenciennes (V).



1. Quel est l'ordre de ce graphe ?

2. a. Quels sont les sommets de plus haut degré ?

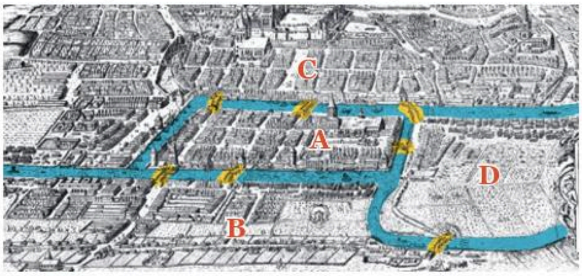
b. Quels sont les sommets de plus petit degré ?

3. Les sommets L et E sont-ils adjacents ?

4. Ce graphe est-il complet ? Justifier.

75 [Représenter.]

L'illustration ci-dessous représente la ville de Königsberg au XVIII[e] siècle et ses sept ponts.



En se trouvant dans l'un des quartiers A, B, C ou D, on peut accéder à un autre quartier en empruntant l'un des ponts.

1. Représenter la situation par un graphe.

2. Ce graphe est-il complet ? Justifier.

3. Ce graphe est-il connexe ? Justifier.

Histoire des maths

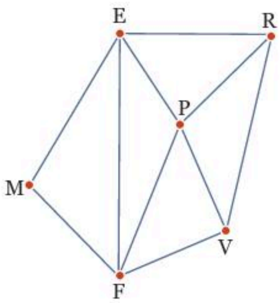
C'est Euler qui, en 1759, rapporte cette configuration et le problème suivant : « Peut-on arranger son parcours de telle sorte que l'on passe sur chaque pont, et que l'on ne puisse y passer qu'une seule fois ? ». Il étudie le problème en toute généralité et montre qu'il n'a, dans ce cas, pas de solution.

76 [Chercher.]

D'après bac ES, Centres étrangers, juin 2019

Un restaurateur se fournit auprès de cinq producteurs locaux.

Le graphe ci-contre représente la situation géographique du restaurateur et de ses fournisseurs, les arêtes correspondant au réseau routier et les sommets aux producteurs : éleveur (E), fromager (F), maraîcher (M), pisciculteur (P), restaurateur (R) et vigneron (V).



1. Quel est l'ordre de ce graphe ?

2. a. Quel est le degré du sommet P ?

b. Citer un sommet de degré inférieur ou égal à 3.

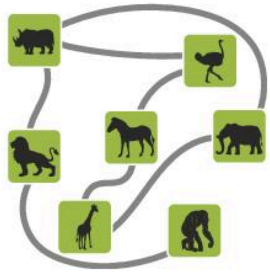
c. Citer deux sommets de degré impair.

3. Citer deux sommets adjacents et deux sommets qui ne sont pas adjacents.

4. Ce graphe est-il complet ? Justifier.

77 [Modéliser.]

Le plan d'un parc zoologique est donné ci-dessous.



1. Modéliser le plan du parc zoologique par un graphe.

2. Quel est l'ordre de ce graphe ?

3. Quels est le sommet de plus petit degré ?

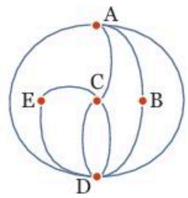
4. Ce graphe est-il complet ? Justifier.

5. Ce graphe est-il connexe ? Justifier.

3 Application du calcul matriciel aux graphes

Exercices FLASH

78 Déterminer la valeur des entiers a, b, c et d pour que la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d & 1 \\ a & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & c & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ corresponde à la matrice d'adjacence du graphe ci-dessous en classant les sommets dans l'ordre alphabétique.



79 On considère un graphe dont la matrice d'adjacence $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est obtenue en classant les sommets dans l'ordre croissant.

1. Déterminer le nombre de chaînes de longueur 2 reliant les sommets 2 et 3.

2. Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3.

80 [Calculer.]

On considère un graphe dont la matrice d'adjacence, obtenue en rangeant les sommets dans l'ordre croissant, est notée M.

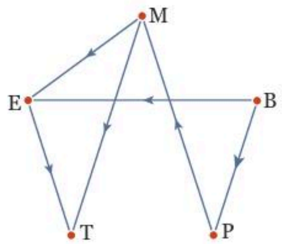
On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 2 & 13 \\ 13 & 13 & 4 & 16 \\ 18 & 11 & 9 & 14 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer le nombre de chemins de longueur 6 reliant le sommet 2 au sommet 3.

81 [Représenter.]

D'après bac ES, Métropole, juin 2018

Un parcours sportif est composé d'un banc pour abdominaux (B), d'un mur d'escalade (M), d'une poutre d'équilibre (P), d'un tunnel (T) et d'une échelle suspendue (E). Le graphe ci-contre indique les différents parcours envisageables.



1. Est-il possible de suivre un parcours en passant par toutes les étapes ?

2. Déterminer la matrice d'adjacence M de ce graphe où les sommets sont classés dans l'ordre alphabétique.

3. Déterminer M^3 puis en déduire le nombre de chemins de longueur 3 reliant B à E.

4. Le responsable souhaite ajouter une barre de traction notée Z. De nouveaux sentiers sont construits et de nouveaux parcours sont alors possibles.

La matrice d'adjacence N, associée au graphe représentant les nouveaux parcours, dans laquelle les sommets sont classés par ordre alphabétique est :

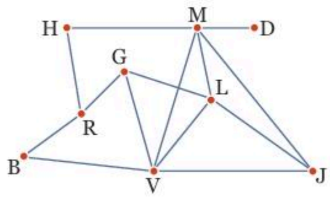
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Compléter le graphe précédent en ajoutant les arêtes nécessaires pour que le graphe obtenu corresponde à la matrice N.

82 [Représenter.]

D'après bac ES, Amérique du Nord, juin 2017

Le graphe ci-dessous représente les principaux sites touristiques de l'Islande.



B : Le lagon bleu	H : Rocher Hvitserkur
M : Lac de Mývatn	D : Chute d'eau de Dettifoss
G : Geyser de Geysir	L : Massif du Landmannalaugar
R : Capitale Reykjavik	V : Ville de Vik
J : Lagune glacière de Jökulsárlón	

1. Quel est l'ordre de ce graphe ? Justifier.

2. Ce graphe est-il complet ? Justifier.

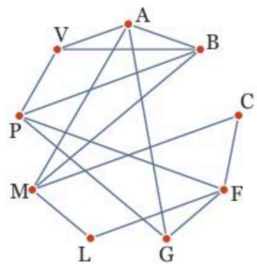
3. Ce graphe est-il connexe ? Justifier.

4. Déterminer la matrice d'adjacence de ce graphe (les sommets seront classés dans l'ordre alphabétique).

83 [Chercher.]

D'après bac ES, Asie, juin 2019

Une compagnie ferroviaire a représenté à l'aide d'un graphe les différentes liaisons assurées par ses trains. Les sommets du graphe sont les initiales des gares desservies et les arêtes correspondent aux trajets effectués par un train de cette compagnie entre deux gares.



Par exemple, l'arête entre A et G signifie qu'un train effectue la liaison entre les gares A et G, en partant de A vers G ou en partant de G vers A.

1. Le graphe est-il complet ? Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

2. On note M la matrice d'adjacence du graphe ci-dessus en classant les sommets par ordre alphabétique. Déterminer M.

3. La compagnie souhaite qu'un train partant de la gare F effectue trois trajets avant d'arriver à la gare B.

Déterminer le nombre de trajets possibles.

84 [Raisonner.] DÉMO

Soit $M = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ la matrice

d'adjacence d'un graphe d'ordre n, dont les sommets sont numérotés de 1 à n et soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On souhaite démontrer par récurrence sur k que le terme de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de la matrice M^k correspond au nombre de chaînes de longueur k reliant le sommet i au sommet j.

1. Vérifier que la propriété est vraie au rang $k=1$.

2. Soit un entier $p \geqslant 1$ tel que le coefficient situé à la i-ième ligne et à la j-ième colonne de M^p corresponde au nombre de chaînes de longueur p reliant le sommet i au sommet j.

Notons $\mathrm{M}^p = (b_{i,j}) = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix}$

et $\mathrm{M}^{p+1} = (c_{i,j}) = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & \dots & \dots & c_{n,n} \end{pmatrix}$.

a. Pour tous entiers naturels i et j compris entre 1 et n, justifier que $c_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} b_{i,\ell} a_{\ell,j}$.

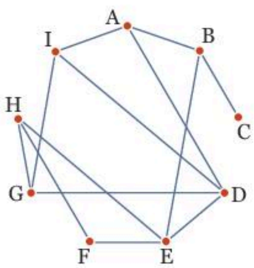
b. Interpréter $b_{i,\ell}$ et $a_{\ell,j}$ en termes de nombre de chaînes.

c. En déduire que $c_{i,j}$ est le nombre de chaînes de longueur $p+1$ reliant les sommets i et j.

3. Conclure.

85 [Représenter.]

Les différentes salles d'un château ont été nommées A, B, C, D, E, F, G, H et I afin de permettre aux visiteurs de se repérer sur le plan.



1. Le graphe ci-contre donne les parcours possibles d'un visiteur dans ce château.

Déterminer la matrice d'adjacence M de ce graphe (les sommets seront classés dans l'ordre alphabétique).

2. On donne $\mathrm{M}^4 = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 6 & 11 & 20 & 5 & 18 & 5 & 12 \\ 3 & 16 & 0 & 19 & 3 & 8 & 4 & 12 & 11 \\ 6 & 0 & 3 & 1 & 7 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 11 & 19 & 1 & 31 & 9 & 11 & 12 & 19 & 20 \\ 20 & 3 & 7 & 9 & 28 & 9 & 20 & 9 & 12 \\ 5 & 8 & 1 & 11 & 9 & 9 & 8 & 9 & 6 \\ 18 & 4 & 4 & 12 & 20 & 8 & 20 & 6 & 12 \\ 5 & 12 & 1 & 19 & 9 & 9 & 6 & 17 & 12 \\ 12 & 11 & 2 & 20 & 12 & 6 & 12 & 12 & 18 \end{pmatrix}$.

a. Combien y-a-t-il de chaînes qui, en quatre étapes, partent de E et reviennent à E ?

b. Combien y-a-t-il de chaînes qui, en quatre étapes, partent de C et arrivent à I ? Les citer.

c. Est-il toujours possible de joindre en quatre étapes deux salles quelconques ? Justifier.

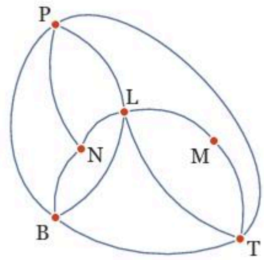
86 [Chercher.]

D'après bac ES, Polynésie, juin 2018

Un journaliste britannique d'une revue consacrée à l'automobile doit tester les autoroutes françaises.

Pour remplir sa mission, il décide de louer une voiture et de circuler entre six grandes villes françaises : Bordeaux (B), Lyon (L), Marseille (M), Nantes (N), Paris (P) et Toulouse (T).

Le réseau autoroutier reliant ces six villes est modélisé par le graphe ci-dessous sur lequel les sommets représentent les villes et les arêtes les liaisons autoroutières entre ces villes.



1. a. Quel est l'ordre du graphe ?

b. Le graphe est-il complet ? Justifier la réponse.

2. On nomme G la matrice d'adjacence du graphe (les villes étant classées dans l'ordre alphabétique).

On donne $\mathrm{G} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

et $\mathrm{G}^3 = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 5 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 12 & 8 & 11 & 13 & 12 \\ 5 & 8 & 2 & 5 & 5 & 7 \\ 10 & 11 & 5 & 6 & 10 & 7 \\ 11 & 13 & 5 & 10 & 10 & 12 \\ 12 & 12 & 7 & 7 & 12 & 8 \end{pmatrix}$.

a. Compléter la matrice d'adjacence G.

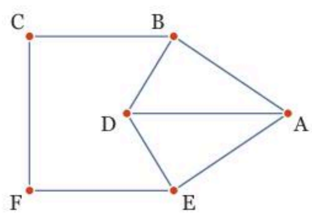
b. Alors qu'il se trouve à Paris, le rédacteur en chef demande au journaliste d'être à Marseille exactement trois jours plus tard pour assister à une course automobile. Le journaliste décide chaque jour de s'arrêter dans une ville différente.

Déterminer le nombre de trajets possibles respectant ces conditions.

87 [Chercher.]

On considère le graphe ci-dessous.

Déterminer le nombre de chaînes de longueur 4 reliant A à D.



88 [Calculer, Modéliser.]

D'après bac ES, Polynésie, juin 2015

Un constructeur de planches de surf fabrique trois modèles. La conception de chaque modèle nécessite le passage par trois postes de travail.

Le tableau 1 indique le nombre d'heures nécessaires par modèle et par poste pour réaliser les planches et le tableau 2 indique le coût horaire par poste de travail.

Tableau 1	Poste 1	Poste 2	Poste 3
Modèle 1	8 h	10 h	14 h
Modèle 2	6 h	6 h	10 h
Modèle 3	12 h	10 h	18 h

Tableau 2	
Poste 1	25 €/h
Poste 2	20 €/h
Poste 3	15 €/h

1. Soient H et C les deux matrices suivantes :

$$\mathrm{H}=\begin{pmatrix}8 & 10 & 14\\ 6 & 6 & 10\\ 12 & 10 & 18\end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{C}=\begin{pmatrix}25\\ 20\\ 15\end{pmatrix}.$$

a. Donner la matrice produit $\mathrm{P}=\mathrm{H}\times\mathrm{C}$.

b. Que représentent les coefficients de la matrice P ?

2. Après une étude de marché, le fabricant souhaite que les prix de revient par modèle soient les suivants :

- modèle 1 : 500 € ;
- modèle 2 : 350 € ;
- modèle 3 : 650 €.

Il cherche à déterminer les nouveaux coûts horaires par poste, notés a, b et c, permettant d'obtenir ces prix de revient.

a. Montrer que les réels a, b et c doivent être solutions du système $\mathrm{H}\times\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}500\\ 350\\ 650\end{pmatrix}$.

b. Déterminer les réels a, b et c.

Histoire des maths

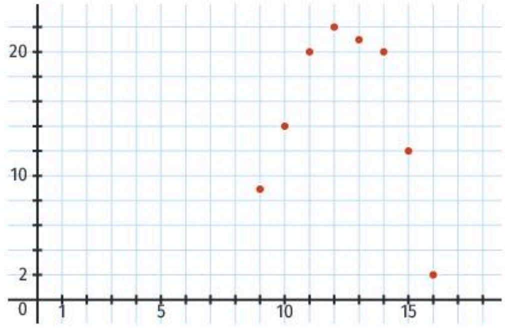
Le terme de matrice pour désigner un tableau de nombres est introduit par James Sylvester en 1850. Il est repris par Arthur Cayley qui en donne une première théorie, mais dans le cadre de problèmes géométriques très spécifiques. Il faudra attendre les années 1920-1930 pour qu'elle devienne une théorie intégratrice et l'un des fondements de ce qu'on appelle aujourd'hui l'algèbre linéaire.

89 APPROFONDISSEMENT [Modéliser, Représenter.]

D'après bac ES, Métropole, septembre 2016

Afin d'améliorer la qualité de ses services, un parc a réalisé une étude statistique pour relever la durée moyenne d'attente, en minute, à la billetterie en fonction de l'heure.

Cette mesure a eu lieu chaque heure de 9 h à 16 h. On obtient le relevé suivant.



Ainsi, à 10 h, il y avait 14 minutes d'attente.

On souhaite modéliser cette durée d'attente par une fonction qui, à l'heure, associe la durée d'attente en minute. Ainsi, il sera possible d'avoir une estimation de la durée d'attente.

On choisit de modéliser cette situation à l'aide de la fonction f définie par $f(x)=ax^2+bx+c$, où a, b et c sont des réels avec $a\neq 0$ tels que les trois points $(9\,;9)$, $(11\,;20)$ et $(16\,;2)$ appartiennent à la représentation graphique de f.

1. Traduire les données de l'énoncé sous la forme d'un système de trois équations à trois inconnues a, b et c.

2. Déterminer les trois réels a, b et c.

3. En utilisant ce modèle, déterminer les plages horaires pour lesquelles l'attente peut être inférieure à dix minutes.

90 [Calculer, Représenter.]

D'après bac S, Amérique du Nord, 2015

On donne les matrices $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$ et $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Partie A

1. Calculer la matrice M^2.

On donne $\mathrm{M}^3=\begin{pmatrix}20 & 10 & 11\\ 12 & 2 & 9\\ 42 & 20 & 21\end{pmatrix}$.

2. Vérifier que $\mathrm{M}^3=\mathrm{M}^2+8\mathrm{M}+6\mathrm{I}$.

3. En déduire que M est inversible et que :

$$\mathrm{M}^{-1}=\frac{1}{6}(\mathrm{M}^2-\mathrm{M}-8\mathrm{I}).$$

Partie B

On cherche à déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ passe par les points $A(1\,;1)$, $B(-1\,;-1)$ et $C(2\,;5)$.

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a, b et c tels que $M\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$.

2. Calculer les nombres a, b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.

Histoire des maths

La méthode dite « du pivot de Gauss » ou « élimination de Gauss-Jordan » pour des systèmes d'équations linéaires était d'usage courant bien avant ces deux mathématiciens du XIXe siècle. Mais Gauss en fera une méthode puissante utile aux calculs astronomiques et géodésiques. C'est avec le développement du calcul matriciel (milieu XXe siècle), qu'on attribuera à Gauss cette méthode d'inversion d'une matrice.

91 [Calculer, Raisonner.]

Diagonalisation et puissance de matrices

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$.

1. Justifier que P est inversible et calculer son inverse.

2. Calculer le produit $D=P^{-1}\times A\times P$.

3. En déduire que $A=P\times D\times P^{-1}$.

4. a. Pour tout entier naturel non nul n, conjecturer une expression de D^n.

b. Démontrer cette conjecture par récurrence.

5. Exprimer alors A^n en fonction de n.

92 [Calculer, Raisonner.]

Diagonalisation et puissance de matrices

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\3&-2&0\\-2&2&1\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1&4&2\\1&3&-3\\1&-2&2\end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'inverse de P.

2. Calculer le produit $D=P^{-1}\times A\times P$.

3. En déduire que $A=P\times D\times P^{-1}$.

4. a. Pour tout entier naturel non nul n, conjecturer une expression de D^n.

b. Démontrer cette conjecture par récurrence.

5. Exprimer alors A^n en fonction de n.

93 [Calculer, Raisonner.]

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et A la matrice carrée de taille n, formée de 0 sur la diagonale et de 1 partout ailleurs.

1. Calculer A^2 et exprimer le résultat en fonction de A, de I_n et de n.

2. En déduire que A est inversible et en déduire A^{-1}.

94 [Calculer, Chercher.]

Matrices et changement de repère

Dans cet exercice, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie A : Changement de repère et translation

Soient a et b deux nombres réels.

1. Calculer l'image O' de O par la translation de vecteur $\vec{t}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

2. Déterminer l'image I' du point $I(1\,;0)$ par la translation de vecteur $\vec{t}$, puis l'image J' du point $J(0\,;1)$ par cette même translation.

3. Démontrer que $\left(O'\,;\overrightarrow{O'I'},\overrightarrow{O'J'}\right)$ définit un repère orthonormé direct du plan.

4. On considère deux nombres réels x et y et le point M, dont les coordonnées dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ sont données par $M(x\,;y)$.

Déterminer les coordonnées de M dans le repère $\left(O'\,;\overrightarrow{O'I'},\overrightarrow{O'J'}\right)$.

5. Inversement, on considère deux nombres réels x' et y' et le point M' dont les coordonnées dans le repère $\left(O'\,;\overrightarrow{O'I'},\overrightarrow{O'J'}\right)$ sont données par $M'(x'\,;y')$.

Déterminer les coordonnées de M' dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie B : Changement de repère (cas général)

Dans cette partie, on considère quatre nombres réels a, b, c et d. On note T la matrice $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

1. Calculer l'image O' de O par cette transformation.

2. Calculer de même l'image I' et J' des points $I(1\,;0)$ et $J(0\,;1)$.

3. a. À quelle condition sur a, b, c et d le triplet $\left(O'\,;\overrightarrow{O'I'},\overrightarrow{O'J'}\right)$ définit-il un repère du plan ?

b. Que signifie cette condition pour la matrice T ?

4. On suppose dans la suite que la condition de la question **3.** est vérifiée.

a. Soit M un point du plan dont les coordonnées dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ sont $M(x\,;y)$.
Calculer les coordonnées de M dans le repère $\left(O'\,;\overrightarrow{O'I'},\overrightarrow{O'J'}\right)$ en fonction de x et de y.

b. Inversement, si on note $(x'\,;y')$ les coordonnées de M dans le repère $\left(O'\,;\overrightarrow{O'I'},\overrightarrow{O'J'}\right)$, par quelle matrice doit-on multiplier $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ pour obtenir les coordonnées de M dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$?

95 [Chercher, Raisonner.]

Racine carrée de matrice

Partie A : Étude de quelques exemples

1. Dans cette question, on note A la matrice $\begin{pmatrix} -26 & 70 \\ -21 & 51 \end{pmatrix}$ et on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $B^2 = A$.

On dit que B est une **racine carrée** de A.

b. Montrer que $\begin{pmatrix} -38 & 70 \\ -21 & 39 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 38 & -70 \\ 21 & -39 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ sont également des racines carrées de A.

2. Justifier que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ sont des racines carrées de I_2.

Partie B : Cas d'une matrice diagonale

Dans cette partie, on considère deux réels x et y positifs et distincts et on note $D = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\begin{pmatrix} \sqrt{x} & 0 \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix}$ est une racine carrée de la matrice D.

2. On cherche à déterminer les autres racines carrées de D.

On suppose donc qu'il existe une matrice $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $R^2 = D$.

a. Montrer que déterminer R revient à résoudre le système d'équations $\begin{cases} a^2 + bc = x \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ cb + d^2 = y \end{cases}$.

b. On souhaite montrer que b et c sont nuls.

On raisonne par l'absurde en supposant que b ou c est non nul. Justifier qu'on a alors $a = -d$ puis aboutir à une contradiction.

c. Conclure sur l'expression des racines carrées de la matrice D.

d. Que se passe-t-il si on ne suppose pas les réels x et y distincts ? (On pourra considérer les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.)

Partie C : Cas d'une matrice diagonalisable

Soient C une matrice d'ordre n admettant une racine carrée R et P une matrice carrée d'ordre n inversible.

1. Montrer que PRP^{-1} est une racine carrée de la matrice PCP^{-1}.

2. On note dans la suite la matrice $C = \begin{pmatrix} -21 & 50 \\ -15 & 34 \end{pmatrix}$.

a. Soit P la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.

b. Montrer que $C = P\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}P^{-1}$.

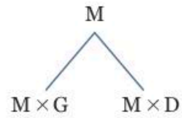
c. Déterminer les racines carrées de la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

d. En déduire les racines carrées de la matrice C.

96 [Chercher, Modéliser.]

D'après bac S, Centres étrangers, 2017

L'arbre de Stern-Brocot a été découvert séparément par le mathématicien allemand Moritz Abraham Stern (1858) et par Achille Brocot (1861), horloger français qui l'a utilisé pour concevoir des systèmes d'engrenages avec un rapport entre rouages proche d'une valeur souhaitée.



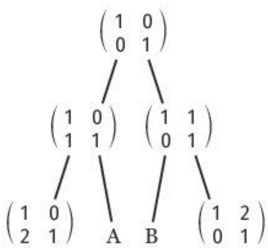
Cet exercice aborde la méthode avec des matrices carrées.

On considère les deux matrices $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On construit à partir d'une matrice initiale un arbre descendant de la façon suivante : de chaque matrice carrée M de l'arbre partent deux nouvelles branches vers les deux autres matrices $M \times G$ (à gauche) et $M \times D$ (à droite). Ces deux nouvelles matrices sont appelées les matrices filles de M.

Dans la méthode considérée, on prend comme matrice initiale la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les deux matrices manquantes A et B, dans la troisième ligne de l'arbre de Stern-Brocot ci-dessous.



Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot, les nombres a, b, c et d sont des entiers vérifiant : $b + d \neq 0$.

2. On associe, à une matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot, la fraction $\frac{a+c}{b+d}$.

Montrer que, dans cette association, le trajet « gauche - droite - gauche », à partir de la matrice initiale dans l'arbre, aboutit à une matrice correspondant à la fraction $\frac{3}{5}$.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de l'arbre.

On rappelle que a, b, c et d sont des entiers.

On note $\Delta_M = ad - bc$, la différence des produits diagonaux de cette matrice.

a. Montrer que si $ad - bc = 1$, alors $d(a+c) - c(b+d) = 1$.

b. En déduire que si $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est une matrice de l'arbre de Stern-Brocot telle que $\Delta_M = ad - bc = 1$, alors $\Delta_{M \times G} = 1$, c'est-à-dire que la différence des produits diagonaux de la matrice $M \times G$ est aussi égale à 1.

On admet de même que $\Delta_{M\times D} = 1$, et que toutes les autres matrices N de l'arbre de Stern-Brocot vérifient l'égalité $\Delta_N = 1$.

4. Déduire de la question précédente que toute fraction associée à une matrice de l'arbre de Stern-Brocot est irréductible.

5. Soit m et n deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Ainsi, la fraction $\frac{m}{n}$ est irréductible. On considère l'algorithme suivant.

```
Tant que (m ≠ n) faire :
    Si (m < n) :
        Afficher « Gauche »
        n ← n − m
    Sinon :
        Afficher « Droite »
        m ← m − n
    Fin Si
Fin Tant que
```

a. Recopier et compléter le tableau suivant.

Indiquer ce qu'affiche l'algorithme lorsqu'on le fait fonctionner avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.

Affichage					
m	4				
n	7				

b. Conjecturer le rôle de cet algorithme.

Vérifier à l'aide d'un calcul matriciel le résultat obtenu avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.

97 [Chercher, Calculer.]

Partie A : Permutations d'un ensemble à trois éléments

Soit E l'ensemble $\{1\,;2\,;3\}$. On s'intéresse dans cet exercice aux permutations de l'ensemble E.

1. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ est la permutation définie par $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 1$ et $3 \mapsto 2$.

Déterminer les 5 autres permutations de l'ensemble E.

2. La **signature d'une permutation** σ est le nombre, noté $\varepsilon(\sigma)$, défini par :

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{\sigma(1)-\sigma(2)}{1-2} \times \frac{\sigma(1)-\sigma(3)}{1-3} \times \frac{\sigma(2)-\sigma(3)}{2-3}.$$

Calculer la signature de chacune des permutations précédentes.

Partie B : Déterminant d'une matrice 3×3

Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$.

Le déterminant de la matrice M, noté $\det(M)$ ou encore $\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}$, est le nombre défini par :

$$\det(M) = \sum_{k=1}^{6} \varepsilon(\sigma_k) \times a_{\sigma_k(1),1} \times a_{\sigma_k(2),2} \times a_{\sigma_k(3),3}$$

où $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$ désignent les permutations de la Partie **A**.

1. a. Montrer que :

$$\det(M) = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.$$

b. Calculer le déterminant des matrices $A = \begin{pmatrix}5 & -3 & -6\\ 2 & -4 & 7\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 7\\ 4 & 6 & 2\end{pmatrix}$.

c. Soient x, y et z des nombres réels.

Montrer que $\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 1 & y & y^2\\ 1 & z & z^2\end{vmatrix} = (z-y)(z-x)(y-x)$.

2. a. Vérifier que :

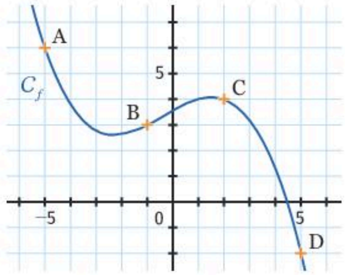
$$\det(M) = a \times \begin{vmatrix}e & f\\ h & i\end{vmatrix} - b \times \begin{vmatrix}d & f\\ g & i\end{vmatrix} + c \times \begin{vmatrix}d & e\\ g & h\end{vmatrix}$$

où $\begin{vmatrix}e & f\\ h & i\end{vmatrix}$ désigne le déterminant de $\begin{pmatrix}e & f\\ h & i\end{pmatrix}$.

b. Montrer que $\begin{vmatrix}a & b & c\\ 0 & d & e\\ 0 & 0 & f\end{vmatrix} = a \times d \times f$.

98 [Modéliser, Calculer.]

Soit f une fonction définie, pour tout réel x, par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c et d désignent des nombres réels avec $a \neq 0$. On a représenté ci-dessous la courbe représentative C_f de la fonction f dans un repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.



Les points $A(-5\,;6)$, $B(-1\,;3)$, $C(2\,;4)$ et $D(5\,;-2)$ appartiennent à C_f.

1. Traduire les données de l'énoncé sous la forme d'un système (S) de quatre équations à quatre inconnues a, b, c et d.

2. Déterminer les matrices M, X et P telles que le système (S) s'écrit sous la forme $M \times X = P$.

3. On admet que la matrice M est inversible. À l'aide de la calculatrice, déterminer M^{-1}.

4. En déduire les réels a, b, c et d solutions du système (S).

99 APPROFONDISSEMENT

Dans tout l'exercice, on suppose que les graphes sont connexes et non orientés.

Partie A : Cas d'une chaîne eulérienne

Une **chaîne eulérienne** est une chaîne qui passe par toutes les arêtes du graphe une et une seule fois.

Le théorème d'Euler affirme qu'une telle chaîne existe si, et seulement si, tous les sommets du graphe sont de degré pair sauf éventuellement deux. Dans ce cas, les extrémités de la chaîne sont ces sommets.

On souhaite démontrer la condition nécessaire de ce théorème. Supposons que le graphe admette une chaîne eulérienne.

1. Expliquer pourquoi tous les sommets sont d'ordre pair, sauf éventuellement le premier et le dernier de la chaîne.

2. On se place dans le cas où les extrémités sont confondues. Considérons un sommet S par lequel la chaîne est passée k fois ($k \in \mathbb{N}$). Quel est le degré de S ?

3. On se place à présent dans le cas où les extrémités ne sont pas confondues. Quel est le degré d'une extrémité par lequel la chaîne est passée k fois ($k \in \mathbb{N}$) ?

4. Conclure.

Partie B : Cas d'un cycle eulérien

Un **cycle** est une chaîne dont les sommets de départ et d'arrivée sont confondus.

Un **cycle eulérien** est un cycle qui passe par toutes les arêtes du graphe une et une seule fois.

Le théorème d'Euler affirme qu'un tel cycle existe si, et seulement si, tous les sommets du graphe sont de degré pair. On dit alors que le graphe est eulérien.

Démontrer ce théorème.

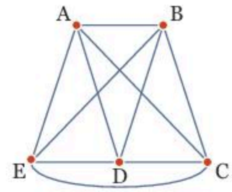
Partie C : Algorithme de détermination d'un cycle ou d'une chaîne eulérienne

Pour construire une chaîne eulérienne, on utilise l'algorithme suivant.

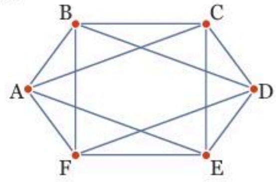
```
Si il y a exactement deux sommets de degré impair
    Alors on construit une chaîne quelconque joignant
    ces deux sommets
    Sinon on construit un cycle à partir de n'importe
    quel sommet
Fin Si
Tant que toutes les arêtes n'ont pas été parcourues
    Si toutes les arêtes ont été parcourues
        Alors la chaîne (respectivement le cycle) est
        eulérienne (respectivement eulérien)
        Sinon on insère dans cette chaîne (respective-
        ment ce cycle) un cycle ayant pour origine l'un
        des sommets déjà utilisés et ne contenant pas
        d'arête déjà parcourue ni deux fois la même arête
    Fin Si
Fin Tant que
```

Déterminer si chacun des graphes ci-dessous admet un cycle eulérien et le déterminer.

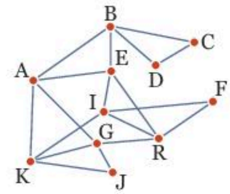
a.



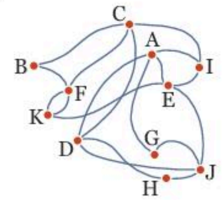
b.



c.

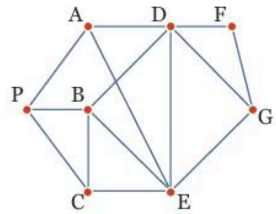


d.



Partie D : Application

Dans un plan de lutte contre la pollution urbaine, une municipalité a décidé de développer un réseau de navettes, mis en place entre des parkings situés aux abords de la ville et les principaux sites de la ville.



Le graphe ci-dessus indique les liaisons entre ces différents sites.

1. Peut-on envisager un itinéraire qui relierait le parking P à la gare G en desservant une et une seule fois tous les sites ?

2. Peut-on envisager un itinéraire qui emprunterait une et une seule fois toutes les voies ?

100 COLORATION DE GRAPHE

Partie A : Étude du problème

Colorier un graphe, c'est affecter une couleur à chaque sommet, de sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

Le **nombre chromatique**, noté γ, est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier un graphe.

Considérons un graphe $\mathcal{G}$.

Un **sous-graphe** de $\mathcal{G}$ est un graphe $\mathcal{G}'$ composé de certains sommets de $\mathcal{G}$ et de toutes les arêtes reliant ces sommets.

Notons m l'ordre du plus grand des sous-graphes complets de $\mathcal{G}$ et Δ le plus grand degré des sommets de $\mathcal{G}$. Alors $m \leqslant \gamma \leqslant \Delta + 1$.

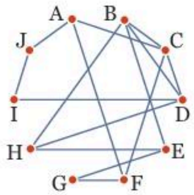
Prouver cette inégalité.

Partie B : Algorithme de Welsh-Powell

Pour colorier un graphe, on utilise l'algorithme suivant.

- **Étape 1 :** Lister les sommets par ordre de degré décroissant.
- **Étape 2 :** Attribuer une couleur C_1 au premier sommet de la liste.
- **Étape 3 :** Attribuer cette même couleur à tous les sommets qui ne sont pas adjacents avec le premier sommet de la liste et qui ne sont pas adjacents entre eux.
- **Étape 4 :** Répéter les étapes 2 et 3 tant que tous les sommets ne sont pas coloriés.

Colorier le graphe ci-dessous à l'aide de cet algorithme.



Partie C : Application

Camille est éducatrice de chiens : elle donne des leçons de dressage le samedi après-midi.

Neuf chiots sont présents : Aéro, Banjo, Carrousel, Dirka, Erald, Farore, Gipsy, Hyacinthe et Igor.

Camille souhaite réaliser des exercices d'apprentissage par petits groupes de deux ou trois chiens.

Farore ne pense qu'à jouer si elle est trop proche de Banjo, Carousel ou Erald.

De même, Dirka est très distraite si Banjo ou Farore sont à proximité !

Igor ne supporte pas le caractère trop fougueux de Gipsy.

Enfin, le turbulent Aéro ne supporte la présence d'aucun autre chiot, sauf Erald et Hyacinthe.

1. Représenter cette situation à l'aide d'un graphe $\mathcal{G}$, dont les sommets sont les noms des chiots et relier entre eux les chiots que l'on ne peut pas mettre ensemble pour ce travail de groupe.

2. Le graphe $\mathcal{G}$ est-il connexe ? Justifier.

3. a. Déterminer un sous-graphe complet d'ordre maximal du graphe $\mathcal{G}$.

b. Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique du graphe $\mathcal{G}$?

4. Donner la valeur du nombre chromatique du graphe $\mathcal{G}$.

5. Peut-on proposer une répartition des chiots en groupes de deux à trois chiots pouvant travailler ensemble ?

Complexes Arithmétique Matrices Graphes

Exercices transversaux en lien avec ce chapitre : 1 à 4, 6 et 8 à 18 p. 238

Le Grand Oral

Entraînez-vous au Grand Oral et enregistrez-vous sur LLS.fr/GrandOralMaths

Comme le suggère le programme, les problèmes abordés en maths expertes peuvent servir d'appui à des questions de Grand Oral. Voici un exemple, basé sur l'enseignement de spécialité, utilisant des notions de ce chapitre.

Les matrices ont des applications en cryptographie, en théorie des graphes mais aussi en géométrie.
Il existe également des liens entre les matrices et les représentations paramétriques de droites, vues en enseignement de spécialité mathématiques.

1. Soit (d) une droite de l'espace dirigée par le vecteur $\vec{u}(a\,;b\,;c)$, avec a, b et c des réels, et passant par le point $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A}\,;z_\mathrm{A})$. Donner une représentation paramétrique de cette droite, puis justifier qu'on peut écrire cette représentation paramétrique sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{A}t + \begin{pmatrix} x_\mathrm{A} \\ y_\mathrm{A} \\ z_\mathrm{A} \end{pmatrix}$, où t est un nombre réel et A est une matrice colonne à déterminer.

2. On se place maintenant dans le plan et on s'intéresse à la représentation paramétrique d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}(a\,;b)$ et passant par l'origine du repère.

Rappeler quelle transformation du plan représente la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis calculer $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Quel résultat du cours d'enseignement de spécialité mathématiques retrouve-t-on ?

Méthodologie	Consulter les fiches méthode de ce manuel pour le Grand Oral p. 244

Avant de commencer

Prérequis

1. Effectuer des opérations sur les matrices.
2. Utiliser les probabilités conditionnelles.
3. Maîtriser les suites.
4. Connaître les généralités sur les graphes.

1 Multiplier deux matrices

On considère les matrices 3×3 suivantes :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$.

2. Calculer $\mathrm{A} \times (\mathrm{I}_3 - \mathrm{B})$ de deux manières différentes.

2 Calculer des puissances de matrice

On considère les matrices 3×3 suivantes :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

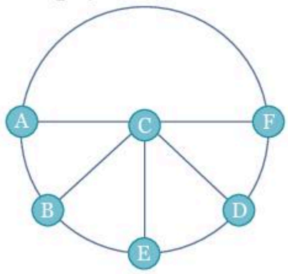
1. Calculer A^2 et B^2.

2. Montrer que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$.

3. En déduire $(\mathrm{A} + \mathrm{B})^2$.

3 Utiliser le vocabulaire sur les graphes

On considère le graphe suivant.



1. Ce graphe est-il complet ? Est-il connexe ?

2. Quel est l'ordre de ce graphe ?

4 Utiliser une loi de probabilité

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous en fonction d'un nombre réel α.

x_i	1	2	3	4
$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$	α	0,4	0,1	α

1. Déterminer α.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

5 Utiliser une probabilité conditionnelle

Soient A et B deux événements d'un univers tels que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0{,}4$, $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0{,}2$ et $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 0{,}1$.

1. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

2. En déduire $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$.

6 Utiliser la formule des probabilités totales

Soient A et B deux événements d'un univers tels que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0{,}4$, $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 0{,}1$ et $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B}) = 0{,}3$.
Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{B})$.

7 Déterminer la limite de suites

1. Donner les limites éventuelles des suites suivantes dont on donne le terme général, pour tout entier naturel n.

a. $u_n = 3^n$

b. $v_n = 0{,}3^n$

c. $w_n = (-3)^n$

2. Soit θ un nombre réel fixé.
Déterminer la limite éventuelle de la suite (t_n) définie, pour tout entier n, par $t_n = \cos(\theta^n)$.
On pourra distinguer plusieurs cas.

8 Problème

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 3$.

1. Montrer que la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 6$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

3. En déduire la limite de u_n.

4. On admet que la suite (u_n) est croissante.
Écrire un algorithme permettant de déterminer le rang à partir duquel les termes de la suite (u_n) sont supérieurs ou égaux à 5,5.

Anecdote

Andreï Markov, mathématicien russe, était surnommé l'enragé. De tendance moderniste, il s'est illustré par ses sorties contre le tsar ou contre le clergé orthodoxe. C'est en partie en cherchant à contredire un contemporain monarchiste et conservateur qu'il élabora sa théorie sur les chaînes aléatoires qui portent son nom.

Chapitre 7

Suites et matrices

L'une des manières de programmer un robot consiste à le laisser expérimenter de manière aléatoire différentes solutions face à un problème qu'il peut rencontrer.
Les différents états du robot sont modélisés par les sommets d'un graphe et la transition entre ces différents états est modélisée par les arêtes de ce graphe. À chaque arête est affectée une probabilité. Le comportement n'est pas déterministe, mais son comportement est asymptotiquement prévisible.

Capacités attendues - chapitre 7

1. Étudier une suite de matrices colonnes (U_n) définie par une relation de récurrence $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n + \mathrm{B}$.
2. Modéliser une situation par un graphe (probabiliste).
3. Associer un graphe orienté pondéré à une chaîne de Markov à deux ou trois états.
4. Étudier une chaîne de Markov à deux ou trois états pour calculer des probabilités, déterminer une probabilité invariante, etc.

ACTIVITÉS

A Suite de matrices - modèle « proies-prédateurs »

Objectif Généraliser la notion de suite aux matrices.

On considère une forêt dans laquelle vivent deux espèces : des lapins et des renards. Les renards sont les prédateurs des lapins. On observe l'évolution de la population de chacune de ces deux espèces.

Pour tout entier n, on note respectivement r_n et ℓ_n la population de renards et de lapins lors de l'année $2020+n$.

Après une étude, les biologistes ont déterminé que les suites (r_n) et (ℓ_n) sont naturellement définies, pour tout entier naturel n, de la manière suivante :

$$\begin{cases} r_{n+1} = 0{,}9r_n + 0{,}01\ell_n \\ \ell_{n+1} = -r_n + 1{,}01\ell_n \end{cases} \text{ et } \begin{cases} r_0 = 10 \\ \ell_0 = 10\,000 \end{cases}.$$

1 Si on note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} r_n \\ \ell_n \end{pmatrix}$, déterminer la matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

2 Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n en fonction de A, de X_0 et de n.

3 **a)** Afin d'organiser une chasse dans la forêt, chaque année, on relâche 1000 lapins et on abat 10 renards. Modifier la relation de récurrence entre X_{n+1} et X_n pour tenir compte de cette information.

b) Calculer alors X_1, X_2 et X_3.

Bilan **Dans chacun des cas étudiés au cours de cette activité, expliciter une méthode permettant d'exprimer, pour tout entier n, X_n en fonction de n.**

B Chaînes de Markov

Objectif Introduire la notion de chaîne de Markov.

Chaque semaine, un agriculteur propose à la vente un jus de fruit dans une bouteille en verre que les clients doivent rapporter lors de l'achat suivant.

On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique donne les résultats suivants :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille s'élève à 0,9 ;
- si le client a rapporté la bouteille une semaine donnée, alors la probabilité qu'il la ramène la semaine suivante vaut 0,95 alors qu'elle ne vaut que 0,2 dans le cas contraire.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur et on note, pour tout entier naturel n non nul, R_n l'événement « Le client rapporte la bouteille de la n-ième semaine. » et r_n sa probabilité. On a donc $r_n = p(R_n)$.

Partie A : En utilisant un arbre pondéré

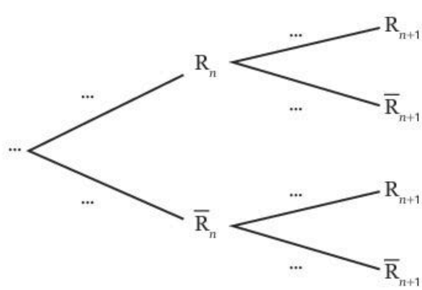
1 Déterminer r_1 et r_2.

2 Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

3 Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0{,}75r_n + 0{,}2$.

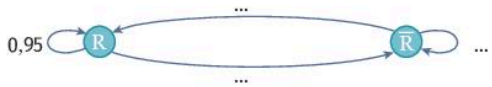
4 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$r_n = 0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}8.$$



Partie B : En utilisant un graphe probabiliste

1 On donne ci-dessous le graphe probabiliste correspondant à la situation.
La matrice P, appelée **matrice de transition**, synthétise le passage d'un état (R ou $\overline{\mathrm{R}}$) à l'état suivant.



et $\mathrm{P}=\begin{pmatrix}0{,}95 & 0{,}05\\ 0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$.

À l'aide du contexte, expliquer le fonctionnement du graphe probabiliste puis le compléter.

2 On note, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, t_n la probabilité $t_n=p(\overline{\mathrm{R}_n})$ et π_n la matrice $(r_n\ t_n)$.
Justifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\pi_{n+1}=\pi_n\times \mathrm{A}$.

3 Après avoir justifié que, pour tout entier naturel non nul n, $r_n+t_n=1$, montrer que $r_{n+1}=0{,}75r_n+0{,}2$.

Bilan

On considère une situation probabiliste où seulement deux événements se succèdent : A et son complémentaire $\overline{\mathrm{A}}$. Comment représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré ? À l'aide d'un graphe probabiliste ? Déterminer un avantage du graphe par rapport à l'arbre.

C Comportement asymptotique

Objectif

Étudier le comportement asymptotique d'une chaîne de Markov.

On considère la chaîne de Markov à deux états A et B définie par la matrice de transition $\mathrm{P}=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1\\ 0{,}4 & 0{,}6\end{pmatrix}$ et par la distribution initiale $\pi_0=(0{,}5\ \ 0{,}5)$, les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique.

1 Représenter cette chaîne de Markov à l'aide d'un graphe.

2 Calculer la distribution de probabilité après une étape puis après deux étapes.

3 À l'aide du programme ci-contre, conjecturer la distribution asymptotique de cette chaîne de Markov.

4 En modifiant le programme, estimer si la distribution asymptotique est dépendante de la distribution initiale.

Bilan

On note π la matrice correspondant à la distribution asymptotique obtenue. Justifier qu'on a $\pi\times\mathbf{P}=\mathbf{P}$ et interpréter le résultat.

```python
from random import*

proba_initiale_A = 0.3
proba_initiale_B = 1 - proba_initiale_A

pAA = 0.9
pAB = 0.1
pBA = 0.4
pBB = 0.6

def etat_suivant(etat):
    if etat == "A":
        if random() < pAB:
            return "B"
        else:
            return "A"
    if etat == "B":
        if random() < pBA:
            return "A"
        else:
            return "B"

def etat_asymptotique():
    if random() < proba_initiale_A:
        etat = "A"
    else:
        etat = "B"
    for i in range(1000):
        etat = etat_suivant(etat)
    return etat


def simule_distribution(n):
    total = 0
    for i in range(n):
        if etat_asymptotique() == "A":
            total = total + 1
    resultat = total/n
    return resultat
```

1 Suites de matrices $U_{n+1}=AU_n+B$

Dans cette partie, k désigne un entier naturel non nul.

A Étude des suites de matrices de la forme $U_{n+1}=AU_n$

Définition

Une suite de matrices colonnes (respectivement lignes) de taille $k\times 1$ (respectivement $1\times k$) est une fonction qui, à tout entier naturel n, associe une matrice colonne (respectivement ligne) de même taille.

EXEMPLE

La fonction U définie sur $\mathbb{N}$ par $n\mapsto\begin{pmatrix}n\\n^2\end{pmatrix}$ définit une suite de matrices colonnes de taille 2×1. On a notamment $U_2=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $U_5=\begin{pmatrix}5\\25\end{pmatrix}$.

Remarque : De même que pour les suites numériques, les suites de matrices peuvent être définies de plusieurs manières. En particulier, elles peuvent être définies par la donnée de leur terme général ou par récurrence.

Propriété

Soient A une matrice carrée d'ordre k et (U_n) la suite de matrices colonnes de taille $k\times 1$ définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par $\begin{cases}U_0\\U_{n+1}=AU_n\end{cases}$.
Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n=A^nU_0$.

Remarque : La formule obtenue est analogue à celle déjà connue sur les suites géométriques.

DÉMONSTRATION

La démonstration de cette propriété repose sur un raisonnement par récurrence.
On considère la proposition $\mathcal{P}_n$: « $U_n=A^nU_0$ » où $n\in\mathbb{N}$.
En utilisant la définition de la suite (U_n), on démontre que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, si $U_k=A^kU_0$, alors $U_{k+1}=A^{k+1}U_0$ ce qui permet de conclure.

Application et méthode - 1

Soient A la matrice $\begin{pmatrix}-1&2\\1&2\end{pmatrix}$ et (U_n) la suite de matrices colonnes définie par $U_0=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}=AU_n$.

1. Calculer U_1.

2. Exprimer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, U_n en fonction de A et de n.

3. À l'aide de la calculatrice, calculer U_{10}.

SOLUTION

1. La relation de récurrence donne
$U_1=AU_0=\begin{pmatrix}-1&2\\1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$.

2. Pour tout entier naturel n, $U_n=A^nU_0=A^n\times\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.

3. On a ainsi $U_{10}=A^{10}\times\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&2\end{pmatrix}^{10}\times\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\,782\\22\,234\end{pmatrix}$.

Pour s'entraîner : exercices **24** et **25** p. 220

Méthode

La méthode est essentiellement la même que celle utilisée pour les suites numériques : on utilise la formule de récurrence afin de calculer les termes successifs à l'aide du calcul matriciel.
Pour éviter les calculs trop longs, il est également possible d'utiliser l'égalité $U_n=A^nU_0$ qui nécessite toutefois de calculer une puissance de matrice.

B Étude des suites de matrices de la forme $U_{n+1}=AU_n+B$

On note dans la suite A une matrice carrée d'ordre k telle que $A-I_k$ est inversible et B une matrice colonne de taille $k\times 1$.

Propriétés

Soit (U_n) une suite de matrices colonnes de taille $k\times 1$ dont le premier terme est la matrice colonne U_0 et vérifiant, pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=AU_n+B$.

On définit également la matrice colonne $C=-(A-I_k)^{-1}B$ et, pour tout entier naturel n, la suite de matrices colonnes (V_n) de terme général $V_n=U_n-C$.

Alors la suite (V_n) vérifie $\begin{cases} V_0=U_0-C \\ V_{n+1}=AV_n \end{cases}$ et, pour tout entier naturel n, $V_n=A^nV_0$.

Par ailleurs, pour tout entier naturel n, $U_n=A^n(U_0-C)+C$.

Remarque : Si $A-I$ est non inversible et B non nul, alors la suite U_n se comporte en partie ou complètement comme une suite arithmétique.

DÉMONSTRATION Voir exercice 48 p. 223.

EXEMPLE

Dans l'activité A, la deuxième modélisation amenait à l'étude d'une suite matricielle de la forme $U_{n+1}=AU_n+B$ avec $A=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}01\\ -1 & 1{,}01\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-10\\ 1000\end{pmatrix}$.

$A-I_2=\begin{pmatrix}-0{,}1 & 0{,}01\\ -1 & 0{,}01\end{pmatrix}$ de déterminant $\det(A-I_2)=0{,}009\neq 0$ donc $A-I_2$ est inversible.

On peut donc utiliser la propriété pour expliciter le terme général de la suite (U_n).

Application et méthode - 2

Soit (U_n) la suite définie par $U_0=\begin{pmatrix}10\\ 20\end{pmatrix}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par $U_{n+1}=AU_n+B$, avec $A=\begin{pmatrix}0{,}95 & 0\\ 0 & 1{,}1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$.

1. Calculer U_1.

2. a. Justifier que $A-I_2$ est inversible.

b. Calculer $C=-(A-I_2)^{-1}B$.

3. Montrer que la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n=U_n-C$ vérifie $V_{n+1}=AV_n$.

4. En déduire le terme général de (V_n) puis calculer U_{10}.

SOLUTION

1. $U_1=AU_0+B=\begin{pmatrix}9{,}5\\ 22\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11{,}5\\ 21\end{pmatrix}$

2. a. $A-I_2=\begin{pmatrix}-0{,}05 & 0\\ 0 & 0{,}1\end{pmatrix}$ et $\det(A-I_2)=-0{,}005\neq 0$ donc $A-I_2$ est inversible.

b. $C=-(A-I_2)^{-1}B=-\begin{pmatrix}-20 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40\\ 10\end{pmatrix}$

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $V_{n+1}=U_{n+1}-C=AU_n+B-C=A(V_n+C)+B-C$.

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $V_{n+1}=AV_n+AC+B-C=AV_n+B+(A-I)C$.

On a alors $V_{n+1}=AV_n+B+(A-I)(-(A-I)^{-1}B)$

et ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $V_{n+1}=AV_n+B-B=AV_n$.

Par ailleurs, $V_0=U_0-C=\begin{pmatrix}-30\\ 10\end{pmatrix}$.

4. Ainsi, pour tout entier naturel n, $V_n=A^nV_0=\begin{pmatrix}0{,}95 & 0\\ 0 & 1{,}1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}-30\\ 10\end{pmatrix}$. Puisque $U_{10}=V_{10}+C$ alors $U_{10}\approx\begin{pmatrix}22{,}04\\ 35{,}94\end{pmatrix}$.

Méthode

La méthode utilisée dans ce type d'exercice correspond à celles étudiées :

- dans les chapitres sur les suites pour les calculs de termes ;
- dans le chapitre de calcul matriciel pour les égalités matricielles.

Pour s'entraîner : exercices 26 et 27 p. 220

2 Chaînes de Markov

A Définitions et aspect probabiliste

Définitions

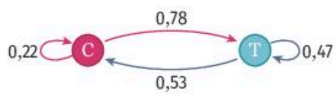
Un **graphe pondéré** est un graphe dans lequel chaque arête est affectée d'un nombre réel positif appelé **poids** de cette arête.

Définition

Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté pondéré par des réels compris entre 0 et 1 et dans lequel la somme des poids des arêtes issues de chaque sommet est égale à 1.

EXEMPLE

Le graphe suivant est un graphe probabiliste à deux états (C et T). On a $0{,}22+0{,}78=1$ et $0{,}47+0{,}53=1$.



Définitions

Une suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de variables aléatoires est **une chaîne de Markov** à deux états a et b (respectivement à trois états a, b et c) lorsque, pour tous $x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}$ dans $\{a\,;\,b\}$ (respectivement dans $\{a\,;\,b\,;\,c\}$), on a :

$$p_{X_0=x_0, X_1=x_1, \dots, X_k=x_k}(X_{k+1}=x_{k+1}) = p_{X_k=x_k}(X_{k+1}=x_{k+1}).$$

La probabilité $p_{X_k=x_k}(X_{k+1}=x_{k+1})$ s'appelle **probabilité de transition** de l'état x_k à l'état x_{k+1}.

L'ensemble $\{a\,;\,b\}$ (respectivement $\{a\,;\,b\,;\,c\}$) est appelé **espace des états**.

Remarque : La définition d'une chaîne de Markov signifie que les états passés n'ont aucune influence sur les états futurs : seul l'état présent a son importance.

Remarque : Les variables aléatoires (X_n) ne sont pas nécessairement à valeurs réelles.

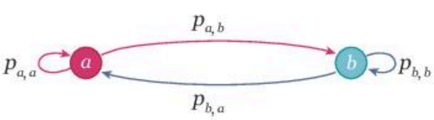
Remarque : La somme des probabilités de transition issues d'un même état est égale à 1.

Illustration à l'aide d'un graphe probabiliste :

On peut représenter une chaîne de Markov à l'aide d'un graphe probabiliste. Chaque sommet représente un état de la chaîne de Markov et les poids portés par les arêtes orientées représentent les probabilités de transitions.

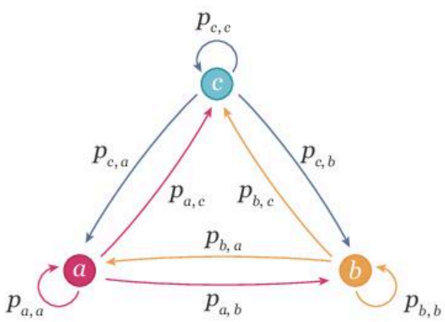
Graphe d'une chaîne de Markov à deux états

$$p_{X_k=a}(X_{k+1}=b)=p_{a,b}$$



Graphe d'une chaîne de Markov à trois états

$$p_{X_k=c}(X_{k+1}=b)=p_{c,b}$$



Définition

La **distribution initiale** d'une chaîne de Markov (X_n) est la loi de probabilité de X_0.

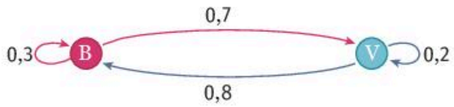
Application et méthode - 3

Ike n'aime pas prendre le bus pour aller à l'école et préfère prendre son vélo. Il n'utilise pas d'autre moyen de locomotion.

Chaque jour de la semaine, il va à l'école en bus avec une probabilité de 0,8 s'il ne l'a pas emprunté la fois précédente et avec une probabilité de 0,3 sinon.

Représenter la situation par un graphe probabiliste.

SOLUTION



Pour s'entraîner : exercices **28** et **29** p. 221

Méthode

- On repère en premier lieu le nombre d'états : on en a ici deux.
- On construit alors un graphe probabiliste à deux sommets (un pour chaque état) et on traduit les probabilités de l'énoncé sous forme de pondérations dans le graphe.
- On complète en utilisant le fait que la somme des probabilités portées par les arêtes issues d'un même état vaut 1.

B Représentation matricielle d'une chaîne de Markov

Définition

On considère une chaîne de Markov à n états, numérotés 1 ; … ; n, et on note $E = \{1 ; \dots ; n\}$ l'espace des états.

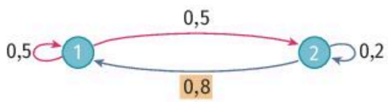
La **matrice de transition P** associée à cette chaîne de Markov est la matrice carrée d'ordre n telle que, pour tout $i \in E$ et pour tout $j \in E$, le coefficient $p_{i,j}$ correspond à la probabilité de transition de l'état i vers l'état j.

Remarque : Dans le programme, on se limite au cas où $n = 2$ ou $n = 3$.

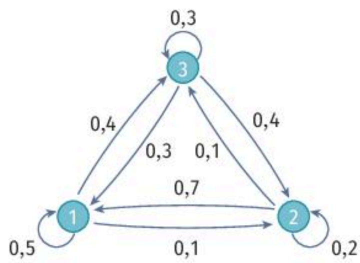
EXEMPLES

1. La chaîne de Markov représentée ci-contre par un graphe probabiliste a pour matrice de transition $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.

Le coefficient surligné 0,8 indique que la probabilité de passer de l'état 2 à l'état 1 vaut 0,8.



2. La chaîne de Markov représentée par le graphe probabiliste ci-contre a pour matrice de transition $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$.



Remarque : La distribution initiale peut être représentée par une matrice ligne, souvent notée π_0, dont le k-ième coefficient correspond à la probabilité de l'état k à l'instant initial.

Propriétés

1. Les coefficients de la matrice de transition d'une chaîne de Markov sont des nombres appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$.
2. La somme des coefficients d'une ligne donnée de la matrice de transition est égale à 1.

3 Évolution d'une chaîne de Markov

A Étude sur plusieurs rangs

Propriété

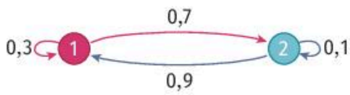
On considère une chaîne de Markov (X_n) dont on note P la matrice de transition associée et π_0 la distribution initiale. On note π_n la loi de X_n.
On a, pour tout entier n, $\pi_{n+1} = \pi_n P$ et $\pi_n = \pi_0 P^n$.

Remarque : Une chaîne de Markov est donc entièrement déterminée par sa distribution initiale et par sa matrice de transition.

DÉMONSTRATION Voir exercice 78 p. 227.

EXEMPLE

On considère la chaîne de Markov définie par le graphe probabiliste ci-contre et par la distribution initiale $\pi_0 = (0{,}5 \quad 0{,}5)$. Alors la loi de probabilité π_3 de X_3 est donné par $\pi_3 = \pi_0 P^3$ avec $P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.
On a ainsi $\pi_3 = (0{,}576 \quad 0{,}424)$.
La loi de probabilité de X_3 est donc la suivante.



x	1	2
$P(X_3 = x)$	0,576	0,424

Remarque : Le coefficient d'indice (i, j) de la matrice P^n correspont à la probabilité de passer de l'état i à l'état j en n transitions.

Application et méthode - 4

On reprend l'exemple précédent. Le lundi, premier jour de l'année scolaire, Ike va à l'école en bus avec une probabilité de 0,5. Quelle est la probabilité qu'il aille à l'école en bus le jeudi de cette même semaine ?

SOLUTION

En rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique, la matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ et la distribution initiale correspondant au lundi de la rentrée est $\pi_0 = (0{,}5 \quad 0{,}5)$. On veut donc déterminer $\pi_3 = \pi_0 P^3$.
Or $P^3 = \begin{pmatrix} 0{,}475 & 0{,}525 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ donc $\pi_3 = (0{,}5375 \quad 0{,}4625)$.
La probabilité qu'Ike aille à l'école en bus le jeudi de la semaine de la rentrée est donc de 0,5375.

Méthode

- On détermine la matrice de transition liée au graphe probabiliste.
- On calcule ensuite la puissance de la matrice de transition qui correspond au rang pour lequel on veut trouver la distribution de probabilité.

Pour s'entraîner : exercices 33 et 34 p. 221

B Distribution invariante d'une chaîne de Markov

Propriété (admise)

Soit (X_n) une chaîne de Markov à 2 ou 3 états de matrice de transition P.

Il existe au moins une distribution initiale π telle que $\pi P = \pi$.

Une telle distribution est appelée **distribution invariante** de la chaîne de Markov.

Remarque : On parle aussi d'**état stable** de la chaîne de Markov.

EXEMPLE

On considère une chaîne de Markov dont la matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.
Alors $\pi = (0{,}6 \quad 0{,}4)$ est une distribution invariante.

En effet, $\pi P = (0{,}6 \quad 0{,}4)\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$
$= (0{,}6 \times 0{,}4 + 0{,}4 \times 0{,}9 \quad 0{,}6 \times 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}1)$
$= (0{,}6 \quad 0{,}4)$
$= \pi$.

Remarque : L'existence de la distribution invariante peut également être démontrée pour une chaîne de Markov ayant un nombre d'états quelconque.

Propriété

On considère une chaîne de Markov (X_n) dont on note P la matrice de transition et π_0 la distribution initiale.

Pour tout entier naturel n, on note π_n la distribution de X_n.

Si P ne contient aucun 0, alors la suite de matrices lignes (π_n) converge vers l'unique distribution invariante de la chaîne de Markov.

Remarque : Dans le cas où la matrice de transition ne contient pas de 0, la distribution invariante s'interprète de la même manière qu'une limite de suite.

Application et méthode - 5

On reprend l'exemple précédent.

Déterminer la probabilité qu'Ike aille à l'école en vélo à très long terme.

SOLUTION

La matrice de transition P ne contient pas de 0 : il existe donc une unique distribution invariante π.

Si on note $\pi = (x \quad y)$ cette distribution invariante, alors on a $x + y = 1$ et la relation $\pi P = \pi$, c'est-à-dire $0{,}3x + 0{,}8y = x$ et $0{,}7x + 0{,}2y = y$.

Les deux dernières égalités se ramenant en réalité à la même équation, on ne va travailler qu'avec les deux premières, soit
$\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}8y = x \\ x + y = 1 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} -0{,}7x + 0{,}8y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$.

Ce système a pour solution $(x\,;y) = \left(\frac{8}{15}\,;\frac{7}{15}\right)$.

La distribution invariante est donc $\pi = \left(\frac{8}{15} \quad \frac{7}{15}\right)$.

La probabilité qu'Ike aille à l'école en vélo à très long terme vaut $\frac{7}{15}$.

Méthode

La notion de distribution invariante permet de modéliser cette notion de « long terme ».
On commence par noter $(x \quad y)$ la (lorsqu'elle est unique) distribution invariante puis on remarque qu'on doit avoir $x + y = 1$.
On traduit ensuite sous forme de système la relation $\pi P = \pi$: on obtient alors deux nouvelles relations qui s'avèrent être équivalentes.
On dispose donc au total de deux équations qui nous permettent de trouver x et y.

Pour s'entraîner : exercices **35** et **36** p. 221

L'ESSENTIEL

FICHE DE RÉVISION

1 Étudier une suite de matrices colonnes $U_{n+1} = AU_n + B$. Cela permet de :

✔ étudier des couples de suites $(u_n\,;\,v_n)$ définies par récurrences croisées ;

✔ étudier un système dynamique tel que le système proie-prédateur.

2 Associer un graphe à une chaîne de Markov. Cela permet de :

✔ visualiser les probabilités de transition et ainsi obtenir la matrice de transition P ;

✔ trouver les probabilités de transitions manquantes en prenant en compte le fait que la somme des probabilités sortantes d'un état vaut 1.

3 Étudier une chaîne de Markov sur plusieurs rangs. Cela permet de :

✔ connaître la distribution de probabilité $\pi_{n+1} = \pi_n P$ de la chaîne de Markov après un nombre donné de transitions ;

✔ calculer la distribution de probabilité après n transitions en utilisant $\pi_n = \pi_0 \times P^n$.

4 Trouver une distribution invariante π d'une chaîne de Markov, c'est-à-dire une matrice ligne vérifiant $\pi = \pi P$. Cela permet de :

✔ déterminer une distribution asymptotique de la chaîne de Markov ;

✔ déterminer la distribution asymptotique de la chaîne de Markov lorsque la matrice de transition P ne contient pas de 0.

CARTE MENTALE

SUITE DE MATRICES COLONNES

Si $U_{n+1} = AU_n$

Alors $U_n = A^n \times U_0$

Si $U_{n+1} = AU_n + B$

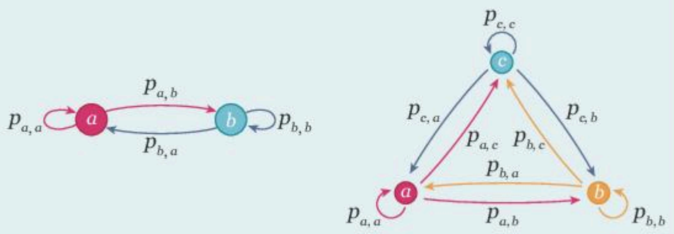
Et si $(A - I)$ est inversible

On note $C = -(A - I)^{-1}B$

Et on a $U_n = A^n(U_0 - C) + C$

SUITE DE MATRICES LIGNES : CHAÎNES DE MARKOV

Modélisation par un graphe



Modélisation par une matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} p_{a,a} & p_{a,b} \\ p_{b,a} & p_{b,b} \end{pmatrix} \text{ ou } P = \begin{pmatrix} p_{a,a} & p_{a,b} & p_{a,c} \\ p_{b,a} & p_{b,b} & p_{b,c} \\ p_{c,a} & p_{c,b} & p_{c,c} \end{pmatrix}$$

Évolution :
- $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$
- $\pi_n = \pi_0 \times P^n$

Distribution invariante : $\pi = \pi P$

Téléchargez cette fiche de révision au format PDF sur lls.fr/MXPfiche7

QCM réponse unique

9 La suite de matrices (U_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $\begin{cases} U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ U_{n+1} = AU_n + B \end{cases}$, avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie :

a $U_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$. **b** $U_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix}$.

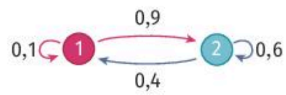
c si $V_n = U_n + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $V_{n+1} = AV_n$.

d si $V_n = U_n + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors $V_{n+1} = AV_n$.

10 La somme des coefficients des arêtes orientées qui sont issues d'un sommet d'un graphe représentant une chaîne de Markov vaut :

a 0 **b** $\frac{1}{2}$ **c** 1 **d** 2

11 Quelle est la matrice de transition de cette chaîne de Markov ?



a $\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}9 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ **d** $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

12 On considère une chaîne de Markov associée à la matrice de transition $B = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}$. On note $P_0 = (0{,}5 \quad 0{,}4 \quad 0{,}1)$. La distribution P_1 est :

a $P_1 = (0{,}38 \quad 0{,}28 \quad 0{,}34)$ **b** $P_1 = (0{,}45 \quad 0{,}22 \quad 0{,}42)$

c $P_1 = (0 \quad 1 \quad 0)$ **d** $P_1 = \left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}\right)$

QCM réponses multiples

[Une ou plusieurs bonnes réponses par question]

Pour les exercices **13** à **16**, on donne la matrice $P = \begin{pmatrix} 0{,}28 & 0{,}72 \\ 0{,}65 & 0{,}35 \end{pmatrix}$ associée à une chaîne de Markov.

13 On peut affirmer que :

a $\pi = \left(\frac{72}{137} \quad \frac{65}{137}\right)$. **b** $\pi = \left(\frac{65}{137} \quad \frac{72}{137}\right)$.

c il existe une unique distribution invariante π pour la chaîne de Markov.

d il n'existe pas de distribution invariante pour la chaîne de Markov.

14 On note $\pi_0 = (0{,}5 \quad 0{,}5)$ la distribution initiale. On a :

a $\pi_1 = (0{,}465 \quad 0{,}535)$ **b** $\pi_2 = (0{,}47795 \quad 0{,}52205)$

c $\pi_3 = (0{,}4731 \quad 0{,}5268)$ **d** $\pi_4 = \pi$

15 La distribution de probabilité au bout de dix transitions d'une chaîne de Markov de distribution initiale π_0 et de matrice de transition P est :

a $\pi_0 P$. **b** $\pi_0 P^{10}$.

c une loi de probabilité. **d** impossible à prévoir.

16 On considère une chaîne de Markov associée à la matrice de transition I_3. Alors une distribution invariante :

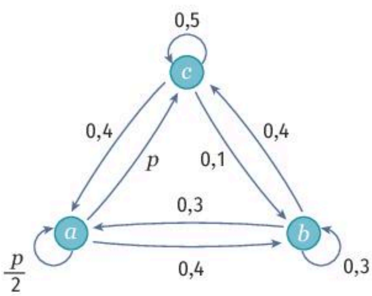
a est $\pi = (1 \quad 0 \quad 0)$. **b** est $\pi = (0{,}5 \quad 0{,}2 \quad 0{,}3)$.

c est $\pi = (0 \quad 0 \quad 1)$. **d** n'existe pas.

Problème

17 Le graphe probabiliste ci-contre représente une chaîne de Markov, p représentant un nombre réel compris entre 0 et 1.

1. Déterminer p et en déduire la matrice de transition P.
2. Calculer P^2 et P^3.
3. En déduire la distribution de probabilité après trois étapes de cette chaîne de Markov pour une distribution initiale $\pi_0 = (0{,}1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}4)$.



Retrouvez plus d'exercices dans notre **cahier d'algo**

LLS.fr/PythonXP

1 Algorithme de Ehrenfest

On considère deux urnes A et B et un entier $N \geqslant 1$. Dans l'urne A se trouvent N boules numérotées de 0 à $N-1$.
On répète n fois les actions suivantes :

- choisir au hasard un nombre entre 0 et $N-1$;
- placer la boule ayant ce numéro dans l'urne où elle n'est pas.

Objectif **Simuler l'évolution du nombre de boules dans chaque urne après un grand nombre de tirages à l'aide d'une des deux méthodes.**

LABO PYTHON

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 1 TABLEUR

Dans le tableur ci-dessous, chaque colonne représente la situation des boules à une étape donnée. La zone en vert indique la boule que l'on change d'urne à l'étape considérée. Dans les lignes 3 à 14, un 1 indique que la boule se trouve dans l'urne A et un 0 indique que la boule se trouve dans l'urne B. Au départ (Étape 0), toutes les boules sont dans l'urne A.

	A	B	C	D	E	F	G
1	N		Étape 0	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4
2	12	Boule à changer		0	10	9	6
3	Boules	0	1				
4		1	1				
5		2	1				
6		3	1				
7		4	1				
8		5	1				
9		6	1				
10		7	1				
11		8	1				
12		9	1				
13		10	1				
14		11	1				

1. Recopier cette feuille de calcul (sauf les nombres dans la zone verte) et écrire dans la cellule **D2** une formule permettant de choisir au hasard un nombre entier compris entre 0 et $N-1$ où N désigne le nombre situé en **A2**.
Étirer ensuite cette formule vers la droite.

2. Quelle formule doit-on écrire dans les cellules **D3** à **D14** pour que la boule considérée change d'urne si, et seulement si, son numéro est celui qui se trouve en **D2** ? Étirer ensuite cette formule vers la droite afin de modéliser l'évolution de la position des boules pour 100 étapes.

3. Calculer dans la ligne 15 la proportion de 1 (donc de boules se trouvant dans l'urne A) à chaque étape.

4. Vers quelle valeur cette proportion semble-t-elle converger ?

5. Tester cette hypothèse en augmentant le nombre d'étapes simulées.

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 2 PYTHON

On considère le programme Python suivant qui simule l'expérience.

```
1 from random import*
2
3 N = 20 #Nombre de boules.
4 n = 1000 #Nombre de tirages.
5
6 #Les boules sont toutes dans l'urne A au départ.
7 Boules = []
8 for j in range(N):
9     Boules.append()
10
11 #Choisir une boule et la changer d'urne.
12 for i in range(n):
13     numero = ...
14     if Boules[numero] == 1:
15         Boules[numero] = ...
16     else:
17         Boules[numero] = ...
18
19 #Compter la proportion de boules dans l'urne A.
20 compteur = 0
21 for k in Boules:
22     compteur = compteur + k
23
24 proportion = float(compteur/N)
25 print(proportion)
```

1. Que modélise la variable **Boules** ?

2. Recopier le programme et compléter les lignes 13, 15 et 17.

3. Utiliser le programme pour déterminer, au bout de 1 000 tirages, la proportion de boules dans chaque urne.

4. Recommencer plusieurs fois cette simulation et comparer les résultats obtenus.

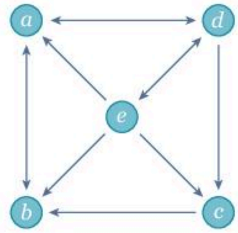
5. Reprendre les questions précédentes avec différentes valeurs de N et de n.

Pour aller plus loin

Voir exercice 83 p. 229.

2 Algorithme de PageRank

On considère le graphe orienté ci-contre. Un internaute est placé initialement à $t = 0$ sur le site a. Chaque minute, il choisit un site vers lequel il se dirige. Chaque lien possible est équiprobable : ainsi, à $t = 1$, il a une probabilité égale à 0,5 d'être en b et une probabilité égale à 0,5 d'être en d.



Questions préliminaires :

1. Quelle est la probabilité d'être en c au temps $t = 2$?

2. Quelle est la probabilité d'être en a au temps $t = 2$?

En assimilant les probabilités aux fréquences obtenues au bout d'un temps très long, on attribue une pondération à chaque sommet du graphe qui permet de classer les sites.

Objectif Découvrir un algorithme PageRank à l'aide d'une des deux méthodes.

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 1 **TABLEUR**

1. Écrire la matrice de transition P associée au graphe probabiliste.

2. a. Recopier la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1						0	0,5	0	0,5	0
2						1	0	0	0	0
3						0	1	0	0	0
4						0,333	0	0,333	0	0,333
5						0,25	0,25	0,25	0,25	0
6	0	0,5	0	0,5	0					
7	1	0	0	0	0					
8	0	1	0	0	0					
9	0,333	0	0,333	0	0,333					
10	0,25	0,25	0,25	0,25	0					

b. Quelle formule faut-il écrire dans la cellule **F6** et étirer sur la plage **F6:J10** pour obtenir P^2 ?

c. Compléter les cellules de la plage **F11:J15** en s'inspirant du contenu des cellules de la plage **F6:J10** afin d'obtenir P^3.
Calculer ensuite P^4 sur la plage **F16:J20**.

3. En déduire une estimation de la probabilité, au bout d'un temps très long, d'être sur chacun des sites.

4. Cette probabilité dépend-elle du choix du site de départ ?

LABO PYTHON

MÉTHODE DE RÉSOLUTION 2 **PYTHON**

Le programme suivant permet de déterminer les pondérations de chaque site.

1. Compléter la fonction **promenade** qui simule les 1000 premières minutes de la navigation du surfeur.

```
import random
def promenade():
# Simule les 1000 premières minutes de la
marche aléatoire et renvoie le sommet sur
lequel est le surfeur à la fin.
    sommet = "a"
    for pas in range(...):
        alea = random.random()
        if sommet == "a":
            if alea < 0.5:
                sommet = "b"
            else:
                ...
        elif ...
        elif ...
        elif ...
        else:
            ...
    return sommet
```

2. Simuler, avec la fonction **PR** à compléter ci-dessous, la navigation de 1000 surfeurs, et en déduire une estimation de la probabilité d'être sur chacun des sites au bout d'un temps très long.

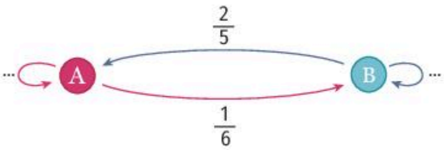
```
def PR():
    effectifs = 5*[0]
    surfeurs = ...
    for k in ...:
        sommetfinal = promenade()
        if sommetfinal == "a":
            effectifs[0] = effectifs[0] + 1/surfeurs
        elif ...
        elif ...
        elif ...
        else:
            ...
    return effectifs
```

3. Modifier le programme pour vérifier que le choix du site initial ne modifie pas les probabilités obtenues dans la question précédente.

À L'ORAL

18 Expliquer pourquoi la somme des coefficients d'une matrice de transition d'une chaîne de Markov à deux états est égale à 2.

19 Compléter le graphe probabiliste ci-dessous associé à une chaîne de Markov à deux états A et B.



20 On considère une chaîne de Markov à deux états et $P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & \dots \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ sa matrice de transition dans laquelle un coefficient a été effacé.
Déterminer le coefficient manquant.

21 VRAI / FAUX Déterminer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse.
« Une chaîne de Markov à deux états peut toujours se représenter sous la forme d'une matrice 2×2 contenant uniquement des nombres compris dans l'intervalle $[0\,;1]$. »

22 On considère une chaîne de Markov modélisée par le graphe ci-dessous.

1. Donner sa matrice de transition.

2. Montrer que toute distribution est invariante.

23 VRAI / FAUX Parmi les affirmations suivantes, déterminer, en justifiant, celles qui sont vraies.

1. « Dans la représentation graphique d'une chaîne de Markov, la somme des coefficients des arêtes entrant dans un sommet vaut toujours 1. »

2. « Dans la représentation graphique d'une chaîne de Markov, la somme des coefficients des arêtes issues d'un sommet vaut toujours 1. »

3. « Dans la représentation graphique d'une chaîne de Markov, la somme des coefficients de toutes les arêtes vaut toujours 1. »

4. « Dans la représentation graphique d'une chaîne de Markov, la somme des coefficients des arêtes pointant vers leur sommet d'origine est toujours 1. »

Suite de matrices

24 Soient A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ et (U_n) la suite de matrices colonnes définie par $U_0 = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}25 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.

1. Calculer U_1.

2. a. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n en fonction de A et de n.

b. En déduire la valeur de U_5.

25 Soient B la matrice $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et (V_n) la suite de matrices colonnes définie par $V_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = BV_n$.

1. Calculer V_1 et V_2.

2. a. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n en fonction de B et de n.

b. Calculer le terme V_{10}.

26 Soit (U_n) la suite de matrices colonnes définie par $U_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n + B$, avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer U_1.

2. a. Justifier que $A - I_2$ est inversible, puis déterminer la matrice $(A - I_2)^{-1}$.

b. Calculer $C = -(A - I_2)^{-1}B$.

3. Montrer que la suite (V_n) définie, pour tout entier naturel n, par $V_n = U_n - C$ vérifie $V_{n+1} = AV_n$.

4. En déduire le terme général de (V_n) puis exprimer, pour tout entier naturel n, U_n en fonction de n.

5. En déduire U_5.

27 Soit (U_n) la suite de matrices colonnes définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n + B$, avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer U_1 et U_2.

2. a. Justifier que $A - I_2$ est inversible, puis déterminer à la calculatrice $(A - I_2)^{-1}$.

b. Calculer $C = -(A - I_2)^{-1}B$.

3. Montrer que la suite (V_n) définie, pour tout entier naturel n, par $V_n = U_n - C$ vérifie $V_{n+1} = AV_n$.

4. Exprimer, pour tout entier naturel n, V_n en fonction de n et de A.

5. En déduire une expression de U_n en fonction de n et de A. Calculer alors U_8.

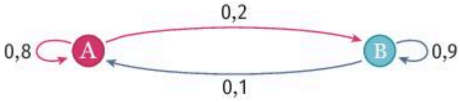
Graphes probabilistes

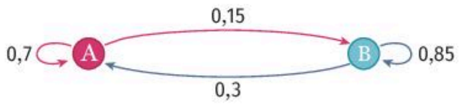
28 Représenter la situation suivante par un graphe probabiliste.

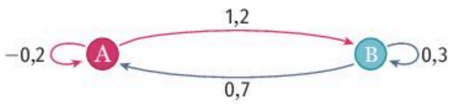
Un professeur ne donne pas toujours du travail à faire à la maison :

- lorsqu'il en a donné à la fin d'un cours, la probabilité pour qu'il en donne à la fin du cours suivant est égale à 0,2 ;
- s'il n'en a pas donné, la probabilité pour qu'il en donne à la fin du cours suivant est égale à 0,85.

29 Déterminer, en justifiant, si les graphes suivants correspondent à des graphes probabilistes.

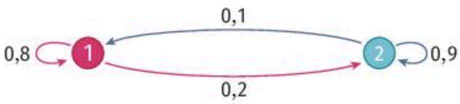






Chaînes de Markov

30 On considère la chaîne de Markov définie par le graphe probabiliste suivant et par la distribution initiale $\pi_0 = (0{,}5 \quad 0{,}5)$.



1. Donner sa matrice de transition P.

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1+2\times 0{,}7^n}{3} & \dfrac{2-2\times 0{,}7^n}{3} \\ \dfrac{1-0{,}7^n}{3} & \dfrac{2+0{,}7^n}{3} \end{pmatrix}.$$

3. En déduire la probabilité de l'état 1 après 100 itérations.

31 On considère une chaîne de Markov à trois états et $P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & \dots \\ 0{,}3 & 0{,}1 & \dots \\ \dots & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ sa matrice de transition dans laquelle trois nombres ont été effacés.

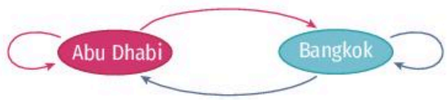
Déterminer les coefficients manquants.

32 Représenter par un graphe la chaîne de Markov dont la matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}9 & 0{,}01 & 0{,}09 \\ 0{,}11 & 0{,}77 & 0{,}12 \end{pmatrix}$.

33 Martin a une vie professionnelle agitée. Chaque année, il est susceptible de travailler à Abu Dhabi ou à Bangkok.

- s'il travaille à Abu Dhabi, la probabilité qu'il y reste l'année suivante vaut 0,7 ;
- s'il travaille en Thaïlande, la probabilité qu'il déménage à Abu Dhabi l'année suivante vaut 0,3.

1. Compléter le graphe probabiliste suivant modélisant cette situation.



2. En considérant que Martin est actuellement à Abu Dhabi, quelle est la probabilité qu'il y soit dans deux ans ? (Il peut avoir séjourné à Bangkok entre temps.)

34 On considère une chaîne de Markov à deux états A et B vérifiant les conditions suivantes :

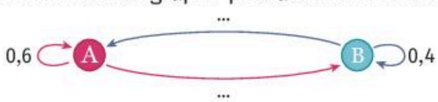
- la probabilité de sortir de l'état A est le triple de la probabilité d'y rester ;
- la probabilité de quitter l'état B est 0,7.

1. Représenter cette chaîne de Markov à l'aide d'un graphe probabiliste et déterminer la matrice de transition associée.

2. Si la distribution initiale est $\pi_0 = (0{,}8 \quad 0{,}2)$, quelle sera la distribution après trois itérations ?

Distribution invariante

35 On considère le graphe probabiliste ci-dessous.



1. Compléter le graphe.

2. Écrire sa matrice de transition P.

3. Montrer que $\pi = (0{,}6 \quad 0{,}4)$ est une distribution invariante de la chaîne de Markov associée.

36 On considère une chaîne de Markov dont la matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

1. Justifier qu'il n'existe qu'une distribution invariante à cette chaîne de Markov.

2. Déterminer par le calcul une distribution invariante.

DIFFÉRENCIATION

Parcours 1 : exercices **41** ; **45** ; **54** ; **57** ; **70** et **76**
Parcours 2 : exercices **47** ; **62** ; **65** et **74**
Parcours 3 : exercices **46** ; **58** ; **72** et **77**

1 Suites de matrices

$U_{n+1} = AU_n + B$

Exercices FLASH

37 On considère la suite de matrices (U_n) définie par son premier terme $U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$, où $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer U_1 et U_2.

2. Déterminer toutes les matrices V_0 de taille 2×1 telles que $AV_0 = V_0$.

38 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Déterminer la matrice colonne B pour que la suite de matrices de premier terme $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $X_{n+1} = AX_n + B$ soit constante.

39 QCM On considère la suite de matrices (X_n) définie par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n + B$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}9 \end{pmatrix}$.
On a alors :

1. $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}7 \end{pmatrix}$ **2.** $X_3 = \begin{pmatrix} 5{,}81 \\ -5{,}521 \end{pmatrix}$

3. $X_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6{,}22 \end{pmatrix}$ **4.** $X_3 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}9 \end{pmatrix}$

40 [Calculer.]

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n \\ u_0 = 1 \,;\, v_0 = 2 \end{cases}$.

1. Pour tout entier naturel n, on note W_n la matrice $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
Justifier que, pour tout entier naturel n, on peut écrire $W_{n+1} = AW_n$, où A est une matrice à préciser.

2. Calculer W_1 et en déduire la valeur de u_1 et de v_1.

3. Exprimer W_n en fonction de A et de n.

4. Calculer, à l'aide de la calculatrice, W_{50}.
Quelle conjecture peut-on faire sur la limite éventuelle de (u_n) et (v_n) ?

41 [Calculer.]

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Calculer u_2 et u_3.

2. Pour tout entier n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

a. Déterminer la matrice X_0.

b. Justifier que la suite de matrices (X_n) vérifie, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$, où A désigne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c. En déduire, pour tout entier naturel n, X_n en fonction de A et de n.

d. Calculer, à l'aide de la calculatrice, X_{20} et en déduire la valeur de u_{20} et de u_{21}.

Remarque : La suite étudiée dans cet exercice est la **suite de Fibonacci**.

42 [Raisonner.]

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ ainsi que la matrice colonne $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans laquelle x et y sont des nombres réels vérifiant $N(Z) = x^2 + y^2 = 1$ et $xy > 0$.

1. Montrer que $0 \leqslant N(AZ) \leqslant \frac{1}{2} N(Z)$.

2. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant N(A^n Z) \leqslant \frac{1}{2^n}$.

3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} N(A^n Z) = 0$.

43 [Calculer.]

On considère la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

1. On définit la suite de matrices (X_n) par $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_{n+1} = MX_n$ où M est une matrice que l'on précisera.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = M^n X_0$.

44 [Calculer.]

On considère une suite de matrices (U_n) définie par son premier terme $U_0 = \begin{pmatrix} 64 \\ 64 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} U_n + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer U_1, U_2 et U_3.

2. Conjecturer une expression du terme général de cette suite en fonction de n.

3. Prouver cette conjecture.

45 [Calculer.]

Soit (U_n) la suite de matrices définie, pour tout entier naturel n, par $U_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}98 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}95 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{pmatrix} U_n + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$.

1. En choisissant astucieusement les nombres réels α, β et γ, déterminer une suite de matrices (V_n) telle que $V_n = U_n - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, et une matrice carrée A d'ordre 3, telle que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$.

2. Déterminer V_0 et exprimer, pour tout entier naturel n, V_n en fonction de n.

3. Exprimer alors, pour tout entier naturel n, U_n en fonction de U_0, de n et de A.

4. En déduire U_{20}.

46 [Calculer.]

Soit (U_n) la suite de matrices définie, pour tout entier naturel n, par $U_{n+1} = AU_n + B$ et de premier terme $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. En choisissant astucieusement les nombres réels α, β et γ, déterminer une suite de matrices (V_n) définie, pour tout entier naturel n, par $V_n = U_n - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et vérifiant $V_{n+1} = AV_n$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer V_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, V_n en fonction de n.

4. Exprimer alors U_n en fonction de n.

5. En déduire U_{10}.

47 [Calculer.]

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = 4$, pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_{n+1} = 7u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 5v_n \end{cases}$.

1. Déterminer une matrice A telle que, pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

2. Montrer que $A = 6I_2 + J$ où J est une matrice vérifiant $J^2 = 0_2$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 6^n + n6^{n-1} & -n6^{n-1} \\ n6^{n-1} & 6^n - n6^{n-1} \end{pmatrix}.$$

4. En déduire les limites de (u_n) et (v_n).

48 [Calculer.] DÉMO

Soient k un entier naturel non nul, A une matrice carrée d'ordre k et B une matrice colonne à k lignes.

On définit, pour tout entier naturel n, la suite de matrices colonnes (U_n) par son premier terme U_0 et par la relation de récurrence, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} = AU_n + B.$$

On suppose que $A - I_k$ est une matrice inversible et on souhaite exprimer, pour tout n, U_n en fonction de n.

On pose $C = -(A - I_k)^{-1}B$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = U_n - C.$$

1. Justifier que C est une matrice colonne.

2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_{n+1} en fonction de V_n.

AIDE

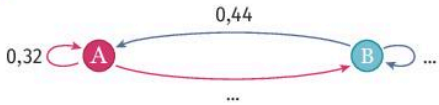
On pourra remarquer que $V_n = U_n - C \Leftrightarrow U_n = V_n + C$.

3. Exprimer alors V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.

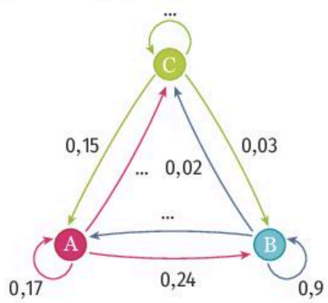
2 Chaînes de Markov

Exercices FLASH

49 Compléter le graphe probabiliste ci-dessous.



50 Compléter le graphe probabiliste ci-dessous.

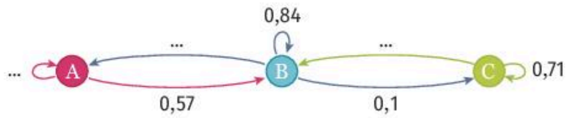


51 On note A et B les deux états d'une chaîne de Markov. Compléter les matrices de transition suivantes pour lesquelles les états sont rangés dans l'ordre alphabétique, puis construire le graphe probabiliste correspondant.

1. $M = \begin{pmatrix} 0{,}2 & \dots \\ \dots & 0{,}91 \end{pmatrix}$ **2.** $N = \begin{pmatrix} \dots & 0{,}17 \\ \dots & 1 \end{pmatrix}$

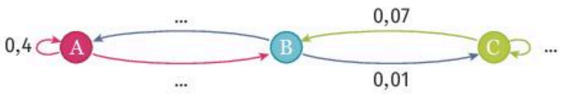
52 [Calculer.]

Compléter le graphe probabiliste ci-dessous.



53 [Calculer.]

Compléter le graphe probabiliste ci-dessous.



54 [Modéliser.]

Représenter la situation suivante par un graphe probabiliste.

On modélise la météo d'un jour à l'autre en considérant uniquement les états suivants : beau temps (B), temps nuageux (N), temps pluvieux (P).

La modélisation nous indique que lorsqu'il fait beau, alors la probabilité que le lendemain soit nuageux est $0{,}5$ et que le lendemain soit pluvieux est $0{,}2$.

Lorsque le temps est nuageux, le lendemain reste nuageux avec une probabilité de $0{,}4$ et devient pluvieux avec une probabilité de $0{,}4$ également.

Finalement, lorsqu'il pleut, la probabilité que le lendemain soit nuageux est égale à $0{,}6$ alors que la probabilité qu'il fasse beau est $0{,}1$.

55 [Modéliser.]

Lorsque Yazid réussit son pénalty, il a deux chances sur trois de réussir le suivant mais s'il le rate, il n'a alors qu'une chance sur quatre de réussir le prochain.

Modéliser cette situation par une chaîne de Markov en utilisant un graphe (en notant respectivement R et $\overline{\mathrm{R}}$ les états correspondant à « réussir le pénalty » et « rater le pénalty ») puis en utilisant une matrice de transition.

Histoire des maths

Le mathématicien russe Andreï Markov (1856-1922) était un disciple de Tchebychev. Il a contribué au développement de la théorie des nombres, de l'analyse, et des probabilités, en étendant les conditions d'application de la loi des grands nombres.

56 [Modéliser.]

John a des problèmes d'absentéisme :

- lorsqu'il est absent une journée, la probabilité qu'il soit ponctuel le lendemain est $\frac{4}{5}$ alors que celle d'être en retard s'élève à $\frac{1}{20}$;
- lorsqu'il est ponctuel, la probabilité qu'il soit ponctuel le lendemain est $\frac{3}{5}$ alors que celle d'être en retard vaut $\frac{1}{4}$;
- lorsqu'il est en retard, la probabilité qu'il soit ponctuel le lendemain est $\frac{3}{4}$ alors que celle d'être en retard est $\frac{1}{8}$.

On note :

- A l'événement « John est absent » ;
- P l'événement « John est ponctuel » ;
- R l'événement « John est en retard ».

Modéliser cette situation par une chaîne de Markov à trois états. On en donnera une représentation sous la forme d'un graphe probabiliste et sous la forme d'une matrice de transition M dans laquelle les sommets sont rangés dans l'ordre alphabétique.

57 [Représenter.]

1. Représenter par un graphe probabiliste une chaîne de Markov à deux états dont la matrice de transition est

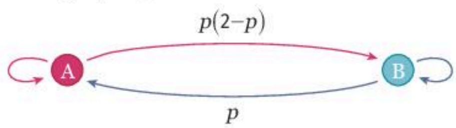
$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix}0{,}29 & 0{,}71\\ 0{,}13 & 0{,}87\end{pmatrix}.$$

2. Représenter par un graphe probabiliste une chaîne de Markov à trois états dont la matrice de transition est

$$\mathrm{N}=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7\\ 0{,}55 & 0{,}3 & 0{,}15\\ 0{,}6 & 0{,}28 & 0{,}12\end{pmatrix}.$$

58 [Raisonner.]

Soit $p\in[0\,;1]$. On considère une chaîne de Markov associée au graphe probabiliste suivant.



1. Vérifier que $0\leqslant p(2-p)\leqslant 1$.

2. Montrer que $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A})=(\mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{B}))^2$.

59 [Calculer.]

Chacune des matrices suivantes correspond à la matrice de transition d'une chaîne de Markov.

Compléter ces matrices puis représenter des graphes probabilistes leur correspondant.

1. $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0{,}3 & \dots\\ 0{,}1 & \dots\end{pmatrix}$

2. $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}0{,}42 & \dots\\ \dots & 0{,}65\end{pmatrix}$

60 [Représenter.]

Représenter des graphes probabilistes correspondant aux matrices de transition ci-dessous.

1. $A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1\\ 0{,}5 & 0{,}15 & 0{,}35\\ 0{,}8 & 0{,}08 & 0{,}12\end{pmatrix}$ **2.** $B=\begin{pmatrix}0{,}35 & 0 & 0{,}65\\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1\\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}$

61 [Représenter.]

Compléter les matrices de transition suivantes, puis représenter des graphes probabilistes leur correspondant.

1. $A=\begin{pmatrix}0{,}15 & 0{,}13 & \dots\\ \dots & 0{,}42 & 0{,}23\\ \dots & 0{,}34 & 0{,}66\end{pmatrix}$ **2.** $B=\begin{pmatrix}\dots & 1 & \dots\\ \dots & 0{,}92 & 0{,}02\\ 0{,}55 & 0{,}13 & \dots\end{pmatrix}$

62 [Modéliser.]

On considère une urne dans laquelle se trouvent deux boules blanches et deux boules noires, ces boules étant supposées indiscernables au toucher.

On tire une boule au hasard puis, sans la remettre, on tire une autre boule. On remet la boule tirée en premier et on en tire une nouvelle. On itère ensuite le processus en remettant à l'étape i la boule tirée à l'étape $i-2$ et en en tirant une nouvelle.

1. Quelle est la distribution de probabilité initiale ? On exprimera la réponse sous la forme d'une matrice ligne $(\text{probabilité noire} \quad \text{probabilité blanche})$.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire sachant que la boule tirée à l'étape précédente est noire ?

3. Modéliser cette situation par une chaîne de Markov en utilisant une matrice de transition et un graphe probabiliste.

3 Évolution d'une chaîne de Markov

Exercices FLASH

63 On considère une chaîne de Markov à deux états dont la matrice de transition P est :

$$P=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}7\\ 0{,}6 & 0{,}4\end{pmatrix}.$$

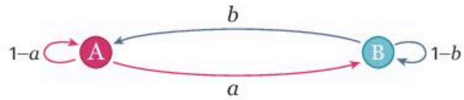
Pour une distribution initiale $\pi_0=(0{,}5 \quad 0{,}5)$, quelle est la probabilité de chacun des états de la chaîne de Markov au bout de trois transitions ?

64 Déterminer une matrice de transition associée à une chaîne de Markov pour laquelle la distribution $(0{,}1 \quad 0{,}9)$ est invariante.

65 [Raisonner.]

Dans cet exercice, a et b désignent deux nombres réels de l'intervalle $]0\,;1[$.

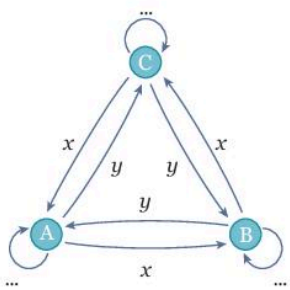
Montrer que l'état $\left(\dfrac{b}{a+b} \quad \dfrac{a}{a+b}\right)$ est l'unique distribution invariante de la chaîne de Markov associée au graphe probabiliste suivant.



66 [Calculer.]

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs dont la somme est inférieure ou égale à 1.

Montrer que l'état $\left(\dfrac{1}{3} \quad \dfrac{1}{3} \quad \dfrac{1}{3}\right)$ est l'unique distribution invariante du graphe probabiliste suivant.



67 [Communiquer.]

Selon les années, Nadège passe Noël soit chez ses parents, soit chez la famille de son mari Victor.

En 2020, Nadège fête Noël chez la famille de Victor.

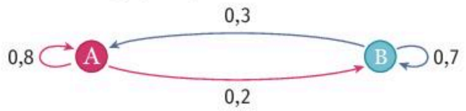
Pour les années suivantes, elle choisit où passer Noël selon la règle suivante :

- lorsqu'elle a passé Noël chez ses parents, il y a une probabilité de 0,3 qu'elle fête encore Noël chez eux l'année suivante ;
- lorsqu'elle passe Noël chez la famille de Victor, il y a une probabilité de 0,6 qu'elle fête Noël chez ses parents l'année suivante.

Quelle est la probabilité qu'elle passe Noël chez ses parents en 2035 ?

68 ALGO [Modéliser.]

On considère le graphe probabiliste ci-dessous.



À l'aide d'un programme en Python simulant une marche aléatoire sur le graphe, conjecturer la distribution invariante de cette chaîne de Markov.

69 TABLEUR [Modéliser.]

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$, la suite (A_n) de points définie par $A_0(0\,;0)$, $A_1(1\,;0)$ puis, pour tout entier naturel non nul n, on construit A_{n+1} en déplaçant A_n de 1 vers la droite ou de 1 vers le haut selon la règle suivante :

- si le déplacement de A_{n-1} vers A_n est vers le haut, alors le déplacement de A_n vers A_{n+1} le sera aussi avec une probabilité de 0,6. Sinon, le déplacement de A_n vers A_{n+1} est vers la droite ;
- si le déplacement de A_{n-1} vers A_n est vers la droite, alors le déplacement de A_n vers A_{n+1} le sera aussi avec une probabilité de 0,7. Sinon, le déplacement de A_n vers A_{n+1} est vers le haut.

1. Modéliser la suite des coordonnées de $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ par une chaîne de Markov dont on donnera la représentation par un graphe probabiliste.

2. a. Reproduire le tableur suivant.

	A	B	C	D	E
1	n	Abscisse de A_n	Ordonnée de A_n	Modification	Coefficient directeur (A_0A_n)
2	0	0	0		
3	1	1	0	abscisse	

b. Que doit-on écrire dans la cellule **D3** pour que le tableur écrive « abscisse » ou « ordonnée » selon la direction dans laquelle doit s'effectuer le déplacement de A_1 ?

c. Compléter les cellules **B4** et **C4** pour déterminer les coordonnées de A_2 en fonction de celles de A_1 et du déplacement indiqué en **D4**.

d. Compléter la cellule **E4** pour obtenir le coefficient directeur de la droite (A_0A_2).

3. Étirer la ligne 4 vers le bas pour calculer les coordonnées de A_n pour tout $n \leqslant 200$, puis conjecturer la limite du coefficient directeur de (A_0A_n).

70 [Modéliser.]

Ramanujan est un génie mathématique qui a trois activités au cours d'une journée : conjecturer de nouvelles formules mathématiques, démontrer des résultats et imaginer des applications aux résultats qu'il a déjà inventés.

Chaque heure, il peut changer, ou pas, d'activité.

- S'il a conjecturé de nouvelles formules au cours de l'heure précédente, il continue avec une probabilité de 0,3 ou il les démontre avec une probabilité égale à 0,5 ;
- s'il a démontré des résultats, il continue avec une probabilité de 0,05 ou il imagine des applications à ses résultats avec une probabilité 0,75 ;
- s'il a imaginé des applications, il continue avec une probabilité de 0,5 ou il conjecture de nouvelles formules avec une probabilité égale à 0,2.

1. Représenter graphiquement la chaîne de Markov associée à la situation et déterminer la matrice de transition.

2. Au début de la journée, Ramanujan commence toujours par conjecturer de nouvelles formules. Quelle est la probabilité que quatre heures plus tard, il soit en train de démontrer un résultat ?

3. Chaque jour, le mathématicien travaille 10 heures. Quelle est la probabilité qu'il s'occupe avec chacune de ces activités lors de sa dernière heure de travail ?

71 [Raisonner.]

On considère une chaîne de Markov à deux états A et B dans laquelle $P_A(B) = P_B(A)$ avec $P_A(B)$ différent de 0 et de 1.

1. Que peut-on dire de la matrice de transition ?

2. Montrer qu'à long terme, quelle que soit la distribution de probabilité initiale, les deux états sont équiprobables.

72 [Chercher.]

On considère la chaîne de Markov définie par la matrice de transition $\begin{pmatrix} p(2-p) & (1-p)^2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$, avec $p \in [0\,;1]$, et par la distribution initiale $(0{,}3 \quad 0{,}7)$.

1. Déterminer p pour que la deuxième composante de la distribution de probabilité soit maximale après une transition.

2. Que vaut alors la première composante de cette distribution de probabilité ?

73 [Modéliser.]

Dans un pays, les habitants peuvent soit être des citoyens, soit être des soldats, soit être des dirigeants.

Chaque année :

- un soldat peut devenir un citoyen avec une probabilité de 0,1. Sinon, il reste un soldat ;
- un citoyen peut devenir un soldat avec une probabilité de 0,2, être élu dirigeant avec une probabilité de 0,3 ou rester un citoyen ;
- un dirigeant peut se faire réélire avec une probabilité de 0,1. Il peut également devenir un soldat avec une probabilité de 0,6. Dans tous les autres cas, il devient citoyen.

1. Représenter cette situation par une chaîne de Markov (donnée sous la forme d'un graphe probabiliste).

2. On choisit un citoyen. Quelle est la probabilité qu'il soit dirigeant dans deux ans ? Dans trois ans ?

74 SVT [Modéliser.]

Un essaim d'abeilles peut évoluer chaque année de trois manières qui s'excluent mutuellement. Il peut essaimer, produire du miel, ou contracter une maladie.

L'évolution suit les règles suivantes :

- s'il a essaimé l'année passée, il contracte une maladie l'année en cours avec une probabilité de 0,1 et il produit du miel avec une probabilité de 0,8 ;
- s'il a produit du miel l'année passée, il essaime avec une probabilité de 0,9 et il contracte une maladie avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il a contracté une maladie l'année passée, il en contracte une nouvelle l'année en cours avec une probabilité de 0,03 et il produit du miel avec une probabilité de 0,8.

La première année, un naturaliste observe que la ruche a essaimé.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit à nouveau en train d'essaimer lorsque le naturaliste reviendra trois années plus tard ?

2. Si on observe le développement de l'essaim sur une longue période, quelle proportion représentent les années où cet essaim a produit du miel ?

75 [Modéliser.]

Les Dalton sont en prison. Chaque semaine, ils tentent de s'évader. Leur tentative est une réussite dans 30 % des cas. Une fois évadés, la probabilité qu'ils se fassent capturer chaque semaine s'élève à 80 %.

1. Modéliser cette situation par une chaîne de Markov à deux états. On notera L l'état « les Dalton sont libres » et P l'état « les Dalton sont en prison ».

2. Déterminer la probabilité qu'ils soient libres au bout de huit semaines.

3. Quelle est la probabilité qu'ils purgent la totalité de leur peine d'un mois de prison (quatre semaines) sans avoir réussi à s'évader une seule fois ?

76 [Chercher.]

1. Trouver deux nombres réels strictement positifs x et y solutions du système ci-dessous, vérifiant $x+y=1$.

$$\begin{cases}\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}y=x\\ \frac{1}{3}x+\frac{5}{6}y=y\end{cases}$$

2. En déduire une distribution invariante de la chaîne de Markov définie par la matrice de transition $\mathrm{P}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\end{pmatrix}$.

77 [Chercher.]

On considère une chaîne de Markov (X_n) ayant pour distribution invariante π. Soit (Z_n) la chaîne de Markov définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par $\mathrm{Z}_n=\mathrm{X}_{2n}$.

Montrer que π est également une distribution invariante de (Z_n).

78 [Raisonner.] DÉMO

Soit (X_n) une chaîne de Markov à deux états numérotés 1 et 2 dont on note P la matrice de transition associée, les sommets étant rangés dans l'ordre croissants, et π_0 la distribution initiale.

On note, pour tout entier naturel n, π_n la matrice ligne correspondant à la distribution de probabilité de la variable aléatoire X_n.

1. En revenant à la définition d'une chaîne de Markov X_n et de P, justifier que, pour tout entier naturel n, $\pi_{n+1}=\pi_n\mathrm{P}$.

2. Montrer alors par récurrence sur n que $\pi_n=\pi_0\mathrm{P}^n$.

3. Reprendre cette démonstration dans le cadre d'une chaîne de Markov à 3 états.

79 [Calculer, Représenter.]

D'après bac ES, Liban, 2019

Les clients d'un restaurant sont des habitués qui y déjeunent tous les jours. En septembre 2018, le restaurateur propose trois nouveaux plats : plat A, plat B et plat C. D'un jour à l'autre, il constate que :

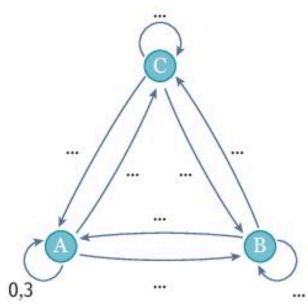
- parmi les clients ayant choisi le plat A : 30 % reprennent le plat A le lendemain, 50 % prennent le plat B le lendemain ;
- parmi les clients ayant choisi le plat B : 30 % reprennent le plat B le lendemain, 60 % prennent le plat A le lendemain ;
- parmi les clients ayant choisi le plat C : 35 % prennent le plat A le lendemain, 45 % prennent le plat B le lendemain.

On note pour tout entier n non nul :

- a_n la proportion de clients ayant choisi le plat A le n-ième jour ;
- b_n la proportion de clients ayant choisi le plat B le n-ième jour ;
- c_n la proportion de clients ayant choisi le plat C le n-ième jour.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $P_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$ l'état probabiliste le n-ième jour.

1. Représenter cette situation en complétant le graphe probabiliste ci-dessous.



2. Donner la matrice de transition M de ce graphe, en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

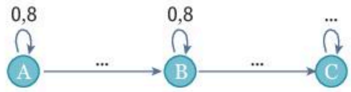
3. Le restaurateur a noté que, le premier jour, 35,5 % des clients ont pris le plat A, 40,5 % ont pris le plat B et 24 % ont pris le plat C. Donner P_1.

4. Calculer P_2.

5. Le restaurateur affirme que le douzième jour, la proportion de clients qui choisiront le plat C sera à peu près la même que le treizième jour, soit environ 15,9 %. A-t-il raison ? Justifier.

80 [Calculer, Modéliser.]

On modélise l'attente dans une file par le graphe probabiliste ci-dessous.



À son arrivée, le client est en A. Quand il avance, il va tout d'abord en B, puis en C où il est pris en charge. Chaque minute, il a une probabilité égale à 0,8 de rester en A ou en B. On cherche à estimer la durée d'attente dans la file, c'est-à-dire le nombre de minutes avant d'atteindre l'état C.

Pour tout entier naturel, la matrice ligne $\pi_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$ représente l'état probabiliste au bout de n minutes d'attente, où a_n, b_n et c_n désignent les probabilités d'être respectivement en A, en B et en C, n minutes après l'arrivée.

1. Déterminer P la matrice de transition de ce graphe probabiliste.

2. Déterminer l'état initial π_0.

3. Vérifier que $(0 \quad 0 \quad 1)$ est une distribution invariante de la chaîne de Markov associée.

4. Quelle est l'attente minimale d'un client ?

5. On considère les deux matrices suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, D^n.

b. Calculer N^2 puis N^3.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$P^n = \begin{pmatrix} 0{,}8^n & 0{,}2 \times 0{,}8^{n-1} \times n & 0{,}02 \times 0{,}8^{n-2} \times n(n-1) \\ 0 & 0{,}8^n & 0{,}2 \times 0{,}8^{n-1} \times n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

AIDE

On admet que si A et B sont deux matrices carrées de taille 3 vérifiant $AB = BA$, alors, pour tout entier naturel non nul n, $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$.

d. Montrer que π_n converge vers la distribution invariante obtenue en question **3.**.

6. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de minutes d'attente.

a. Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, on a $P(X = k) = c_k - c_{k-1}$.

b. Exprimer alors l'espérance de X en fonction des c_k.

c. En utilisant les résultats sur les sommes des termes de suites géométriques, déterminer l'espérance de X.

d. Interpréter le résultat obtenu dans le cadre de l'exercice.

81 [Modéliser, Calculer.]

D'après bac ES, Métropole, juin 2017

Dans un jeu vidéo, une suite d'énigmes est proposée au joueur. Ces énigmes sont classées en deux catégories : les énigmes de catégorie A sont les énigmes faciles ; les énigmes de catégorie B sont les énigmes difficiles.

Le choix des énigmes successives est aléatoire et vérifie les conditions suivantes :

- la première énigme est facile ;
- si une énigme est facile, la probabilité que la suivante soit difficile est égale à 0,15 ;
- si une énigme est difficile, la probabilité que la suivante soit facile est égale à 0,1.

On modélise cette situation par une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geqslant 1}$ où, pour tout $n \geqslant 1$, $X_n = a$ si la n-ième énigme est facile et $X_n = b$ sinon.

1. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1.

2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets a et b.

3. Écrire la matrice P associée à ce graphe.

4. Déterminer la loi de probabilité de X_2.

5. Pour tout $n \geqslant 1$, il existe deux nombres réels dans $[0 ; 1]$ tels que la loi de probabilité de X_n soit donnée dans le tableau suivant.

x	a	b
$P(X_n = x)$	a_n	b_n

a. Justifier que, pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0{,}75a_n + 0{,}1$.

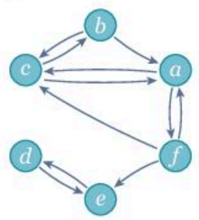
b. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $v_n = a_n - 0{,}4$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c. Exprimer v_n en fonction de n, puis montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n = 0{,}8 \times 0{,}75^n + 0{,}4$.

82 ALGORITHME PAGERANK [Chercher, Raisonner.]

Cet exercice est une illustration d'un des défauts de l'algorithme PageRank étudié en TP.
On considère le graphe orienté suivant.



En utilisant l'algorithme PageRank, déterminer la pondération attribuée à chaque sommet.
En quoi est-ce problématique ?

83 APPROFONDISSEMENT [Raisonner, Modéliser.]

Modèle des urnes d'Ehrenfest

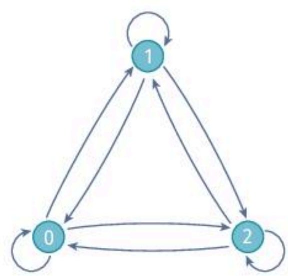
On considère deux urnes A et B et un entier $N \geqslant 1$.
Au départ de l'expérience, N boules numérotées de 0 à $N-1$ sont placées dans l'urne A. On répète ensuite n fois les actions suivantes :

- on choisit au hasard et de manière équiprobable un nombre k entre 0 et $N-1$;
- on déplace ensuite la boule numérotée k dans l'urne dans laquelle elle ne se trouve pas.

Dans cet exercice on s'intéresse au cas $N = 2$.
Une étude pour N quelconque est proposée algorithmiquement dans le TP 1 p. 218 de ce chapitre.
On posons X_j la variable aléatoire correspondant au nombre de boules contenu dans l'urne A à la j-ième étape de l'expérience.

1. Dresser une liste des valeurs pouvant être prises par X_j.

On cherche dans la suite à représenter cette situation sous la forme d'une chaîne de Markov correspondant au graphe probabiliste ci-dessous. Les questions suivantes ont pour but de le compléter.



2. Justifier que, pour tout $j \in \{0 ; \ldots ; n-1\}$, et pour tout $i \in \{0 ; 1 ; 2\}$, $P_{X_j = i}(X_{j+1} = i) = 0$.

3. Justifier que, pour tout $j \in \{0 ; \ldots ; n-1\}$, $P_{X_j=0}(X_{j+1} = 2) = 0$ et $P_{X_j=2}(X_{j+1} = 0) = 0$.

4. En déduire, pour tout $j \in \{0 ; \ldots ; n-1\}$, la valeur de $P_{X_j=0}(X_{j+1} = 1)$ et $P_{X_j=2}(X_{j+1} = 1)$.

5. Déterminer $P_{X_j=1}(X_{j+1} = 0)$ et $P_{X_j=1}(X_{j+1} = 2)$.
En déduire la matrice de transition M associée à cette chaîne de Markov.

6. Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $M^j = M$ si j est impair, et $M^j = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ si j est pair.

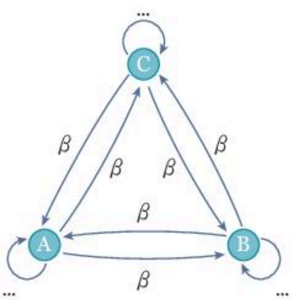
7. Déterminer la distribution de probabilité initiale de cette chaîne de Markov.

8. En déduire, pour tout $j \in \{1 ; \ldots ; n\}$, la distribution de probabilité π_j à la j-ième étape.

9. En déduire, pour tout $j \in \{1 ; \ldots ; n\}$, le nombre moyen de boules dans l'urne A à la j-ième étape.

84 [Communiquer, Raisonner.]

Soit β un nombre réel. On considère le graphe probabiliste ci-dessous.



1. Reproduire et compléter ce graphe.

2. Déterminer les valeurs possibles de β.

3. On désigne respectivement par I_3 et M la matrice identité d'ordre 3 et la matrice de taille 3×3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.

a. Montrer que la matrice P de transition associée à ce graphe probabiliste, où les sommets sont rangés dans l'ordre alphabétique, peut s'écrire sous la forme $\mathrm{P} = \alpha \mathrm{I}_3 + \beta \mathrm{M}$, où on exprimera α en fonction de β.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel k non nul, $\mathrm{M}^k = 3^{k-1}\mathrm{M}$.

c. Vérifier que $\mathrm{I}_3 \times \mathrm{M} = \mathrm{M} \times \mathrm{I}_3$ puis montrer que, pour tout entier naturel n :

$$\mathrm{P}^n = \alpha^n \mathrm{I}_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k}\beta^k \times 3^{k-1}\right)\mathrm{M}.$$

AIDE

On admet que si A et B sont deux matrices carrées de taille 3 vérifiant $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$, alors, pour tout entier naturel non nul n, $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{A}^{n-k}\mathrm{B}^k$.

4. On admet que la distribution initiale est $\pi_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$.

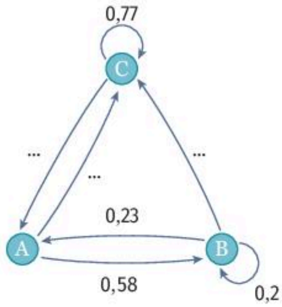
a. Déterminer la distribution de probabilité après n transitions, notée π_n.

b. Déterminer le comportement asymptotique de la chaîne de Markov.

85 [Communiquer, Raisonner.]

Le théorème de Perron-Frobenius implique que si une matrice de transition (ou une de ses puissances) a tous ses coefficients strictement positifs, alors, quelle que soit la distribution initiale, il existe une unique distribution invariante pour la chaîne de Markov associée.

1. Vérifier que la matrice de transition P associée au graphe probabiliste ci-dessous, et obtenue en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique, n'a pas que des coefficients strictement positifs.



2. Soient E la matrice carrée de taille 3 dont tous les coefficients sont égaux à $\frac{1}{3}$ et α un réel appartenant à $]0\,;1[$.

a. Montrer que la matrice $\alpha\mathrm{P} + (1-\alpha)\mathrm{E}$ définit une matrice de transition dont tous les coefficients sont strictement positifs.

AIDE

On commencera par étudier le signe de $1-\alpha$.

b. Construire le graphe probabiliste correspondant.

Remarque : C'est l'une des astuces pour améliorer l'algorithme PageRank présenté dans le TP2. Avec une valeur de α proche de 1, les résultats de l'algorithme sont améliorés.

86 APPROFONDISSEMENT [Modéliser.]

Modèle « proie-prédateur »

Dans un étang se trouvent deux populations de poissons : des gardons et des brochets.
Le brochet étant un prédateur naturel du gardon, sa population varie en fonction :

- du nombre de brochets déjà présents dans l'étang (reproduction) ;
- du nombre de gardons déjà présents dans l'étang (proies).

De la même manière, la population du gardon évolue en fonction :

- du nombre de gardons déjà présents dans l'étang (reproduction) ;
- du nombre de brochets déjà présents dans l'étang (prédateurs).

Au 1er janvier 2020, on compte 2 000 gardons et 100 brochets dans l'étang.
Pour tout entier naturel n, on note respectivement g_n et b_n le nombre de gardons et de brochets dans l'étang au 1er janvier de l'année $2020+n$.
On a donc $g_0 = 2000$ et $b_0 = 100$.
Dans ce problème, on étudiera différentes modélisations de cette situation.
Chacune de ces parties est indépendante des précédentes.

Partie A : Première modélisation

Dans cette partie, on suppose que la situation peut être modélisée par $\begin{cases} b_{n+1} = 0{,}7b_n + 0{,}01g_n \\ g_{n+1} = 0{,}9g_n - 0{,}2b_n \end{cases}$.

Pour tout entier naturel n, on note U_n la suite $\begin{pmatrix} b_n \\ g_n \end{pmatrix}$.

1. Écrire le système ci-dessus sous la forme d'un système matriciel $U_{n+1} = AU_n$, où A est une matrice à déterminer.

2. Exprimer alors U_n en fonction de A et de n.

3. a. À l'aide de la calculatrice, déterminer alors U_{30} et interpréter les résultats obtenus (on arrondira les résultats obtenus à l'unité).

b. Donner une estimation du nombre de brochets et de gardons vivant dans l'étang au 1er janvier 2110.

4. a. On admet qu'il existe une matrice carrée inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \frac{20-\sqrt{5}}{25} & 0 \\ 0 & \frac{20+\sqrt{5}}{25} \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, exprimer D^n en fonction de n, puis A^n en fonction de P et de n.

b. En déduire la limite des suites (b_n) et (g_n).
Ces limites dépendent-elles du choix de b_0 et de g_0 ?

Partie B : Seconde modélisation

Afin d'enrayer la disparition des espèces (Partie A), on introduit chaque année 50 gardons supplémentaires dans l'étang. La situation peut être modélisée par :

$$\begin{cases} b_{n+1} = 0{,}7b_n + 0{,}01g_n \\ g_{n+1} = 0{,}9g_n - 0{,}2b_n + 50 \end{cases}.$$

Pour tout entier naturel n, on note V_n la suite $\begin{pmatrix} b_n \\ g_n \end{pmatrix}$.

1. Écrire le système ci-dessus sous la forme d'un système matriciel $V_{n+1} = A'V_n + B'$, où A' et B' sont deux matrices à déterminer.

2. a. Calculer $\det(A' - I_2)$ puis justifier que $A' - I_2$ est inversible.

b. On note $C = -(A - I_2)^{-1}B$ et on définit la suite (W_n) par la relation $W_n = V_n - C$ valable pour tout entier naturel n.
Justifier que, pour tout entier naturel n, $W_{n+1} = AW_n$ puis exprimer W_n en fonction de A et de n.

c. Exprimer alors, pour tout entier naturel n, V_n en fonction de A, de C et de n.

3. a. On rappelle qu'il existe une matrice carrée inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \frac{20-\sqrt{5}}{25} & 0 \\ 0 & \frac{20+\sqrt{5}}{25} \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, exprimer V_n en fonction de n.

b. En déduire la limite des suites (b_n) et (g_n).
Ces limites dépendent-elles du choix de b_0 et de g_0 ?

Complexes Arithmétique Matrices Graphes

Exercice transversal en lien avec ce chapitre :
5 p. 238

Le Grand Oral

Entraînez-vous au Grand Oral et enregistrez-vous sur LLS.fr/GrandOralMaths

Comme le suggère le programme, les problèmes abordés en maths expertes peuvent servir d'appui à des questions de Grand Oral. Voici un exemple, basé sur l'enseignement de spécialité, utilisant des notions de ce chapitre.

Au cours de l'enseignement de spécialité, vous avez étudié les suites numériques.

1. Expliciter une méthode, reposant sur les notions de ce chapitre, permettant d'étudier des suites couplées telles que les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 4$, $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$.

2. Donner quelques exemples de situations concrètes permettant d'aboutir à des modélisations de ce type.

Méthodologie Consulter les fiches méthode de ce manuel pour le Grand Oral p. 244

TRAVAILLER AUTREMENT

Production d'élève

On donne ci-dessous un énoncé d'exercice et une copie d'élève.

1. Trouver les erreurs de l'élève et préciser les endroits où la rédaction est incomplète.

2. Le professeur souhaite distribuer un corrigé détaillé de l'exercice. Rédiger une telle correction.

Le travail d'un chercheur en mathématiques est composé de trois grandes activités : les demandes de financement, l'enseignement et le travail sur son sujet de recherche. Son emploi du temps est organisé de la façon suivante :

- Si, pendant une heure, le chercheur demande des financements, il continue à le faire l'heure suivante avec une probabilité de 50 %, enseigne avec une probabilité de 20 %, ou travaille sur son sujet de recherche.
- Si, pendant une heure, le chercheur enseigne, il demande des financements l'heure suivante avec une probabilité de 80 %, travail sur son sujet de recherche avec une probabilité de 10 %, ou bien continue d'enseigner.
- Si, pendant une heure, le chercheur travaille sur son sujet de recherche, il a une probabilité de 30 % de continuer à le faire, une probabilité de 10 % de demander des financements l'heure suivante. Sinon, il enseigne.

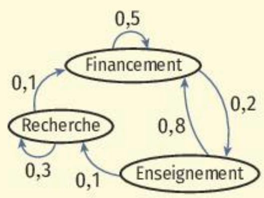
Le chercheur commence toujours sa journée par travailler sur son sujet de recherche.

1. Représenter graphiquement la chaîne de Markov associée à la situation, puis déterminer sa matrice de transition.

2. Déterminer la probabilité que le chercheur effectue des demandes de financement durant sa troisième heure de travail de la journée.

1. Le graphe ci-contre représente la chaîne de markov associée à la situation.

La matrice de transition de cette chaîne de markov est : $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,3 \end{pmatrix}$.



2. La distribution initiale est $P_0 = (0 \ \ 0 \ \ 1)$.

On a $M^2 = \begin{pmatrix} 0,5^2 & 0,2^2 & 0^2 \\ 0,8^2 & 0^2 & 0,1^2 \\ 0,1^2 & 0^2 & 0,3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,04 & 0 \\ 0,64 & 0 & 0,01 \\ 0,01 & 0 & 0,09 \end{pmatrix}$. *Donc* $P_1 = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,04 & 0 \\ 0,64 & 0 & 0,01 \\ 0,01 & 0 & 0,09 \end{pmatrix} \times (0 \ \ 0 \ \ 1) = (0,01 \ \ 0 \ \ 0,09)$.

Le chercheur a donc une probabilité de 9 % d'effectuer des demandes de financement durant sa troisième heure de travail de la journée.

Exercices inversés

1 **1.** Dessiner un graphe pouvant admettre comme matrice d'adjacence $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Dessiner un graphe pouvant admettre comme matrice d'adjacence $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Dessiner un graphe probabiliste pouvant admettre comme matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2 Inventer une matrice pouvant être assimilée à la matrice de transition d'un graphe probabiliste.

3 **1.** Imaginer une situation nécessitant la réalisation d'un graphe connexe mais non complet.

2. Tracer un graphe dont tous les sommets sont de degré 2.

4 **1.** Donner l'écriture d'une matrice inversible.

2. Donner l'écriture d'une matrice non inversible.

5 Proposer un problème amenant à la résolution du système suivant : $\begin{cases} 2x + 6y = 60 \\ 2x + 3y = 45 \end{cases}$.

Recherche / Exposé

Comment les graphes sont-ils employés dans les applications suivantes : réseaux de transport, automates et problèmes de coloration. Trouver d'autres exemples d'applications concrètes.

Les capitaux des jumeaux Tarmef

Le 1er janvier 2020, à la naissance de ses deux jumeaux en France, monsieur Pierre de Tarmef a déposé au total 300 000 € sur deux comptes bloqués pour une période de N années. Il a hésité pour cela entre deux options :
L'option 1 : 100 000 € à Etienne et 200 000 € à Johann puis, d'une année sur l'autre, transférer 10 % du capital d'Etienne sur le compte de Johann et transférer 10 % du capital de Johann sur le compte d'Etienne.
L'option 2 : 1 000 € à Etienne et 299 000 € à Johann puis, d'une année sur l'autre, transférer 10 % du capital d'Etienne puis 15000 € sur le compte de Johann et transférer simultanément 20 % du capital de Johann sur le compte d'Etienne.
On considère les matrices $U_n = \begin{pmatrix} e_n \\ j_n \end{pmatrix}$ et $V_n = \begin{pmatrix} e'_n \\ j'_n \end{pmatrix}$, où e_n, j_n, e'_n et j'_n sont respectivement les capitaux en euros sur les comptes d'Etienne et de Johann au premier janvier de l'année $2020 + n$, avec l'option **1** et l'option **2** (U_n pour l'option **1** et V_n pour l'option **2**).

Questions préliminaires :

1. Déterminer U_0 et V_0.

2. Conjecturer sans calcul, l'option la plus avantageuse pour chaque frère le jour de sa majorité.

Les parties de cet exercice sont indépendantes et chacune d'entre elles peut être réalisée seul(e) ou en groupe. Les élèves mettent leurs résultats en commun pour résoudre le problème.

PARTIE 1

1. Construire un graphe associé aux évolutions de l'option **1** et déterminer sa matrice de transition P.

2. a. Donner la définition de l'état stationnaire.
b. Pour quelle raison existe-t-il dans ce cas ?
c. Le déterminer et interpréter le résultat obtenu.

3. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} e_{n+1} = 0{,}9e_n + 0{,}1j_n \\ j_{n+1} = 0{,}1e_n + 0{,}9j_n \end{cases}.$$

4. En déduire la matrice A telle que : $U_{n+1} = AU_n$.

PARTIE 2

Pour l'option **1,** on admet que pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = AU_n, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

1. Exprimer U_n en fonction de U_0, de A et de n.

2. a. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer P^{-1}.
b. Vérifier que la matrice $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale et en déduire D^n.

3. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n = 150\,000 - 50\,000 \times 0{,}8^n$, puis déterminer une expression de j_n.

5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} e_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} j_n$.

PARTIE 3

Pour l'option **2,** on admet que $V_{n+1} = BV_n + C$, où $B = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -15\,000 \\ 15\,000 \end{pmatrix}$.

Soient $E = \begin{pmatrix} -50\,000 \\ 50\,000 \end{pmatrix}$ et $W_n = V_n - E$.

1. Montrer que $W_{n+1} = BW_n$, puis exprimer W_n et V_n en fonction de n.

2. On admet que $B = QSQ^{-1}$, où $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}$. Déterminer Q^{-1}.

3. Vérifier que $B^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 + 0{,}7^n & 2 - 2 \times 0{,}7^n \\ 1 - 0{,}7^n & 1 + 2 \times 0{,}7^n \end{pmatrix}$.

4. Déterminer une expression des suites e'_n et j'_n en fonctions de n, puis en déduire leur limite.

MISE EN COMMUN

1. Laquelle de ces deux options serait-elle la plus équitable pour ces deux frères en 2023 ? Le jour de leur majorité ?

2. Au bout d'un nombre « important » d'années, que remarque-t-on pour les différents capitaux ?

1 Déterminant d'une matrice carrée

Soit n un entier naturel non nul et $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \dots & a_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre n.

Propriétés

1. Le déterminant de A, noté $\det(\mathrm{A})$ ou $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \dots & a_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$, vaut :

$$a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & \dots & a_{3,n} \\ a_{4,2} & \dots & a_{4,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} - a_{2,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{3,2} & \dots & a_{3,n} \\ a_{4,2} & \dots & a_{4,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + a_{3,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ a_{4,2} & \dots & a_{4,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+1}a_{n,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & \dots & a_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

Cela permet de caculer, par récurrence, le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n quelconque.

2. On rappelle que si $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\det(\mathrm{A}) = ad - bc$.

3. A est inversible si, et seulement si, $\det(\mathrm{A}) \neq 0$.

Remarque : Lorsque A est inversible, une méthode de détermination de la matrice A^{-1} est explicitée dans le TP 2 p. 189 (algorithme du pivot de Gauss).

EXEMPLE

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(1\times1-2\times1)-3(1\times1-0\times1)+0=-2-3=-5$$

1 Déterminer, en utilisant le déterminant, si chacune des matrices suivantes est inversible.

1. $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\mathrm{C}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\mathrm{D}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 Dans cet exercice, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit D une matrice diagonale de taille n.
Montrer que $\det(\mathrm{D})$ est égal au produit des éléments diagonaux de D.

2. Soit T une matrice triangulaire supérieure (c'est-à-dire pour laquelle $t_{i,j}=0$, dès lors que $i>j$).
Montrer que $\det(\mathrm{T})$ est égal au produit des éléments diagonaux de T.

3 Soit n un entier naturel non nul.

On admet que pour toutes matrices carrées d'ordre n à coefficients réels A et B, on a $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B})$.

1. Montrer que AB est inversible si, et seulement si, A et B sont inversibles.

2. Exprimer alors $(\mathrm{AB})^{-1}$ en fonction de A^{-1} et B^{-1}.

3. Calculer $\det(\mathrm{I}_n)$ puis en déduire que si A est inversible, alors $\det(\mathrm{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathrm{A})}$.

AIDE

On rappelle que pour une matrice diagonale, le déterminant est égal au produit des éléments diagonaux.

4. Deux matrices carrées d'ordre n sont semblables lorsqu'il existe une matrice inversible P telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$.
Montrer que si A et B sont deux matrices semblables, alors elles ont le même déterminant.

2 Matrices et bases de $\mathbb{R}^2$

On considère le plan muni du repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Définitions

1. On dit que qu'un couple $\mathcal{B}=(\vec{u},\vec{v})$ est une **base** de $\mathbb{R}^2$ si, pour tout vecteur $\vec{a}$ de $\mathbb{R}^2$, il existe deux nombres réels x et y tels que $\vec{a}=x\vec{u}+y\vec{v}$.
Ce couple $(x\,;y)$ est unique et est appelé **coordonnées de $\vec{a}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$**.

2. Le couple $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est appelé **base canonique** de $\mathbb{R}^2$. On la note généralement $\mathcal{C}$.

3. Soient $\mathcal{B}=(\vec{u},\vec{v})$ et $\mathcal{B}'=(\vec{u}',\vec{v}')$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. On suppose que $\vec{u}'=a\vec{u}+b\vec{v}$ et $\vec{v}'=c\vec{u}+d\vec{v}$.
On appelle **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, et on note $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

EXEMPLE

Le couple $(\vec{u},\vec{v})$ de vecteurs défini par $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ et $\vec{v}=1\vec{i}+4\vec{j}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ notée $\mathcal{B}$.
La matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ est $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Dans tous les exercices, la notation $\mathcal{C}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

4 On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$.

Montrer que ces deux vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, ces vecteurs sont non colinéaires.

5 On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que ces deux vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^2$.

2. Exprimer les vecteurs de la base canonique en fonction de ces vecteurs.

3. On note A l'ensemble des points $(x\,,y)$ du plan tels que $17x^2-26xy+10y^2=1$.

Si $(X\,,Y)$ représente les coordonnées dans la base $(\vec{u},\vec{v})$, montrer que l'ensemble A se réécrit $2X^2+2Y^2=1$ dans cette base.

6 On considère les vecteurs $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$.

1. a. Exprimer les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ en fonction de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$.

b. Soit $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$. Exprimer $\vec{a}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Que peut-on en déduire sur le couple $(\vec{u},\vec{v})$?

2. On note $\mathcal{B}$ la base formée des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a. Déterminer la matrice de passage P_1 de $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$, puis la matrice de passage P_2 de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

b. Calculer les matrices P_1P_2 et P_2P_1. Que constate-t-on ?

7 On considère trois bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}\times P_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_2}=P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3}$.

2. Justifier que la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ est une matrice inversible et déterminer son inverse.

3. Soit maintenant $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice inversible.
En déduire, en utilisant la base canonique, l'expression de deux vecteurs formant une base de $\mathbb{R}^2$ (différente de la base canonique).

8 On considère la matrice $M=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Soit également une base $\mathcal{B}=(\vec{u},\vec{v})$ telle que M soit la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.

1. Exprimer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de la base canonique.

2. Soient α et β deux nombres réels fixés.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 2x-y=\alpha \\ x+2y=\beta \end{cases}$.

b. Que peut-on en déduire concernant la matrice M ?

3. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ et en déduire l'expression de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

9 On considère deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $\vec{a}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$. On note X (respectivement X′) la matrice colonne des coordonnées de $\vec{a}$ dans $\mathcal{B}$ (respectivement dans $\mathcal{B}'$).

1. Montrer que $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}X'=X$. En déduire X en fonction de X′.

2. Déterminer une expression de la matrice $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

3 Endomorphismes de $\mathbb{R}^2$

Définitions

1. On définit dans $\mathbb{R}^2$ une addition et une multiplication externe par un réel qui correspond à celle définie sur les vecteurs : pour tous réels x, y, x' et y', on a $(x\,;y)+(x'\,;y')=(x+x'\,;y+y')$ et, pour tout réel λ, on a $\lambda\cdot(x\,;y)=(\lambda x\,;\lambda y)$.

2. On dit qu'une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ lorsque, pour tous vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^2$ et pour tout réel λ, $f(\mathrm{X}+\lambda\mathrm{Y})=f(\mathrm{X})+\lambda f(\mathrm{Y})$.
En désignant par x, y, x' et y' les réels tels que $\mathrm{X}=(x\,;y)$ et $\mathrm{Y}=(x'\,;y')$, l'égalité précédente devient $f((x\,;y)+\lambda(x'\,;y'))=f(x\,;y)+\lambda f(x'\,;y')$.

3. Soit $\mathcal{B}=(\vec{u},\vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$. f étant à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, on note a, b, c et d les uniques nombres réels tels que $f(\vec{u})=a\vec{u}+b\vec{v}$ et $f(\vec{v})=c\vec{u}+d\vec{v}$. La matrice de f dans $\mathcal{B}$, que l'on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, est la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

EXEMPLES

1. Soit $f:(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\mapsto(2x-5y\,;x+3y)\in\mathbb{R}^2$.

- f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
- Soient x, x', y et y' quatre réels. Soit λ un réel.
  On a
$$\begin{aligned} f((x\,;y)+\lambda(x'\,;y')) &= f(x+\lambda x'\,;y+\lambda y') \\ &= (2(x+\lambda x')-5(y+\lambda y');\,x+\lambda x'+3(y+\lambda y')) \\ &= (2x-5y+\lambda(2x'-5y');\,x+3y+\lambda(x'+3y')) \\ &= (2x-5y\,;x+3y)+\lambda(2x'-5y'\,;x'+3y') \\ &= f(x\,;y)+\lambda f(x'\,;y') \end{aligned}$$
  Donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
- On a $f(\vec{i})=f(1\,;0)=(2\times1-5\times0\,;1+3\times0)=(2\,;1)=2\vec{i}+1\vec{j}$ et $f(\vec{j})=f(0\,;1)=(-5\,;3)=-5\vec{i}+3\vec{j}$
  donc $\mathrm{Mat}_C(f)=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. La fonction $g:(x\,;y)\mapsto(2x-3y\,;4x-y\,;2y)$ n'est pas un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ car elle est à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Dans tous les exercices, on considère le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$. La notation C désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

10 Préciser si chacune des fonctions ci-dessous correspond ou non à un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

1. $f(x\,;y)=(x+y\,;x-y)$

2. $g(x\,;y)=(-x+5y\,;x^2+y)$

3. $h(x\,;y)=(-2x+3y\,;x)$

11 **1.** Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Montrer que $f(0\,;0)=(0\,;0)$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$g(x\,;y)=(x+5\,;2x-9y).$$
La fonction g est-elle un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$?

12 Chacune des fonctions suivantes correspond à un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Écrire la matrice de chacun de ces endomorphismes dans la base canonique.

1. $f(x\,;y)=(3x-2y\,;2x+5y)$

2. $g(x\,;y)=(-3x+2y\,;2x+y)$

3. $h(x\,;y)=(5y\,;3x)$

13 On note Id l'application de $\mathbb{R}^2$ qui, à tout vecteur X de $\mathbb{R}^2$, associe lui-même.

1. Montrer que cette application définit un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qu'on appellera identité de $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer la matrice de Id dans la base canonique.

3. Quelle matrice retrouve-t-on ?

Problème de concours

14 Adapté de ENSTIM, 2010, toutes filières

Le but de ce problème est d'étudier différentes matrices qui commutent avec leur transposée, c'est-à-dire qui vérifient la relation : $M \times {}^tM = {}^tM \times M$ (1).

Dans la suite de l'énoncé, on se contentera alors de dire, dans ce cas, que la matrice M vérifie la relation (1).

Toutes les matrices envisagées seront dans l'espace $M_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire ayant 2 lignes, 2 colonnes et des coefficients réels.

On notera en particulier : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que les matrices A et C vérifient la relation (1).

2. Calculer A^2. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, A^n vérifie la relation (1).

3. Montrer que A est inversible.

Dans toute la suite on notera $U = A + I$.

4. a. Montrer que la matrice U vérifie la relation (1).

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un nombre réel noté α_n tel que $U^n = \alpha_n U$.

c. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, U^n vérifie (1).

On notera dans la suite E_2 l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ qui vérifient la relation (1).

5. a. Calculer les produits de la matrice $A + C$ et de sa transposée.

b. En déduire que la somme de deux matrices de E_2 n'est pas nécessairement une matrice de E_2.

6. Etant donné une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ quelconque de $M_2(\mathbb{R})$, déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c et d, pour que M appartienne à E_2. On donnera les deux formes possibles des matrices de E_2.

15 Adapté de ENSTIM, 2006, toutes filières

Soit $(x\,,y)$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$. On note $M_{x,y}$ la matrice $\begin{pmatrix} x-y & y \\ 2 & x+y \end{pmatrix}$. Soit Σ le sous-ensemble de $M_2(\mathbb{R})$ tel que $\Sigma = \{M_{x,y}\,, (x\,;y) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Quelle relation doivent vérifier x et y pour que la matrice $M_{x,y}$ ne soit pas inversible ?

Calculer le produit $M_{x,y} \times M_{-x,y}$.
En déduire l'inverse de $M_{x,y}$ lorsqu'il existe.

2. On dit qu'un sous-ensemble F de $M_2(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire lorsque, pour tous A, B dans F et tous réels λ, μ, $\lambda A + \mu B \in F$.

L'ensemble Σ est-il stable par combinaison linéaire ?

3. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \{A + M_{x,y}\,, (x\,;y) \in \mathbb{R}^2\}$.

a. Montrer que J est stable par combinaison linéaire.

b. Posons $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que M_1 et M_2 appartiennent à J.

c. Soit $M \in J$. Montrer qu'il existe un unique couple $(\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = \alpha M_1 + \beta M_2$.

d. Montrer que $\times$ est une loi de composition interne sur J.

4. Soit B une matrice quelconque de $M_2(\mathbb{R})$.
Soit φ_B l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ qui, à la matrice X, associe la matrice $\varphi_B(X) = B \times X$.
On dit que φ_B est surjective (respectivement bijective) si, pour tout Y de $M_2(\mathbb{R})$, il existe (respectivement un unique) X de $M_2(\mathbb{R})$ tel que $Y = \varphi_B(X)$.

a. On suppose dans cette question que $B = M_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

φ_B est-elle surjective ? Bijective ?

b. On suppose dans cette question que $B = M_{0,-2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

φ_B est-elle surjective ? Bijective ?

Avant	Maintenant	Après
Résolution de systèmes d'équations (méthode de combinaison ou de substitution).	Utilisation des matrices et des opérations (additions, multiplications, puissances) pour simplifier et résoudre différents problèmes (étude de suites, de graphes, résolution de systèmes d'équations à plusieurs inconnues...)	Utilisation des matrices pour simplifier l'étude des endomorphismes (applications linéaires d'un espace vectoriel vers lui-même). Diagonalisation et trigonalisation de matrices pour simplifier certains problèmes (calculs de puissances, etc.)

EXERCICES TRANSVERSAUX

i^2 Complexes · $\mathbb{N}\ \mathbb{Z}$ Arithmétique · $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Matrices · Graphes

Les exercices transversaux sont des exercices qui mélangent les notions de plusieurs chapitres.

Cette banque d'exercices peut être utilisée indépendamment de la progression suivie en classe : vous pouvez piocher dedans dans l'ordre que vous le souhaitez en fonction de ce que vous voulez travailler.

Chaque exercice est accompagné de la liste des chapitres concernés pour vous permettre de mieux les retrouver.

Ces exercices sont, par nature, plus complexes et permettent alors de valider la compréhension des notions et les raisonnements associés.

1 (2) **Nombres complexes : point de vue géométrique**
(6) **Calcul matriciel**

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et ω le nombre complexe $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Justifier que, pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$ on a $\overline{\omega^k} = \frac{1}{\omega^k}$.

2. Soit A la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \dots & \omega^{3(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

La matrice $\overline{A}$ est obtenue en conjuguant chacun des coefficients de la matrice A.
Soit $B = A\overline{A}$ dont on note $b_{i,j}$ les coefficients.

a. Montrer que, pour tous entiers i et j compris entre 1 et n, le coefficient $b_{i,j}$ vérifie $b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \left(\omega^{i-j}\right)^{k-1}$.

AIDE

On pourra remarquer que le coefficient $a_{i,j}$ vaut $\omega^{(i-1)(j-1)}$.

b. En déduire que $B = nI_n$.

3. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1}.

2 (3) **Divisibilité dans $\mathbb{Z}$** (6) **Calcul matriciel**

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

1. a. Montrer que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

b. Montrer que si A est inversible, alors $ad - bc \neq 0$ et $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

2. On suppose maintenant que A est une matrice à coefficients entiers.

a. Justifier que $\det(A)$ est un nombre entier.

b. On souhaite que A soit inversible et que A^{-1} ait des coefficients entiers.
Montrer à l'aide de la question **1. a.** que si ces deux conditions sont vérifiées, alors $\det(A) = \det(A^{-1}) = \pm 1$.

c. Montrer à l'aide de la question **1. b.** que la réciproque est également vraie, c'est-à-dire que si A est une matrice à coefficients entiers vérifiant $\det(A) = \det(A^{-1}) = \pm 1$, alors la matrice A est inversible et A^{-1} est à coefficients entiers.

Remarque : Ce résultat reste vrai pour une matrice carrée d'ordre supérieur à 2.

3 (1) **Nombres complexes : point de vue algébrique**
(6) **Calcul matriciel**

Soit A une matrice carrée d'ordre 2 dont les coefficients sont des nombres complexes.
La matrice $\overline{A}$ est obtenue en conjuguant chacun des coefficients de la matrice A.
Montrer que $\overline{\det(A)} = \det(\overline{A})$.

4 (1) **Nombres complexes : point de vue algébrique**
(3) **Divisibilité dans $\mathbb{Z}$** (6) **Calcul matriciel**

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

Partie A : Diagonalisation de la matrice A

1. Soit P la matrice à coefficients complexes $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$.
Calculer $P \times \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ et en déduire l'expression de P^{-1}.

2. Montrer que $A = PDP^{-1}$.

Partie B : Détermination de A^n

On considère dans cette partie un entier naturel n.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$D^n = \begin{pmatrix} i^n & 0 \\ 0 & (-i)^n \end{pmatrix}.$$

3. a. On suppose dans cette question seulement que $n \equiv 0[4]$.
Montrer alors que $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Déterminer de la même manière une expression de D^n lorsque $n \equiv 1[4]$, $n \equiv 2[4]$ et $n \equiv 3[4]$.

c. Déterminer alors une expression de A^n dans chacun de ces quatre cas.

4. Déterminer la matrice A^{2019}.

5 ① **Nombres complexes : points de vue algébrique**
⑦ **Suites et matrices**

On considère deux suites de nombres complexes (z_n) et (z'_n) définies par $z_0 = 1$, $z'_0 = \mathrm{i}$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} z_{n+1} = (9-4\mathrm{i})z_n + (-3+2\mathrm{i})z'_n \\ z'_{n+1} = (18-12\mathrm{i})z_n + (-6+6\mathrm{i})z'_n \end{cases}.$$

1. Calculer z_1 et z'_1.

2. Justifier que ce système s'écrit sous la forme matricielle $\mathrm{Z}_{n+1} = \mathrm{A} \times \mathrm{Z}_n$, où Z_{n+1}, Z_n et A sont trois matrices dont on explicitera les coefficients.

3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{Z}_n = \mathrm{A}^n \times \mathrm{Z}_0.$$

4. On cherche dans cette partie à déterminer les coefficients de la matrice A^n.

a. Soit la matrice $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Justifier que P est inversible puis déterminer P^{-1}.

b. Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ où $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

c. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$.

d. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de la matrice D^n puis en déduire ceux de la matrice A^n.

e. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n et z'_n en fonction de n.

6 ③ **Divisibilité dans $\mathbb{Z}$** ⑥ **Calcul matriciel**

On considère un graphe à dix sommets correspondant aux entiers de 1 à 10.

Pour deux sommets a et b, il existe une arête allant de a vers b si a divise b.

1. Ce graphe peut-il être complet ? Justifier.

2. Représenter ce graphe.

7 ① **Nombres complexes : point de vue algébrique**
③ **Divisibilité dans $\mathbb{Z}$**

On cherche dans cet exercice à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $4z^3 - 8z^2 - 27z - 20 = 0$.

Partie A : Recherche d'une solution « évidente »

On cherche dans cette partie à déterminer une solution rationnelle de l'équation.

1. Montrer que 0 n'est pas une solution de l'équation.

2. Justifier que s'il existe deux entiers relatifs non nuls p et q premiers entre eux tels que $z = \frac{p}{q}$ soit une solution de l'équation, alors $p \mid 20$ et $q \mid 4$.

3. En déduire les valeurs possibles d'une solution rationnelle de l'équation (E).

4. Déterminer une solution de l'équation (E).

Partie B : Résolution de l'équation

1. À l'aide de la solution déterminée à la question **4.** de la partie **A**, déterminer une factorisation de $4z^3 - 8z^2 - 27z - 20 = 0$.

2. Déterminer alors l'ensemble des solutions de l'équation (E).

8 ① **Nombres complexes : point de vue algébrique**
⑥ **Calcul matriciel**

Soient a et b deux nombres réels. Tout nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$ peut s'écrire de manière unique sous la forme matricielle suivante : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

1. Soient c et d deux nombres réels et z' le nombre complexe défini par $z' = c + \mathrm{i}d$.

Écrire la matrice correspondant au nombre complexe z' puis vérifier que l'addition et la mutiplication matricielles sont naturellement compatibles avec celles définies sur $\mathbb{C}$.

2. Écrire la matrice B correspondant au nombre complexe $\overline{z'}$.

3. Calculer le produit AB. Quel résultat retrouve-t-on ?

9 ② **Nombres complexes : point de vue géométrique**
⑥ **Calcul matriciel**

On considère la définition des nombres complexes écrits sous forme matricielle décrite dans l'exercice précédent.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Écrire la matrice associée au nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

2. La matrice obtenue correspond à celle d'une transformation géométrique du plan muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O} ; \vec{i}, \vec{j})$. Laquelle ?

3. Conjecturer alors, pour tout entier relatif n, une expression de la matrice associée au nombre $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n$. Démontrer cette conjecture.

4. Retrouver alors la formule de Moivre.

10 ② **Nombres complexes : point de vue géométrique**
⑥ **Calcul matriciel**

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O} ; \vec{u}, \vec{v})$ et on définit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le point M_k d'affixe $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{3}}$.

1. Calculer l'affixe de M_0 et de M_6.

2. Pour tout entier $k \in \{0 ; \ldots ; 5\}$, placer M_k dans le plan.

3. Compléter la congruence $2\,020 \equiv \ldots [6]$.

4. En déduire, sous forme algébrique, l'affixe de $\mathrm{M}_{2\,020}$.

11 ① Nombres complexes : point de vue algébrique
⑥ Calcul matriciel

Soient a et b deux nombres réels et on note z et z' deux nombres complexes vérifiant :

$$\begin{cases} z = 2a - b + 2 + \mathrm{i}(a + 3b - 1) \\ z' = -a + b + 20 + \mathrm{i}(2a + 7b + 7) \end{cases}.$$

On cherche à déterminer à quelle(s) condition(s) les nombres z et z' sont égaux.

1. Justifier que z et z' sont égaux si, et seulement si, a et b sont solutions du système $\begin{cases} 3a - 2b = 18 \\ -a - 4b = 8 \end{cases}$.
2. Écrire ce système sous la forme $AX = B$, où A, X et B sont trois matrices qu'on déterminera.
3. Résoudre ce système et répondre au problème posé en explicitant z et z'.

12 ③ Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ ⑥ Calcul matriciel

Inverse d'une matrice modulo 5.

Soient A et B deux matrices dont les coefficients sont donnés modulo 5.

On donne $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A \times B = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer un inverse de 3 modulo 5.
3. En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Remarque : On trouvera une généralisation de ce résultat dans l'exercice suivant.

13 ④ PGCD et applications ⑥ Calcul matriciel

Inverse d'une matrice modulo n

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soient a, b, c et d quatre entiers donnés modulo n.

Soient A la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et B la matrice $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

On note $\det(A)$ la quantité $\det(A) = ad - bc$.

1. Montrer que $A \times B = \det(A) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. En déduire que si $\det(A)$ est inversible modulo n d'inverse $\det(A)^{-1}$, alors A est inversible.
Déterminer une écriture de A^{-1}.
3. On suppose maintenant que $\det(A)$ n'est pas inversible modulo n. Montrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que A ne peut pas être inversible.
On pourra admettre le résultat suivant : « Pour toutes matrices A et B, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. »
4. À quelle condition sur le couple $(\det(A) ; n)$ la matrice A est-elle inversible ?
5. Déterminer un inverse modulo 8 de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
6. Expliquer pourquoi la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible modulo 8.

14 ③ Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ ④ PGCD et applications
⑥ Calcul matriciel

D'après bac S, Métropole, juin 2019

Dans cet exercice, on étudie l'ensemble S des matrices qui s'écrivent sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ et vérifient : $ad - bc = 1$.

On note I la matrice identité d'ordre 2 : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ appartient à l'ensemble S.
2. Montrer qu'il existe exactement quatre matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$ appartenant à l'ensemble S puis les expliciter.
3. **a.** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E): $5x - 2y = 1$.
On pourra remarquer que le couple $(1 ; 2)$ est une solution particulière de cette équation.
b. En déduire qu'il existe une infinité de matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ qui appartiennent à l'ensemble S.
Décrire ces matrices.

Partie B

Dans cette partie, on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice appartenant à l'ensemble S. On rappelle que a, b, c et d sont des entiers relatifs tels que $ad - bc = 1$.

1. Justifier que les entiers a et b sont premiers entre eux.
2. Soit B la matrice $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
a. Calculer le produit AB. On admet que $AB = BA$.
b. En déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1}.
c. Montrer que A^{-1} appartient à l'ensemble S.
3. Soient x et y deux entiers relatifs. On note x' et y' les entiers relatifs tels que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
a. Montrer que $x = dx' - by'$.
On admet de même que $y = ay' - cx'$.
b. On note D le PGCD de x et y et on note D' le PGCD de x' et y'. Montrer que $D = D'$.
4. On considère les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 2019$, $y_0 = 673$ et, pour tout entier naturel n, $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}$.
En utilisant la question précédente, déterminer, pour tout entier naturel n, le PGCD des entiers x_n et y_n.

15 ① Nombres complexes : point de vue algébrique
③ Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Étude des sommes de deux carrés par les entiers de Gauss

Partie A : Définition des entiers de Gauss

Soient a et b deux nombres entiers relatifs.

On appelle **entier de Gauss** tout nombre complexe z s'écrivant sous la forme $z = a + \mathrm{i}b$.

On note $\mathbb{Z}[\,\mathrm{i}\,]$ l'ensemble des entiers de Gauss.

1. Le nombre $\dfrac{100}{3+4\mathrm{i}}$ est-il un entier de Gauss ?

2. Justifier que si $z \in \mathbb{Z}[\,\mathrm{i}\,]$, alors $\overline{z} \in \mathbb{Z}[\,\mathrm{i}\,]$.

3. Montrer que la somme de deux entiers de Gauss est un entier de Gauss.

4. Montrer que le produit de deux entiers de Gauss est un entier de Gauss.

5. Si z est un entier de Gauss non nul, $\dfrac{1}{z}$ est-il un entier de Gauss ?

Partie B : Norme et applications

Si z est un entier de Gauss, on appelle **norme** la fonction $\mathrm{N} : z \longmapsto z \times \overline{z}$.

1. Soient a et b deux entiers relatifs et $z = a + \mathrm{i}b$. Déterminer $\mathrm{N}(z)$ en fonction de a et b.

2. Montrer que si z et z' sont deux entiers de Gauss, alors $\mathrm{N}(zz') = \mathrm{N}(z)\mathrm{N}(z')$.

3. Première application

a. Montrer que, pour tous entiers relatifs a, b, c et d, $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$.

> **Remarque :** Cette égalité est en réalité valable pour tous réels a, b, c et d et porte le nom d'**identité de Lagrange**.

b. Soient m et n deux entiers naturels s'écrivant comme la somme de deux carrés parfaits.
Montrer que $m \times n$ s'écrit également comme la somme de deux carrés parfaits.

4. Seconde application.

Soit $z \in \mathbb{Z}[\,\mathrm{i}\,]$.
On dit que z est inversible dans $\mathbb{Z}[\,\mathrm{i}\,]$ lorsqu'il existe un nombre complexe $z' \in \mathbb{Z}[\,\mathrm{i}\,]$ tel que $zz' = 1$.

Montrer que $z \in \mathbb{Z}[\,\mathrm{i}\,]$ est inversible dans $\mathbb{Z}[\,\mathrm{i}\,]$ si, et seulement si, $z \in \{1\,;-1\,;\mathrm{i}\,;-\mathrm{i}\}$.

16 ④ PGCD et applications ⑥ Calcul matriciel

D'après bac S, Asie, juin 2015

Une équation de Pell-Fermat

On dit qu'un entier naturel non nul N est un **nombre triangulaire** s'il existe un entier naturel n tel que $\mathrm{N} = 1 + 2 + \ldots + n$.

Par exemple, 10 est un nombre triangulaire car $10 = 1 + 2 + 3 + 4$.

Le but de ce problème est de déterminer des nombres triangulaires qui sont les carrés d'un entier.

On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Partie A : Nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. Montrer que 36 est un nombre triangulaire et qu'il est aussi le carré d'un entier.

2. a. Montrer que le nombre $1 + 2 + \ldots + n$ est le carré d'un entier si, et seulement si, il existe un entier naturel p tel que $n^2 + n - 2p^2 = 0$.

b. En déduire que le nombre $1 + 2 + \ldots + n$ est le carré d'un entier si, et seulement si, il existe un entier naturel p tel que $(2n+1)^2 - 8p^2 = 1$.

Partie B : Étude de l'équation diophantienne associée

On considère (E) l'équation diophantienne
$x^2 - 8y^2 = 1$, où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solutions de (E).

2. Démontrer que si un couple d'entiers relatifs non nuls $(x\,;y)$ est solution de (E), alors les entiers relatifs x et y sont premiers entre eux.

Partie C : Lien avec le calcul matriciel

Soient x et y deux entiers relatifs. On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On définit les entiers relatifs x' et y' par l'égalité :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

2. Déterminer la matrice A^{-1}, puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.

3. Démontrer que $(x\,;y)$ est solution de (E) si, et seulement si, $(x'\,;y')$ est solution de (E).

4. On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

On admet que, ainsi définis, les nombres x_n et y_n sont des entiers naturels pour toute valeur de l'entier n.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\,;y_n)$ est solution de (E).

Partie D : Retour au problème initial

À l'aide des parties précédentes, déterminer un nombre triangulaire supérieur à 2 015 qui est le carré d'un entier.

> **Remarque :** Une **équation de Pell-Fermat** est une équation diophantienne de la forme $x^2 - ny^2 = 1$ où n est un entier naturel qui n'est pas un carré parfait.

17 ③ Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ ④ PGCD et applications ⑥ Calcul matriciel

Chiffrement de Hill

En 1929, le mathématicien et cryptologue Hill publie ses travaux concernant une méthode de chiffrement qui porte aujourd'hui son nom.

Le principe repose sur le choix d'une matrice A vérifiant les conditions suivantes :

- $\det(\mathrm{A})$ est non nul ;
- $\det(\mathrm{A})$ est premier avec 26.

On travaillera ici avec la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Partie A : Étude de la matrice A

1. Justifier que la matrice A vérifie bien les conditions demandées par l'énoncé.

2. À l'aide de la calculatrice, déterminer A^{-1}.

Partie B : Étude du chiffrement

Le chiffrement de Hill repose uniquement sur le choix de la matrice A.

Pour coder un mot ayant un nombre pair n de lettres, on procède de la manière suivante :

- on associe à chaque lettre de l'alphabet un nombre entre 0 et 25 en suivant l'ordre alphabétique ;
- on divise le mot à chiffrer en blocs de deux lettres successives. On obtient donc plusieurs blocs de nombres $(x_1\,;x_2)$; … ; $(x_{n-1}\,;x_n)$;
- on utilise alors la matrice A pour procéder au chiffrement : on calcule, pour tout entier $k\in\left\{0\,;\ldots;\frac{n-2}{2}\right\}$, $\begin{pmatrix} y_{2k+1} \\ y_{2k+2} \end{pmatrix}=\mathrm{A}\times\begin{pmatrix} x_{2k+1} \\ x_{2k+2} \end{pmatrix}$.
  On obtient alors les blocs $(y_1\,;y_2)$; … ; $(y_{n-1}\,;y_n)$ qu'on juxtapose : le mot initialement choisi est alors codé par une suite de nombres $y_1y_2\ldots y_n$;
- on réduit modulo 26 chacun de ces nombres : pour tout entier $k\in\{1\,;\ldots;n\}$, on détermine le reste r_k de la division euclidienne de y_k par 26 ;
- le mot choisi est donc maintenant codé par une suite de nombres $r_1r_2\ldots r_n$;
- on associe à chacun de ces nombres compris entre 0 et 25 une lettre selon le procédé décrit précédemment.

1. En utilisant la matrice A décrite au début de l'exercice, coder le mot JUIN par ce procédé.

2. Coder un mot de votre choix en utilisant ce procédé. Compte tenu du processus de codage décrit ici, le mot doit être constitué d'un nombre pair de lettres.

3. Reproduire et compléter le programme ci-après afin qu'il transforme la liste initiale de nombres en la suite codée de nombres.

```python
def Hill(L):
  n = len(L)
  if n%2 != 0:
    return 'Il faut un nombre de lettres pair !'
  else:
    for k in range(int(n/2)):
      L[2*k], L[2*k + 1] = ... , ...
      L[2*k] = L[2*k]%26
      L[2*k + 1] = L[2*k + 1]%26
  return L
```

Partie C : Étude du déchiffrement

On cherche ici à déterminer un moyen de déchiffrer un mot chiffré par le procédé précédent. Sans perte de généralité, on étudie uniquement le bloc codé $(r_1\,;r_2)$ correspondant au couple de nombres $(y_1\,;y_2)$ obtenu après transformation des nombres $(x_1\,;x_2)$ du mot initial.

On note donc $\mathrm{Y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ la matrice correspondant aux nombres obtenus suite à la multiplication à gauche de la matrice $\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ par A.

1. Justifier que $(x_1\,;x_2)$ est une solution du système d'équations suivant : $\begin{cases} 19x_1=3y_1-2y_2 \\ 19x_2=-y_1+7y_2 \end{cases}$

2. Montrer que $(x_1\,;x_2)$ est une solution du système de congruences suivant : $\begin{cases} 19x_1\equiv 3r_1-2r_2\,[26] \\ 19x_2\equiv -r_1+7r_2\,[26] \end{cases}$

3. Déterminer un inverse de 19 modulo 26.

4. En déduire que x_1 et x_2 vérifient le système :

$$\begin{cases} x_1\equiv 7r_1+4r_2\,[26] \\ x_2\equiv 15r_1+25r_2\,[26] \end{cases}$$

5. Le codage d'un mot a donné OCRR, c'est-à-dire la liste $(r_1\,;r_2\,;r_1'\,;r_2')=(14\,;2\,;17\,;17)$. On cherche à retrouver le mot initial.

En appliquant le résultat de la question **5.** à $\begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 17 \\ 17 \end{pmatrix}$, retrouver le mot initial.

> **Remarque :** Lorsque le nombre de lettres est divisible par 3, il est possible de coder des blocs de trois lettres de la même manière que ci-dessus en utilisant une matrice carrée d'ordre 3 vérifiant les mêmes conditions que dans l'énoncé.

Histoire des maths

Lester S. Hill (1891-1961) est un mathématicien et cryptologue américain. Ses recherches reposent principalement sur l'application des mathématiques dans les systèmes de communications et notamment la cryptographie : le chiffrement de Hill fait partie de ses principales contributions mais il a aussi développé des méthodes pour détecter des erreurs dans les transmissions télégraphiques.

18 ③ Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ ⑥ Calcul matriciel

D'après bac S, Asie, 2017

Exemple simple de code correcteur

Un bit est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.

Partie A : Ligne de transmission

Une ligne de transmission transporte des bits de données selon le modèle suivant :

- elle transmet le bit de façon correcte avec une probabilité p ;
- elle transmet le bit de façon erronée (en changeant le 1 en 0 ou le 0 en 1) avec une probabilité $1-p$.

On assemble bout à bout plusieurs lignes de ce type et on suppose qu'elles introduisent des erreurs de façon indépendante les unes des autres.

On étudie la transmission d'un seul bit, ayant pour valeur 1 au début de la transmission.

Après avoir traversé n lignes de transmission, on note :

- p_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 1 ;
- q_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0.

On a donc $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$. On définit les matrices suivantes : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On admet que, pour tout entier n, on a $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n$ et donc $\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$.

1. a. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b. On pose $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$.

c. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$.

d. En vous appuyant sur la copie d'écran d'un logiciel de calcul formel donnée ci-dessous, déterminer une expression de q_n en fonction de n.

X0:=[[1],[0]]	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
P:=[[1,1],[1,-1]]	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
D:=[[1,0],[0,2*p-1]]	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\cdot p-1 \end{pmatrix}$
P*matpow(D,n)*P^(-1)*X0	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}((2\cdot p-1)^n+1) \\ \frac{1}{2}(-(2\cdot p-1)^n+1) \end{pmatrix}$

2. On suppose dans cette question que p vaut 0,98. On rappelle que le bit avant transmission a pour valeur 1. On souhaite que la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0 soit inférieure ou égale à 0,25.

Combien peut-on, au maximum, aligner de telles lignes de transmission ?

Partie B : Le code de Hamming (7,4)

On rappelle qu'un bit est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1. On considère un « mot » formé de quatre bits que l'on note b_1, b_2, b_3 et b_4.

Par exemple, pour le mot 1101, on a $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$ et $b_4 = 1$.

On ajoute à cette liste une clé de contrôle $c_1c_2c_3$ formée de trois bits :

- c_1 est le reste de la division euclidienne de $b_2+b_3+b_4$ par 2 ;
- c_2 est le reste de la division euclidienne de $b_1+b_3+b_4$ par 2 ;
- c_3 est le reste de la division euclidienne de $b_1+b_2+b_4$ par 2.

On appelle alors « message » la suite de sept bits formée des quatres bits du mot et des trois bits de contrôle.

1. Préliminaires

a. Justifier que c_1, c_2 et c_3 ne peuvent prendre comme valeurs que 0 ou 1.

b. Calculer la clé de contrôle associée au mot 1001.

2. Soit $b_1b_2b_3b_4$ un mot de quatre bits et $c_1c_2c_3$ la clé associée.

Démontrer que si on change la valeur de b_1 et que l'on recalcule la clé, alors c_1 est inchangée, c_2 est modifiée et c_3 est modifiée.

3. On suppose que, durant la transmission du message, au plus un des sept bits a été transmis de façon erronée. À partir des quatre premiers bits du message reçu, on recalcule les trois bits de contrôle, et on les compare avec les bits de contrôle reçus.

Sans justification, recopier et compléter le tableau ci-dessous. La lettre F signifie que le bit de contrôle reçu ne correspond pas au bit de contrôle calculé et J que ces deux bits sont égaux.

Bit de contrôle calculé \ Bit erroné	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	Aucun
c_1	J							
c_2	F							
c_3	F							

4. Justifier rapidement, à l'aide du tableau, que si un seul bit reçu est erroné, on peut dans tous les cas déterminer lequel et corriger l'erreur.

5. Voici deux messages de sept bits : $\mathrm{A} = 0100010$ et $\mathrm{B} = 1101001$. On admet que chacun d'eux comporte au plus une erreur de transmission.

Préciser s'il y a une erreur et la corriger.

Se préparer au Grand Oral BAC

Description de l'épreuve

- L'épreuve du Grand Oral, de coefficient 10, est l'une des cinq épreuves finales du baccalauréat. Elle est notée sur 20 points.
- Le jury est composé de deux professeurs de votre lycée qui enseignent deux disciplines différentes.
- D'une durée totale de 20 minutes, elle se déroule en trois temps : la présentation d'une question (5 minutes), suivie d'un échange avec le jury sur votre présentation (10 minutes). L'échange se clôt par un temps de discussion autour de votre projet d'orientation (5 minutes).

Première partie de l'épreuve : présentation d'une question problématisée

5 minutes

- Le jour de l'épreuve, vous devez proposer au jury deux questions que vous aurez préalablement préparées, seul ou en groupe, pendant l'année.
- Vos questions peuvent porter sur les deux enseignements de spécialité que vous avez choisis en terminale. Il peut s'agir de questions transversales, faisant appel aux deux spécialités, ou de questions portant sur chacune des spécialités prise isolément.

  Ces questions peuvent par exemple être :
  - Comment des équations différentielles permettent-elles de décrire le mouvement d'un corps ?
  - Comment les sondages d'opinion sont-ils légitimés par la loi des grands nombres ?
- Parmi ces deux questions, le jury choisit celle que vous allez présenter à l'oral. Vous disposez de 20 minutes de préparation.
- Vous devez dans un premier temps expliquer pourquoi vous avez choisi cette question. Vous devez ensuite la développer et y répondre.
- Vous devez faire votre présentation sans note ; toutefois, si vous le souhaitez, vous pouvez accompagner votre présentation d'un support (sur une feuille) que vous remettrez au jury.

Quelques conseils

- Le passage d'une épreuve orale est toujours un moment impressionnant : c'est normal ! Prenez le temps de respirer bien profondément si vous vous sentez stressé.
  - En entrant dans la salle d'examen, saluez chacun des membres du jury et attendez leurs consignes.
  - Pendant votre exposé, pensez à vous tenir bien droit et regardez les personnes à qui vous parlez.
  - Parlez suffisamment fort et articulez, pour être bien compris.
  - Ne vous précipitez pas ! Le plus important est que le jury comprenne sans difficulté les idées que vous voulez exprimer.
  - Si vous perdez le fil de votre développement, ne paniquez pas ! Reprenez calmement là où vous en étiez.
  - Pensez à surveiller votre montre pour ne pas dépasser le temps imparti.

Deuxième partie de l'épreuve : échange avec le jury

10 minutes

- À la fin de votre présentation, le jury vous pose des questions qui vous amènent à développer ou approfondir certains aspects du sujet.
- Vous pouvez également être interrogé sur une autre partie du programme de première ou de terminale.

Quelques conseils

- Durant cette phase, le jury va être particulièrement attentif à la qualité de l'interaction orale et de votre argumentation, ainsi qu'à la solidité de vos connaissances.
- Soyez à l'écoute de votre interlocuteur : écoutez attentivement les questions, et essayez d'y répondre avec précision.

Troisième partie de l'épreuve : discussion autour de votre projet d'orientation

5 minutes

- L'épreuve se termine par un échange autour de votre projet d'orientation. La question que vous avez présentée doit être en lien avec les études que vous souhaitez mener ou le métier que vous voulez exercer.
- Vous allez présenter au jury l'orientation que vous souhaitez donner à votre parcours.

Quelques conseils

- Soyez concrets : comment votre projet a-t-il mûri ? Grâce à quelles expériences (stages, par exemple), à quelles rencontres (avec des enseignants, des professionnels, des personnes de votre entourage), à quelles lectures ? Comment avez-vous orienté vos études, notamment par le choix de vos spécialités, en vue de ce projet ?
- N'hésitez pas à partager vos réflexions personnelles : le jury appréciera que vous lui expliquiez vos motivations, vos hésitations et les différentes étapes de votre réflexion.

Comme le suggère le programme, les problèmes abordés en maths expertes peuvent servir d'appui à des questions de Grand Oral. Retrouvez des exemples à la fin de chaque chapitre de ce manuel.

Le Grand Oral

Retrouvez un **espace en ligne en accès libre** dédié à la préparation au Grand Oral avec des outils pour s'enregistrer et se filmer ainsi que des conseils pour aborder sereinement cette nouvelle épreuve sur LLS.fr/GrandOralMaths.

Quelles sont les attentes du jury ?

La grille ci-dessous résume les principales compétences qui seront évaluées par le jury le jour du Grand Oral.

- Le jury évalue avant tout votre maîtrise de la question présentée. Il sera attentif à la façon dont vous exposez votre démarche, à la clarté de votre présentation, à la qualité de votre raisonnement.
- Le jury évalue également la qualité de votre présentation orale et votre attitude pendant l'épreuve. Lors d'un oral, le langage verbal – la façon dont vous parlez – et le non verbal – votre attitude, vos gestes, vos regards – entrent en jeu.

Cette grille vous sera utile pour vous auto-évaluer pendant votre préparation.

	Qualité orale de l'épreuve	Qualité de la prise de parole en continu	Qualité des connaissances	Qualité de l'interaction	Qualité et construction de l'argumentation
Très insuffisant	Difficilement audible sur l'ensemble de la prestation. Le candidat ne parvient pas à capter l'attention.	Énoncés courts, ponctués de pauses et de faux démarrages ou énoncés longs à la syntaxe mal maîtrisée.	Connaissances imprécises, incapacité à répondre aux questions, même avec une aide et des relances.	Réponses courtes ou rares. La communication repose principalement sur l'évaluateur.	Pas de compréhension du sujet, discours non argumenté et décousu.
Insuffisant	La voix devient plus audible et intelligible au fil de l'épreuve mais demeure monocorde. Vocabulaire limité ou approximatif.	Discours assez clair mais vocabulaire limité et énoncés schématiques.	Connaissances réelles, mais difficulté à les mobiliser en situation à l'occasion des questions du jury.	L'entretien permet une amorce d'échange. L'interaction reste limitée.	Début de démonstration mais raisonnement lacunaire. Discours insuffisamment structuré.
Satisfaisant	Quelques variations dans l'utilisation de la voix ; prise de parole affirmée. Il utilise un lexique adapté. Le candidat parvient à susciter l'intérêt.	Discours articulé et pertinent, énoncés bien construits.	Connaissances précises, une capacité à les mobiliser en réponses aux questions du jury avec éventuellement quelques relances.	Répond, contribue, réagit. Se reprend, reformule en s'aidant des propositions du jury.	Démonstration construite et appuyée sur des arguments précis et pertinents.
Très satisfaisant	La voix soutient efficacement le discours. Qualités prosodiques marquées (débit, fluidité, variations et nuances pertinentes...). Le candidat est pleinement engagé dans sa parole. Il utilise un vocabulaire riche et précis.	Discours fluide, efficace, tirant pleinement profit du temps et développant ses propositions.	Connaissances maîtrisées, les réponses aux questions du jury témoignent d'une capacité à mobiliser ces connaissances à bon escient et à les exposer clairement.	S'engage dans sa parole, réagit de façon pertinente. Prend l'initiative dans l'échange. Exploite judicieusement les éléments fournis par la situation d'interaction.	Maîtrise des enjeux du sujet, capacité à conduire et exprimer une argumentation personnelle, bien construite et raisonnée.

Le corps et la voix

La prise de parole à l'oral est à la fois un exercice scolaire et une épreuve du bac, mais c'est aussi une compétence qui vous sera très utile tout au long de la vie. Il existe de nombreuses méthodes pour s'entraîner à la prise de parole et progresser dans votre maîtrise de l'oral.

À l'oral, vous êtes…	ENTENDU	VU	
Vous devez soigner…	• La voix et la respiration.	• Les gestes, le regard, la posture.	• L'apparence et l'attitude.
pour…	• Capter votre auditoire et éviter de dégager du stress.	• Mieux transmettre votre message.	• Donner une bonne image de vous.
en étant attentif à…	• Varier le débit (vitesse) et l'intensité (plus ou moins fort) de votre voix. • Accentuer les passages importants. • Soigner votre diction, bien articuler. • Contrôler votre souffle en maîtrisant votre respiration.	• Être bien ancré au sol, stable et droit : les épaules sont redressées, en arrière, de sorte que la colonne vertébrale suit une ligne droite qui va du bassin jusqu'à la tête ; les pieds sont disposés dans la continuité des hanches. • Regarder les membres du jury.	• Avoir une tenue vestimentaire adaptée et dans laquelle vous vous sentez à l'aise. • Paraître sérieux, concentré, positif (sourire, dire bonjour, etc.)
et en veillant à ne pas…	• Parler trop vite, ni trop doucement. • Répéter trop souvent le même mot (« donc », « alors ») ni multiplier les « euh ». • Vous laisser envahir par vos émotions.	• Garder les mains dans vos poches, croiser les bras, se balancer, remuer les jambes, se recoiffer, etc. • Éviter le regard du jury.	• Surjouer votre oral avec une attitude théâtrale excessive ou, au contraire, ne montrer aucune envie.

Pour s'entraîner

La clé d'un Grand Oral réussi réside dans un entraînement régulier tout au long de l'année. Voici deux exercices qui vous aideront à progresser !

› Seul ou devant un proche qui vous filme, présentez à voix haute la question que vous avez choisie, dans le temps imparti (5 minutes). Visionnez ensuite la vidéo et notez, à partir des axes présentés dans le tableau, vos axes de progression.

› Pour prendre conscience des petits défauts dans l'expression orale ou dans le langage non verbal, il peut être très intéressant d'observer la présentation orale d'un camarade. Observez et analysez ses gestes, son regard, sa posture et discutez-en ensemble à la fin de l'exposé.

Entraînez-vous sur LLS.fr/GrandOralMaths

CORRIGÉS

Chapitre 1

Auto-évaluation

9 b **10** d **11** a **12** b
13 b c **14** b c d **15** a c d
16 a b c

17 **1. a.** $z_1+z_2=(1+\mathrm{i})+(1-\mathrm{i})=2$ et
$z_1\times z_2=z_1\times\overline{z_1}=1^2+1^2=2$.
b. Le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $\mathrm{P}(z)=(z-z_1)(z-z_2)=z^2-2z+2$ admet z_1 et z_2 comme racines.
2. a. $\mathrm{Q}(z_1)=\mathrm{Q}(z_2)=0$ donc Q se factorise par P. De plus, pour tout $z\in\mathbb{C}$,
$(z-\alpha)\mathrm{P}(z)=(z-\alpha)(z^2-2z+2)$
$=z^3-(2+\alpha)z^2+2(\alpha+1)z-2\alpha$
En comparant cette écriture à $\mathrm{Q}(z)=z^3-6z^2+10z-8$, on obtient $\alpha=4$. Donc, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Q}(z)=(z-4)\mathrm{P}(z)$.
b. D'après la question précédente, $\mathrm{Q}(z)=0$ admet trois solutions dans $\mathbb{C}$: 4, $z_1=1+\mathrm{i}$ et $z_2=1-\mathrm{i}$.

Exercices

28 **1.** $a=(2+\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})$
$=2+6\mathrm{i}+\mathrm{i}-3=-1+7\mathrm{i}$
2. $b=\left(\frac{3}{2}-2\mathrm{i}\right)\left(2+\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)=6-\frac{7}{4}\mathrm{i}$
3. $c=\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)(1+2\mathrm{i})=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$
4. $d=\left(-\frac{2}{3}-\mathrm{i}\right)(3-4\mathrm{i})=-6-\frac{1}{3}\mathrm{i}$

35 **1.** $a=\frac{1}{3+2\mathrm{i}}$
$=\frac{1\times(3-2\mathrm{i})}{(3+2\mathrm{i})\times(3-2\mathrm{i})}=\frac{3}{13}-\frac{2}{13}\mathrm{i}$
2. $b=\frac{4}{-2-\mathrm{i}}=-\frac{8}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}$
3. $c=\frac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=1$
4. $d=\frac{6+4\mathrm{i}}{-5-3\mathrm{i}}=-\frac{21}{17}-\frac{1}{17}\mathrm{i}$

44 **1.** On peut réécrire cette équation sous la forme $z^2-2z+3=0$.
On reconnaît alors un trinôme du second degré, de discriminant $\Delta=-8$. Cette équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :
$\frac{2-\mathrm{i}\sqrt{8}}{2}=1-\mathrm{i}\sqrt{2}$ et $\frac{2+\mathrm{i}\sqrt{8}}{2}=1+\mathrm{i}\sqrt{2}$.
2. On peut réécrire cette équation sous la forme $z^2=-1$. Cette équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$: i et $-$i.
3. Pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, on peut réécrire cette équation sous la forme $z^2+6z+13=0$. On reconnaît alors un trinôme du second degré, de discriminant $\Delta=-16$. Cette équation admet donc deux solutions complexes conjuguées : $-3-2\mathrm{i}$ et $-3+2\mathrm{i}$.
4. Pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, on peut réécrire cette équation sous la forme $z^2-z+1=0$. On reconnaît alors un trinôme du second degré, de discriminant $\Delta=-3$. Cette équation admet donc deux solutions complexes conjuguées : $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ et $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

59 **1.** $z=(3+\mathrm{i})(1+4\mathrm{i})$
$=3+12\mathrm{i}+\mathrm{i}-4=-1+13\mathrm{i}$
2. $z=(2+3\mathrm{i})(2\mathrm{i}-1)=-8+\mathrm{i}$
3. $z=(5-\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})=8-12\mathrm{i}$
4. $z=\left(\frac{3}{2}\mathrm{i}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\mathrm{i}-\frac{2}{3}\right)=\frac{-73}{36}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$.

73 **1.** Faux. En effet, si on prend $a=1$ et $b=-1$, alors on obtient $z_1=2\mathrm{i}$ et $z_2=-2\mathrm{i}$ et on a bien $z_1=-z_2$. Et si on prend $a=-1$ et $b=-1$, alors on obtient $z_1=2+2\mathrm{i}$ et $z_2=-2-2\mathrm{i}$, et on a encore une fois $z_1=-z_2$.
2. Vrai. En effet, pour tout $b\in\mathbb{R}$, $z=(2+\mathrm{i}b)(2b+\mathrm{i})=3b+2\mathrm{i}(1+b^2)$. Et, pour tout $b\in\mathbb{R}$, $1+b^2\neq 0$.
3. Vrai. L'équation $z_1=z_2$ peut se réécrire $(4a^2-4a+1)+\mathrm{i}(b^2-2b+1)=0$, et les équations $4a^2-4a+1=0$ et $b^2-2b+1=0$ n'admettent qu'une seule solution : respectivement $\frac{1}{2}$ et 1.
4. Faux. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $(a+\mathrm{i})^3=(a^3-3a)+\mathrm{i}(3a^2-1)$. Or, z est un nombre réel si, et seulement si, $3a^2-1=0$. Cette équation admet deux solutions : $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Donc si $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou si $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, alors z est un nombre réel.

86 **1.** $a=\frac{3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\frac{3\mathrm{i}\times(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\frac{3}{5}+\frac{6}{5}\mathrm{i}$
2. $b=\frac{1+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$
3. $c=\frac{1+2\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}=-\frac{4}{13}+\frac{7}{13}\mathrm{i}$
4. $d=\frac{2-3\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}=\frac{12}{13}-\frac{5}{13}\mathrm{i}$

95 **1.** $(5+2\mathrm{i})\overline{z}-2=\mathrm{i}\Leftrightarrow\overline{z}=\frac{2+\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}}$
$\Leftrightarrow\overline{z}=\frac{(2+\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})}{(5+2\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})}\Leftrightarrow\overline{z}=\frac{12}{29}+\mathrm{i}\frac{1}{29}$
et donc $z=\frac{12}{29}-\mathrm{i}\frac{1}{29}$.
2. $2\mathrm{i}(1-2\overline{z})+\overline{z}=\mathrm{i}\overline{z}-1\Leftrightarrow(1-5\mathrm{i})\overline{z}=-1-2\mathrm{i}$
$\Leftrightarrow\frac{9}{26}-\mathrm{i}\frac{7}{26}$ donc $z=\frac{9}{26}+\mathrm{i}\frac{7}{26}$.
3. $2\mathrm{i}\overline{z}-\mathrm{i}=2(\overline{z}-5)+\mathrm{i}\Leftrightarrow(2\mathrm{i}-2)\overline{z}=-10+2\mathrm{i}$
$\Leftrightarrow\overline{z}=3+2\mathrm{i}$ donc $z=3-2\mathrm{i}$.
4. $\frac{\overline{z}-2\mathrm{i}}{\overline{z}-1}+1+\mathrm{i}=0\Leftrightarrow(2+\mathrm{i})\overline{z}=1+3\mathrm{i}$
$\Leftrightarrow\overline{z}=1+\mathrm{i}$ donc $z=1-\mathrm{i}$.

117 **1.** $z_1+z_2=-1$ et $z_1z_2=\frac{5}{4}$, donc z_1 et z_2 sont racines du polynôme $z^2+z+\frac{5}{4}$. Le discriminant de ce polynôme vaut $\Delta=-4<0$, il admet donc deux racines complexes conjuguées :
$z_1=\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{4}}{2}=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}$ et $z_2=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}$.
2. z_1 et z_2 sont racines du polynôme $z^2+2\sqrt{2}z+6$. Donc $z_1=-\sqrt{2}-2\mathrm{i}$ et $z_2=-\sqrt{2}+2\mathrm{i}$.
3. z_1 et z_2 sont racines du polynôme $z^2+\sqrt{3}z+1$. Donc $z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ et $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.
4. z_1 et z_2 sont racines du polynôme $z^2+\sqrt{2}z+1$. Donc $z_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$ et $z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

123 **1.** Soit $\alpha\in\mathbb{R}$,
$\mathrm{P}(\mathrm{i}\alpha)=-\alpha^3\mathrm{i}+(4+\mathrm{i})\alpha^2+\mathrm{i}(5+4\mathrm{i})\alpha-5\mathrm{i}$
$=4(\alpha^2-\alpha)+\mathrm{i}(-\alpha^3+\alpha^2+5\alpha-5)$
On cherche maintenant à résoudre $4(\alpha^2-\alpha)=0$ et $-\alpha^3+\alpha^2+5\alpha-5=0$.
L'équation $4(\alpha^2-\alpha)=0\Leftrightarrow 4\alpha(\alpha-1)=0$ admet deux solutions : $\alpha=0$ ou $\alpha=1$. Et, si $\alpha=1$, alors on a aussi $-\alpha^3+\alpha^2+5\alpha-5=-1+1+5-5=0$. Donc $\mathrm{i}\times 1=\mathrm{i}$ est une racine du polynôme P.
2. Pour tout $z\in\mathbb{C}$,
$(z-\mathrm{i})(az^2+bz+c)$
$=az^3-(-b+\mathrm{i}a)z^2+(c-\mathrm{i}b)z-\mathrm{i}c$.
En comparant cette écriture à celle de $\mathrm{P}(z)$ donnée dans l'énoncé, on en déduit que $a=1$, $b=-4$ et $c=5$.
3. z^2-4z+5 est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta=-4$. Il admet donc deux racines complexes conjuguées : $2-\mathrm{i}$ et $2+\mathrm{i}$. L'équation $\mathrm{P}(z)=0$ admet donc trois solutions dans $\mathbb{C}$: i, $2-\mathrm{i}$ et $2+\mathrm{i}$.

131 **1.** Le discriminant du trinôme du second degré $3z^2-2z+1$ vaut $\Delta=(-2)^2-4\times3\times1=-8<0$. L'équation n'admet donc aucune solution réelle : l'affirmation est fausse.
2. On a $2+\mathrm{i}+\frac{5}{2+\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}+2-\mathrm{i}=4$ et $2-\mathrm{i}+\frac{5}{2-\mathrm{i}}=2-\mathrm{i}+2+\mathrm{i}=4$, donc l'affirmation est vraie.
3. Les solutions de l'équation $z^2-4z+5=0$ sont $2+\mathrm{i}$ et $2-\mathrm{i}$. Les solutions de l'équation $z^2+4z+5=0$ sont $-2+\mathrm{i}$ et $-2-\mathrm{i}$. On a bien $2+\mathrm{i}=-(-2-\mathrm{i})$ et $2-\mathrm{i}=-(-2+\mathrm{i})$, donc l'affirmation est vraie.
4. Le discriminant du trinôme du second degré $z^2-6z+10$ vaut $\Delta=-4$. Il admet donc deux racines complexes conjuguées : $3-\mathrm{i}$ et $3+\mathrm{i}$. La partie réelle de ces racines vaut bien 3, donc l'affirmation est vraie.

Chapitre 2

Auto-évaluation

9 c **10** c **11** b **12** d
13 b c **14** a c d **15** a b d
16 a d

17 **1.** Graphiquement, $z_A = 2+i$ et $z_B = -4+3i$.

2. $|z_B - z_A|^2 = |-6+2i|^2 = 6^2+2^2 = 40$,
$|z_B - z_C|^2 = |(-3-\sqrt{3})+(1-3\sqrt{3})i|^2 = 40$
et $|z_C - z_A|^2 = |(\sqrt{3}-3)+(1+3\sqrt{3})i|^2 = 40$.
Donc le triangle ABC est équilatéral.

3. Le triangle ABC étant équilatéral, ses hauteurs et ses médiatrices sont confondues. Donc H, le pied de sa hauteur issue de C, est le milieu du segment [AB]. Donc $z_H = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{2+i-4+3i}{2} = -1+2i$.

4. Le triangle ABC étant équilatéral, ses hauteurs sont confondues avec ses médianes. Donc [CH] est la médiane issue de C dans le triangle ABC. De plus, si on note G le centre de gravité de ABC, on a $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CH}$.
On obtient $z_G - z_C = \frac{2}{3}(z_H - z_C)$, c'est-à-dire $z_G - \sqrt{3} + 1 - (2+3\sqrt{3})i = \frac{2}{3}(-1+2i-\sqrt{3}+1-(2+3\sqrt{3})i)$, et on obtient $z_G = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right)+i(2+\sqrt{3})$.

Exercices

28 **1.** $a-b = 5-3i-2 = 3-3i$ et $d-c = 1-2i-i+2 = 3-3i$. Donc $a-b = d-c$ et ABCD est un parallélogramme.

2. ABCD est un parallélogramme donc M, le point d'intersection des droites (AC) et (BD), est le milieu de [DB]. D'où $z_M = \frac{5-3i+i-2}{2} = \frac{3}{2} - i$.

35 **1.**
$$z = \frac{3}{2}+\frac{3}{2}i = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)i\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

2. $z = -\sqrt{2}-i\sqrt{2} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$

3.
$$z = \frac{-\sqrt{5}}{2} - i\frac{\sqrt{15}}{2} = \sqrt{5}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{5}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

41 $|b-a|^2 = |4|^2 = 16$, $|c-b|^2 = |-2+i|^2 = 5$ et $|c-a|^2 = |2+i|^2 = 5$. Donc le triangle ABC est isocèle en C. La réciproque du théorème de Pythagore affirme qu'il n'est pas rectangle.

54 **1.** On cherche z_G tel que $z_G - z_A = z_E - z_D$. On obtient $z_G = -4-i$.

2. Le centre O de ce parallélogramme est le milieu d'une de ses diagonales ; par exemple de [AE]. D'où $z_O = \frac{z_A+z_E}{2} = \frac{-3}{2}+\frac{1}{2}i$.

61 **1.** $|z_1| = |9+5i| = \sqrt{9^2+5^2} = \sqrt{106}$

2. $|z_2| = \left|\frac{2}{3}-\sqrt{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+(-\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{22}}{3}$

3. $|z_3| = |2+\sqrt{3}+3i| = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2+3^2} = 2\sqrt{4+\sqrt{3}}$

4. $|z_4| = \left|5i-\frac{\sqrt{5}}{3}\right| = \sqrt{5^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{230}}{3}$

76 **1.**
$$z_1 = \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)i\right)$$

2.
$$z_2 = \pi i = \pi(0+1\times i) = \pi\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)i\right)$$

3.
$$z_3 = 6+6\sqrt{3}i = 12\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 12\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)i\right)$$

4.
$$z_4 = -2+2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)i\right)$$

96 **1.** $z\times z' = 3e^{\frac{3i\pi}{5}}\times\frac{2}{5}e^{-\frac{2i\pi}{7}} = \frac{6}{5}e^{\frac{11i\pi}{35}}$

2. $\frac{z}{z'} = \frac{\frac{2}{5}e^{-\frac{2i\pi}{7}}}{3e^{\frac{3i\pi}{5}}} = \frac{2}{15}e^{-\frac{31i\pi}{35}}$

3. $z'^5 = \left(\frac{2}{5}e^{-\frac{2i\pi}{7}}\right)^5 = \frac{32}{3125}e^{-\frac{10i\pi}{7}}$

4. $\frac{z}{z'^3} = \frac{3e^{\frac{3i\pi}{5}}}{\left(\frac{2}{5}e^{-\frac{2i\pi}{7}}\right)^3} = \frac{375}{8}e^{\frac{51i\pi}{35}}$

102 **1.**
$$2\cos^2(x)-1 = 2\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2-1 = 2\frac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}}{4}-1 = \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} = \cos(2x)$$

2.
$$2\cos(x)\sin(x) = 2\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{(e^{ix}+e^{-ix})(e^{ix}-e^{-ix})}{2i} = \frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i} = \sin(2x)$$

114 **1.** $AD = |d-a| = \left|-2+\frac{3}{2}i\right| = \sqrt{(-2)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$

$BD = |d-b| = \left|2-\frac{3}{2}i\right| = \sqrt{2^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$

et $CD = |d-c| = \left|2+\frac{3}{2}i\right| = \sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$.

2. Le point D est à égale distance de A, de B et de C donc le point D est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

118 **1.**
$$\frac{2+i-4+i}{-2-3i-2-i} = \frac{-2+2i}{-4-4i} = \frac{-(2+2i)\times(-4+4i)}{(-4-4i)\times(-4+4i)} = \frac{-4i}{8} = -\frac{1}{2}i$$

2. On a :
$$(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{BA}) = \arg\left(\frac{2+i-4+i}{-2-3i-2-i}\right) = \arg\left(-\frac{1}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$
Donc les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Chapitre 3

Auto-évaluation

9 d **10** c **11** c **12** d
13 b d **14** c d **15** b c
16 b c d

17 **1. a.**

n	1	2	3	4	5	6
3^n	3	9	27	81	243	729
Reste dans la division par 7	3	2	6	4	5	1

b. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $3^{n+6} = 3^n\times3^6 \equiv 3^n\times1[7] \equiv 3^n[7]$.

c. $3^{2019} = 3^{3+336\times6} \equiv 3^3[7] \equiv 6[7]$

d. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $3^{n+6}\equiv 3^n[7]$. Étudier le reste de la division euclidienne de 3^n par 7 pour tout $n\in\mathbb{N}$ revient donc à étudier ce reste pour $n\in\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$.

$n\equiv\ldots[7]$	1	2	3	4	5	6
$3^n\equiv\ldots[7]$	3	2	6	4	5	1

e. Pour tout $n\in\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$, $3^n\not\equiv0[7]$. Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, 7 ne divise pas 3^n.

2. a. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison 3. Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1-3^n}{1-3} = \frac{1}{2}(3^n-1)$.

b.

$n\equiv\ldots[7]$	1	2	3	4	5	6
$3^n\equiv\ldots[7]$	3	2	6	4	5	1
$3^n-1\equiv\ldots[7]$	2	1	5	3	4	0
$u_n\equiv\ldots[7]$	1	4	6	5	2	0

Donc u_n est divisible par 7 si, et seulement si, $n\equiv6[7]$.

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{1}{2}(3^n-5^n)$.
De plus $3^2\equiv1[4]$ et $5^2\equiv1[4]$, on peut donc étudier le problème uniquement pour $n\in\{1\,;2\}$.

n	1	2
$3^n - 5^n$	-1	-8
Reste dans la division par 4	3	0

Donc w_n est divisible par 4 si, et seulement si, $n \equiv 0\,[2]$.

Exercices

26 **1.** Les diviseurs positifs de 38 sont 1, 2, 19 et 38.

2. Les diviseurs positifs de 30 sont 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 et 30.

3. Les diviseurs positifs communs de 30 et 38 sont donc 1 et 2.

36 Les diviseurs entiers de 4 sont
$4 = 1\times 4 = 4\times 1$
$= 2\times 2 = (-1)\times(-4)$
$= (-4)\times(-1) = (-2)\times(-2)$.
Puisqu'on cherche $(x\,;y)\in\mathbb{N}^2$, on cherche $y>0$ et donc $y+3>3$. Il n'y a qu'un couple de diviseurs de 4 respectant cette condition : $(1\,;4)$. Et on a alors $\begin{cases}x-4=1\\ y+3=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\ y=1\end{cases}$. Il n'existe donc qu'un seul couple d'entiers naturels distincts vérifiant cette équation : $(4\,;1)$.

41 **1.** Soit $n\in\mathbb{N}$,
$(n+3)^2 = n^2+6n+9 = n(n+6)+9$.

2. D'après la question précédente, le reste de la division euclidienne de $(n+3)^2$ par n est 9 si, et seulement si, $n>9$ (puisque, dans une division euclidienne, le reste est forcément inférieur au diviseur).

48 **1.** $a\equiv 2[5]$ donc $a^2\equiv 4[5]$. D'où $a^2+b\equiv 4+3\equiv 2[5]$. Le reste de la division euclidienne de a^2+b par 5 vaut donc 2.

2. $3a+3b\equiv 3\times 2+3\times 3\equiv 15\equiv 0[5]$. Donc $3a+3b$ est divisible par 5.

64 **1.** Les diviseurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 et leur opposé.

2. Soit k un tel entier naturel. Alors on a $k^2 = n^2-24 \Leftrightarrow n^2-k^2=24$
$\Leftrightarrow (n-k)(n+k)=24$.
On cherche donc $n-k$ et $n+k$ parmi les diviseurs de 24. De plus, comme n et k sont positifs, on cherche ces nombres uniquement parmi ses diviseurs positifs, cela nous apprend aussi qu'on a forcément $n-k<n+k$. Et on obtient, au final, que les valeurs possibles de n sont $n=5$ et $n=7$.

71 **1.** Comme $d\,|\,n+6$ et $d\,|\,2n+3$ alors d divise toute combinaison linéaire de $n+6$ et $2n+3$. En particulier d divise $2(n+6)-(2n+3)=9$.
Donc $d\in\{1\,;3\,;9\}$.

2. Si $d=1$, alors d divise tout nombre entier. Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, le couple $(n\,;1)$ respecte les deux conditions de l'énoncé.
Si $d=3$, alors $3\,|\,n+6 \Leftrightarrow 3\,|\,n$, et $3\,|\,2n+3 \Leftrightarrow 3\,|\,n$. Donc, pour tout $k\in\mathbb{N}$, le couple $(3k\,;3)$ respecte les deux conditions de l'énoncé.
Enfin, si $d=9$, alors $9\,|\,n+6 \Leftrightarrow$ il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $n=9k+3$, et $9\,|\,2n+3 \Leftrightarrow$ il existe $k'\in\mathbb{Z}$ tel que $n=9k'+3$. Donc, pour tout $k\in\mathbb{N}$, le couple $(9k+3\,;9)$ respecte les deux conditions données.

85 Soit n un entier naturel qui, dans la division euclidienne de n par 6, a un reste égal à deux fois le quotient. Il existe donc $k\in\mathbb{N}$, tel que $n=6k+2k$ avec $0\leqslant 2k<6$. En conclusion, on a donc $n=8k$ avec $0\leqslant k<3$. Les entiers naturels cherchés sont donc 0, 8 et 16.

98 **1.** $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

2. a^3+b^3 est divisible par 3, alors il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $a^3+b^3=3k$, donc $(a+b)^3 = 3k+3a^2b+3ab^2$
$=3(k+a^2b+ab^2)$ est divisible par 3.
Réciproquement, si $(a+b)^3$ est divisible par 3, alors il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $(a+b)^3=3k$, c'est-à-dire $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=3k$, d'où $a^3+b^3=3(k-a^2b-ab^2)$ et donc a^3+b^3 est divisible par 3.
En conclusion, $(a+b)^3$ est un multiple de 3 si, et seulement si, a^3+b^3 est un multiple de 3.

3. D'après la question précédente, $(x+2)^3$ est un multiple de 3 si, et seulement si, x^3+8 est un multiple de 3.

$x\equiv\ldots[3]$	0	1	2
$x^3+8\equiv\ldots[3]$	2	0	1

Donc, d'après le tableau de congruence ci-dessus, $(x+2)^3$ est un multiple de 3 si, et seulement si, $x=3k+1$, avec $k\in\mathbb{Z}$. En conclusion, les x compris entre -5 et 5 tels que $(x+2)^3$ est un multiple de 3 sont donc -5, -2, 1 et 4.

114 **Proposition 1**
$n\equiv 3[7] \Rightarrow n^3\equiv 6[7] \Rightarrow n^3+1\equiv 0[7] \Rightarrow n^3+1$ est divisible par 7. Donc cette proposition est vraie.

Proposition 2
Soit $n\in\mathbb{N}$, $2^2\equiv 1[3]$
$\Rightarrow (2^2)^n\equiv 1^n[3] \Rightarrow 2^{2n}+1\equiv 2[3]$. Donc $2^{2n}+1$ n'est pas divisible par 3. Cette proposition est donc fausse.

Proposition 3
Cette proposition est fausse. Pour le prouver, prenons un contre-exemple. Si on prend $x=5$, alors $x^2-x=20\equiv 0[5]$ mais $5\not\equiv 1[5]$.

Proposition 4
Supposons dans un premier temps que $a>b$. Alors $\overline{abc}-\overline{bac}=\overline{(a-b-1)(10+b-a)0}$ et $(a-b-1)+(10+b-a)=9$ donc $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ est bien divisible par 9.
Supposons maintenant que $b>a$. Alors $\mathrm{A}-\mathrm{B}=-(\mathrm{B}-\mathrm{A})$ et on peut utiliser ce qu'on a fait précédemment pour en déduire que $\mathrm{B}-\mathrm{A}$ est divisible par 9, et donc que $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ est divisible par 9.
En conclusion, la proposition est vraie.

116 **1.** Soit $(x\,;y)$ un couple d'entiers tel que $4x^2+3y^2=11$, alors
$4x^2 = -3y^2+11$
$= -3y^2+3\times 3+2 = 3(-y^2+3)+2$.
En posant $\mathrm{K}=-y^2+3\in\mathbb{Z}$, on a alors $4x^2=3\mathrm{K}+2$ et donc $4x^2\equiv 2[3]$.

2.

$x\equiv\ldots[3]$	0	1	2
$x^2\equiv\ldots[3]$	0	1	1
$4x^2\equiv\ldots[3]$	0	3	3

D'après le tableau de congruences ci-dessus, il n'existe pas d'entier x tel que $4x^2\equiv 2[3]$, donc l'équation (E) n'admet pas de solution entière.

Chapitre 4

Auto-évaluation

12 c **13** b **14** b **15** c
16 a c d **17** a c d **18** b d
19 a c

20 **1. a.** $z\equiv 0[35]$ équivaut à dire qu'il existe $x\in\mathbb{Z}$ tel que $z=35x$. De même, $z\equiv 6[27]$ équivaut à dire qu'il existe $y\in\mathbb{Z}$ tel que $z=27y+6$. Le système de congruences est donc équivalent à l'équation diophantienne $35x-27y=6$.

b. 35 et 27 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Bézout, l'équation admet bien une solution.

On peut obtenir une solution particulière à cette équation en remontant l'algorithme d'Euclide : une solution particulière est le couple $(-60\,;-78)$.

c. Soit $(x\,;y)\in\mathbb{Z}$ solution de l'équation diophantienne. On a donc $35\times x-27\times y=35\times(-60)+27\times 78$, d'où $35(x+60)=27(y+78)$. 35 et 27 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 27 divise $x+60$. Il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x+60=27k$ c'est à dire $x=27k-60$. En remplaçant x par son expression dans l'équation $35(x+60)=27(y+78)$, on obtient alors que $y=35k-78$. Réciproquement, on a $35(27k-60)-27(35k-78)$ $=945k-2\,100-945k+2\,106=6$, donc les couples $(27k-60\,;35k-78)$ sont bien solutions de l'équation $35x-27y=6$.

Les solutions z du système de congruences s'écrivent donc $z=35x=35(27k-60)=945k-2\,100$, $k\in\mathbb{Z}$.

2. Ce problème revient à chercher la solution positive minimale du système de congruences $\begin{cases} z\equiv 0\,[35] \\ z\equiv 6\,[27]\end{cases}$.

Les solutions de ce système sont de la forme $z=945k-2\,100$, avec $k\in\mathbb{Z}$. La solution positive minimale de ce système vaut donc $z=945\times 3-2\,100=735$. L'astronome devra donc attendre 735 jours pour pouvoir observer ces deux planètes simultanément.

Exercices

30 **Déterminons $\mathrm{PGCD}(123\,;76)$.**

$123-76=47$
$76-47=29$
$47-29=18$
$29-18=11$
$18-11=7$
$11-7=4$
$7-4=3$
$4-3=1$
$3-1=2$
$2-1=1$
$1-1=0$

Donc $\mathrm{PGCD}(123\,;76)=1$.

Déterminons $\mathrm{PGCD}(98\,;38)$.

$98-38=60$
$60-38=22$
$38-22=16$
$22-16=6$
$16-6=10$
$10-6=4$
$6-4=2$
$4-2=2$
$2-2=0$

Donc $\mathrm{PGCD}(98\,;38)=2$.

40 **1.** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $19n+24=2\times(8n+10)+(3n+4)$ donc, $\mathrm{PGCD}(19n+24\,;8n+10)$ $=\mathrm{PGCD}(8n+10\,;3n+4)$.

De la même manière, on obtient que $\mathrm{PGCD}(8n+10\,;3n+4)$ $=\mathrm{PGCD}(3n+4\,;2n+2)$ $=\mathrm{PGCD}(2n+2\,;n+2)$.

Les diviseurs communs de $2n+2$ et $n+2$ divisent toute combinaison linéaire de ces deux nombres donc, en particulier, divisent $(2n+2)-2(n+2)=2$. Leur PGCD étant un de leur diviseur commun, il divise donc 2.

Donc $\mathrm{PGCD}(9n+24\,;8n+10)$ $=\mathrm{PGCD}(2n+2\,;n+2)=1$ si n est impair, et $\mathrm{PGCD}(9n+24\,;8n+10)$ $=\mathrm{PGCD}(2n+2\,;n+2)=2$ si n est pair.

2. $\mathrm{PGCD}(19n+24\,;8n+10)=1$ si, et seulement si, n est impair, d'après la question précédente. Donc $19n+24$ et $8n+10$ n'admettent aucun diviseur commun autre que 1 si, et seulement si, n est impair. Et donc, la fraction $\dfrac{19n+24}{8n+10}$ est irréductible si, et seulement si, n est impair.

50 **1.** $(-49\,;37)$ est une solution particulière de cette équation.

2. $(-15\,;-94)$ est une solution particulière de cette équation.

3. $(-9\,;113)$ est une solution particulière de cette équation.

55 **1.** L'implication $n\equiv 0[4]\Rightarrow 3n\equiv 0[4]$ vient directement de la compatibilité de la multiplication et de la congruence.

Montrons l'implication réciproque. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $3n\equiv 0[4]$. Alors il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $3n=4k$. Or 4 et 3 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 4 divise n. Et donc $n\equiv 0\,[4]$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n+1|5n$. Il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que $5n=k(n+1)$.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, n et $n+1$ sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, $(n+1)|5$ et donc $n+1=1$ ou $n+1=5$, c'est-à-dire $n=0$ ou $n=4$.

69 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n^2-1=(n-1)(n+1)$, donc $\mathrm{PGCD}(n^2-1\,;3(n+1))$ $=(n+1)\mathrm{PGCD}((n-1);3)$.

Donc, soit $3|n-1\Leftrightarrow n\equiv 1[3]$ et on a alors $\mathrm{PGCD}(n^2-1\,;3(n+1))=3(n+1)$, soit 3 ne divise pas $n-1$ et dans ce cas $\mathrm{PGCD}(n^2-1\,;3(n+1))=(n+1)$.

78 **1.** On a $2^4\equiv 1[15]$ donc $2^{445}=2^{111\times 4+1}\equiv 2\,[15]$. Cette proposition est donc vraie.

2. D'après la question précédente, on sait qu'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $2^{445}=15k+2$, donc $2^{445}+4=15k+6$. D'où $\mathrm{PGCD}(2^{445}+4\,;15)=\mathrm{PGCD}(15\,;6)$ $=\mathrm{PGCD}(6\,;3)=3$.

Cette proposition est donc vraie.

89 Soient a et b deux entiers relatifs. On a $\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{m}=\dfrac{am+bn}{nm}$. Or, d'après l'identité de Bézout, il existe $(a\,;b)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $am+bn=1$ si, et seulement si, m et n sont premiers entre eux. D'où le résultat.

92 **1.** $\dfrac{n-7}{18}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 18\,|\,n-7\Leftrightarrow$ il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $n-7=18k$. De même, $\dfrac{n-8}{15}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$ il existe $k'\in\mathbb{Z}$, $n-8=15k'$.

On en déduit alors que k et k' doivent vérifier $18k-15k'=1$. Or 18 et 15 ne sont pas premiers entre eux donc, d'après l'identité de Bézout, il n'existe pas d'entiers k et k' tels que $18k-15k'=1$. Cette affirmation est donc fausse.

2. $\dfrac{n-3}{16}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 16\,|\,n-3\Leftrightarrow$ il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $n-3=16k$. De même, $\dfrac{n-11}{12}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$ il existe $k'\in\mathbb{Z}$, $n-11=12k'$.

On en déduit alors que k et k' doivent vérifier $16k-12k'=8$. Comme $\mathrm{PGCD}(16\,;12)=4$, d'après le théorème de Bézout il existe des entiers k et k' tels que $16k-12k'=4$ et donc, en prenant $\mathrm{K}=2k$ et $\mathrm{K}'=2k'$, il existe des entiers K et K' tels que $16\mathrm{K}-12\mathrm{K}'=8$.

Cette affirmation est donc vraie.

104 Montrons par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, a et b^n sont premiers entre eux.

Initialisation : a et $b^1=b$ sont premiers entre eux d'après l'énoncé. Donc la propriété est vraie au rang $n=1$.

Hérédité : supposons que cette propriété soit vraie au rang n, montrons qu'elle est aussi vraie au rang $n+1$.

Par hypothèse de récurrence, a et b^n sont premiers entre eux. Donc, d'après l'identité de Bézout, il existe $(u\,;v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $au+b^nv=1$.

En multipliant les deux membres de cette égalité par b, on obtient alors $au + b^{n+1}v = b$. Soit maintenant d un diviseur commun de a et b^{n+1}, alors d divise toute combinaison linéaire de a et b^{n+1}. En particulier d divise $b = au + b^{n+1}v$. Donc d divise a et d divise b, donc $d = 1$ car a et b sont premiers entre eux. Donc $\mathrm{PGCD}(a, b^{n+1}) = 1$, ces deux entiers sont bien premiers entre eux et la propriété est vraie au rang $n+1$.

En conclusion, par récurrence, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a et b^n sont premiers entre eux.

Chapitre 5

Auto-évaluation

9 c **10** a **11** b **12** b
13 a c **14** b c **15** b d
16 a c

17 **1.** a et b ne sont divisibles par aucun entier (non égal à 1) inférieur à, respectivement, $\sqrt{a} \approx 5{,}6$ et $\sqrt{b} \approx 4{,}4$, donc a et b sont premiers.

2. $c = 1530 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 17$

3. c admet 24 diviseurs. Les diviseurs de c sont 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 17, 18, 30, 34, 45, 51, 85, 90, 102, 153, 170, 255, 306, 510, 765, 1530. On les obtient en effectuant tous les produits possibles entre les facteurs de sa décomposition en facteurs premiers.

4. $b = 19$ est premier et $c = 2 \times 3^2 \times 5 \times 17$, par unicité de la décomposition en facteurs premiers, ces deux nombres n'ont donc aucun diviseur commun à part 1. D'où $\mathrm{PGCD}(b\,;c) = 1$.

5. a. Comme b est premier et que, d'après la question précédente, b ne divise pas c alors, d'après le petit théorème de Fermat, $c^{b-1} \equiv 1[b]$. D'où $c^{540} \equiv c^{30\times 18} \equiv (c^{b-1})^{30} \equiv 1[b]$.

b. De la même manière, comme $c^{540} = (c^{a-1})^{18}$ et que a ne divise pas c, alors, d'après le petit théorème de Fermat, $c^{540} \equiv 1[a]$.

c. $c^{540} \equiv 1[b]$, il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $c^{540} = bk + 1$. De même, puisque $c^{540} \equiv 1[a]$, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $c^{540} = ak' + 1$. On a alors $bk + 1 = ak' + 1$, c'est-à-dire $bk = ak'$. Or, a et b étant premiers, ils sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, $b | k'$, donc il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $k' = bq$. On peut donc écrire $c^{540} = ak' + 1 = ab \times q + 1$, c'est-à-dire $c^{540} \equiv 1[ab]$.

Exercices

27 **1.** $143 = 11 \times 13$

2. $147 = 3 \times 7^2$

3. $308 = 2^2 \times 7 \times 11$

4. $1024 = 2^{10}$

5. $1715 = 5 \times 7^3$

6. $9180 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 17$

32 **1.** 17 est premier et ne divise pas 2 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $2^{16} \equiv 1[17]$.

2. 5^4 est divisible par 5 donc $5^4 \equiv 0\,[5]$.

3. 19 est premier et ne divise pas 4 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $4^{18} \equiv 1[19]$.

4. 5 est premier et ne divise pas 7 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $7^4 \equiv 1[5]$. Et donc $7^5 \equiv 7 \equiv 2\,[5]$.

5. 11 est premier et ne divise pas 50 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $50^{10} \equiv 1[11]$. Et donc $50^{11} \equiv 50 \equiv 6\,[11]$.

40 **1.**

$n \equiv \dots[3]$	0	1	2
$n+10 \equiv \dots[3]$	1	2	0
$n+20 \equiv \dots[3]$	2	0	1

D'après le tableau de congruences ci-dessus, pour tout entier naturel n, soit n, soit $n+10$, soit $n+20$ est un multiple de 3.

2. L'un de ces trois nombres est forcément divisible par 3. Le seul nombre premier divisible par 3 est 3 lui-même. On doit donc avoir $n = 3$. Et on peut vérifier ensuite que $n + 10 = 13$ et $n + 20 = 23$ sont bien premiers.

43 **1.** $n + (n+1) + (n+2)$
$= 3n + 3 = 3(n+1)$

Cette somme est donc divisible par 3, et est strictement supérieure à 3, elle ne peut donc pas être un nombre premier.

2. $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4)$
$= 5n + 10 = 5(n+2)$

Cette somme est divisible par 5, strictement supérieure à 5, elle ne peut donc pas être un nombre premier.

3. Soient n et k deux entiers naturels non nuls. Notons $S_{k,n}$ la somme des k entiers consécutifs en partant de n.

Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_{k,n} = kn + \frac{(k-1)k}{2}$.

Initialisation : on a $S_{1,n} = n$ et $1 \times n + \frac{0 \times 1}{2} = n$. Donc la propriété est vraie pour $k = 1$.

Hérédité : supposons que cette propriété soit vraie au rang k, montrons qu'elle est aussi vraie au rang $k+1$.
On a $S_{(k+1),n} = S_{k,n} + (n+k)$.
Par hypothèse de récurrence, on peut donc écrire

$$S_{(k+1),n} = kn + \frac{(k-1)k}{2} + (n+k) = (k+1)n + \frac{k(k+1)}{2}.$$

La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

En conclusion, par récurrence, on a montré que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_{k,n} = kn + \frac{(k-1)k}{2}$.

Prenons maintenant k impair, alors $k-1$ est pair et il existe donc $q \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{(k-1)}{2} = q$. D'où $S_{k,n} = kn + kq = k(n+q)$. Cette somme est donc divisible par k, et strictement supérieure à k, cette somme ne peut donc pas être un nombre premier.

47 **1.** On a bien $24 | 24$, $24 | 48$ et $24 | 120$.

2. a. Si p est un nombre premier supérieur ou égal à 5, il ne peut pas être divisible par 3. D'où $p \equiv 1[3]$ ou $p \equiv 2[3]$.

b.

$p \equiv \dots[3]$	1	2
$p^2 - 1 \equiv \dots[3]$	0	0

On déduit du tableau de congruences ci-dessus que $p^2 - 1$ est divisible par 3.

3. Par l'absurde, supposons que le reste de la division euclidienne de p par 8 soit pair. Il existerait alors k et q deux entiers tels que $p = 8q + 2k = 2(4q + k)$.
Donc p serait divisible par 2, ce qui est absurde puisque p est premier.
Donc le reste de la division euclidienne de p par 8 est impair.
On a alors le tableau de congruences suivant.

$p \equiv \dots[8]$	1	3	5	7
$p^2 - 1 \equiv \dots[8]$	0	0	0	0

Donc, en conclusion, $p^2 - 1$ est divisible par 8.

4. $3 | p^2 - 1$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p^2 - 1 = 3k$. De même $8 | p^2 - 1$ donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $p^2 - 1 = 8k'$.

D'où $3k = 8k'$. Or 3 et 8 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 3 divise k'. Donc il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $k' = 3q$. En conclusion, on a donc $p^2 - 1 = 8k' = 8 \times 3q = 24q$. Donc $p^2 - 1 \equiv 0\,[24]$.

61 **1.** La décomposition en facteurs premiers de m est $m = 2^3 \times 3$.
La décomposition en facteurs premiers de n est $n = 2^4 \times 5$. Donc $\mathrm{PGCD}(m\,;n) = 2^3 = 8$.

2. $m = 179$ et $n = 181$ sont tous les deux des nombres premiers, donc $\mathrm{PGCD}(m\,;n) = 1$.

3. $m = 3\,757 = 13 \times 17^2$ et $n = 2\,873 = 13^2 \times 17$, donc $\mathrm{PGCD}(m\,;n) = 13 \times 17 = 221$.

73 **1. a.** 5 est un nombre premier qui ne divise pas 3 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $3^4 \equiv 1[5]$. D'où $n \equiv (3^4)^6 \equiv 1[5]$.

b. 7 est un nombre premier qui ne divise par 3 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $3^6 \equiv 1[7]$. D'où $n \equiv (3^6)^4 \equiv 1[7]$.

c. $n \equiv 1[5]$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 5k + 1$. De même, $n \equiv 1[7]$ donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 7k + 1$.
D'où $5k = 7k'$. Or 5 et 7 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 5 divise k'.
Il existe donc $q \in \mathbb{Z}$ tel que $k' = 5q$.
Donc $n = 7k' + 1 = 7 \times 5q + 1 = 35q + 1$, c'est-à-dire $n \equiv 1[35]$.

d. $3^{75} \equiv 3^{3\times 24+3} \equiv n^3 \times 3^3 \equiv 3^3 \equiv 27\,[35]$.

2. En procédant de la même manière que dans la question précédente, on montre que $3^{72} \equiv (3^4)^{18} \equiv 1[5]$, $3^{72} \equiv (3^{18})^4 \equiv 1[19]$ et donc $3^{72} \equiv 1[95]$.
D'où $3^{75} \equiv 3^{72} \times 3^3 \equiv 27\,[95]$.

3. On procède de la même manière que dans les questions précédentes pour prouver que $4^{40} \equiv 1[5]$, $4^{40} \equiv 1[11]$ et donc que $4^{40} \equiv 1[55]$. On en déduit alors que $4^{207} \equiv 4^{5\times 40+7} \equiv 4^7 \equiv 49\,[55]$.

Chapitre 6

Auto-évaluation

6 d **7** b **8** d **9** c
10 c d **11** b c d **12** a
13 a c

14 **1. a.** Le sommet H et le sommet R, par exemple, ne sont pas adjacents. Ce graphe n'est donc pas complet.

b. Pour n'importe quel couple de sommets de ce graphe, il existe une chaîne les reliant. Ce graphe est donc bien connexe.

2. a. $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\mathrm{M}^4 = \begin{pmatrix} 36 & 20 & 28 & 28 & 28 & 28 \\ 20 & 16 & 20 & 8 & 8 & 20 \\ 28 & 20 & 28 & 18 & 18 & 28 \\ 28 & 8 & 18 & 38 & 38 & 18 \\ 28 & 8 & 18 & 38 & 38 & 18 \\ 28 & 20 & 28 & 18 & 18 & 28 \end{pmatrix}$.

Notons $(m_{i,j})$ les coefficients de la matrice M^4. On a $m_{2,3} = 20$, il y a donc 20 chaînes de longueur 4 reliant le stand des BMX au stand des compteurs et GPS.

Exercices

22 **a.** $\begin{pmatrix} 1{,}5 & 3 \\ -2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1{,}5 + 3 \times 4 \\ 2 \times (-2) + 4 \times 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -2 \end{pmatrix}$

b. $(2\ \ 4) \times \begin{pmatrix} 1{,}5 & 3 \\ -2 & 0{,}5 \end{pmatrix} = (-5\ \ 8)$

29 **1.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

2. A est inversible donc :
$\mathrm{AX} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$
$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{7} \\ \frac{30}{7} \\ 3 \end{pmatrix}$

33 **a.** La chaîne A – E – D – C – B passe par tous les sommets du graphe. Ce graphe est donc connexe.

b. La chaîne A – B – C – D – E passe par tous les sommets du graphe. Ce graphe est donc connexe.

c. La chaîne A – E – D – F – C – B passe par tous les sommets du graphe. Ce graphe est donc connexe.

d. La chaîne A – B – C – D – E – F passe par tous les sommets du graphe. Ce graphe est donc connexe.

38 On a $\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Notons $(m_{i,j})$ les coefficients de cette matrice.

1. On a $m_{3,5} = 2$. Il y a donc 2 chaînes de longueur 2 reliant les sommets n°3 et n°5.

2. On a $m_{1,4} = 2$. Il y a donc 2 chaînes de longueur 2 reliant les sommets n°1 et n°4.

46 **1.** A n'est pas inversible
$\Leftrightarrow \det(\mathrm{A}) = 0 \Leftrightarrow 2a - b = 0 \Leftrightarrow b = 2a$

2. $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}$
$\Leftrightarrow \mathrm{A} \times \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b & a + 2 \\ ba + 2b & b + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow \mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

51 **1.** $\begin{cases} 120x + 180y = 238{,}8 \\ 100x + 190y = 238{,}2 \end{cases}$

2. $\begin{pmatrix} 120 & 180 \\ 100 & 190 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 238{,}8 \\ 238{,}2 \end{pmatrix}$

3. A est inversible donc :
$\mathrm{AX} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$
$= \begin{pmatrix} \frac{19}{480} & -\frac{3}{80} \\ -\frac{1}{48} & \frac{1}{40} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 238{,}8 \\ 238{,}2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0{,}52 \\ 0{,}98 \end{pmatrix}$

56 **1.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

74 **1.** Il s'agit d'un graphe d'ordre 14 car il admet 14 sommets.

2. a. Les sommets de plus haut degré sont les sommets de degré 3 : A, B, C, O, P et Q.

b. Les sommets de plus petit degré sont les sommets de degré 1 : N, R, S et V.

3. Aucune arête ne relie le sommet L et le sommet E. Ces deux sommets ne sont donc pas adjacents.

4. Comme dit dans la question précédente, les sommets L et E ne sont pas adjacents. Ce graphe n'est donc pas complet.

85 **1.** $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Notons $(m_{i,j})$ les coefficients de la matrice M^4.

a. On a $m_{5,5} = 28$. Il existe donc 28 chaînes de longueur 4 partant de E et revenant en E.

b. On a $m_{3,9} = 2$. Il existe donc 2 chaînes de longueur 4 partant de C et arrivant en I. Ces chaînes sont C – B – A – D – I et C – B – E – D – I.

c. On a $m_{3,2} = 0$ donc il n'est pas toujours possible de joindre deux salles en quatre étapes.

Chapitre 7

Auto-évaluation

9 a **10** c **11** c **12** a
13 b c **14** a b **15** b c
16 a b c

17 **1.** Le graphe étant probabiliste, on doit avoir $p+\frac{p}{2}+0{,}4=1$, c'est-à-dire $p=0{,}4$. La matrice de transition de cette chaîne de Markov est donc $\mathrm{P}=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4\\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4\\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5\end{pmatrix}$.

2. $\mathrm{P}^2=\begin{pmatrix}0{,}32 & 0{,}24 & 0{,}44\\ 0{,}31 & 0{,}25 & 0{,}44\\ 0{,}31 & 0{,}24 & 0{,}45\end{pmatrix}$ et

$\mathrm{P}^3=\begin{pmatrix}0{,}312 & 0{,}244 & 0{,}444\\ 0{,}313 & 0{,}243 & 0{,}444\\ 0{,}314 & 0{,}241 & 0{,}445\end{pmatrix}$.

3. $\pi_3=\pi_0\times\mathrm{P}^3=(0{,}3133\ \ 0{,}2423\ \ 0{,}4444)$

Exercices

27 **1.** $\mathrm{U}_1=\begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix}$ et $\mathrm{U}_2=\begin{pmatrix}12\\-34\end{pmatrix}$

2. a. $\mathrm{A}-\mathrm{I}_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 5 & -5\end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible car $\det(\mathrm{A}-\mathrm{I}_2)=-10\neq 0$, et $(\mathrm{A}-\mathrm{I}_2)^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}1\\ 0{,}5 & -0{,}1\end{pmatrix}$.

b. $\mathrm{C}=\begin{pmatrix}-0{,}1\\ 0{,}1\end{pmatrix}$

3. Soit $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_{n+1}&=\mathrm{U}_{n+1}-\mathrm{C}\\ &=\mathrm{AU}_n+\mathrm{B}+(\mathrm{A}-\mathrm{I}_2)^{-1}\mathrm{B}\\ &=\mathrm{AU}_n+\left(\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}1\\ 0{,}5 & -0{,}1\end{pmatrix}+\mathrm{I}_2\right)\mathrm{B}\\ &=\mathrm{AU}_n+\begin{pmatrix}0{,}1\\ 0{,}9\end{pmatrix}\\ &=\mathrm{AU}_n-\mathrm{AC}=\mathrm{A}(\mathrm{U}_n-\mathrm{C})=\mathrm{AV}_n.\end{aligned}$$

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{V}_n=\mathrm{A}^n\mathrm{V}_0$.

5. $\mathrm{V}_n=\mathrm{U}_n-\mathrm{C}$ d'où $\mathrm{U}_n=\mathrm{V}_n+\mathrm{C}=\mathrm{A}^n\mathrm{V}_0+\mathrm{C}$.

$\mathrm{U}_8=\mathrm{A}^8\begin{pmatrix}1{,}1\\ -1{,}1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-0{,}1\\ 0{,}1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}68\,113\\ -439\,033\end{pmatrix}$

30 **1.** $\mathrm{P}=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}9\end{pmatrix}$

2. Initialisation : si $n=0$,

$\begin{pmatrix}\frac{1+2\times0{,}7^0}{3} & \frac{2-2\times0{,}7^0}{3}\\ \frac{1-0{,}7^0}{3} & \frac{2+0{,}7^0}{3}\end{pmatrix}=\mathrm{I}_2=\mathrm{P}^0.$

Donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que la propriété soit vraie au rang n, montrons qu'elle est aussi vraie au rang $n+1$.

$\mathrm{P}^{n+1}=\mathrm{PP}^n=\mathrm{P}\begin{pmatrix}\frac{1+2\times0{,}7^n}{3} & \frac{2-2\times0{,}7^n}{3}\\ \frac{1-0{,}7^n}{3} & \frac{2+0{,}7^n}{3}\end{pmatrix}$,

par hypothèse de récurrence ; d'où

$\mathrm{P}^{n+1}=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}9\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1+2\times0{,}7^n}{3} & \frac{2-2\times0{,}7^n}{3}\\ \frac{1-0{,}7^n}{3} & \frac{2+0{,}7^n}{3}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\frac{1+2\times0{,}7^{n+1}}{3} & \frac{2-2\times0{,}7^{n+1}}{3}\\ \frac{1-0{,}7^{n+1}}{3} & \frac{2+0{,}7^{n+1}}{3}\end{pmatrix}$.

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

En conclusion, par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la formule est bien vérifiée.

3. On a

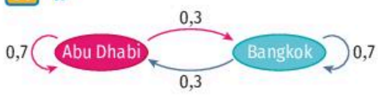
$(0{,}5\ \ 0{,}5)\times\mathrm{P}^{100}$

$=(0{,}5\ \ 0{,}5)\times\begin{pmatrix}\frac{1+2\times0{,}7^{100}}{3} & \frac{2-2\times0{,}7^{100}}{3}\\ \frac{1-0{,}7^{100}}{3} & \frac{2+0{,}7^{100}}{3}\end{pmatrix}$

$\approx(0{,}33\ \ 0{,}67)$.

Donc la probabilité de l'état 1 au bout de 100 itérations sera de 0,33.

33 **1.**



2. La matrice de transition de la chaîne de Markov modélisant cette situation est la suivante $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3\\ 0{,}3 & 0{,}7\end{pmatrix}$.

On a alors $(1\ \ 0)\times\mathrm{M}^2=(0{,}58\ \ 0{,}42)$.

Donc la probabilité que Martin soit à Abu Dhabi deux ans après est de 0,58.

43 **1.** Posons $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Soit $n\in\mathbb{N}$, on a $\mathrm{MX}_n=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}u_{n+1}-u_n\\ u_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{n+2}\\ u_{n+1}\end{pmatrix}=\mathrm{X}_{n+1}.$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{MX}_n$.

2. On procède par récurrence.

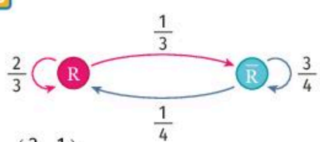
Initialisation : si $n=0$, on a bien $\mathrm{M}^0\mathrm{X}_0=\mathrm{I}_2\mathrm{X}_0=\mathrm{X}_0$. Donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que la propriété soit vraie au rang n, montrons qu'elle est aussi vraie au rang $n+1$.

On a $\mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{MX}_n=\mathrm{M}\times\mathrm{M}^n\mathrm{X}_0$, par hypothèse de récurrence, c'est-à-dire $\mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{M}^{n+1}\mathrm{X}_0$. La propriété est donc vraie pour le rang $n+1$.

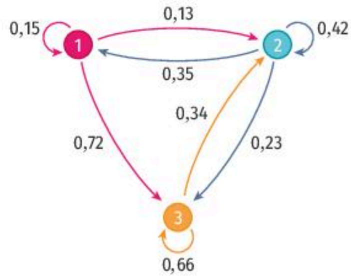
Par récurrence, cette propriété est donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

55

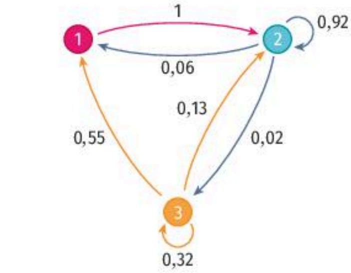


$\mathrm{M}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$

61 **1.** $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0{,}15 & 0{,}13 & 0{,}72\\ 0{,}35 & 0{,}42 & 0{,}23\\ 0 & 0{,}34 & 0{,}66\end{pmatrix}$



2. $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0{,}06 & 0{,}92 & 0{,}02\\ 0{,}55 & 0{,}13 & 0{,}32\end{pmatrix}$



67 Mathématiquement, cette situation se traduit par l'étude d'une chaîne de Markov de matrice de transition associée $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}7\\ 0{,}6 & 0{,}4\end{pmatrix}$ et de distribution initiale $\mathrm{P}_0=(0\ \ 1)$. On obtient ainsi

$\mathrm{P}_{15}=\mathrm{P}_0\times\mathrm{M}^{15}\approx(0{,}46153846\ \ 0{,}53846153)$.

La probabilité que Nadège passe Noël chez ses parents en 2035 est donc d'environ 0,4615.

74 Mathématiquement, cette situation se traduit par l'étude d'une chaîne de Markov de matrice de transition associée $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1\\ 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05\\ 0{,}17 & 0{,}8 & 0{,}03\end{pmatrix}$ et de distribution initiale $\mathrm{P}_0=(1\ \ 0\ \ 0)$.

1. $\mathrm{P}_3=\mathrm{P}_0\times\mathrm{M}^3$

$=\mathrm{P}_0=(0{,}26371\ \ 0{,}65\ \ 0{,}08629)$.

Donc la probabilité que la ruche soit de nouveau en train d'essaimer trois ans plus tard est de 0,26371.

2. La matrice M ne contient aucun 0, donc la suite (P_n) des distributions converge vers la distribution invariante de cette chaîne de Markov. Soit $\mathrm{P}=(a\ \ b\ \ c)$ la distribution invariante de cette chaîne de Markov, alors $\mathrm{PM}=\mathrm{P}$, c'est-à-dire $\begin{cases}0{,}1a+0{,}9b+0{,}17c=a\\ 0{,}8a+0{,}05b+0{,}8c=b\\ 0{,}1a+0{,}05b+0{,}03c=c\end{cases}$. On a donc

$\mathrm{P}\approx(0{,}47076\ \ 0{,}45714\ \ 0{,}07210)$. Donc si on observe l'essaim sur une longue période, on observera qu'il produit du miel 45,71 % du temps.

CRÉDITS

Couverture : Elena11/Shutterstock, Klaus Ohlenschlaeger/Alamy, asharkyu/Shutterstock, Anna Stowe Travel/Alamy, Tibor Bognar/Alamy, Chris Rout/Alamy, Oyvind Martinsen Creative Collection/Alamy, Best View Stock/Alamy, MaxPhotoArt/Alamy

Sommaire : 6 Triff/Shutterstock, Louis Berk/Alamy, **7** sharkyu/Shutterstock

Histoire des mathématiques - Nombres complexes : 12 Thomas Reid/Wikimedia, Look and Learn/Bridgeman, **13** Sobi3ch~commonswiki/Wikimedia, **14** filosofia, Edizione Nazionale/Mathematica, **15** Bibliothèque nationale de France, Kunstmuseum Basel/Wikimedia

Chapitre 1 : 16 Poulos~commonswiki/Wikimedia, **17** TheDigitalArtist/Pixabay, **18** Biblioteca Europea di Informazione e Cultura/Wikimedia, **45** raigvi/Shutterstock

Chapitre 2 : 49 Triff/Shutterstock, **64** Simpsons contributor/Anders Kaseorg/Wikimedia, **65** Georg-Johann Lay/Wikimedia, Rama/Wikimedia, **73** g0d4ather/Shutterstock, Deutsches Museum Munich/Wikimedia, University of York/Wikimedia, **78** Aanav/Shutterstock

Histoire des mathématiques - Arithmétique : 86 P.V./Wikimedia, **87** Afernand74/Wikimedia, C. J. Mozzochi, Princeton N.J/Wikimedia, The Granger Collection/Alamy, **89** 竹麦魚/Wikimedia, Luke's Mersenne Library and Bibliography

Chapitre 3 : 90 AndreasPraefcke/Wikimedia, **91** Gayatri Malhotra/Unsplash, **92** Vasilii Gubskii/Shutterstock

Chapitre 4 : 117 Louis Berk/Alamy, **118** Patchanokk/Shutterstock, **119** Cnum-Conservatoire numérique des Arts et Métiers, Vladimir Badaev/Shutterstock, **129** Sunti/Shutterstock, **134** Franzi/Shutterstock, **135** SFROLOV/Shutterstock, **139** IgorZh/Shutterstock, AndreasPraefcke/Wikimedia, **140** andy0man/Shutterstock, Fer Gregory/Shutterstock, **141** Syda Productions/Shutterstock

Chapitre 5 : 145 Klaus Ohlenschlaeger/Alamy, **159** Maksim/Wikimedia, Sonuwe/Wikimedia

Travailler ensemble : 165 DeltaOFF/Shutterstock

Histoire des mathématiques - Graphes et matrices : 170 Gogtl/Wikimedia, **171** Sobi3ch~commonswiki/Wikimedia, Scewing/Wikimedia, JSTOR/Archive, **172** Euler Archive, **173** Otso Huuska/Wikimedia

Chapitre 6 : 175 asharkyu/Shutterstock, **197** Gogtl/Wikimedia

Chapitre 7 : 207 Kristoffer Tripplaar/Alamy, **224** Andrea444460/Wikimedia, **225** Milleflore Images/Shutterstock, **226** Sashkin/Shutterstock, **227** Diyana Dimitrova/Shutterstock, Oscity/Shutterstock, **231** Vladimir Wrangel/Shutterstock

Autre : Freepik

Direction éditoriale : Virgile Lahu.

Assistant éditorial : Guillaume Côte.

Maquette : Alejandra Adeikalam et Julie Meister.

Mise en page : Chloé-Van Santy, avec la participation de Julie Meister.

Infographies : Nelly Babillon.

Couverture : Alejandra Adeikalam.

Retouches photo : Anaëlle Dos Santos.

Relecture : Adeline Hartmann et Ségolène Perrier.

Iconographie : Mélina Boyer.

Avec la participation de : Émilie Blanchard, Clémentine Gauthier, Marine Lo Iacono et Clément Teyssier.

Remerciements : Jonathan Banon, Sergiy Bondaryev, Vincent Bourgeois, Arnaud Cetoute, Maximilien Derrier, Laura Dinin, Julie Nginn, Thomas Schell et Julien Seznec qui ont participé à la création de la console Python.

Dépôt légal : mai 2020.
ISBN : 978-2-37760-780-8.
Imprimé en France par BLG.

Lelivrescolaire.fr Éditions
14 rue Rhin et Danube
69009 Lyon
contact@lelivrescolaire.fr

Nombres complexes

Le nombre i s'obtient avec (i).

Pour réaliser des calculs sur les nombres complexes, (paste) puis utiliser (▽) pour obtenir le menu **Nombres complexes**.

re(z) : partie réelle.

im(z) : partie imaginaire.

abs(z) : module.

arg(z) : argument (en radian).

conj(z) : conjugué.

$$\mathrm{re}\left(\frac{5-i}{2-3i}\right) \quad 1$$

$$\mathrm{im}\left(\frac{5-i}{2-3i}\right) \quad 1$$

$$\left|\frac{5-i}{2-3i}\right| \quad \sqrt{2} \approx 1.414214$$

$$\arg\left(\frac{5-i}{2-3i}\right) \quad \frac{\pi}{4} \approx 0.7853982$$

$$\overline{\frac{5-i}{2-3i}} \quad 1-i$$

Arithmétique

Pour réaliser des calculs sur les nombres entiers, (paste) puis utiliser (▽) pour obtenir le menu **Arithmétique**.

gcd(p,q) : PGCD des entiers p et q.

lcm(p,q) : PPCM des entiers p et q.

rem(p,q) : reste dans la division euclidienne de p par q.

quo(p,q) : quotient de la division euclidienne de p par q.

```
gcd(308,168)
                28
lcm(308,168)
              1848
rem(308,168)
               140
quo(308,168)
                 1
```

Matrices

Pour saisir une matrice et réaliser des calculs, (paste) puis utiliser (▽) pour obtenir le menu **Matrices**.

`[[1,2][3,4]]` : saisie des coefficients de la matrice. On utilise les flèches (›) et (▽) pour les autres coefficients.

Il est préférable d'utiliser une variable pour stocker la matrice, avec (shift) (sto→).

$$\begin{bmatrix}1&5&2\\4&3&6\\2&3&1\end{bmatrix}\to A \qquad \begin{bmatrix}1&5&2\\4&3&6\\2&3&1\end{bmatrix}$$

det(M) : déterminant d'une matrice.

$$\det(A) \quad 37$$

inverse(M) : inverse d'une matrice, si la matrice est inversible.

$$\mathrm{inverse}(A)$$

$$\begin{bmatrix}-\frac{15}{37}&\frac{1}{37}&\frac{24}{37}\\\frac{8}{37}&-\frac{3}{37}&\frac{2}{37}\\\frac{6}{37}&\frac{7}{37}&-\frac{17}{37}\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}-0.4054054&0\\0.2162162&-(\\0.1621622&(\end{bmatrix}$$

L'addition s'obtient avec (+) et la multiplication avec (×).

$$\begin{bmatrix}3&2&1\\1&2&5\\4&2&6\end{bmatrix}\to B$$

$$\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\\4&0\end{bmatrix}\to C$$

$$A+B \quad \begin{bmatrix}4&7&3\\5&5&11\\6&5&7\end{bmatrix}$$

$$A\cdot C \quad \begin{bmatrix}19&14\\34&5\\12&7\end{bmatrix}$$

Formules utiles

Nombres complexes

Conjugué de $z=x+iy$ $\overline{z}=x-iy$
$z\times\overline{z}=\lvert z\rvert^2$
$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
$\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$
Si $z'\neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$

Module de $z=x+iy$ $\lvert z\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$
$\lvert\overline{z}\rvert=\lvert z\rvert$
$\lvert -z\rvert=\lvert z\rvert$
$\lvert z\times z'\rvert=\lvert z\rvert\times\lvert z'\rvert$
Si $z'\neq 0$, $\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert=\frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\lvert z^n\rvert=\lvert z\rvert^n$
Inégalité triangulaire : $\lvert z+z'\rvert\leqslant\lvert z\rvert+\lvert z'\rvert$

Argument de $z\neq 0$
$\arg(\overline{z})=-\arg(z)[2\pi]$
$\arg(-z)=\pi+\arg(z)[2\pi]$
$\arg(z\times z')$ $=\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$
Si $z'\neq 0$, $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)$ $=\arg(z)-\arg(z')[2\pi]$
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\arg(z^n)=n\times\arg(z)$
Pour tout $z\neq 0$: $\cos(\arg(z))=\frac{x}{\lvert z\rvert}$ $\sin(\arg(z))=\frac{y}{\lvert z\rvert}$

Binôme de Newton
Pour tous $(u\,;\,v)\in\mathbb{C}^2$ et $n\in\mathbb{N}$, $(u+v)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u^{n-p}v^p$

Formules d'Euler
Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$,   • $\cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ • $\sin(\theta)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Formule de Moivre
Pour tous $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ $=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

Arithmétique

- **Identité de Bézout :** Pour tout $(a\,;\,b)\in(\mathbb{Z}^*)^2$, il existe $(u\,;\,v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $au+bv=\mathrm{PGCD}(a\,;\,b)$.
- **Théorème de Gauss :** Pour tout $(a\,;\,b\,;\,c)\in(\mathbb{Z}^*)^3$, si $a\mid bc$ et $\mathrm{PGCD}(a\,;\,b)=1$, alors $a\mid c$.

Nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 etc.

Opérations sur les modulos $a\equiv b[m]$ et $c\equiv d[m]$
$a+c\equiv b+d[m]$
$a\times c\equiv b\times d[m]$
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a^n\equiv b^n[m]$

Propriétés du PGCD
Soient a et b deux entiers tels que $a>b$:   • $\mathrm{PGCD}(a\,;\,b)=\mathrm{PGCD}(b\,;\,r)$, où r est le reste de la division euclidienne de a par b.   • $\mathrm{PGCD}(ka\,;\,kb)=k\times\mathrm{PGCD}(a\,;\,b)$, pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Cryptographie

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Valeur	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Valeur	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Matrices

Produit de matrices

$$\begin{pmatrix}1&3&4\\6&3&2\\1&2&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4&1&2\\3&2&5\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&19&25\\35&18&31\\11&8&14\end{pmatrix}\longrightarrow 31=6\times2+3\times5+2\times2$$

Utilisez notre Labo Python sur le site www.lelivrescolaire.fr

LLS.fr/PythonXP

Arithmétique

Instruction	Exemple
a %b renvoie le reste de la division euclidienne de a par b	**17 %4** renvoie 1
a//b renvoie le quotient de a par b	**17//4** renvoie 4

Nombres complexes

- On définit un nombre complexe z à l'aide de la commande **complex**, en spécifiant la partie réelle et la partie imaginaire en arguments (lignes 4 et 5). **Attention :** Le nombre complexe i est noté j avec Python.
- On peut effectuer les opérations arithmétiques entre nombres complexes de façon classique (lignes 6 à 8).
- **abs(z)** permet d'obtenir le module de z (ligne 9).
- **z.conjugate()** permet d'obtenir le conjugué de z (ligne 10).
- Il faut charger le module **cmath** pour calculer un argument de z en écrivant **cmath.phase(z)** (ligne 11). **Attention :** Il faut se méfier des arrondis effectués par Python.

```
1 import cmath
2 from math import*
3
4 z1 = complex(1, sqrt(3))
5 z2 = complex(1, 3)
6 print(z1 + z2)
7 print(z2**3)
8 print(z1/z2)
9 print(abs(z1))
10 print(z2.conjugate())
11 print(cmath.phase(z1))
```

Matrices

- Pour utiliser des matrices avec Python, une méthode simple est de charger le module **numpy** (ligne 1).
- En utilisant la méthode **array**, on définit alors une matrice comme un tableau dans lequel chaque liste correspond à une ligne de la matrice (lignes 4 et 5).
- On peut effectuer les opérations entre des matrices de façon classique (lignes 6 à 8).
- Pour obtenir le produit des matrices A et B, on utilise **np.dot(A, B)** (ligne 9).
- En écrivant **np.eye(n)**, on obtient la matrice identité I_n d'ordre n (lignes 10 et 11).
- Pour obtenir le déterminant d'une matrice et l'inverse d'une matrice inversible M, il faut charger le module **numpy.linalg** (ligne 2). On écrit alors **det(M)** et **inv(M)** (lignes 12 et 13).

```
1 import numpy as np
2 from numpy.linalg import*
3
4 A = np.array([[1, 2], [3, 5]])
5 B = np.array([[-2, 1], [-1, 1]])
6 print(A + B)
7 print(A - B)
8 print(3*A)
9 print(np.dot(A, B))
10 I3 = np.eye(3)
11 print(I3)
12 print(det(A))
13 print(inv(B))
```

Nombres complexes

Le nombre i s'obtient avec [2nde] [.].

Pour réaliser des calculs sur les nombres complexes, [math] puis ▷ ▷.

`2:réel(` : partie réelle.

`3:imag(` : partie imaginaire.

`5:abs(` : argument (en radian)

`4:angle(` : module.

`1:conj(` : conjugué.

$\text{réel}\left(\frac{5-i}{2-3i}\right)$ → 1

$\text{imag}\left(\frac{5-i}{2-3i}\right)$ → 1

$\left|\frac{5-i}{2-3i}\right|$ → $\sqrt{2}$

$\text{angle}\left(\frac{5-i}{2-3i}\right)$ → $\frac{\pi}{4}$

$\text{conj}\left(\frac{5-i}{2-3i}\right)$ → $1-i$

Arithmétique

Pour réaliser des calculs sur les nombres entiers, [math] ▷.

`9:pgcd(` : PGCD.

`8:ppcm(` : PPCM.

`0:reste(` : reste dans la division euclidienne de p par q.

`3:ent(` : partie entière d'un réel. On peut s'en servir pour obtenir le quotient dans une division euclidienne.

```
pgcd(308,168)
                    28
ppcm(308,168)
                  1848
reste(308,168)
                   140
ent(308/168)
                     1
```

Matrices

Pour saisir une matrice, [matrice] ▷ ▷ puis saisir les dimensions de la matrice, et enfin les coefficients de la matrice.

MATRICE[A] 3 ×3

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

[matrice] : pour utiliser une matrice déjà définie.

[matrice] ▷ : pour effectuer certaines opérations sur les matrices.

`1:dét(` : déterminant d'une matrice.

```
dét([A])
                    37
```

[2nde] [matrice] : inverse d'une matrice, si la matrice est inversible.

[A]$^{-1}$▸Frac

$$\begin{bmatrix} -\frac{15}{37} & \frac{1}{37} & \frac{24}{37} \\ \frac{8}{37} & -\frac{3}{37} & \frac{2}{37} \\ \frac{6}{37} & \frac{7}{37} & -\frac{17}{37} \end{bmatrix}$$

L'addition s'obtient avec [+] et la multiplication avec [×].

MATRICE[B] 3 ×3

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

MATRICE[C] 3 ×2

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

[A]+[B]

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 5 & 5 & 11 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

[A]*[C]

$$\begin{bmatrix} 19 & 14 \\ 34 & 5 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$$

Nombres complexes

Le nombre i s'obtient avec SHIFT 0.

Pour réaliser des calculs sur les nombres complexes, OPTN puis F3.

ReP : partie réelle.

ImP : partie imaginaire.

Abs : module.

Arg : argument (en radian).

Conjg : conjugué.

$$\text{ReP } \frac{5-i}{2-3i} \qquad 1$$

$$\text{ImP } \frac{5-i}{2-3i} \qquad 1$$

$$\left|\frac{5-i}{2-3i}\right| \qquad \sqrt{2}$$

$$\text{Arg } \left(\frac{5-i}{2-3i}\right) \qquad \frac{1}{4}\pi$$

$$\text{Conjg } \left(\frac{5-i}{2-3i}\right) \qquad 1-i$$

Arithmétique

Pour réaliser des calculs sur les nombres entiers, OPTN puis F6 F4 F6.

GCD : PGCD des entiers p et q.

LCM : PPCM des entiers p et q.

MOD : reste dans la division euclidienne de p par q.

Int : partie entière d'un réel. On peut s'en servir pour obtenir le quotient dans la division euclidienne de p par q.

```
GCD(308,168)
                28
LCM(308,168)
              1848
MOD(308,168)
               140
Int (308÷168)
                 1
```

Matrices

Pour saisir une matrice, F3 EXE puis saisir les dimensions de la matrice, et enfin les coefficients de la matrice.

```
Matrice
Mat A      :None
Mat B      :None
Mat C      :None
Mat D      :None
Mat E      :None
Mat F      :None
```

OPTN F2 : pour réaliser certaines opérations sur les matrices.

F1 **Mat** : saisie du nom de la matrice.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

F3 **Det** : déterminant d'une matrice.

$$\text{Det Mat A} \qquad 37$$

SHIFT) ($^{-1}$) : inverse d'une matrice, si la matrice est inversible.

$$\text{Mat } A^{-1} \qquad \begin{bmatrix} -\frac{15}{37} & \frac{1}{37} & \frac{24}{37} \\ -\frac{8}{37} & \frac{3}{37} & \frac{2}{37} \\ \frac{8}{37} & -\frac{3}{37} & \frac{2}{37} \\ \frac{6}{37} & \frac{7}{37} & -\frac{17}{37} \end{bmatrix}$$

L'addition s'obtient avec + et la multiplication avec ×.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Mat A+Mat B} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 5 & 5 & 11 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Mat A×Mat C} \qquad \begin{bmatrix} 19 & 14 \\ 34 & 5 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$$

CONNECTEZ-VOUS SUR
www.lelivrescolaire.fr

Gratuit et libre d'accès

Gratuit pour le professeur

VIDÉOPROJECTION
Toutes les ressources du manuel projetables en un clic : zoomez sur les exercices, agrandissez les graphiques, etc.

LIVRE DU PROFESSEUR
Des compléments pédagogiques et les corrigés à télécharger sur LLS.fr/LivreDuProf.

ENRICHISSEMENTS
Des dizaines d'exercices supplémentaires pour compléter vos cours.

Gratuit pour l'élève

PYTHON
Un cahier d'algorithmique accessible en ligne (sans installation) pour s'exercer, écrire des programmes, les tester et les manipuler sur LLS.fr/PythonXP.

RÉVISIONS
Tout le contenu du manuel accessible en ligne pour réviser sur son ordinateur ou sur son smartphone.

EXERCICES
Des milliers d'exercices interactifs pour s'entraîner en ligne.

DYSLEXIE
Un mode de lecture spécial, adapté aux élèves dyslexiques.

Sur abonnement

Fonctionnel sous 24 h ou remboursé *

Application tablette, connexion ENT, GAR et Pronote, remédiation, personnalisation du manuel, accès hors connexion, évaluation : beaucoup d'autres fonctionnalités pour basculer dans une expérience numérique incomparable !

* selon CGV.

www.lelivrescolaire.fr/abonnement

IMPRIMÉ EN FRANCE

9 782377 607808