

COLLECTION
TERRACHER

MATHS

Omnigatoire et spécialité

Term S



HACHETTE
Education

Sommaire

CHAPITRE 1 Suites numériques	7
• Avant-première	8
• Cours	10
1. Suites arithmétiques et suites géométriques (rappels)	10
2. Raisonnement par récurrence	11
3. Comportement global d'une suite	12
4. Comportement asymptotique (rappels)	13
5. Suites adjacentes	16
6. Comportement asymptotique des suites monotones	17
• Au cœur des problèmes	18
1. Exemples d'études de suites	18
2. Suites définies par $u_{n+1} = a u_n + b$	22
3. Calcul de grandeurs (aires, volumes...)	24
4. Avec un logiciel	26
• Applications – Exercices	28
• Rubrique à Bac	37
• Problèmes	38

CHAPITRE 2 Fonctions : limites, continuité, dérivabilité	41
• Avant-première	42
• Cours	44
1. Limites d'une fonction	44
2. Notion de continuité	50
3. Dérivation	52
• Au cœur des problèmes	56
1. Étude de formes indéterminées	56
2. Branches « paraboliques »	57
3. Problèmes d'optimisation	58
4. Comparaison de fonctions	59
5. Études de fonctions	60
6. Calculs approchés avec un tableur ou une calculatrice	64
• Applications – Exercices	66
• Rubrique à Bac	76
• Problèmes	77

CHAPITRE 3 Exponentielle, logarithme et fonctions associées	79
• Avant-Première	80
• Cours	84
1. La fonction exponentielle	84
2. La fonction logarithme népérien	87
3. La croissance comparée	89
4. Puissance réelle de a ($a > 0$)	90
5. Compléments sur les dérivées	91
• Au cœur des problèmes	92
1. Étude de nouvelles fonctions	92
2. Fonction logarithme décimal	94
3. Étude de nouvelles suites	96
4. Avec un logiciel, une calculatrice	97
• Applications – Exercices	98
• Rubrique à Bac	106
• Problèmes	108

CHAPITRE 4 Calcul intégral	111
• Avant-première	112
• Cours	114
1. Notion d'intégrale	114
2. Propriétés de l'intégrale	117
3. Primitives d'une fonction	119
4. Intégration par parties	122
5. Calcul de grandeurs : aires, volumes, etc.	123
• Au cœur des problèmes	124
1. Calculs d'intégrales	124
2. Calcul d'aires	128
3. Calcul de volumes	129
4. Problèmes de comparaison et d'encadrement	131
5. Calcul approché d'une intégrale	134
• Applications – Exercices	136
• Rubrique à Bac	146
• Problèmes	148

CHAPITRE 5 Équations différentielles et modèles d'évolution	151
• Avant-première	152
• Cours	154
L'équation différentielle $y' = ay + b$	154
• Au cœur des problèmes	156
1. Équations se ramenant à $y' = ay + b$	156
2. Situations menant à une équation différentielle	157
3. Quelques modèles d'évolution	159
• Applications – Exercices	164
• Problèmes	171

CHAPITRE 6 Nombres complexes	173
• Avant-première	174
• Cours	176
1. Généralités	176
2. Module et argument	179
3. Notation exponentielle	183
4. Équations du second degré	184
5. Nombres complexes et géométrie	185
• Au cœur des problèmes	186
1. Résolution d'équations	186
2. Géométrie	188
• Applications – Exercices	190
• Rubrique à Bac	200
• Problèmes	203

CHAPITRE 7 Produit scalaire dans l'espace	205
• Avant-première	206
• Rappels	208
• Cours	210
1. Produit scalaire dans l'espace	210
2. Géométrie analytique	213
• Au cœur des problèmes	216
1. Étude des solides	216
2. Géométrie analytique	218

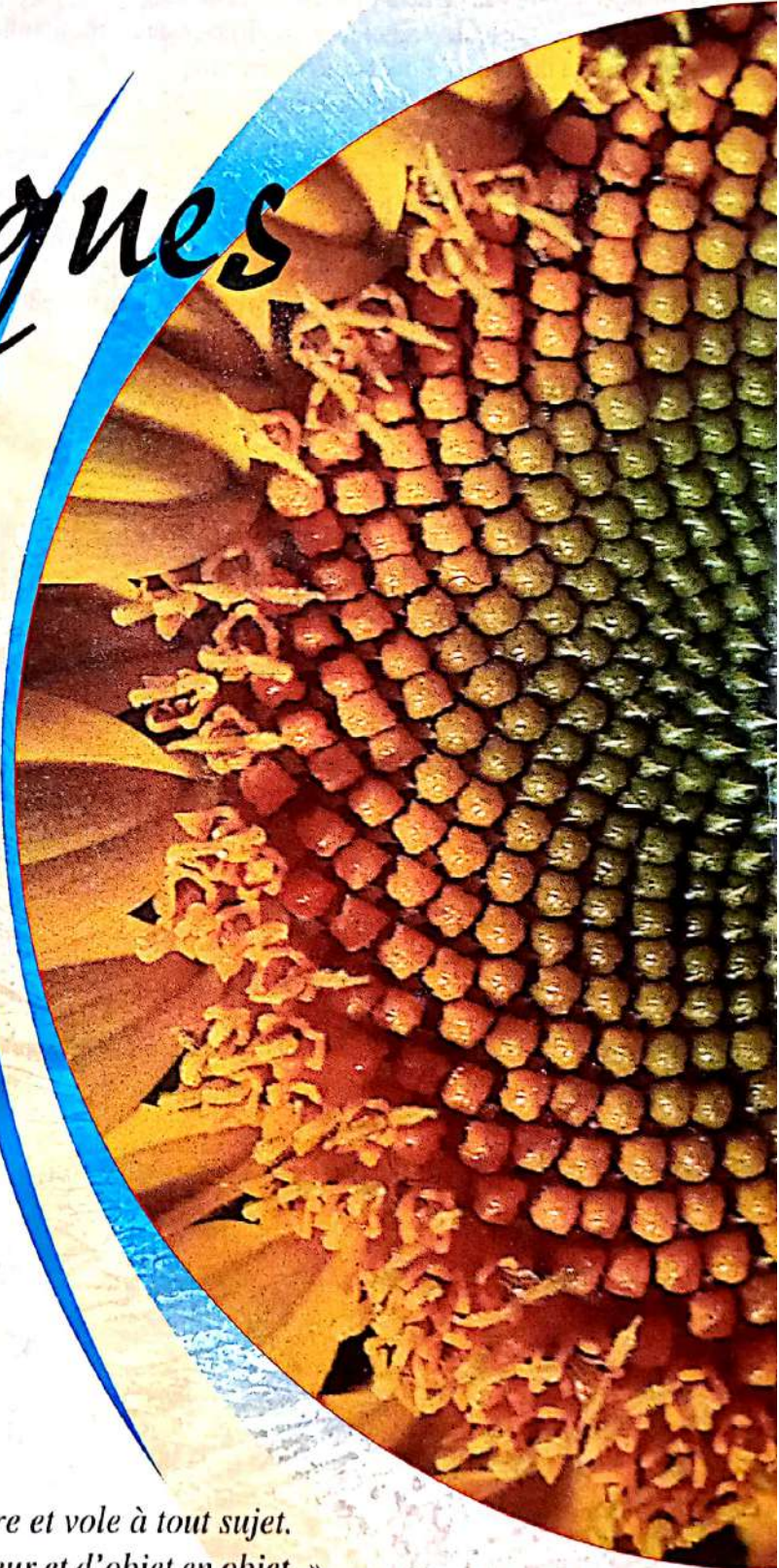
• Applications – Exercices	220	• Au cœur des problèmes	342
• Rubrique à Bac	230	1. Problèmes de divisibilité	342
• Problèmes	231	2. Critères de divisibilité	343
CHAPITRE 8 Droites et plans de l'espace	233	3. Problèmes de codage	344
• Avant-première	234	4. Problèmes de rationalité	345
• Cours	236	5. L'équation diophantienne $ax + by = D$	346
1. Barycentre	236	6. Problèmes de Cryptographie	348
2. Plans de l'espace	238	7. Avec un logiciel	350
3. Droites de l'espace	240	• Applications – Exercices	352
4. Intersection de trois plans	243	• Rubrique à Bac	361
5. Demi-espace	245	• Problèmes	363
• Au cœur des problèmes	246	CHAPITRE 12 Nombres premiers	365
1. Problèmes d'alignement et de concours	246	• Avant-première	366
2. Géométrie analytique	248	• Cours	368
3. Systèmes linéaires	250	1. Généralités sur les nombres premiers	368
• Applications – Exercices	252	2. Divisibilité et nombres premiers	370
• Rubrique à Bac	262	3. Le théorème fondamental de l'Arithmétique	371
• Problèmes	263	4. Le théorème de Fermat	373
CHAPITRE 9 Probabilités, conditionnement et indépendance	265	• Au cœur des problèmes	374
• Avant-première	266	1. Utilisation de la décomposition en facteurs premiers	374
• Cours	268	2. Travailler « modulo p » (p premier)	376
1. Le point sur les probabilités	268	3. Le système cryptographique R.S.A.	378
2. Probabilités conditionnelles	272	• Annexe	381
3. Indépendance	274	• Applications – Exercices	382
• Méthode	275	• Problèmes	391
• Au cœur des problèmes	276	CHAPITRE 13 Similitudes	393
1. Utilisation de modèles de référence	276	• Avant-première	394
2. Utilisation d'arbres de probabilités	278	• Cours	396
3. Probabilités appliquées à d'autres Sciences	280	1. Similitudes : généralités	396
• Applications – Exercices	282	2. Écriture complexe d'une similitude	398
• Rubrique à bac	291	3. Similitude directe, similitude indirecte	400
• Problèmes	293	4. Similitudes directes	402
CHAPITRE 10 Lois de probabilité	295	• Au cœur des problèmes	406
• Avant-première	296	1. Études de configurations	406
• Cours	298	2. Problèmes de lieux et de constructions	408
1. Dénombrement	298	3. Macros de similitudes sous Cabri-géomètre	410
2. Combinaisons	300	• Applications – Exercices	412
3. Exemples de lois discrètes	302	• Rubrique à Bac	424
4. Lois continues (généralités), lois uniformes	304	• Problèmes	425
5. La loi exponentielle	306	CHAPITRE 14 Sections planes de surfaces	427
• Au cœur des problèmes	308	• Avant-première	428
1. Calcul de probabilités	308	• Cours	430
2. A propos de la loi uniforme	310	1. Généralités sur les surfaces	430
3. La désintégration radioactive	312	2. Sections planes de surfaces	431
4. Adéquation à une loi équirépartie	314	3. Cônes de révolution	432
5. Simulations de référence	316	4. Surface d'équation $z = x^2 + y^2$	434
• Applications – Exercices	319	5. La surface d'équation $z = xy$	436
• Problèmes	329	• Au cœur des problèmes	438
CHAPITRE 11 Division euclidienne et congruences dans $\mathbb{Z}$	331	1. Exemples d'étude d'une surface	438
• Avant-première	332	2. Fonctions de x et y et surfaces	440
• Cours	334	3. Avec un logiciel	442
1. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$	334	• Applications – Exercices	444
2. Division euclidienne	335	• Problèmes	450
3. Le langage des congruences	336	Premiers secours	452
4. PGCD et PPCM de deux entiers	338	Toujours en panne ?	467
5. Les théorèmes de Bézout et de Gauss	340	Annexes	475



Suites numériques

OBJECTIFS

- Compléter et consolider les résultats essentiels sur les suites numériques.
- Présenter et utiliser un nouvel outil efficace : le raisonnement par récurrence.
- Utiliser les suites pour la modélisation de phénomènes discrets et pour l'approximation de nombres.



*« Je suis chose légère et vole à tout sujet.
Je vais de fleur en fleur et d'objet en objet. »*

La Fontaine

Avant-première

1. OBJECTIFS

Deux objectifs sont assignés à cette entrée en matière :

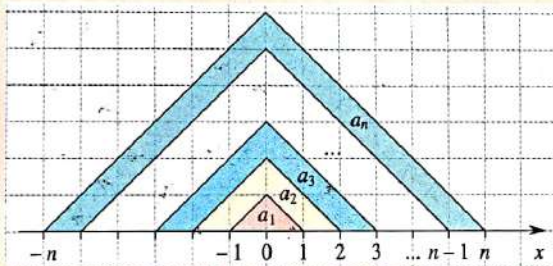
- renouer avec quelques techniques spécifiques aux suites (suites arithmétiques et géométriques, calcul de termes d'une suite récurrente) ;
- s'initier au raisonnement par récurrence.

2. RAPPEL DE QUELQUES RÉSULTATS SPÉCIFIQUES

La séquence 1 propose de retravailler avec les suites arithmétiques et géométriques, étudiées en Première. En cas de défaillance, se reporter au tableau présenté dans le cours (voir page 10).

Séquence 1 Suites arithmétiques et géométriques

- ① On considère la construction suivante, où a_n est l'aire du n -ième chevron.



- 1) Montrer que (a_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison. Calculer a_{100} .
- 2) Calculer $a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$:
a) à l'aide d'une formule sommatoire ;
b) par un calcul direct.

- ② Soit (u_n) la suite définie par :
 $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.

- 1) La suite (u_n) est-elle géométrique ?
- 2) Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n - 6$ est géométrique.
- 3) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .
- 4) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

- ③ On pose $S_n = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

À l'aide d'une formule sommatoire, montrer que $S_n \leq 3$.

Calculer S_{50} à l'aide de la calculatrice.

La séquence suivante remet en scène le calcul de termes d'une suite récurrente : la calculatrice et le tableur sont mobilisés.

Séquence 2 Calcul de termes sur calculatrice et tableur

- ① La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}.$$

Dans chacun des cas suivants, afficher la liste des premiers termes, jusqu'à u_{50} , et conjecturer le comportement de la suite (sens de variation, limite).

1) Avec une calculatrice

Utiliser le menu d'affichage d'une suite récurrente.

2) Avec un tableur

	B3		=	=RACINE(B2+6)
1	n	u(n)		
2	0	0		
3	1	2,44948974		
4	2	2,9068006		
5	3	2,98442634		

formule tapée en B3

poignée permettant d'étendre la formule vers le bas

- ② Reprendre les questions de l'exercice 1 en modifiant la valeur de u_0 .

Prendre $u_0 = -2$, $u_0 = 10$, $u_0 = 100$, $u_0 = 3 \dots$

3. LE PRINCIPE DE RÉCURRENCE

Nous avons admis implicitement en classe de Première qu'une suite est déterminée de manière unique lorsqu'on se donne u_0 et une relation (dite de récurrence) du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Nous proposons d'étendre cette démarche à une phrase mathématique quelconque notée P_n , relative à un entier n , et pouvant prendre des formes variées : P_n peut être une égalité, une inégalité, un énoncé en français, etc.

Exemple : considérons la phrase $P_n : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Séquence 3 Deux propriétés de la phrase P_n

1) Étape 1 : la phrase P_1

a) Comment s'énonce la phrase P_1 ?
(Remplacer n par 1.)

b) La phrase P_1 est-elle vraie ?

2) Étape 2 : « P_n implique P_{n+1} »

a) Montrer que la phrase P_{n+1} s'énonce ainsi :

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

b) Établir l'égalité :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

c) En déduire que, si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie elle aussi.

Nous admettrons comme mathématiquement correct (en attendant une synthèse dans le cours, page 11) de conclure que P_n est vraie pour tout $n \geq 1$, comme une conséquence des deux étapes précédentes.

La démarche esquissée, appelée **raisonnement par récurrence**, est résumée ci-dessous et mise en pratique dans la séquence 4.

SI	• Étape 1 : P_n est vraie au départ (pour $n = 0$, ou $n = 1$, ... ou $n = n_0$).
	• Étape 2 : P_n implique P_{n+1} (c'est le caractère héréditaire de P_n).
ALORS	on peut conclure que P_n est vraie pour tout $n \geq 0$ (ou $n \geq 1$ ou $n \geq n_0$).

Séquence 4 Pratique du raisonnement par récurrence

Dans les exercices 1, 2 et 3, montrer que la phrase P_n est vraie pour tout $n \geq 0$.

① La phrase P_n est l'égalité :

$$0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

② La phrase P_n est l'égalité :

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

③ Pour la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 10 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5},$$

P_n est la chaîne d'inégalités :

$$2,5 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10.$$

1. Suites arithmétiques et suites géométriques (rappels)

Résumé

Le tableau suivant rassemble les principaux résultats obtenus en classe de Première.

	suite arithmétique de raison r	suite géométrique de raison q
caractérisation par une relation de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
caractérisation par une formule explicite	$u_n = r \times n + b$ (u_n est une fonction affine de n)	$u_n = k \times q^n$ (k réel)
relation entre deux termes (n et p entiers)	$u_n = u_p + (n - p)r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
S = somme de N termes consécutifs	$S = \left(\begin{array}{c} \text{moyenne} \\ \text{des termes} \\ \text{extrêmes} \end{array} \right) \times N$	$S = \left(\begin{array}{c} \text{premier} \\ \text{terme} \end{array} \right) \times \frac{1 - q^N}{1 - q}$ (si $q \neq 1$)

Remarque : les résultats relatifs à la somme de termes consécutifs résultent des deux formules sommatoires suivantes, qu'il est bon d'approivoiser :

$$1 + 2 + \dots + N = \frac{N(N+1)}{2} \quad \text{et} \quad 1 + q + \dots + q^{N-1} = \frac{1 - q^N}{1 - q} \quad (\text{si } q \neq 1).$$

→ EXEMPLE 1

Calculer les sommes $A = 5 + 9 + 13 + \dots + 61$ et $B = 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{10}$.

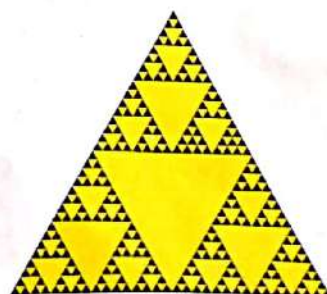
• A est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 4 ; le nombre de termes est $\frac{61-5}{4} + 1 = 15$ et la moyenne des termes extrêmes est 33.

Donc : $A = 33 \times 15 = 495$.

• B est la somme de neuf termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 5.

Donc $B = 5^2 \times \frac{1 - 5^9}{1 - 5}$, soit $B = 12\,207\,025$.

Voir exercices 1 à 5



Le triangle de Sierpinski.

Les longueurs des côtés des triangles

diminuent dans le rapport $\frac{1}{2}$, les aires dans le rapport $\frac{1}{4}$.

2. Raisonnement par récurrence

2.1 ÉNONCÉ DU PRINCIPE

On envisage une propriété concernant un entier n que l'on note P_n en général. Cette propriété peut être vraie ou fausse pour tout n , ou vraie pour certains entiers seulement. P_n peut s'énoncer par :

- une égalité, comme $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (voir *Avant-première*) ;
- une inégalité, comme $u_n \leq 3$, où (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et, si $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ (voir *exemple 2* ci-dessous) ;
- une phrase, comme « $4^n - 1$ est un multiple de 3 » ;
- etc.

AXIOME⁽¹⁾
(principe de
récurrence)

Si l'on prouve les deux étapes suivantes :

Étape 1

P_n est vraie au départ

P_{n_0} est
vraie

Étape 2

P_n a un caractère héréditaire

Si pour tout
 $n \geq n_0$,

P_n
vraie

IMPLIQUE

P_{n+1}
vraie

on peut alors conclure : P_n est vraie pour tout $n \geq n_0$.

2.2 MISE EN ŒUVRE



EXEMPLE 2

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et, si $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.
Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq 3$.

Établissons les deux étapes du raisonnement avec la phrase $P_n : u_n \leq 3$.

• **Étape 1 :**

On a bien $u_0 \leq 3$ puisque l'énoncé nous indique que $u_0 = 0$. Donc P_0 est vraie.

• **Étape 2 :**

Supposons que, pour un entier n quelconque, $n \geq 0$, P_n soit vraie, à savoir $u_n \leq 3$.

On en déduit successivement $u_n + 6 \leq 9$, puis $\sqrt{u_n + 6} \leq \sqrt{9}$ (croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$).

Cette inégalité s'écrit encore $u_{n+1} \leq 3$. Ainsi : P_n vraie $\Rightarrow P_{n+1}$ vraie.

• **Conclusion :** pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq 3$.

Voir exercices 6 à 11

(1) Un axiome est une propriété admise au départ d'une théorie. Les axiomes sont le fondement d'une théorie. Les théorèmes sont des résultats déduits des axiomes.

3. Comportement global d'une suite

3.1 SUITES MONOTONES

DÉFINITION 1

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :

- La suite (u_n) est **croissante** lorsque, pour tout entier n , $u_n \leq u_{n+1}$.
- La suite (u_n) est **décroissante** lorsque, pour tout entier n , $u_n \geq u_{n+1}$.
- La suite (u_n) est **monotone** lorsqu'elle est *croissante ou décroissante*.

Techniques d'étude

Trois techniques permettent l'étude de la monotonie d'une suite.

Elles seront illustrées dans les applications (voir *exercices 12 à 15*, page 29) ; une mise au point plus complète sera présentée dans *Au cœur des problèmes*, partie 1, page 18.

1 La technique fonctionnelle

Elle s'applique aux suites de la forme $u_n = f(n)$ (f étant une fonction) et consiste à étudier les **variations de f** sur $[0, +\infty[$.

Le sens de variation de (u_n) s'en déduit.

2 Les techniques algébriques

Elles consistent à comparer directement u_n et u_{n+1} :

– soit en étudiant le signe de la **différence** $u_{n+1} - u_n$;

– soit en comparant le **quotient** $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si, pour tout n , $u_n > 0$.

3 Le raisonnement par récurrence

Voir *Au cœur des problèmes*, problème 3, page 20.

3.2 SUITES MAJORÉES, MINORÉES, BORNÉES

DÉFINITION 2

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :

- La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier n , $u_n \leq M$.
- La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier n , $m \leq u_n$.
- La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois **majorée et minorée**.

Les techniques précédentes s'appliquent encore ici :

– suites $u_n = f(n)$: si f est majorée sur $[0, +\infty[$, la suite (u_n) l'est aussi... ;

– suites $u_{n+1} = f(u_n)$: on peut raisonner par récurrence (voir *exemple 2* page 11).

L'exemple qui suit illustre une méthode algébrique.



EXEMPLE 3

Montrer que la suite de terme général $u_n = 1 + 0,6 + 0,6^2 + \dots + 0,6^n$ est majorée.

u_n est la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, donc :

$$u_n = \frac{1 - 0,6^{n+1}}{1 - 0,6} = \frac{5}{2}(1 - 0,6^{n+1}). \text{ Ainsi } u_n \leq \frac{5}{2}.$$

Voir *exercices 12 à 17*

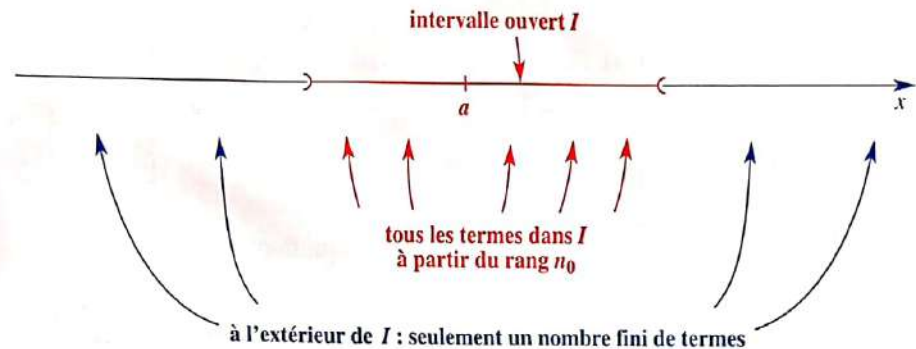
4. Comportement asymptotique (rappels)

4.1 SUITES CONVERGENTES

DÉFINITION 3

Soit (u_n) une suite numérique et a un nombre réel.

On dit que (u_n) admet pour limite a si tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



- Lorsque (u_n) admet pour limite a , on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ ou plus simplement $\lim u_n = a$, ce qui n'est pas ambigu⁽¹⁾.
- Lorsqu'une suite admet une limite finie a , on dit qu'elle est convergente. Dans le cas contraire, elle est divergente.
- Si une suite est convergente, sa limite est unique (déjà établi en classe de Première, ce résultat sera prouvé à l'exercice 20, page 29).

4.2 SUITES AYANT POUR LIMITE $+\infty$ OU $-\infty$

DÉFINITION 4

On dit qu'une suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si tout intervalle du type $[A, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, A]$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim_{n \rightarrow -\infty} u_n = -\infty$).

• Suites de référence

Cette définition a permis d'établir en classe de Première que les suites de termes généraux $\sqrt{n}, n, n^2, n^3, \dots$ admettent pour limite $+\infty$, ce qui ne choquera personne.

Ces suites de référence guideront l'étude d'autres suites.

• Suites divergentes

Elles sont de deux types ; une suite divergente peut :

- soit avoir une limite infinie, comme $(n^2), (-n), \dots$;
- soit de ne pas avoir de limite, comme $(-1)^n$ (voir exercice 21, page 29).

• Pour le calcul pratique des limites, les définitions 3 et 4 sont délicates. Les résultats qui suivent sont plus abordables.

(1) Pour les suites, la question de la limite ne se pose que lorsque n tend vers $+\infty$.

4.3 OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

THÉORÈME 1 (admis)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant $\lim u_n = a$ et $\lim v_n = b$ (avec a et b désignant des réels ou l'un des symboles $+\infty$ et $-\infty$).

On peut conclure sur la limite de la somme, du produit et du quotient dans certains cas, consignés dans les tableaux suivants.

1) La somme $(u_n + v_n)$

$a \backslash b$	b réel	$+\infty$	$-\infty$
a réel	$a + b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

2) Le produit $u_n v_n$

$a \backslash b$	b réel	$+\infty$	$-\infty$
a réel	ab ($a \neq 0$)	$+\infty$ ($a > 0$) $-\infty$ ($a < 0$)	$-\infty$ ($a > 0$) $+\infty$ ($a < 0$)
$+\infty$	$+\infty$ ($b > 0$) $-\infty$ ($b < 0$)	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$ ($b > 0$) $+\infty$ ($b < 0$)	$-\infty$	$+\infty$

3) Le quotient $\frac{u_n}{v_n}$

$a \backslash b$	b réel $b \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
a réel	$\frac{a}{b}$	0	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

→ EXEMPLE 4

Déterminer la limite éventuelle des suites de termes généraux :

$$u_n = n^2 + \sqrt{n} ; \quad v_n = n(3 - n) ; \quad w_n = \frac{1}{n^2 - 5}$$

La suite (u_n)

On a $\lim n^2 = +\infty$ et $\lim \sqrt{n} = +\infty$ (suites de référence), donc $\lim u_n = +\infty$ (résultat sur la somme).

La suite (v_n)

On a $\lim (-n) = -\infty$, donc $\lim (3 - n) = -\infty$ (somme).

Comme $v_n = n(3 - n)$, le résultat sur le produit fournit $\lim v_n = -\infty$.

La suite (w_n)

Il est clair que $\lim (n^2 - 5) = +\infty$; le résultat sur le quotient fournit alors $\lim w_n = 0$.

Voir exercices 23 à 25

Formes « indéterminées »

Tout esprit sagace aura noté que le théorème 1 ne dit rien :

- sur la somme lorsque $a = +\infty$ et $b = -\infty$;

- sur le produit lorsque $a = \pm\infty$ et $b = 0$;

- sur le quotient lorsque $b = 0$ ou lorsque a et b sont infinis tous les deux.

Nous étudierons certaines de ces situations, appelées formes indéterminées parce que l'on ne peut rien conclure a priori, dans les exercices 26 à 29.

4.4 THÉORÈMES DE COMPARAISON

Comme en classe de Première, nous admettons les résultats énoncés dans le tableau suivant :

- les quatre premiers déterminent le comportement à l'infini d'une suite (x_n) par comparaison à d'autres suites (u_n) , (v_n) , ..., dont le comportement est connu ;
- le dernier résultat autorise le *passage à la limite* dans une inégalité.

THÉORÈME 2 (admis)

hypothèse 1 : une inégalité (à partir d'un certain rang)	hypothèse 2 : comportement à l'infini	conclusion
$u_n \leq x_n$	$\lim u_n = +\infty$	$\lim x_n = +\infty$
$x_n \leq u_n$	$\lim u_n = -\infty$	$\lim x_n = -\infty$
$u_n \leq x_n \leq v_n$	(u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ	(x_n) converge et $\lim x_n = \ell$ (théorème des gendarmes)
$ x_n - \ell \leq u_n$	$\lim u_n = 0$	(x_n) converge et $\lim x_n = \ell$
$x_n \leq y_n$	$\lim x_n = \ell$ et $\lim y_n = \ell'$	$\ell \leq \ell'$

Ces résultats seront directement mis en œuvre dans les *exercices* 30 à 32, page 30.

4.5 COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE q^n (q RÉEL)

THÉORÈME 3

Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Si $q = 1$, alors la suite (q^n) est constante (et a pour limite 1).

Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) est divergente et n'a pas de limite.

Ce résultat sera démontré dans l'*exercice* 33. Il permet, le cas échéant, de déterminer la limite d'une *suite géométrique*, ou de la *somme de termes consécutifs* d'une suite géométrique.



EXEMPLE 5

Étudier la limite de la suite (S_n) : $S_n = 1 + x + \dots + x^n$ (avec $-1 < x < 1$).

Utilisons la formule sommatoire (voir le tableau de la page 10) :

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (\text{car } x \neq 1).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} = 0$ (voir *théorème* 3), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1 - x}$.

Voir *exercices* 34 à 39

5. Suites adjacentes

5.1 DE QUOI S'AGIT-IL ?

Exemples

① Approximations décimales de π

Pour tout $n \geq 1$, on désigne respectivement par d_n et e_n les approximations à n décimales du nombre π , respectivement par défaut et par excès.

Puisque $\pi = 3,141\,592\,653\,5\dots$, il en résulte que :

$d_1 = 3,1$; $d_2 = 3,14$; ... ; $d_6 = 3,141\,592$; ... et

$e_1 = 3,2$; $e_2 = 3,15$; ... ; $e_6 = 3,141\,593$; ...

Il est clair que la suite (d_n) est croissante, et que la suite (e_n) est décroissante ; d'autre part, $e_n - d_n = 10^{-n}$, donc $\lim (e_n - d_n) = 0$ (voir *théorème 3*).

De plus, π appartient à chacun des intervalles emboîtés $[d_n, e_n]$.

② Approximation d'une aire

Sur la figure ci-contre, il est clair que

l'aire A du domaine $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$

(domaine « sous la courbe ») est encadrée par u_n et v_n , où :

- u_n est la somme des aires des n rectangles « sous la courbe » (en sablé) ;
- v_n est la somme des aires des n rectangles « au-dessus de la courbe » (en jaune).

Ce type de situation a joué un rôle important dans l'histoire du calcul des aires. Nous établirons (voir *Au cœur des problèmes*, partie 3.) que :

(u_n) est croissante, (v_n) décroissante, et $\lim (v_n - u_n) = 0$.

De telles suites méritent un peu d'attention.

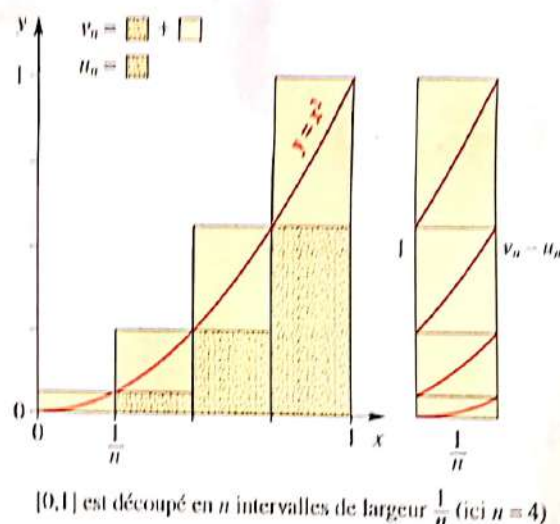


Fig. 1

DÉFINITION 5

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** lorsque (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim (v_n - u_n) = 0$.

5.2 LE THÉORÈME DES SUITES ADJACENTES

THÉORÈME 4

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes**, alors elles **convergent** et ont même limite ℓ . De plus, pour tout n , $u_n \leq \ell \leq v_n$.

Nous admettons ce résultat.

6. Comportement asymptotique des suites monotones

6.1 SUITES MONOTONES NON BORNÉES

THÉORÈME 5

- Si une suite (u_n) est **croissante** et **non majorée**, alors $\lim u_n = +\infty$.
- Si une suite (u_n) est **décroissante** et **non minorée**, alors $\lim u_n = -\infty$.

... Démonstration

Soit (u_n) une suite croissante, non majorée et M un réel quelconque.

Il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} > M$, puisque la suite n'est pas majorée.

La suite étant croissante, tous les termes $u_{n_0}, u_{n_0+1}, u_{n_0+2}, \dots$ sont situés dans l'intervalle $]M, +\infty[$, ce qui traduit le fait que $\lim u_n = +\infty$ (voir *définition 4*). On établit de même la seconde assertion.

6.2 LE THÉORÈME DE LA CONVERGENCE MONOTONE

THÉORÈME 6 (admis)

- Si une suite est **croissante** et **majorée**, alors elle est **convergente**.
- Si une suite est **décroissante** et **minorée**, alors elle est **convergente**.

Commentaires

Ce résultat, difficile à établir car il découle de la construction des nombres réels, est capital en Analyse : il livre un résultat asymptotique sur une suite à partir de son comportement global (« croissante et majorée »).

Cependant, s'il affirme la **convergence** d'une suite, le *théorème 6* reste muet sur la valeur de sa limite. On ne saurait en attendre davantage...



EXEMPLE 6

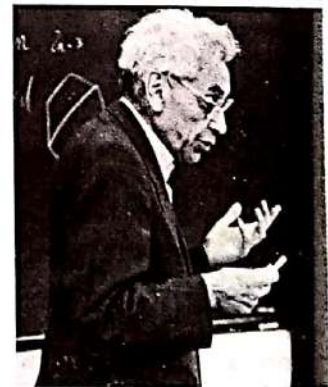
Le nombre d'Erdős.

On pose $u_1 = 0,2$; $u_2 = 0,23$;
 $u_3 = 0,235$; ... ; $u_7 = 0,235\,711\,131\,7$; ...
 (u_n s'écrit 0 virgule, suivi de la juxtaposition des n premiers nombres premiers.)

Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Par définition, la suite (u_n) est croissante, majorée par 1, donc (voir *théorème 6*) elle converge.

Sa limite ℓ est un réel mystérieux imaginé par le mathématicien Paul Erdős (mathématicien hongrois, l'une des figures marquantes du XX^e siècle, éternel voyageur, S.D.F...) en 1945.



Paul Erdős (1913-1996)

Voir exercices 46 et 47

1. Exemples d'études de suites

OBJECTIFS

Il s'agit d'étudier le comportement (global et asymptotique) de suites définies par des moyens divers.

Pour ce qui concerne les outils mobilisés, nous mettrons l'accent sur :

- les résultats dégagés en Terminale (principe de récurrence, comparaison, opérations, théorème de convergence monotone) ;
- quelques techniques spécifiques (suites définies par une sommation, par récurrence,...).

PROBLÈME 1

Étudier la suite de terme général $u_n = 2^n - n$.

① Observation et conjectures

Examinons les premiers termes de la suite (u_n) .

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	1	1	2	5	12	27	58	121	248

n	9	10	11	12	13	14	15
u_n	503	1 014	2 037	4 084	8 179	16 370	32 753

Sans hésitation, la suite semble être croissante.

De plus, chaque terme est « presque le double » du précédent ; cela nous incite à penser que (u_n) se comporte « à peu près » comme une suite géométrique de raison 2 : nous conjecturons, pour conserver une marge de sécurité, une hiérarchie du type $u_n \geq 1,5^n$ par exemple, ce qui permettra de comparer (u_n) à une suite géométrique connue.

D'autres comparaisons sont possibles, par exemple :

- $u_n \geq 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$;
- $u_n \geq n$ pour $n \geq 1$;
- etc.

② Solution rédigée

• Sens de variation

Utilisons la différence :

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n - (n+1) + n = 2^n - 1.$$

La suite géométrique $n \mapsto 2^n$ est croissante, donc $2^n \geq 2^0 = 1$.

On en déduit que $u_{n+1} - u_n \geq 0$, donc (u_n) est croissante.

• Comportement asymptotique

Montrons d'abord par récurrence l'inégalité $u_n \geq 1,5^n$, pour $n \geq 3$.

• Étape 1 : si $n = 3$, $u_3 = 5$ et $1,5^3 = 3,375$, donc l'inégalité précédente est vraie.

• **Étape 2** : supposons que l'on ait, pour un certain n , $u_n \geq 1,5^n$.

Alors $u_{n+1} = 2^{n+1} - (n+1) = 2 \times 2^n - (n+1)$.

Comme, d'après l'hypothèse de récurrence, $2^n \geq 1,5^n + n$, on en tire :

$$u_{n+1} \geq 2 \times 1,5^n + 2n - (n+1) \geq 1,5^{n+1} + n - 1.$$

Puisque $n \geq 3$, on a $n-1 \geq 0$, donc $u_{n+1} \geq 1,5^{n+1}$.

• **Conclusion** : on a bien $u_n \geq 1,5^n$ pour tout $n \geq 3$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,5^n = +\infty$, il résulte d'un théorème de comparaison

que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

PROBLÈME 2

Étudier la suite de terme général $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

(On établira, pour $k \geq 2$, l'inégalité $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.)

1 Recherche d'une idée directrice

• À l'évidence, la suite est croissante, puisque $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$.

Le comportement de (u_n) à l'infini va donc résulter de la réponse à la question : « la suite est-elle ou non majorée ? ».

• L'écriture de u_n à l'aide du symbole « sigma » $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ nous

montre la voie : nous allons écrire l'inégalité $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour toutes les valeurs de k allant de 2 à n , et nous additionnerons les inégalités obtenues...

2 Solution rédigée

• Pour $k \geq 2$, il est clair que $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

• Écrivons cette inégalité pour $k = 2, k = 3, \dots, k = n$ et « sommons » ces $n-1$ inégalités ; nous obtenons :

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \leq \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right),$$

soit encore $u_n - 1 \leq 1 - \frac{1}{n}$.

On en tire $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$, ou encore $u_n \leq 2$.

• **Conclusion** : (u_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente.

On peut déterminer une valeur approchée de sa limite ℓ à l'aide d'un tableur : $u_{10\,000} = 1,644\,8$.

Pour une suite croissante deux possibilités :

- soit (u_n) est majorée ;
- soit $\lim u_n = +\infty$.

EFFECTUER UNE SOMMATION

On écrit en détail certaines inégalités (« au début » et « à la fin ») :

$$\bullet \frac{1}{2^2} \leq \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \quad (k=2)$$

$$\bullet \frac{1}{3^2} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad (k=3)$$

⋮

$$\bullet \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (k=n)$$

Puis on additionne en observant les simplifications.

La valeur exacte de ℓ ?

On montre que :

$$\ell = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,644\,934\,07$$

(voir chapitre 4, problème 124, page 150).

PROBLÈME 3

Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1 Représentation graphique et conjectures

Lorsque $u_{n+1} = f(u_n)$ (ici $f(x) = \sqrt{x+6}$), on peut visualiser les premiers termes de la suite à l'aide de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = x$ selon le procédé présenté en classe de Première et rappelé ci-contre.

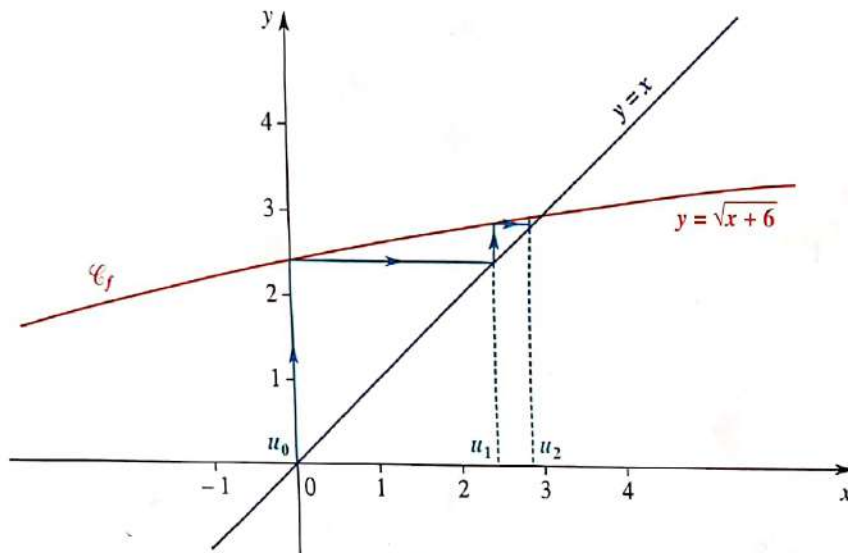
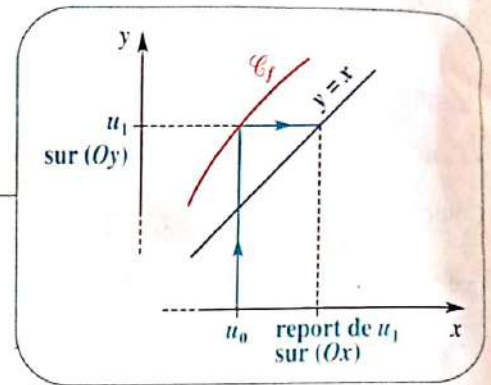


Fig. 2

On conjecture alors aisément que la suite (u_n) semble :

- être **croissante** et **majorée** par 3 ;
- être **convergente**, de **limite** 3.

2 Solution rédigée

• Monotonie et bornes

Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 0$:

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$$

comme nous le suggère la figure 2.

• Étape 1 :

On a $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{6} \approx 2,5$, donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 3$.

• Étape 2 :

Supposons que, pour un certain n , on ait $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$; alors :

$$6 \leq u_n + 6 \leq u_{n+1} + 6 \leq 9,$$

puis, la fonction « racine » étant croissante :

$$\sqrt{6} \leq \sqrt{u_n + 6} \leq \sqrt{u_{n+1} + 6} \leq \sqrt{9}.$$

Cela prouve que :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3,$$

ce qui montre que la chaîne d'inégalités est vraie au rang $n+1$.

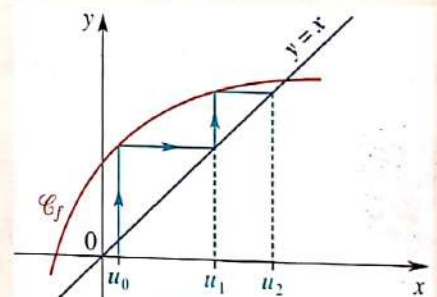
Conclusion : pour tout $n \geq 0$, on a bien $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

Cela montre que la suite (u_n) est **croissante**, **majorée** par 3.

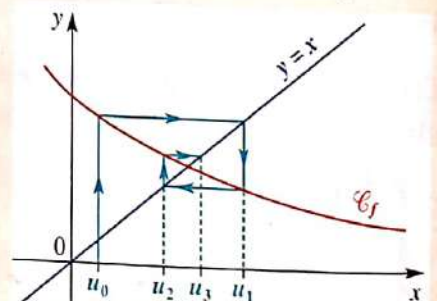
SUITES $u_{n+1} = f(u_n)$

Deux allures classiques

• L'escalier (f croissante)



• La spirale (f décroissante)



Attention, rien de ce qui a été établi ne prouve que (u_n) converge vers 3.

• Convergence et limite

• Puisque nous sommes à peu près persuadés que (u_n) converge vers 3, cherchons une relation entre $3 - u_{n+1}$ et $3 - u_n$:

$$3 - u_{n+1} = 3 - \sqrt{u_n + 6} = \frac{[3 - \sqrt{u_n + 6}][3 + \sqrt{u_n + 6}]}{3 + \sqrt{u_n + 6}},$$

$$\text{donc } 3 - u_{n+1} = \frac{3 - u_n}{3 + \sqrt{u_n + 6}}.$$

$$\text{Or } 3 + \sqrt{u_n + 6} \geq 3, \text{ donc } 0 \leq 3 - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(3 - u_n).$$

• Il est alors facile de montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$,

$$0 \leq 3 - u_n \leq \frac{1}{3^{n-1}}.$$

La démonstration est laissée au lecteur.

• Conclusion : on a bien, pour tout $n > 0$, $0 \leq 3 - u_n \leq \frac{1}{3^{n-1}}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0$, on en déduit que :

$$\lim u_n = 3.$$

De plus, l'inégalité précédente nous renseigne sur la **rapidité de la convergence** : la suite $\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)$ étant géométrique, cette convergence est rapide.

Le calcul effectif des premières valeurs montre cette stabilisation rapide vers la limite.

n	u_n
0	0
1	2,449 489 74
2	2,906 800 6
3	2,984 426 34
4	2,997 403 27
5	2,999 567 18
6	2,999 927 86

n	u_n
7	2,999 987 98
8	2,999 998
9	2,999 999 67
10	2,999 999 94
11	2,999 999 99
12	3
13	3

Interprétation : $3 - u_n$ est la distance entre 3 et u_n (car $u_n \leq 3$). L'inégalité s'interprète ainsi : la distance entre 3 et u_n diminue dans le rapport $\frac{1}{3}$ (au moins) quand on passe d'un terme au suivant.

RAPPORT D'ÉTAPES

Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

1) Représentation graphique

Elle permet des conjectures.

2) Monotonie, bornes

Les inégalités peuvent être obtenues par récurrence.

3) Limite ℓ

• On cherche une relation entre $|u_{n+1} - \ell|$ et $|u_n - \ell|$.

• On en déduit une inégalité du type $|u_n - \ell| \leq x_n$ avec $\lim x_n = 0$

Dans la foulée

① Avec une formule explicite

On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{3^n}{n^2}$.

a) Étudier la monotonie de la suite (u_n) .

b) Montrer par récurrence que, pour $n \geq 13$, $u_n \geq 2^n$.

c) En déduire le comportement asymptotique de (u_n) .

② Suite définie par une sommation

En utilisant le résultat dégagé dans le problème 2, page 19, montrer que la suite de terme général

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{n^4} \text{ est convergente.}$$

③ Suite définie par récurrence

On pose $u_0 = 0$ et, pour $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} + 4.$$

a) Conjecturer graphiquement le comportement de la suite (u_n) .

b) Montrer que, pour $n \geq 0$:

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 16.$$

c) Prouver que (u_n) converge et a pour limite 16.

2. Suites définies par

$$u_{n+1} = a u_n + b$$

OBJECTIF

L'objectif est double :

- nous entendons **présenter quelques situations** menant à l'étude de suites définies par $u_{n+1} = a u_n + b$;
- par ailleurs, il s'agira de se familiariser avec le **traitement mathématique** standard de telles suites, qui s'appuie essentiellement sur une **suite géométrique auxiliaire**.

PROBLÈME

Dans une réserve, une population initiale de 1000 animaux évolue ainsi : chaque année, 20 % des animaux disparaissent (c'est le bilan global des naissances et des décès) et on introduit 120 animaux supplémentaires.

Décrire l'évolution de cette population au bout de n années (on la note p_n , avec $p_0 = 1000$).

1 Modélisation

Il est clair que la suite (p_n) est définie par :

$$p_0 = 1000 \quad \text{et} \quad p_{n+1} = 0,8p_n + 120.$$

La description mathématique de l'évolution peut alors s'articuler sur les deux questions suivantes :

- Peut-on déterminer une **formule explicite** de p_n ?
- La suite (p_n) a-t-elle une **limite** ?

2 Quelles idées ?

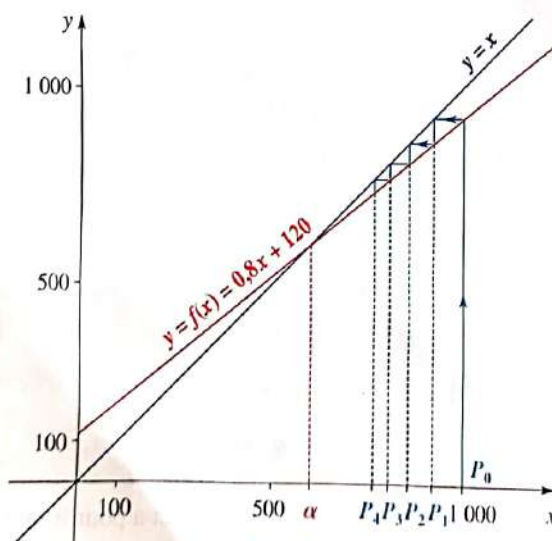


Fig. 3



Bouquetin des Alpes (*Capra ibex ibex*).

La représentation graphique (Fig. 3) des premiers termes de la suite (p_n) – rappelée dans la partie précédente (problème 3) – nous persuade que la suite semble converger vers l'abscisse du point d'intersection de la droite $y = x$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$ (avec $f(x) = 0,8x + 120$).

Le nombre considéré – notons-le α – est solution de l'équation $0,8x + 120 = x$. On en tire $\alpha = 600$.

L'idée est alors de considérer la suite des « écarts » $p_n - \alpha$.

3 Solution rédigée

• Posons, pour tout n , $v_n = p_n - \alpha$.

Comme $u_{n+1} = 0,8u_n + 120$ et $\alpha = 0,8\alpha + 120$, il vient, par différence :

$$p_{n+1} - \alpha = 0,8(p_n - \alpha), \text{ soit } v_{n+1} = 0,8v_n.$$

Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8.

• Comme $v_0 = p_0 - 600 = 400$, on en tire $v_n = 400 \times 0,8^n$, puis $p_n = v_n + 600$, soit : $p_n = 600 + 400 \times 0,8^n$.

Nous avons donc obtenu une formule explicite de p_n .

• Le comportement asymptotique de (p_n) s'en déduit : comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0, \text{ il est clair que } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 600.$$

Conclusion : l'effectif de la population se stabilise sur la valeur 600.

Cette stabilisation est relativement rapide, puisque $u_{10} \approx 643$, $u_{20} \approx 605$ et $u_{30} \approx 600$.

UNE MÉTHODE GÉNÉRALE

En voici le résumé.

Si $u_{n+1} = au_n + b$ ($a \neq 1$) :

1) On cherche l'unique réel α solution de l'équation $x = ax + b$.

En fait, la suite constante de terme général α est une suite particulière vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (1).$$

2) On pose $v_n = u_n - \alpha$.

3) On montre que (v_n) est géométrique :

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ \alpha = a\alpha + b \end{cases},$$

donc : $u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$ (par différence), soit $v_{n+1} = av_n$ (la raison est a).

4) On exprime v_n , puis u_n en fonction de n .

Dans la foulée

4 Dans chacun des cas suivants, déterminer une formule explicite de u_n , et étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) .

a) $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0,4u_n + 5$;

b) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1,5u_n - 3$.

5 On pose $u_0 = \frac{7}{11}$ et $u_{n+1} = 100u_n - 63$.

a) À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, calculer les premiers termes et conjecturer le comportement de la suite.

b) En appliquant la méthode précédente, montrer qu'en fait la suite (u_n) est... stationnaire.

c) Alors ?



Une fractale : surface définie à l'aide d'une suite récurrente... dans le plan.

(1) La méthode exposée ici sera analogue à celle permettant de résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$ (voir chapitre 5, page 155).

3. Calcul de grandeurs (aires, volumes...)

OBJECTIF

Le calcul, exact ou approché, d'une grandeur par un encadrement à l'aide de suites adjacentes : voilà l'objet de cette partie.

Nous insisterons sur les grandeurs géométriques pour lesquelles les idées utilisées (déjà imaginées par Archimède⁽¹⁾) préfigurent les méthodes du calcul intégral (voir chapitre 4).

PROBLÈME

Calculer l'aire A du domaine plan (Fig. 4) – nommé « segment de parabole » – défini par les inégalités :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2. \end{cases}$$

1 Le principe

Soit n un entier ($n \geq 1$). On partage le segment $[0, 1]$ en n segments de longueur $\frac{1}{n}$ et on désigne par :

- u_n la somme des aires des rectangles situés au-dessous de la courbe (en sablé sur la figure 5) ;
- v_n la somme des aires des rectangles situés au-dessus de la courbe (en jaune sur la figure 5).

Sans tergiverser, l'évidence géométrique nous autorise à écrire que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq A \leq v_n$.

2 Calcul de u_n et de v_n

Qu'ils soient jaunes ou sablés, tous les rectangles ont pour « largeur » $\frac{1}{n}$. Leurs hauteurs sont, de gauche à droite :

- pour les rectangles sablés : $\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \dots, \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$;
- pour les rectangles jaunes : $\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \dots, \left(\frac{n-1}{n}\right)^2, \left(\frac{n}{n}\right)^2 = 1$.

$$\text{Ainsi, } u_n = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \right]$$

$$\text{et } v_n = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right] = u_n + \frac{1}{n}.$$

(1) Archimède utilisa, pour le calcul d'aires et de volumes, la méthode d'exhaustion qui s'apparente à celle présentée ici. Il réalisa la « quadrature » de la parabole géométriquement.

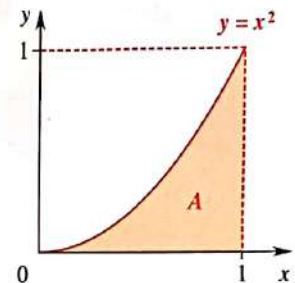


Fig. 4

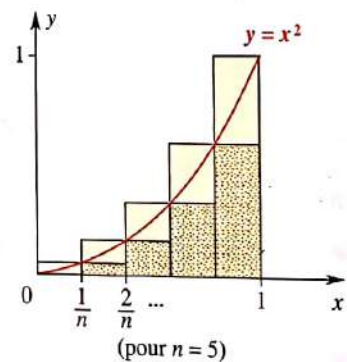


Fig. 5

La relation $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ se « voit » sur le graphique : $v_n - u_n$ est la somme des aires des rectangles jaunes non sablés (ils forment un rectangle de dimensions $\frac{1}{n}$ et 1).

Nous pouvons écrire l'expression de u_n sous la forme :

$$u_n = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2).$$

Nous reconnaissons dans les parenthèses la somme des carrés des premiers entiers. La formule sommatoire trouvée dans *Avant-première* (voir séquence 3, page 9), permet quelques simplifications :

$$u_n = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}, \text{ soit } u_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

3 Calcul de A

Déterminons les limites des suites (u_n) et (v_n) .

$$u_n = \frac{n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right)}{6n^2} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right), \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3};$$

comme $v_n = u_n + \frac{1}{n}$, on en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{3}.$

Le théorème des gendarmes et l'encadrement $u_n \leq A \leq v_n$ nous conduisent à conclure : $A = \frac{1}{3}.$

Remarque : les suites (u_n) et (v_n) sont bien adjacentes, mais l'étude de la monotonie de ces suites, moins évidente géométriquement, demande un peu plus de travail (laissé au lecteur).

En détail, l'égalité :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

au rang $n-1$, s'écrit :

$$1^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n[2(n-1)+1]}{6}.$$

Limite de (u_n)

On factorise le terme prépondérant.

Le théorème des gendarmes s'applique à la suite constatée égale à A.

Dans la foulée

6 Le volume de la trompette⁽¹⁾

(D'après *Calculus*, Marsden-Weinstein, Éd. Springer.)

Calculer le volume du solide de révolution (appelé trompette) obtenu en faisant tourner autour de l'axe (Ox)

la parabole d'équation $\begin{cases} y = x^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

située dans le plan (xOy) (Fig. a).

On adoptera le principe suivant : après avoir partagé le segment $[0, 1]$ en n parties égales, on encadrera le volume cherché par les sommes des volumes de deux types de cylindres : intérieurs et extérieurs à ce volume (Fig. b).

On admettra la formule : $1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$

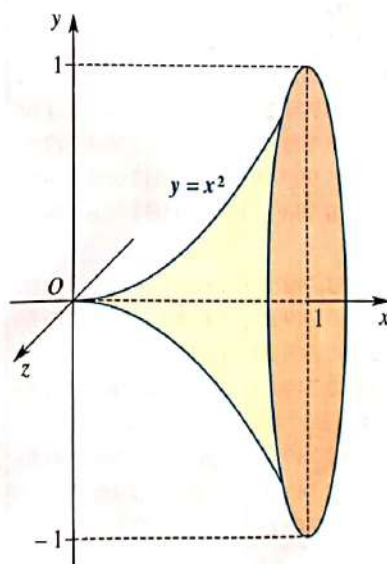


Fig. a

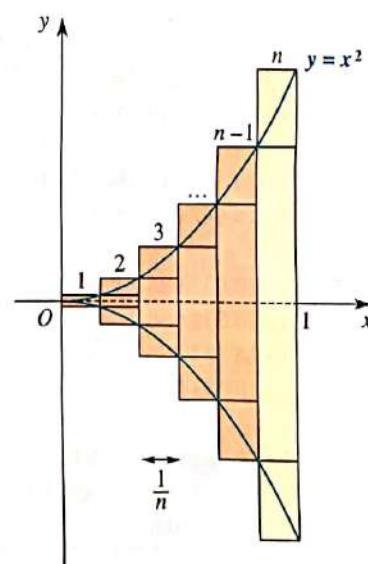


Fig. b

(1) Ce problème sera repris au chapitre 4 à l'aide du calcul intégral.

Applications

Suites arithmétiques et géométriques

Dans les exercices 1 et 2, exprimer u_n en fonction de n .

- 1) (u_n) est une suite arithmétique de raison r , vérifiant :

a) $u_0 = 2$ et $r = \frac{3}{2}$;

b) $u_5 = 1$ et $u_{11} = 8$;

c) $u_0 = 1$ et $u_0 + u_1 + \dots + u_{100} = 2$.

- 2) (u_n) est une suite géométrique de raison q , vérifiant :

a) $u_1 = 5$ et $q = \frac{2}{3}$;

b) $u_4 = 1$ et $u_9 = 25\sqrt{5}$;

c) $q = 2$ et $u_0 + u_1 + \dots + u_{12} = 24\,573$.

- 3) Montrer que chacune des suites ci-après est géométrique, et préciser sa raison.

a) $u_n = 3^{n+2}$; b) $u_n = 5^{1-3n}$;

c) $u_n = (-1)^n \times 6^{2n+3}$;

d) $u_n = 2 + (2 + 2^2 + \dots + 2^n)$.

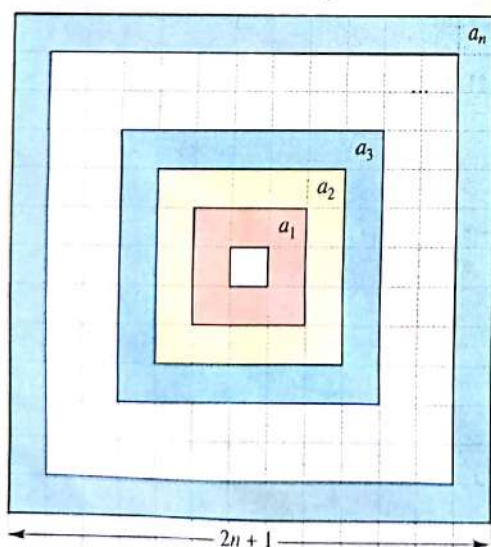
- 4) Calculer les sommes :

$A = 8 + 13 + 18 + \dots + 1\,998 + 2\,003$;

$B = 2^2 + 2^5 + 2^8 + \dots + 2^{20}$;

$C = x + x^2 + \dots + x^n$ (lorsque $x \neq 1$, puis $x = 1$).

- 5) On considère la construction suivante, où a_n est l'aire de la portion de plan comprise entre le carré de côté $2n+1$ et celui de côté $2n-1$, l'unité étant la longueur d'un carreau.



- a) Quelle est la nature de la suite (a_n) ?
b) Calculer $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ à l'aide d'une formule sommatoire. Vérifier directement à l'aide du dessin.

Le principe de récurrence

- 6) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $n^3 - n$ est un multiple de 3.

- 7) 1) Développer, réduire et ordonner $(n+1)^5$.

2) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier $n \geq 0$, $n^5 - n$ est un multiple de 5.

Grand homme et petit théorème

On doit à Pierre de Fermat (1601-1665), juriste de profession et mathématicien amateur, le résultat suivant : « Lorsque p est premier, $n^p - n$ est un multiple de p », connu sous le nom de *Petit théorème de Fermat*.

Vérifié dans les exercices 6 et 7 pour $p = 3$ et $p = 5$, ce résultat sera généralisé dans les chapitres de l'enseignement de spécialité (voir chapitre 12).

- 8) Dans chacun des cas suivants, calculer les premiers termes de la suite, conjecturer une formule explicite de u_n et la démontrer par récurrence.

a) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} \end{cases}$.

- 9) Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n \end{cases}$.

Montrer par récurrence que $u_n = \frac{n}{3^n}$.

- 10) La suite (u_n) est définie par son premier terme u_0 et la relation $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 15}$.

Montrer par récurrence que :

- a) lorsque $u_0 \in [0, 4]$, on a, pour tout n , $0 \leq u_n \leq 5$;
b) lorsque $u_0 \in [5, 10]$, on a, pour tout n , $4 \leq u_n \leq 10$.

11 Étape 1 : indispensable

Considérons la phrase P_n : « $10^n + 1$ est un multiple de 9 ».

a) Vérifier l'égalité $10^{n+1} + 1 = 9 \times 10^n + 10^n + 1$.

b) En déduire que la phrase P_n a un « caractère héréditaire ». (C'est-à-dire « P_n implique P_{n+1} ».)

c) Peut-on conclure que P_n est vraie pour tout entier n ?

(Cet exercice montre que, dans l'application de l'axiome de récurrence, la première étape ne saurait être négligée.)

Suites croissantes, décroissantes

Dans les exercices 12 à 15, étudier la monotonie des suites (u_n) à l'aide de la technique indiquée.

12 Avec la différence « $u_{n+1} - u_n$ »

a) $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$; b) $u_n = n^2 - 5n$.

c) $u_n = 3n + (-1)^n$; d) $u_n = n - 3^n$.

13 Avec le quotient « $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ »

a) $u_n = \frac{n}{3^n}$; b) $u_n = 0,1^n \times n^2$;

c) $u_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n}$.

14 Avec la fonction f (« $u_n = f(n)$ »)

a) $u_n = n + \cos n$; b) $u_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$; c) $u_n = n^2(3 - n)$.

15 Avec le raisonnement par récurrence

a) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_0 = \frac{7\pi}{22} \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$.

Suites majorées, minorées

16 Montrer que chacune des suites ci-après est majorée et en déterminer un majorant.

a) $u_n = 1 + \frac{2}{7} + \dots + \left(\frac{2}{7}\right)^n$; b) $u_n = 10 + 2 \cos n$;

c) $u_n = 9 + 3 + 1 + \dots + 3^{-n+2}$; d) $u_n = \frac{3n}{n+1}$.

17 Dans chacun des cas suivants, étudier les bornes éventuelles de la suite (u_n) à l'aide du sens de variation de la fonction $f(u_n = f(n))$.

a) $u_n = n^2 - 10n - 3$; b) $u_n = \frac{3n^2}{n^2 + 1}$;

c) $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

18 Montrer, par récurrence, que $2 \leq u_n \leq 3$:

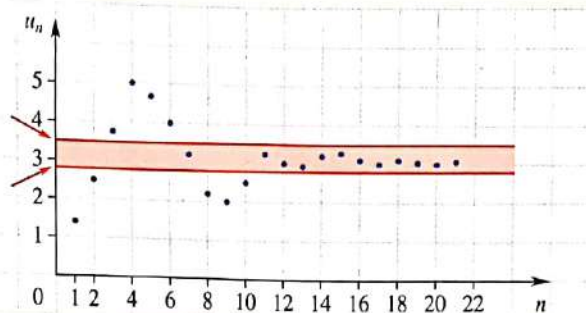
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

Comportement asymptotique

Avec la définition de la limite

19 Convergence : interprétation de la limite

Soit (u_n) une suite dont les premiers termes sont représentés ci-dessous :



1) Si $\lim u_n = 3$, expliquer pourquoi tous les termes sont situés dans le « tuyau » coloré, à partir d'un certain rang (le rang 11 sur la figure).

2) Peut-on encore affirmer cela pour le « tuyau » défini par : $2,999 \leq y \leq 3,00001$?

20 Unicité de la limite

1) On suppose qu'une suite (u_n) admet deux limites distinctes $\ell_1 < \ell_2$.

On pose alors $\alpha = \frac{\ell_2 - \ell_1}{2} > 0$.

Montrer que la définition de la limite, appliquée à deux « tuyaux » bien choisis, de rayon α , conduit à une contradiction.

2) Que peut-on en conclure ?

21 En utilisant les définitions 3 et 4 du cours, montrer que la suite de terme général $(-1)^n$ ne peut pas avoir de limite.

22 Démontrer que si une suite (u_n) est convergente, alors elle est bornée.

Opérations algébriques

Dans les exercices 23 à 25, étudier la limite de la suite (u_n) à l'aide des résultats du théorème 1.

23 a) $u_n = 3n^2 - 1 + \frac{1}{n}$; b) $u_n = 1 - 5^n$;

c) $u_n = (1 - 3n)(n^2 + n - 2)$.

24 a) $u_n = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^n}$;

b) $u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}$.

25 a) $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3$; b) $u_n = \frac{4}{3 - 2^n}$;

c) $u_n = \frac{1}{n + 5^n}$.

Formes « indéterminées »

Dans les exercices qui suivent, étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) à l'aide de la transformation d'écriture proposée. Une synthèse sur la question sera présentée au chapitre 2.

26 a) $u_n = 3n^2 - n + 5$; b) $u_n = 8n - n^3$.
(Mettre en facteur n^2 dans le a), n^3 dans le b).)

27 a) $u_n = \frac{3n^2 - n}{1 - n^2}$; b) $u_n = \frac{n}{2n^2 + 1}$;

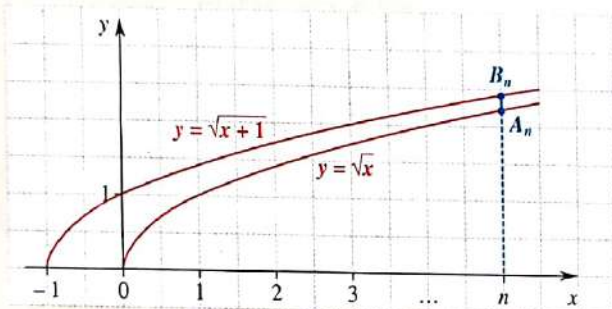
c) $u_n = \frac{(n+3)(-2n+1)}{3n+5}$.

(Mettre en facteur le terme de plus haut degré.)

28 a) $u_n = \sqrt{n} - n$; b) $u_n = \frac{\sqrt{n} - n}{2n+1}$.

Deviner quel est le terme « prépondérant ».

29 u_n est la longueur du segment $[A_n B_n]$ sur la figure ci-dessous.



(Multiplier par l'expression conjuguée.)

Théorèmes de comparaison

Dans les exercices 30 à 32, étudier la limite de la suite (u_n) à l'aide d'un théorème de comparaison.

30 a) $u_n = \cos n - n$; b) $u_n = 2n + (-1)^n$.

31 a) $u_n = \frac{\sin n}{n}$; b) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$; c) $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \sin n$.

32 a) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; b) $u_n = \frac{3 - \sin n}{n}$.

33 Preuve du théorème 3

1) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$ et pour $x \in [0, +\infty[$:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \text{ (inégalité de Bernoulli).}$$

2) En déduire que, si $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

3) À l'aide d'un théorème de comparaison, en déduire la limite de q^n lorsque $-1 < q < 1$.

Avec des suites géométriques

Dans les exercices 34 à 39, étudier la limite de la suite (u_n) .

34 a) $u_n = 1,01^n$; b) $u_n = 5 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$;

c) $u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n + \left(\frac{5}{4}\right)^n$.

35 a) $u_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$;

b) $u_n = 1 + \frac{6}{5} + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{6}{5}\right)^n$.

36 a) $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$;

b) $u_n = 0,8 + 0,8^2 + \dots + 0,8^n$.

37 $u_n = \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^4 + \dots + \left(\frac{3}{7}\right)^{2n}$.

38 a) $u_n = 3,77\dots 7$ (n chiffres 7) ;

b) $u_n = 0,67\ 67\dots 67$ (n séquences 67).

Piste Dans chaque cas, u_n est la somme des termes...

39 a) $u_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$; b) $u_n = \frac{3^n + 4^n}{4^n}$;

c) $u_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{3^{2n-1}}$.

Un peu, de tout

40 Étudier le comportement à l'infini des suites (a_n) , (b_n) , (c_n) et (d_n) :

$$a_n = \frac{2n^2 - 5}{n + 1} ;$$

$$b_n = \frac{a_n}{n} ;$$

$$c_n = a_n - 2n ;$$

$$d_n = \frac{b_n - 2}{c_n + 2}.$$

41 Soit, pour $n \geq 2$, $u_n = 3 + \frac{\sqrt{n}}{n + (-1)^n}$.

1) Établir les inégalités :

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq u_n - 3 \leq \frac{\sqrt{n}}{n-1}.$$

2) Déterminer les limites des suites de termes généraux :

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1} \text{ et } \frac{\sqrt{n}}{n-1}.$$

3) En déduire la limite de (u_n) .

Suites adjacentes

- 42** On pose, pour tout $n \geq 1$, $a_n = 7,22\dots 2$ (n chiffres 2) et $b_n = 7,22\dots 23$ ($n-1$ chiffres 2).

- 1) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
- 2) Peut-on deviner leur limite commune ?

Dans les exercices 43 et 44, montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et préciser leur limite commune.

43 a) $a_n = 5 - \frac{1}{n}$ et $b_n = 5 + \frac{2}{n}$;

b) $a_n = \frac{3n^2 - 1}{n^2}$ et $b_n = \frac{3n^2 + 1}{n^2}$.

44 $a_n = \frac{6n-7}{5n+1}$ et $b_n = \frac{6n+1}{5n-1}$.

Suites monotones

- 45** On pose, pour tout $n \geq 1$,
 $n! = n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1$ ($n!$ se lit « n factorielle »).

- 1) Montrer que la suite de terme général $n!$ est croissante et non majorée.

- 2) Quelle est sa limite ?

- 46** On pose $u_1 = 1,38$; $u_2 = 1,338\ 8$; ... ;
 $u_n = 1,33\dots 388\dots 8$ (n chiffres 3 suivis de n chiffres 8).

- 1) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

- 2) Montrer que, pour tout n , $0 \leq u_n - \frac{4}{3} \leq 10^{-n}$.
 Que peut-on en déduire ?

- 47** On pose $u_1 = 0,1$; $u_2 = 0,12$; $u_3 = 0,123$; ... ;
 $u_{10} = 0,123\ 456\ 789\ 10$.

u_n est le nombre obtenu en juxtaposant successivement tous les entiers, 1, 2, ..., n après la virgule.

Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Drôle de réel

La limite ℓ de la suite (u_n) est appelée le nombre de Champernowne – du nom du mathématicien anglais qui l'a imaginé en 1933. Ce nombre est irrationnel, et même transcendant : résultat prouvé par l'allemand Kurt Mahler en 1961... sur son lit d'hôpital !

(Un nombre est transcendant s'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers.)

Brèves de cours

- 48** Une seule des trois suites (a_n) , (b_n) et (c_n) est géométrique. Laquelle ?

$$a_n = 2^{2n+1} \times 5^{3-n} ; b_n = n^2 ; c_n = \sqrt{c_{n-1}^2 + 1}.$$

- 49** Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r , telle que $u_2 = 0$ et $u_{10} = 3$. Calculer r et $u_0 + u_1 + \dots + u_{50}$.

- 50** Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, $4^n + 2$ est un multiple de 3.

- 51** La suite (u_n) est définie par :

$$u_1 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}.$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \sqrt{n-1}$.

- 52** Étudier la monotonie de la suite de terme général :

$$u_n = n^3 - 6n.$$

- 53** Vrai ou faux ?

« Si, à partir d'un certain rang, $1 - \frac{1}{n} < u_n < 1$, la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang. »

- 54** Montrer que la suite de terme général $\frac{n+3}{n^2+2}$ est bornée.

- 55** On pose $u_0 = 2\ 002$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.
 À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que, pour tout n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
 Que peut-on en déduire ?

- 56** Étudier la limite éventuelle des suites de terme général :

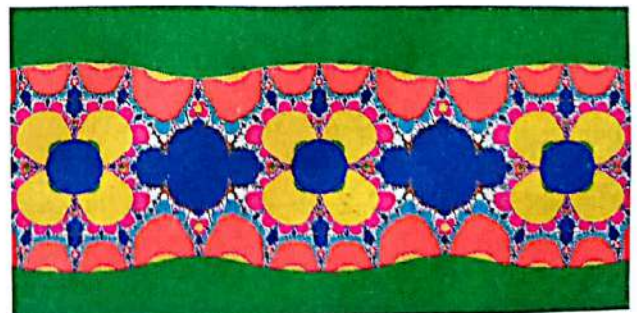
$$a_n = \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + 1} ; b_n = 2^n + 7^{-n} ;$$

$$c_n = 1 + \frac{2}{9} + \dots + \left(\frac{2}{9}\right)^n.$$

- 57** Même exercice avec $a_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$ et $b_n = \frac{3^n + 4^n}{3^n + 2^n}$.

(On pourra factoriser un terme, au numérateur et au dénominateur.)

- 58** On pose $u_n = 0, \overline{61} \overline{61} \dots \overline{61}$ (n séquences 61).
 Montrer que la suite (u_n) est convergente en utilisant la somme des termes d'une suite géométrique.



Exercices

Exemples d'étude de suites

Suites définies par une formule explicite

59 Un cas particulier

On considère la suite définie, pour $n \geq 1$, par $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

- 1) a) Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. En déduire qu'il existe un rang n_0

tel que, si $n \geq n_0$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}$. Préciser n_0 .

- b) En déduire le sens de variation de (u_n) .

- 2) a) Montrer par récurrence que, pour $n \geq 5$, $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}$.

- b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

60 Généralisation

Soit k un entier fixé ($k \geq 1$) et a un réel ($a > 1$).

On pose, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{n^k}{a^n}$.

- 1) a) Vérifier l'égalité $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{a} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

- b) Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que, si $n \geq n_0$, alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < b, \quad \text{avec } b = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{a}\right).$$

- c) En déduire que (u_n) est décroissante.

- 2) a) Montrer par récurrence que, pour $n \geq n_0$:

$$u_n \leq u_{n_0} b^{n-n_0}.$$

- b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

61 À qui se fier ?

On pose, pour $n \geq 0$, $u_n = \sqrt{n^2 + 6n} - n$.

- 1) À l'aide de la calculatrice, peut-on conjecturer le comportement de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

(On calculera u_n pour $n = 10^3, 10^4, 10^5, \dots, 10^{15}$.)

- 2) Établir l'égalité $u_n = \frac{6}{\sqrt{1 + \frac{6}{n}} + 1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

- 3) Expliquer le comportement « anormal » de la calculatrice.

Suites définies par une sommation

62 Le nombre d'Apéry

On pose, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$.

- 1) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

- 2) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

1,202 056 903 159 594...

C'est la limite de la suite (u_n) de l'exercice précédent. Le français Robert Apéry a prouvé, en 1979, que ce nombre est irrationnel. Est-il transcendant ? Nul ne le sait à ce jour.

63 Une heureuse simplification

On pose, pour $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

- 1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 , et montrer que (u_n) est croissante.

- 2) Pour tout $k \geq 1$, montrer l'égalité :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

En déduire une expression simple de u_n et étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

64 Encadrement judicieux

On considère la suite de terme général :

$$u_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n}.$$

- 1) Quel est le nombre de termes dans la somme définissant u_n ? Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

- 2) Parmi les termes de la somme définissant u_n , quel est le plus petit ? Quel est le plus grand ?

- 3) En déduire l'encadrement $\frac{n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$.

Déterminer alors la limite de la suite (u_n) .

65 Somme « harmonique »

On considère la suite de terme général :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

- 1) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $S_{2n} \geq \frac{1}{2} + S_n$.

- 2) Démontrer par récurrence sur k que, pour tout k , il existe n tel que $S_n \geq k$. En déduire que la suite (S_n) est divergente.

Suites définies par récurrence

66 n fois la touche $\boxed{\text{SIN}}$

On pose $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sin u_n$.

1) À l'aide d'une représentation graphique, conjecturer le comportement de la suite : sens de variation, limite.

2) Même question en actionnant plusieurs fois la touche $\boxed{\text{SIN}}$ de la calculatrice.

3) a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$:

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1.$$

b) En déduire que (u_n) est convergente.

4) À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n_0 tel que $u_{n_0} < 0,1$.

67 n radicaux

On pose, pour $n \geq 1$:

$$u_n = \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \quad (n \text{ radicaux}).$$

1) Définir (u_n) par récurrence.

2) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite, et conjecturer son comportement.

3) Montrer par récurrence que (u_n) est croissante, majorée par 2.

4) a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(2 - u_n)$.

b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $2 - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

c) Quelle est la limite de (u_n) ?

68 n traits de fraction

On pose $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{2+1}$, $u_2 = \frac{1}{2+\frac{1}{2+1}}$,

$$u_n = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots 2 + \frac{1}{2+1}}}} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots 2 + \frac{1}{2+1}}}}} \right\} n \text{ traits de fraction.}$$

1) Définir (u_n) par récurrence.

2) Représenter graphiquement ses premiers termes.

3) On pose $\alpha = -1 + \sqrt{2}$ et $f(x) = \frac{1}{2+x}$.

Vérifier que $f(\alpha) = \alpha$.

4) a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 0$ et que :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|.$$

b) En déduire que, pour tout $n \geq 0$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}$.

c) Quelle est la limite de (u_n) ?

Définitions diverses

69 Une suite de carrés

Une suite (u_n) est ainsi définie :

$$u_1 = 16, u_2 = 1156, u_3 = 111556, \dots,$$

chaque nombre étant obtenu à partir du précédent en intercalant 1 et 5 « au milieu » de ce nombre.

1) Déterminer la racine carrée de u_1 , u_2 et u_3 .

2) Soit X le nombre qui s'écrit 333...34 en base dix ($n-1$ chiffres 3 suivis d'un chiffre 4).

Montrer que $X = \frac{1}{3}(10^n - 1) + 1$.

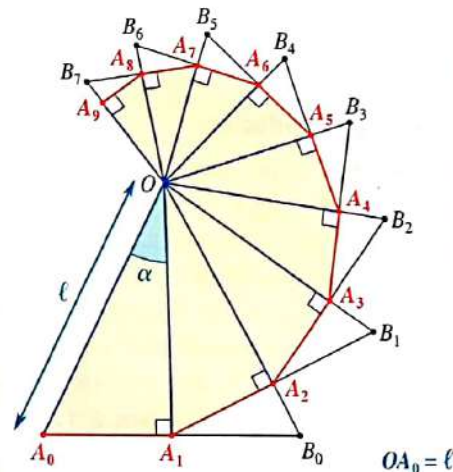
3) Montrer que $X^2 = \frac{1}{9}(10^{2n} - 1) + \frac{4}{9}(10^n - 1) + 1$.

4) En déduire l'expression du terme général de la suite (u_n) sous la forme d'un carré. $\boxed{\text{BAC}}$

70 L'escargot

« Il y a loin de la route aux escargots. »

Paul Éluard – Proverbes



Dans le triangle isocèle OA_0B_0 , A_1 est le milieu de $[A_0, B_0]$. On note B_1 le symétrique de A_1 par rapport à (OB_0) et A_2 , le milieu de $[A_1, B_1]$. En itérant ce processus, on obtient une suite de triangles isocèles OA_nB_n (figure ci-dessus).

1) Pour $n \geq 1$, exprimer OA_n en fonction de OA_{n-1} et de l'angle α . En déduire OA_n en fonction de n , ℓ et α .

2) Exprimer la distance $A_{n+1}A_n$ en fonction de n .

Calculer la longueur de la ligne polygonale :

$$A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n.$$

3) a) Vérifier que la longueur L_n de la ligne polygonale peut s'écrire :

$$L_n = \ell \frac{1 - (\cos \alpha)^n}{\tan \frac{\alpha}{2}}.$$

Piste Exprimer $\sin \alpha$ et $1 - \cos \alpha$ en fonction de $\frac{\alpha}{2}$.

b) En déduire la limite de (L_n) .

Avec une suite auxiliaire

Dans les exercices de cette partie, la suite (u_n) est définie par récurrence.

Il s'agit d'étudier (u_n) (formule explicite, limite...) en utilisant une suite auxiliaire (v_n) bien connue : en général, (v_n) est géométrique.

Pour les suites du type « $u_{n+1} = a u_n + b$ », on se reportera à la méthode exposée dans la partie 2 de Au cœur des problèmes ; pour les autres cas, nous donnerons toute indication sur la suite auxiliaire.

Suites « $u_{n+1} = a u_n + b$ »

Dans les exercices 71 à 74, donner une formule explicite de u_n et étudier $\lim u_n$.

71 $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 12$.

72 $u_0 = \sqrt{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2}u_n - 1$.

73 $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = \frac{1}{7}u_n + \frac{6}{7}$.

74 $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = 0,9995 u_n + 1 + 10^{-3}$.

75 Un modèle d'évolution

On suppose que, sur une période donnée, la population d'un pays est constante et égale à 60 millions d'habitants, dont 40 millions vivent en zone rurale et 20 millions en ville.

On constate que les mouvements de population sont décrits par la règle suivante : chaque année, 20 % des ruraux émigrent à la ville et 10 % des citadins émigrent en zone rurale.

On note respectivement V_n et R_n les effectifs (en millions) des citadins et des ruraux au bout de n années ($V_0 = 20$ et $R_0 = 40$).

1) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\begin{cases} V_{n+1} = 0,9V_n + 0,2R_n \\ R_{n+1} = 0,1V_n + 0,8R_n \end{cases}$$

2) Que vaut $V_n + R_n$?

En déduire que les suites (V_n) et (R_n) satisfont à :

$$V_{n+1} = 0,7V_n + 12 \quad \text{et} \quad R_{n+1} = 0,7R_n + 6.$$

3) Exprimer R_n et V_n en fonction de n et étudier les limites des suites (R_n) et (V_n) . Conclusion ?



Autres relations de récurrence

76 Le type « $u_{n+1} = a u_n + P(n)$ », P polynôme

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + n \quad (1).$$

1) Déterminer une suite arithmétique (w_n) satisfaisant la relation de récurrence (1).

2) On pose $v_n = u_n - w_n$.

Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

3) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n . Déterminer la limite de u_n , puis de $\frac{u_n}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

77 Une récurrence homographique

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

1) On pose, pour tout entier n , $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

2) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .

3) Déterminer la limite de (v_n) , puis celle de (u_n) .

78 Récurrence double

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \geq 1$, par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}.$$

1) Montrer que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$s_n = u_{n+1} + u_n$$

est une suite géométrique.

En déduire s_n en fonction de n .

2) On pose $v_n = (-1)^n u_n$ et on considère la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $t_n = v_{n+1} - v_n$.

Exprimer t_n en fonction de s_n .

3) Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n (on pourra calculer, de deux manières, la somme $t_0 + \dots + t_{n-1}$).

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{8^n}$.

BAC

79 Avec des suites extraites

On pose $u_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $u_n = u_{n-1} + n(-1)^{n+1}$.

1) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et construire les points A_n de coordonnées $(n; u_n)$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

2) On pose, pour tout n , $V_n = u_{2n}$ et $W_n = u_{2n+1}$.

Démontrer que (V_n) et (W_n) sont des suites arithmétiques.

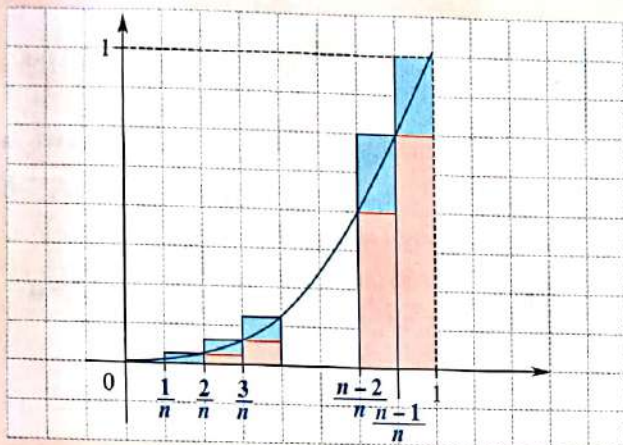
Calculer V_n et W_n en fonction de n et vérifier que, pour tout entier n non nul, $u_{2n-1} = -u_{2n}$.

Calcul de grandeurs

Un calcul d'aire et deux calculs de volumes sont présentés ici. Nous proposerons aussi un classique encadrement de longueur dans le problème 89, page 40.

80 Quadrature d'une cubique

La courbe ci-après est la courbe représentative de $x \mapsto x^3$ sur $[0, 1]$. On se propose de calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine situé sous la courbe.



Pour cela, on partage l'intervalle $[0, 1]$ en n intervalles de même longueur $\frac{1}{n}$ ($n \geq 1$). On détermine alors n rectangles intérieurs au domaine (u_n est la somme de leurs aires) et n rectangles extérieurs (v_n est la somme de leurs aires).

Ainsi, $u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n$.

1) Montrer que :

$$u_n = \frac{1}{n^4}(0^3 + 1^3 + \dots + (n-1)^3);$$

$$v_n = \frac{1}{n^4}(1^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3).$$

2) Montrer par récurrence, que :

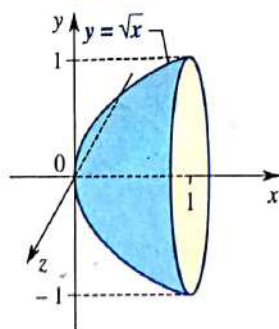
$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

3) En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$. Calculer $\mathcal{A}$.

81 Le volume du phare

Calculer le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner autour de (Ox) la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 1$) située dans le plan (xOy) .

Principe : Encadrer ce volume par la somme des volumes de n cylindres intérieurs et de n cylindres extérieurs, comme dans l'exercice 6, Dans la foulée, page 25.

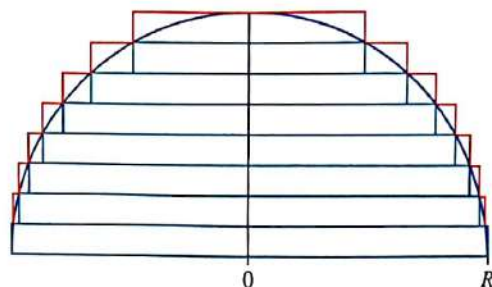


82 Volume de la sphère

L'objet de ce problème est de déterminer le volume V d'une sphère de rayon R . Pour cela, on calcule le volume de la demi-sphère, à l'aide d'un encadrement par deux suites.

1) Le principe

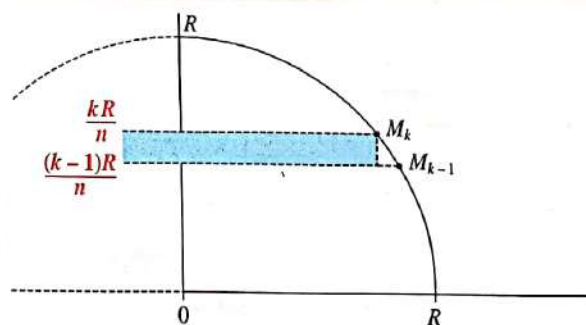
On subdivise le segment $[0, R]$ en n segments de même longueur $\frac{R}{n}$.



On est alors conduit à considérer n cylindres extérieurs et $n-1$ cylindres intérieurs. On désigne par u_n le volume total des cylindres intérieurs et par v_n celui des cylindres extérieurs.

Le volume V vérifie alors $u_n \leq \frac{V}{2} \leq v_n$.

2) Calcul de u_n et v_n



a) Montrer que le volume du k -ième cylindre intérieur est :

$$(n^2 - k^2) \frac{\pi R^3}{n^3}.$$

b) Montrer que :

$$u_n = \frac{\pi R^3}{n^3} [(n^2 - 1^2) + (n^2 - 2^2) + \dots + (n^2 - (n-1)^2)]$$

$$v_n = \frac{\pi R^3}{n^3} [(n^2 - 0^2) + (n^2 - 1^2) + (n^2 - 2^2) + \dots]$$

3) Passage à la limite

a) En utilisant l'égalité :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

montrer que :

$$u_n = \pi R^3 \frac{4n^2 - 3n - 1}{6n^2} \quad \text{et} \quad v_n = \pi R^3 \frac{4n^2 + 3n - 1}{6n^2}.$$

b) Étudier les limites de (u_n) et (v_n) .

Conclure pour la valeur de V .



83 Quelques suites d'approximation de π

Le but de cet exercice est d'observer les termes de quelques suites qui convergent vers π . (Nous admettrons que les suites proposées aux questions A) 1), A) 2), A) 3) et A) 4) vérifient cette propriété ; pour les suites (p_n) et (q_n) voir le problème 89.) La partie B) propose d'apprécier et de comparer leur vitesse de convergence, enfin, la partie C) introduit un procédé d'accélération de convergence.

L'outil proposé est le tableur Excel.

A) Calcul des premiers termes

1) Les suites d'Archimède

Les suites (p_n) et (q_n) sont définies par :

$$p_1 = 3 ; q_1 = 2\sqrt{3} ;$$

$$q_{n+1} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n} \text{ et } p_{n+1} = \sqrt{p_n q_{n+1}}.$$

a) Introduire les valeurs de n (de 0 à 1 000) dans la colonne A, et faire calculer les termes des suites (p_n) et (q_n) en B et C, pour $n \leq 1 000$, comme ci-dessous.

n	p_n	q_n
0		
1	3	3,464 101 62
2	3,105 828 54	3,215 390 31
3	3,132 628 61	3,159 659 94
4	3,139 350 2	3,146 086 22
5	3,141 031 95	3,142 714 6

⋮ ⋮ ⋮

b) Conjecturer le sens de variation des suites (p_n) et (q_n) .

c) Déterminer le plus petit entier n à partir duquel on obtient huit décimales exactes.

2) La suite de Descartes

On considère la suite (r_n) définie par :

$$r_0 = \frac{3}{4} \text{ et } r_{n+1} = \frac{1}{2} \left(r_n + \sqrt{r_n^2 + \frac{r_0^2}{4^n}} \right).$$

On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \frac{3}{\pi}$.

a) Organiser, dans la colonne D, le calcul des premiers termes de (r_n) . Si la valeur de r_0 est placée en D2, on pourra utiliser en D3 la formule :

$$=0,5*(D2+RACINE(D2^2+\$D\$2^2/4^A2)).$$

Calculer ensuite, dans la colonne E, les valeurs de $u_n = \frac{3}{r_n}$.

r_n	u_n
0,75	4
0,905 330 086	3,313 708 5
0,942 626 155	3,182 597 88
0,951 859 724	3,151 724 91

b) Conjecturer le sens de variation des suites (r_n) et (u_n) .
c) À partir de quelle valeur de n la suite (u_n) fournit-elle huit décimales exactes de π ?

3) La suite de Wallis

$$\text{On pose } a_n = 2 \times \frac{2^2 \times 4^2 \times \dots \times (2n)^2}{1^2 \times 3^2 \times \dots \times (2n-1)^2} \times \frac{1}{2n+1},$$

pour $n \geq 1$.

a) Vérifier que la suite (a_n) est définie par :

$$a_1 = \frac{8}{3} \text{ et } a_{n+1} = \frac{(2n+2)^2}{(2n+3)(2n+1)} a_n.$$

Organiser alors le calcul des valeurs de a_n pour $n \leq 1 000$, dans la colonne F.

b) Combien de décimales exactes de π obtient-on avec la valeur $a_{1 000}$?

4) La suite de Gregory-Leibniz

$$\text{On pose } b_n = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right), \text{ pour } n \geq 0.$$

a) Vérifier que (b_n) est définie par les conditions :

$$b_0 = 4 \text{ et } b_{n+1} = b_n + 4 \times \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}.$$

Calculer b_n pour $n \leq 1 000$, dans la colonne G.

b) Combien de décimales exactes de π obtient-on avec la valeur $b_{1 000}$?

B) Comparaison des suites

1) Comparer les vitesses de convergence des suites (p_n) , (q_n) , (u_n) , (a_n) et (b_n) à l'aide des observations précédentes.

2) Classer ces suites dans les deux catégories suivantes : « suites rapides », « suites lentes ».

C) Accélération de la convergence de (b_n)

Le procédé « Delta 2 », inventé en 1926 par Alexander Aïten, consiste à définir une suite $(t_n)_{n \geq 2}$ par :

$$t_n = \frac{b_n b_{n-2} - b_{n-1}^2}{b_n - 2b_{n-1} + b_{n-2}} \text{ pour } n \geq 2.$$

1) Dans la colonne H, à partir de H4, faire calculer les valeurs de (t_n) jusqu'à $t_{1 000}$.

b_n	acc de b_n
4	
2,666 666 67	
3,466 666 67	3,166 666 67
2,895 238 1	3,133 333 33

⋮ ⋮

2) Est-il légitime d'affirmer que (t_n) accélère la convergence de (b_n) ?

3) Combien de décimales exactes de π obtient-on avec la valeur $t_{1 000}$?

Rubrique à Bac

Spirales géométriques

Les auteurs de sujets ont une prédilection pour les **suites géométriques** de nature... géométrique.

Parmi les figures en vogue, c'est incontestablement la spirale qui tient la corde. C'est un terrain idéal – bien balisé – pour retrouver des segments dont les longueurs sont en progression géométrique, et pour s'intéresser à la **somme des termes**, à sa **limite**,...

84 Avec une transformation

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ vérifiant :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(1-y) \\ y' = \frac{1}{2}(x-3) \end{cases}$$

1) a) Montrer que f admet un unique point invariant Ω .

Ouvre Poser $x' = x$, $y' = y$ et résoudre le système obtenu.

b) Prouver que $\Omega M' = \frac{1}{2} \Omega M$.

c) Établir que le triangle $\Omega M M'$ est rectangle en Ω .

2) Soit $M_0(1 + 4\sqrt{3}, 3)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_{n+1} = f(M_n)$.

a) En utilisant la première question, calculer ΩM_n en fonction de n .

Ouvre Une suite géométrique.

b) Placer le point M_0 et construire les points M_1, M_2, M_3 et M_4 .

c) À partir de quel rang n_0 a-t-on : « Pour tout $n \geq n_0$, M_n appartient au disque de centre Ω et de rayon $r = 0,05$ » ?

3) a) Calculer $M_0 M_1$.

b) Pour tout entier naturel n , on note $d_n = M_n M_{n+1}$. Montrer que (d_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

Ouvre Encore une suite géométrique.

c) On note $l_n = d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_n$. Calculer l_n en fonction de n et en déduire la limite de l_n en $+\infty$.

Ouvre Somme des termes, limite.

4) Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'isobarycentre des points $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$.

a) Montrer que, pour tout $n > 0$, $\Omega G_n \leq \frac{16}{n+1}$.

b) En déduire la position limite du point G_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Utilisation de suites auxiliaires

Le recours à des **suites auxiliaires** (arithmétiques ou géométriques) peut revêtir des formes moins standard que celles dégagées à la page 34 : suites définies à partir de deux **suites conjointes**, suite des différences « $u_{n+1} - u_n$ »...

85 À partir d'un barycentre

Dans un plan P , soit un point fixe O et la suite de points $M_0, M_1, \dots, M_n, \dots$, tels que, pour tout n :

$$\overrightarrow{OM_{n+2}} = 2a \overrightarrow{OM_{n+1}} - a^2 \overrightarrow{OM_n}$$

où a est un réel donné différent de 1.

1) Soit G_{n+1} le barycentre de M_{n+1} et M_n affectés respectivement des coefficients 1 et $-a$.

a) Vérifier que O, G_{n+2} et G_{n+1} sont alignés.

b) Comment G_{n+1} se déduit-il simplement de G_n ?

Dans la suite du problème, on suppose que $a = \frac{1}{2}$ et que M_0

et M_1 ont pour coordonnées respectives $(2; 0)$ et $(1; 1)$ dans un repère orthonormal d'origine O .

2) Placer sur un graphique les points M_0, M_1 et G_1 et expliquer la construction par laquelle chacun des points G_2 et M_2 se déduit des précédents.

3) On note x_n et y_n les coordonnées du point M_n .

Ouvre Voilà enfin les suites à étudier.

a) Établir une relation entre x_{n+2}, x_{n+1} , et x_n .

b) On considère les suites de terme général $u_n = 2^n x_n$ et $v_n = 2^n y_n$.

Ouvre Premières suites auxiliaires.

Montrer que les suites $w_n = u_{n+1} - u_n$ et $z_n = v_{n+1} - v_n$ sont constantes.

Ouvre Suites des différences.

En déduire l'expression de u_n et de v_n en fonction de n .

c) Déterminer l'expression de x_n puis de y_n en fonction de n .

d) Comment se comporte le point M_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Ouvre Utiliser le résultat de l'exercice 60 : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty$ (si $a > 1$ et k entier).

Problèmes

86 Moyenne arithmético-géométrique

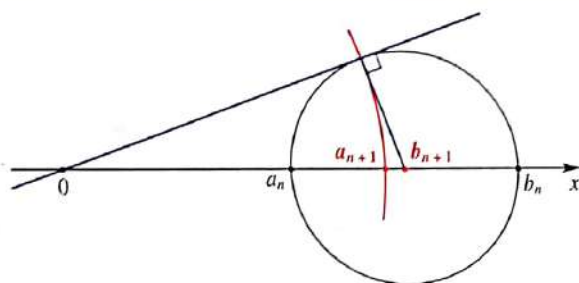
Les suites (a_n) et (b_n) sont définies par $0 < a_0 < b_0$ et, pour $n \geq 0$:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ (moyenne géométrique de } a_n \text{ et } b_n \text{) et}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \text{ (moyenne arithmétique de } a_n \text{ et } b_n \text{).}$$

1) Organiser le calcul de a_n et b_n jusqu'à $n \leq 20$ à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, avec $a_0 = 4$ et $b_0 = 9$.

2) La construction ci-dessous permet d'obtenir géométriquement a_{n+1} et b_{n+1} à partir de a_n et b_n .



Décrire cette construction et justifier l'affirmation précédente.

3) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$:

$$0 < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n.$$

4) a) En déduire que, pour tout $n \geq 0$:

$$b_{n+1} - a_{n+1} < b_{n+1} - a_n, \text{ puis que :}$$

$$b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{2}(b_n - a_n).$$

b) Prouver que, pour tout $n \geq 0$, $b_n - a_n < (b_0 - a_0) \times \frac{1}{2^n}$.

c) Quelle est la limite de $b_n - a_n$?

5) Déduire des questions précédentes que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Leur limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique des réels a_0 et b_0 .

87 L'algorithme de Babylone

1) On considère la fonction f , définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right).$$

a) Étudier le sens de variation de f .

b) Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$, et montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ .

c) Représenter graphiquement $\mathcal{C}_f$ et Δ . Préciser les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite d'équation $y = x$.

2) On définit une suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Cette suite a déjà été présentée page 27, (voir Dans la foulée, exercice 7).

a) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (u_n) sur le dessin de la question 1) c).

b) Conjecturer alors le comportement de (u_n) : sens de variation et limite.

3) a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 sous forme fractionnaire.

b) Vérifier, à l'aide de la calculatrice, les inégalités :

$$u_0 < \sqrt{2} < u_4 < u_3 < u_2 < u_1.$$

c) Montrer par récurrence que, pour $n \geq 1$:

$$\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq \frac{3}{2}.$$

En déduire le sens de variation de (u_n) , ainsi que la convergence de (u_n) .

4) a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} - \sqrt{2})^2.$$

b) Vérifier que $|u_0 - \sqrt{2}| < \frac{1}{2}$.

En déduire par récurrence que, pour tout $n \geq 0$:

$$|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{(2^{n+1}-1)}.$$

c) Prouver que, pour tout $n \geq 0$, $2^{n+1} - 1 \geq n + 1$.

En déduire la limite de (u_n) .

5) À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que :

$$(0,5)^{2^{n+1}-1} < 10^{-100}.$$

En déduire que $u_8 \approx \sqrt{2}$ à 10^{-100} près.

De Babylone à Newton

L'algorithme ci-dessus décrit, dont on retrouve trace dans une tablette d'argile babylonienne (I^{er} millénaire av. J.-C.), permet d'approcher $\sqrt{2}$ par des fractions arbitrairement proches. (Ainsi $u_3 = \frac{577}{408} \approx \sqrt{2}$ à 3×10^{-6} près.)

Ce procédé décrit par Héron d'Alexandrie (I^{er} siècle de notre ère) a été entièrement redécouvert au XVII^e siècle par Newton, à l'aide d'une méthode géométrique très puissante. Cette méthode sera à nouveau mise en œuvre dans le problème suivant (pour la suite (c_n) , partie D).

88 Approximations du nombre d'or

Le but de ce problème est de définir le nombre d'or et d'envisager trois suites convergeant vers le nombre d'or (celles introduites dans la partie Avec un logiciel).

A) Le nombre d'or

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

La solution positive, notée ϕ , est appelée « nombre d'or ».

2) Démontrer les égalités :

$$\phi^2 = \phi + 1, 1 + \frac{1}{\phi} = \phi, \sqrt{1 + \phi} = \phi \text{ et } \frac{\phi^2 + 1}{2\phi - 1} = \phi.$$

B) La suite (a_n)

On pose $a_0 = 2$ et, pour tout $n \geq 0$, $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$.

1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2$.

2) Prouver que, pour tout $n \geq 1$, $|a_{n+1} - \phi| \leq \frac{4}{9}|a_n - \phi|$. (Utiliser la question A) 2)).

3) En déduire, par récurrence, que pour $n \geq 1$:

$$|a_n - \phi| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |a_1 - \phi| \text{ puis que :}$$

$$|a_n - \phi| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n \text{ (pour } n \geq 1 \text{)}.$$

4) Prouver que (a_n) est convergente et déterminer sa limite.

5) Déterminer un entier n_1 tel que, si $n \geq n_1$, alors :

$$|a_n - \phi| \leq 10^{-6}.$$

C) La suite (b_n)

On pose $b_0 = 2$ et, pour tout $n \geq 0$, $b_{n+1} = \sqrt{b_n + 1}$.

1) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $\phi \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 2$.

2) En déduire que la suite (b_n) est convergente.

3) À l'aide de la question A) 2) et de l'expression conjuguée, montrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq b_{n+1} - \phi \leq \frac{1}{3}(b_n - \phi).$$

4) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq b_n - \phi \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Quelle est la limite de (b_n) ?

5) Déterminer un entier n_2 tel que, si $n \geq n_2$, alors :

$$|b_n - \phi| \leq 10^{-6}.$$

D) La suite (c_n)

On pose $c_0 = 2$ et, pour tout $n \geq 0$:

$$c_{n+1} = \frac{c_n^2 + 1}{2c_n - 1}.$$

1) Calculer c_1 et c_2 .

2) a) On pose, pour tout $x > \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x - 1}$.

Vérifier que $f(\phi) = \phi$ et $f'(\phi) = 0$, puis montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[\phi, +\infty[$.

b) En déduire que, pour tout $n \geq 0$:

$$\phi \leq c_{n+1} \leq c_n \leq 2.$$

(Raisonnement par récurrence.)

c) Prouver alors que (c_n) est convergente.

3) Montrer que, pour tout $n \geq 0$:

$$c_{n+1} - \phi \leq \frac{1}{2}(c_n - \phi)^2.$$

4) En déduire que, pour tout $n \geq 0$:

$$0 \leq c_n - \phi \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+\dots+2^n},$$

à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Quelle est la limite de (c_n) ?

5) Le résultat obtenu sur tableur (voir Avec un logiciel, page 26) montre que $u_8 \approx \phi$ à 10^{-14} près.

Montrer qu'en fait, d'après le résultat de la question D) 4), on a $c_8 \approx \phi$ à 10^{-153} près !!!

Hit-parade

Après π et e (que nous introduirons au chapitre 3), le nombre d'or ϕ recueille une cote de popularité dans bien des domaines :

- en Mathématiques, on le croise dans des endroits aussi divers que le pentagone régulier, le dodécaèdre et l'icosaèdre, les suites, le triangle de Pascal (voir chapitre 9) et jusqu'à la théorie des fichiers ! ;
- dans les Arts, on a tenté, au début du XX^e siècle, de l'associer à la beauté et à l'harmonie, quitte à le voir partout, depuis la façade du Parthénon, jusqu'aux tableaux de Raphaël, Léonard de Vinci, ... et à l'architecture de Le Corbusier ;
- dans la nature, il est certain qu'il joue un rôle dans la croissance de certains végétaux, dans l'agencement des graines du tournesol (voir page 7)...

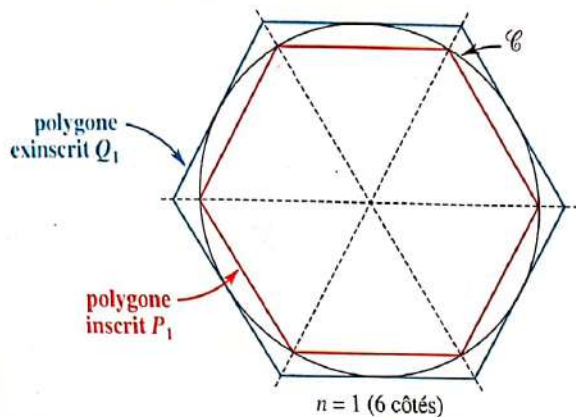


Poussée des plantes nocturnes, Paul Klee - 1923.

89 La méthode d'Archimède

Dans un texte intitulé « De la mesure du cercle », Archimède imagine la première méthode jamais proposée permettant, en théorie, le calcul de π avec une précision aussi grande qu'on le souhaite. Ce problème suit les idées d'Archimède avec des méthodes modernes.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon 1 ; on construit, pour tout $n \geq 1$, deux polygones réguliers P_n et Q_n , ayant 3×2^n côtés, P_n étant inscrit dans $\mathcal{C}$ et Q_n exinscrit à $\mathcal{C}$ (voir la figure ci-dessous).



Nous admettons que le périmètre du cercle (égal à 2π) est encadré par ceux des deux polygones. Dans la suite, on note p_n et q_n les demi-périmètres respectifs de P_n et Q_n .

Ainsi, $p_n < \pi < q_n$.

1) Le cas $n = 1$

Montrer que $p_1 = 3$ et $q_1 = 2\sqrt{3}$.

2) Expression de p_n et q_n

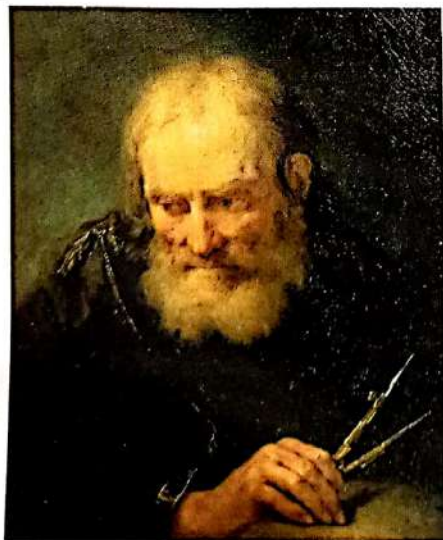
a) Évaluer, en fonction de n , l'angle au centre qui intercepte l'un des côtés de P_n ou de Q_n .

b) En déduire les relations :

$$p_n = 3 \times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \quad \text{et} \quad q_n = 3 \times 2^n \tan\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$

En pratique, ces expressions ne permettent pas un calcul numérique de p_n et q_n .

Dans la suite, nous nous orientons vers un calcul de proche en proche.



Archimède
de Syracuse
(287-212
av. J.-C.)

3) Relations de récurrence

a) On pose $\alpha = \frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}$.

Exprimer p_n et q_n en fonction de n et α .

b) Exprimer $\sin(2\alpha)$ et $1 + \cos(2\alpha)$ en fonction de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$.

c) En déduire que, pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n} \right) \quad \text{et} \quad p_{n+1} = \sqrt{p_n q_{n+1}}.$$

d) Calculer q_2 et p_2 à l'aide des relations précédentes.

4) Étude des suites (p_n) et (q_n)

a) Soit a et b deux réels vérifiant $0 \leq a < b$.

Démontrer les relations : $a < \sqrt{ab} < b$ (i)

et : $a < \frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2} < b$ (ii).

b) Montrer par récurrence que $p_n < q_n$.

c) En déduire que la suite (p_n) est croissante et que (q_n) est décroissante.

d) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$q_{n+1} - p_{n+1} \leq \frac{1}{2}(q_n - p_n).$$

(On pourra utiliser (i) et (ii) à bon escient.)

En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $q_n - p_n \leq \frac{1}{2^n}$, puis que les suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes.

e) Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n$?

5) À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableau (voir exercice 83) calculer les valeurs de p_n et q_n jusqu'à obtenir un encadrement de π d'amplitude 10^{-10} .

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΥ ΚΑΘΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ.



Frontispice du livre d'Archimède.



Fonctions : limites, continuité, dérivabilité

OBJECTIFS

- Reprendre et compléter les notions de limite et de dérivation.
- Approfondir les techniques de calcul (fonction composée).
- Introduire la notion de continuité.
- Appliquer les résultats dégagés à des problèmes d'Analyse : études de fonctions, problèmes d'optimisation, obtention d'inégalités, résolution approchée d'équations...

*« De nouvelles routes bien tracées, pour
aller toujours plus loin, nulle part. »*

Émile Ajar

Avant-première

1. OBJECTIFS

Les activités qui suivent ont pour but :

- de renouer avec les techniques élémentaires permettant de calculer des limites (voir séquence 1) ;
- de relier certains calculs à l'allure des branches infinies d'une courbe représentative (voir séquence 2) ;
- d'introduire la notion de continuité (voir partie 3 et séquence 3).

2. LIMITES

Séquence 1

Calculs de limites

❶ Étudier la limite éventuelle de f en $+\infty$.

a) $f(x) = x^2 + 8x - 3$;

b) $f(x) = 3 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$;

c) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} + 7$.

❷ Étudier la limite éventuelle de f en 0.

a) $f(x) = (2x - 3)(5x + 1)$; b) $f(x) = \frac{5}{x^2}$;

c) $f(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$; d) $f(x) = 3 - \frac{\sin x}{x}$.

❸ Étudier les limites éventuelles de f en 0, en distinguant deux cas ($x > 0$ et $x < 0$).

a) $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$; b) $f(x) = -\frac{5}{x}$.

❹ On pose, pour $x \neq -\frac{5}{2}$, $f(x) = \frac{x-3}{2x+5}$.

a) Vérifier que, pour $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{1 - \frac{3}{x}}{2 + \frac{5}{x}}.$$

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Séquence 2

Un exemple

❶ On pose, pour $x \neq 1$, $f(x) = \frac{5}{(x-1)^2}$.

a) Étudier les limites éventuelles de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en 1.

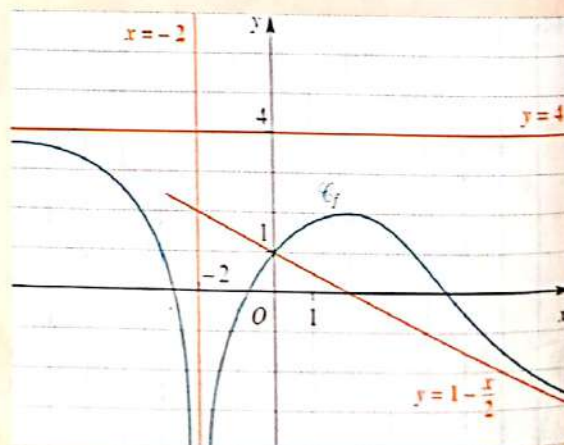
b) En déduire que la courbe représentative de f admet deux asymptotes, dont on donnera une équation.

❷ La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-contre est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Peut-on conjecturer raisonnablement :

a) la limite de $f(x)$ en $+\infty$? en $-\infty$? en -2 ?

b) la limite de $f(x) - \left(1 - \frac{x}{2}\right)$ en $+\infty$?



3. NOTION DE CONTINUITÉ

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a et b des points de I ($a < b$).

Nous entendons ici amener à comprendre ce qui sera l'une des clés de ce chapitre, et que l'on peut énoncer ainsi :

« Si f admet une limite (égale à $f(x)$) en chaque point x de I , alors, du point $A(a, f(a))$ au point $B(b, f(b))$, la courbe C_f se trace d'un trait continu » (Fig. 1).

D'un point de vue plus formel, la fin de la phrase s'énonce ainsi :

« Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$. » (1)

La séquence qui suit propose une démonstration de ce résultat, qui sera énoncé dans le cours (théorème 8). Nous utiliserons la propriété suivante, admise (voir Cours, théorème 7) :

« Si une suite (u_n) a pour limite c et si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell$ alors la suite $(f(u_n))$ a pour limite ℓ . »

Cette séquence est difficile et théorique : elle peut être sautée en première lecture.

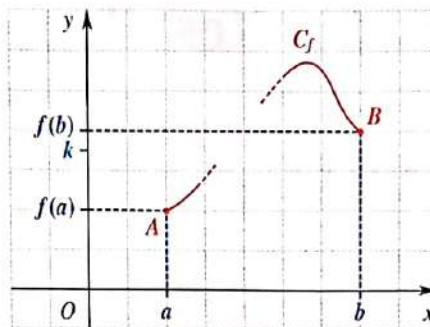


Fig. 1

Séquence 3 Propriété des « valeurs intermédiaires »

Soit f une fonction qui admet une limite (égale à $f(x)$) en tout point x d'un intervalle I ; a et b sont des points de I ($a < b$).

On peut supposer que $f(a) \leq f(b)$.

Soit k un réel tel que $f(a) \leq k \leq f(b)$.

1) On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$, puis :

- si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq k$, on pose :

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad b_1 = b;$$

- si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > k$, on pose $a_1 = a$ et $b_1 = \frac{a+b}{2}$.

Montrer que :

$$a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0 \quad \text{et} \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

2) On suppose avoir construit, de même, les nombres $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ vérifiant :

$$a_0 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_0$$

et :
$$b_{n-1} - a_{n-1} = \frac{b-a}{2^{n-1}}.$$

On pose alors :

$$\text{- si } f\left(\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}\right) \leq k :$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \quad \text{et} \quad b_n = b_{n-1};$$

$$\text{- si } f\left(\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}\right) > k :$$

$$a_n = a_{n-1} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}.$$

Montrer que : $a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1}$;

$$f(a_n) \leq k \leq f(b_n) \quad \text{et} \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

3) Prouver que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Soit c leur limite commune.

Montrer alors que les suites $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ ont pour limite $f(c)$.

4) Conclure alors, à l'aide du théorème « des gendarmes » vu en Première (voir théorème 4), que la propriété (1) est vérifiée.

Les fonctions satisfaisant à la propriété admise seront appelées « continues », ce qui est légitime compte tenu de la « continuité » graphique de leur courbe.

1. Limites d'une fonction

1.1 LIMITE EN $+\infty$ et EN $-\infty$

Nous considérons des fonctions définies sur un intervalle de la forme $[M, +\infty[$, et nous adoptons une définition analogue à celle énoncée pour les suites.

DÉFINITION 1

Soit ℓ un réel ; nous dirons que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ quand tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

Nous noterons cela $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Nous dirons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, quand tout intervalle du type $[A, +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

Nous noterons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On définit de manière analogue la notation : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ (ℓ réel ou $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$).

Interprétation graphique : asymptote « horizontale »

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, la distance mM tend

vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (Fig. 2).

On dit alors que la droite Δ , d'équation $y = \ell$, est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Il en est de même lorsque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$.

Le théorème 1 nous livre les limites en $+\infty$ pour une batterie de fonctions usuelles. Nous les énonçons ci-dessous (démonstration : voir l'exercice 1, page 66).

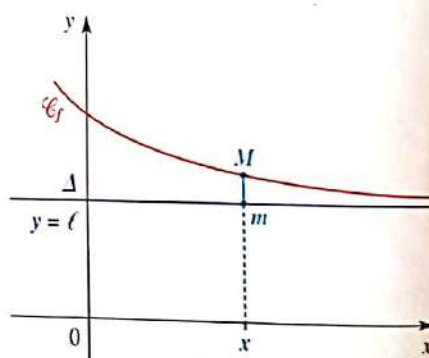


Fig. 2

THÉORÈME 1

Chacune des fonctions suivantes a pour limite $+\infty$, quand x tend vers $+\infty$:

$$x \mapsto \sqrt{x} ; \quad x \mapsto x ; \quad x \mapsto x^2 ; \quad x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Chacune des fonctions suivantes a pour limite 0, quand x tend vers $+\infty$:

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} ; \quad x \mapsto \frac{1}{x} ; \quad x \mapsto \frac{1}{x^2} ; \quad x \mapsto \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Remarque : une fonction n'admet pas nécessairement de limite en $+\infty$; c'est le cas, par exemple, de la fonction **sinus**, dont les valeurs oscillent entre -1 et 1 sans se rapprocher d'aucune valeur particulière.

1.2 LIMITE EN a (a RÉEL)

Nous considérons ici des fonctions définies sur un intervalle contenant a ou sur un intervalle de borne a du type $] \dots, a[$ ou $]a, \dots[$.

Conformément au programme, nous ne donnons pas de définition rigoureuse du symbole

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ (ℓ fini ou infini) (le lecteur sourcilieux de le faire adaptera la définition 1 en

remplaçant « pour x assez grand » par « pour x assez voisin de a »). Nous conservons le point de vue intuitif adopté en classe de Première, et nous nous contenterons de rappeler quelques résultats pratiques permettant le calcul effectif, rassemblés dans le théorème qui suit.

THÉORÈME 2 (admis)

1) Fonction « usuelle » définie en a

Lorsque f est une fonction polynôme ou l'une des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$, ou encore la somme, le produit, le quotient ou la valeur absolue de telles fonctions :

$$\text{si } f \text{ est définie en } a, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

2) Fonction non définie en a

Si, pour $x \neq a$, $f(x) = g(x)$, où g est une fonction usuelle (au sens du 1)) définie en a , alors f admet une limite en a , et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(a)$.

3) Un résultat à connaître

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



EXEMPLE 1

Étudier la limite éventuelle en $a = 3$ de $f: x \mapsto \frac{x^2 + 7x - 30}{x - 3}$.

Le trinôme se factorise :

$$x^2 + 7x - 30 = (x - 3)(x + 10),$$

donc $f(x)$ « se simplifie » :

si $x \neq 3$, $f(x) = g(x)$ avec $g(x) = x + 10$.

Nous concluons :

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = g(3) = 13.$$

Voir exercice 3

Asymptote parallèle à (Oy)

Lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), on dit que la droite $\Delta: x = a$ est asymptote à C_f

(cette définition se généralise aux limites à gauche ou à droite, voir page 49).

Illustrons quelques situations :

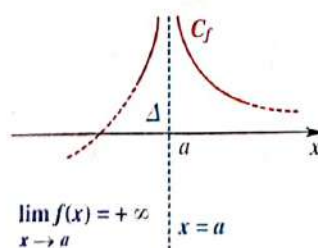


Fig. 3

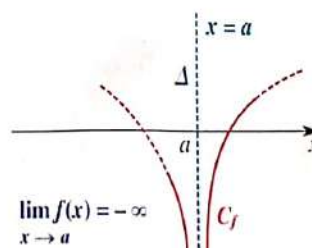


Fig. 4

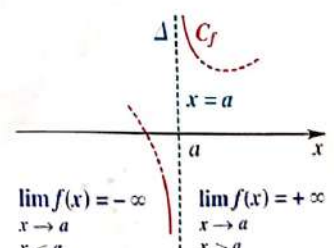


Fig. 5

1.3 OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Nous rappelons ci-dessous les résultats algébriques qui nous renseignent, dans certains cas, sur la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient.

Dans chaque cas, il s'agit de limites au même « point a » (a réel ou $a \neq +\infty$ ou $-\infty$).

THÉORÈME 3

1) Limite d'une somme

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie) en a , la fonction $f + g$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau ci-contre.

$\lim f$ \ $\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

2) Limite d'un produit

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie) en a , la fonction fg admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau ci-contre.

$\lim f$ \ $\lim g$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \neq 0$	$\ell \ell'$	$\pm \infty$	$\pm \infty$
$+\infty$	$\pm \infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm \infty$	$-\infty$	$+\infty$

Remarque : si $\lim f = 0$ et $\lim g = \pm \infty$, on ne peut conclure (?).

3) Limite d'un quotient

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie) en a , la fonction $\frac{f}{g}$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau ci-contre.

$\lim f$ \ $\lim g$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	0
$+\infty$	$\pm \infty$	?	?
$-\infty$	$\pm \infty$	?	?

Remarque : si $\ell' = 0$, on peut conclure lorsque g garde un signe constant « au voisinage de a » (voir exemple 2).



EXEMPLE 2

Déterminer la limite au point 3 de $f : x \mapsto \frac{1-x}{(x-3)^2}$.

Nous avons, sans difficulté, $\lim_{x \rightarrow 3} (1-x) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2 = 0$.

Or $(x-3)^2 \geq 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$.

Par suite : $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$.

Voir exercices 4 à 7

Les situations marquées ? sont appelées formes indéterminées. Nous en étudierons quelques exemples (voir Au cœur des problèmes, partie 1).

1.4 THÉORÈMES DE COMPARAISON

Les résultats ci-dessous permettent, dans certains cas, de déterminer la limite lorsque x tend vers a (a fini ou infini) d'une fonction f , par comparaison à d'autres fonctions $u, v, \dots$ dont le comportement est connu.

THÉORÈME 4

1) Théorème des « gendarmes »

Si, pour x « assez voisin de a », on a l'encadrement $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, et si u et v ont la même limite ℓ en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

2) Cas d'une limite infinie

Si, pour x « assez voisin de a », on a l'inégalité $f(x) \geq u(x)$, et si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

(Énoncé analogue avec $f(x) \leq v(x)$ et $v(x)$ tend vers $-\infty$ en a .)

Nous admettons ces résultats.



EXEMPLE 3

Étudier le comportement en $+\infty$ de $f: x \mapsto x - 2\sin x$.

Comme $\sin x \leq 1$, nous obtenons facilement $f(x) \geq x - 2$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty$, nous pouvons conclure : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Voir exercices 9 à 11

1.5 LIMITE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

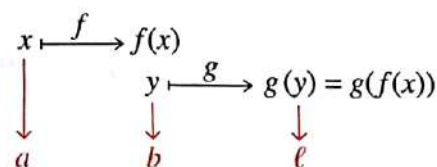
THÉORÈME 5 (admis)

a, b, ℓ sont chacun un réel ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \ell$.

Le schéma ci-contre facilite la compréhension de ce théorème.

Il est commode de l'utiliser aussi dans son application.



EXEMPLE 4

Étudier la limite éventuelle en $+\infty$ de $u: x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Décomposons $u(x)$ selon le schéma $x \mapsto x^2 + x + 1$, suivi de $y \mapsto \sqrt{y}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 1) = +\infty$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty.$$

Voir exercices 12 à 15

1.6 FONCTIONS ET SUITES

De quoi s'agit-il ?

Nous allons dégager, dans ce paragraphe, deux résultats permettant de déterminer la **limite d'une suite** à partir de certains résultats sur le comportement asymptotique d'une fonction, sous certaines conditions.

Nous admettons le résultat suivant qui concerne les suites (u_n) telles que :

$$u_n = f(n) \text{ (f fonction).}$$

THÉORÈME 6
(admis)

Soit (u_n) une suite de terme général $u_n = f(n)$ (f fonction).

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (fini ou infini), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

→ EXEMPLE 5

Étudier le comportement asymptotique de la suite $u : n \mapsto \sqrt{n^2 + n + 1}$.

Posons $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Nous avons établi (voir exemple 4) que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Nous pouvons alors conclure $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Voir exercices 16 à 21

Remarque : la réciproque du théorème 6 est fautive. Il se peut qu'une suite de terme général $u_n = f(n)$ ait une limite sans que la fonction en ait une en $+\infty$. C'est le cas, par exemple, avec $u_n = \sin(n\pi)$; tous les termes de la suite sont nuls donc $\lim u_n = 0$, mais la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Le résultat suivant (encore admis) concerne les suites (v_n) telles que :

$$v_n = f(u_n) \text{ (f fonction).}$$

THÉORÈME 7
(admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite de points de I .

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$ (a, ℓ finis ou infinis).

→ EXEMPLE 6

Étudier le comportement asymptotique de (v_n) avec $v_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Nous écrivons $v_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)}$; ainsi, $v_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, nous concluons : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

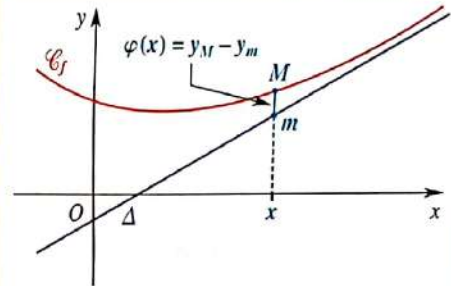
Voir exercices 22 à 26

1.7 ASYMPTOTE OBLIQUE

Nous rappelons ci-dessous la définition d'une **asymptote oblique**, dégagée en classe de Première S.

DÉFINITION 2

Si $f(x) = ax + b + \varphi(x)$, avec :
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$, on dit que la droite Δ
 d'équation $y = ax + b$ est asymptote à
 $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
 La définition est analogue en $-\infty$.



Remarques :

- Si m et M sont les points respectifs de Δ et $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x , on a $\varphi(x) = y_M - y_m$, ce qui permet d'interpréter la condition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ par « $\mathcal{C}_f$ se rapproche de Δ lorsque x tend vers $+\infty$ ».
- Le **signe** de $\varphi(x) = y_M - y_m$ détermine la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ : **au-dessus** lorsque $\varphi(x) > 0$, **au-dessous** lorsque $\varphi(x) < 0$.

1.8 LIMITE À GAUCHE, LIMITE À DROITE

Conformément au programme, nous nous contenterons d'illustrer les notions de limite à gauche ou à droite sur certains exemples, sans donner de définition formelle.

Considérons la fonction f , définie pour $x \neq 2$ par $f(x) = \frac{3}{x-2}$ (Fig. 6).

Au voisinage du point 2, f prend des valeurs positives très grandes et des valeurs négatives très petites, donc f n'a pas de limite au point 2.

Cependant, la fonction $f_1 : \begin{cases}]-\infty, 2[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3}{x-2} \end{cases}$,

qui est la **restriction à gauche** de f , tend vers $-\infty$ au point 2.

On écrit : $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$.

De même : $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$.

Nous dirons que f admet au point 2 comme **limite à gauche** $-\infty$ et comme **limite à droite** $+\infty$.

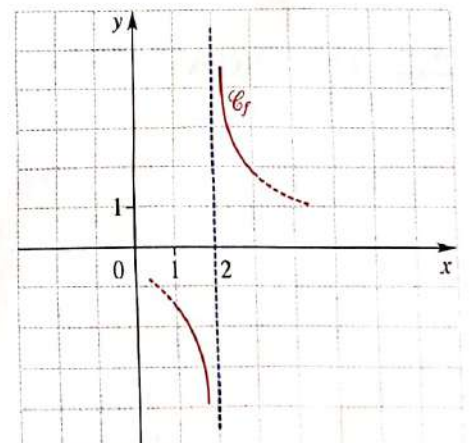


Fig. 6

Remarques :

- Les résultats sur les opérations et la comparaison s'appliquent aux limites à gauche et à droite.
- Si f admet en a (réel) une limite à gauche ℓ , une limite à droite ℓ' et si $\ell = \ell'$, alors f admet pour limite ℓ en a .

2. Notion de continuité

2.1 FONCTIONS CONTINUES

DÉFINITION 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a .

- On dit que f est **continue en a** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est **continue sur I** si f est continue en tout point a de I .

Géométriquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I correspond à l'idée intuitive selon laquelle, sur I , nous pouvons tracer la courbe représentative de f d'un **trait continu de crayon**.

Les résultats sur les limites nous assurent que les fonctions **polynômes, sinus, cosinus, racine carrée, valeur absolue**, ainsi que les **sommes, produits, quotients et composées** de telles fonctions sont des fonctions continues sur tout intervalle où elles sont définies.

Si la continuité est courante, elle n'est pas générale ; la fonction **partie entière E** ($E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x), par exemple, est discontinue en chaque point entier. En ces points, la courbe représentative (Fig. 7) présente des « sauts ».

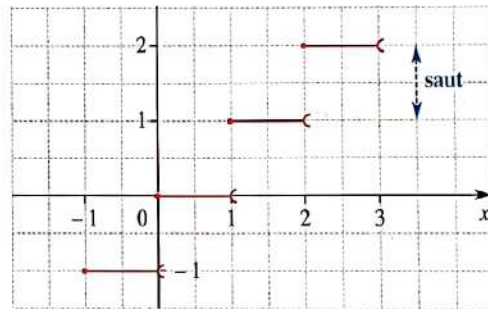


Fig. 7 Fonction « partie entière » E

2.2 THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

THÉORÈME 8

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a et b des points de I ($a < b$).

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

... Démonstration

Elle a été proposée en *Avant-première* (voir *séquence 3*, page 43). Mettons en relief les deux idées sur lesquelles elle repose :

- la **construction de deux suites** définies à partir de $a = a_0$ et $b = b_0$, où chaque terme est construit en partageant en deux, par le milieu, l'intervalle précédent ; cette construction, qui fournit un **algorithme de calcul** effectif de chaque terme, est nommée « **construction par dichotomie** » ;
- le **théorème des suites adjacentes** (voir *chapitre 1*, page 16).

2.3 FONCTION CONTINUE STRICTEMENT MONOTONE

THÉORÈME 9

Soit f une fonction **continue strictement monotone** sur $[a, b]$.

Alors, pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une **solution unique** dans $[a, b]$.

... Démonstration

- L'existence d'une solution découle immédiatement du théorème 8.
- L'unicité de la solution provient de ce que, pour une fonction *strictement* (et c'est l'hypothèse essentielle) monotone, deux réels distincts ont des images distinctes, donc on ne peut pas avoir $f(c) = k = f(c')$ avec $c \neq c'$...

Commentaires

• En d'autres termes, avec les hypothèses du théorème, f réalise une **bijection** de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$. Ce théorème est parfois nommé « **théorème de la bijection** ».

• Nous admettrons que ce théorème se prolonge au cas où f est définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ (a et b finis ou infinis) ou semi-ouvert, dans le cas où les limites de f aux bornes de l'intervalle sont connues.

Ainsi, par exemple, si f est continue, strictement croissante sur $[3, +\infty[$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$,

alors pour tout k tel que $f(3) \leq k < \ell$, l'équation $f(x) = k$ a une unique solution dans $[3, +\infty[$.

2.4 RÉOLUTION APPROCHÉE D'UNE ÉQUATION

Les théorèmes 8 et 9 s'utilisent, sous certaines conditions, pour la résolution approchée d'une équation du type $f(x) = k$. Ils permettent :

- de justifier l'existence de solutions ;
- de localiser ces solutions (voir *exemple 7*) ;
- d'en trouver des valeurs approchées à l'aide d'algorithmes.



EXEMPLE 7

Étudier l'équation $x^3 + x = 3$.

La fonction $f: x \mapsto x^3 + x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante (c'est la somme de deux fonctions strictement croissantes).

Les variations de f sont récapitulées dans le tableau ci-contre.

Comme $f(1) = 2$ et $f(2) = 10$, il en résulte que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α vérifiant $1 < \alpha < 2$. Nous avons ainsi localisé α .

x	$-\infty$	1	α	2	$+\infty$
$f(x)$		2	3	10	

Voir exercices 38 et 39

3. Dérivation

3.1 GÉNÉRALITÉS (RAPPELS ET COMPLÉMENTS)

DÉFINITION 4

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et a un point de I .

On dit que f est dérivable en a lorsque le taux d'accroissement de f en a admet une limite l en a , c'est-à-dire lorsque :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \text{ ou, écrit autrement, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l.$$

Dans ce cas, l est appelé le **nombre dérivé de f en a** , et on le note $f'(a)$.

Remarques :

• Lorsque f est dérivable en a , nous pouvons encore écrire :

(1) $f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x - a)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x - a) = 0$, ou encore :

(2) $f(a + h) - f(a) = hf'(a) + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ (en posant $h = x - a$).

• Si f est dérivable en a , il est clair, d'après (1), que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, ce que nous énonçons

ainsi : « **toute fonction dérivable en a est continue en a** ». Toutefois, la réciproque est fausse.

L'écriture différentielle

Les physiciens – et ils ont de bonnes raisons – expriment volontiers une variation à l'aide du symbole Δ : ils notent ainsi $\Delta x = x - a$ et $\Delta y = f(x) - f(a)$.

Avec ces notations, l'égalité (1) s'écrit $\Delta y = f'(a) \cdot \Delta x + \Delta x \varepsilon(\Delta x)$, où ε tend vers 0 avec Δx . Nous exprimerons symboliquement cette égalité par :

$$dy = f'(a)dx \text{ ou } f'(a) = \frac{dy}{dx}(a) ; \text{ c'est la notation différentielle.}$$

3.2 INTERPRÉTATIONS

1 Interprétation graphique : tangente

Lorsque f est dérivable en a , la courbe représentative de f admet au point $A(a, f(a))$ une **tangente de coefficient directeur $f'(a)$** .

Cette tangente a pour équation (on la déduit facilement de (1)) :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

2 Interprétation numérique : approximation affine

Lorsque f est dérivable en a , la fonction f admet une bonne approximation affine, lorsque x est voisin de a :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

3 Interprétation cinématique : vitesse

Si $t \mapsto f(t)$ est la loi horaire d'un mouvement, $f'(t_0)$ est alors la **vitesse instantanée à l'instant t_0** .

3.3 VARIATIONS D'UNE FONCTION ET EXTREMUMS

Lorsqu'une fonction f est dérivable en tout point d'un intervalle I , nous pouvons définir la **fonction dérivée** $f' : x \mapsto f'(x)$ sur I .

Avec la notation différentielle, f' se note encore $\frac{df}{dx}$.

Nous rappelons les résultats suivants, admis en classe de Première.

THÉORÈME 10

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :

- si la dérivée f' est **nulle** sur I , alors f est **constante** sur I ;
- si f' est **strictement positive** sur I , sauf peut-être en des points isolés où elle s'annule, alors f est **strictement croissante** sur I ;
- si f' est **strictement négative** sur I , sauf peut-être en des points isolés où elle s'annule, alors f est **strictement décroissante** sur I .

Commentaire

Ainsi, l'étude des variations d'une fonction dérivable se ramène à la recherche des **intervalles** sur lesquels la dérivée f' garde un **signe constant**.

→ EXEMPLE 8

Étudier les variations de $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 1$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4).$$

Donc :

- sur $] -\infty, 0[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante ;
- on procède de même sur $]0, 4[$, puis sur $]4, +\infty[$.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Voir exercices 62 à 67

Nous rappelons encore le résultat suivant, précisant les liens entre dérivée et extremums locaux. Le résultat essentiel (second point du *corollaire*) découle du *théorème 10*.

COROLLAIRE

Soit f dérivable sur un intervalle **ouvert** I , et x_0 un réel de I .

1) Si f admet un **extremum local** en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$;

2) Si en x_0 la dérivée f' **s'annule en changeant de signe**, alors f admet un **extremum local** en x_0 .

Remarques pratiques :

- Les **extremums locaux** d'une fonction sont à chercher **parmi les zéros de la dérivée**, mais si $f'(x_0) = 0$, x_0 n'est pas forcément un **extremum local** (contre-exemple : $f(x) = x^3$ et $x_0 = 0$).

• Pratiquement, les **extremums locaux** sont aisément repérables sur le **tableau de variations** ; ils correspondent aux **changements de sens des flèches** :

Ainsi, la fonction de l'*exemple 8* admet un **maximum local** en 0 et un **minimum local** en 4.

3.4 DÉRIVÉE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

THÉORÈME 11

Soit u une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel x_0 , et v une fonction définie sur un intervalle J contenant $y_0 = u(x_0)$.
Si u est dérivable en x_0 et si v est dérivable en y_0 , alors la fonction $f = v \circ u$ est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = u'(x_0) \times v'(y_0)$.

... Démonstration

Nous pouvons écrire le taux d'accroissement de $v \circ u$ en x_0 sous forme d'un produit :

$$\frac{v \circ u(x) - v \circ u(x_0)}{x - x_0} = \frac{v(u(x)) - v(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$

Le premier quotient a pour limite $v'(y_0)$ en x_0 , d'après le théorème de composition des limites $\left(x \mapsto u(x) \text{ suivi de } y \mapsto \frac{v(y) - v(y_0)}{y - y_0} \right)$.

Le second quotient a pour limite $u'(x_0)$ en x_0 . D'où le résultat.



EXEMPLE 9

Montrer que $f: x \mapsto \sin(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

Le schéma de composition $\begin{cases} x \xrightarrow{u} u(x) = x^2 \\ y \xrightarrow{v} \sin y \end{cases}$ montre que :

$$f'(x) = u'(x) \times v'(y) = 2x \times \cos y ; \text{ donc } f'(x) = 2x \cos(x^2).$$

Voir exercices 71 à 79

Remarque : ce résultat prolonge celui établi en Première sur la dérivée de $x \mapsto u(ax + b)$.

COROLLAIRE

Soit u une fonction dérivable en x_0 . Alors :

- la fonction $f: x \mapsto [u(x)]^n$, ($n \in \mathbb{Z}$), est dérivable en x_0 (sous la condition $u(x_0) \neq 0$ pour $n < 0$), et :

$$f'(x_0) = nu'(x_0)[u(x_0)]^{n-1} ;$$

- si $u(x_0) > 0$, la fonction $g: x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable en x_0 , et :

$$g'(x_0) = \frac{u'(x_0)}{2\sqrt{u(x_0)}}.$$

... Démonstration

Cela découle du théorème 11 en posant $v(y) = y^n$ (premier résultat) ou $v(y) = \sqrt{y}$ (second résultat).



EXEMPLE 10

Étudier la dérivabilité de $f: x \mapsto \cos^3 x$ et $g: x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$.

D'après le corollaire, f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = -3\sin x \cos^2 x ; g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

Voir exercices 72, 76 et 77

3.5 TABLEAUX RÉCAPITULATIFS

Dérivées
des fonctions
usuelles

fonction	dérivée	commentaire	
$x \mapsto k$	$x \mapsto 0$	k constante	sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$n \in \mathbb{Z}$	sur $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$, $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$		sur $]0, +\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$		sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$		
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$		sur $\mathcal{D}_{\tan}$

Opérations
et composition

fonction	dérivée	commentaire	
$u + v$	$u' + v'$		
au	au'	a constante	
uv	$u'v + uv'$		
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$		si $v(x) \neq 0$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$		
$x \mapsto v \circ u(x)$	$x \mapsto u'(x) \times v'(u(x))$		
$x \mapsto [u(x)]^n$	$x \mapsto nu'(x)[u(x)]^{n-1}$	$n \in \mathbb{Z}$	si $u(x) \neq 0$ lorsque $n < 0$
$x \mapsto \sqrt{u(x)}$	$x \mapsto \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$		si $u(x) > 0$

À l'artiste le dernier mot

« Un tableau ne vit que par celui qui le regarde. »

Pablo Picasso

1. Étude de formes indéterminées

OBJECTIF

Se familiariser avec deux techniques de base permettant d'étudier la limite d'une forme indéterminée.

PROBLÈME

Étudier la limite en $+\infty$ de $f: x \mapsto x - 6\sqrt{x}$ et la limite en 0 de :

$$g: x \mapsto \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}.$$

❶ Quelle idée ? Quelle méthode ?

• $f(x)$ se présente sous la forme « $(+\infty) - (+\infty)$ », d'où l'idée de factoriser le « terme prépondérant » pour se ramener à un produit.

• $g(x)$ se présente sous la forme « $\frac{0}{0}$ » et comporte une racine carrée.

Multiplier par l'expression conjuguée va permettre d'éliminer le symbole « $\sqrt{}$ » au numérateur.

Lorsque $x \mapsto +\infty$, « x » est prépondérant par rapport à « $\sqrt{x}$ ».

❷ Solution rédigée

• $f(x) = x\left(1 - \frac{6}{\sqrt{x}}\right)$ si $x \neq 0$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{6}{\sqrt{x}}\right) = 1$, il en résulte $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• $g(x) = \frac{[\sqrt{x+4} - 2][\sqrt{x+4} + 2]}{x[\sqrt{x+4} + 2]} = \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2}$ (si $x \neq 0$).

On en déduit $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{\sqrt{0+4} + 2}$, soit : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{4}$.

MÉTHODE 1

Factoriser le terme prépondérant

L'idéal, avec les formes du type $\frac{\infty}{\infty}$ ou $(+\infty) - (+\infty)$.

MÉTHODE 2

L'expression conjuguée

S'avère efficace pour une somme comportant un radical ($\sqrt{}$).

Dans la foulée

❶ Étudier les limites en $+\infty$ des fonctions :

a) $f: x \mapsto 2x - 5x^3$; b) $g: x \mapsto \frac{3+2x}{x^2-3}$;

c) $h: x \mapsto \frac{x^3 - x + 1}{8x^2 - 1}$; d) $k: x \mapsto \frac{\sqrt{x} + 2x}{1 - 5x}$.

❷ Étudier les limites des fonctions suivantes au point considéré.

a) $f: x \mapsto \sqrt{x} - \sqrt{x+1}$ en $+\infty$;

b) $g: x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x+9} - 3}$ en 0 ;

c) $h: x \mapsto (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$ en $+\infty$.

2. Branches « paraboliques »

OBJECTIF

Lorsque $f(x)$ tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) à l'infini, il est possible que $\mathcal{C}_f$ n'admette pas de droite asymptote.
Nous allons présenter ici un autre comportement asymptotique assez fréquent : la présence d'une « **branche parabolique** ».

PROBLÈME

Étudier $f: x \mapsto x^2 - \frac{1}{x}$ et $g: x \mapsto 2\sqrt{x} - 1$ en $+\infty$.

1 Que calculer ?

L'idée est de calculer et d'interpréter le **coefficient directeur de la droite (OM)**, c'est-à-dire $\frac{f(x)}{x}$ et sa limite en $+\infty$.

Nous saurons interpréter cette limite dans deux cas simples :

- lorsque cette limite est $+\infty$ (ou $-\infty$), $\mathcal{C}_f$ présente l'allure d'une parabole, comme la courbe d'équation $y = x^2$ (ou $y = -x^2$) ;
- lorsque cette limite vaut 0, $\mathcal{C}_f$ présente l'allure de la parabole d'équation $y = \sqrt{x}$ (ou $y = -\sqrt{x}$ si $f(x)$ est négatif).

2 Solution rédigée

• Il est clair que f et g ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

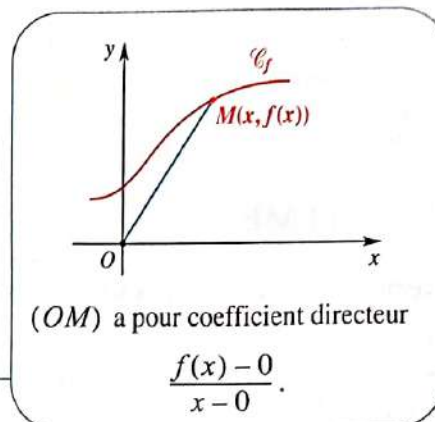
• $\frac{f(x)}{x} = x - \frac{1}{x^2}$, et $\frac{g(x)}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$, donc le premier terme a pour

limite $+\infty$ et le second 0 (en $+\infty$).

Ainsi, en $+\infty$:

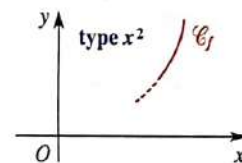
- $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction (Oy)** ;
- $\mathcal{C}_g$ admet une **branche parabolique de direction (Ox)**.

Remarque : tout n'est pas dit ; il existe des comportements asymptotiques plus complexes (voir exercice 4, ci-dessous).



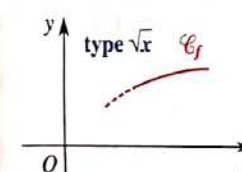
DEUX CAS À REMARQUER

1) $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$: branche parabolique de direction (Oy).



2) $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$ et

$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$: branche parabolique de direction (Ox).



Dans la foulée

3 Pour chaque fonction, étudier la limite éventuelle en $+\infty$ de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$.

Donner l'allure de la branche infinie correspondante.

a) $f: x \mapsto \sqrt{x} - \frac{2}{x}$; b) $g: x \mapsto x - \frac{x^3}{3}$.

4 Un autre comportement

On pose, pour tout x , $f(x) = x + \cos x$.

1) Étudier la limite en $+\infty$ de $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$.

2) Prouver l'encadrement $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$.
En déduire l'allure de $\mathcal{C}_f$ pour les grandes valeurs de x .

3. Problèmes d'optimisation

OBJECTIF

Il s'agit d'appliquer les résultats sur la dérivation à la recherche d'extremums d'une fonction.

PROBLÈME

Rectangle inscrit dans une parabole

Dans l'arche de parabole $\mathcal{P}$, d'équation $y = 1 - x^2$ (avec $y \geq 0$), on inscrit un rectangle ayant pour axe (Oy) , avec M et N sur (Ox) , P et Q sur $\mathcal{P}$ (Fig. 8).

Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale ?

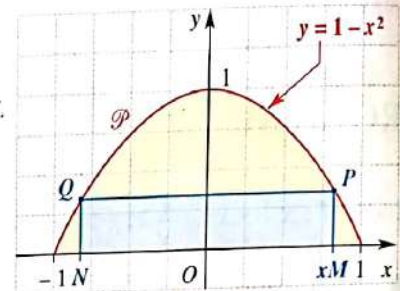


Fig. 8

1 Formalisation du problème

Le choix de M (par exemple) détermine entièrement le rectangle.

Notons x l'abscisse de M ; puisque (Oy) est un axe de symétrie du rectangle, nous pouvons nous limiter à $0 \leq x \leq 1$.

Les dimensions du rectangle sont $MN = 2x$ et $MP = 1 - x^2$, et nous saurons sans peine évaluer son aire.

2 Solution rédigée

• Avec les notations précédentes, l'aire du rectangle est :

$$a(x) = 2x(1 - x^2) = -2x^3 + 2x.$$

Il s'agit de déterminer le maximum (éventuel) de $a(x)$ sur $[0, 1]$.

• La fonction a est dérivable et :

$$a'(x) = -6x^2 + 2 = 2(1 - 3x^2).$$

On en déduit facilement le tableau de variations de a (ci-contre).

Conclusion : l'aire est maximale

lorsque $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Le rectangle correspondant a pour

dimensions $\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $\frac{2}{3}$.

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
a'	+	0	-
a	0	$\frac{4}{3\sqrt{3}}$	0

RECHERCHE D'EXTREMUMS

Ils sont à chercher parmi les zéros de la dérivée... mais un tel zéro n'est pas forcément un extremum. Seul le tableau de variations permet de conclure.

$$\text{Si } x = \frac{1}{\sqrt{3}}, y = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}.$$

Dans la foulée

Les deux exercices suivants sont relatifs à la branche de parabole $\mathcal{P}$ du problème précédent.

5 Distance d'un point à la parabole

Quel est le point de $\mathcal{P}$ situé le plus près de l'origine ?

6 Le plus petit triangle

La tangente à $\mathcal{P}$ en $S(x, y)$ coupe (Ox) en A et (Oy) en B ($x > 0$ et $y > 0$).

Déterminer S pour que l'aire du triangle OAB soit minimale.

4. Comparaison de fonctions

OBJECTIF

Pour obtenir des inégalités entre fonctions, il n'est pas rare que les méthodes algébriques échouent.
Dans ce cas, il s'agit de savoir tirer parti du calcul des dérivées.

PROBLÈME

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction cosinus. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à sa tangente T au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

1 Comment aborder le problème ?

T a pour équation $y - \cos \frac{\pi}{2} = -\sin \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$, soit $y = -x + \frac{\pi}{2}$.

Il s'agit donc de comparer $\cos x$ et $-x + \frac{\pi}{2}$ en étudiant le signe de leur

différence : $\varphi(x) = \cos x + x - \frac{\pi}{2}$.

Nous allons étudier les variations de φ et ses zéros éventuels.

2 Solution

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\varphi'(x) = -\sin x + 1$.

On a $\varphi'(x) > 0$ sauf en des points isolés (où $\sin x = 1$).

Le tableau de variations ci-contre s'en déduit.

Comme $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, il en résulte que :

- sur $\left]-\infty, \frac{\pi}{2}\right[$, $\varphi(x) < 0$, donc $\mathcal{C}$ est au-dessous de T ;

- sur $\left]\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$, $\varphi(x) > 0$, donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de T .

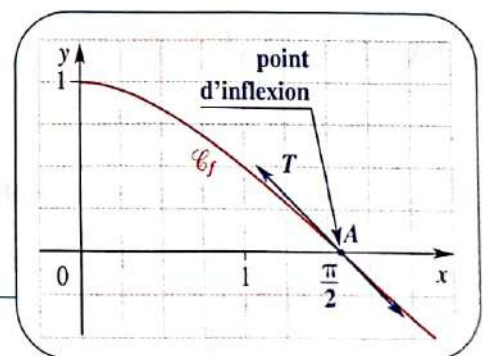
Au point A d'abscisse 0, $\mathcal{C}$ traverse sa tangente T : on dit que A est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}$ (voir figure ci-contre).

x	$-\infty$	$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$
φ'		+	+
φ	$\nearrow$ < 0 0 > 0 $\searrow$		

RAPPORT D'ÉTAPE

Pour comparer deux fonctions f et g

- On considère la fonction différence $\varphi = f - g$.
- On étudie les variations de φ .
- On détermine les réels x tels que : $\varphi(x) = 0$.
- On lit dans le tableau le signe de $\varphi(x)$.



Dans la foulée

7 Montrer que, pour tout $x \geq 0$ et $n \geq 1$:

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

8 Pour tout $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, prouver les inégalités :

a) $\sin x \leq x$; b) $\tan x \geq x$; c) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$.

5. Études de fonctions

OBJECTIF

Il s'agit d'étudier diverses fonctions (rationnelles, irrationnelles, trigonométriques) à l'aide des résultats dégagés dans ce chapitre.

Nous proposons, à titre indicatif, un **plan d'étude** systématique, avec deux réserves préalables :

- selon la fonction étudiée, certains points ne méritent pas d'être abordés ;
- lorsqu'une fonction intervient dans un problème, l'étude complète n'est pas un but en soi ; on s'en tiendra aux seules questions posées.

PLAN D'ÉTUDE D'UNE FONCTION

1) Ensemble de définition

2) Ensemble d'étude, propriétés géométriques de la courbe

Certaines propriétés, telles que *parité* ou *périodicité*, peuvent permettre de réduire l'ensemble sur lequel on étudie la fonction.

3) Limites aux bornes de l'ensemble d'étude

4) Dérivabilité, variations

- On calcule la dérivée de la fonction sur les intervalles où elle existe.
- Son signe fournit le sens de variation.

5) Branches infinies (éventuellement)

6) Représentation graphique avec quelques points et tangentes remarquables

7) Contrôle de certaines propriétés suggérées par la figure, comme la présence d'un élément de symétrie.

PROBLÈME 1

Une fonction rationnelle

Étudier et représenter graphiquement $f : x \mapsto x - 1 + \frac{1}{x-2}$.

① f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et ne présente aucune propriété particulière de parité ou de périodicité.

② f est dérivable sur $] -\infty, 2[$ et sur $] 2, +\infty[$, avec :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - 1}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}.$$

Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $(x-1)(x-3)$.

Les variations de f s'en déduisent ; elles sont consignées dans le tableau ci-contre.

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$		$-\infty$	-1	$+\infty$	3	$+\infty$

3 Branches infinies

Il faut savoir interpréter l'égalité $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-2} = 0$, la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus :

- sur $]-\infty, 2[$, $\frac{1}{x-2} < 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de Δ ;
- sur $]2, +\infty[$, $\frac{1}{x-2} > 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ .

4 Représentation graphique

Il semble (Fig. 9) que $\Omega(2, 1)$ soit centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

5 Centre de symétrie

- Cherchons une équation de $\mathcal{C}_f$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, avec $\Omega(2, 1)$.

Si $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\overrightarrow{\Omega M} = X\vec{i} + Y\vec{j}$, la relation de Chasles :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ fournit les formules de changement de repère :

$$\begin{cases} x = 2 + X \\ y = 1 + Y \end{cases}$$

- Alors $M \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = x - 1 + \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow Y = X + \frac{1}{X}$.

La fonction $X \mapsto X + \frac{1}{X}$ étant impaire, il en résulte que Ω est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

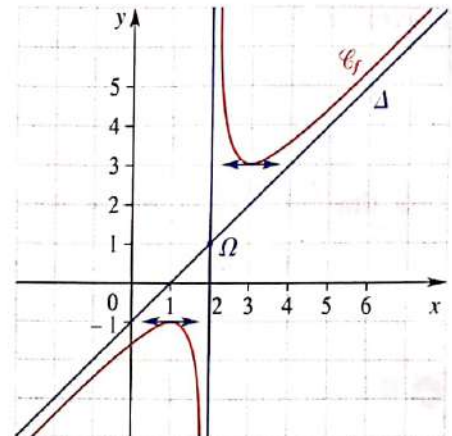


Fig. 9

CHANGEMENT DE REPÈRE

- Partir de la relation de Chasles $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ et traduire l'égalité en coordonnées.

- Dans l'égalité $y = f(x)$, remplacer x et y par leurs expressions en X et Y .

Ici, $Y = X + \frac{1}{X}$ est la nouvelle équation de $\mathcal{C}_f$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

PROBLÈME 2

Une fonction irrationnelle

Étudier et représenter graphiquement $f: x \mapsto \frac{2}{5}\sqrt{25-x^2}$.

- 1 La fonction f est définie sur $[-5, 5]$ et elle est paire. Nous l'étudions donc sur $[0, 5]$.

- 2 f est dérivable sur $[0, 5[$ et, pour tout x de $[0, 5[$:

$$f'(x) = \frac{2}{5} \times (-2x) \times \frac{1}{2\sqrt{25-x^2}} = -\frac{2x}{5\sqrt{25-x^2}}.$$

Puisque $f'(x) \leq 0$ sur $[0, 5[$, nous en déduisons aisément le sens de variation de f (ci-contre).

x	0	5
$f'(x)$	0	-
$f(x)$	2	0

Attention !

On ne peut rien dire sur la dérivabilité de f en 5, car la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ n'est pas dérivable en 0 (valeur obtenue pour $x = 5$).

3 Étude de la dérivabilité en 5

Ici, le théorème de composition est inapplicable ; il faut revenir au taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \frac{\frac{2}{5}\sqrt{25-x^2}}{x-5} = \frac{2}{5} \frac{\sqrt{5-x}\sqrt{5+x}}{-(\sqrt{5-x})^2} = -\frac{2}{5} \frac{\sqrt{5+x}}{\sqrt{5-x}}.$$

On a $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = -\infty$, donc f n'est pas dérivable en 5.

Nous interprétons tout de même le résultat ainsi : $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse 5 une tangente verticale.

Ici, $5 - x > 0$, donc :

$$\begin{aligned} x - 5 &= -(5 - x) \\ &= -\sqrt{5-x} \times \sqrt{5-x} \dots \end{aligned}$$

4 Représentation graphique

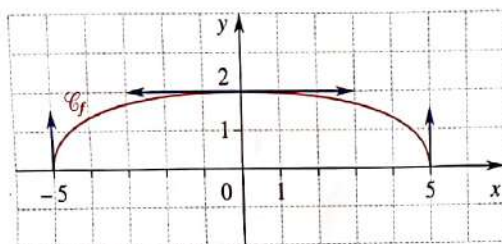


Fig. 10

Nous avons complété le tracé (Fig. 10) par la symétrie d'axe (Oy) :

$\mathcal{C}_f$ est une **demi-ellipse**.

À SAVOIR

Lorsque le taux d'accroissement tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, présence d'une tangente verticale.

INFO

Une ellipse d'axes (Ox) et (Oy) admet une équation du type :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

C'est la réunion des courbes d'équations $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$.

PROBLÈME 3

Une fonction trigonométrique

Étudier et représenter graphiquement la fonction tangente :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

1 $\tan x$ est définie lorsque $\cos x \neq 0$, soit sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2 Parité, périodicité

Il est facile de vérifier que $\tan(-x) = -\tan x$ et $\tan(x + \pi) = \tan x$. Ainsi, la fonction tangente est **impaire** et **périodique de période π** .

Il suffit donc d'étudier cette fonction sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right[$, puis de compléter le tracé

par la **symétrie de centre O** , et enfin par une série de **translation « horizontales »**.

Le programme de construction de $\mathcal{C}_{\tan}$ se schématise ainsi :

$$\text{Étude sur } \left[0, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow s_O \rightarrow t_{k\pi} (k \in \mathbb{Z}).$$

3 La fonction tangente est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$.

Le sens de variation s'en déduit (voir le tableau ci-contre).

De plus, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$, donc la droite $x = \frac{\pi}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}_{\tan}$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan'$	0	+
$\tan$	0	$\rightarrow +\infty$

4 Représentation graphique

• Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (Fig. 11).

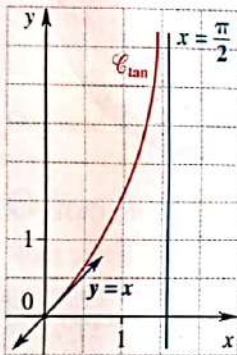


Fig. 11

• Sur $\mathbb{R}$, après avoir prolongé le tracé précédent par la symétrie de centre O et les translations de vecteurs $k\pi\vec{t}$ ($k \in \mathbb{Z}$) (Fig. 12).

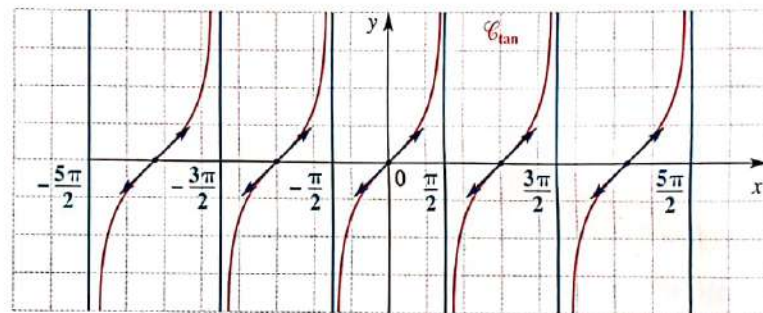


Fig. 12

De plus, pour $x \geq 0$, $\tan x \geq x$ (voir Dans la foulée, exercice 8), donc sur

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\mathcal{C}_{\tan}$ est située au-dessus de sa tangente en $O(0, 0)$.

Dans la foulée

9 On considère la fonction f définie pour $x \neq -3$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x+3}.$$

1) Montrer qu'il existe trois réels a, b, c tels que, pour

$$\text{tout } x \neq -3, f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}.$$

2) Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$.

3) Montrer que $\mathcal{C}$ admet un centre de symétrie.

10 Une fonction f est définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{16} - 2\sqrt{x}.$$

1) Étudier la dérivabilité de f en 0 ; interpréter graphiquement.

2) Étudier la limite en $+\infty$ de $f(x)$, puis de $\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

3) Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(2x) - 2\cos x.$$

1) Montrer que $\mathcal{C}_f$ est invariante par :
– la réflexion d'axe (Oy) ;
– les translations de vecteurs $2k\pi\vec{t}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

2) Étudier les variations de f sur $[0, \pi]$.

Rappel : $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

3) Représenter graphiquement f sur $[0, \pi]$, puis sur $\mathbb{R}$.

Applications

Limite : définitions, opérations

- 1 Démontrer les résultats énoncés dans le théorème 1, page 44, à l'aide de la définition des limites.

Exemple : pour $x \mapsto \sqrt{x}$ en $+\infty$.

Soit A un réel positif donné ; $\sqrt{x}$ appartient à $[A, +\infty[$ pourvu que $\sqrt{x} \geq A$, soit $x \geq A^2$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

- 2 À l'aide de la définition, démontrer que la fonction $x \mapsto \cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

- 3 Déterminer la limite éventuelle de $f(x)$ au point a , après avoir éventuellement simplifié (voir exemple 1, page 45).

a) $f(x) = \frac{3x^2 - 8x^3}{x^2}$, $a = 0$;

b) $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$, $a = -2$;

c) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 3\sqrt{x}}$, $a = 0$; d) $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3}$, $a = 3$.

Dans les exercices 4 à 7, étudier le comportement de f en $+\infty$, à l'aide des opérations sur les limites.

4 a) $f(x) = 3x^3 + \sqrt{x}$; b) $f(x) = -x - \sqrt{x}$;

c) $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$.

5 a) $f(x) = -x(x + 1)$; b) $f(x) = 2x - 1 - \frac{2}{x}$;

c) $f(x) = -5x\sqrt{x}$.

6 a) $f(x) = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}$;

b) $f(x) = (1 - x)(2 - x)(3 - x)$.

7 a) $f(x) = 3x^2 - x + 1$ (mettre x^2 en facteur) ;

b) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^3 + 1}$ (écrire $f(x) = \frac{x^2(\dots)}{x^3(\dots)}$).

8 Deux résultats utiles

1) « Tout polynôme a la même limite en $+\infty$ que son terme de plus haut degré. »

Démontrer ce résultat en posant :

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0).$$

2) Prouver le résultat suivant :

« Toute fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) a la même limite en $+\infty$ que le quotient simplifié des termes de plus haut degré. »

Théorèmes de comparaison

Dans les exercices 9 et 10, étudier la limite de f en $+\infty$.

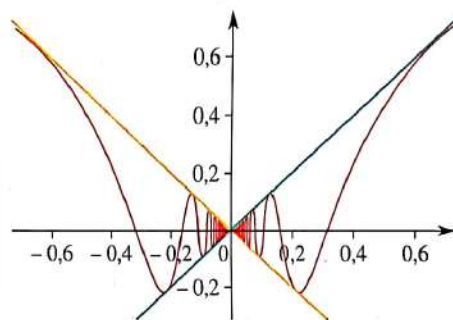
9 a) $f(x) = \cos x - 3x$; b) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

10 a) $f(x) = x^2 - E(x)$; b) $f(x) = \frac{5E(x)}{x}$.

(E est la fonction partie entière : $E(x)$ est l'unique entier p tel que $p \leq x < p + 1$).

- 11 Montrer que la fonction $f: x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, représentée

ci-dessous à l'aide du logiciel Maple, admet une limite en 0.



Limites d'une fonction composée

Dans les exercices 12 à 14, déterminer la limite éventuelle de f au point considéré.

12 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ en $+\infty$.

13 a) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$ en $+\infty$; b) $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ en 0

14 a) $f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}$ en 0 ; b) $f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sin(5x)}$ en 0

15 En théorie de la relativité

Einstein a montré que la longueur L et la masse m d'un objet en mouvement sont des fonctions de sa vitesse v :

$$L(v) = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{et} \quad m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(c est la vitesse de la lumière).

Étudier la limite éventuelle des fonctions L et m lorsque v tend vers c ($v < c$). Interpréter ces résultats.

Limites et suites

Suites (u_n) avec $u_n = f(n)$

Dans les exercices 16 à 21, déterminer la limite de la suite (u_n) à l'aide du théorème 6, page 48.

- 16 a) $u_n = n^2 + 3n$; b) $u_n = -n^2 + 3$;
 c) $u_n = 6 - \frac{2}{n}$;
 17 a) $u_n = (1 - 3n)(n + 1)$; b) $u_n = \sqrt{n + \frac{1}{n}}$;
 18 a) $u_n = -2\sqrt{n} + \frac{1}{n}$; b) $u_n = \cos\left(\frac{n+1}{n}\right)$;
 19 a) $u_n = n^2 - 5n$; b) $u_n = -2n + n^3$;
 20 a) $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$; b) $u_n = \frac{-3n^2 + n + 1}{2n-3}$;
 21 $u_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n^2}$, où (a_n) est une suite arithmétique de raison 8.

Suites (v_n) avec $v_n = f(u_n)$

Dans les exercices 22 à 25, déterminer la limite de la suite (v_n) .

- 22 a) $v_n = \sqrt{3 + 0,8^n}$; b) $v_n = \sqrt{3^n - 2^n}$;
 23 a) $v_n = \frac{2^n - 1}{4^n + 1}$; b) $v_n = \frac{3 \times 2^n - 1}{1 - 2^n}$;
 24 a) $v_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$; b) $v_n = n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$;
 c) $v_n = n \tan\left(\frac{1}{n}\right)$;
 25 $v_n = \sqrt{3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{3}{2^n}}$;

26 Limite et point fixe

Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

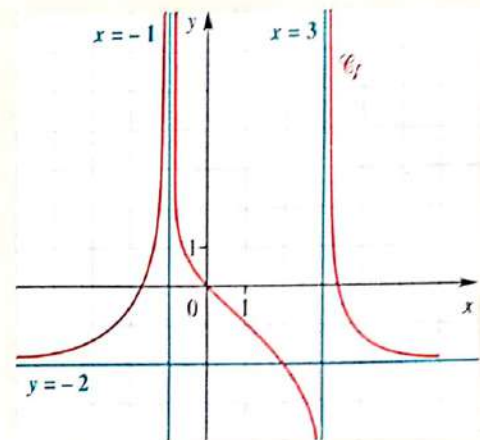
1) Montrer que, si la fonction f admet une limite en tout point et si (u_n) est convergente, alors sa limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$ (autrement dit, ℓ est un point fixe de f).

2) Application : déterminer la (ou les) limite(s) possible(s) des suites vérifiant :

- a) $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$; b) $u_{n+1} = 6 - \frac{1}{10}u_n^2$;
 c) $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$;

Interprétations graphiques : asymptotes

- 27 La courbe $\mathcal{C}_f$ (ci-dessous) est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.



- 28 Rechercher les asymptotes parallèles aux axes que peuvent présenter les courbes représentatives des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = \frac{3}{x-2}$; b) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$;
 c) $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$; d) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$;

Dans les exercices 29 à 31, montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique, et étudier sa position par rapport à cette asymptote.

- 29 a) $f(x) = x - 2 + \frac{3}{x}$; b) $f(x) = \frac{1}{x^2-1} - x$;
 30 a) $f(x) = 3x - 1 - \frac{x}{x^2+1}$;
 b) $f(x) = x - x^n$ ($n \geq 1$) ;
 31 $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 7}{x}$;

Même consigne, après avoir montré qu'il existe trois réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$ (voir exercice 32).

- 32 a) $f(x) = \frac{8x^2 - 4x + 1}{2x + 1}$; b) $f(x) = \frac{3x^2}{2-x}$;

Dans les exercices 33 et 34, montrer que la droite $\mathcal{L}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

- 33 $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$, $\mathcal{L}: y = x + 1$;
 34 $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$, $\mathcal{L}: y = x$;

Fonctions continues

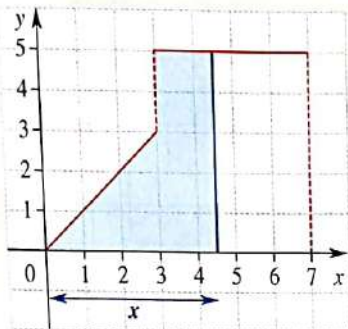
Dans les exercices 35 à 37, étudier la continuité de la fonction f au point a considéré, et représenter graphiquement la fonction f .

35 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 5 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}, a = 2.$

36 $f(x) = x - E(x), a = 2002.$

$E(x)$ est la partie entière de x , définie dans l'exercice 10.

37 $f(x)$ est l'aire colorée, et $a = 3.$



38 Montrer que chacune des équations suivantes admet une unique solution α , et localiser α entre deux entiers consécutifs.

a) $x^3 + 5x = 9$; b) $x^3 + x^2 = 7$;
c) $x^2 + \sqrt{x} - 3 = 0$; d) $\cos x - x = 0.$

39 1) Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de chacune des équations :

a) $5x^3 + 8x - 1 = 0$; b) $x^3 - 5x = 1$;
c) $x^4 = 32x - 48.$

2) Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de chaque solution à l'aide d'un balayage sur la calculatrice.

Méthode

Encadrement par balayage

Exemple (exercice 38, a) : La fonction $f: x \mapsto x^3 + 5x$ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(1) = 6$, et $f(2) = 13$, donc l'équation $f(x) = 9$ admet une solution unique, α , avec $1 < \alpha < 2$. Une table de valeurs de $f(x)$ entre 1 et 2, au pas 0,01, affiche sur la calculatrice :

x	$f(x)$
1,32	8,899 968
1,33	9,002 637
⋮	⋮

On en déduit $1,32 < \alpha < 1,33$.

On peut alors obtenir un encadrement plus précis en affinant le pas du balayage.

40 Résoudre à 10^{-3} près l'équation : $\sin x = 1 - x$.

Dérivation : généralités

41 À l'aide de la définition, étudier la dérivabilité au point a de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x}$ en distinguant les cas :

a) $a > 0$; b) $a = 0.$

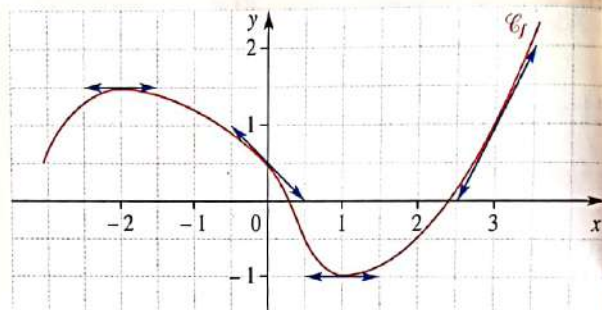
42 Dans chaque cas, déterminer tous les réels a tels que : $f'(a) = 1.$

a) $f(x) = \frac{1}{x}$; b) $f(x) = x^2$;
c) $f(x) = \sqrt{x}$; d) $f(x) = \sin x.$

43 Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a :

a) $f(x) = 1 - 3x + x^4, a = 0$; b) $f(x) = \sqrt{x}, a = 4$;
c) $f(x) = \cos x + \sin x, a = \pi$; d) $f(x) = \frac{1}{x}, a = 1.$

44 Une fonction f dérivable est représentée ci-dessous.



1) Lire graphiquement les valeurs de $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.

2) Donner un encadrement de $f'(x)$ sur $[-2, 0]$ et sur $[1, 3]$.

45 1) Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse a à la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 - 4x + 5$.

2) En quels points de $\mathcal{P}$ peut-on mener une tangente issue de l'origine ? Vérifier sur un dessin.

Les exercices 46 et 47 utilisent l'approximation affine $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$ (pour x voisin de a).

46 1) Justifier, pour x voisin de 0, chacune des approximations suivantes :

$(1+x)^3 \approx 1 + 3x$; $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$; $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$;
 $\sin x \approx x$; $\cos x \approx 1.$

2) En déduire, sans calculatrice, une valeur approchée de nombres :

$A = 1,005^3$; $B = \sqrt{1,0002}$; $C = \sqrt{0,996}$;

$D = \frac{1}{0,997}$; $E = \frac{1}{1,0007}$; $F = \sin(-0,01)$;

$G = \cos(0,02).$

47 Sans calculatrice, donner une valeur approchée de $\sqrt{25,02}$ en utilisant le calcul des dérivées.

Opérations sur les dérivées

Dans les exercices 48 à 57, déterminer le (ou les) intervalle(s) sur le(s)quel(s) la fonction est dérivable, et calculer sa dérivée.

48 a) $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$; b) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$.

49 a) $f(x) = 3x^7$; b) $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1$.

50 a) $f(x) = \frac{3}{x}$; b) $f(x) = -\frac{5}{x^2}$; c) $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

51 a) $f(x) = (2x-1)x^2$; b) $f(x) = 3x\sin x$.

52 a) $f(x) = x\sqrt{x}$; b) $f(x) = \cos x \sin x$.

53 a) $f(x) = \cos^3 x$; b) $f(x) = (x+4)^3$.

54 a) $f(x) = (x + \sin x)^2$; b) $f(x) = (x^2 + x + 1)^4$.

55 a) $f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$; b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

56 a) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{2x-3}$; b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

57 a) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos x}$; b) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$.

58 Soit n un entier fixé ($n \geq 2$).

1) En utilisant une formule sommatoire, calculer de deux manières la dérivée de $f: x \mapsto 1 + x + \dots + x^n$, pour $x \neq 1$.

2) En déduire, pour $x \neq 1$, une formule sommatoire de $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$.

3) Applications

a) Calculer les sommes :

$$A = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \dots + 16 \times 2^{15} \text{ et}$$

$$B = 1 + 2\sqrt{3} + 3 \times 3 + \dots + 20 \times 3^9 \sqrt{3}.$$

b) Étudier la limite de $u_n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^{n-1}}$.

59 Fonctions $x \mapsto x^n \sqrt{x}$ ($n \geq 0$)

On pose, pour tout $x \geq 0$ et $n \geq 0$, $f_n(x) = x^n \sqrt{x}$.

Montrer que f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $f'_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.

60 Soit $f(x) = \frac{ax+b}{(cx+d)^n}$, où a, b, c et d sont des réels

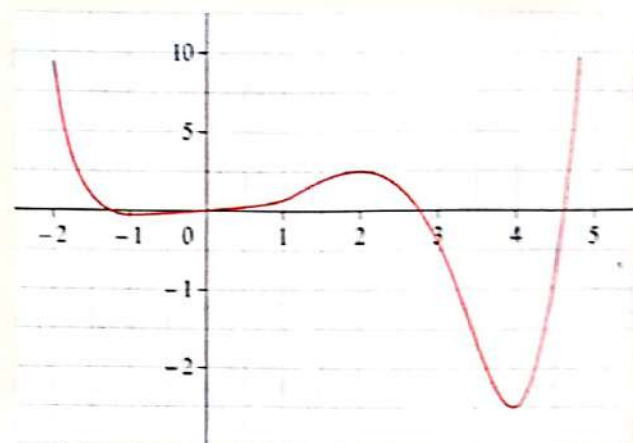
fixés et n un entier ($n \geq 1$).

Montrer qu'il existe une fonction affine g telle que :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(cx+d)^{n+1}}.$$

Variations, extremums

61 La courbe ci-dessous est la représentation graphique de $f: x \mapsto 0,05(x^6 - 6x^5 + 3x^4 + 16x^3)$.



1) Lire graphiquement le signe de $f'(x)$ sur $[-2, 5]$.

2) Préciser en quels points f admet un extremum relatif.

Dans les exercices 62 à 67, déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est dérivable, et étudier les variations de f .

62 a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$; b) $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 1$.

63 a) $f(x) = x^2(x-1)^3$; b) $f(x) = x^4 - 4x$.

64 a) $f(x) = x(1-x)$; b) $f(x) = x + \frac{16}{x}$.

65 a) $f(x) = \frac{2x-3}{3x+1}$; b) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$.

66 a) $f(x) = 3 - \cos^2 x$ sur $[0, \pi]$;

b) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ sur $]0, \pi[$.

67 a) $f(x) = x - 9\sqrt{x}$; b) $f(x) = \sqrt{x}(x-1)$.

68 On pose, pour $n \geq 2$, $f(x) = x^n$.

1) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

2) Pour quelles valeurs de n la fonction f admet-elle un extremum local en 0 ?

69 Préciser les extremums locaux de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

a) $f(x) = -x^3 + x^2$ sur $\mathbb{R}$; b) $f(x) = \sin x - x$ sur $\mathbb{R}$;

c) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ sur $]0, +\infty[$;

d) $f(x) = (x-1)^3 \sqrt{x}$ sur $]0, +\infty[$.

70 Défi

Peut-on trouver une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, non constante et admettant un extremum local pour toute valeur entière ?

Dérivée d'une fonction composée

Dans les exercices 71 à 74, montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.

71 a) $f(x) = \cos(x^2)$; b) $f(x) = \cos(\cos x)$.

72 a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$; b) $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$.

73 a) $f(x) = \sqrt{5 + \sin x}$; b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

74 a) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$; b) $f(x) = \sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Dans les exercices 75 à 77, montrer que la fonction f est dérivable sur une réunion d'intervalles, et calculer sa dérivée.

75 a) $f(x) = \tan(2x)$; b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

76 a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$; b) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

77 a) $f(x) = \sqrt{\cos x}$; b) $f(x) = \frac{1}{\sin^4 x}$.

78 Dérivée et parité

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle D de $\mathbb{R}$ centré en 0.

1) On pose, pour $x \in D$, $g(x) = f(-x)$. Calculer $g'(x)$.

2) Application 1

Montrer que :

- a) si f est paire, alors f' est impaire ;
- b) si f est impaire, alors f' est paire.

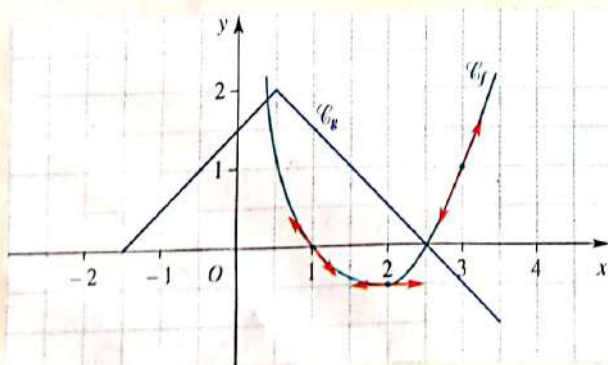
3) Application 2

Montrer que :

- a) si f' est impaire, alors f est paire ;
- b) si f' est paire et $f(0) = 0$, alors f est impaire.

79 Lectures graphiques

Deux fonctions f et g sont représentées graphiquement ci-dessous :



Montrer que $g \circ f$ est dérivable aux points d'abscisses 1, 2 et 3, et déterminer les nombres dérivés correspondants.

Brèves de cours

80 Soit $f(x) = 2x - 3 + \frac{4}{x-1}$.

Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition (en 1, distinguer deux cas).

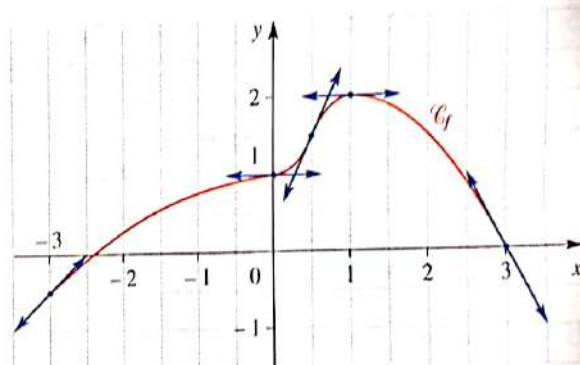
81 Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction de l'exercice précédent.

Montrer que $\mathcal{C}$ admet en $+\infty$ et $-\infty$ une asymptote oblique Δ et étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et Δ .

82 Rechercher les asymptotes parallèles aux axes que peuvent présenter les courbes représentatives des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto 9 + \frac{3}{x-2}$; b) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - 3$.

Les exercices 83 à 85 sont relatifs à la figure suivante, dans laquelle f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.



83 Déterminer $f'(-3)$, $f'(0)$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.

84 Préciser les intervalles sur lesquels $f'(x)$ garde un signe constant.

85 Dresser le tableau de variations de f' sur $[-3, 3]$.

Dans les exercices 86 à 88, on considère la fonction :

$$f: x \mapsto \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 - 5.$$

86 Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f'(x) = 0$ et donner un encadrement d'amplitude 0,01 de chaque solution.

87 Est-il vrai que f admet trois extremums relatifs ?

88 Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

89 1) Étudier le sens de variation de $f: x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 5}{1 - x}$.

2) Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3.

Exercices

Étude de formes indéterminées

Pour chacun des exercices 90 à 96, étudier la limite éventuelle de f au point considéré à l'aide des deux méthodes dégagées dans Au cœur des problèmes, partie 1 (on pourra parfois enchaîner les deux méthodes). Au besoin, on pourra utiliser le résultat de l'exercice 8, page 66.

90 a) $f(x) = \frac{-8x^2 + 1}{5x^2 + x + 1}$, en $+\infty$;

b) $f(x) = \frac{x(5-2x)}{x^2 + 1}$, en $+\infty$.

91 $f(x) = \frac{x^n}{2x^2 + 1}$, en $-\infty$. Discuter suivant les valeurs de n .

92 a) $f(x) = x\sqrt{x} - 5x^2$, en $+\infty$;

b) $f(x) = \frac{1-3x}{x-\sqrt{x}}$, en $+\infty$.

93 a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$, en 9; b) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$, en 0.

94 a) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$, en 2;

b) $f(x) = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+4}-2}$, en 0.

95 a) $f(x) = \sqrt{x^2+4x+3} - x$, en $+\infty$;

b) $f(x) = \sqrt{x^2+4x+3} + x$, en $-\infty$.

96 a) $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$, en $+\infty$;

b) $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, en $-\infty$.

Dans les exercices 97 à 99, étudier la limite de f au point a considéré en remarquant que $f(x)$ est le taux d'accroissement d'une fonction g , dérivable en a .

97 a) $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$, $a = 0$;

b) $f(x) = \frac{\sin(5x)}{x}$, $a = 0$.

98 a) $f(x) = \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$, $a = 3$;

b) $f(x) = \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$, $a = \frac{\pi}{4}$.

99 $f(x) = \frac{(x+2)^4 - 16}{x}$, $a = 0$.

Étude de branches infinies

Des asymptotes

100 On pose $f(x) = \frac{x^3}{x^2+x+1}$.

1) Montrer qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que, pour tout x :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + x + 1}.$$

2) En déduire que la courbe représentative de f admet, en $+\infty$ et en $-\infty$, une asymptote Δ , et positionner $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ .

101 Même exercice avec $f(x) = \frac{2x^3 - x + 1}{x^2 + 3}$, en adaptant la question 1).

102 On se propose d'étudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$, courbe représentative de la fonction :

$$f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 1}.$$

1) Étudier l'ensemble de définition de f et montrer que :

$$f(x) = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}.$$

En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet un axe de symétrie.

2) Montrer que la droite d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est asymptote à

$\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette droite.

3) À l'aide de la question 1), étudier la branche infinie de $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

103 Par une méthode analogue à celle de l'exercice précédent, étudier les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_f$, avec $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 2}$.

Des branches paraboliques

Dans les exercices 104 à 106, étudier la limite éventuelle en $+\infty$ de $f(x)$, puis de $\frac{f(x)}{x}$. Préciser l'allure de la branche infinie correspondante (voir Au cœur des problèmes, partie 2).

104 a) $f(x) = x^3 + x$; b) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{x}$.

105 a) $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$; b) $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$.

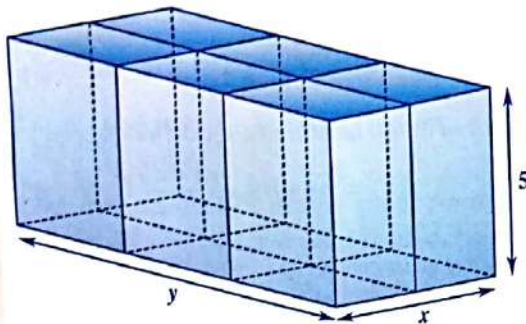
106 a) $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$; b) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$.

Problèmes d'optimisation

107 La volière

Un zoo désire construire une volière pour des perroquets, formée de six cages attenantes, grillagées sur les parois latérales et au plafond, comme sur la figure ci-dessous.

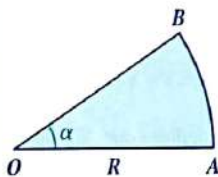
La hauteur des cages est fixée à 5 m, et le zoo dispose au total de 800 m² de grillage.



- 1) Avec les notations de la figure (x et y en mètre), exprimer en fonction de x la longueur y , puis le volume total $V(x)$ des cages.
- 2) Déterminer les dimensions inconnues, de telle sorte que ce volume soit maximal.

108 Deux radians

- 1) Si α est une mesure en radian de $\widehat{AOB}$, montrer que la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ est αR et que l'aire du secteur correspondant est $\frac{1}{2}\alpha R^2$.



- 2) En déduire que, si le périmètre P du secteur est fixé, son aire s'exprime par :

$$A(\alpha) = \frac{P^2}{2} \frac{\alpha}{(\alpha + 2)^2}.$$

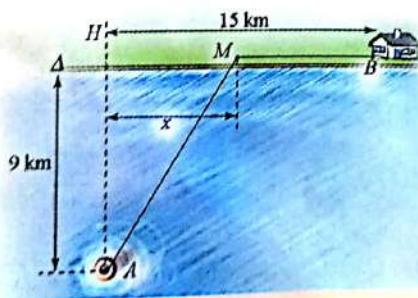
- 3) Pour quelle valeur de α cette aire est-elle maximale ?

109 Le gardien de phare

Pour des raisons obscures, le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre le plus rapidement possible la maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km · h⁻¹ et à pied à la vitesse de 5 km · h⁻¹.

Où doit-il accoster pour que le temps de parcours soit minimal ?

Note : la côte est rectiligne (droite Δ) et la dérive due au courant nulle.

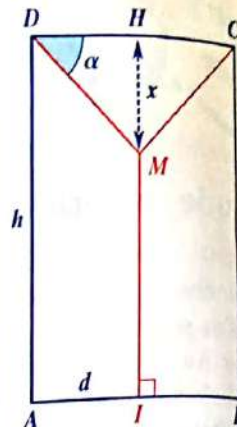


110 La gouttière

1) Le problème

Contre la façade rectangulaire ABCD, on désire placer une gouttière en forme de Y pour évacuer les eaux de pluie recueillies en C et D (voir la figure). I est le milieu de [AB].

Où doit-on placer le point M pour que la longueur de tuyau soit minimale ? (On néglige l'épaisseur du tuyau.)



2) Méthode 1

On pose $x = HM$, $h = AD$ et $d = AI$.

Exprimer la longueur $f(x)$ du tuyau en fonction de x et résoudre le problème.

On montrera que f atteint son minimum pour une valeur x_0 indépendante de h .

3) Méthode 2

Résoudre ce problème en utilisant la variable $\alpha = \widehat{HDM}$, après avoir exprimé la longueur $g(\alpha)$ du tuyau.

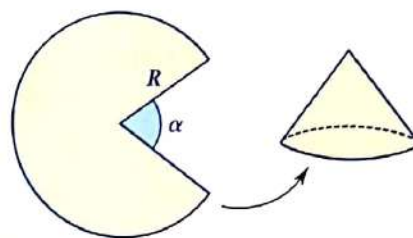
111 Le plus grand cornet

1) Le problème

Dans un disque de rayon R , on découpe un secteur circulaire de α radian.

En joignant les deux bords droits du secteur restant, on fabrique un cornet en forme de cône.

Pour quelle valeur de α le volume du cornet est-il maximal ?



2) Indications de résolution

On note r le rayon de base du cône, h sa hauteur et $V(h)$ son volume.

a) Exprimer $V(h)$ en fonction de R et h , et déterminer h pour que $V(h)$ soit maximal.

b) Pour cette valeur de h , exprimer r en fonction de R , puis calculer α .

112 Le cylindre de révolution

En faisant tourner un rectangle autour d'un de ses côtés, on engendre un cylindre.

Parmi tous les rectangles de périmètre fixé P , quelle est la forme de celui qui engendre le cylindre de volume maximum ?

Comparaison de fonctions

113 Une fonction concave

On considère la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \sin x$.

- 1) Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a .
- 2) Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente.

Convexe et concave

Les mathématiciens disent qu'une fonction dérivable est convexe sur un intervalle lorsque sa courbe est située au-dessus de chacune de ses tangentes ; elle présente alors une « bosse » tournée vers les y négatifs. Elle est dite concave dans le cas opposé (cas de l'exercice précédent).

114 Un point d'inflexion

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x\sqrt{x} - \frac{3}{16}x^2.$$

- 1) Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 4.
- 2) Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente.
- 3) Dessiner la situation correspondante (voir *Au cœur des problèmes*, partie 4).

115 Trompe-l'œil

- 1) Sur l'écran graphique de la calculatrice, représenter les courbes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ d'équations respectives $y = \frac{6}{5}x - 1$ et $y = \frac{1}{4}x^3$, dans la fenêtre $-1 \leq x \leq 3$ et $-1 \leq y \leq 3$. Positionner alors $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$.
- 2) Étudier cette même position par le calcul des dérivées. Alors ?

116 Entre corde et tangente

- 1) Démontrer chacune des inégalités :

$$a) \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x, \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$$

$$b) x \leq \tan x \leq \frac{4}{\pi}x, \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4};$$

$$c) 1 - \frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2} - x, \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

- 2) Dans chaque cas, en donner une interprétation géométrique.

117 Signe d'une fonction

Étudier le signe de $g(x) = 30x^3 + 19x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$.

Études de fonctions rationnelles

Dans les exercices 118 à 127, étudier et représenter graphiquement la fonction f en prenant appui sur le plan d'étude dégagé page 60.

$$118 \quad f(x) = x^3 + 5x^2 - 10.$$

$$119 \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 2.$$

$$120 \quad f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 16x + 1.$$

$$121 \quad f(x) = x^4 - 2x^2 + 5.$$

$$122 \quad f(x) = x - 3 + \frac{2}{x+1}.$$

$$123 \quad f(x) = \frac{2x-3}{5-x}.$$

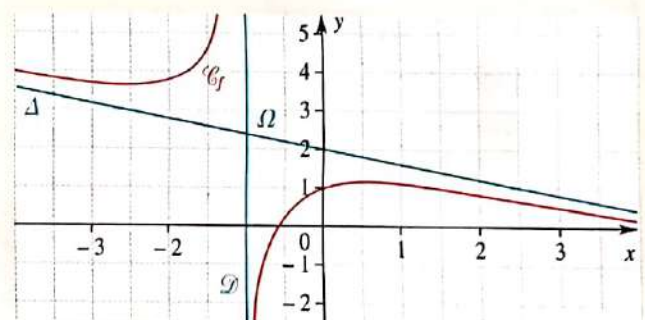
$$124 \quad f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

$$125 \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

126 Une fonction de courbe donnée

La courbe $\mathcal{C}_f$ représentée ci-dessous admet pour asymptotes les droites $\mathcal{D}$ et Δ , et passe par le point $A(0, 1)$.

On sait que $f(x)$ est du type $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$.



- 1) À l'aide des données et du graphique, déterminer d , a , b , et c .
- 2) Étudier les variations de f et préciser les extremums locaux.
- 3) Montrer que le point Ω est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

127 Somme et différence d'inverses

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$

$$\text{par } f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} \text{ et } g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}.$$

- 1) Étudier les limites de f et de g aux bornes de leur ensemble de définition. En déduire que les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont les mêmes asymptotes.
- 2) Étudier les variations des fonctions f et g .
- 3) Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente en $\Omega(-1, 0)$, et les positions respectives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- 4) Représenter $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 5) Montrer que Ω est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ et $(\Omega; \vec{j})$ axe de symétrie de $\mathcal{C}_g$.

Étude de fonctions irrationnelles

128 La fonction $f: x \mapsto x^2 - 2\sqrt{x}$

- 1) Étudier le comportement de f en $+\infty$ (limite, branche infinie).
- 2) Étudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.
- 3) Étudier à part la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement.
- 4) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

129 La fonction $f: x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 1}$

- 1) Vérifier que f est définie sur $D =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et montrer que pour tout $x \in D$:

$$f(x)f(-x) = -1 \quad (1).$$

- 2) Étudier la limite de f en $+\infty$, puis déduire de (1) celle de f en $-\infty$.
- 3) Montrer que, pour tout $x \in D \setminus \{-1, 1\}$, $f'(x)$ a le même signe que $f(x)$.
En déduire les variations de f sur $]1, +\infty[$, puis sur $]-\infty, -1[$.
- 4) Montrer que la droite Δ , d'équation $y = 2x$, est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. On pourra à nouveau utiliser (1).
- 5) Étudier la dérivabilité de f en 1 et en -1.
- 6) Tracer $\mathcal{C}_f$ et Δ .

130 L'ellipse et l'hyperbole

On considère les courbes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$, d'équations respectives dans un repère orthonormal :

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{H}: \frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

- 1) Indiquer à l'aide de quelle transformation géométrique on peut obtenir $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ à partir des courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions suivantes :

$$f: x \mapsto \frac{3}{5}\sqrt{25-x^2} \quad \text{et} \quad g: x \mapsto \frac{3}{5}\sqrt{x^2-25}.$$

- 2) Étudier la fonction f (ensemble de définition, parité, variations, dérivabilité au point 5).
- 3) Étudier la fonction g (mêmes questions). Montrer en outre que $\mathcal{C}_g$ admet en $+\infty$ l'asymptote $\Delta: y = \frac{3}{5}x$.
- 4) Représenter sur un même dessin $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, puis $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$.

Histoire de courbes

C'est le Grec Apollonios de Perga (262-180 av. J.-C.) qui étudie les paraboles, les ellipses et les hyperboles comme sections planes d'un cône – il les nomme coniques.

Dix-huit siècles plus tard, en 1687, Newton démontre les lois de l'attraction universelle qui prouvent que les corps du système solaire (planètes, comètes...) décrivent des coniques.

Étude de fonctions trigonométriques

131 Fonctions « sécante » et « cosécante »

- 1) La fonction sécante est définie par $\sec(x) = \frac{1}{\cos x}$.

- a) Étudier la parité et la périodicité.
- b) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_{\sec}$ admet $\Omega\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ comme centre de symétrie.
- c) Étudier les variations de la fonction sécante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- d) Déduire des questions précédentes le tracé de $\mathcal{C}_{\sec}$.

- 2) La fonction cosécante est définie par $\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin x}$.

$$\text{Vérifier l'égalité } \operatorname{cosec}(x) = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

En déduire, sans étude, le tracé de $\mathcal{C}_{\operatorname{cosec}}$.

132 Fonction « dos de chameau » (deux bosses)

$$\text{Soit } f(x) = \cos x - \cos^2 x.$$

- 1) Étudier la parité et la périodicité de f .
En déduire que l'on peut restreindre l'étude de f à $[0, \pi]$.
- 2) Étudier les variations de f et dresser le tableau de variations.
- 3) Tracer la représentation graphique de f sur $[0, \pi]$ en plaçant les points d'abscisses $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ et π avec leurs tangentes.
- 4) En déduire le tracé de $\mathcal{C}_f$ sur $[-3\pi, 3\pi]$, et justifier le titre de l'exercice.

133 Fonction de « résonance »

La fonction $f: x \mapsto x \cos x$ est un exemple de fonction décrivant une vibration de « résonance ». Cet exercice propose l'étude de f et de sa courbe représentative Γ dans un repère d'origine O .

- 1) Montrer que f est impaire et que Γ oscille entre les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$.
- 2) a) Étudier les points d'intersection de Γ avec $\mathcal{D}$, puis ceux de Γ avec $\mathcal{D}'$.
b) Montrer qu'en dehors du point O , les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont tangentes à Γ aux points d'intersection.
Quelle est la tangente à Γ en O ?
- 3) Montrer que f admet un extremum local en x si, et seulement si, $\tan x = \frac{1}{x}$.
En déduire, à l'aide d'un graphique, que f admet une infinité d'extremums locaux.
Donner une valeur approchée du plus petit extremum (strictement positif).
- 4) Tracer $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, et donner l'allure de Γ .

Calculs approchés, courbes intégrales

134 Fonction arcsinus

Soit f une fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(0) = 0$ et, si $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) Montrer que f est impaire (utiliser l'exercice 78).

2) Avec la méthode d'Euler, décrite dans la partie 6 de *Au cœur des problèmes*, avec le pas $h = 0,01$, utiliser une calculatrice ou un tableur pour :

- afficher une table de valeurs de $f(x)$ pour $0 \leq x \leq 0,6$;
- tracer une valeur approchée de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[0; 0,6]$.

3) Avec le pas $h = 0,001$, déterminer une valeur approchée de $f(0,5)$.

Comparer avec la valeur de $\frac{\pi}{6}$ fournie par la calculatrice.

Info

La fonction de l'exercice précédent est la réciproque de la fonction g , définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = \sin x$. On l'appelle fonction « arcsinus ».

Ses valeurs sont données par les touches $\boxed{\text{ASIN}}$ ou $\boxed{\text{INV}} \boxed{\text{SIN}}$ ou $\boxed{\text{SIN}^{-1}}$ des calculatrices.

135 La fonction exponentielle

De nombreux phénomènes d'évolution sont modélisés par une fonction dérivable f dont la dérivée f' est proportionnelle à la fonction f elle-même (voir chapitres 3 et 5). Nous allons observer l'une d'entre elles par la méthode d'Euler.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et, pour tout x : $f'(x) = f(x)$.

1) Montrer que, pour tous réels a et h (h voisin de zéro), l'approximation affine donnée par le calcul des dérivées s'écrit :

$$f(a+h) \approx f(a)(1+h).$$

2) En déduire que, si l'on part de $f(a)$, la suite des valeurs approchées de $f(x)$ obtenues par la méthode d'Euler, avec le pas h , est une suite géométrique. Quelle est sa raison ?

3) Déduire de la question 2) que $f(1) \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pour les grandes valeurs de n . Donner la valeur approchée de $f(1)$ correspondant à $n = 10\,000$.

4) À l'aide d'un tableur, tracer une approximation de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Note : la fonction f , appelée exponentielle, sera étudiée au chapitre 3.

Problèmes liés à la calculatrice

136 Catastrophe !

On pose $f(x) = \frac{(50 + x^{20})^2 - 2\,500}{x^{20}}$.

1) À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de $(50 + x^{20})^2$, puis de $f(x)$, pour :

$$x = 0,6 ; 0,5 ; 0,4 ; 0,3 ; 0,2 ; 0,1 \text{ et } 0,01.$$

Peut-on conjecturer la limite de f en zéro ?

2) En développant $(50 + x^{20})^2$, simplifier l'expression de $f(x)$, pour $x \neq 0$. Calculer alors la limite de f en zéro.

3) Vaincre la tentation de se débarrasser de la calculatrice.

Un homme, une théorie

La fonction f de l'exercice précédent est une « fonction catastrophe » au sens suivant : dans le calcul de valeurs approchées, une faible variation de x donne une variation considérable sur la valeur approchée de $f(x)$ (ainsi, pour $x = 0,4$, $f(x) \approx 100,044$, pour $x = 0,3$, une calculatrice à douze chiffres affiche $f(x) = 0$).

René Thom, mathématicien français contemporain, est l'auteur de la *Théorie des catastrophes*, pour laquelle il obtint, en 1958, la médaille Fields – l'équivalent du Nobel en Mathématiques.

137 Une courbe insaisissable

Soit f la fonction définie sur $[-2, 2]$ par :

$$f(x) = 577x^3 - 816x^2 - 1154x + 1632.$$

1) À l'aide d'une calculatrice graphique, essayer d'obtenir sur $[-2, 2]$:

- le sens de variation de f ;
- les extremums relatifs ;
- le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Piste Essayer de « naviguer » sur l'écran, de modifier les paramètres de la fenêtre...

2) Sens de variation

- Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations.
- Si x_0 est l'abscisse du minimum relatif, calculer $f(x_0)$ à l'aide de la calculatrice. Cette valeur permet-elle de résoudre l'équation $f(x) = 0$?

3) L'équation $f(x) = 0$

- Montrer que $f(x)$ se factorise par $(x^2 - 2)$.
- Résoudre alors « exactement » l'équation $f(x) = 0$.
- Contrôler sur l'écran graphique en effectuant un zoom dans la région :

$$\begin{cases} 1,414\,211 \leq x \leq 1,414\,213 \\ -2 \times 10^{-9} \leq y \leq 4 \times 10^{-9} \end{cases}$$

Rubrique à Bac

Utilisation d'une fonction auxiliaire

Le signe de la dérivée d'une fonction f n'est pas toujours immédiat.

Il peut dépendre du signe d'une autre fonction g (fonction auxiliaire) que l'on étudie à part.

Cette situation est fréquente dans les sujets de bac, avec le scénario dramatique suivant :

• Acte I :

- étude des variations de g (scène 1) ;
- g s'annule pour un unique réel α (scène 2) ;
- étudier le signe de g (scène 3).

• Acte II :

- calculer $f'(x)$ et montrer que le signe de f dépend de celui de g (scène 1) ;
- étudier le sens de variation de f (scène 2) ;
- montrer que $f(\alpha) = \dots$; pour cela, on utilise l'égalité $g(\alpha) = 0$ (scène 3, facultative).

138 Avec une fonction rationnelle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$, et on note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité : 1 cm).

1) Étude d'une fonction auxiliaire

On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

a) Étudier le sens de variation de g , et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1.

🔑 Acte I, scènes 1 et 2.

b) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

2) a) Calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f .

b) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis dresser le tableau de variations de f .

3) a) Montrer qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}.$$

b) En déduire que C admet une asymptote oblique Δ , et étudier la position de C par rapport à Δ .

Vérifier en particulier que C rencontre Δ en un unique point A .

4) Déterminer les abscisses des points B et B' de C admettant une tangente parallèle à Δ .

5) a) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$; en déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$.

🔑 Acte II, scène 3.

b) Tracer Δ et C en plaçant les points A, B et B' , ainsi que les trois points I, J et K d'abscisses respectives 1, 2 et -1, avec leurs tangentes.

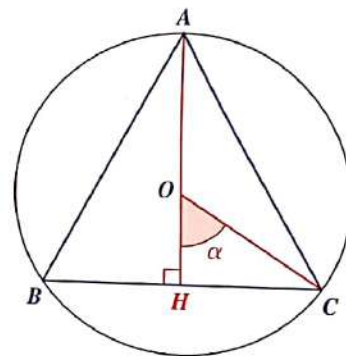
Variante

Pour l'étude du signe de la dérivée, on peut aussi utiliser les polynômes et la factorisation...

139 Triangle isocèle maximal

Un triangle ABC isocèle, de sommet principal A , est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1. H est le pied de la hauteur issue de A . On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{HOC}$.

On suppose que : $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.



1) a) Exprimer BC et AH en fonction de α .

b) En déduire, en fonction de α , l'aire du triangle ABC .

2) On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(\alpha) = \sin \alpha (1 + \cos \alpha).$$

Calculer la dérivée f' de f et prouver que, pour tout réel α de

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ on a } f'(\alpha) = 2\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1.$$

3) a) Factoriser le polynôme $2X^2 + X - 1$ et en déduire une factorisation de $f'(\alpha)$.

🔑 La variante.

b) Dresser le tableau de variations de f .

4) Démontrer qu'il existe une valeur de α , que l'on déterminera, pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale. Préciser ce maximum.

Quelle est alors la nature du triangle ABC ?

Problèmes

140 Encadrement de $\sin x$ et $\cos x$

1) Soit x un réel positif ou nul.

Établir successivement les inégalités suivantes :

- a) $\sin x \leq x$; b) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$.
c) $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$; d) $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

2) Application 1 : calcul numérique

- a) Donner un encadrement de $\sin 0,2$ et de $\cos 0,2$.
b) Déterminer les 17 premières décimales de $\cos(0,000\ 1)$.

3) Application 2 : limites de fonctions

- a) Étudier la limite en 0 de $\frac{x - \sin x}{x^2}$.
b) Étudier la limite en 0 de $\frac{1 - \cos x}{x^2}$.

4) Application 3 : limites de suites

Étudier le comportement à l'infini des suites de terme général :

$$n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) - n .$$

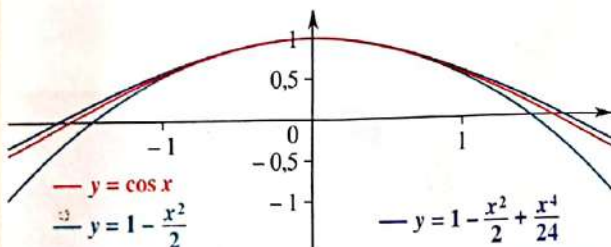
5) Application 4 : une étude locale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Vérifier que f est continue en 0, et étudier la dérivabilité de f en 0.

Regard sur...

... la qualité de l'encadrement de $\cos x$.



141 La fonction arctangente

Nous admettons qu'il existe une fonction f , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifiant $f(0) = 0$ et, pour tout réel x ,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} .$$

Nous avons obtenu (Dans la foulée, exercice 12, page 65) une valeur approchée de $f(1)$ ainsi que la courbe approchée $\mathcal{C}_f$. Le but de ce problème est de compléter cette exploration numérique par une étude théorique.

1) Parité

a) Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) + f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

b) Calculer $g(0)$. En déduire que la fonction f est impaire.

2) Limite de f en $+\infty$

a) Montrer que la fonction $h : x \mapsto f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

b) En déduire qu'il existe une constante c telle que, pour tout $x > 0$, on ait : $f(x) = c - f\left(\frac{1}{x}\right)$ (1).

c) À l'aide de (1), prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$.

3) On considère la fonction u , définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $u(x) = \tan x$.

a) Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto f \circ u(x) - x$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer sa dérivée.

b) Calculer $\varphi(0)$.

En déduire que, pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $f(\tan x) = x$.

c) Calculer les valeurs exactes de $f(1)$, $f(\sqrt{3})$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ainsi que la valeur exacte de la constante c .

4) a) Étudier le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations.

b) À l'aide des renseignements précédents, tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ (préciser les asymptotes et la tangente à l'origine).

Info

La fonction f du problème ci-dessus est la fonction **arctangente** ; cette appellation est justifiée par l'égalité $f(\tan x) = x$. On obtient des valeurs approchées de $\arctan x$ à l'aide de l'une des touches de la calculatrice $\boxed{\tan^{-1}}$ ou $\boxed{ATAN}$ ou $\boxed{INV} \boxed{\tan}$.

La relation $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ (voir problème 141, 3) c)) reste

la relation de base permettant d'obtenir des valeurs approchées de π , depuis la célèbre « égalité » de Leibnitz (1673) :

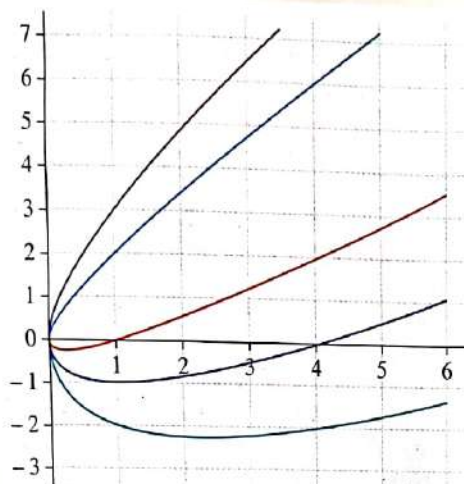
$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

142 Une famille de courbes

Le but de ce problème est l'étude d'une famille de fonctions et la mise en évidence de propriétés relatives à certaines tangentes aux courbes correspondantes.

Soit k un réel fixé. On définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f_k par $f_k(x) = x - k\sqrt{x}$, et on note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Les courbes $\mathcal{C}_{-2}, \mathcal{C}_{-1}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ ont été représentées ci-dessous à l'aide d'un grapheur.



1) Quelle est la nature de $\mathcal{C}_0$? Dans la suite, on suppose que $k \neq 0$.

2) Étudier la dérivabilité de f_k en 0. Interpréter géométriquement le résultat.

3) Étudier la limite en $+\infty$ de $f_k(x)$, puis de $\frac{f_k(x)}{x}$ et de $f_k(x) - x$. (On interprétera ainsi les résultats : $\mathcal{C}_k$ admet une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = x$.)

4) Montrer que si $k < k'$, alors $\mathcal{C}_k$ est au-dessus de $\mathcal{C}_{k'}$. Identifier alors $\mathcal{C}_{-2}, \mathcal{C}_{-1}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ sur le dessin.

5) On suppose que $k > 0$.

a) Dresser le tableau de variations de f_k . On montrera que f_k admet un minimum relatif en une valeur notée a_k .

b) Soit A_k le point de $\mathcal{C}_k$ d'abscisse a_k . Montrer que tous les points A_k sont situés sur une même droite à préciser.

c) Montrer qu'en dehors de O , $\mathcal{C}_k$ coupe (Ox) en un unique point B_k dont on précisera l'abscisse b_k . Vérifier que $b_k = 4a_k$.

d) Établir que, pour tout $k > 0$, la tangente à $\mathcal{C}_k$ en B_k garde une direction fixe (indépendante de k).

6) On suppose que $k < 0$.

a) Étudier le sens de variation de f_k .

b) Démontrer qu'il existe un unique point de $\mathcal{C}_k$ où la tangente à $\mathcal{C}_k$ est parallèle à la droite d'équation $y = 2x$. Vérifier que ce point a pour abscisse a_{-k} (voir question 5) a)). On note E_{-k} ce point.

c) Montrer que, lorsque k varie sur $]-\infty, 0[$, tous les points E_{-k} sont situés sur une même droite à préciser.

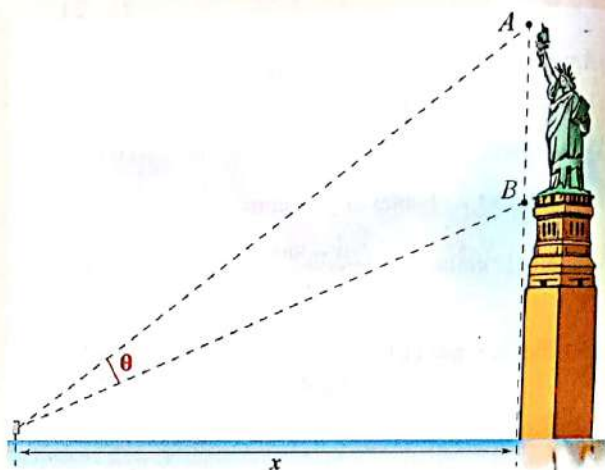
143 La statue de la Liberté

Le problème est de déterminer la distance x à laquelle on doit placer un appareil photographique pour avoir une photo de la statue de la Liberté prise sous un angle θ maximal.

On admet que θ appartient à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Les données numériques sont les suivantes :

- l'appareil photo est à 1,5 m du sol ;
- le piédestal a pour hauteur 45 m ;
- la statue a également pour hauteur 45 m.



1) Vérifier que θ est maximal lorsque $\tan \theta$ est maximale.

2) Démontrer la formule :

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

3) Exprimer $\tan \theta$ en fonction de x .

4) Déterminer x pour que $\tan \theta$ soit maximale.

Le père des limites

En 1850, l'Allemand Karl Weierstrass définit rigoureusement la notion de limite.



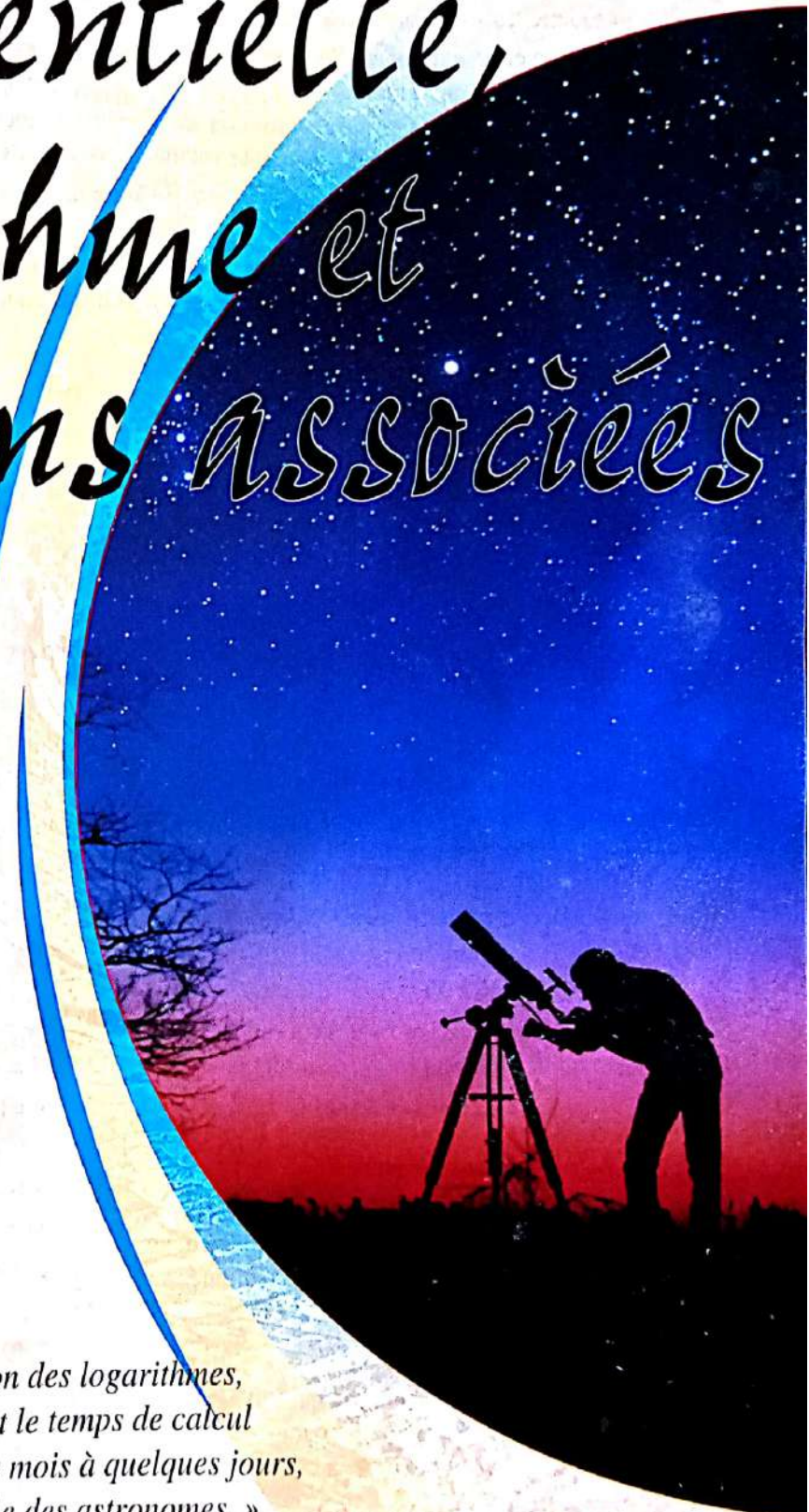
→ Exponentielle, logarithme et fonctions associées

OBJECTIFS

- Introduire de nouvelles fonctions usuelles (exponentielles, logarithmes, racines n -ièmes...) et dégager leurs propriétés.
- Les utiliser en Mathématiques et dans les Sciences appliquées.

« L'invention des logarithmes,
en réduisant le temps de calcul
de quelques mois à quelques jours,
double la vie des astronomes. »

Pierre-Simon de Laplace



Avant-première

1. OBJECTIFS

Il s'agit d'introduire trois nouvelles fonctions.

- Concernant la fonction **exponentielle**, nous focaliserons notre attention sur les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout réel x , $f'(x) = kf(x)$ (k réel donné).

Ces fonctions apparaissent dans la modélisation de nombreux phénomènes continus, et méritent une étude. Les résultats dégagés seront exploités dans le cours.

- Les fonctions **racines n -ièmes** seront présentées à partir de la notion de réciproque d'une bijection.

- La fonction **logarithme népérien** sera appréhendée selon deux approches complémentaires : l'une numérique (calculatrice), l'autre théorique, par le biais d'une équation fonctionnelle.

2. L'ÉQUATION « $f' = kf$ » (k RÉEL)

La séquence qui suit présente des situations variées faisant intervenir des fonctions dérivables dont la dérivée est proportionnelle à la fonction :

$$f' = kf \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Séquence 1

Trois situations

① Désintégration des noyaux radioactifs

Les noyaux des atomes d'un corps radioactif se désintègrent selon la loi suivante : si $N(t)$ est le nombre de noyaux présents à l'instant t , pendant la durée Δt , la variation $\Delta N(t)$ du nombre de noyaux est proportionnelle à Δt et à $N(t)$. Les physiciens écrivent :

$$\Delta N(t) = -kN(t)\Delta t \quad (k > 0).$$

En supposant que la fonction $t \mapsto N(t)$ est dérivable, expliquer pourquoi on peut écrire, pour tout t :

$$N'(t) = -kN(t).$$

② Un processus « sans mémoire »

On dit que la durée de vie de certains composants électroniques est sans vieillissement (ou sans mémoire) au sens suivant : si $f(t)$ est la probabilité que la durée de vie dépasse la durée t , alors, pour tous t et t' :

$$f(t+t') = f(t) \times f(t').$$

(Cette égalité sera expliquée au chapitre 10.)

Dans la suite, on considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, non nulle, vérifiant pour tous x et y :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y).$$

1) Montrer que f ne s'annule pas (raisonner par l'absurde).

2) Montrer que $f(0) = 1$ et que, pour tout x : $f(x) > 0$.

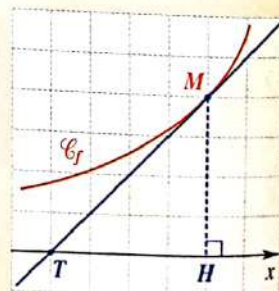
3) On pose $k = f'(0)$.

a) Soit a fixé, calculer la dérivée de la fonction : $x \mapsto f(x+a) - f(a)f(x)$.

b) En posant $a = 0$, en déduire que : $f'(x) = kf(x)$.

③ Courbes à sous-tangente constante

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Si la tangente en M à $\mathcal{C}_f$ coupe (Ox) en T , on suppose qu'il existe un réel $k \neq 0$ tel que, pour tout M , $\overrightarrow{TH} = k\overrightarrow{TM}$ (H étant le projeté orthogonal de M sur (Ox)).



Montrer que, pour tout x , $f'(x) = \frac{1}{k}f(x)$.

La séquence précédente (exercice 2) a permis de dégager le résultat suivant :

« Si f est non nulle, dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifie, pour tous réels x et y ,
 $f(x+y) = f(x)f(y)$, alors $f(0) = 1$ et $f' = kf$ ».

Dans ce qui suit, nous allons dégager des propriétés des fonctions f , dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$f(0) = 1 \text{ et } f' = kf \quad (k \neq 0).$$

Séquence 2 Propriétés des fonctions f ($f(0) = 1$ et $f' = kf$)

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant
 $f(0) = 1$ et $f' = kf$ ($k \neq 0$).

1) Montrer que $f'(0) = k$.

2) Soit a un réel fixé. On considère la fonction
 $g : x \mapsto f(x+a)f(-x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.

b) Calculer $g(0)$. En déduire que, pour tous x et a réels :

$$f(x+a)f(-x) = f(a) \quad (1).$$

3) Déduire de (1) les résultats suivants :

a) pour tout réel x , $f(x)f(-x) = 1$;

b) f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$;

c) pour tous réels x et a :

$$f(x+a) = f(x)f(a) \quad (\text{relation fonctionnelle}).$$

4) **Unicité de la fonction**

On suppose ici qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2 , dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$f_1(0) = f_2(0) = 1, \quad f_1' = kf_1 \text{ et } f_2' = kf_2.$$

a) Soit $\varphi : x \mapsto f_1(x)f_2(-x)$.

Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(x)$.

b) En déduire que, pour tout x , $\varphi(x) = 1$.

c) À l'aide du résultat de la question 3) a), conclure que $f_1 = f_2$.

Si la séquence 2 (question 3)) établit que les conditions $f(0) = 1$ et $f' = kf$ définissent au maximum une fonction f , rien ne nous assure l'existence d'une telle fonction !

Nous admettrons cette existence dans le cours ; cette existence ne surprend pas puisque la **méthode d'Euler** nous a déjà permis une construction approchée (voir chapitre 2, exercice 135) de la courbe approchée de f dans le cas où $k = 1$.

Voici les courbes correspondantes, obtenues à l'aide d'un grapheur, avec les pas respectifs $h = 0,5$, $h = 0,1$, puis $h = 0,01$.

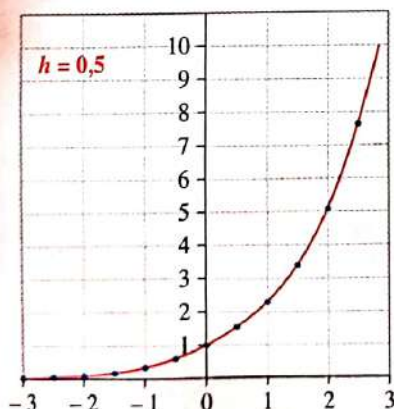


Fig. 1

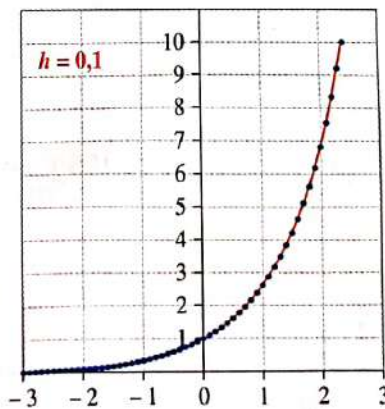


Fig. 2

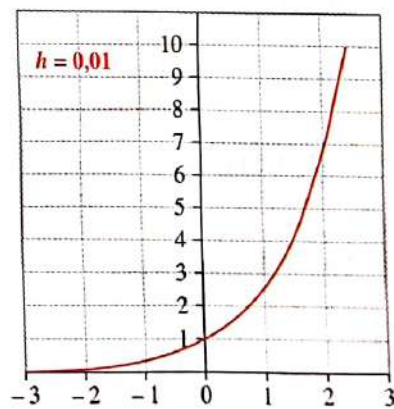


Fig. 3

La fonction correspondante, associée à la valeur $k = 1$, est donc définie de manière unique par les conditions :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f' = f.$$

Nous la nommerons **fonction exponentielle**.

3. FONCTION RACINE n -ième

• Préliminaire : fonction réciproque d'une bijection

On désigne par I et J des intervalles.

$f: I \rightarrow J$ est une **bijection** signifie :

« Pour tout y de J , l'équation $f(x) = y$ a une unique solution dans I . »

On note f^{-1} l'application de J dans I , qui à y de J associe LA solution de $f(x) = y$.

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in I \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in J \end{cases}$$

(f^{-1} est la *bijection réciproque* de f).

Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives de f et de f^{-1} (Fig. 4) sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$. La symétrie s_{Δ} , en effet, associe au point $M(x, y)$ le point $M'(y, x)$.

Dans ce cas, à partir de propriétés connues de la courbe $\mathcal{C}_f$ (tangentes, asymptotes...), nous pouvons obtenir des renseignements sur la courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ tels que : tangentes, asymptotes... images des précédentes par s_{Δ} .

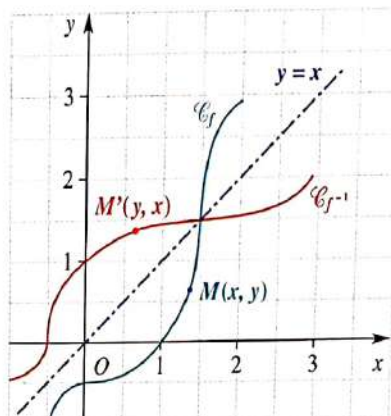


Fig. 4

• Racine n -ième d'un réel positif

Soit n un entier naturel non nul. Alors la fonction « puissance n -ième » : $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

Elle admet donc une fonction réciproque appelée « fonction racine n -ième » :

$$\begin{cases} y = \sqrt[n]{x} \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} x = y^n \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$\sqrt[n]{}$ ou $\sqrt[n]{y}$ sont les touches de la calculatrice qui permettent d'accéder aux fonctions « racine n -ième ».

On remarquera que, d'après la définition, $\sqrt[n]{x} = x$ et $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.

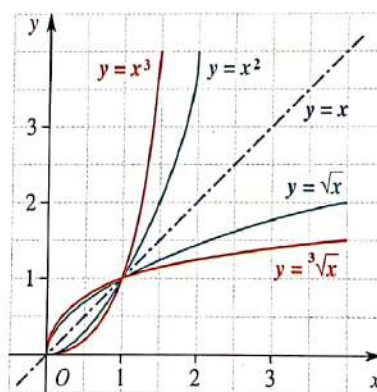


Fig. 5

Séquence 3

Familiarisation avec les calculs

1 Simplifier l'écriture des nombres :

$$\sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{\frac{1}{64}}, \sqrt[4]{81}, \sqrt[4]{0,0625},$$

$$\sqrt[10]{1024}, \sqrt[5]{243}, \sqrt[3]{\frac{125}{27}}, (\sqrt[n]{a})^n.$$

2 Avec $a > 0$ et $b > 0$, comparer :

a) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$ et $\sqrt[n]{ab}$;

b) $\sqrt[n]{\frac{1}{a}}$ et $\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$; c) $(\sqrt[n]{a})^m$ et $\sqrt[n]{a^m}$.

Disto Comparer les puissances n -ièmes.

3 Comment peut-on écrire $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}}$ ($a \geq 0$) ?

4 Simplifier l'écriture de :

a) $\sqrt[3]{a^5} \times \sqrt[3]{a^7}$; b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$;

c) $\sqrt[3]{\sqrt{a^5b}} \times \sqrt[3]{\sqrt{ab^5}}$; ($a \geq 0$ et $b \geq 0$).

4. APPROCHES DE LA FONCTION LOGARITHME

La séquence qui suit propose de commencer par une exploration numérique.

Séquence 4

La touche $\boxed{\ln}$ de la calculatrice

1) Essayer de calculer $\ln x$ pour plusieurs valeurs de x (sans oublier les valeurs 0, 1, des valeurs négatives, comprises entre 0 et 1...).

Conjecturer alors, pour la fonction :

a) l'ensemble de définition ;

b) le sens de variation ;

c) les solutions des inéquations :

$$\ln x < 0 \quad \text{et} \quad \ln x > 0.$$

2) Comparer $\ln x$ et $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ pour diverses valeurs de $x \geq 1$.

Que peut-on conjecturer ?

3) Trouver un réel x tel que :

a) $\ln x > 200$;

b) $\ln x < -200$.

4) Comparer $\ln(ab)$ et $\ln a + \ln b$ pour diverses valeurs de $a > 0$ et $b > 0$. Que peut-on conjecturer ?

Les propriétés conjecturées seront établies dans le cours ; la dernière est la plus remarquable :

« pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ ».

Nous proposons d'étudier, dans la séquence 5, une propriété différentielle des fonctions dérivables vérifiant une telle égalité.

Séquence 5 L'équation fonctionnelle $f(ab) = f(a) + f(b)$

Soit f une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ telle que, pour tous $a > 0$ et $b > 0$:

$$f(ab) = f(a) + f(b).$$

1) Montrer que $f(1) = 0$.

2) Soit $a > 0$ fixé. On considère la fonction g , définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = f(ax) - f(x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et établir l'égalité $af'(ax) - f'(x) = 0$.

b) En déduire que, pour tout $a > 0$:

$$f'(a) = \frac{f'(1)}{a}.$$

c) On pose $f'(1) = k$.

En déduire que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{k}{x}$.

3) On suppose ici que $k = 1$.

a) Montrer que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

b) Donner le signe de $f(x)$ en fonction de x .

Même si la présentation de la fonction $\ln$ sera différente dans le cours (nous l'introduirons à partir de la fonction exponentielle), les propriétés ici dégagées, établies de façon différente, seront reformulées.

Regard sur...

Le mathématicien écossais John Napier (1550-1617) mit au point la première table de ... logarithmes en 1614.

C'est son nom, francisé en « Neper » qui nous sert aujourd'hui à désigner la fonction **logarithme népérien** (en abrégé $\ln$).

John Napier



1. La fonction exponentielle

1.1 GÉNÉRALITÉS

THÉORÈME 1 ET DÉFINITION 1

Il existe une unique fonction f , dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

On la nomme **fonction exponentielle** ; elle sera notée **exp**.

Commentaires

L'existence est admise pour l'instant ; nous l'établirons au *chapitre 4*.

L'unicité a été démontrée (voir *Avant-première, séquence 2, 4*).

Dans une première approche, nous avons obtenu la courbe représentative de la fonction exponentielle grâce à la méthode d'Euler (voir *figure 3, page 81*).

Conséquences pratiques

1) $\exp(0) = 1$.

2) $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$.

3) *Signe* : pour tout réel x , $\exp(x) > 0$.

4) *Sens de variation* : la fonction $\exp$ est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

... Démonstration

• Les propriétés 1) et 2) découlent immédiatement du théorème.

• Prouvons la propriété 3) : nous avons établi que la fonction exponentielle ne s'annule pas (*Avant-première, séquence 2*).

S'il existait a tel que $\exp(a) < 0$, alors, puisque $\exp(0) = 1 > 0$, la fonction s'annulerait entre a et 0 (théorème des valeurs intermédiaires).

C'est impossible. Donc, pour tout réel x , $\exp(x) > 0$.

• La propriété 4) résulte de ce que $\exp'(x) = \exp(x) > 0$.

1.2 LE NOMBRE e

Notation

Nous posons $e = \exp(1)$.

Nous avons obtenu une valeur approchée de e au *chapitre 2 (exercice 135)* grâce à l'égalité

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \text{ déduite de la méthode d'Euler.}$$

La calculatrice ⁽¹⁾ nous livre :

$$e \approx 2,718\,281\,828.$$

(1) Sur *Casio* : $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{e^x} \boxed{1} \boxed{=}$; sur *Texas TI 89* : $\boxed{\diamond} \boxed{e^x} \boxed{1} \boxed{\square} \boxed{\text{ENTER}}$.

1.3 PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

THÉORÈME 2

Pour tous réels a et b : $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.
(La fonction exponentielle transforme les sommes en produits.)

... Démonstration

Elle a été effectuée dans *Avant-première, séquence 2, 3*.

COROLLAIRE

Pour tous réels a et b et pour tout entier relatif n :

$$\begin{aligned} \bullet \exp(a-b) &= \frac{\exp(a)}{\exp(b)} ; & \bullet \exp(-b) &= \frac{1}{\exp(b)} ; \\ \bullet \exp(na) &= [\exp(a)]^n, (n \in \mathbb{Z}) ; & \bullet \exp\left(\frac{a}{n}\right) &= \sqrt[n]{\exp(a)}, (n \geq 1). \end{aligned}$$

... Démonstration

Pour tous a et b réels, on a, d'après le *théorème 2* :

- $\exp(a-b) \times \exp(b) = \exp(a-b+b) = \exp(a)$, d'où le premier résultat ;
- le deuxième résultat se déduit du premier avec $a = 0$;
- prouvons le troisième : si $n \in \mathbb{N}$, un raisonnement par récurrence facile (laissé au lecteur) permet d'établir que $\exp(na) = [\exp(a)]^n$.

Si $n < 0$, posons $n' = -n$. Alors $\exp(na) = \exp(-n'a) = \frac{1}{\exp(n'a)} = \frac{1}{[\exp(a)]^{n'}}$.

D'où $\exp(na) = [\exp(a)]^n$ dans ce cas encore.

- Le dernier résultat provient de ce que $\left[\exp\left(\frac{a}{n}\right)\right]^n = \exp\left(n \frac{a}{n}\right) = \exp(a)$.



EXEMPLE 1

Exprimer en fonction de e les nombres $\exp(n)$ ($n \in \mathbb{Z}$) et $\exp\left(\frac{1}{2}\right)$.

Les deux derniers résultats du corollaire, avec $a = 1$, donnent :

$$\exp(n) = \exp(n \times 1) = [\exp(1)]^n = e^n \text{ et } \exp\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\exp(1)} = \sqrt{e}.$$

Voir exercices 1 à 7

1.4 LA NOTATION e^x

Nous avons obtenu, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la relation $\exp(n) = e^n$ (exemple 1).

Nous poserons alors, par convention, $\exp(x) = e^x$ pour tout réel x .

La convention est légitime puisqu'elle prolonge à tout réel x l'égalité obtenue sur les entiers. De plus, les résultats du *théorème 1* et de son corollaire (nous laissons au lecteur le soin de les reformuler), produisent des formules conformes à l'usage d'une notation puissance.

1.5 PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES

THÉORÈME 3

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

... Démonstration

• Prouvons que, pour tout x , $e^x \geq x$.

La fonction $\varphi: x \rightarrow e^x - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x) = e^x - 1$.

Comme la fonction $\exp$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $e^0 = 1$, on en déduit que $\varphi'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$ et $\varphi'(x) < 0$ sur $]-\infty, 0[$.

Le tableau de variations s'en déduit (ci-contre).

Comme $\varphi(0) = 0$, il en résulte $\varphi(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

L'inégalité $e^x \geq x$ est prouvée. Comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

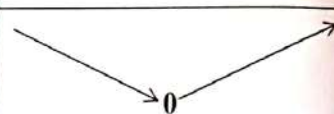
• La limite de e^x en $-\infty$ se déduit du schéma de composition ci-contre :

$$\begin{cases} x \mapsto -x \\ y \mapsto \frac{1}{e^y} \end{cases}$$

• Enfin, pour $x > 0$, on a $e^{\frac{x}{2}} \geq \frac{x}{2}$ d'après ce qui précède. Élevons au carré :

$$\left[e^{\frac{x}{2}} \right]^2 \geq \frac{x^2}{4}, \text{ soit } e^x \geq \frac{x^2}{4}.$$

On en déduit $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{4}$, ce qui conduit facilement à $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
φ'	-	0	+
φ			

Interprétations géométriques

- La courbe $\mathcal{C}_{\exp}$ admet en $-\infty$ l'axe (Ox) comme asymptote ;
- elle admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy) .

1.6 COURBE REPRÉSENTATIVE

Les propriétés précédentes (sens de variation, limites, branches infinies) permettent le tracé de $\mathcal{C}_{\exp}$ (Fig. 6). On comparera ce tracé à celui, approché, de la figure 3, page 81. Nous avons placé les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1 (voir l'exercice 28, page 99) pour cette dernière.

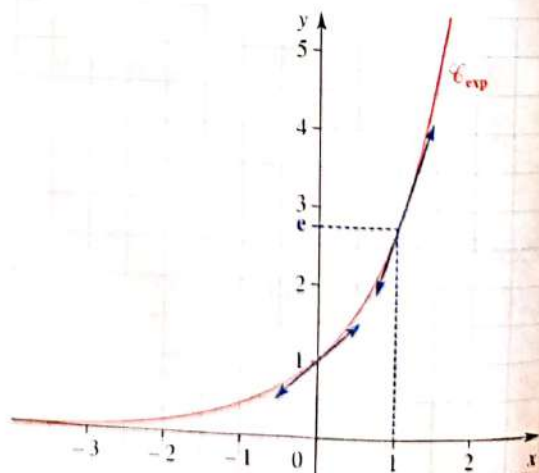


Fig. 6

2. La fonction logarithme népérien

2.1 PRÉSENTATION

Nous avons établi que la fonction exponentielle est continue et strictement croissante de $]-\infty, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$. Il en résulte que pour tout $y \in]0, +\infty[$, l'équation $e^x = y$ a une **unique solution** (voir chapitre 2, théorème 9). Autrement dit, la fonction $\exp$ est une bijection de $]-\infty, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ (voir Avant-première, partie 3).

DÉFINITION 2

La fonction **logarithme népérien** est la bijection réciproque de la fonction exponentielle. Elle est notée $\ln$.

Ainsi :

$$\begin{cases} y = \ln x \\ x \in]0, +\infty[\end{cases} \quad \text{équivalent à} \quad \begin{cases} x = e^y \\ y \text{ réel} \end{cases}$$

Conséquences immédiates

- La fonction logarithme n'est définie que pour $x > 0$.
- $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln \frac{1}{e} = -1$, puisque $e^0 = 1$, $e^1 = e$ et $e^{-1} = \frac{1}{e}$.
- Pour tout réel x : $\ln(e^x) = x$; pour tout $x > 0$: $e^{\ln x} = x$.

2.2 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE, LIMITES

La courbe représentative de la fonction logarithme se déduit de celle de la fonction $\exp$ par la réflexion d'axe Δ d'équation $y = x$ (voir Avant-première, partie 3).

Nous en déduisons, par symétrie, que la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction (Ox)** (Fig. 7).

Nous traduirons cela par :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

De plus, $\mathcal{C}_{\ln}$ admet en 0 l'asymptote (Oy) .

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty.$$

Énonçons ces résultats asymptotiques dans le théorème suivant.

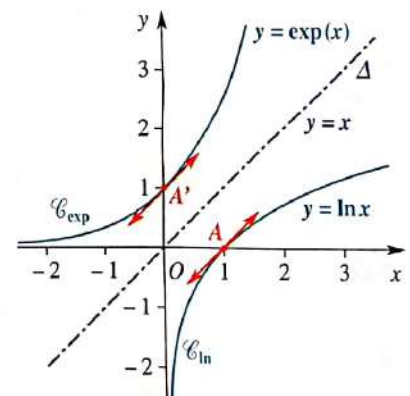


Fig. 7

THÉORÈME 4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

2.3 PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Le théorème suivant rassemble les résultats.

THÉORÈME 5

Pour tous réels a et b strictement positifs et pour tout entier relatif n , on a :

- $\ln ab = \ln a + \ln b$ ($\ln$ transforme les produits en sommes) ;

- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ et $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$;

- $\ln a^n = n \ln a$ et $\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a$ (n entier, $n \geq 1$).

La démonstration utilise les propriétés analogues de l'exponentielle ; elle sera proposée dans l'exercice 27, page 99.



EXEMPLE 2

Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres $A = \ln 36$ et $B = \ln 2,25$.

- $A = \ln(2^2 \times 3^2) = \ln(2^2) + \ln(3^2) = 2\ln 2 + 2\ln 3$.

- $B = \ln \frac{9}{4} = \ln 9 - \ln 4 = \ln(3^2) - \ln(2^2) = 2\ln 3 - 2\ln 2$.

Voir exercices 20 à 26

2.4 DÉRIVÉE, VARIATIONS ET SIGNE

Étude

Puisque la réflexion s_A (voir cours, partie 2.2) conserve le contact, il en résulte que la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ admet une tangente en tout point, donc la fonction $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Soit $x > 0$; dérivons la fonction $x \mapsto \exp(\ln x) = x$.

Il vient $\ln'(x) \times \exp'(\ln x) = 1$, soit, puisque $\exp' = \exp$:

$$\ln'(x) \times \exp(\ln x) = 1, \text{ ou encore } \ln'(x) \times x = 1.$$

Énonçons le résultat.

THÉORÈME 6

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Conséquences

1 Sens de variation

Puisque $\frac{1}{x} > 0$ sur $]0, +\infty[$, il en résulte que la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2 Signe de $\ln x$

- $\ln x = 0$ équivaut à $x = 1$;
- $\ln x < 0$ équivaut à $0 < x < 1$;
- $\ln x > 0$ équivaut à $x > 1$.

3. La croissance comparée

3.1 COMPARAISON DE e^x , x^n ($n \in \mathbb{N}^*$) et $\ln x$ en $+\infty$

Le résultat suivant est fondamental. Il permet de retrouver tous les cas.

THÉORÈME 7

Pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Ce résultat peut encore s'énoncer :

« À l'infini, les puissances de x l'emportent sur le logarithme de x et l'exponentielle de x l'emporte sur toute puissance de x . »

... Démonstration

- Le premier résultat résulte immédiatement de ce que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ (théorème 4).}$$

- Pour le second, écrivons :

$$\frac{e^x}{x^n} = \left[\frac{e^{\left(\frac{x}{n}\right)}}{\left(\frac{x}{n}\right)} \right]^n \times \frac{1}{n^n}.$$

Le théorème de composition des limites fournit le résultat annoncé, compte tenu de ce que :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty.$$

La figure 8 ci-contre illustre la croissance comparée de e^x , x^n et $\ln x$, d'un point de vue graphique.

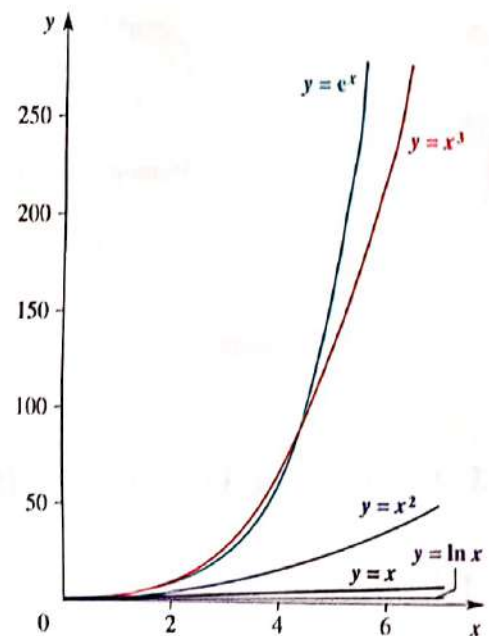


Fig. 8

3.2 AUTRES RÉSULTATS

COROLLAIRE 1

Si P est un polynôme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{|P(x)|} = +\infty$

(à l'infini, l'exponentielle l'emporte sur tout polynôme).

COROLLAIRE 2

Pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

Ces résultats découlent du théorème 7. Ils seront prouvés dans les exercices 48 et 49, page 100.

4. Puissance réelle de a ($a > 0$)

4.1 LA NOTATION a^b ($a > 0$, b RÉEL)

DÉFINITION 3

Pour tout $a > 0$ et pour tout réel b , on pose :

$$a^b = e^{b \ln a} \quad (a^b \text{ se lit « } a \text{ puissance } b \text{ »}).$$

Commentaires

- Cette définition est cohérente avec la définition usuelle des puissances entières : si $n \in \mathbb{Z}$, a^n et $e^{n \ln a}$ sont égaux puisqu'ils ont le même logarithme, ce qui justifie l'extension.
- Nous venons de donner un sens à des expressions telles que $3^{1,8}$, $51^{-\sqrt{2}}$ ou 2^π , dont on peut obtenir des valeurs approchées (calculatrices : touche $\sqrt{x}$ ou $\wedge$). Mais la définition donnée de a^b exige (logarithme oblige) que $a > 0$.

Règles de calcul

Pour tous réels $a > 0$, $a' > 0$ et quels que soient b et c réels :

$$a^b \times a^c = a^{b+c}; \quad a^{-b} = \frac{1}{a^b} \quad \text{et} \quad (a^b)^c = a^{bc};$$

$$a^b \times a'^b = (aa')^b \quad \text{et} \quad \ln(a^b) = b \ln a.$$

... **Démonstration** : voir exercice 59, page 101.

Cas des racines n -ièmes : pour tous $a > 0$ et $n \geq 1$, il est clair que les nombres $\sqrt[n]{a}$ et $a^{\frac{1}{n}}$ ont le même logarithme, à savoir : $\frac{1}{n} \ln a$. On en déduit :

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

4.2 DÉRIVÉE DE $x \mapsto x^\alpha$ (α RÉEL)⁽¹⁾

THÉORÈME 8

La fonction $x \mapsto x^\alpha$ (α réel fixé) est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.
Sa dérivée est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

... **Démonstration**

Puisque $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x}$.

Cela s'écrit encore $f'(x) = \frac{\alpha}{x} \times x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$.



EXEMPLE 3

Pour $x > 0$, déterminer la dérivée de $f: x \mapsto x^2 \sqrt{x}$.

$$f(x) = x^2 \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}}. \text{ Donc } f'(x) = \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2} x \sqrt{x}.$$

Voir exercices 57 à 61

(1) Ces fonctions, appelées « puissance α », sont désormais hors programme, en ce qui concerne leur étude générale. Nous les côtoierons cependant dans certains problèmes.

5. Compléments sur les dérivées

5.1 NOUVEAUX RÉSULTATS

Les résultats concernant les dérivées de certaines composées sont rassemblés dans le tableau suivant (ils résultent du théorème de dérivée d'une fonction composée).

fonction	dérivées	commentaires
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	sur tout intervalle où u est dérivable et $u(x) > 0$
e^u	$u' e^u$	sur tout intervalle où u est dérivable
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1}$	sur tout intervalle où u est dérivable et $u(x) > 0$

→ EXEMPLE 4

Trouver la dérivée de $f: x \mapsto e^{\sin x}$ et $g: x \mapsto (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \cos x e^{\sin x}$.

$g(x)$ s'écrit $(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$; g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$g'(x) = \frac{3}{2} \times 2x(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = 3x\sqrt{x^2 + 1}.$$

Voir exercices 67 à 78

5.2 DEUX APPROXIMATIONS AFFINES EN 0

Pour une fonction f dérivable en 0, nous connaissons l'approximation :

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x.$$

Appliquons-la aux fonctions $f: x \mapsto \ln(1+x)$ et $\exp$; on retiendra :

À retenir

Pour x voisin de 0, $\ln(1+x) \approx x$ et $e^x \approx 1+x$.

5.3 L'« ÉQUATION » $f' = kf$

THÉORÈME 9

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$f' = kf \text{ et } f(0) = A \text{ (A fixé). Il s'agit de la fonction } x \mapsto Ae^{kx}.$$

... Démonstration

- *Existence* : il est clair que la fonction $x \mapsto Ae^{kx}$ vérifie les deux conditions.
- *Unicité* : nous l'avons établie lorsque $A = 1$ (Avant-première, séquence 2). La preuve est identique avec A réel quelconque.

1. Étude de nouvelles fonctions

OBJECTIF

Il s'agit d'adapter les techniques usuelles d'études de fonctions aux fonctions construites avec des exponentielles ou des logarithmes.

PROBLÈME 1

Étudier et représenter graphiquement la fonction :

$$f_k : x \mapsto e^{-kx^2} \quad (k > 0).$$

• La fonction f_k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et elle est manifestement **paire**. Nous l'étudierons sur $[0, +\infty[$.

• Calculons sa dérivée :

$$f'_k(x) = -2kx e^{-kx^2}.$$

Il est clair que $f'_k(x) < 0$ lorsque $x > 0$, donc la fonction f_k est décroissante sur $[0, +\infty[$.

De plus, sans difficulté :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-kx^2} = 0.$$

Ces renseignements sont consignés dans le tableau ci-contre.

x	0	$+\infty$
f'_k		-
f_k	1	$\searrow 0$

• Nous avons représenté ci-dessous sur la *figure 9* quelques-unes des courbes $\mathcal{C}_k$ représentant la fonction f_k pour différentes valeurs de k ($k = 0,5 ; 1 ; 2 ; 3$).

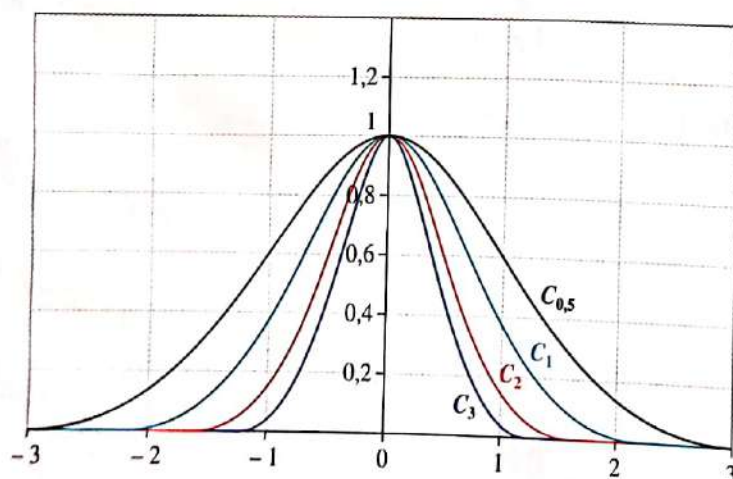


Fig. 9

PREMIER CONTACT

Courbes de Gauss

Les courbes ci-contre sont d'un emploi courant en probabilités et statistiques⁽¹⁾ – notamment la courbe

$\mathcal{C}_{0,5}$, d'équation $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$, dont l'allure « en cloche » est bien connue des utilisateurs.

(1) C'est la raison pour laquelle nous avons choisi de présenter ces fonctions ici, bien que leur étude n'introduise aucune nouveauté technique.

PROBLÈME 2

Comparer les entiers n^{n+1} et $(n+1)^n$, où n est un entier naturel.

1 L'idée

La manipulation des puissances appelle des logarithmes : l'inégalité $n^{n+1} > (n+1)^n$, par exemple, équivaut à $(n+1)\ln n > n\ln(n+1)$, soit encore $\frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1}$.

D'où l'idée d'étudier le sens de variation de $f: x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $[1, +\infty[$.

2 Solution rédigée

$f: x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

Le sens de variation de f s'en déduit aisément (voir tableau ci-contre).

x	1	e	$+\infty$
f'	+	0	-
f	0	$\frac{1}{e}$	0

Justifications

- $\ln a^n = n \ln a$;
- la fonction $\ln$ est strictement croissante.

Calculs auxiliaires

- $f(1) = \frac{\ln 1}{1} = 0$;
- $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (théorème 4).

Conclusion : f étant décroissante sur $[e, +\infty[$, on a, pour $n \geq 3$, $\frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1}$. Donc, pour $n \geq 3$, $n^{n+1} > (n+1)^n$.

Il reste à traiter à part les cas $n = 1$ et $n = 2$; on a, sans besoin de théorie, $1^2 < 2^1$ et $2^3 < 3^2$.

BIEN NOTER

Quelle étude ?

Nul besoin de représenter graphiquement la fonction f . Seules les propriétés utiles à notre problème sont ici étudiées.

Dans la foulée

1 Une famille d'exponentielles

1) Étudier la fonction $g_k: x \mapsto e^{-kx}$ (k est un réel donné, $k > 0$).

2) Représenter sur un même dessin les courbes représentatives C_k de g_k pour $k = 0,5$; $k = 1$; $k = 2$ et $k = 3$.

3) Pour apprécier la rapidité de la décroissance des fonctions g_k et f_k (voir problème 1), résoudre les inéquations : a) $g_1(x) \leq 10^{-6}$; b) $f_1(x) \leq 10^{-6}$.

2 La fonction $f: x \mapsto x - 1 + \ln \frac{x-2}{x+2}$ sur $]2, +\infty[$

1) Étudier les limites de f en 2 et en $+\infty$.

2) Montrer que la courbe C_f admet en $+\infty$ une asymptote oblique Δ , et positionner C_f par rapport à Δ .

3) Étudier les variations de f sur $]2, +\infty[$.

4) Représenter graphiquement C_f et Δ .

3 Un problème de minimum

Problème : on veut trouver (s'il existe) le point de la courbe représentative de la fonction logarithme qui est le plus près de l'origine (en repère orthonormal).

1) Étudier les variations de $g: x \mapsto x^2 + \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

Montrer que g s'annule pour un unique réel α et préciser le signe de g .

2) En déduire le sens de variation de la fonction $f: x \mapsto x^2 + (\ln x)^2$ sur $]0, +\infty[$.

3) Résoudre alors le problème posé.

2. Fonction logarithme décimal

OBJECTIF

Présenter la fonction logarithme décimal et se familiariser avec son emploi en Mathématiques et dans les Sciences appliquées.

PROBLÈME

La fonction logarithme décimal (notée $\log$) est définie pour $x > 0$ par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

- 1) Calculer $\log(10^n)$ pour n entier relatif.
- 2) Étudier les variations de la fonction $\log$ et la représenter graphiquement.
- 3) Soit N un entier ($N \geq 1$). Montrer que le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de N est $1 + E(\log N)$ (où $E(x)$ est la partie entière du réel x).
- 4) Application : avec combien de chiffres s'écrit $2\,002^2\,003$?

① Calcul de $\log(10^n)$ ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\log(10^n) = \frac{\ln(10^n)}{\ln 10} = \frac{n \ln 10}{\ln 10} = n.$$

Nous notons en particulier que $\log 1 = \log 10^0 = 0$ et $\log 10 = 1$.

② Étude de la fonction

• Un point de départ

Il faut bien noter que $\log x$ est de la forme $\log x = k \times \ln x$ avec

$$k = \frac{1}{\ln 10} > 0. \text{ Tout en découle.}$$

• Variations, limites, courbe représentative

Compte tenu de la remarque précédente, la fonction $\log$ a les mêmes variations et les mêmes limites que la fonction $\ln$.

Nous l'avons représentée ci-dessous (Fig. 10).

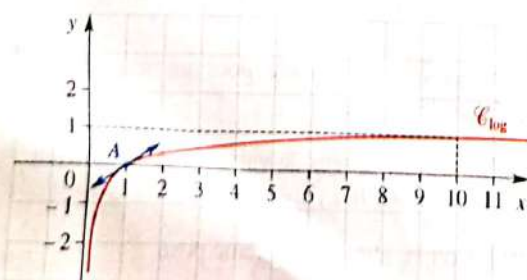


Fig. 10

PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

En fait $\log$ vérifie la même égalité fonctionnelle que $\ln$:

$$\log(ab) = \log a + \log b,$$

et possède donc les mêmes propriétés algébriques.

Noter que :

$$\log'(x) = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x},$$

ce qui permet de placer la tangente au point $A(1, 0)$.

• Nombre de chiffres dans l'écriture décimale

• Une idée

Compte tenu de ce que la valeur de log est très simple sur les puissances de dix (question 1)), mettons-les au premier plan.

– Tout entier N est compris entre deux puissances de 10 successives : il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $10^p \leq N < 10^{p+1}$;

– dans ce cas, $p + 1$ est le nombre de chiffres.

• Solution

Soit p l'unique entier tel que $10^p \leq N < 10^{p+1}$; alors :

$$\log(10^p) \leq \log N < \log(10^{p+1}) \text{ (log est croissante) ;}$$

on en tire $p \leq \log N < p + 1$ (question 1)).

Donc $E(\log N) = p$.

Le nombre de chiffres est donc $p + 1$, soit $1 + E(\log N)$.

4 Application

$\log(2\,002^2\,003) = 2\,003 \log 2\,002 \approx 6\,612,83\dots$ (calculatrice).

Conclusion : $2\,002^2\,003$ s'écrit en base dix avec 6 613 chiffres.

Des exemples à l'appui :

• $N = 847$

$$10^2 \leq 847 < 10^3.$$

N s'écrit avec trois chiffres ;

• $N = 13\,522$ (cinq chiffres)

$$10^4 \leq N < 10^5.$$

INFO

Logarithme de base a

• On pose $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ pour

$a > 0$.

• Ainsi $\ln = \log_e$ (base e) et $\log = \log_{10}$ (base 10).

• $\log_a$ vérifie les mêmes propriétés algébriques que $\ln$.

Dans la foulée

4 Grands nombres premiers

Le plus grand nombre premier connu en 1999 était $N = 2^{6\,972\,593} - 1$ (découvert par Hajratwala, Woltman et Kurowski).

Avec combien de chiffres s'écrit-il en base dix ?

5 En sismologie

La magnitude d'un séisme d'intensité I est mesurée sur l'échelle de Richter par :

$$M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

où I_0 est une intensité de référence.

1) Placer sur l'échelle de Richter les séismes suivants :

a) îles Macquarie (1989), $I = 1,995 \times 10^8 I_0$;

b) Californie (1992), $I = 3,16 \times 10^7 I_0$;

c) Indonésie, îles Flores (1993), $I = 6,3 \times 10^6 I_0$.

2) L'énergie E (en joules) libérée au foyer du séisme est liée à la magnitude par la relation :

$$\log E = a + bM,$$

a et b étant des constantes.

Calculer a et b sachant qu'un séisme de magnitude 8 met en jeu environ 30 000 fois plus d'énergie qu'un séisme de magnitude 5, lui-même libérant une énergie de $0,2 \cdot 10^{20}$ joules.



3. Étude de nouvelles suites

OBJECTIF

Les fonctions introduites dans ce chapitre permettent l'étude de nouvelles suites. Nous allons illustrer cet aspect.

PROBLÈME

On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Étudier la limite éventuelle de (u_n) . (On pourra poser $v_n = \ln u_n$.)

1 Quelles idées ?

Suivre l'indication $v_n = \ln u_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ n'apportera rien si l'on en reste là (présence d'une forme du type « $0 \times (+\infty)$ »).

Il faut songer (en posant $x = \frac{1}{n}$) que v_n s'écrit $\frac{\ln(1+x)}{x}$, ce qui est le taux d'accroissement de la fonction $\ln$ au point 1. (Ce taux a pour limite $\ln'(1) = 1$ en 0.)

2 Solution rédigée

• v_n s'écrit $v_n = t\left(\frac{1}{n}\right)$, avec $t(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} t(x) = 1$ (voir plus haut), il en résulte que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1.$$

• Puisque $v_n = \ln u_n$, on a, inversement, $u_n = e^{v_n}$.

Nous en déduisons facilement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^1 = e$.

À RETENIR

Deux taux d'accroissement

Reconnaître les deux taux suivants fournit deux limites classiques :

• taux de $\ln$ au point 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln'1 = 1 ;$$

• taux de $\exp$ en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1.$$

Dans la foulée

6 Encore un taux d'accroissement

1) Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$?

2) En déduire la limite de la suite de terme général

$$u_n = n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right).$$

7 Avec des racines n -ièmes

On considère les quatre suites de terme général

$$a_n = \sqrt[n]{n}, \quad b_n = \sqrt[n]{n+10}, \quad c_n = \sqrt[10n]{n}, \quad \text{et} \quad d_n = \sqrt[n]{n^{100}}.$$

Montrer que les quatre suites ont la même limite.

Applications

Exponentielle : définition, propriétés

- 1 Exprimer en fonction du nombre e chacun des nombres :

$$A = \exp(-4), B = \frac{\exp(2,8)}{\exp(0,8)}$$

$$\text{et } C = \exp(\sqrt{2}-5) \times \exp(2-\sqrt{2}).$$

- 2 Simplifier chacune des expressions :

$$\text{a) } \sqrt{e} \times e^2; \quad \text{b) } e^{1,2} \times e; \quad \text{c) } e^{-3} \sqrt{e}; \quad \text{d) } \frac{e^2}{\sqrt{e}}.$$

- 3 Simplifier chacune des expressions :

$$\text{a) } (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2; \quad \text{b) } e^{2x} + e^{-2x} - (e^x - e^{-x})^2.$$

- 4 Montrer que la fonction $f: x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ est impaire.

- 5 On pose, pour tout x , $f(x) = \frac{6}{1 + e^{-x}}$.

1) Vérifier l'égalité $f(-x) = 6 - f(x)$.

2) En déduire que la courbe représentative de f admet le point $\Omega(0, 3)$ comme centre de symétrie.

- 6 Soit u_n une suite arithmétique de raison r . On pose $v_n = e^{u_n}$.

Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

- 7 Montrer que chacune des suites ci-après est géométrique, et préciser sa raison.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } u_n = e^{-n}; & \text{b) } u_n = \sqrt{e^n}; \\ \text{c) } u_n = e^{3n+5}; & \text{d) } u_n = \frac{e^{(n+3)^2}}{e^{(n^2)}}. \end{array}$$

Dans les exercices 8 à 13, résoudre l'équation ou l'inéquation proposée.

- 8 a) $\exp(x) = e^2$; b) $\exp(x) < e^2$.
 9 a) $e^{3x-1} = 1$; b) $e^{3x-1} \geq 1$.
 10 a) $e^{3-x} \leq 0$; b) $(e^x - e^{-x})^2 = 0$.
 11 a) $e^{x^2-x} = e$; b) $e^{x^2-x} \leq e$.
 12 a) $(x+3)e^{x-x^4+1} \leq 0$; b) $\frac{x}{e^x} > 0$.
 13 a) $\frac{e^x+5}{e^{-x}+5} = 1$; b) $e^{3-x} \times e^{2x-1} = [e^{5+x}]^2$.

Limites, courbe représentative

- 14 Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions f, g et h :

$$\text{a) } f(x) = e^x + e^{-x}; \quad \text{b) } g(x) = \frac{3}{6 + 2e^{-x}}; \quad \text{c) } h(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}.$$

- 15 Étudier la limite éventuelle en $+\infty$ de f et g :

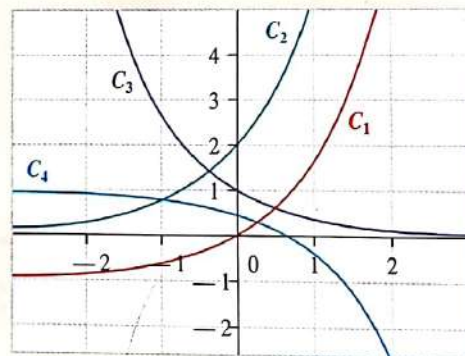
$$\text{a) } f: x \mapsto \frac{x+3}{e^x+1}; \quad \text{b) } g: x \mapsto \frac{e^x+x}{3-2e^x}.$$

- 16 Déterminer la limite éventuelle en 0 de chacune des fonctions :

$$\text{a) } x \mapsto \frac{e^x-1}{x}; \quad \text{b) } x \mapsto \frac{e^{3x}-1}{x}.$$

- 17 Identifier, parmi les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ ci-dessous, les courbes représentatives des fonctions :

$$\begin{array}{ll} \bullet f_1: x \mapsto 2e^x; & \bullet f_2: x \mapsto 1 - \frac{e^x}{2}; \\ \bullet f_3: x \mapsto e^{-x}; & \bullet f_4: x \mapsto e^x - 1. \end{array}$$



- 18 Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle. Montrer que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 passe par l'origine du repère.

19 De la Terre à la Lune

Si l'on devait représenter graphiquement la fonction exponentielle (dans un repère orthonormal, unité 1 cm) sur l'intervalle $[0, 25]$, montrer que la hauteur de la bande de papier dépasserait la distance Terre-Lune (385 000 km) !

La croissance exponentielle

Hyper-rapide, elle est illustrée par l'exercice précédent. On l'évoque à propos de la croissance sans frein de certaines populations. Rendez-vous au chapitre 5.

Logarithme : définition, propriétés algébriques

20 Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions :

- a) $f: x \mapsto \ln(1-3x)$; b) $f: x \mapsto \ln(x^2-1)$;
c) $f: x \mapsto \ln(x+1) + \ln(x-1)$; d) $f: x \mapsto \ln(1-e^x)$.

21 Exprimer, en fonction de $\ln 2$ seulement, les nombres :

- a) $\ln 32$; b) $\ln 4\,096$; c) $\ln\left(\frac{1}{8}\right)$; d) $\ln 0,0625$.

22 Exprimer, en fonction de $a = \ln 2$ et $b = \ln 5$, les nombres :

- a) $\ln \frac{8}{25}$; b) $\ln 625$; c) $\ln(10^6)$; d) $\ln 0,08$;

e) $\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100}$.

23 Simplifier les expressions :

a) $\ln(e^5)$; b) $\ln \sqrt{e} + \ln \frac{1}{e}$;

c) $\exp(\ln(3 + \sqrt{2}))$; d) $\ln(e^3 \sqrt{e})$.

24 Même exercice avec :

a) $e^{-\ln 3}$; b) $\exp\left[-\ln \frac{1}{3}\right]$; c) $e^{\ln 5 - \ln 2}$;

d) $\ln\left(\frac{1}{e^{10}}\right)$; e) $\exp(5 \ln 2)$.

25 La liste suivante comporte un intrus. Le débusquer.

$A = \ln \sqrt{e^3} + e^{\ln \sqrt{3}}$; $B = \ln(4\sqrt{e})$;

$C = \exp(-2 \ln 2)$; $D = \frac{e^{\ln 3 - \ln 2}}{e^{\ln 3 + \ln 2}}$.

26 Démontrer que les fonctions suivantes sont impaires :

a) f définie sur $] -3, 3[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$;

b) g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Piste Pour g , penser à l'expression conjuguée.

27 Démontrer le théorème 5 du cours.

Avec la représentation graphique

28 Soit $A(a, \ln a)$ un point de $\mathcal{C}_{\ln}$.

1) Donner une équation de la tangente en A à $\mathcal{C}_{\ln}$.

2) Montrer que cette tangente passe par l'origine du repère, si et seulement si, $a = e$.

Deux applications

29 Datation au carbone 14

Les archéologues et les paléontologues datent les objets découverts contenant du carbone (restes d'êtres vivants : os, fossiles, ...) en mesurant la proportion de l'un de ses isotopes, le carbone 14, encore présent dans l'objet.

En effet, à la mort d'un être vivant, le carbone 14 présent dans son organisme se désintègre au fil des années, de sorte que, si p est la proportion de C_{14} restante au bout de N années, alors $N = -8\,310 \ln p$.

1) Le squelette d'un « Homme de Cro-Magnon » contient 5 % du carbone 14 initial. Quel âge a-t-il ?

2) Lucy est la forme la plus ancienne d'Hominidé connu ; les spécialistes lui donnent 4,4 millions d'années.

A-t-on pu raisonnablement dater les fragments trouvés à l'aide du carbone 14 ?

3) Découverte dans un glacier en 1991, la momie Hibernatus contenait 52,8 % (à 1 % près) du carbone 14 initial.

Donner un encadrement de l'âge d'Hibernatus.

30 Radioactivité

La loi d'évolution d'un corps radioactif est donnée par la formule $N_t = N_0 e^{-at}$, a étant une constante positive et N_t le nombre d'atomes contenus dans un échantillon de ce corps au temps t .

1) Représenter graphiquement la fonction $t \mapsto N_t$.

2) On désigne par T le temps au bout duquel $N_T = \frac{1}{2} N_0$.

Exprimer a en fonction de T . Comparer N_{t+T} à N_t .

T est appelé « demi-vie » ou « période » du corps radioactif.

3) Au bout de combien de temps 1 g de radium perdra-t-il une masse de 1 mg (la période du radium étant de 1 622 ans) ?

(La masse est proportionnelle au nombre d'atomes.)

Deux époux, trois Nobel

1898 : Pierre Curie et Marie Skłodowska, son épouse, découvrent le polonium et le radium dont ils étudient la radioactivité ; ils obtiennent le Nobel de Physique en 1903.

1910 : Marie Curie isole le radium avec A. Debierne ; elle obtient le Nobel de Chimie en 1911.



Le pour et le contre

« La moindre chose contient un peu d'inconnu. Trouvons-le. »

Guy de Maupassant

« Je suis l'équation triste au bras d'une inconnue. »

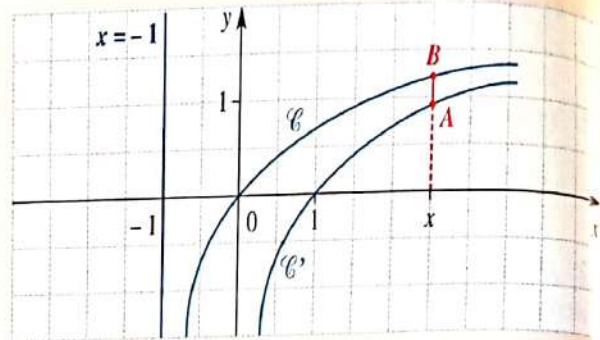
Léo Ferré

Dans les exercices 31 à 43, résoudre l'équation, l'inéquation ou le système proposé, après avoir déterminé l'ensemble de définition des expressions en présence.

- 31 a) $\ln x = 3$; b) $\ln(3x-1) = 5$;
c) $\ln x + \ln(x-7) = \ln 2$.
- 32 a) $e^x = -2$; b) $3e^x = e^{-x}$; c) $e \cdot e^{5x-3} = 1$.
- 33 a) $e^{2-7x} = 10$; b) $(e^x-3)(e^x-4) = 0$.
- 34 a) $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$;
b) $\ln(x^2+4x+3) = \ln(x+7)$.
- 35 a) $e^{1-3x} \geq 12$; b) $e^{1+\ln x} < \ln 2$.
- 36 $e^{2x} - 14e^x + 33 = 0$. (Poser $X = e^x$.)
- 37 $e^{2x} = 5e^x + 24$. (Poser $X = e^x$.)
- 38 $e^x - 7 + 6e^{-x} = 0$. (Poser $X = e^x$.)
- 39 a) $\frac{5e^x}{3-10e^x} = 2$; b) $\ln(e^{2x}-2e^x+1) = 3$.
- 40 a) $(\ln x)^2 - 4\ln x - 77 = 0$;
b) $e^{4x} - 4e^{2x} - 77 = 0$. (Poser $X = \dots$)
- 41 a) $\begin{cases} e^x e^y = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases}$;
b) $\begin{cases} e^x - 2e^y = -5 \\ 3e^x + e^y = 13 \end{cases}$. (Poser $X = e^x$, $Y = e^y$.)
- 42 $e^{3x} + 12e^{2x} - 61e^x + 48 \geq 0$. (Poser $X = e^x$ et factoriser, après avoir remarqué une racine évidente.)
- 43 a) $e^{x^2-5x} \geq 1$; b) $e^{2x} - 3e^{x+1} + 2e^{x+2} = 0$.
- 44 Déterminer le plus petit entier n vérifiant :
a) $1,0001^n > 10^{100}$; b) $0,999^n < 10^{-100}$.

45 La limite de l'écart

Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \ln(x+1)$ et $x \mapsto \ln x$.



Quelle est la limite éventuelle de « l'écart » AB lorsque x tend vers $+\infty$.

46 Calculer les limites, si elles existent, des fonctions suivantes en 0 et en $+\infty$.

a) $x \mapsto \sqrt{1 + (\ln x)^2}$; b) $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$; c) $x \mapsto x - \ln x$.

47 1) Déterminer les limites de la fonction $f: x \mapsto \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$

aux bornes de son ensemble de définition (quatre calculs).

2) En déduire que C_f admet deux asymptotes.

48 Une preuve

Le but de cet exercice est de démontrer le corollaire 1 du théorème 7.

Pour cela, on pose, pour $n \geq 1$:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0).$$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{|P(x)|}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{|P(x)|}$.

49 Une autre preuve

Démontrer le corollaire 2 du théorème 7.

50 Déterminer les limites éventuelles des fonctions suivantes en 0 et en $+\infty$.

a) $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; b) $x \mapsto \sqrt{x} \ln x$; c) $x \mapsto x \ln(\sqrt{x})$.

51 Déterminer les limites éventuelles des fonctions suivantes en $+\infty$ et $-\infty$.

a) $x \mapsto x^2 e^{-x}$; b) $x \mapsto (1-3x^2)e^x$; c) $x \mapsto \frac{\sqrt{e^x+1}}{x}$.

52 Même exercice avec :

a) $x \mapsto x e^x - x^2$; b) $x \mapsto \frac{e^{2x}}{e^x + x^2}$.

53 Démontrer les deux résultats suivants :

Pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} \right) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[n]{x} \ln x) = 0$.

Dans les exercices 54 à 56, déterminer les limites demandées en remarquant que chaque fonction s'exprime à l'aide d'un taux d'accroissement.

54 Deux limites de base

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

$$55 \quad \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}.$$

$$56 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}.$$

Puissances – Racines n -ièmes

57 Soit x un réel strictement positif. Mettre sous la forme x^α les nombres suivants :

$$x\sqrt{x}; \sqrt[5]{x}; \sqrt{\sqrt{x^3}}; \frac{1}{\sqrt{x^{0,6}}}; \frac{x^2}{x^{0,2}\sqrt{x}}; \sqrt[3]{x} \times \sqrt[4]{x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^2\sqrt{x}}.$$

58 Sans calculatrice, simplifier chacun des nombres suivants :

$$12\sqrt{10^{-12}}; \sqrt[5]{243}; 4^{\frac{3}{2}}; 8^{\frac{2}{3}}; 27^{\frac{4}{3}} \quad \text{et} \quad 625^{0,75}.$$

59 Démontrer les règles de calcul sur les puissances (voir cours, page 90).

Dans les exercices 60 et 61, mettre $f(x)$ sous la forme « x^α » et calculer $f'(x)$.

$$60 \quad \text{a) } f(x) = \sqrt[5]{x}; \quad \text{b) } f(x) = x\sqrt{x};$$

$$\text{c) } f(x) = x^2 \times \sqrt[3]{x}.$$

$$61 \quad \text{a) } f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}; \quad \text{b) } f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}; \quad \text{c) } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3}.$$

Dans les exercices 62 à 66, résoudre l'équation proposée.

$$62 \quad \text{a) } 10^x = 3; \quad \text{b) } 10^{-x} = 2.$$

$$63 \quad \text{a) } 5^x = 15\,625; \quad \text{b) } 0,5^{x+3} = e.$$

$$64 \quad \text{a) } 2^{x+3} = 3^{x+2}; \quad \text{b) } \sqrt[5]{x} = 2x.$$

$$65 \quad \text{a) } 3^x = 4^{x^2}; \quad \text{b) } 2002^x = 2003.$$

$$66 \quad \text{a) } 4^x - 12 \times 2^x - 45 = 0; \quad \text{b) } 2^{x-1} + 2^{2-x} = 3.$$

Piste Poser $X = 2^x$.

Avec les dérivées

Dans les exercices 67 à 78, préciser sur quel intervalle (ou réunion d'intervalles) la fonction est dérivable, et calculer sa dérivée.

$$67 \quad \text{a) } f(x) = \ln(3x+2); \quad \text{b) } f(x) = \ln(x^2-1).$$

$$68 \quad \text{a) } f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2; \quad \text{b) } f(x) = \ln(\ln x).$$

$$69 \quad \text{a) } f(x) = x \ln x - x; \quad \text{b) } f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

$$70 \quad \text{a) } f(x) = e^{5x}; \quad \text{b) } f(x) = e^{4-x}.$$

$$71 \quad \text{a) } f(x) = e^{\cos x}; \quad \text{b) } f(x) = e^{x^2+5x}.$$

$$72 \quad \text{a) } f(x) = 3^x; \quad \text{b) } f(x) = \frac{1}{2^x}.$$

$$73 \quad \text{a) } f(x) = 5^{\sqrt{x}}; \quad \text{b) } f(x) = x^x.$$

$$74 \quad \text{a) } f(x) = x^2 e^{-x^2}; \quad \text{b) } f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

$$75 \quad \text{a) } f(x) = e^{\frac{1}{x}}; \quad \text{b) } f(x) = (x^2+1)^{0,2}.$$

$$76 \quad \text{a) } f(x) = \sqrt[3]{x^2+x+1}; \quad \text{b) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}.$$

$$77 \quad \text{a) } f(x) = (3x+2)\sqrt{3x+2};$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

$$78 \quad \text{a) } f(x) = \ln(e^x-3); \quad \text{b) } f(x) = e^{-2e^{-3x}}.$$

79 En utilisant les approximations affines $\ln(1+x) \approx x$ et $e^x \approx 1+x$, pour x voisin de 0, donner, sans calculatrice, une valeur approchée des nombres suivants :

$$A = \ln 1,003; \quad B = e^{-0,01}; \quad C = \ln 1,96 - \ln 2 \quad \text{et} \quad D = e^{-0,03} + e^{0,04}.$$

Les exercices 80 à 82 font intervenir la « dérivée n -ième » d'une fonction, c'est-à-dire la dérivée de la dérivée de ... de sa dérivée (n fois). On la note $f^{(n)}$.

80 Calculer la dérivée n -ième de la fonction $x \mapsto e^{5x}$.

81 Soit $f: x \mapsto xe^x$. Montrer par récurrence que la dérivée n -ième de f est la fonction $x \mapsto (x+n)e^x$.

82 On pose $f(x) = e^x \cos x$.

Exprimer $f^{(4)}(x)$ en fonction de $f(x)$.

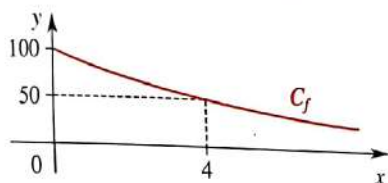
L'équation $f' = kf$

L'étude de telles « équations » – appelées « équations différentielles » – sera poursuivie et complétée au chapitre 5. Les exercices suivants utilisent le seul théorème 9 du cours.

83 Dans chaque cas, donner une expression de $f(x)$ (f étant une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$) en fonction de x et d'une constante arbitraire.

- a) $f' = 3f$; b) $f = 2f'$;
c) $f' = -0,3f$; d) $2f + 3f' = 0$.

84 Une fonction f , solution de l'équation $f' = kf$, est représentée ci-dessous.



Exprimer $f(x)$ en fonction de x .

85 Dans chaque cas, expliciter $f(x)$:

- a) $f' + 2f = 0$, $f(0) = 7$; b) $f' - 5f = 0$, $f(0) = 60$.

86 Même exercice avec :

- a) $f' = 0,003f$, $f(5) = 8$; b) $f' = -0,2f$, $f(10) = 3$.

87 La première loi de Kirchhoff

Dans un circuit électrique comprenant une résistance r et une bobine d'inductance L , on montre que si u est la tension aux bornes de la bobine, celle-ci est parcourue par un courant $i(t)$

vérifiant : $r i(t) + L \frac{di}{dt} = u$ (t est le temps).

Si à $t = 0$ on coupe la tension, exprimer $i(t)$ en fonction de t , r , L et $i(0)$.

88 Croissance végétale

Au début de la croissance de certaines espèces végétales (telles que le coton, le maïs, ...), on estime que le poids de la plante varie proportionnellement à lui-même. Pour une espèce donnée de coton, le poids P (en g par jour) varie en fonction de t (en jour) selon l'équation $P'(t) = 0,18P(t)$.

Sachant que $P(1) = 2$, calculer $P(30)$.



Brèves de cours

89 Quelle est la dérivée de chacune des fonctions :

$$x \mapsto e^x ; x \mapsto \ln x ; x \mapsto \sqrt[3]{x} ?$$

90 Résoudre les équations :

a) $e^{1-3x} = 2$; b) $\ln(1-3x) = 2$.

91 Étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de :

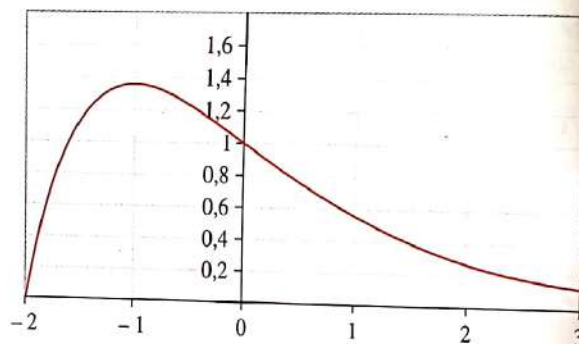
$$f: x \mapsto \frac{120}{5 + 7e^{-3x}}.$$

92 Calculer la dérivée de la fonction de l'exercice précédent.

93 Soit $f: x \mapsto \ln(x^2 - x)$.

Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier les limites de f aux bornes de cet ensemble.

Les exercices 94 à 97 sont relatifs à la courbe suivante, représentation graphique d'une fonction $f: x \mapsto (ax + b)e^{cx}$.



94 La courbe passe par les points $A(-2, 0)$ et $B(0, 1)$. Calculer a et b .

95 Au point C d'abscisse -1 , la courbe admet une tangente parallèle à (Ox) . Calculer c .

96 Montrer que (Ox) est asymptote à la courbe en $+\infty$.

97 Déterminer les points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = x + 2$.

98 Étudier la limite en $-\infty$ et en $+\infty$ de $f: x \mapsto x^2 e^{3-x}$.

99 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

- a) $x \mapsto x^3 \sqrt{x}$;
b) $x \mapsto e^{1-3x^2}$;
c) $x \mapsto \ln(5x^2 + x)$;
d) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}}$.

100 Déterminer la fonction f , dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifiant $f' = 0,02f$ et $f(0) = 30\,000$.

Exercices

Étude de fonctions

Les exercices 101 à 103 passent en revue les différentes techniques d'étude.

101 La fonction $f: x \mapsto \frac{1}{2}x + 2 + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier les limites aux bornes de cet ensemble (quatre calculs).
- 2) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
- 3) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ et $-\infty$ une asymptote oblique Δ et préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ .
- 4) Construire $\mathcal{C}_f$ et Δ (unité : 1 cm).
- 5) Montrer que le point $\Omega(0, 2)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

102 La fonction $f: x \mapsto (x+1)^2 e^{-x}$

- 1) Étudier la limite de f en $+\infty$. Interpréter géométriquement.
- 2) Étudier, lorsque x tend vers $-\infty$, les limites de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement.
- 3) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
- 4) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.
(On précisera la tangente au point d'abscisse 0.)

103 La fonction $f: x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et sa réciproque

- 1) Étude de f
 - a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est impaire.
 - b) Étudier la limite de f en $-\infty$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - c) Étudier les variations de f et dresser le tableau de variations.
- 2) Étude de sa réciproque
 - a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$.
 - b) Soit $y \in] -1, 1[$. Si $y = f(x)$, exprimer x en fonction de y . Expliciter alors la fonction réciproque g de f .
 - c) Donner le tableau de variations de g .
- 3) Courbes représentatives
Tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans le même repère, en précisant les tangentes en $O(0, 0)$.

104 Les fonctions « puissance α »

On pose, pour $x > 0$ et α réel, $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

- 1) Que dire de $f_\alpha(x)$ lorsque $\alpha = 0$? lorsque $\alpha = 1$?
Dans la suite, on suppose que $\alpha \notin \{0, 1\}$.
- 2) Étudier les limites de f_α en 0 et en $+\infty$, en distinguant les deux cas : a) $\alpha > 0$; b) $\alpha < 0$.
- 3) On suppose que $\alpha < 0$
Dresser le tableau de variations de f_α et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}_\alpha$ dans les cas : $\alpha = -2$, $\alpha = -1$, $\alpha = -0,5$ et $\alpha = -0,1$.
- 4) On suppose que $\alpha > 0$
 - a) On prolonge f_α en 0 en posant $f_\alpha(0) = 0$.
Montrer qu'ainsi f_α est continue en 0.
 - b) Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction ainsi prolongée (distinguer les cas $\alpha > 1$ et $0 < \alpha < 1$).
- c) Étudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x}$ en distinguant deux cas.

Interpréter les résultats.

- d) Tracer les courbes $\mathcal{C}_{0,2}$, $\mathcal{C}_{0,5}$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_{4,5}$ sur le même graphique.

Les exercices 105 et 106 étudient des fonctions qui interviennent en probabilités : ce sont les densités de lois continues (voir le chapitre 10).

105 La loi de Gumbel

Cette loi permet de modéliser des valeurs extrêmes de phénomènes (crue maximale d'une rivière pendant une période donnée, etc.). Elle est décrite par la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x-e^{-x}}.$$

Étudier la fonction f selon le plan suivant :

- 1) Calcul des limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 2) Calcul de $f'(x)$ et sens de variation.
- 3) Courbe représentative.

106 Une loi « gamma »

La fonction suivante permet de modéliser des phénomènes aléatoires se produisant en moyenne trois fois par unité de temps

$$(loi \text{ « gamma trois »}) : f(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x} \quad (x \geq 0).$$

Étudier la fonction f sur $[0, +\infty[$:

- 1) Limite en $+\infty$.
- 2) Dérivée et sens de variation.
- 3) Courbe représentative.

107 Une fonction logistique

On appelle ainsi une fonction du type :

$$f: t \mapsto \frac{x_0}{1 + e^{a-bt}},$$

où x_0 , a et b sont des réels positifs donnés.

Nous proposons d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{10}{1 + e^{2-0.5t}}.$$

- 1) Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) Calculer $f'(t)$; en déduire le sens de variation de f .
- 3) Tracer la courbe représentative de f .
- 4) Montrer que cette courbe admet le point $\Omega(4,5)$ comme centre de symétrie.
- 5) Vérifier que f satisfait à la relation : $f' = \frac{1}{20} f(10-f)$.

Des applications

C'est en 1836 que Pierre Verhulst introduit les fonctions logistiques pour affiner le modèle exponentiel de Malthus décrivant l'évolution d'une population : après une phase exponentielle au début, la courbe s'infléchit (au point d'inflexion, justement !) et se rapproche d'un « plafond ». En Économie, ces fonctions modélisent aussi la demande d'un certain produit (voir aussi le chapitre 5).

108 En radiothérapie

Dans le traitement des tumeurs par irradiation, la proportion $f(x)$ de cellules cancéreuses résistant au traitement est fonction de la dose x d'exposition aux rayons. Lorsque chaque cellule présente deux points d'attaque, ou « cibles », cette fonction peut être décrite par : $f(x) = 1 - (1 - e^{-kx})^2$, où k est la taille moyenne d'une cellule ($k > 0$).

- 1) Étudier la fonction f selon le plan suivant :
 - a) valeur de $f(0)$ et limite de f en $+\infty$;
 - b) calcul de $f'(x)$ et sens de variation ;
 - c) courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le cas $k = 1$.
- 2) Soit A le point de la courbe d'abscisse $\frac{1}{k} \ln 2$.
 - a) Préciser l'ordonnée de A et déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en A , sous la forme $y = g(x)$.

Dans la suite, on étudie les positions relatives de $\mathcal{C}$ et T .

 - b) On pose $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.

Calculer $\varphi'(x)$, puis $\varphi'\left(\frac{1}{k} \ln 2\right)$.

 - c) Étudier le sens de variation de φ' sur $[0, +\infty[$. En déduire le signe de φ' .
 - d) Étudier alors le sens de variation de φ , puis le signe de φ . En déduire que $\mathcal{C}$ traverse sa tangente T au point A .

109 Fonctions $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto \log_a x$ ($a > 0$)

1) Montrer que la fonction $x \mapsto a^x$ ($a > 0$) est la réciproque de la fonction $\log_a$ définie pour $x > 0$ par $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

(C'est pour cette raison que $x \mapsto a^x$ est appelée **fonction exponentielle de base a** et $\log_a$ **fonction logarithme de base a** .)

2) Représenter graphiquement dans un même repère les fonctions :

a) $\log$ et $x \mapsto 10^x$;

b) $\log_{\frac{1}{2}}$ et $x \mapsto \frac{1}{2^x}$.

110 La fonction de Gompertz

La fonction f est définie sur $[0, +\infty[$ par :

$f(t) = A e^{k e^{-Bt}}$, où A, B, k sont des constantes avec $A > 0$, $B \neq 0$ et $k \neq 0$.

1) Calculer $f(0)$ et étudier $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ (discuter selon le signe de k et B).

2) Calculer $f'(t)$ et dresser le tableau de variations de f (distinguer quatre cas).

3) Dans cette question, on suppose que $k < -1$ et $B > 0$. On note E le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $\frac{\ln(-k)}{B}$.

a) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en E , sous la forme $y = g(x)$.

b) On pose $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.

Calculer $\varphi'(x)$, puis $\varphi'\left(\frac{\ln(-k)}{B}\right)$.

c) Étudier le sens de variation de φ' sur $[0, +\infty[$ (discuter). En déduire le signe de $\varphi'(x)$.

d) Étudier alors le sens de variation de φ , puis le signe de $\varphi(x)$.

Préciser alors les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et T .

4) On pose $A = 6$. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ dans les quatre cas :

- a) $k = 2$ et $B = 0,5$;
- b) $k = -2$ et $B = 0,5$;
- c) $k = 2$ et $B = -0,5$;
- d) $k = -2$ et $B = -0,5$.

Une fonction, des modèles

Introduite en 1925 par B. Gompertz pour des calculs d'assurance-vie, la fonction précédente a fait son chemin. Elle sert parfois de modèle :

- en Biologie, pour décrire la croissance de certaines espèces (avec $k < 0$ et $B > 0$) ;
- en Écologie, pour décrire l'extinction d'une population (avec $k < 0$ et $B < 0$) ;
- en Médecine, pour rendre compte de la croissance des tumeurs cancéreuses ($k < 0$, $B > 0$).

111 Un géant

Avec combien de chiffres s'écrit, en base dix, le nombre $A = 1515^{1789}$?

112 Chimie : pH d'une solution aqueuse

L'acidité d'une solution est mesurée par son pH : $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$, où $[\text{H}_3\text{O}^+]$ désigne la concentration (en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$) d'ions H_3O^+ .

1) Quelle est la concentration en ions H_3O^+ d'une solution neutre ($\text{pH} = 7$) ?

2) Comment varie le pH lorsque cette concentration décuple ?

3) La concentration (en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$) en H_3O^+ d'une solution est comprise entre 0,1 (solution très acide) et 10^{-14} (solution très basique). Quelles sont les valeurs extrêmes du pH ?

113 Astronomie : magnitude d'un astre

La magnitude apparente d'un astre d'éclat E est définie à partir d'un éclat de référence E_0 par : $M = \log_a\left(\frac{E}{E_0}\right)$, avec la convention : la magnitude augmente de 5 lorsque l'éclat est divisé par 100.

1) Calculer $\log a$.

2) Déterminer la magnitude apparente des astres :

Soleil : $E = 4,786 \times 10^{10} E_0$; Sirius : $E = 3,87 E_0$;

Lune : $E = 1,2 \times 10^5 E_0$; Vénus : $E = 43,65 E_0$.

114 Acoustique : niveau sonore

Le niveau sonore en décibels (dB) d'un son de pression acoustique P est donné par la relation $L = 20 \log \frac{P}{P_0}$ où

$P_0 = 2 \times 10^{-5}$ pascals est la plus petite pression perceptible (en moyenne) par une oreille humaine.

1) Calculer les niveaux sonores correspondant à :

- $P = P_0$ (seuil d'audibilité) ;
- $P = 10^3 P_0$ (conversation courante) ;
- $P = 10^9 P_0$ (fusée au décollage).

2) Un walkman (à la puissance maximale) atteint 105 dB, un orchestre disco peut atteindre jusqu'à 130 dB.

Calculer les

rapports $\frac{P}{P_0}$ corres-

pondants.

Note : un niveau supérieur à 90 dB est considéré comme dangereux pour l'oreille.



115 Intérêt composé

Une somme S est placée à intérêts composés, avec un taux annuel de 6 % et des échéances chaque jour. On note S_n la valeur acquise au bout de n jours.

1) Montrer que $S_n = S \times 1,06^{\frac{n}{365}}$.

2) Au bout de 200 jours, la valeur acquise est 2 374,62 €. Calculer S .

3) Au bout de combien de jours la somme aura-t-elle doublé ? triplé ?

116 Une suite récurrente

Une suite (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{10u_n}$.

1) On pose pour tout $n \geq 0$, $v_n = \ln u_n - \ln 10$.

Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

2) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n , et étudier la limite de (u_n) .

117 Une généralisation

Soit a un réel fixé ; on définit, pour $n > -a$, la suite (u_n) par :

$$u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n.$$

1) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln u_n)$.

2) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$.

118 À partir de factorielles

On pose, pour $n \geq 1$, $n! = n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1$ ($n!$ se lit « n factorielle »). Soit alors $u_n = \frac{n^n}{n!}$, pour $n \geq 1$.

1) Établir l'égalité $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

En déduire le sens de variation de (u_n) .

2) a) Pour $x \geq 0$, démontrer les inégalités :

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \leq x.$$

b) En déduire l'encadrement $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$, pour $n \geq 1$.

c) Montrer alors, par récurrence, que, pour $n \geq 6$, $2^n \leq u_n \leq e^n$.

3) Applications

a) Justifier l'encadrement : $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n$ pour $n \geq 6$.

b) Étudier le comportement à l'infini de $\frac{n!}{a^n}$, où $a > 1$.

Rubrique à Bac

Toujours des fonctions auxiliaires

Voir la Rubrique à Bac du chapitre 2. Les nouvelles fonctions de ce chapitre occasionnent un déchaînement d'étude de fonctions plus ou moins artificielles chez les auteurs de sujets. Bien sûr, le signe de la dérivée déclenche l'intervention d'une fonction auxiliaire... dans des énoncés balisés de façon bienveillante.

119 Dans tout le texte, e désigne le nombre réel qui vérifie $\ln e = 1$.

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2}.$$

On note (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 2 cm.

A) Étude d'une fonction auxiliaire

Balise d'un énoncé bienveillant.

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = -2\ln x - xe + 1.$$

1) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2) Étudier le sens de variation de g .

Questions classiques de l'acte I (voir chapitre 2, page 76).

3) Montrer que, dans $[0,5; 1]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution, et une seule, notée α .

Déterminer un encadrement de α à 0,1 près.

4) En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

B) Étude de la fonction f

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) Soit f' la fonction dérivée de f .

Vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$, puis étudier le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$.

Encore une gentillesse de l'énoncé.

3) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1 + \alpha e}{2\alpha^2}$.

Utiliser le fait que $g(\alpha) = 0$.

4) Donner le tableau de variations de f .

5) Construire (Γ) .

120 Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$.

A) Étude de fonctions auxiliaires

1) On définit la fonction g sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1).$$

a) On admet le résultat suivant : $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.

En déduire la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.

b) Calculer $g'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]1, +\infty[$.

c) Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x-1) > 0$, d'inconnue x appartenant à l'intervalle $]1, +\infty[$.

d) Étudier le sens de variation de g sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

e) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α , dans l'intervalle $[e+1; e^3+1]$, et étudier le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]1, \alpha[$ et $]\alpha, +\infty[$.

2) Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}.$$

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$ et prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.

b) Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

c) Montrer que φ est croissante sur l'intervalle $]1, \sqrt{\alpha}[$ et décroissante sur l'intervalle $[\sqrt{\alpha}, +\infty[$.

B) Étude de la fonction f

1) Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, on a $f(x) = \varphi(e^x)$.

2) En déduire :

a) la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 ;

b) la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$;

c) le sens de variation de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et le fait que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$.

3) Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$, $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$.

4) Reproduire le tableau suivant et le compléter en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près.

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$						

5) Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unités 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée. On prendra 10 comme valeur approchée de α .

Des inégalités pour l'étude de suites

Certains problèmes de Bac proposent en point d'orgue – c'est la dernière partie – une étude de suite utilisant des inégalités obtenues sur des fonctions et les théorèmes de comparaison. Ici, la démarche mathématique relève davantage de la méthode que du « bachotage ».

Les inégalités se démontrent le plus souvent en étudiant les variations de la fonction différence, conformément à la méthode dégagée au chapitre 2.

121 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(1 + e^x).$$

On note (Γ) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 4 cm.)

A) 1) Déterminer la limite de f en $-\infty$, puis la limite de f en $+\infty$.

2) Étudier le sens de variation de f .

3) Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = -x + \ln(1 + e^x)$. En déduire que (Γ) admet, en $-\infty$, une asymptote (Δ) .

4) Tracer (Δ) et (Γ) .

B) 1) Soient u et v les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$u(t) = \ln(1 + t) - t \quad \text{et} \quad v(t) = \ln(1 + t) - t + \frac{1}{2}t^2.$$

Étudier les variations de u et v . En déduire que, pour tout nombre réel t positif : $t - \frac{1}{2}t^2 \leq \ln(1 + t) \leq t$.

2) Soit n un entier naturel ($n \geq 1$).

On considère le nombre $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$.

a) Démontrer que $\frac{1 - e^{-n}}{e - 1} - \frac{1}{2} \times \frac{1 - e^{-2n}}{e^2 - 1} \leq S_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{e - 1}$.

b) On admet que la suite (S_n) a une limite réelle L .

Montrer que $\left| L - \frac{1}{e - 1} \right| \leq \frac{1}{2(e^2 - 1)}$.

122 Le but du problème est l'étude simultanée de deux fonctions f et g (partie A), utilisées ensuite pour déterminer une valeur approchée d'un certain nombre réel noté C .

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; (unité graphique : 2 cm).

A) Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - e^x \quad \text{et} \quad g(x) = (1 - x)e^x.$$

On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ leurs courbes représentatives respectives.

1) a) Déterminer les limites de f et g en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

c) Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g .

2) Pour tout réel x , on pose $h(x) = f(x) - g(x)$.

a) Montrer que, pour tout réel x , $h'(x) = 1 - g(x)$.

b) En déduire le sens de variation de la fonction h .

c) Démontrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ admettent un unique point d'intersection, dont l'abscisse α appartient à $]1, 2[$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

d) Étudier, suivant les valeurs de x , les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$.

3) Tracer la droite Δ et les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

B) Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1) À l'aide d'une calculatrice, déterminer un encadrement de S_{20} d'amplitude 10^{-3} .

2) a) En utilisant le tableau de variations de la fonction g définie dans la partie A, démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, 1[$, $e^x \leq \frac{1}{1 - x}$.

b) En déduire que, pour tout nombre $k \geq 2$:

$$e^{\frac{1}{k}} \leq \frac{k}{k - 1}, \quad \text{puis} \quad \frac{1}{k} \leq \ln\left(\frac{k}{k - 1}\right).$$

c) Pour tout $n \geq 2$, calculer $S_n - S_{n-1}$.

En déduire que la suite (S_n) est décroissante.

3) Pour tout entier $n > 20$, on pose $u_n = S_{20} - S_n$.

a) Vérifier que, pour tout entier $n > 20$, $u_n \geq 0$.

b) En utilisant le tableau de variations de la fonction f définie dans la partie A, démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, 1[$, $1 + x \leq e^x$.

c) En déduire que, pour tout nombre entier $k \geq 1$:

$$\frac{k + 1}{k} \leq e^{\frac{1}{k}}, \quad \text{puis que} \quad \ln\left(\frac{k + 1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}.$$

d) Vérifier que, pour tout entier naturel $n > 20$,

$$u_n = \ln\left(\frac{n}{20}\right) - \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n > 20$:

$$\ln\left(\frac{n + 1}{21}\right) \leq \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{n}.$$

e) En déduire que, pour tout $n > 20$:

$$u_n \leq \ln\left(\frac{21}{20}\right) - \ln\left(\frac{n + 1}{n}\right), \quad \text{puis que} \quad u_n \leq 0,049.$$

4) On admet que (S_n) converge vers un réel noté C .

a) Justifier l'encadrement $S_{20} - 0,049 \leq C \leq S_{20}$.

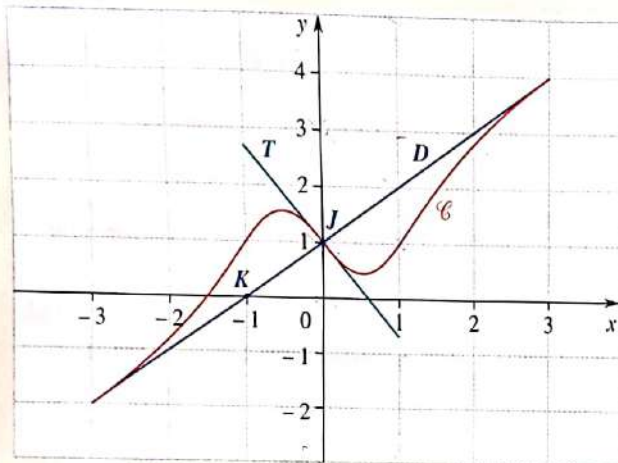
b) Déterminer un encadrement de C d'amplitude 0,05.

Problèmes

123 Courbe recherche fonction

Une fonction f et sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, qui est représentée ci-dessous, possèdent les propriétés suivantes :

- f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$;
- le point J est centre de symétrie de $\mathcal{C}$;
- la droite $D = (JK)$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et $-\infty$;
- la droite T d'équation $y = (1 - e)x + 1$ est la tangente à $\mathcal{C}$ en J .



Le but du problème est de déterminer une expression de $f(x)$ et de mettre en évidence d'autres propriétés de f .

1) Expression de $f(x)$

a) Montrer qu'il existe une fonction φ , dérivable sur $\mathbb{R}$, admettant comme limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$, telle que :

$$f(x) = x + 1 + \varphi(x).$$

b) Montrer que, pour tout réel x , $f(x) + f(-x) = 2$.

c) En déduire que φ est impaire, puis que la fonction f' , dérivée de f , est paire.

d) On admet que $\varphi(x)$ est de la forme :

$$\varphi(x) = (ax + b)e^{-x^2}.$$

Calculer les constantes a et b .

2) Sens de variation de f

a) Vérifier que $f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2 + 1}$.

b) Étudier le sens de variation de f' sur $[0, +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

c) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$, puis que $0,51 < \alpha < 0,52$.

d) Étudier alors les variations de f sur $[0, +\infty[$.

e) Exprimer le minimum $f(\alpha)$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes en α .

3) Propriétés géométriques de $\mathcal{C}$

a) Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à D sur $[0, +\infty[$.

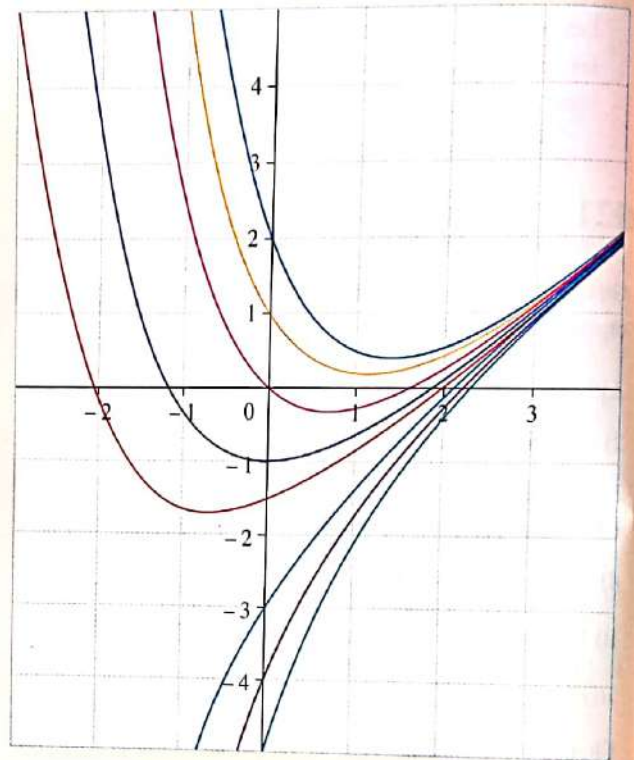
b) Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T sur $[0, +\infty[$.

124 Une famille de courbes

Pour $k \neq 0$, on pose, pour tout x réel :

$$f_k(x) = x - 2 + ke^{-x}.$$

Les courbes représentatives $\mathcal{C}_k$ de f_k sont dessinées ci-dessous, pour certaines valeurs du réel k .



1) Calculer $f_k(0)$. Identifier alors chacune des courbes.

2) Montrer que toutes courbes $\mathcal{C}_k$ admettent une même asymptote Δ en $+\infty$, et préciser, selon la valeur de k , la position de $\mathcal{C}_k$ par rapport à Δ .

3) a) Étudier le sens de variation de f_k et dresser le tableau de variations en distinguant les cas $k > 0$ et $k < 0$.

b) Lorsque $k > 0$, préciser les coordonnées du point A_k de $\mathcal{C}_k$ correspondant au minimum de f_k . Montrer que, lorsque k décrit $]0, +\infty[$, les points A_k décrivent une droite fixe que l'on précisera.

4) a) Montrer que la fonction f vérifie « l'équation différentielle » :

$$f'_k(x) = -f_k(x) + x - 1, \text{ pour tout réel } x.$$

b) Soit $\mathcal{D}$ une droite parallèle à Δ ($\mathcal{D} \neq \Delta$). Montrer que $\mathcal{D}$ rencontre une seule fois chaque courbe $\mathcal{C}_k$ pour $k > 0$ ou bien chaque courbe $\mathcal{C}_k$ pour $k < 0$.

c) Prouver que les tangentes à $\mathcal{C}_k$ aux points d'intersection correspondants sont parallèles entre elles.

5) Déterminer, en fonction de k , le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}_k$ avec la droite d'équation $y = 2$.

125 Un « truc » de banquier

(D'après D. Reisz, Bulletin de l'APMEP n° 383.)

Les banquiers calculent mentalement le temps approximatif de doublement d'un capital, placé à intérêts composés, de la façon suivante : « Si t est le taux d'intérêt (en %), le capital double au bout de $\frac{70}{t}$ années. »

On rappelle qu'au bout de n années de placement au taux t , la valeur d'un capital est multipliée par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$.

1) Établir, pour $x \geq 0$, l'encadrement :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

2) En déduire un majorant de l'erreur dans l'approximation $\ln(1+x) \approx x$.

3) Justifier le « truc » du banquier, pour les petites valeurs de t ($t \leq 14$).

4) Énoncer des règles analogues pour déterminer mentalement le temps au bout duquel un capital triple, quintuple, décuple.

126 Encadrement de $\ln(1+x)$

1) Étudier le sens de variation de la fonction :

$$f: x \mapsto x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x), \text{ sur }]-1, +\infty[.$$

En déduire le signe $f(x)$ sur cet intervalle.

2) Étudier le sens de variation de :

$$g: x \mapsto \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \text{ sur } [0, +\infty[.$$

En déduire le signe de $g(x)$ sur cet intervalle.

3) De même, étudier le signe de :

$$h(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3}\right) \text{ sur } \left[-\frac{1}{2}, 0\right].$$

4) Déduire des questions précédentes les encadrements :

$$a) x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \text{ pour } x \geq 0 ;$$

$$b) x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \text{ pour } -\frac{1}{2} \leq x \leq 0.$$

5) Application 1 : une limite

Étudier la limite éventuelle en 0 de $\frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

6) Application 2 : des approximations

a) Déterminer un majorant de l'erreur dans l'approximation

$$\text{suivante } \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-14} près des nombres $\ln 1,000\ 03$ et $\ln 0,999\ 97$.

127 La constante d'Euler-Mascheroni

1) On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

a) Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 sous forme fractionnaire, puis sous forme décimale approchée.

b) Pour $x \geq 0$, démontrer les inégalités :

$$\ln(1+x) \leq x \quad \text{et} \quad \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x).$$

En déduire que, pour $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k} \quad (1).$$

c) À l'aide d'une sommation portant sur (1), prouver que, pour $n \geq 1$:

$$u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n.$$

En déduire que, pour $n \geq 1$:

$$\ln(n+1) \leq u_n \leq 1 + \ln n \quad (2).$$

d) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

e) Déterminer un entier n_0 pour lequel u_{n_0} dépasse 100.

2) On considère la suite (c_n) définie pour $n \geq 2$ par :

$$c_n = u_{n-1} - \ln n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \ln n.$$

a) Calculer $c_{n+1} - c_n$.

En déduire le sens de variation de la suite (c_n) .

b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$:

$$c_n \leq 1 + \ln(n-1) - \ln n.$$

Piste Utiliser (2).

c) En déduire que la suite (c_n) est majorée (à l'aide de (1), puis qu'elle est convergente (On note γ sa limite.)

3) Calculer une valeur approchée de $c_{10\ 000}$ à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.

Histoire d'un nombre

Le nombre $\gamma = 0,577\ 215\ 664\ 901\ 153\ 286\ 060\ 651 \dots$, qui apparaît dans ce problème, possède une paternité douteuse : certains attribuent sa découverte à Mascheroni, d'autres à Euler qui en calcule 16 décimales en 1734. (La performance d'Euler est d'autant plus impressionnante que celui-ci ne possédait pas les moyens de calcul actuels qui ne nous ont permis – voir question 3) du problème 127 – d'obtenir que trois malheureuses décimales.)

Encore mal connu (on ignore toujours si γ est rationnel ou non) ce nombre intervient de façon surprenante dans plusieurs questions d'Arithmétique. Citons en une : « Pour tous les entiers compris entre 1 et n , le nombre moyen de diviseurs est très proche de $\ln n + 2\gamma - 1$ » (résultat prouvé par Dirichlet en 1838).

128 Deux suites d'approximation de e

A) Étude de deux suites

On pose, pour $n \geq 1$:

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

Rappel : $n! = n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1$.

1) Vérifier que $u_1 = 2$, $v_1 = 3$. Calculer u_2 , u_3 , v_2 et v_3 .

2) Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.

3) Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \times n!}$.

En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4) On note ℓ leur limite commune. Déterminer un encadrement de ℓ d'amplitude inférieure à 10^{-3} .

Peut-on conjecturer la valeur exacte de ℓ ?

B) Calcul exact de ℓ

Soit n entier fixé ($n \geq 1$). On pose, pour $x \in [0, 1]$:

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}.$$

1) a) Calculer $f(0)$ et vérifier que $f(1) = u_n \times e^{-1}$.

b) Montrer que f est dérivable sur $[0, 1]$ et que

$$f'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}. \text{ En déduire que } u_n \leq e.$$

2) On pose, pour $x \in [0, 1]$: $g(x) = f(x) + \frac{x}{n!}$.

a) Calculer $g'(x)$ et montrer que g est croissante sur $[0, 1]$.

b) En déduire que $e - \frac{e}{n!} \leq u_n$.

3) Déduire des questions 1) et 2) la valeur exacte de ℓ .

C) e est irrationnel

Formulons l'hypothèse que e est rationnel, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers naturels p et q tels que $e = \frac{p}{q}$.

1) Justifier l'encadrement $u_q < \frac{p}{q} < v_q$.

En déduire que l'entier $N = pq! - q!u_q$ vérifie $0 < N < 1$.

2) Conclure que e est un nombre irrationnel.

Le nombre e

La méthode précédente a été imaginée par Leonhard Euler (1707-1783) qui prouva ainsi l'irrationalité de e .

Un siècle plus tard, en 1873, Charles Hermite montra que e est **transcendant**, c'est-à-dire qu'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers.

129 Comparaison de moyennes

Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$, n réels strictement positifs ($n \geq 2$).

On définit la moyenne arithmétique m , la moyenne géométrique g et la moyenne harmonique h des nombres $a_1, \dots, a_n$ par les relations :

$$m = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}, \quad g = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$$

et :

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

1) Calculer m , g et h dans le cas où $n = 3$, $a_1 = 4$, $a_2 = 10$ et $a_3 = 25$.

2) Comparaison de m et g

a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.

b) En appliquant l'inégalité précédente successivement, pour

$$x = \frac{a_1}{m}, x = \frac{a_2}{m}, \dots, \text{montrer que } g \leq m.$$

c) Dans quel cas a-t-on l'égalité $g = m$?

3) Comparaison de g et h

a) En appliquant l'inégalité $g \leq m$ aux nombres

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}, \text{ comparer } g \text{ et } h.$$

b) Dans quel cas a-t-on l'égalité $g = h$?

Curiosités

• Des logarithmes à sensations

« L'intensité d'une sensation est proportionnelle au logarithme de l'excitation qui la provoque. »

Cette loi énoncée par le physiologiste allemand Gustav Fechner (1801-1887) explique le choix des échelles logarithmiques adoptées dans divers domaines (acoustique...).

• Des logarithmes en Arithmétique

« $\frac{x}{\ln x}$ est à peu près le nombre de nombres premiers inférieurs au réel x . »

C'est le théorème des nombres premiers, démontré par Hadamard et de La Vallée Poussin en 1896.

• Le nombre e en Probabilités

— Lorsque n personnes récupèrent au hasard un des n chapeaux laissés au vestiaire, la probabilité qu'aucune d'elles ne récupère son propre chapeau est environ e^{-1} (pour $n \geq 6$).

— Lorsqu'un événement rare se produit en moyenne une fois par an, la probabilité qu'il se produise n fois au cours d'une année donnée est égale à $\frac{1}{e \cdot n!}$.

— Voir la « loi exponentielle » au chapitre 10.

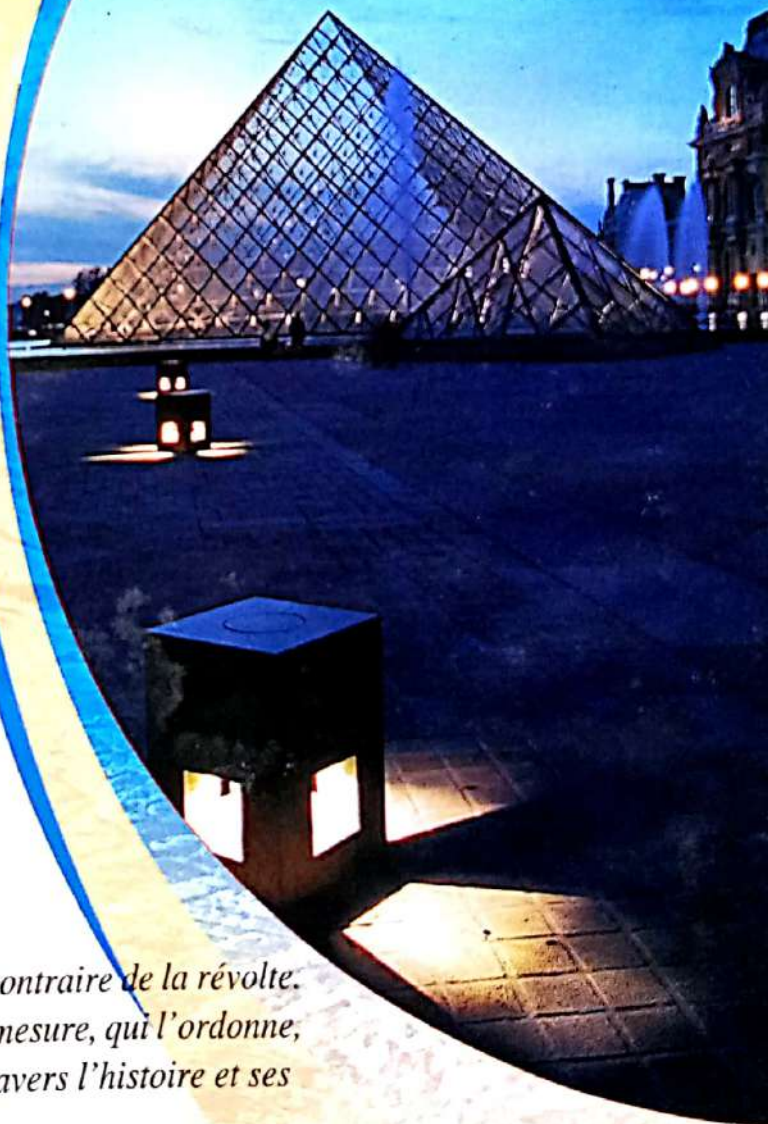
→ Calcul intégral

OBJECTIFS

- Introduire la notion d'intégrale.
- Établir le lien avec la notion de dérivée, et définir les primitives d'une fonction.
- Mettre en place quelques techniques de calcul.
- Présenter quelques applications du calcul intégral : calcul de grandeurs, étude de suites, etc.

*« La mesure n'est pas le contraire de la révolte.
C'est la révolte qui est la mesure, qui l'ordonne,
la défend et la recrée à travers l'histoire et ses
désordres. »*

Albert Camus



Avant-première

1. OBJECTIFS

Deux objectifs sont visés :

- d'une part, relier la notion d'**aire** « sous une courbe » à celle de **dérivée** de la fonction représentée (voir *séquence 1*). C'est l'idée majeure du **calcul intégral** ;
- d'autre part, aborder la notion de **primitive** d'une fonction qui émerge naturellement en liaison avec le calcul de certaines aires, et en dégager quelques propriétés que nous énoncerons dans le cours.

2. CALCUL D'AIRES ET DÉRIVÉES

Nous proposons dans la *séquence 1* d'envisager l'aire des domaines suivants :

• le cas particulier d'une hyperbole

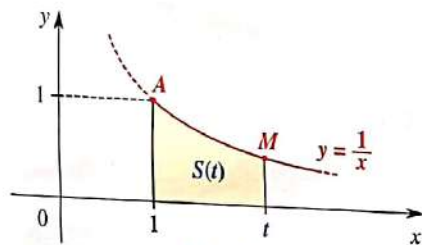


Fig. 1

• un cas général (avec f croissante, continue)

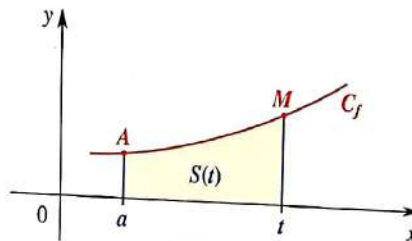


Fig. 2

Séquence 1

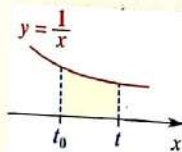
Deux calculs d'aires

① L'aire « sous l'hyperbole »

Pour tout réel $t \geq 1$, on désigne par $S(t)$ l'aire du domaine défini par $1 \leq x \leq t$ et $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ (en jaune sur la figure 1).

1) Soit $t_0 \geq 1$ un réel fixé.

a) Pour $t > t_0$, interpréter $S(t) - S(t_0)$ en terme d'aire, et encadrer cette aire par les aires de deux rectangles.



$$\text{En déduire que } \frac{1}{t} \leq \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} \leq \frac{1}{t_0}.$$

b) Pour $t < t_0$, établir que :

$$\frac{1}{t_0} \leq \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} \leq \frac{1}{t}.$$

c) En déduire que S est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que

$$S'(t) = \frac{1}{t}.$$

2) En étudiant les variations de $\varphi: t \mapsto \ln t - S(t)$ sur $[1, +\infty[$, prouver que, pour $t \geq 1$:

$$S(t) = \ln t.$$

② Un cas général

Soit f une fonction *positive, croissante et continue* sur un intervalle $[a, b]$.

Pour tout $t \in [a, b]$, on désigne par $S(t)$ l'aire du domaine défini par $a \leq x \leq t$ et $0 \leq y \leq f(x)$ (en jaune sur la figure 2).

Soit t_0 un réel fixé de $[a, b]$.

1) Par une démarche analogue à celle de l'exercice précédent, montrer que le taux d'accroissement $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$ est encadré par $f(t)$ et $f(t_0)$.

(Distinguer les cas $t > t_0$ et $t < t_0$.)

2) En déduire que la fonction S est dérivable sur $[a, b]$ et que, pour tout t de $[a, b]$:

$$S'(t) = f(t).$$

3. PRIMITIVES D'UNE FONCTION

Dans la séquence 1, la fonction S correspondant au cas général vérifie les conditions : S est dérivable sur $[a, b]$ et $S'(t) = f(t)$ pour tout t de $[a, b]$.

De façon générale, nous dirons qu'une fonction F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Séquence 2 Primitives de quelques fonctions usuelles

① Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions :

a) $x \mapsto 1$; b) $x \mapsto x$; c) $x \mapsto x^2$;

d) $x \mapsto 5x^2$; e) $x \mapsto 3x^2 - 7x + 2$;

f) $x \mapsto \cos x$; g) $x \mapsto \sin x$;

h) $x \mapsto e^x$; i) $x \mapsto e^{-x}$.

② Déterminer une primitive sur $]0, +\infty[$ des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto \frac{1}{x}$; b) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$; c) $x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

③ On pose, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 5.$$

Montrer que F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

Séquence 3 Quelques propriétés des primitives

① La famille des primitives

1) Soit F une primitive de f sur un intervalle I .

Montrer que la fonction :

$$G : x \mapsto F(x) + k \quad (k \text{ réel})$$

est aussi une primitive de f sur I .

2) Soit F et G deux primitives de f sur I .

Montrer que $F - G$ est une fonction constante sur I .

Piste Dériver $F - G$.

② Primitive prenant une valeur donnée en x_0

Soit F une primitive de f sur I , et x_0 un réel de I .

Montrer qu'il existe une et une seule primitive G de f sur I , telle que $G(x_0) = y_0$ (où y_0 est un réel fixé quelconque).

③ Le nombre « $F(b) - F(a)$ »

Soit F une primitive de f sur I , a et b deux réels de I .

Montrer que le nombre $F(b) - F(a)$ ne change pas si l'on remplace F par une autre primitive G .

Un précurseur

Au XVII^e siècle, les mathématiciens (comme Pierre de Fermat ou Isaac Barrow) progressent dans deux domaines séparés : les problèmes des **tangentes** (et la longueur des arcs) et ceux des **quadratures** (ou calculs d'aires). On doit cependant à l'Anglais Newton et à l'Allemand Leibniz d'avoir, par des approches complémentaires, clairement établi que ces deux domaines étaient liés : c'est la naissance du **calcul infinitésimal** (calcul différentiel et intégral).

Gottfried Wilhelm Leibniz
(Leipzig 1646-Hanovre 1716)



1. Notion d'intégrale

1.1 AIRE DU DOMAINE ASSOCIÉ À UNE FONCTION POSITIVE

Le domaine associé...

Nous appellerons **domaine associé à une fonction f positive sur $[a, b]$** le domaine $\mathcal{E}$ délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ ($a \leq b$) (Fig. 3).

Ce domaine est l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que :

$$a \leq x \leq b \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x).$$

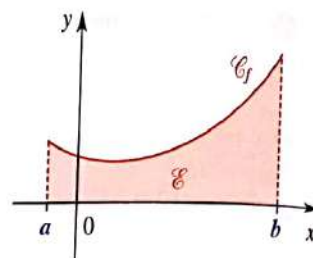


Fig. 3

L'unité d'aire

Le plan étant muni du repère orthogonal (O, I, J) , l'**unité d'aire** (en abrégé **u.a.**) est l'aire du rectangle bâti à partir des points O, I, J (Fig. 4).

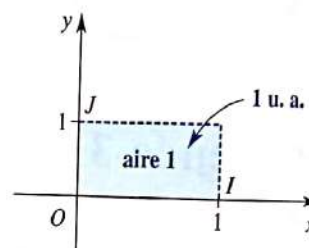


Fig. 4

Aire du domaine associé : deux exemples

1) $\mathcal{E}$ est le domaine associé à la fonction en escalier f , représentée ci-contre (Fig. 5).

Aire ($\mathcal{E}$) = 21 u.a.

(Il suffit de compter les carreaux.)

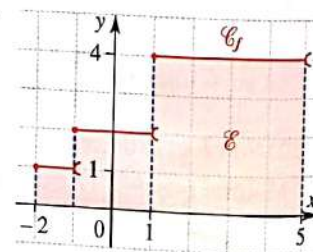


Fig. 5

2) $\mathcal{E}$ est le domaine associé à $f: x \mapsto x^2$ sur $[0, 1]$ (Fig. 6).

Aire ($\mathcal{E}$) = $\frac{1}{3}$ u.a.

(Résultat prouvé au chapitre 1, page 25.)

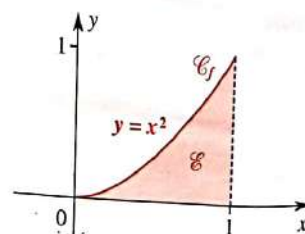


Fig. 6

Dans l'exemple qui précède, comme dans d'autres, nous avons calculé l'aire « sous la parabole » grâce à un encadrement à l'aide de deux suites adjacentes, suivi d'un passage à la limite (voir chapitre 1, page 24). Nous admettrons que, de la sorte, ce procédé permet de calculer l'aire « sous la courbe » pour toute fonction continue positive. Ce résultat justifie la définition qui va suivre.

1.2 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE POSITIVE

DÉFINITION 1

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$ (avec $a \leq b$). On appelle **intégrale de a à b de la fonction f** l'aire du domaine associé à f sur $[a, b]$, exprimée en unité d'aire.

Ce nombre est noté $\int_a^b f(x) dx$.

Vocabulaire et notations

- $\int_a^b f(x) dx$ se lit « somme de a à b de $f(x) dx$ ».
- Les réels a et b sont appelés les **bornes de l'intégrale**.
- Le symbole « dx » n'a aucune signification particulière, si ce n'est celle de rappeler la démarche des concepteurs du calcul intégral au XVII^e siècle (principalement Leibniz), qui considéraient de « petites différences sur x » (d'où dx).
Quant à la lettre x , elle peut être remplacée indifféremment par t , u , ... ou n'importe quel symbole à l'exception de a et b : c'est une variable « muette ».



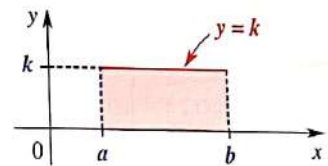
EXEMPLE 1

Calculer les intégrales $A = \int_a^b k dx$ ($k > 0$) et $B = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Calcul de A

A est l'aire d'un rectangle de dimensions $b-a$ et k , d'où :

$$A = k(b-a).$$

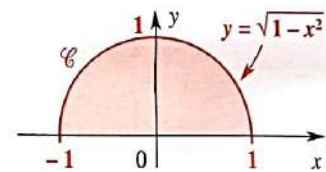


Calcul de B

La courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ est définie par les conditions $y \geq 0$ et $x^2 + y^2 = 1$.

Nous reconnaissons dans la dernière égalité l'équation du cercle de centre O et de rayon 1, dont $\mathcal{C}$ est la moitié supérieure.

Donc B est l'aire du demi-disque : $B = \frac{\pi}{2}$.



Voir exercices 1 et 2

1.3 INTERPRÉTATION CINÉMATIQUE

Pour un point mobile se déplaçant sur une droite, ou sur toute autre ligne « continue » à la vitesse instantanée $v(t)$ (t est le temps), que nous supposons toujours positive ou nulle, la distance d parcourue entre les instants t_1 et t_2 s'exprime par :

$$d = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

(Nous n'espérons pas de « scoop sensationnel » avec ce résultat... Il s'agit surtout de fournir un support « sensible » à certaines propriétés qui vont suivre.)

1.4 VALEUR MOYENNE D'UNE FONCTION CONTINUE POSITIVE

DÉFINITION 2

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$ ($a \leq b$).

La **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$ est le réel $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.

Interprétation graphique

Puisque $\int_a^b \mu dt = \mu(b-a)$ (voir exemple 1), il est

clair que $\int_a^b \mu dt = \int_a^b f(t) dt$.

Ainsi, l'aire du domaine associé à f sur $[a, b]$ est égale à celle du rectangle dont les dimensions sont $b-a$ et μ (valeur moyenne de f). Ce rectangle est sablé sur la figure 7.

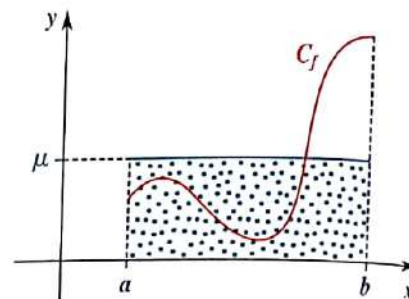


Fig. 7

Interprétation cinématique

La **vitesse moyenne** d'un mobile est la **valeur moyenne de la vitesse** (ce qui est plutôt rassurant). En effet, avec les notations de la partie 1.3 :

$$\text{vitesse moyenne} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{durée du trajet}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \text{valeur moyenne de } v.$$

1.5 EXTENSION AUX FONCTIONS DE SIGNE QUELCONQUE

DÉFINITION 3

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, avec $a \leq b$.

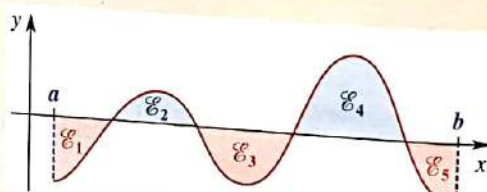
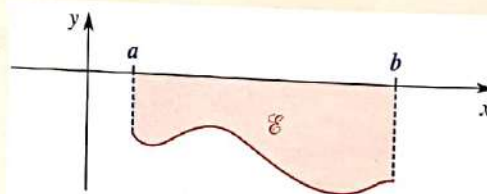
On appelle **intégrale** de a à b de f le nombre ainsi défini :

- si f est négative sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = -\text{aire}(\mathcal{E}) ;$$

- si f est de signe quelconque sur $[a, b]$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= -\text{aire}(\mathcal{E}_1) \\ &+ \text{aire}(\mathcal{E}_2) - \text{aire}(\mathcal{E}_3) \\ &+ \text{aire}(\mathcal{E}_4) - \text{aire}(\mathcal{E}_5) \dots \end{aligned}$$



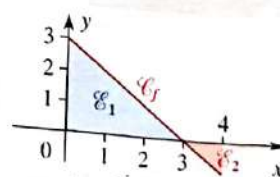
Conformément au programme, nous présentons immédiatement cette extension qui aurait pu partiellement se déduire des propriétés du paragraphe suivant. Cette extension laisse inchangée la définition de la valeur moyenne.

EXEMPLE 2

Calculer l'intégrale de 0 à 4 de la fonction $f: x \mapsto 3-x$.

L'intégrale vaut :

$$\text{aire}(\mathcal{E}_1) - \text{aire}(\mathcal{E}_2) = 4.$$



Voir exercice 3

2. Propriétés de l'intégrale

2.1 LES PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Propriétés immédiates

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Alors :

- pour tout a de I , $\int_a^a f(x) dx = 0$;

- pour tous a, b et c de I tels que $a < c < b$:

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \text{ (relation de Chasles).}$$

- Ces propriétés résultent directement de la définition de l'intégrale, en terme d'aire. L'interprétation cinématique les rend tout aussi évidentes.
- Les deux relations précédentes nous autorisent à étendre encore la définition de l'intégrale à des bornes quelconques : pour que reste valable, de façon formelle, la relation de Chasles, nous devons avoir :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = \int_a^a f(x) dx = 0.$$

Cela justifie la définition qui suit.

DÉFINITION 4

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b .

Si $a \leq b$, on pose $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.

Nous avons rassemblé dans le théorème suivant, que nous admettons, les principaux résultats relatifs aux propriétés algébriques.

THÉORÈME 1 (admis)

1) Relation de Chasles (bornes quelconques)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a, b et c . Alors :

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

2) Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b . Alors, pour tous réels α et β :

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$



EXEMPLE 3

Calculer l'intégrale de 0 à 1 de $f : x \mapsto 5x^2 + 3x$.

De 0 à 1, l'intégrale de la fonction $x \mapsto x^2$ est égale à $\frac{1}{3}$ (voir page 114) et celle de

$x \mapsto x$ est égale à $\frac{1}{2}$ (faire un dessin).

Celle de f vaut donc $5 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{2}$, soit $\frac{19}{6}$.

Voir exercices 6 à 10

2.2 INTÉGRALES ET INÉGALITÉS

THÉORÈME 2

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, avec $a \leq b$.

1) Positivité

Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors :
$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

2) Ordre (ou intégration d'une inégalité)

Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors :
$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

3) Inégalités de la moyenne

• Si, pour tout x de $[a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$,

alors :
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

• Si, pour tout x de $[a, b]$, $|f(x)| \leq M$, alors $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b-a).$

... Démonstrations

1) La positivité résulte de la *définition 1* : l'intégrale est une aire, donc positive.

2) C'est quasiment évident : on applique l'inégalité du point 1) à la fonction positive $g-f$. La linéarité livre alors le résultat.

3) Pour la première inégalité, il suffit d'intégrer, entre a et b , l'inégalité $m \leq f \leq M$; les intégrales de $x \mapsto m$ et $x \mapsto M$ valent $m(b-a)$ et $M(b-a)$.

La seconde inégalité résulte de la première en remarquant que la condition $|f(x)| \leq M$ signifie $-M \leq f(x) \leq M$.

Interprétation de l'inégalité de la moyenne

Si f est une fonction positive sur $[a, b]$, telle que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout x de $[a, b]$, la première inégalité de la moyenne traduit le fait suivant : l'aire du domaine $\mathcal{E}$ associé à f (en jaune sur la *figure 8*) est comprise entre celle du rectangle de dimensions m et $b-a$ (en sablé) et celle du rectangle de dimensions M et $b-a$ (entourée en bleu).

Cette inégalité traduit aussi le fait que, si μ est la valeur moyenne de f sur $[a, b]$, on a $m \leq \mu \leq M$.

(D'où le nom : inégalité de la moyenne.)

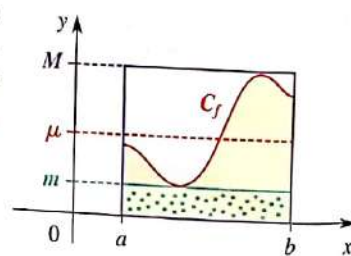


Fig. 8



EXEMPLE 4

Étudier la limite de la suite (u_n) , avec $u_n = \int_n^{n+1} e^{-x} dx$.

On a, pour tout x de $[n, n+1]$: $0 \leq e^{-x} \leq e^{-n}$, d'où $0 \leq u_n \leq e^{-n}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Voir exercices 11 à 16

3. Primitives d'une fonction

3.1 NOTION DE PRIMITIVE

La rubrique *Avant-première* (séquence 1, page 112) a permis, dans deux cas particuliers, d'établir un lien entre le calcul des aires et celui des dérivées, en dégageant la notion de primitive que nous définissons ci-après.

DÉFINITION 5

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F **dérivable** sur I , telle que, pour tout x de I :

$$F'(x) = f(x).$$



EXEMPLE 5

Déterminer une primitive des fonctions :

• $f : x \mapsto x, g : x \mapsto x^2$ et $h : x \mapsto x^n (n \in \mathbb{N})$ sur $\mathbb{R}$;

• $k : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\ell : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

On vérifie aisément que les fonctions $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2, G : x \mapsto \frac{1}{3}x^3,$

$H : x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}, K : x \mapsto 2\sqrt{x}$ et $L : x \mapsto \ln x$ répondent à la question.

Voir exercices 18 à 21

3.2 ENSEMBLE DES PRIMITIVES D'UNE FONCTION

THÉORÈME 3

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I . Alors :

- pour tout réel k , la fonction $G : x \mapsto F(x) + k$ est aussi une primitive de f sur I ;
- toute primitive de f sur I est de ce type.

... Démonstration

Voir *Avant-première*, séquence 3, page 113.

Interprétation graphique

Toutes les courbes se déduisent de $\mathcal{C}_F$ par les translations de vecteur $k\vec{j}$ (k réel). Elles réalisent un balayage de la bande de plan colorée (Fig. 9).

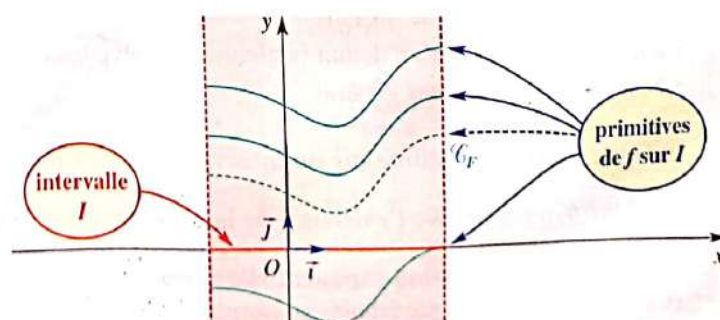


Fig. 9

3.3 PRIMITIVE VÉRIFIANT UNE « CONDITION INITIALE »

THÉORÈME 4

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I .
Soit x_0 un réel de I et y_0 un réel quelconque ; il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant la « condition initiale » $F(x_0) = y_0$.

... **Démonstration** : voir Avant-première, séquence 3, page 113.



EXEMPLE 6

Déterminer la primitive F de $f : x \mapsto \cos x$ sur $\mathbb{R}$, vérifiant $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Une primitive quelconque de f sur $\mathbb{R}$ est du type $F : x \mapsto \sin x + k$ ($k \in \mathbb{R}$).

La condition $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ fournit $k = -1$. Ainsi, $F(x) = \sin x - 1$.

Voir exercices 24 et 25

3.4 INTÉGRALE ET PRIMITIVE

THÉORÈME 5

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un point de I .

La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur I .

C'est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

... **Démonstration partielle dans le cas où f est croissante**

- Remarquons tout d'abord que F est bien définie sur I .
- Soit x_0 fixé dans I et $x \geq x_0$; alors, pour tout $t \in [x_0, x]$, on a :

$$f(x_0) \leq f(t) \leq f(x) \quad (f \text{ croissante}),$$

donc $f(x_0)(x - x_0) \leq \int_{x_0}^x f(t) dt \leq f(x)(x - x_0)$ (théorème de la moyenne).

L'intégrale est égale à $F(x) - F(x_0)$ (relation de Chasles) ; on en déduit :

$$f(x_0) \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x), \text{ puisque } x - x_0 > 0.$$

f étant continue, on a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, d'où $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$.

- Si $x < x_0$, une conduite analogue donne le même résultat. Cela montre que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$.

La fin du théorème 5 s'en déduit facilement (preuve laissée au lecteur).

- Nous admettrons le cas général.

Conséquences immédiates

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .
- Le théorème 5 prouve l'existence de la fonction logarithme $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ et, par suite, l'existence de la fonction exponentielle qui est sa réciproque. (Cette existence avait été admise au chapitre 3, page 84.)

3.5 THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL INTÉGRAL

THÉORÈME 6

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b . Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \text{ (notation : } [F(t)]_a^b)$$

où F est une primitive quelconque de f sur I .

Cela résulte immédiatement du théorème 5 et de la séquence 3.



EXEMPLE 7

Calculer l'aire A du domaine associé à $f: x \mapsto \sin x$ sur $[0, \pi]$.

On a $A = \int_0^\pi \sin x dx$ et $F: x \mapsto -\cos x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Donc $A = F(\pi) - F(0) = -(-1) - (-1)$, soit $A = 2$.

Voir exercices 33 à 45

3.6 TABLEAUX DE PRIMITIVES

Fonctions usuelles

fonction	une primitive	commentaires
$x \mapsto a$ (a réel)	$x \mapsto ax$	sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto x^\alpha$ (α réel, $\alpha \neq -1$)	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	sur $]0, +\infty[$ ⁽¹⁾
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$	sur $]0, +\infty[$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	sur $\mathbb{R}$

Opérations, composition

fonction	une primitive	commentaires
au' (a réel)	au	
$u' + v'$	$u + v$	
$u'e^u$	e^u	
$u'u^\alpha$ ($\alpha \neq -1$)	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	sur tout intervalle où $u(x) > 0$
$\frac{u'}{u}$	$\rightarrow \ln u$ $\rightarrow \ln(-u)$ ⁽²⁾	sur tout intervalle où $u(x) > 0$ sur tout intervalle où $u(x) < 0$

(1) Ce résultat englobe le cas des fonctions du type $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x\sqrt{x}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, etc.

(2) Ce résultat sera prouvé dans l'exercice 30.

4. Intégration par parties

4.1 LE PRINCIPE

THÉORÈME 7

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ admettant des dérivées u' et v' continues. Alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

... Démonstration

La fonction uv est dérivable sur $[a, b]$ et $(uv)' = uv' + u'v$.

Les fonctions uv' , $u'v$, et donc $(uv)'$, sont continues sur $[a, b]$, donc :

$$\int_a^b (uv)'(t)dt = \int_a^b (uv' + u'v)(t)dt = \int_a^b u(t)v'(t)dt + \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

La première intégrale est égale à $[u(t)v(t)]_a^b$. Le résultat en découle.

4.2 INTÉRÊT ET MISE EN ŒUVRE

La formule d'intégration par parties permet principalement :

- de calculer certaines **intégrales** dont on ignore une primitive « à vue » (voir *exemple 8*) ;
- de déterminer certaines nouvelles **primitives** (voir *exercices 53 à 56*) ;
- de déterminer des **relations de récurrence** (voir *exercices 84, 112, 113 et 116 à 118*).

Plutôt que de mémoriser la formule, nous préconisons l'emploi d'une disposition systématique des calculs, analogue à celle de l'exemple suivant.

→ EXEMPLE 8

Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt$.

Posons $u(t) = t$ d'où $u'(t) = 1$
 $v'(t) = \sin t$ $v(t) = -\cos t$ (par exemple).

Toutes les fonctions écrites sont continues ; nous pouvons donc effectuer une intégration par parties :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = [-t \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t) dt.$$

Soit : $I = -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - (-0 \cos 0) + [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}.$

Finalement : $I = 1$.

Voir exercices 46 à 63

Le choix des fonctions auxiliaires u et v' n'est pas quelconque et demande parfois une analyse préalable. Nous effectuerons une mise au point à ce sujet dans *Au cœur des problèmes*, partie 1.

5. Calcul de grandeurs : aires, volumes, etc.

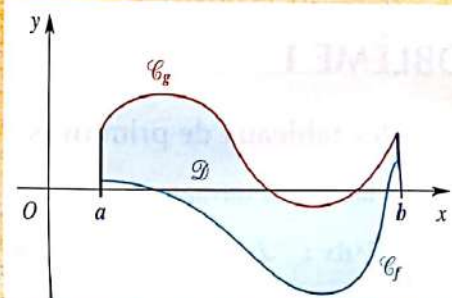
Les applications du calcul intégral foisonnent en Physique (cinématique : nous l'avons vu, mécanique, électricité...) et en Mathématiques (nous l'illustrerons au chapitre 10 en probabilités). Nous donnons ici deux résultats concernant le calcul des aires et des volumes, et renvoyons à la rubrique *Au cœur des problèmes* pour leur illustration.

5.1 LE CALCUL D'AIRES

THÉORÈME 8 (admis)

Soit f et g deux fonctions continues, a et b deux réels de I tels que $a \leq b$. Lorsque $f \leq g$ sur $[a, b]$, l'aire en u.a. du domaine limité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $[a, b]$ (en bleuté sur la figure) est calculée par :

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = \int_a^b (g(t) - f(t)) dt.$$



Le domaine $\mathcal{D}$ peut être décrit, si besoin est, comme l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ \text{et} \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}.$$

5.2 LE CALCUL DE VOLUMES

L'espace est muni d'un repère orthonormal (O, I, J, K) et l'unité de volume (u.v.) est le volume du cube construit sur (O, I, J, K) .

THÉORÈME 9 (admis)

On considère un solide (Σ) limité par les plans parallèles d'équations :

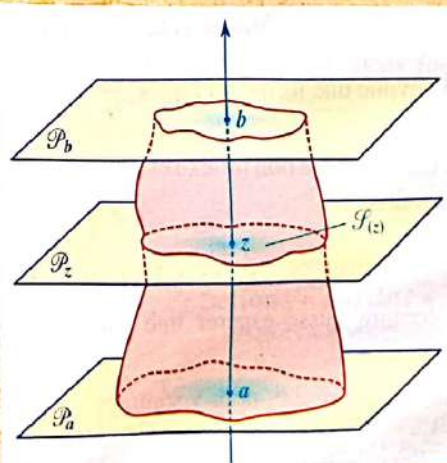
$$z = a \text{ et } z = b \quad (a \leq b).$$

Pour tout $z (a \leq z \leq b)$, on note :

- $\mathcal{P}_z$ le plan perpendiculaire à (Oz) et de cote z ;
- $\mathcal{S}(z)$ l'aire de la section du solide par le plan $\mathcal{P}_z$.

Lorsque $\mathcal{S}$ est une fonction continue sur $[a, b]$, le volume V du solide est calculé (en u.v.) par :

$$V = \int_a^b \mathcal{S}(z) dz.$$



Cette formule de calcul de volume sera rappelée dans les exercices.

1. Calculs d'intégrales

OBJECTIF

Cette rubrique effectue un tour d'horizon des principales techniques de **calcul exact** des intégrales : la **primitivation par lecture directe**, et l'**intégration par parties**.

Pour les initiatives plus astucieuses (transformations d'écritures, choix des fonctions auxiliaires dans une intégration par parties non évidente), nous donnerons une indication dans l'énoncé.

PROBLÈME 1

Lecture des tableaux de primitives

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 5^x dx ; \quad J = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} \quad \text{et} \quad K = \int_0^1 x \sqrt{1+x^2} dx.$$

❶ Quelle formule ?

• Pour le calcul de I , il faut penser à la définition d'une puissance $5^x = e^{x \ln 5}$; d'où l'idée de se ramener à la forme $u' e^u$, en posant $u(x) = x \ln 5$.

Comme $u'(x) = \ln 5$, nous écrirons :

$$5^x = \frac{1}{\ln 5} \times (\ln 5) \times e^{(x \ln 5)}.$$

• Pour le calcul de J , l'idée est de reconnaître dans $\frac{1}{x}$ la dérivée de $\ln x$.

On songe alors à transformer l'écriture :

$$\frac{1}{x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x},$$

ce qui dévoile une forme du type « $\frac{u'}{u}$ ».

• Pour calculer K , le bon réflexe est de *convertir les radicaux en puissances*. Écrivons donc :

$$x \sqrt{x^2 + 1} = x (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette écriture laisse espérer une forme du type « $u' u^\alpha$ », en posant $u(x) = x^2 + 1$.

Comme $u'(x) = 2x$, nous y sommes :

$$\text{l'expression } x \sqrt{x^2 + 1} \text{ est clairement de la forme } \frac{1}{2} u' u^{\frac{1}{2}}.$$

QUE CHOISIR ?

Les formules du tableau

La forme $u' e^u$

On la retrouve (à une constante multiplicative près) dans :

$$x e^{x^2} ; \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} ; 3^x ; \frac{1}{2^x}, \text{ etc.}$$

La forme $\frac{u'}{u}$

Il faut savoir la débusquer dans :

$$\frac{e^x}{5e^x + 1} ; \frac{x^2}{x^3 + 1} ; \tan x ; \text{ etc.}$$

La forme $u' u^\alpha$

Penser à convertir les radicaux et les inverses en puissances ; par exemple :

$$\frac{1}{x^2 \sqrt{x}} ; \sqrt[3]{x} ; \frac{2x+1}{(x^2+x+3)^3} ; \text{ etc.}$$

2 Les calculs

• D'après ce qui précède, une primitive de $x \mapsto 5^x$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{\ln 5} \times e^{x \ln 5}$, soit encore $x \mapsto \frac{1}{\ln 5} \times 5^x$. Donc :

$$I = \left[\frac{1}{\ln 5} \times 5^x \right]_0^1 = \frac{1}{\ln 5} (5^1 - 5^0), \text{ soit : } I = \frac{4}{\ln 5}.$$

• Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ est la fonction $x \mapsto \ln(\ln x)$, puisque $\ln x > 0$ sur $[e, e^2]$. Ainsi :

$$J = [\ln(\ln x)]_e^{e^2} = \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e), \text{ donc } J = \ln 2.$$

• Une primitive de $u' u^{\frac{3}{2}}$ est $\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}$; nous obtenons donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$ comme primitive de la fonction à intégrer. Ainsi :

$$K = \left[\frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3} (2^{\frac{3}{2}} - 1) \text{ ou encore } K = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}.$$

Rappel : une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln u$ (si $u > 0$ seulement) ou $\ln(-u)$ (si $u < 0$).

PROBLÈME 2

Intégration par parties

Calculer les intégrales $A = \int_0^4 (2t + 1)e^{-t} dt$ et $B = \int_1^e x^2 \ln x dx$.

1 Le choix des fonctions auxiliaires

• La fonction $t \mapsto (2t + 1)e^{-t}$ est de la forme $t \mapsto P(t)e^{at}$, où P est un polynôme. Dans ce cas, l'idée est de dériver le polynôme P pour en diminuer le degré. Nous poserons donc :

$$\begin{cases} u(t) = 2t + 1 & \text{et } u'(t) = 2 ; \\ v'(t) = e^{-t} & \text{et } v(t) = -e^{-t}. \end{cases}$$

• Pour la fonction $x \mapsto x^2 \ln x$, il serait maladroit de dériver x^2 , car nous ne connaissons pas d'emblée une primitive de $\ln x$. Et quand bien même ! La fonction $x \mapsto x \ln x - x$ étant une primitive de $x \mapsto \ln x$, persister dans ce choix nous conduirait à intégrer la fonction $x \mapsto 2x \times (x \ln x - x)$, ce qui complique encore notre affaire...

Il faut savoir rebrousser chemin dans une impasse ; nous poserons :

$$\begin{cases} u(x) = \ln x & \text{et } u'(x) = \frac{1}{x} ; \\ v'(x) = x^2 & \text{et } v(x) = \frac{x^3}{3}. \end{cases}$$

MÉTHODE 1 (1)

**Fonctions « $P(t)e^{at}$ »,
« $P(t) \cos(\omega t)$ »,
« $P(t) \sin(\omega t)$ »
(P polynôme)**

Poser $u(t) = P(t)$.

Comme $d^\circ P' = d^\circ P - 1$, on obtient une intégrale plus simple.

Si $d^\circ P = 2$, on itère deux fois le processus.

MÉTHODE 2 (1)

**Fonctions « $P(t) \ln t$ »
(P polynôme)**

Poser :

$$\begin{aligned} u(t) &= \ln t & u'(t) &= \frac{1}{t} \\ v'(t) &= P(t) & \dots \end{aligned}$$

(1) Le programme : « Pour l'intégration par parties, on se limitera à des cas simples où l'élève aura à trouver lui-même le recours à la technique d'intégration par parties ». Pour nous, ces « cas simples » sont ceux mentionnés dans les méthodes 1 et 2.

2 Les calculs

$$\begin{aligned} \bullet A &= [-(2t+1)e^{-t}]_0^4 - \int_0^4 -2e^{-t} dt \\ &= -9e^{-4} + 1 + 2[-e^{-t}]_0^4 \\ &= -9e^{-4} + 1 + 2(-e^{-4} + 1). \end{aligned}$$

Finalement : $A = 3 - 11e^{-4}.$

$$\begin{aligned} \bullet B &= \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^e \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9}(e^3 - 1), \end{aligned}$$

soit : $B = \frac{2e^3 + 1}{9}.$

Un détail de calcul :

$$\frac{1}{x} \times \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}x^2, \text{ et le coefficient } \frac{1}{3} \text{ « sort » de l'intégrale.}$$

PROBLÈME 3

Transformations d'écritures

Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}$ (on pourra chercher deux réels a et b vérifiant, pour tout x dans $[1, 2]$, $\frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3}$).

1 La transformation d'écriture

Nous avons $\frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3} = \frac{(a+b)x + (3a+2b)}{x^2 + 5x + 6}.$

Une identification des coefficients (au numérateur) nous conduit au système :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 3a+2b=1 \end{cases}$$

On en tire $a = 1$ et $b = -1$.

D'où : $\frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}.$

2 Calcul de l'intégrale

D'après la transformation et la linéarité :

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x+2} - \int_1^2 \frac{dx}{x+3} = [\ln(x+2)]_1^2 - [\ln(x+3)]_1^2.$$

Donc $I = \ln 4 - \ln 3 - (\ln 5 - \ln 4).$

Finalement :

$$I = \ln \frac{16}{15} \text{ (environ } 0,0645).$$

SANS CRAINTE

L'énoncé indiquera toujours comment transformer efficacement l'écriture de la fonction.

Remarque :

$$(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6.$$

Dans la foulée

1 Lecture directe du tableau de primitives

Calculer les intégrales :

$$A = \int_0^1 \frac{e^t}{2+e^t} dt, \quad B = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx,$$

$$C = \int_4^9 \frac{dx}{x\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad D = \int_0^1 \frac{2x+1}{(x^2+x+3)^3} dx.$$

2 Avec une intégration par parties

Calculer les intégrales :

$$E = \int_1^e (3t+1) \ln t \, dt \quad \text{et} \quad F = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 \sin t \, dt.$$

(Pour F , itérer deux fois le procédé.)

3 Transformations d'écritures

a) Calculer $G = \int_0^1 \frac{1}{1+e^t} dt$.

Piste $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$.

b) Calculer $H = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ après avoir décomposé la fonction sous la forme :

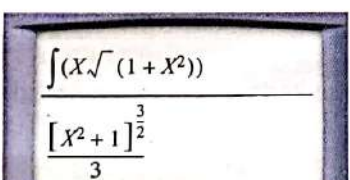
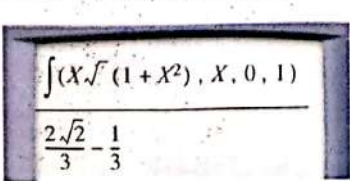
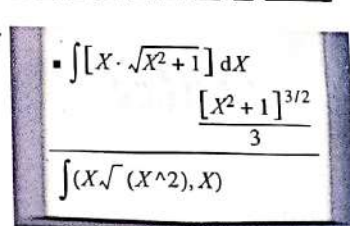
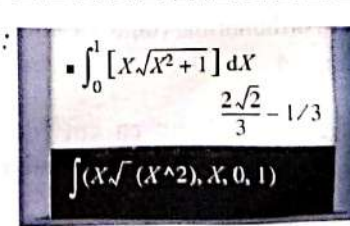
$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \quad (A \text{ et } B \text{ réels}).$$

4 Une astuce

Calculer $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t \, dt$ à l'aide de deux intégrations par parties successives.

SPÉCIAL CALCULATRICES

(Calcul formel d'intégrales)

Casio Graph 100	Texas TI 89
Calcul d'une primitive (de $x \mapsto x\sqrt{1+x^2}$) MENU $\left[\frac{\text{CAS}}{f_x dx} \right]$ EXE AC F2 (CALC) $\left[\frac{\int}{\text{EXE}} \right]$ $\left[\frac{x}{\sqrt{}} \right]$ $\left[\frac{(}{\right]$ $\left[\frac{1}{+} \right]$ $\left[\frac{x}{\sqrt{}} \right]$ $\left[\frac{^2}{\right]$ $\left[\frac{)}{\text{EXE}} \right]$ Affichage :  Calcul d'une intégrale Celle de la fonction précédente, entre 0 et 1 : $\left[\frac{x}{\sqrt{}} \right]$ $\left[\frac{(}{\right]$ $\left[\frac{1}{+} \right]$ $\left[\frac{x}{\sqrt{}} \right]$ $\left[\frac{^2}{\right]$ $\left[\frac{)}{\text{EXE}} \right]$ $\left[\frac{(}{\right]$ $\left[\frac{0}{\right]$ $\left[\frac{)}{\right]$ $\left[\frac{(}{\right]$ $\left[\frac{1}{\right]$ $\left[\frac{)}{\text{EXE}} \right]$ Affichage : 	Calcul d'une primitive (de $x \mapsto x\sqrt{1+x^2}$) Dans le menu principal (MAIN), choisir le sous-menu F3 (CALC) et le choix 2 : intégrale ; on saisit alors : $\left[\frac{x}{\sqrt{}} \right]$ $\left[\frac{(}{\right]$ $\left[\frac{1}{+} \right]$ $\left[\frac{x}{\sqrt{}} \right]$ $\left[\frac{^2}{\right]$ $\left[\frac{)}{\text{ENTER}} \right]$ Affichage :  Calcul d'une intégrale Même fonction, entre 0 et 1 : $\left[\frac{x}{\sqrt{}} \right]$ $\left[\frac{(}{\right]$ $\left[\frac{1}{+} \right]$ $\left[\frac{x}{\sqrt{}} \right]$ $\left[\frac{^2}{\right]$ $\left[\frac{)}{\text{ENTER}} \right]$ $\left[\frac{(}{\right]$ $\left[\frac{0}{\right]$ $\left[\frac{)}{\right]$ $\left[\frac{(}{\right]$ $\left[\frac{1}{\right]$ $\left[\frac{)}{\text{ENTER}} \right]$ Affichage : 

2. Calcul d'aires

OBJECTIF

Calculer l'aire de domaines plans. Nous insisterons sur les domaines « compris entre deux courbes ».

PROBLÈME

Dans un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm), représenter le domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'équations respectives $y = \cos x$ et $y = \sin x$ d'une part, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$ d'autre part. Calculer son aire en cm^2 .

1 Représentation du domaine et expression de l'aire

Le domaine considéré est représenté sur la figure 10.

Les deux courbes se coupent pour $x = \frac{\pi}{4}$; évaluons les aires des domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ (théorème 8) :

- sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\sin x \leq \cos x$, donc : $\text{aire}(\mathcal{D}_1) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx$;

- sur $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$, $\sin x \geq \cos x$, donc : $\text{aire}(\mathcal{D}_2) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx$.

2 Le calcul

- $\text{aire}(\mathcal{D}_1) = [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$ (unité d'aire) ;

- $\text{aire}(\mathcal{D}_2) = [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = 1 + \sqrt{2}$ (unité d'aire).

L'aire cherchée est la somme des deux, soit $2\sqrt{2}$ u.a.

En cm^2 , cette aire vaut $4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ (environ 11,3 cm^2).

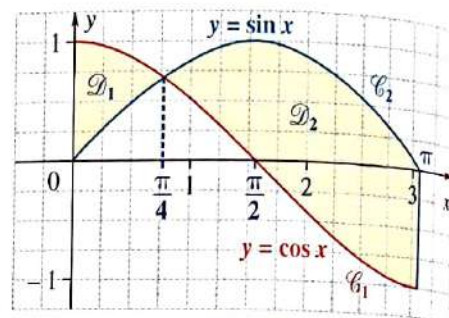


Fig. 10

MÉTHODE

L'aire d'un domaine limité par deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

On se ramène à des intervalles où l'on a soit $f \leq g$, soit $g \leq f$.

Une unité d'aire vaut $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$, soit 4 cm^2 .

Dans la foulée

5 Entre courbe et asymptote

1) Étudier les variations de

$$f: x \mapsto x - \frac{\ln x}{x}$$

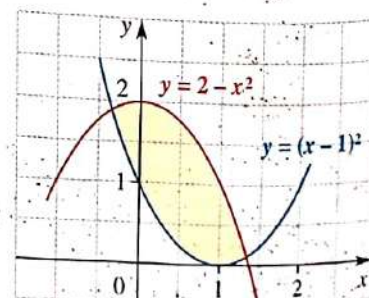
sur $]0, +\infty[$, et montrer que sa courbe représentative Γ dans un repère orthonormal (unité : 2 cm) admet une asymptote oblique Δ .

2) Soit $\lambda > 1$. Calculer l'aire en cm^2 du domaine limité par Γ , Δ , et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \lambda$ (on note $a(\lambda)$ cette aire).

3) Déterminer la limite de $a(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

6 Entre deux paraboles

Calculer l'aire (en u.a.) du domaine coloré (ci-contre).



3. Calcul de volumes

OBJECTIF

Calculer le volume de quelques solides grâce à la relation :

$$V = \int_a^b S(z) dz \text{ (voir cours, page 123).}$$

PROBLÈME 1

Volume du cône, de la pyramide...

Soit $\mathcal{B}$ une surface plane d'aire S et O un point n'appartenant pas au plan de $\mathcal{B}$, et situé à la distance h de ce plan (Fig. 11).

Calculer le volume du solide Σ (Fig. 11) limité par $\mathcal{B}$ et toutes les droites passant par O et par un point du contour de $\mathcal{B}$.

Remarque : lorsque $\mathcal{B}$ est un disque, Σ est un cône (droit ou penché) de base $\mathcal{B}$ et de hauteur h ; lorsque $\mathcal{B}$ est un polygone, Σ est une pyramide.

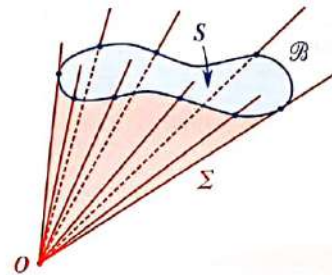


Fig. 11

① Détermination de $S(z)$

Choisissons comme origine O et (Oz) , la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}$ de la base $\mathcal{B}$. Coupons le solide par le plan $\mathcal{P}_z$ parallèle à $\mathcal{P}$, de cote z ($0 \leq z \leq h$).

$S(z)$ est l'aire de la section $\mathcal{B}_z$ obtenue (voir Fig. 12).

Soit alors l'homothétie de centre O , qui transforme $\mathcal{P}$ en $\mathcal{P}_z$. Cette homothétie a pour

rapport $\frac{z}{h}$ (voir figure), et elle

transforme $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}_z$.

Puisqu'une homothétie multiplie les aires par le carré du rapport, nous avons :

$$S(z) = S \times \left(\frac{z}{h}\right)^2.$$

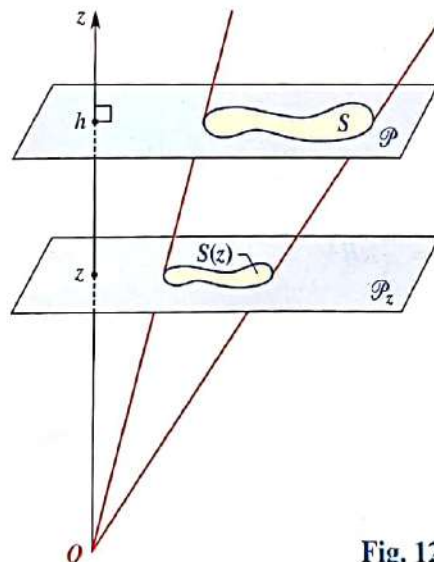


Fig. 12

② Calcul du volume

La fonction $S : z \mapsto S \frac{z^2}{h^2}$ est continue sur $[0, h]$, donc le volume du solide Σ s'exprime, en unité de volume, par :

$$V = \int_0^h S(z) dz = \frac{S}{h^2} \int_0^h z^2 dz = \frac{S}{h^2} \times \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h ;$$

ainsi $V = \frac{1}{3} Sh$ (« un tiers de la base par la hauteur »).

PROBLÈME 2

Le volume de la boule

Retrouver, à l'aide du calcul intégral, le volume d'une boule de rayon R .

1 Détermination de $S(z)$

Choisissons un repère orthonormal ayant pour origine le centre O de la sphère, et représentons la situation (Fig. 13).

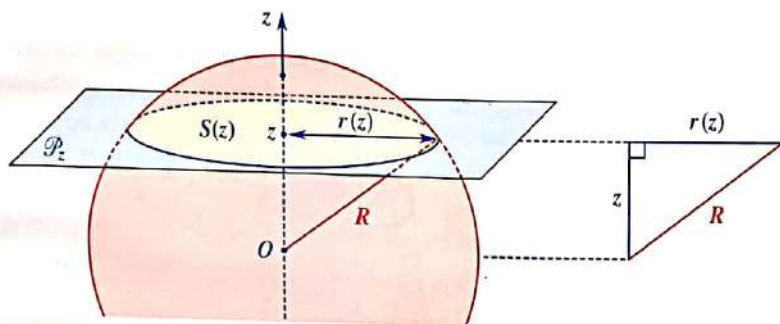


Fig. 13



La géode, cité des sciences.

Le plan $\mathcal{P}_z$ perpendiculaire à (Oz) et de cote z coupe la boule selon un disque de rayon $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$. Ainsi :

$$S(z) = \pi[r(z)]^2, \text{ soit } S(z) = \pi(R^2 - z^2).$$

2 Calcul du volume

La fonction S étant continue sur $[-R, R]$, le volume cherché s'exprime (en unité de volume) par $V = \int_{-R}^R S(z) dz$, soit :

$$V = \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) dz = \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-R}^R = \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right).$$

On en tire la formule connue :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

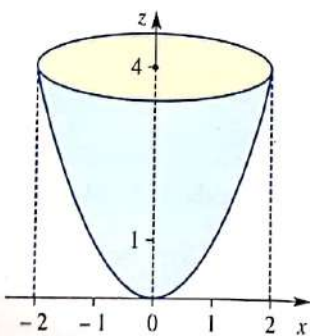
Dans la fontée

7 Le volume du phare

Calculer le volume V du phare ci-contre, obtenu par révolution autour de l'axe (Oz) du morceau de parabole d'équation :

$$z = x^2$$

($0 \leq x \leq 2$) dans le plan (xOz) ; (unité : 6 cm).



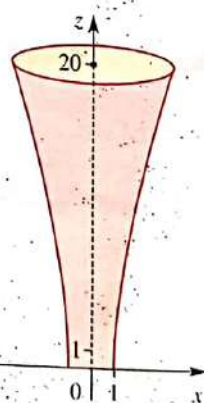
8 Contenance du château d'eau

L'intérieur d'un château d'eau a la forme du solide de révolution obtenu en faisant tourner autour de (Oz) la branche d'hyperbole définie par :

$$z = 5\sqrt{x^2 - 1},$$

$$0 \leq z \leq 20.$$

L'unité étant égale à 2 m, calculer la contenance du château d'eau (en hectolitres).



4. Problèmes de comparaison et d'encadrement

OBJECTIFS

Il s'agit d'utiliser les résultats sur les intégrales et les inégalités (principalement l'intégration d'une inégalité) pour :

- obtenir des inégalités ou des encadrements portant sur des fonctions ;
- étudier des suites définies à l'aide d'une intégrale.

PROBLÈME 1

Encadrement de la fonction $\ln(1+x)$ par des polynômes

- 1) Montrer que, pour $t \geq 0$, $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$.
- 2) En déduire que, pour $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

1 La démarche

• Les inégalités de la question 1) doivent s'obtenir algébriquement en étudiant le signe des différences...

• D'autre part, il n'est pas terriblement audacieux de remarquer que les fonctions $x \mapsto x - \frac{x^2}{2}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ sont des

primitives des fonctions $x \mapsto 1-x$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $x \mapsto 1-x+x^2$.

Il y a mieux : ce sont les primitives qui s'annulent en 0.

D'où l'idée naturelle d'intégrer les inégalités précédentes entre 0 et x .

En cas d'échec de la méthode algébrique, il nous resterait la méthode analytique : les variations de la fonction différence.

Rappel (voir théorème 5) :

$x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est LA primitive de f qui s'annule en 0.

2 Solution rédigée

1) On a $\frac{1}{1+t} - (1-t) = \frac{1-(1-t^2)}{1+t} = \frac{t^2}{1+t}$; ce nombre est positif

lorsque $t \geq 0$. Donc, pour tout $t \geq 0$: $1-t \leq \frac{1}{1+t}$.

De même, $1-t+t^2 - \frac{1}{1+t} = \frac{(1-t+t^2)(1+t)-1}{1+t} = \frac{t^3}{1+t}$.

Lorsque $t \geq 0$, $\frac{t^3}{1+t} \geq 0$, donc : $\frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$.

2) Si $x \geq 0$, les inégalités de la question 1) sont valides sur $[0, x]$, donc :

$$\int_0^x (1-t) dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x (1-t+t^2) dt.$$

On en tire : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

L'IDÉE GÉNÉRALE

De la sorte, si f est une fonction dérivable sur $[a, b]$ ($a \leq b$) et si f' est continue sur $[a, b]$, tout encadrement de f' sur $[a, b]$ fournit un encadrement de f sur $[a, b]$.

PROBLÈME 2

Suite définie par une intégrale

On pose, pour $n \geq 1$, $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$. Sans calculer I_n :

- 1) étudier le sens de variation de la suite (I_n) ;
- 2) déterminer, à l'aide d'un encadrement, la limite de la suite (I_n) .

1 Les bons réflexes

Pour chacune des deux questions, il s'agit d'obtenir des inégalités portant sur l'intégrale I_n . Nous devons donc commencer par **chercher des inégalités sur les fonctions à intégrer** :

- pour la question 1), nous devons comparer $t^n e^{-t}$ et $t^{n+1} e^{-t}$;
- pour la question 2), nous chercherons un encadrement de $t^n e^{-t}$ sur $[0, 1]$ qui nous permette de conclure, avec « une idée derrière la tête » : pour les grandes valeurs de n , $t^n e^{-t}$ est voisin de 0 sur $[0, 1]$, donc la suite (I_n) devrait tendre vers 0...

2 Solution rédigée

1) Pour tout t de $[0, 1]$, on a $t^n \geq t^{n+1}$, donc $t^n e^{-t} \geq t^{n+1} e^{-t}$.
Intégrons cette inégalité sur $[0, 1]$; il vient : $I_n \geq I_{n+1}$.
Donc la suite (I_n) est décroissante.

2) Pour tout t de $[0, 1]$, on a $0 \leq e^{-t} \leq 1$, donc, puisque $t \geq 0$:
 $0 \leq t^n e^{-t} \leq t^n$.

En intégrant ces inégalités sur $[0, 1]$, il vient :

$$0 \leq \int_0^1 t^n e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^n dt,$$

soit : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, nous concluons : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

PROBLÈME 3

Suite définie par une sommation

On considère la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

1) Montrer que, pour $n \geq 1$ et $k \geq 1$:

$$\int_{n+k}^{n+k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n+k} \leq \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{1}{t} dt.$$

2) En déduire un encadrement de u_n , puis étudier la limite de la suite (u_n) .

LE FIL DIRECTEUR

Comment encadrer I_n ?

L'idée est d'encadrer $t^n e^{-t}$, mais « pas trop fort ».

Nous aurions pu obtenir :

$$0 \leq t^n e^{-t} \leq 1 \text{ sur } [0, 1],$$

ce qui aurait fourni :

$$0 \leq I_n \leq 1.$$

Nous n'aurions pas su conclure quant à la limite de (I_n) .

D'où l'idée : majorer par une fonction dont l'intégrale tend vers 0.

1 Les idées

• Tout repose sur la définition de chaque intégrale en terme d'aire, en remarquant que $\frac{1}{n+k}$ est l'aire du rectangle de côtés 1 et $\frac{1}{n+k}$ (voir figure ci-contre).

• L'encadrement de u_n va résulter d'une **sommation** des inégalités, de $k = 1$ jusqu'à $k = n$.

2 Solution rédigée

1) Sur $[n+k, n+k+1]$, on a $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{n+k}$, donc, d'après l'inégalité de la

moyenne : $\int_{n+k}^{n+k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n+k}$ (car $(n+k+1) - (n+k) = 1$).

On établit de même la deuxième inégalité en écrivant que, sur $[n+k-1, n+k]$, on a :

$$\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{t}.$$

2) En sommant les inégalités précédentes (de $k = 1$ à n), on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \int_{n+k}^{n+k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^n \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{dt}{t},$$

soit :
$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{t} \leq u_n \leq \int_n^{2n} \frac{dt}{t}.$$

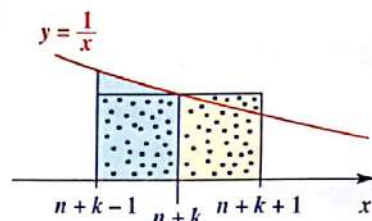
En calculant les intégrales, nous obtenons :

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq u_n \leq \ln 2.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \ln 2$, nous pouvons conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2.$$

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE



$\frac{1}{n+k}$ = aire de chacun des rectangles sablés.

Première intégrale = aire colorée en jaune.

Seconde intégrale = aire colorée en vert.

Détails des calculs

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \int_{n+k}^{n+k+1} \frac{dt}{t} &= \int_{n+1}^{n+2} \frac{dt}{t} + \int_{n+2}^{n+3} \frac{dt}{t} \\ &\quad + \dots + \int_{2n}^{2n+1} \frac{dt}{t} \\ &= \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{t} \quad \dots \text{(Chasles)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_n^{2n} \frac{dt}{t} &= [\ln t]_n^{2n} \\ &= \ln(2n) - \ln n \\ &= \ln\left(\frac{2n}{n}\right) = \ln 2. \end{aligned}$$

Dans la foulée

9 Encadrement de $\sin x$ et $\cos x$

Soit x un réel positif.

À partir de l'inégalité $\cos t \leq 1$ et à l'aide d'intégrations successives, montrer que :

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin x &\leq x ; & \text{b) } 1 - \frac{x^2}{2} &\leq \cos x ; \\ \text{c) } x - \frac{x^3}{6} &\leq \sin x ; & \text{d) } \cos x &\leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}. \end{aligned}$$

10 Étude d'une suite

On pose, pour $n \geq 1$, $I_n = \int_0^1 t^n \sin^2 t \, dt$.

1) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

2) Encadrer convenablement I_n et en déduire que (I_n) est convergente.

11 Une autre sommation

On pose, pour $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+2} + \dots + \frac{1}{5n}.$$

Reprendre la méthode du problème 3 pour étudier la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

5. Calcul approché d'une intégrale

OBJECTIFS

S'initier à une méthode élémentaire de calcul approché d'une intégrale, d'un point de vue théorique et pratique (avec une calculatrice ou un tableur). La motivation est double :

- certaines fonctions, comme $x \mapsto e^{-x^2}$, ont des primitives qui ne s'expriment pas à l'aide des fonctions usuelles, ce qui rend impossible tout calcul exact d'une intégrale ;
- même si les calculatrices actuelles possèdent de puissantes fonctions de calcul approché, la méthode proposée a joué un rôle moteur dans l'élaboration du calcul intégral et sert encore de point d'appui à la conception de nouvelles idées.

PROBLÈME

La méthode des rectangles

Soit f une fonction continue, décroissante, positive sur $[0, 1]$, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et $I = \int_0^1 f(x) dx$.

Le segment $[0, 1]$ étant partagé en n segments de même longueur ($n \geq 1$), on désigne par :

- S_n la somme des aires des rectangles situés au-dessous de la courbe (en sablé sur la figure 14) ;
- s_n la somme des aires des rectangles situés au-dessus de la courbe (aire sablée + aire en jaune).

1) Expliciter S_n et s_n à l'aide des valeurs de f .

2) Déterminer la limite des suites S_n et s_n et montrer que S_n et s_n sont des valeurs approchées de I à moins de $\frac{f(0) - f(1)}{n}$ près.

3) Calculer $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ à $0,5 \times 10^{-3}$ près.

① La démarche générale

Elle a été exposée au chapitre 1, page 24, dans le cas d'une aire particulière. Les idées et les notations, ici introduites, procèdent de la même démarche.

② Solution

$$1) S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

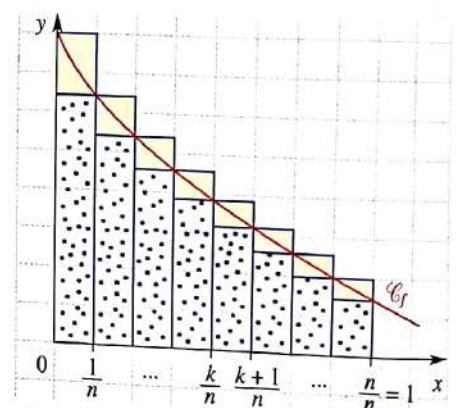


Fig. 14

Explication

Tous les rectangles ont pour base $\frac{1}{n}$.

Leurs hauteurs sont :

• $f(0), f\left(\frac{1}{n}\right), \dots, f\left(\frac{n-1}{n}\right)$ pour les plus grands ;

• $f\left(\frac{1}{n}\right), \dots, f\left(\frac{n-1}{n}\right), f(1)$ pour les plus petits.

2) Le graphique montre clairement que : $s_n \leq I \leq S_n$.

De plus, d'après les expressions trouvées : $S_n - s_n = \frac{f(0) - f(1)}{n}$.

De l'encadrement de I et de l'égalité précédente, nous tirons :

$$0 \leq I - s_n \leq S_n - s_n, \text{ donc } 0 \leq I - s_n \leq \frac{f(0) - f(1)}{n}$$

et $0 \leq S_n - I \leq S_n - s_n, \text{ donc } 0 \leq S_n - I \leq \frac{f(0) - f(1)}{n}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(0) - f(1)}{n} = 0$, nous concluons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = I;$$

de plus $I \approx s_n$ et $I \approx S_n$ à moins de $\frac{f(0) - f(1)}{n}$.

3) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue, décroissante, positive sur $[0, 1]$.

Comme $f(0) = 1$ et $f(1) = \frac{1}{2}$, on a :

$$\frac{f(0) - f(1)}{1\,000} = 0,5 \times 10^{-3}.$$

Cela montre que $I \approx S_{1\,000}$ à $0,5 \times 10^{-3}$ près.

Nous pouvons organiser le calcul de :

$$S_{1\,000} = \frac{1}{1\,000} \left[f\left(\frac{1}{1\,000}\right) + \dots + f\left(\frac{1\,000}{1\,000}\right) \right] \text{ à l'aide d'un tableur,}$$

ou d'une calculatrice équipée de la touche Σ .

Nous obtenons : $S_{1\,000} \approx 0,7\,851$.

(En fait, la valeur exacte de I est $\frac{\pi}{4} \approx 0,7\,853 \dots$: voir le problème 121).

INFO

Les sommes S_n et s_n

Elles sont appelées **sommes de Riemann**, en l'honneur de Bernhard



Riemann (1826-

1866) auteur d'une théorie de l'intégrale proche de celle que nous avons présentée.

CALCULATRICES

Le symbole Σ pour calculer une somme

• Texas (TI 89)

Menu $\boxed{\Sigma}$ (CALC)

4 : Σ (sum)

• Casio (Graph 100)

Menu $\boxed{\text{CAS}} \rightarrow \boxed{\text{f.d.e.}} \rightarrow \text{CALC}$

4 : Σ

Dans la foulée

12 Deux calculs approchés

À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, calculer une valeur approchée, à 10^{-3} près, par la méthode des rectangles, des intégrales A et B .

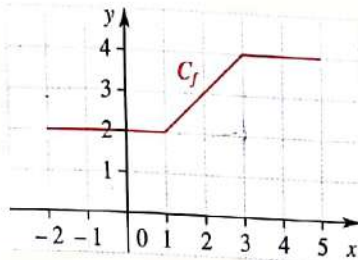
$$A = \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{et} \quad B = \int_0^1 \sqrt{\frac{t+2}{t+1}} dt.$$

Applications

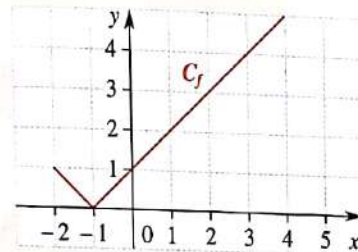
Définition de l'intégrale

Dans les exercices 1 à 3, calculer l'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$, où la fonction f est représentée graphiquement.

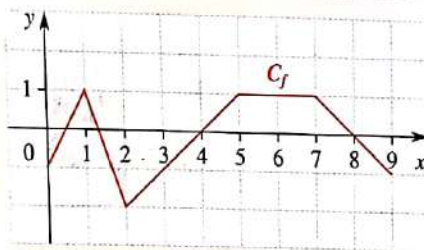
- 1 a) $a = -2$,
 $b = 5$;
 b) $a = -2$, $b = 2$;
 c) $a = 0$, $b = 4$.



- 2 a) $a = -2$,
 $b = 5$;
 b) $a = -2$, $b = x$.
 Discuter.



- 3 $a = 0$,
 $b = 9$.



- 4 Sachant que $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ (voir cours, page 114), interpréter chacune des intégrales en terme d'aire, et calculer leur valeur :

$$A = \int_0^1 \sqrt{x} dx ; \quad B = \int_0^2 x(2-x) dx.$$

5 Intégrale et parité

1) Soit a un réel positif et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Par des considérations d'aire, montrer que :

a) si f est paire, alors $\int_a^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$;

b) si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

2) Application

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_{-3}^3 |x| dx ; B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx ; C = \int_{-1}^1 x \sqrt{1+x^4} dx.$$

Propriétés algébriques

- 6 Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et a, b, c trois réels de I .

Montrer que $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

7 Découpage d'un segment

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Les réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ vérifiant $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ réalisent un découpage de $[a, b]$ en n segments.

Montrer que $\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt \right)$.

- 8 1) Soit $A = \int_0^1 1 dx$, $B = \int_0^1 x dx$ et $C = \int_0^1 x^2 dx$.

Exprimer en fonction de A, B et C , les intégrales :

$$I = \int_0^1 (3x^2 - 4x + 5) dx ; \quad J = \int_0^1 (3x + 1)(2 - x) dx ;$$

$$K = \int_{-1}^1 (x^2 - 3x + 8) dx.$$

- 2) Calculer alors I, J et K . (On rappelle que $C = \frac{1}{3}$.)

- 9 On considère les intégrales $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$,

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt \text{ et } C = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2t) dt.$$

- 1) Calculer $A + B$.

- 2) Exprimer A et B en fonction de C .

- 3) On admet que $C = 0,5$.

En déduire les valeurs de A et B .

- 10 1) Calculer l'intégrale $I = \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx$, à l'aide d'une aire connue.

- 2) En déduire la valeur de chacune des intégrales :

$$J = \int_{-3}^3 (x + \sqrt{9-x^2}) dx \text{ et } L = \int_0^3 (\sqrt{9-x^2} - 3) dx.$$

3) Soit $M = \int_0^3 \frac{x^2}{3 + \sqrt{9-x^2}} dx$.

Calculer $M + L$ et en déduire que $M = -L$.

Intégrales et inégalités

11 1) Montrer que, pour tout x de $[0, 1]$:

$$0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}.$$

2) En déduire que $0 \leq \int_0^1 x^5(1-x)^5 dx \leq 10^{-3}$.

12 1) Pour tout réel t de $[0, 1]$, montrer que :

$$\frac{t^2}{2} \leq \frac{t^2}{1+t} \leq t^2.$$

2) En déduire un encadrement de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt$.

13 On considère l'intégrale $I = \int_{10}^{20} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$.

Montrer l'encadrement $0 \leq I \leq 5 \times 10^{-7}$.

14 Trouver un encadrement pour chacune des intégrales suivantes après avoir déterminé les extremums de la fonction sur l'intervalle considéré.

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt ; \quad J = \int_2^3 \frac{\ln x}{x} dx ; \quad K = \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt.$$

15 Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, telle que, pour tout x de $[0, 1]$, $m \leq f(x) \leq M$.

Déterminer la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx.$$

16 1) Soit f une fonction continue, monotone sur $[0, +\infty[$ et vérifiant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ (a réel donné).

$$\text{On pose } I_n = \int_n^{n+1} f(t) dt.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = a$.

2) Applications

Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la suite (I_n) .

$$\text{a) } I_n = \int_n^{n+1} \frac{dt}{1+t^2} ; \quad \text{b) } I_n = \int_n^{n+1} \frac{t}{1+t^2} dt ;$$

$$\text{c) } I = \int_n^{n+1} \ln\left(\frac{5t+1}{t+3}\right) dt.$$

17 Déterminer la valeur moyenne de chacune des fonctions suivantes, sur l'intervalle considéré.

$$\text{a) } f(x) = 5x - 1, \text{ sur } [0, 4] ;$$

$$\text{b) } f(x) = 3x^2, \text{ sur } [0, 1] ;$$

$$\text{c) } f(x) = x^2 + 3x - 2, \text{ sur } [-1, 1].$$

Primitives, définition

Dans les exercices 18 à 20, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I considéré.

$$\text{18 a) } f(x) = \sin x, I = \mathbb{R} ;$$

$$\text{b) } f(x) = x^3 + x^2 + 1, I = \mathbb{R}.$$

$$\text{19 a) } f(x) = 3 + \cos x, I = \mathbb{R} ;$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

$$\text{20 a) } f(x) = e^x + e^{-x}, I = \mathbb{R} ;$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{1}{x^3}, I =]0, +\infty[.$$

21 Dans chaque cas, montrer que F est une primitive de f sur l'intervalle I .

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{x}, F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 5, I =]0, +\infty[;$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}, F(x) = -\frac{1}{\tan x}, I = \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[;$$

$$\text{c) } f(x) = -\tan x, F(x) = \ln(-\cos x), I = \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[.$$

Ensemble des primitives, condition initiale

22 Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle I considéré.

$$\text{a) } f: x \mapsto x^2 - 3x + 1, I = \mathbb{R} ;$$

$$\text{b) } f: x \mapsto e^{3x+1}, I = \mathbb{R} ;$$

$$\text{c) } f: x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}, I =]0, +\infty[.$$

23 Prouver, sans calcul de dérivée, que F et G sont deux primitives sur $\mathbb{R}$ de la même fonction :

$$F(x) = \frac{x(2x-1)}{x^2+1} \text{ et } G(x) = \frac{x^2-x-1}{x^2+1}.$$

Dans les exercices 24 et 25, trouver la primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

$$\text{24 a) } f(x) = -2 \sin 2x, I = \mathbb{R}, x_0 = \frac{\pi}{4}, y_0 = 1 ;$$

$$\text{b) } f(x) = x + \frac{1}{x^2}, I =]0, +\infty[, x_0 = 1, y_0 = 5.$$

$$\text{25 a) } f(x) = \frac{3}{x}, I =]0, +\infty[, x_0 = e, y_0 = 5 ;$$

$$\text{b) } f(x) = e^{2-5x}, I = \mathbb{R}, x_0 = 0, y_0 = 0.$$

Utilisation des tableaux de primitives

Dans les exercices 26 à 29, déterminer une primitive de la fonction f sur un intervalle quelconque de son ensemble de définition (on ne cherchera pas à préciser cet intervalle).

26 Avec les fonctions usuelles

a) $f(x) = x + 3e^x$; b) $f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$;
c) $f(x) = \sqrt{x}$; d) $f(x) = \sqrt[5]{x}$; e) $f(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$.

27 La forme $u'e^u$

a) $f(x) = xe^{(x^2+1)}$; b) $f(x) = e^{1-3x}$;
c) $f(x) = \sin x e^{\cos x}$; d) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

28 La forme $\frac{u'}{u}$

a) $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$; b) $f(x) = \frac{x^2}{5x^3+1}$;
c) $f(x) = \frac{e^x}{2e^x+5}$; d) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$;

29 La forme $u'u^\alpha$ (α réel)

a) $f(x) = (2x-5)^3$; b) $f(x) = \sin x \cos^2 x$;
c) $f(x) = x\sqrt{x^2+3}$; d) $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x)^3}$;
e) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$; f) $f(x) = e^x \sqrt{1+e^x}$.

30 Montrer que si u est une fonction dérivable, strictement négative sur un intervalle I , alors $\ln(-u)$ est une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I .

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$

31 Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

a) $F(x) = \int_0^x e^{1-t^2} dt$; b) $F(x) = \int_0^x \ln(t^2+2) dt$.

32 Même exercice avec :

a) $F(x) = \int_0^{x^2} t^2 \cos t dt$; b) $F(x) = \int_{2x}^{3x} e^{t^2-t} dt$.

Piste Pour a) et b), penser à des fonctions composées.

Calculs d'intégrales

Dans chacun des exercices 33 à 42, calculer $\int_a^b f(t) dt$ après avoir déterminé une primitive F de f .

33 $a = 0, b = 1, f(t) = e^{-t}$.

34 $a = 0, b = 1, f(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$.

35 $a = 1, b = 2, f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

36 $a = 0, b = \frac{\pi}{4}, f(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$.

37 $a = 0, b = 1, f(t) = t\sqrt{t^2+1}$.

38 $a = 0, b = 1, f(t) = te^{(1-t^2)}$.

39 $a = 0, b = \frac{\pi}{4}, f(t) = -\tan t$.

40 $a = 0, b = 3, f(t) = \frac{2t+1}{t^2+t+1}$.

41 $a = 0, b = \frac{\pi}{3}, f(t) = \sin t \cos t$.

42 $a = 3, b = 0, f(t) = t\sqrt{t}$.

43 1) Déterminer deux réels a et b tels que l'on ait, pour tout réel x différent de -1 et de 5 :

$$\frac{1}{x^2-4x-5} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-5}.$$

2) Calculer l'intégrale $I = \int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x-5}$.

44 1) Montrer que la fonction $F: x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2) En déduire la valeur de $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

45 Dans chaque cas, calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I :

a) $f(x) = \frac{1}{x}, I = [n, n+1] (n \in \mathbb{N}^*)$;

b) $f(x) = x^3, I = [0, 2]$;

c) $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right), I = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Intégration par parties

Dans les exercices 46 à 48, calculer l'intégrale à l'aide d'une intégration par parties, en tenant compte des indications.

46 $\int_0^1 x e^{2x} dx$ ($u(x) = x$ et $v'(x) = e^{2x}$).

47 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin(3x) dx$

($u(x) = x+1$ et $v'(x) = \sin 3x$).

48 $\int_0^1 x \sqrt{x+1} dx$ ($u(x) = x$; $v'(x) = \sqrt{x+1}$).

Dans les exercices 49 à 52, même consigne, sans indication.

49 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} t \cos t dt$.

50 $\int_0^2 (t+1) e^t dt$.

51 $\int_1^2 x \ln x dx$.

52 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$.

53 Une primitive du logarithme

1) Calculer $\int_1^x \ln t dt$ à l'aide d'une intégration par parties.

Poser $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = 1$.

2) En déduire que la fonction $F : x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $\ln$ sur $]0, +\infty[$.

Par une méthode analogue à celle de l'exercice précédent, déterminer, dans les exercices 54 à 56, une primitive de la fonction f sur l'intervalle I , à l'aide d'une intégration par parties.

54 $f(x) = x^3 \ln x$, $I =]0, +\infty[$.

55 $f(x) = 2x \sin(3x)$, $I = \mathbb{R}$.

56 $f(x) = x^3 e^{-x^2}$, $I = \mathbb{R}$.

Poser $u(x) = x^2$ et $v'(x) = x e^{-x^2}$.

Dans les exercices 57 à 60, calculer chaque intégrale à l'aide de deux intégrations par parties successives.

57 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin x dx$.

58 $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$.

59 $\int_2^3 (\ln x)^2 dx$.

60 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t dt$.

61 1) Soit K l'intégrale $K = \int_0^{\pi} e^x \cos(2x) dx$.

À l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que :

$$K = \frac{e^{\pi} - 1}{5}.$$

2) Soient $I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx$.

Calculer $I+J$ et $I-J$.

En déduire les valeurs de I et J .

D'APRÈS BAC

62 On considère les intégrales :

$$I = \int_0^{\pi} \cos^4 x dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi} \sin^4 x dx.$$

1) a) Montrer que l'intégrale I peut s'écrire :

$$I = \int_0^{\pi} \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) dx.$$

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx - \frac{1}{3} J.$$

c) Montrer de même que $J = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx - \frac{1}{3} I$.

2) a) Montrer que $I+J = \frac{3\pi}{4}$.

b) Montrer que $J-I = 0$.

c) En déduire les intégrales I et J .

BAC

63 On pose :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x) \ln(1 + \cos x) dx.$$

1) Calculer J .

2) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer K en fonction de J .

En déduire la valeur de K .

D'APRÈS BAC

Regard sur...

Henri Lebesgue (1875-1941), mathématicien français, qui élabore et publie en 1902 une théorie de l'intégration révolutionnaire, plus générale que celle de Riemann.



Premières applications

Les applications du calcul intégral présentées ici sont là pour illustrer la portée de cet outil, sans difficulté de modélisation.

D'autres calculs d'aires et de volumes seront présentés dans la rubrique Exercices, pages 142 et 143.

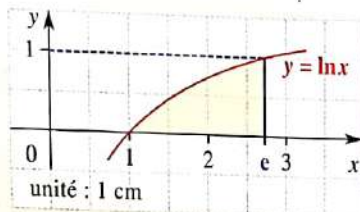
64 En cinématique

Un mobile se déplace à la vitesse $v(t) = t^2 + 5t$ (t en s, $v(t)$ en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) sur une trajectoire rectiligne.

- 1) Quelle est la distance parcourue entre les instants 0 et 300 ?
- 2) Quelle est la vitesse moyenne sur le trajet correspondant ?

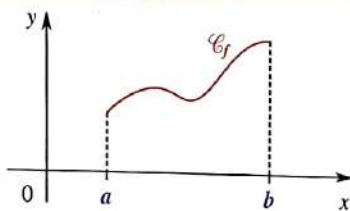
65 Un calcul d'aire

Calculer l'aire, en cm^2 , du domaine coloré, à l'aide d'une intégration par parties.



66 Volume d'un solide de révolution

1) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On considère le solide Σ obtenu en faisant tourner la courbe $\mathcal{C}_f$ autour de (Ox) , et limité par les plans d'équations $x = a$ et $x = b$.



Montrer que le volume de Σ s'exprime, en unité de volume, par :

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx.$$

Piste Appliquer le théorème 9, page 123.

2) Applications

Retrouver les formules donnant le volume :

- a) d'un cylindre droit ;
- b) d'un cône droit ;
- c) d'une boule.

67 Intensité efficace

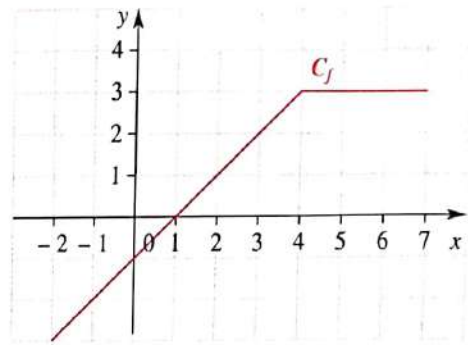
On considère un courant alternatif dont l'intensité à l'instant t est :

$$i(t) = I_m \sin(100\pi t), \text{ où } I_m \text{ est une constante.}$$

- 1) Montrer que i est périodique de période $T = \frac{1}{50}$.
- 2) Calculer la « valeur efficace » I_e et i , ainsi définie : « I_e^2 est la valeur moyenne de $[i(t)]^2$ sur l'intervalle $[0, T]$ ».

Brèves de cours

Les exercices 68 à 71 sont relatifs à la fonction f , représentée graphiquement ci-dessous.



- 68 Calculer $A = \int_1^7 f(x) dx$ et $B = \int_{-2}^1 f(x) dx$.
- 69 Calculer $C = \int_7^3 f(x) dx$ et $D = \int_{-2}^7 f(x) dx$.
- 70 Calculer $E = \int_{-2}^7 |f(x)| dx$ et $F = \int_1^7 [3 - 2f(x)] dx$.
- 71 Déterminer une expression de $f(x)$ sur $[-2, 4]$ et calculer $\int_{-2}^4 [f(x)]^3 dx$.
- 72 Comparer $I = \int_0^1 x^2 e^{x^2} dx$ et $J = \int_0^1 x e^{x^2} dx$.
- 73 Calculer la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto \cos^2 x$ sur $[0, \pi]$.
(Auparavant, exprimer $\cos^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$.)
- 74 Déterminer l'ensemble des primitives, sur $[0, +\infty[$, de $x \mapsto \frac{1}{3x+1}$.
- 75 Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive F de la fonction $t \mapsto \frac{e^t}{e^t + 3}$ qui vérifie $F(0) = 10$.
- 76 Calculer les intégrales :
a) $A = \int_1^2 \sqrt{t+1} dt$; b) $B = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \sin t \cos t dt$.
- 77 Vrai ou faux ?
« La dérivée de la fonction $F : x \mapsto \int_0^{x^2} \sin(3t) dt$ est la fonction $x \mapsto 2x \sin(3x)$. »
- 78 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :
a) $I = \int_0^2 (1-3t)e^{-t} dt$; b) $J = \int_1^2 (1+3t) \ln t dt$.

Exercices

Calcul d'intégrales et de primitives

79 Avec un polynôme trigonométrique

On pose, pour tout réel x , $f(x) = \cos^2 x \sin^5 x$.

1) À l'aide de la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, exprimer $\sin^4 x$ en fonction de $\cos x$.

2) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Méthode

Pour obtenir une primitive de $x \mapsto \cos^m x \sin^n x$, lorsque m ou n est impair, on se ramène à des formes du type $u' u^\alpha$ grâce à la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Exemples :

$$\begin{aligned} \bullet \cos^5 x &= \cos x \times \cos^4 x = \cos(1 - \sin^2 x)^2 \\ &= \cos(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \sin^2 x \cos^3 x &= \cos x \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \\ &= \cos x \sin^2 x - \cos x \sin^4 x \dots \end{aligned}$$

Lorsque n et m sont pairs tous les deux, la méthode générale est désormais hors-programme (c'est la linéarisation : voir chapitre 6).

80 Quelques applications

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f et calculer l'intégrale de f , de 0 à $\frac{\pi}{6}$.

a) $f(x) = \sin^5 x$; b) $f(x) = \cos^2 x \sin^3 x$;

c) $f(x) = \sin^4 x \cos^5 x$.

81 Pour $n \geq 0$, on considère la fonction f_n définie sur $[0, \pi]$ par :

• $f_n(0) = 2n + 1$,

• $f_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}}$ si $x \neq 0$.

1) Montrer que f_n est continue sur $[0, \pi]$.

2) On pose, pour $n \geq 0$, $I_n = \int_0^\pi f_n(x) dx$.

a) Vérifier l'égalité $f_n(x) - f_{n-1}(x) = 2 \cos(nx)$.

b) En déduire que la suite (I_n) est constante, et calculer I_n .

Note : Cette fonction f_n sera réemployée dans le problème 124.

82 1) On pose, pour $t \neq -1$ et $t \neq 1$:

$$f(t) = \frac{t}{(t^2 - 1)^2}.$$

Déterminer une primitive F de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

2) On pose, pour $t \neq 0$, $t \neq 1$ et $t \neq -1$:

$$g(t) = \frac{1}{t(t^2 - 1)}.$$

Déterminer les trois nombres réels a , b et c tels que, pour tout t réel, $t \neq 0$, $t \neq -1$ et $t \neq 1$, on ait :

$$g(t) = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}.$$

En déduire une primitive G de g sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

3) À l'aide d'une intégration par parties, calculer, pour $x > 1$:

$$J(x) = \int_2^x \frac{t \ln t}{(t^2 - 1)^2} dt.$$

On exprimera le résultat sous la forme :

$$J(x) = h(x) \ln x + A \ln(x^2 - 1) + B$$

où A et B sont deux constantes et h une fonction que l'on précisera.

BAC

83 On pose $K = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

1) Soit f la fonction de $]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Calculer la fonction dérivée de f .

En déduire la valeur de K .

2) On pose $J = \int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{x^2 - 1} dx$.

Démontrer que $J = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 1}} - K$.

Calculer J à l'aide d'une intégration par parties.

D'APRÈS BAC

84 On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

1) Calculer I_0 , puis I_1 .

2) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n .

3) Calculer alors I_n pour $n \leq 5$.

85 Déterminer une primitive, sur $]0, +\infty[$, de la fonction $f: x \mapsto x^n \ln x$ pour $n \geq 0$.

Calculs d'aires

86 Loi exponentielle

1) Soit a et λ deux réels strictement positifs.

Calculer $I(\lambda) = \int_0^\lambda a e^{-at} dt$, puis $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda)$.

Interpréter graphiquement ces résultats, en terme d'aire.

2) Calculer $E(\lambda) = \int_0^\lambda a t e^{-at} dt$, puis $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

Note : cette loi sera étudiée au chapitre 10.

87 Domaine illimité, aire finie

1) Étudier la fonction $f: x \mapsto x - 1 + 2e^{-x}$ et tracer sa représentation graphique $\mathcal{C}_f$.

On montrera que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$.

2) Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine plan limité par $\mathcal{C}_f$, Δ , et les droites d'équation :

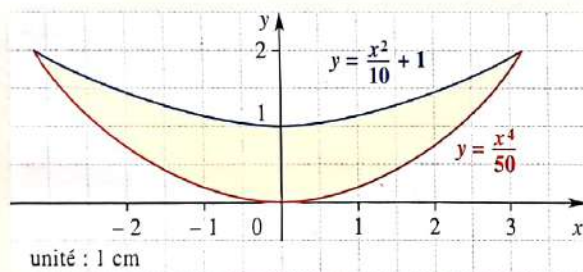
$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = \lambda,$$

pour $\lambda > 0$ fixé.

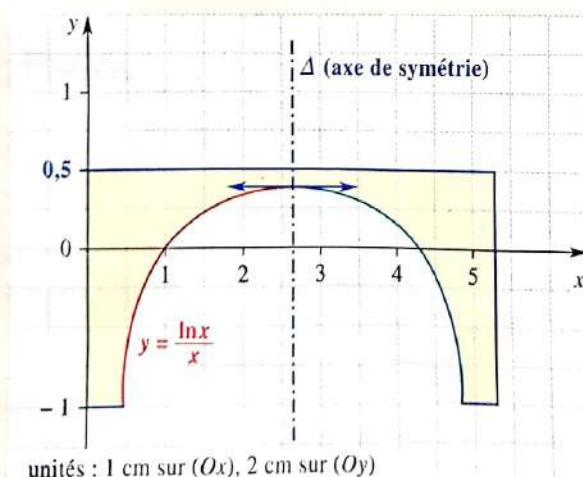
3) Étudier la limite de cette aire, lorsque λ tend vers $+\infty$, et justifier le titre de l'exercice.

Dans les exercices 88 à 90, calculer, dans chaque cas, l'aire du domaine coloré (en cm^2).

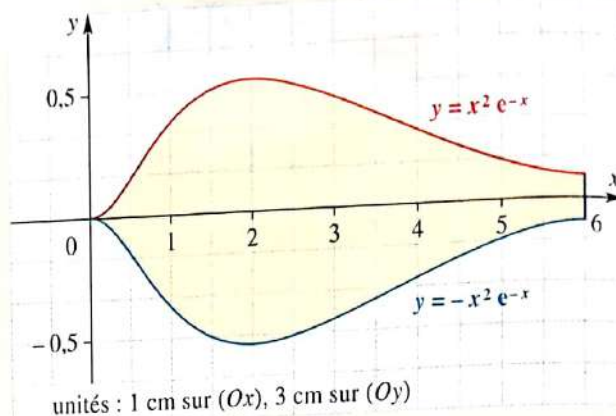
88 Le hamac



89 Le pont



90 La toupie



91 Un standard

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 9})$$

et (C) sa représentation graphique relative à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer les images de 0 et de 4 par f , puis l'antécédent de 0 par f .

2) a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que, pour tout x réel :

$$\sqrt{x^2 + 9} + x = \frac{9}{\sqrt{x^2 + 9} - x}$$

et en déduire la limite de f en $-\infty$.

3) Montrer que, pour tout réel :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

et en déduire le tableau de variations de la fonction f .

4) On considère la fonction g définie, pour tout x réel, par :

$$g(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{9}{2}e^{-x}$$

et (C') sa représentation graphique dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Démontrer que, pour tout x réel, $(g \circ f)(x) = x$.

On admettra de même que, pour tout x réel, $(f \circ g)(x) = x$.

b) En déduire que le point $M(x; y)$ appartient à (C) si, et seulement si, le point $M'(y; x)$ appartient à (C') .

c) Démontrer que la fonction g est négative sur $[0; \ln 3]$.

5) Soit D_1 et D_2 les domaines définis par :

$$D_1 = \left\{ M(x; y) \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq \ln 3 \\ g(x) \leq y \leq 0 \end{array} \right\};$$

$$D_2 = \left\{ M(x; y) \mid \begin{array}{l} -4 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{array} \right\}.$$

Vérifier que les domaines D_1 et D_2 ont la même aire ; calculer cette valeur commune en unités d'aire.

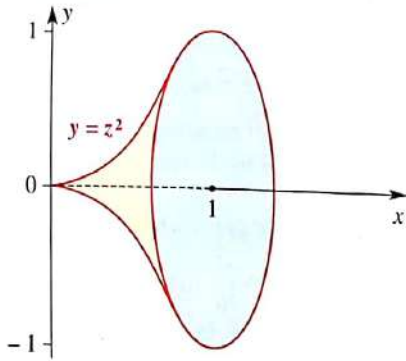
BAC

Calculs de volumes

Dans les exercices de cette partie, on peut appliquer le résultat de l'exercice 66.

92 La trompette

Retrouver (chapitre 1, exercice 6, page 25) le volume de la trompette obtenue par révolution autour de l'axe (Oz) du morceau de parabole d'équation $y = x^2$, avec $0 \leq x \leq 1$.



93 Le vase

Soit λ un réel strictement négatif.

Calculer le volume V_λ du solide obtenu par révolution autour de l'axe (Oy) du domaine $\mathcal{D}_\lambda$ limité par les axes de coordonnées (Ox) et (Oy) , la droite d'équation $y = \lambda$ et la courbe représentative de $x \mapsto \ln x$.

Étudier $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} V_\lambda$.

94 On pose, pour $x > 0$, $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$.

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.

2) Calculer $f'(x)$ en fonction de x .

Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $(\ln x)(2 - \ln x)$. Déterminer le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.

3) Tracer la représentation graphique (C) de f dans le plan.

4) On pose, pour $p \geq 1$, $I_p = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2} dx$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$I_1 = \left(\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2} dx \right).$$

b) Montrer que, pour tout $p \geq 1$:

$$I_{p+1} = -\frac{2^{p+1}}{e^2} + (p+1)I_p.$$

c) En déduire I_2 , I_3 et I_4 .

d) On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de courbe constitué des points de (C) , d'abscisses comprises entre 1 et e^2 . Le point M de (C) d'abscisse x , décrit alors un cercle de rayon $f(x)$. Calculer le volume du solide ainsi engendré, en unités de volume.

D'APRÈS BAC

Comparaison, encadrements

95 Encadrement de $\ln(1+x)$

1) Établir que, pour $u \geq 0$, $1 - u \leq \frac{1}{1+u} \leq 1$.

En déduire par intégration que, pour $x \geq 0$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

2) On pose $I = \int_0^1 \ln(4+t^2) dt$.

Utiliser la question 1) pour obtenir un encadrement de I .

Donner une valeur approchée de I à 10^{-2} près.

96 $\ln(1+x)$: un autre encadrement

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on pose :

$$F(x) = \int_0^x \ln(1+e^{-2t}) dt.$$

On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

1) Étudier le sens de variation de F sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2) Soit a un réel strictement positif.

a) Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[1; 1+a]$, on a :

$$\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1.$$

b) En déduire que $\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$.

3) Soit x un réel strictement positif.

Déduire de la question 2) que :

$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t} dt,$$

puis :

$$\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x}.$$

4) On admet que la limite de $F(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ existe et est un nombre réel noté I .

Établir que $\frac{1}{2} \ln 2 \leq I \leq \frac{1}{2}$.

5) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t}) dt$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$0 \leq u_n \leq \ln(1+e^{-2n}).$$

(On pourra utiliser le sens de variation de la fonction h , définie sur $[0; +\infty[$ par $h(t) = \ln(1+e^{-2t})$.)

b) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

6) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

a) Exprimer S_n à l'aide de F et n .

b) La suite (S_n) est-elle convergente ? Dans l'affirmative, donner sa limite.

D'APRÈS BAC

97 Encadrement de e^{-x}

- 1) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $e^{-x} \leq 1$.
- 2) À l'aide d'intégrations successives, montrer que, pour tout $x \geq 0$:

$$1 - x \leq e^{-x}, \text{ puis } e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

- 3) Dédire de la question précédente que, pour $t > 0$:

$$1 - \frac{1}{t} \leq e^{-\frac{1}{t}} \leq 1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}.$$

- 4) On pose $I = \int_{100}^{1000} e^{-\frac{1}{t}} dt$.

Montrer que $I \approx 900 - \ln 10$ à 5×10^{-3} près.

98 Majoration de $I(\lambda) = \int_3^\lambda e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

- 1) Pour tout réel $t \geq 3$, établir que $0 \leq e^{-\frac{t^2}{2}} \leq e^{-\frac{3}{2}t}$.
- 2) En déduire que, pour tout $\lambda \geq 3$, l'intégrale :

$$I(\lambda) = \int_3^\lambda e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{ vérifie } 0 \leq I(\lambda) \leq 0,008.$$

Info

L'intégrale précédente intervient dans le calcul des probabilités, en liaison avec la loi de Laplace-Gauss.

Ainsi, par exemple, lorsqu'on lance 100 fois une pièce de monnaie équilibrée, la probabilité d'obtenir plus de 65 faces

est égale à peu près à $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} I(10)$. D'après le résultat

trouvé, cette probabilité est inférieure à $\frac{0,008}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,0032$.

Les exercices 99 à 101 proposent des études de suites à partir d'encadrements d'intégrales. Ils s'inspirent d'énoncés de Bac.

- 99 Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.

- 1) Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
- 2) a) Montrer que, pour tout t de $[0, 1]$, $\frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$.
b) En déduire la limite de la suite (u_n) .
- 3) a) Calculer u_1 .
b) Montrer que, pour tout n , $u_n + u_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.
c) En déduire u_3 , u_5 et u_7 .

- 100 On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$.

- 1) Calculer u_1 .
- 2) a) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$.

- b) En déduire que $1 - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 1$.

- c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

- 3) On pose pour $n \geq 1$: $v_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n} dx$.

- a) En écrivant $\frac{nx^n}{1+x^n}$ sous la forme $\frac{nx^{n-1}}{1+x^n} x$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$v_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx.$$

- b) En utilisant l'inégalité vraie pour tout $t \geq 0$: $0 \leq \ln(1+t) \leq t$ (inégalité que l'on ne demande pas de démontrer), montrer que :

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \frac{1}{n+1}.$$

- c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln 2$.

- 4) a) Vérifier que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n + nu_n = n$.

- b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1-u_n) = \ln 2$.

101 Encadrement de 400 !

- 1) Quand $p \in \mathbb{N}^*$, indiquer pour quelle(s) raison(s) on a :

$$\ln p \leq \int_p^{p+1} (\ln x) dx \leq \ln(p+1).$$

- 2) Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, en déduire un encadrement de $\ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n$ sous la forme :

$$\int_a^b (\ln x) dx \leq \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n \leq \int_c^d (\ln x) dx,$$

où a , b , c et d sont quatre nombres entiers à préciser.

- 3) Déterminer une primitive F de $x \mapsto \ln x$ sur $]0; +\infty[$. En déduire, pour $n \geq 3$, un encadrement de $\ln(n!)$ de la forme :

$$g_1(n) \leq \ln(n!) \leq g_2(n),$$

où g_1 et g_2 sont deux fonctions que l'on précisera.

- 4) Calculer $g_1(400)$ et $g_2(400)$ à 0,01 près. En déduire un intervalle $[n_1, n_2]$, le plus petit possible, avec n_1 et n_2 entiers tels que :

$$\ln(400!) \in [n_1, n_2].$$

- 5) Dédire des valeurs de $g_1(400)$ et $g_2(400)$ deux entiers q et r tels que $10^q < 400! < 10^r$. Soit N le nombre de chiffres de $400!$. Que peut-on dire de N ?

Calculs approchés d'intégrales

Dans les exercices 102 à 105, vérifier que la fonction f est continue, décroissante et positive sur $[0, 1]$, et calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de $I = \int_0^1 f(x) dx$ à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, en utilisant la méthode des rectangles, décrite pages 134 et 135.

Rappel : $s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ sont des valeurs approchées de I à moins de $\frac{f(0) - f(1)}{n}$.

102 $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$. **103** $f(x) = \sqrt{8-x^3}$.

104 $f(0) = 1$ et, si $x \neq 0$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

105 $f(x) = e^{-x^2}$.

106 Avec une fonction croissante

Soit p un entier naturel non nul et f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x^p$. On pose, pour n entier ($n \geq 1$) :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1) En interprétant par un calcul d'aires, montrer que :

a) $S_n \leq \int_0^1 f(x) dx \leq s_n$; b) $s_n - S_n = \frac{1}{n}$.

2) En déduire la limite de la suite $(s_n)_{n \geq 1}$, puis que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} \right) = \frac{1}{p+1}.$$

Déjà vu

Le résultat précédent est évidemment cohérent avec les (rares) formules que nous connaissons :

- pour $p = 1$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
- pour $p = 2$, $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

On trouve respectivement les limites $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

107 En s'inspirant de l'exercice précédent (question 1)), calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de $I = \int_0^1 \sqrt{1+t^4} dt$.

108 Un cas général

Soit f une fonction dérivable sur $[0, 1]$, telle que f' soit continue et vérifie : il existe M réel tel que, pour tout x de $[0, 1]$, $|f'(x)| \leq M$.

On pose $I = \int_0^1 f(x) dx$ et $R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

(R_n est une « somme de Riemann » associée à f , voir page 135.)

1) En utilisant une inégalité de la moyenne, montrer que, pour tous u et v de $[0, 1]$: $|f(v) - f(u)| \leq M|v - u|$.

2) Établir l'inégalité :

$$|I - R_n| \leq \sum_{k=1}^n \left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dx \right].$$

3) Dédurre des questions 1) et 2) que :

$$|I - R_n| \leq \frac{M}{2n}.$$

4) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n$ et un majorant de l'erreur commise dans l'approximation $I \approx R_n$.

Les exercices 109 à 111 utilisent les résultats de l'exercice précédent.

109 Soit $f(t) = \sin(\pi t^2)$.

1) Montrer que, pour $t \in [0, 1]$, $|f'(t)| \leq 2\pi$.

2) En déduire, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, une valeur approchée de $I = \int_0^1 f(t) dt$ à 10^{-3} près.

110 On pose $R_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2 + n^2}$.

Montrer que la suite (R_n) converge et déterminer sa limite.

111 On pose $R_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3n+k}$.

Montrer que (R_n) converge et déterminer sa limite.



La gare TGV de l'aéroport de Lyon : la toiture inclinée est découpée en rectangles...

Rubrique à Bac

Suites définies par une intégrale

Ces suites ne figurent pas explicitement au programme, mais demeurent une source inépuisable de sujets, dont voici le déroulement immuable : on considère des fonctions $f_1, f_2, \dots, f_n$, définies et continues sur un même intervalle $[a, b]$, et on définit la suite de terme général :

$$I_n = \int_a^b f_n(t) dt.$$

Le tronc commun de tous ces sujets est d'obtenir une **relation entre plusieurs termes à l'aide d'une intégration par parties**.

Deux itinéraires possibles suivent, dans les énoncés :

- le calcul de termes, de proche en proche ;
- l'étude de la suite (I_n) (monotonie, comportement asymptotique) à l'aide d'inégalités sur les intégrales.

Calcul de termes

112 On pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$, pour $n \geq 0$.

- 1) Calculer I_0 .
- 2) En intégrant par parties, montrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}.$$
- 3) En déduire la valeur de I_1, I_2 et I_3 .

113 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^n x}$.

- 1) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{3}]$:

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}.$$

En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ sur $[0; \frac{\pi}{3}]$.

- 2) Calculer I_1 .
- 3) Calculer la valeur de I_2 .
- 4) Pour $n \geq 3$, établir une relation liant I_n et I_{n-2} .
On utilisera une intégration par parties et la relation :

$$\frac{1}{\cos^n x} = \frac{1}{\cos^{n-2} x} \times \frac{1}{\cos^2 x}.$$

- 5) En déduire les valeurs de I_3, I_4 et I_5 .

Comportement asymptotique

114 D'après BAC S, Polynésie, 2001.

On pose, pour $x > 0$, $f(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2}$.

Soit $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left(\frac{\ln t}{t^2}\right) dt$ et $A_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} f(t) dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$I_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}.$$

- 2) a) Montrer que $A_n = I_n + e$.
- b) Calculer I_0 et A_0 .
- 3) Montrer que la suite (A_n) converge vers e .

115 D'après BAC S, France métropolitaine, 1999.

Dans cet exercice, n est un entier naturel *non nul*.

On pose $u_n = \int_0^2 \left(\frac{2t+3}{t+2}\right) e^{\frac{t}{n}} dt$.

- 1) a) Soit φ la fonction définie sur $[0; 2]$ par :

$$\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}.$$
 Étudier les variations de φ sur $[0; 2]$.

En déduire que, pour tout réel t dans $[0; 2]$, $\frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4}$.

- b) Montrer que, pour tout réel t dans $[0; 2]$, on a :

$$\frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t) e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}}.$$

- c) En déduire que $\frac{3}{2} n(e^{\frac{2}{n}} - 1) \leq u_n \leq \frac{7}{4} n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$.

- d) On rappelle que $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^h - 1}{h}\right) = 1$.

Montrer que, si (u_n) possède une limite L , alors $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$.

- 2) a) Vérifier que, pour tout t dans $[0; 2]$, on a :

$$\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}.$$

En déduire l'intégrale $I = \int_0^2 \left(\frac{2t+3}{t+2}\right) dt$.

- b) Montrer que, pour tout t dans $[0; 2]$, on a $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$.

En déduire que $I \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}} I$.

- c) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite L .

116 D'après BAC S, Asie, 1998.

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx.$$

1) a) Démontrer que, pour tout x dans l'intervalle $]1, e[$ et pour tout n entier naturel, on a :

$$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0.$$

b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

2) a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.

b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

c) En déduire I_2 , I_3 et I_4 .

Donner leurs valeurs exactes, exprimées en fonction de e , et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.

3) a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$.

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)I_n \leq e$.

c) En déduire la limite de I_n .

d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n .

117 D'après BAC S, Pondichéry, 2001.

1) On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx.$$

a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .

b) Prouver que, pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx.$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

c) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n.$$

2) On considère la suite réelle (a_n) , définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul :

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n.$$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Un peu de tout...

... dans le problème de synthèse qui suit, un grand classique du genre.

118 D'après BAC S, La Réunion, 1997.

Pour n entier naturel non nul, soit f_n la fonction définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

Soit a un élément non nul fixé dans I . Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n(a) = \int_0^a f_n(x) dx.$$

1) Calculer $I_0(a)$.

2) Montrer que, pour tout x de I et pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$f'_n(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x) \quad \text{et} \quad f_n(0) = 0.$$

En déduire que, pour tout $n \geq 1$:

$$I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!} e^{-a}.$$

3) En déduire que pour tout $n > 0$:

$$I_n(a) = 1 - \left(\sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \right) e^{-a}.$$

4) Dans cette question, on pose $a = 1$.

On appelle (u_n) la suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) e^{-1} = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $\mathcal{R}$ (unité graphique : 4 cm).

a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$ et donner une interprétation géométrique de u_n .

b) Montrer que, pour tout entier naturel n , et pour tout $x \in [0, 1]$:

$$f_n(x) \leq \frac{1}{n!} x^n.$$

c) En déduire l'encadrement pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{(n+1)!},$$

puis la limite de u_n .

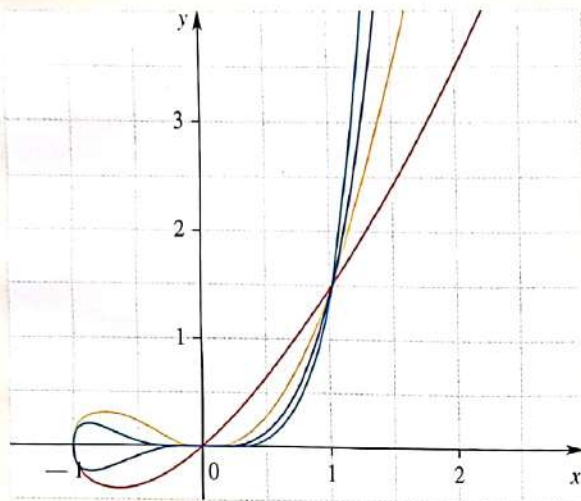
d) Déduire enfin que $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$.

Problèmes

119 Des courbes et des aires

A) Une famille de fonctions

On pose, pour tout entier n , $f_n(x) = x^n \sqrt{1+x}$ et on note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal. Les courbes C_1 , C_2 , C_3 et C_4 sont représentées ci-dessous.



- 1) Montrer que les courbes $(C_n)_{n \geq 1}$ passent par trois points fixes.
- 2) Montrer que, pour tout x de $[0, 1]$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. Identifier alors les courbes C_1 , C_2 , C_3 et C_4 .
- 3) Étudier le sens de variation de f_n sur $[-1, +\infty[$ et dresser le tableau de variations. Distinguer les cas : $n = 0$, n impair et n pair non nul.

B) Une suite d'aires

On pose, pour tout $n \geq 0$, $a_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

- 1) Interpréter graphiquement a_n .
- 2) Calculer a_0 , puis a_1 à l'aide d'une intégration par parties.
- 3) Étudier la monotonie de la suite (a_n) .
- 4) Grâce à un encadrement de $\sqrt{1+x}$, établir que :

$$\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}.$$

En déduire la limite de la suite (a_n) .

- 5) a) Montrer que, pour tout x de $[0, 1]$:

$$0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+x} \leq \frac{1}{2}(1-x).$$

- b) En déduire que :

$$\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

et déterminer la limite de (na_n) .

120 Ellipse et ellipsoïde

A) Construction d'une demi-ellipse

Soit a et b deux réels strictement positifs fixés. On pose, pour $x \in [-a, a]$:

$$f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal (avec $a = 6$ et $b = 3$).

B) Volume d'un ellipsoïde de révolution

On considère le solide Σ obtenu en faisant tourner autour de (Ox) la courbe $\mathcal{C}$ définie précédemment (Σ est appelé « ellipsoïde de révolution »).

- 1) Montrer que le volume de Σ s'exprime, en unité de volume, par :

$$V = 2\pi \int_0^a [f(x)]^2 dx.$$

- 2) Calculer V . Que retrouve-t-on lorsque $a = b$?

- 3) Application : calculer en km^3 le volume de la Terre, considérée comme un ellipsoïde de révolution, avec $b \approx 6\,378,137$ km (rayon équatorial) et $a \approx 6\,356,752$ km (rayon polaire).



C) Aire d'une ellipse

On appelle ellipse la réunion des courbes C et $s_{(Ox)}(C)$, où $s_{(Ox)}$ est la réflexion d'axe (Ox) . Cette partie propose le calcul de l'aire A de cette ellipse (en unité d'aire).

- 1) Vérifier que, pour tout réel x , l'intégrale

$$F(x) = \int_0^{\arcsin x} \sqrt{a^2 - t^2} dt$$

est bien définie. Calculer $F(0)$.

- 2) Montrer que $A = 4 \frac{b}{a} F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

- 3) Prouver que la fonction F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et que :

$$F'(x) = a^2 \cos^2 x.$$

- 4) Exprimer $\cos^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$.

En déduire une formule explicite de $F(x)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- 5) À l'aide des questions précédentes, établir que $A = \pi ab$. Quel résultat retrouve-t-on lorsque $a = b$?

122 La formule de Wallis

Soit n un entier naturel. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

1) Calculer I_0 et I_1 .

2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout

$$n \geq 2, \text{ on a } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (1).$$

Piste Poser $u(x) = \sin^{n-1} x$ et $v'(x) = \sin x \dots$

3) En déduire I_2, I_3, I_4 et I_5 .

4) Démontrer par récurrence que :

$$a) \text{ pour } n \geq 1, I_{2n} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} \times \frac{\pi}{2};$$

b) pour $n \geq 1$,

$$I_{2n+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} \times \frac{1}{2n+1}.$$

5) a) Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, comparer $\sin^n x$ et $\sin^{n+1} x$.

En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

b) À l'aide de l'égalité (1), établir alors l'encadrement :

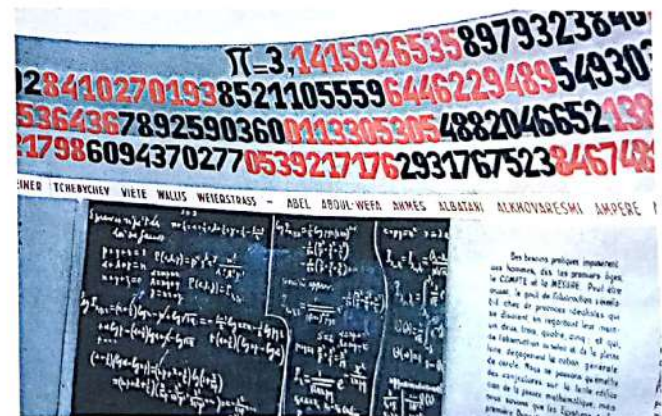
$$\frac{n}{n+1} I_{n-1} \leq I_n \leq I_{n-1}, \text{ pour } n \geq 1.$$

c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$.

6) Démontrer la formule de Wallis (mathématicien anglais, 1616-1703) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{\pi}{2}$, avec, pour $n \geq 1$:

$$w_n = \left(\frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} \right)^2 \times \frac{1}{2n+1}.$$

7) En remarquant que $w_{n+1} = \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} w_n$, organiser sur un tableur le calcul des valeurs de w_n jusqu'à obtenir une valeur approchée de $\frac{\pi}{2}$ à 10^{-2} près. La convergence semble-t-elle rapide ?



Sur une coupole du palais de la Découverte, les 627 premières décimales de π calculées par Shanks après 20 ans d'effort. (Une erreur à partir de la 528^e décimale a été corrigée depuis 1949.)

121 Un résultat de Leibniz

On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

On se propose d'établir que (u_n) converge vers $\frac{\pi}{4}$.

A) Expression de u_n à l'aide d'une intégrale

1) Montrer que, pour tout réel t :

$$(1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^n t^{2n}) - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

2) En déduire que $u_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$.

3) Montrer que, pour tout réel t de $[0, 1]$, on a :

$$\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}.$$

En déduire que $\left| u_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{2n+3}$.

B) Calcul de $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$

On pose, pour tout x , $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

1) Justifier la dérivabilité de F et calculer $F'(x)$.

2) On pose, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $u(x) = F(\tan x)$.

a) Montrer que u est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $u'(x)$.

b) Calculer $u(0)$; en déduire que, pour tout x , $u(x) = x$.

3) Déduire des questions précédentes que $I = \frac{\pi}{4}$.

C) Limite de (u_n) et valeur approchée de π

1) À l'aide de A) et B), déterminer la limite de la suite (u_n) .

2) Déterminer un entier n_0 tel que $4u_{n_0}$ soit une valeur approchée de π à 10^{-2} près.

3) Organiser, à l'aide d'un tableur (ou d'une calculatrice), le calcul de $4u_{n_0}$.

π (version Leibniz)

La formule précédente (due à Leibniz) n'est pas utilisée pour le calcul de π : la convergence est trop lente. Une formule analogue a cependant permis à John Machin, en 1706, d'obtenir 100 décimales de π .

123 « $\pi \approx \frac{22}{7}$ ». Signé : Archimède

On considère l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx$.

1) a) Déterminer les réels a, b, c, d, e, f, g et h , tels que l'on ait, pour tout réel x :

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g + \frac{h}{1+x^2}.$$

b) Calculer l'intégrale $\int_0^1 (x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4) dx$.

c) En déduire que $J = \frac{22}{7} - 4I$, avec $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

2) Calculer I en utilisant les questions du problème 121, partie B).

3) En déduire que $\pi \approx \frac{22}{7}$, avec une erreur égale à J .

4) a) Déterminer le maximum de la fonction $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0, 1]$.

b) En déduire que $0 \leq \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \leq \frac{1}{2^8}$, puis que $0 \leq J \leq 4 \times 10^{-3}$.

Pi (version Archimède)

L'approximation précédente n'est pas la meilleure connue par Archimède. Celui-ci obtint $\pi \approx \frac{355}{113}$, imbattable parmi les fractions « simples » (voir la méthode décrite au chapitre 1, problème 89, page 40).

124 Somme des inverses des carrés

Le but de ce problème est d'étudier la limite de la suite de terme

$$\text{général : } u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \quad (n \geq 1).$$

A) Expression de u_n à l'aide d'une intégrale

1) Calculer l'intégrale $J = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt$.

2) On pose, pour tout $k \geq 1$: $K = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos kt \, dt$.

À l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que $K = \frac{1}{k^2}$.

3) On pose, pour tout t de $[0, \pi]$ et $n \geq 1$:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos(2t) + \dots + \cos(nt).$$

Déduire des questions précédentes l'égalité :

$$u_n = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) D_n(t) \, dt.$$

B) Étude de l'intégrale $I_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) D_n(t) \, dt$

1) a) Vérifier que, pour tous réels a et b :

$$2 \sin b \cos a = \sin(a+b) - \sin(a-b).$$

b) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \geq 1$ et $t \in]0, \pi[$:

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}}. \quad (1)$$

c) On considère la fonction g définie sur $[0, \pi]$ par

$$g(0) = -1 \text{ et, si } t \neq 0, g(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

Montrer que g est continue en 0.

$$\text{Rappel : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

d) Montrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$I_n = \int_0^\pi g(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \, dt.$$

2) a) On pose, pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $h(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Montrer que h est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et que $h'(x)$ est du signe de $\varphi(x) = x - \tan x$.

b) Étudier le signe de $\varphi(x)$ en étudiant les variations de φ .

c) En déduire que la fonction h est décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

d) Pour $t \in [0, \pi]$, démontrer l'encadrement :

$$-\frac{\pi}{2} \leq g(t) \leq -\frac{1}{2}.$$

3) a) Soit α un réel tel que $0 < \alpha < \pi$.

$$\text{On pose } A_n(\alpha) = \int_\alpha^\pi g(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \, dt.$$

Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n(\alpha) = 0$, à l'aide d'une intégration par parties.

b) En déduire que $|I_n| \leq \alpha \frac{\pi}{2}$, puis, en admettant que cette limite existe, déterminer la limite de (I_n) .

C) Limite de la suite (u_n)

Conclure à l'aide des questions précédentes.

(1) Cette égalité sera redémontrée au chapitre 6 (problème 134) à l'aide des nombres complexes.



Équations différentielles et modèles d'évolution

OBJECTIFS

- Étudier l'équation différentielle $y' = ay + b$.
- Décrire l'évolution de certains phénomènes intervenant dans les Sciences appliquées, à l'aide de modèles mathématiques discrets (suites) et continus (fonctions).



« Le mouvement perpétuel et l'agitation
incompréhensible de la vie. »

Gustav Mahler

Avant-première

1. OBJECTIFS

• Les Sciences dites « appliquées » (Mécanique, Électricité, Biologie, Économie, Démographie, ...) fourmillent de situations conduisant à une **équation différentielle**, que nous pouvons présenter *grosso modo* comme étant une *relation entre une fonction et ses dérivées successives*, valable sur un certain intervalle.

• Dans une équation différentielle, l'inconnue est la fonction.

Nous dirons ainsi qu'une fonction f est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sur un intervalle I si f est dérivable sur I et vérifie, pour tout x de I :

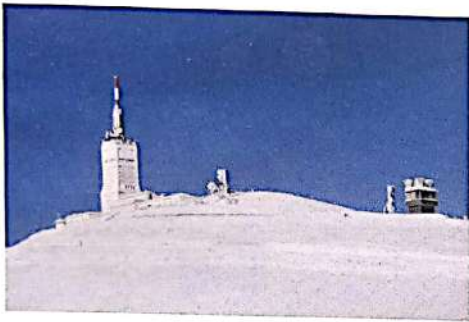
$$f'(x) = af(x) + b.$$

• Nous allons, dans cette rubrique :

– présenter une situation conduisant à une équation différentielle du type $y' = ay + b$ (a et b sont des constantes) ;

– visualiser (sur une calculatrice ou un logiciel) quelques courbes des fonctions solutions grâce au « **champ des tangentes** » ;

– construire, de façon approchée, une courbe solution donnée grâce à la **méthode d'Euler**.



La météo : un domaine où fourmillent les équations différentielles d'une grande complexité.

2. PRÉSENTATION D'UNE SITUATION

Séquence 1

Loi du refroidissement de Newton

Un thermomètre indique la température d'une pièce (20 °C). On le place sur le bord d'une fenêtre, à l'extérieur, où la température est de 4 °C. Au bout de trois minutes, il indique 8 °C. La loi de Newton exprime que la température $f(t)$ évolue en fonction du temps t écoulé depuis le changement de milieu du thermomètre (t en minute, $f(t)$ en °Celsius) de la façon suivante : il existe une constante k telle que, pour tout $t \geq 0$:

$$f'(t) = k(f(t) - 4).$$

(On convient que $t = 0$ lors du changement de milieu.)



1) On pose $g(t) = f(t) - 4$.

Montrer que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que, pour tout $t \geq 0$:

$$g'(t) = kg(t).$$

2) En déduire que $g(t) = g(0)e^{kt}$ (voir chapitre 3, théorème 9).

3) Exprimer alors $f(t)$ en fonction de t et calculer la constante k .

4) Étudier et représenter graphiquement la fonction f .

3. LE CHAMP DES TANGENTES

Considérons l'équation différentielle $y' = -0,5y + 1$ (1).

Les logiciels et les calculatrices équipés du calcul formel permettent une visualisation des solutions de (1) en traçant, à intervalles réguliers, quelques tangentes aux courbes représentatives correspondantes : c'est le « **peigne** » ou « **champ** » des tangentes.

• Sur le logiciel Maple, les instructions suivantes :

```
> with(DEtools) ;
> diff (y(x), x)=1-0.5*y(x) ;
```

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x) = 1 - .5y(x)$$

```
> DEplot (" , y(x) , x=-1..4 , y=-2..4 ) ;
```

affichent le dessin ci-contre (Fig. 1).

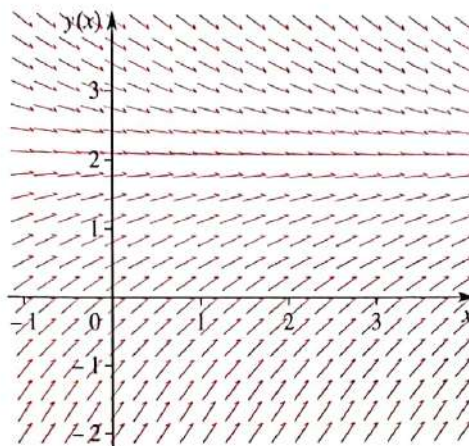


Fig. 1

Cela permet :

- d'observer que toutes les solutions ont pour limite 2 en $+\infty$;
- de tracer, de façon approchée, l'unique solution prenant une valeur donnée en 0 (par exemple).

• Avec une calculatrice

Casio Graph100

Avec le menu **DIFF EQ** **1st** **1: Separ**, on saisit $f(x) = 1$, $g(y) = -0,5y + 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

Texas TI 89

Dans **MODE** **Graph**, choisir **6: DIFF EQ** ; dans l'éditeur **Y=**, saisir $y'_1 = -0,5y + 1$ puis $y_1^1 = 1$ (correspond à $y_1(0) = 1$ si $t_0 = 0$), et **GRAPH**.

Dans les deux cas s'affichent le champ des tangentes et la courbe de la solution particulière f telle que $f(0) = 1$.

Séquence 2

À vous

Procéder de même avec l'équation $y' = ay + b$ en faisant varier a et b . Ne pas oublier des valeurs négatives de a .

4. AVEC LA MÉTHODE D'EULER

Séquence 3

Une construction approchée

À l'aide d'un tableur, construire la courbe représentative approchée de la solution de l'équation différentielle : $y' = -0,5y + 1$ vérifiant $f(0) = 1$ (voir chapitre 2, page 64).

L'équation différentielle $y' = ay + b$

1 GÉNÉRALITÉS⁽¹⁾

- Une **fonction solution**, sur un intervalle I , de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est une fonction f , dérivable sur I , telle que, pour tout x de I :

$$f'(x) = af(x) + b.$$

Sans précision, on prendra $I = \mathbb{R}$.

En dehors des notations fonctionnelles habituelles, on s'autorise l'écriture :

« $y = e^x$ est solution de l'équation différentielle $y' = y$ », étant entendu que, dans une équation différentielle, *l'inconnue est une fonction*.

- **Résoudre l'équation différentielle** $y' = ay + b$, c'est trouver toutes les solutions.

- **Un peu de vocabulaire :**

- l'équation $y' = ay + b$ est dite **du premier ordre, linéaire, à coefficients constants** ;
- l'équation $y' = ay$ est l'équation **sans second membre associée**⁽²⁾.

2 RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION $y' = ay$ (a RÉEL)

L'équation $y' = ay$ est l'équation de référence dans ce chapitre. Nous en rappelons ci-dessous les solutions (obtenues un peu différemment au chapitre 3) avec une démonstration plus concise.

THÉORÈME 1

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (a réel donné) sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$ (où C est une constante arbitraire).

... Démonstration

- D'une part, il est évident que $x \mapsto Ce^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.
- D'autre part, si y est une solution, posons $z(x) = e^{-ax}y(x)$; alors z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$z'(x) = e^{-ax}(y'(x) - ay(x)) = 0 \text{ (car } y' = ay).$$

Il en résulte qu'il existe une constante C telle que, pour tout réel x , $z(x) = C$.

On en tire :

$$y(x) = Ce^{ax}.$$



EXEMPLE 1

Résoudre l'équation différentielle $2y' + 3y = 0$.

Ici, $a = -\frac{3}{2}$, donc les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-\frac{3}{2}x}$.

Voir exercice 1

(1) Ces généralités s'étendent sans peine à une quelconque équation différentielle.

(2) La locution « sans second membre » se conçoit mieux si l'on écrit « $y' - ay = b$ » ; l'équation sans second membre associée est alors « $y' - ay = 0$ ».

3 RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION $y' = ay + b$ (a, b RÉELS)

THÉORÈME 2

On considère l'équation différentielle $y' = ay + b$ (1) (a, b réels, $a \neq 0$), et l'équation sans second membre associée $y' = ay$. Alors :

- il existe une fonction constante g , solution particulière de (1) : $g(x) = -\frac{b}{a}$;
- l'ensemble des solutions de (1) s'obtient en ajoutant g à une solution quelconque de l'équation sans second membre.

Ces solutions sont donc les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ (C réel quelconque).

... Démonstration

- La fonction $g : x \mapsto -\frac{b}{a}$ est solution de (1) : vérification facile.
- Alors la condition « f est solution de (1) » équivaut à, pour tout x :
 $f'(x) - af(x) = b$, soit encore $f'(x) - af(x) = g'(x) - ag(x)$.
 Cette égalité s'écrit encore $(f - g)' = a(f - g)$.

Ainsi : f solution de (1) $\Leftrightarrow f - g$ solution de l'équation $y' = ay$.

Donc les solutions de (1) sont les fonctions : $x \mapsto Ce^{ax} + g(x)$ (C réel).

Le point de vue graphique

Voici les courbes représentatives (Fig. 2 et Fig. 3) des fonctions solutions de $y' = ay + b$, telles qu'on peut les visualiser avec le champ des tangentes (voir Avant-première).

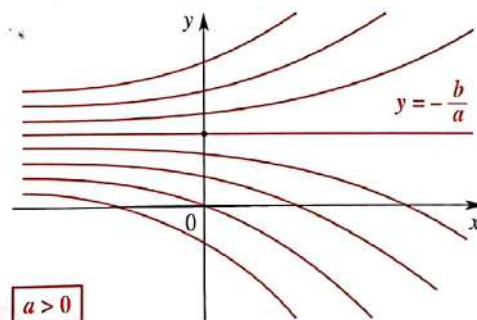


Fig. 2

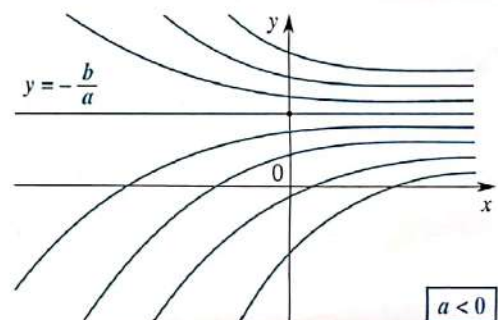


Fig. 3

Remarque : si $a = 0$, les solutions de (1) sont les fonctions affines $x \mapsto bx + k$.

THÉORÈME 3

Il existe une unique solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ vérifiant la condition initiale : $y(x_0) = y_0$ (x_0 et y_0 réels donnés).

... Démonstration

Voir exercice 4, page 164.



EXEMPLE 2

Déterminer la fonction f , solution de $y' = -0,5y + 1$, telle que $f(0) = 4$.

La solution générale de l'équation est $x \mapsto Ce^{-0,5x} + 2$.

La condition $f(0) = 4$ donne $C = 2$. Donc $f(x) = 2e^{-0,5x} + 2$.

Voir exercices 2 à 6

1. Équations se ramenant à $y' = ay + b$

OBJECTIF

Un brin de technique : il s'agit d'étudier certaines équations différentielles se ramenant à la forme $y' = ay + b$ (a, b réels).
Conformément au programme, toute indication sera donnée.

PROBLÈME

On considère les équations différentielles :

$$(1) : y' - 2y = 1 - 6x \quad \text{et} \quad (2) : y' = y(5 - y).$$

a) Montrer que (1) admet une solution affine et résoudre (1).

b) Déterminer les solutions strictement positives de (2) en posant

$$z = \frac{1}{y}.$$

a) Posons $g(x) = ax + b$; g est solution de (1) si :

$$a - 2(ax + b) = 1 - 6x.$$

Cette égalité implique $a = 3$ et $b = 1$.

Donc $g : x \mapsto 3x + 1$ est solution de (1).

On en déduit : y solution de (1) $\Leftrightarrow y' - 2y = 1 - 6x$

$$\Leftrightarrow y' - 2y = g' - 2g$$

$$\Leftrightarrow (y - g)' - 2(y - g) = 0.$$

Ainsi $y(x) - g(x) = Ce^{2x}$ (C réel).

Les solutions de (1) sont les fonctions : $x \mapsto 3x + 1 + Ce^{2x}$ ($C \in \mathbb{R}$).

b) $z = \frac{1}{y}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (puisque $y > 0$) et :

$$z' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{y(5-y)}{y^2} = -\frac{5}{y} + 1, \text{ donc } z' = -5z + 1.$$

On en déduit facilement $z(x) = \frac{1}{5} + Ce^{-5x}$, puis $y(x) = \frac{1}{z(x)}.$

MÉTHODE

**L'équation $y' - ay = f(x)$
(f fonction donnée)**

1) On détermine une solution particulière g (la forme est indiquée par l'énoncé).

2) On montre que $y - g$ est solution de l'équation « sans second membre » :

$$Y' - aY = 0.$$

3) La solution générale est :

$$y(x) = g(x) + Ce^{ax}.$$

*Remarque : si $C < 0$, on peut avoir $z(x) \leq 0$ (donc $y(x) \leq 0$) pour certaines valeurs de x .
La condition $y(x) > 0$ impose donc que $C \geq 0$.*

Dans la foulée

❶ Résoudre l'équation différentielle :

$$y' - 3y = e^x,$$

en montrant d'abord qu'il existe une solution particulière de la forme $g : x \mapsto ae^x$.

❷ On considère l'équation différentielle $y' = -y^2$.

En posant $z = \frac{1}{y}$, montrer que l'équation admet des solutions strictement positives sur $[0, +\infty[$.

2. Situations menant à une équation différentielle

OBJECTIFS

Nous nous contenterons d'envisager des exemples simples (le problème général ne l'est pas) issus de la Physique ou d'autres Sciences appliquées, au sens suivant :

- nous saurons obtenir facilement l'équation différentielle ;
- cette équation est du type $y' = ay$ ou $y' = ay + b$.

PROBLÈME 1

Désintégration des noyaux radioactifs ⁽¹⁾

Rappel : si $N(t)$ est le nombre de noyaux d'un corps radioactif présents à l'instant t (t en années), la variation $\Delta N(t)$ de ce nombre pendant la durée Δt (par désintégration) est proportionnelle à $N(t)$ et à Δt :

$$\Delta N(t) = -\lambda \Delta t N(t) \quad (\lambda > 0).$$

1) On suppose que $t \mapsto N(t)$ est dérivable. Écrire une équation différentielle vérifiée par N et la résoudre.

2) On appelle *temps caractéristique* le nombre $\tau = \frac{1}{\lambda}$.

Exprimer en fonction de τ le temps $t_{0,5}$ au bout duquel $N(t)$ a diminué de moitié ($t_{0,5}$ est la *demi-vie* ou *période de l'élément*).

3) *Application : datation au carbone 14*

Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants. À leur mort, celui-ci se désintègre avec une demi-vie de 5 730 ans.

Si un fragment d'os contient 71 % de sa quantité initiale de carbone 14, quel âge a-t-il ?

1) Si N est dérivable, on peut « passer à la limite » dans l'égalité :

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t), \text{ lorsque } t \text{ tend vers } t_0.$$

$$\text{On en tire } N'(t_0) = -\lambda N(t_0).$$

Nous connaissons les solutions (chapitre 3) : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

$$2) \text{ L'égalité } N(t) = \frac{N_0}{2} \text{ s'écrit : } e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}. \text{ D'où } t = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

$$\text{Ainsi, la demi-vie s'exprime par } t_{0,5} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2.$$



Le carbone 14 radioactif est utilisé pour la datation de fresques préhistoriques.

En posant $N_0 = N(0)$

(1) Cet exemple a servi d'introduction à la fonction exponentielle (voir chapitre 3, séquence 1, page 80). Pour les applications, voir aussi les exercices 83 à 88 du chapitre 3, pages 102.

3) Pour le carbone 14, $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{0,5}} = \frac{\ln 2}{5730}$ (environ $1,21 \times 10^{-4}$).

La condition $N(t) = 0,71 N_0$ fournit $1 = 0,71 e^{-\frac{\ln 2}{5730} t}$.

On en tire $t = -5730 \frac{\ln 0,71}{\ln 2} \approx 2831$.

Le fragment d'os a environ 2830 ans.

PROBLÈME 2

Régime stationnaire dans un circuit

Lorsqu'on met en marche un générateur de force électromotrice E aux bornes A et B d'un circuit contenant une résistance R et une bobine d'induction L (Fig. 4), on note $i(t)$ l'intensité du courant qui circule en fonction du temps (on suppose $i(0) = 0$).

En appliquant la loi d'Ohm, exprimer $i(t)$ en fonction de t , et représenter graphiquement la fonction i .

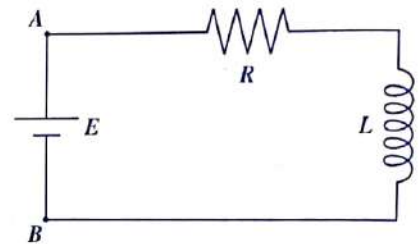


Fig. 4

- ① La tension aux bornes A et B est égale d'une part à E , d'autre part à $R i(t) + L \frac{di}{dt}$, d'après la loi d'Ohm.

Donc i est solution de l'équation différentielle $Ly' + Ry = E$.

- ② L'équation s'écrit $y' = -\frac{R}{L}y + \frac{E}{L}$ (forme « $y' = ay + b$ »).

Nous en déduisons facilement $i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$,

soit encore en introduisant (comme au problème 1) la constante de temps

du circuit ($\tau = \frac{L}{R}$) : $i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

La courbe représentative de i (Fig. 5) montre qu'assez rapidement on a

$i(t) \approx \frac{E}{R}$: un régime quasi stationnaire s'instaure.

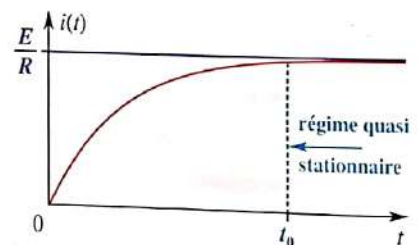


Fig. 5

Dans la foulée

③ Datation au potassium

Le potassium est radioactif, avec une période égale à $t_{0,5} = 1,4 \cdot 10^9$ années.

La Terre contient aujourd'hui 10,8 % de son potassium initial. Quel est l'âge de la Terre ?

④ Chute des corps avec résistance de l'air

Lorsqu'un corps de masse m est lâché en chute libre,

sans vitesse initiale, sa vitesse $t \mapsto v(t)$ est solution

de l'équation différentielle $y' + \frac{k}{m}y = g$ ($k > 0$ est

le coefficient de freinage, g l'accélération de la pesanteur).

Exprimer $v(t)$ en fonction de t et interpréter le nombre :

$$V = \frac{mg}{k}$$

3. Quelques modèles d'évolution

OBJECTIF

Dans les Sciences appliquées, certains phénomènes évolutifs (évolution de populations, lois de croissance ou de décroissance...) peuvent être entièrement ou partiellement décrits à l'aide de notions mathématiques que les spécialistes englobent dans la locution : « théorie des **systèmes dynamiques** ». Si des ouvrages entiers sont consacrés à ce sujet, au cœur de la recherche actuelle, notre objectif reste modeste : il s'agit de présenter quelques modélisations simples de phénomènes complexes à l'aide d'**outils discrets (les suites)** et **continus (fonctions et équations différentielles)**.

« Ce qui est simple est faux.
Ce qui est compliqué est inutilisable. »
Paul Valéry

PROBLÈME 1

Le modèle de Verhulst : loi logistique continue

Pour certaines populations vivant dans un milieu clos (comme des bactéries dans une culture), on constate que la croissance est quasiment exponentielle au début, mais elle est freinée dès que la surpopulation se fait sentir (manque de nourriture ou d'oxygène, interactions dues à la promiscuité...).

Le mathématicien belge Pierre Verhulst propose, vers 1840, le modèle suivant : on suppose que la taille de la population ne peut pas dépasser une valeur maximale, et on note $f(t)$ la fraction de ce maximum à l'instant t ; alors la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$y' = \lambda y(1 - y) \quad (1).$$

1) Résoudre l'équation (1) en posant $z = \frac{1}{y}$.

2) Sachant que $\lambda > 0$ et $f(0) = 0,01$, exprimer $f(t)$ en fonction de t et représenter graphiquement la fonction f .

1) $f(t)$ représente une proportion ; nous pouvons supposer que $0 < f(t) < 1$ et donc nous limiter à chercher des solutions de (1) dérivables, qui ne s'annulent pas sur $[0, +\infty[$.

Si y est une telle solution de (1), alors la fonction $z = \frac{1}{y}$ est dérivable sur

$[0, +\infty[$ et :

$$z' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{\lambda y(1 - y)}{y^2} = -\lambda\left(\frac{1}{y} - 1\right) = -\lambda(z - 1).$$

Remarque : ce modèle est un raffinement du modèle de Malthus (voir Première S, Analyse) pour lequel $y' = \lambda y$, et qui conduit à une croissance exponentielle :

$$y(t) = Ce^{\lambda t}.$$

(Voir aussi les exercices 32, 34 et 44, pages 167, 168 et 172.)

Le modèle de Verhulst est un peu plus réaliste.

Ainsi, z est solution de l'équation différentielle $z' = -\lambda z + \lambda$.
 Cette équation se résout sans problème :

$$z(t) = 1 + Ce^{-\lambda t} \quad (C \text{ réel}).$$

Nous en déduisons la solution générale de (1) :

$$y(t) = \frac{1}{1 + Ce^{-\lambda t}}.$$

2) La condition $f(0) = 0,01$ permet de calculer C : $C = 99$, d'où :

$$f(t) = \frac{1}{1 + 99e^{-\lambda t}} \quad (\lambda > 0).$$

L'étude de f , laissée au lecteur, permet d'obtenir sans mal la courbe représentative ci-dessous (Fig. 6).

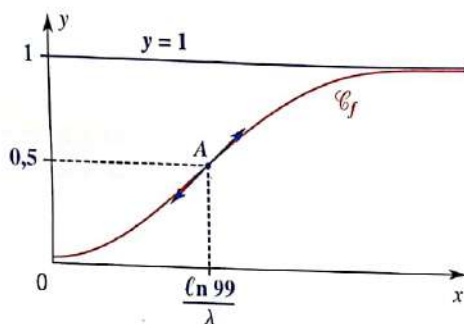


Fig. 6

Commentaire : la courbe $\mathcal{C}_f$ – dite « **courbe logistique** » – a l'allure d'une courbe exponentielle pendant la première phase de la croissance, puis, à partir du point A d'ordonnée 0,5, la courbe s'infléchit jusqu'à son « plafond » (voir aussi exercice 107, page 104).

PROBLÈME 2

Loi logistique discrète

Vers 1950, l'Écologie naît en tant que science. Pour décrire l'évolution annuelle d'une population dans une région donnée (comme celles du bombyx, papillon du ver à soie), certains mathématiciens, comme Stephen Smale, proposent le modèle suivant : on suppose que, dans la région, la population ne peut dépasser un seuil maximal. Si l'on note x_n la proportion de ce maximum lors de l'année n , alors :
 $x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$, où r est une constante positive.

1) Montrer que $0 \leq r \leq 4$.

2) On suppose que $x_0 = 0,2$.

Observer et commenter l'évolution de la suite (x_n) lorsqu'on fait varier r entre 0 et 4, à l'aide d'une simulation sur tableur et d'une représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto rx(1 - x)$.

Quelques détails

L'équation est du type $z' = az + b$

$$\text{et } -\frac{b}{a} = \frac{-\lambda}{-\lambda} = 1.$$



Papilio machaon.

1) La fonction $f: x \mapsto rx(1-x)$ admet sur $[0, 1]$ le tableau de variations ci-contre (si $r > 0$).

Comme x_n est une proportion, on a, pour tout n , $x_n \in [0, 1]$.

Pour que $x_{n+1} = f(x_n)$ soit dans $[0, 1]$, il est nécessaire que $\frac{r}{4} \leq 1$.

Ainsi $0 \leq r \leq 4$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1
f'	+	0	-
f	0	$\frac{r}{4}$	0

2) Simulation et représentation graphique

Nous avons calculé sur Excel les valeurs de u_n en modifiant la seule valeur de r .

• $r = 0,8$

	A	B	C
1	r	n	u_n
2	0,8	0	0,2
⋮		1	0,128
		2	0,089 292 8
		3	0,065 055 677
		4	0,048 658 748
		5	0,037 032 86
		⋮	⋮
		3 161	4,420 2E-308
		3 162	3,536 1E-308
		3 163	2,828 9E-308
		3 164	2,263 1E-308
		3 165	0
		3 166	0

Applications

L'équation $y' = ay + b$

1 Dans chacun des cas suivants, résoudre l'équation différentielle.

- a) $y' = \frac{3}{2}y$; b) $-y' + y = 0$;
c) $7y' + 8y = 0$.

Dans les exercices 2 et 3, mettre l'équation différentielle sous la forme $y' = ay + b$ (a et b réels), et la résoudre.

- 2 a) $y' + 2y = 3$; b) $y' - 5 = y$;
c) $3y' - 2y + 1 = 0$; d) $\sqrt{2}y' = 2y - 4$.

- 3 a) $y' = 100(y - 3)$; b) $y' = 0,1(100 - y)$;
c) $y' = 2\,002(8 - 5y)$.

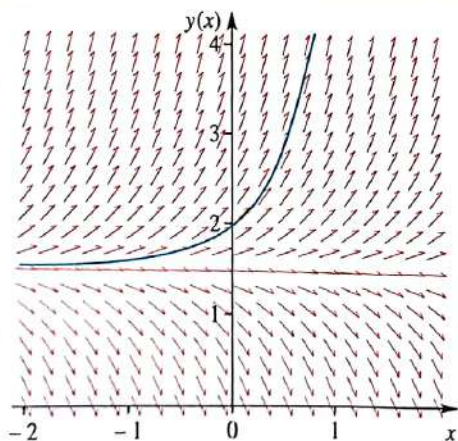
4 Démontrer le théorème 3 du cours « Il existe une unique solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$ (x_0, y_0 réels donnés) ».

Dans les exercices 5 et 6, déterminer la solution de l'équation différentielle satisfaisant la condition initiale proposée, et donner l'allure de sa représentation graphique.

- 5 a) $y' = 4y - 3, y(0) = -1$;
b) $y' = -y + 1, y(2) = 6$.

- 6 a) $y' + 0,03y = 5, y(0) = 200$;
b) $y' = 500 - 0,1y, y(10) = 0$.

7 À l'aide d'un logiciel, nous avons représenté ci-dessous le champ des tangentes d'une équation différentielle du type $y' = ay + b$, ainsi que la solution f vérifiant $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.



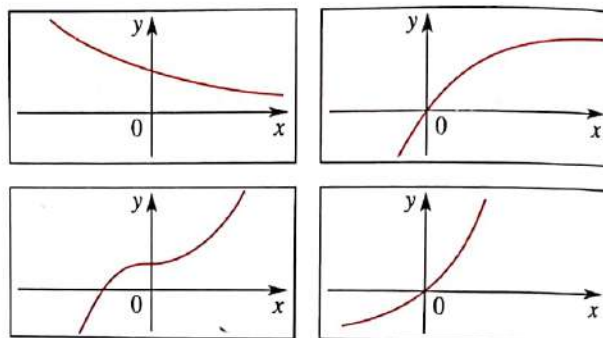
À l'aide du graphique, déterminer a et b , et donner l'expression de $f(x)$.

8 On considère les équations différentielles suivantes :

- (1) : $y' = x^2$; (2) : $y' = 3 - 0,5y$;
(3) : $y' - 2y = 4$; (4) : $y' = -y$.

Les figures ci-après donnent sommairement l'allure des courbes représentatives d'une solution de (1), (2), (3) et (4).

Associer chaque courbe à « son » équation différentielle.



9 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (5x + 2)e^{3x}.$$

1) Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' = 3y + 5e^{3x}.$$

2) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

10 En utilisant une méthode analogue à celle de l'exercice précédent, calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^3 (2x + 1)e^{-2x} dx.$$

Brèves de cours

Dans les exercices 11 à 14, on considère l'équation différentielle $y' = ay + b$ (1) (a, b donnés, $a < 0$).

11 Si $b = 2$, donner l'allure des courbes représentatives des solutions de (1).

12 Si f est une solution de (1), exprimer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ en fonction de a et de b .

13 Si $f'(0) = 0$, montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

14 Si $f(0) = f'(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, exprimer $f(x)$ en fonction de x .

15 Dans les deux cas suivants, déterminer la solution de l'équation différentielle vérifiant la condition proposée.

- a) $y' = 3 - 7y, y(0) = 2$; b) $y' + y = -1, y(0) = 0$.

Exercices

Équations se ramenant à $y' = ay + b$

Les exercices 16 à 21, portent sur des équations « avec second membre » du type $y' - ay = f(x)$ (f fonction donnée). Dans chaque cas, la résolution s'appuie sur l'équation « sans second membre associée » : $y' - ay = 0$ (voir Au cœur des problèmes, page 156).

16 On considère l'équation différentielle :

$$(E) : 2y' + 3y = 6x - 5.$$

1) Montrer que (E) admet une fonction affine : $g : x \mapsto ax + b$ comme solution.

2) Résoudre (E) .

17 Même exercice avec $(E) :$

$$2y' + 3y = 6x^2 - 7x + 2 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto ax^2 + bx + c.$$

18 Même exercice avec $(E) :$

$$y' + 2y = e^{-2x} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto (ax + b)e^{-2x}.$$

19 Même exercice avec $(E) :$

$$y' + y = \sin x \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \lambda \sin x + \mu \cos x.$$

20 On considère l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' = xe^x. \quad (1)$$

1) Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = (ax + b)e^x.$$

a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).

b) Montrer que v est une solution de l'équation (2) si, et seulement si, $v + u$ est solution de (1).

c) En déduire l'ensemble des solutions de (1).

3) Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

D'APRÈS BAC

21 On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' - 2y = e^{2x}.$$

1) Démontrer que la fonction u , définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{2x}$, est solution de (E) .

2) Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' - 2y = 0$.

3) Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si, et seulement si, $v - u$ est solution de (E_0) .

4) En déduire toutes les solutions de l'équation (E) .

5) Déterminer la fonction, solution de (E) , qui prend la valeur 1 en 0.

BAC

D'autres équations, d'autres méthodes

22 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement positive, vérifiant l'équation différentielle : $y' = ky(A - y)$ où A et k sont des réels donnés ($k \neq 0$ et $A > 0$).

1) On pose $z = \frac{1}{y}$.

Montrer que z est solution d'une équation différentielle du type $z' = az + b$ (on exprimera a et b en fonction de k et A).

2) En déduire qu'il existe une constante B telle que l'on ait, pour tout réel x :

$$y(x) = \frac{A}{1 + Be^{-kAx}}.$$

Préciser le signe de B compte tenu de la condition $y(x) > 0$ pour tout x .

3) Donner l'allure de la courbe représentative d'une solution en distinguant les deux cas suivants :

a) $k > 0$;

b) $k < 0$.

23 On se propose de résoudre l'équation différentielle :

$$y' - 2y = \frac{2}{1 + e^{-2x}} \quad (E).$$

1) Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f la fonction définie par :

$$f(x) = e^{2x}g(x).$$

Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si :

$$g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

2) En déduire toutes les solutions de (E) .

24 Une équation du second ordre

On considère les fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$, admettant une dérivée seconde et vérifiant $y(0) = 3$, $y'(0) = -5$ et, pour tout x : $y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 0$.

(y'' est la dérivée seconde de y .)

1) On pose, pour tout réel x , $z(x) = e^x y(x)$.

a) Calculer $z(0)$ et $z'(0)$.

b) Montrer que z admet sur $\mathbb{R}$ une dérivée seconde et que, pour tout réel x , $z''(x) = -2z'(x)$.

c) En déduire que z est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $z' = 4 - 2z$.

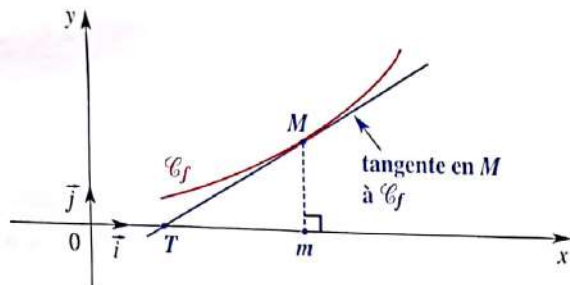
d) Exprimer alors $z(x)$ en fonction de x .

2) Montrer qu'il existe une et une seule fonction y vérifiant les hypothèses de départ, et exprimer $y(x)$ en fonction de x .

Situations menant à une équation différentielle

25 Courbes à sous-tangente constante

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f'(x)$ ne s'annule pas. On appelle vecteur sous-tangent à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M le vecteur $\overrightarrow{mT}$ (voir la figure ci-dessous).



1) Exprimer l'abscisse de T , puis les coordonnées de $\overrightarrow{mT}$ en fonction de l'abscisse x de M .

2) On suppose qu'il existe une constante a telle que, pour tout x , $\overrightarrow{mT} = a \vec{i}$.

Montrer que f est alors solution d'une équation différentielle, et la résoudre. (En cas de panne, voir chapitre 3, séquence 1, page 80.)

26 L'équation de Newton

La loi du refroidissement s'énonce ainsi en général (voir la séquence 1 pour un cas particulier) : « La vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant. »

1) Traduire cette loi par une équation différentielle vérifiée par la température T du corps.

2) Dans une pièce où la température est de 20°C , une personne verse du café (à 80°C) dans une tasse. Deux minutes plus tard, le café est à 60°C .

Au bout de combien de temps la personne pourra-t-elle déguster son café, qu'elle aime consommer à 40°C ?

27 Dissolution d'une substance

Lorsqu'on place une substance solide (comme le sel) dans l'eau, la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute, à tout instant.

On place 10 kg de sel dans un grand récipient d'eau à l'instant $t = 0$ et on note $f(t)$ la quantité dissoute (en kg) à l'instant t (en min).

1) Écrire une équation différentielle satisfaite par f .

2) Sachant que le premier kilo est dissous en 5 min, exprimer $f(t)$ en fonction de t et représenter graphiquement la fonction f .

3) Au bout de combien de temps la moitié du sel est-il dissous ?

28 Élimination d'une substance

Un réservoir de contenance 100 L est rempli d'eau dans laquelle 10 kg de sel sont dissous. Ce réservoir est alimenté par un robinet d'eau douce de débit $20 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$; en même temps, de l'eau salée s'échappe par une surverse au même rythme, de sorte que la contenance reste égale à 100 L.

On note $y(t)$ la concentration (en $\text{kg} \cdot \text{L}^{-1}$) en sel au bout de t minutes.

1) Que vaut $y(0)$?

2) Expliquer pourquoi la masse de sel (en kg) présente est :

- à l'instant t : $100y(t)$;
- à l'instant $t + h$: $100y(t) - 20hy(t)$, si h est suffisamment petit ($h > 0$).

3) En déduire que y est dérivable sur $[0, +\infty[$ et vérifier l'équation différentielle :

$$y' = -0,2y.$$

4) Exprimer alors $y(t)$ en fonction de t .

5) Représenter graphiquement la fonction y sur $[0, +\infty[$.

6) Déterminer le temps au bout duquel la concentration en sel a chuté de moitié. Ce temps est la « demi-vie » du sel.

29 Alerte aux fumées toxiques

Une pièce a pour dimensions $4 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 3 \text{ m}$. L'air présent y est initialement chargé (à $t = 0$) de $0,001\%$ de CO (monoxyde de carbone).

Lors d'un incendie survenant à $t = 0$, des fumées toxiques dégagent deux litres de CO par minute, cependant que le système d'aération laisse échapper le mélange gazeux à la même vitesse ; ainsi, le volume de gaz reste constant dans la pièce.

On note $f(t)$ le pourcentage de CO présent dans la pièce à l'instant t .

1) En utilisant la démarche de l'exercice précédent, montrer que f est l'unique solution de l'équation différentielle :

$$f' = \frac{10^{-4}}{3}(100 - f) \text{ vérifiant } f(0) = 0,001.$$

2) En déduire que, pour tout t , $f(t) = 100 - 99,999e^{-\frac{10^{-4}}{3}t}$.

3) Sachant que le seuil de haute toxicité du CO pour l'organisme est de $0,02\%$, calculer le temps au bout duquel ce seuil sera atteint.



Quelques modèles d'évolution

Les exercices et problèmes de cette partie sont regroupés en trois thèmes :

- les situations isolées qui évoluent « sans frein » ;
- les situations d'évolution freinée ou entretenue ;
- les modèles d'interaction entre deux milieux.

Thème 1 : évolution sans frein

30 La ville fantôme

Une ville de l'ouest des États-Unis avait une population de 512 habitants en 1834 et de 256 habitants en 1840. On admet que la vitesse de diminution de cette population est, à chaque instant, proportionnelle à cette population.

En quelle année cette ville est-elle devenue une « ville fantôme » ?

Piste La population $p(t)$ à l'instant t vérifie, pour tout réel t , une équation différentielle de la forme :

$p'(t) = ap(t)$, où a est un réel à déterminer.



Dimanche au petit matin, Edward Hopper (1950).

31 Évolution continue d'un capital

Un capital de 1 000 € est placé au taux d'intérêt composé annuel de 6 %.

1) Les modèles discrets

On note C_n la valeur acquise au bout de n années ; on pose $C_0 = 1\,000$.

a) Montrer que l'accroissement d'une année sur l'autre (soit $C_{n+1} - C_n$) est proportionnel à C_n .

En déduire que $C_n = 1\,000 \times 1,06^n$.

b) On suppose que ce capital évolue de jour en jour et on note u_n sa valeur acquise au bout de n jours.

Montrer que $u_n = 1\,000 \times 1,06^{\frac{n}{365}}$.

2) Le modèle continu

On suppose que le capital évolue à chaque instant et on note $f(t)$ sa valeur acquise à l'instant t (t en année, $f(t)$ en euro).

On considère alors que f est dérivable et que, pour tout t :

$$f'(t) = 0,06 f(t).$$

a) Exprimer $f(t)$ en fonction de t .

b) Comparer les valeurs acquises au bout de 1 an, 125 jours et 3 jours, avec chacun des deux modèles.

32 Le taux d'alcoolémie

Lorsqu'une personne absorbe à jeun une certaine quantité d'alcool, on note $f(t)$ le taux d'alcoolémie (en gramme par litre de sang) à l'instant t (t en heure) de son organisme. On considère que f est définie par l'équation différentielle :

$$f'(t) = ae^{-t} - f(t) ; f(0) = 0$$

(a est une constante positive dépendant de la personne elle-même et de la quantité absorbée).

1) On pose $g(t) = e^t f(t)$.

Calculer $g'(t)$ et en déduire que g est une fonction affine.

2) Exprimer $f(t)$ en fonction de a et de t .

3) On pose $a = 5$.

a) Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel ce taux est atteint.

b) Étudier la fonction f et la représenter graphiquement sur $[0, +\infty[$.

c) Au bout de combien de temps la personne peut-elle prendre le volant sans enfreindre la législation (le taux maximal autorisé est $0,5 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$) ?

33 Élimination d'un médicament

Lorsqu'une substance médicamenteuse est injectée directement dans le sang, on considère que sa vitesse d'élimination est, à chaque instant, proportionnelle à la quantité de substance restante à cet instant.

Si l'on note $y(t)$ la quantité présente à l'instant t , alors, pour tout t :

$$y'(t) = -ay(t),$$

où a est une constante positive.

1) Si Q est la quantité de substance injectée à $t = 0$, exprimer $y(t)$ en fonction de Q , a et t .

2) Application 1

Pour réaliser l'anesthésie d'un petit animal, il faut 30 mg de penthotal par kilo de l'animal, et la moitié du produit est éliminé en 4 heures.

Dans le cas d'une opération durant 1 h 30 et pratiquée sur un chat de 4 kg, évaluer la dose nécessaire à l'anesthésie, pour le vétérinaire.

3) Application 2

Une dose d'un médicament est administrée à un malade.

Au bout de 2 heures, son organisme en contient encore $30 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$ et, au bout de 48 heures, $28 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Pendant combien de temps ce médicament reste-t-il efficace ?

(On considère que le médicament reste efficace tant que son taux est supérieur à 5 mg par litre de sang.)

Piste Si Q est la quantité initiale administrée, les deux renseignements de l'énoncé fournissent deux conditions permettant de calculer Q et a ...

34 Extinction rapide d'une population

D'après J.-P. et F. Bertrandias, *Mathématiques pour les Sciences de la Vie*, Éditions PUG.

Pour décrire l'évolution d'une population en extinction en vue de calculs d'assurance-vie, B. Gompertz a proposé en 1925 le modèle suivant :

si $N(t)$ est le nombre d'individus en vie à l'instant t , alors :

$$N'(t) = -kN(t)[H - \ln N(t)],$$

où H et k sont des constantes positives.

1) Expression de $N(t)$

a) Soit y une solution strictement positive de l'équation différentielle $y' = -ky(H - \ln y)$ sur $[0, +\infty[$.

On pose $z = \ln y$.

Montrer que z est dérivable sur $[0, +\infty[$, et exprimer z' en fonction de z .

b) En déduire une expression de $z(t)$.

c) Montrer qu'il existe deux constantes positives M et c telles que l'on ait $N(t) = M \exp(-ce^{kt})$.

Piste Pour le signe de c , considérer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} N(t)$ doit être égale à 0.

Comparer cette expression avec celle donnée au chapitre 3, exercice 110.

2) Étude de la fonction N

a) Étudier la fonction $N: t \mapsto M \exp(-ce^{kt})$ sur $[0, +\infty[$: sens de variation, valeur de $N(0)$ et limite en $+\infty$.

(On rappelle que $M > 0$, $c > 0$ et $k > 0$.)

b) Représenter graphiquement N dans le cas suivant : $M = 400$, $c = 0,05$ et $k = 0,08$. (On prendra comme unités 1 cm pour 5 en abscisses, 1 cm pour 50 en ordonnées, et on placera la tangente au point d'abscisse 0.)

3) Vérification du modèle

a) Montrer que $t \mapsto N(t)$ est une fonction de Gompertz du type précédent si, et seulement si, il existe une constante $M > 0$

telle que la fonction $t \mapsto \ln\left(\ln \frac{M}{N(t)}\right)$ soit une fonction affine de t .

Piste Pour une réciproque, poser :

$$\ln\left(\ln \frac{M}{N(t)}\right) = at + b, \text{ isoler } N(t) \text{ et identifier l'expression du 2) a).}$$

b) Lors d'une étude expérimentale menée sur une population de souris de laboratoire, on a constaté que :

$$\ln\left(\ln \frac{400}{N(t)}\right) = 0,08t - \ln 20$$

(t en mois, $N(t)$ en nombre d'individus).

Montrer que N est la fonction du 2) b).

Thème 2 : évolution freinée ou entretenue

35 Croissance d'un individu

Le modèle de croissance proposé par L. von Bertalanffy en 1938 repose sur le fait que la taille d'un être vivant (animal ou végétal) atteint une valeur maximale L , et que sa vitesse de croissance est proportionnelle à la « taille manquante » :

si $y(t)$ est la taille au bout de t unités de temps, alors il existe k tel que :

$$y'(t) = k(L - y(t)).$$

1) Déterminer la solution générale de cette équation différentielle.

2) Une espèce de maïs, qui atteint 1,80 m de hauteur, sort de terre le 1^{er} juillet (à $t = 0$) et atteint la moitié de sa taille le 15 juillet.

a) Donner une formule explicite de sa taille $f(t)$ en fonction de t (en jour, $f(t)$ en cm) selon le modèle de von Bertalanffy.

b) Représenter graphiquement la fonction f .

c) À quelle date le maïs aura-t-il atteint sa taille maximale, à 2 cm près ?



36 Apprentissage d'une notion

On estime que, pendant une phase d'apprentissage, l'efficacité d'un individu croît jusqu'à une valeur maximale : le « rythme de croisière ».

Supposons qu'une personne travaillant sur une technique nouvelle produise 5 unités le premier jour, alors que la production attendue est de 40 unités par jour.

1) Un modèle discret

Soit u_n la production au n -ième jour ; alors $u_1 = 5$ et on fait l'hypothèse que $u_{n+1} = 0,8u_n + 8$.

a) Exprimer u_n en fonction de n (voir chapitre 1, Au cœur des problèmes, partie 2, pages 22 et 23.)

b) Au bout de combien de jours le rythme de croisière est-il atteint ? (Arrondir u_n à l'entier le plus proche.)

2) Un modèle continu

Soit $f(t)$ la production au t -ième jour ; alors $f(1) = 5$ et on considère que $f'(t) = 0,22 \times (40 - f(t))$.

a) Exprimer $f(t)$ en fonction de t .

b) Même question qu'en 1) b).

37 Injections à intervalles réguliers

À l'instant $t = 0$ (t est exprimé en heure), on injecte dans le sang, par piqûre intraveineuse, une dose de 1,8 unité d'une substance médicamenteuse. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée. On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t , exprimée en unités adaptées. On admet que le processus d'élimination peut se présenter mathématiquement par l'équation différentielle :

$$Q'(t) = -\lambda Q(t),$$

où λ est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1) Montrer qu'on a $Q(t) = 1,8e^{-\lambda t}$.

Calculer la valeur de λ , sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30 %. On donnera d'abord la valeur exacte, puis une valeur décimale approchée à 10^{-4} près.

2) Étudier le sens de variation de Q pour $t \geq 0$, déterminer sa limite en $+\infty$, et tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de Q dans le plan $\mathcal{P}$.

3) Au bout de combien de temps la quantité de substance présente dans le sang a-t-elle été réduite de moitié ?

On donnera la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 10^{-2} près (on ne demande pas la conversion en heures, minutes et secondes).

4) On décide de réinjecter une dose analogue à l'instant $t = 1$ (au bout d'une heure), puis aux instants $t = 2$, $t = 3$, etc. On note R_n la quantité de substance présente dans le sang à l'instant $t = n$, dès que la nouvelle injection est faite.

a) Montrer que $R_1 = 1,8 + 0,7 \times 1,8$.

b) Montrer que $R_2 = 1,8 + 0,7R_1$ et calculer R_2 .

c) Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n .

d) Montrer que, pour tout entier n , on a :

$$R_n = 6(1 - (0,7)^{n+1}).$$

e) Déterminer la limite de R_n quand n tend vers l'infini.

38 Injection continue : la perfusion

Une personne est placée sous perfusion de pénicilline, à raison de A milligrammes de substance par minute.

Si $Q(t)$ est la quantité présente dans le sang à l'instant t , alors il existe $k > 0$ tel que :

$$Q'(t) = A - kQ(t).$$

1) Sachant que $Q(0) = 0$, exprimer $Q(t)$ en fonction de k , A et t .

Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t)$.

2) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction Q sur $[0, +\infty[$.

3) Sachant que la demi-vie du produit est de 3 h, calculer k .

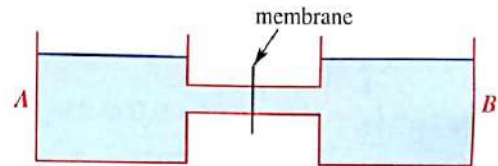
4) Si l'on veut maintenir, à long terme, 80 mg de pénicilline dans le sang, calculer la valeur du débit A .

Thème 3 : interaction entre deux milieux

Trois exercices dans cette rubrique... voir aussi le problème 45.

39 Échanges entre deux milieux

Deux récipients A et B sont séparés par une membrane perméable.



On place dans les récipients A et B deux solutions contenant respectivement a_0 molécules (dans A) et b_0 molécules (dans B).

On suppose que, toutes les heures, 20 % des molécules passent de A dans B et 10 % des molécules passent de B dans A . On note a_n et b_n les nombres respectifs de molécules présentes dans A et B au bout de n heures.

1) Montrer que, pour tout n :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,8a_n + 0,1b_n \\ b_{n+1} = 0,2a_n + 0,9b_n \end{cases}$$

2) On pose, pour tout n , $u_n = a_n + b_n$ et $v_n = 2a_n - b_n$. Montrer que la suite (u_n) est arithmétique, et la suite (v_n) géométrique.

Exprimer alors u_n et v_n en fonction de n .

3) Exprimer a_n et b_n en fonction de n et étudier la limite des suites (a_n) et (b_n) .

Commenter les résultats.

40 Épidémie : un modèle discret

Dans une population d'effectif N , on note :

- M_n le nombre de personnes atteintes d'une maladie le jour n ;
- J_n le nombre de personnes nouvellement atteintes le jour n ;
- G_n le nombre de personnes guéries le jour n .

Alors on pose :

$$\begin{cases} M_{n+1} = M_n + J_{n+1} - G_{n+1} \\ J_{n+1} = aM_n(N - M_n) \\ G_{n+1} = bM_n \end{cases} \quad \text{avec } a > 0 \text{ et } b > 0.$$

1) Montrer que $M_{n+1} \leq rM_n$, avec $r = 1 + aN - b$.

2) En déduire que, lorsque $0 < r < 1$, l'épidémie va être jugulée.

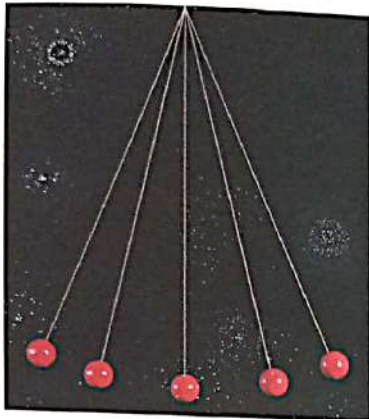
3) Réaliser une simulation sur tableur avec $N = 100\,000$, $0,2 \cdot 10^{-6} \leq a \leq 0,5 \cdot 10^{-6}$, et $0,15 \leq b \leq 0,65$ (faire varier a et b). On prendra $M_0 = 1\,000$.

Notes : le modèle précédent concerne une épidémie non mortelle ; un modèle continu sera présenté dans la rubrique Problèmes (problème 45, page 172).

Problèmes

42 L'équation $y'' = -\omega^2 y$

En Physique, le mouvement d'un oscillateur libre non amorti (oscillateur mécanique : ressort, pendule dans le cas des petites oscillations, ou oscillateur électrique) est régi par une équation différentielle du **second ordre**, du type : (E) $y'' = -\omega^2 y$, où y'' est la dérivée seconde de la fonction y , et la constante ω est la pulsation de l'oscillateur ($\omega \neq 0$).



Chronophotographie du mouvement d'un pendule pesant, sans amortissement.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions vérifiant (E).

1) Exemples

Montrer que les fonctions suivantes appartiennent à $\mathcal{E}$: la fonction nulle, les fonctions $x \mapsto \cos \omega x$ et $x \mapsto \sin \omega x$, la somme de deux fonctions de $\mathcal{E}$ et le produit d'une fonction de $\mathcal{E}$ par un réel.

En déduire que la fonction (avec A, B réels) $x \mapsto A \cos \omega x + B \sin \omega x$ appartient à $\mathcal{E}$.

2) Une propriété différentielle

a) Montrer que, si $y \in \mathcal{E}$, la fonction $\omega^2 y^2 + y'^2$ est constante sur $\mathbb{R}$.

b) Soit y une fonction de $\mathcal{E}$ telle que $y(0) = y'(0) = 0$. Déduire de a) que y est la fonction nulle.

3) Résolution

Soit y une fonction de $\mathcal{E}$ et z la fonction définie par :

$$z(x) = y(x) - y(0) \cos \omega x - \frac{y'(0)}{\omega} \sin \omega x.$$

a) Montrer que $z \in \mathcal{E}$; calculer $z(0)$ et $z'(0)$.

En déduire que z est la fonction nulle.

b) Montrer alors que les fonctions de $\mathcal{E}$ sont les fonctions de la forme : $x \mapsto A \cos \omega x + B \sin \omega x$ (A et B étant deux réels quelconques).

4) Montrer qu'il existe une unique solution de (E) satisfaisant à la condition initiale :

$$y(0) = y_0 \text{ et } y'(0) = y'_0 \quad (y_0 \text{ et } y'_0 \text{ réels donnés}).$$

5) Application

Déterminer la fonction f solution de l'équation $y'' = -5y$, telle que $f(0) = 50$ et $f'(0) = 10$.

43 Caractérisation différentielle de courbes

A) Une propriété géométrique

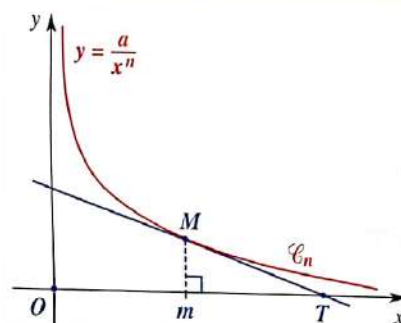
Soit n un entier naturel non nul et a un réel ($a \neq 0$).

On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction :

$$x \mapsto \frac{a}{x^n} \text{ sur }]0, +\infty[.$$

1) Donner l'allure de $\mathcal{C}_n$.

2) Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}_n$, d'abscisse x_0 . On désigne par m le projeté orthogonal de M sur (Ox) et par T le point d'intersection de la tangente en M à $\mathcal{C}_n$ avec (Ox) .



a) Déterminer l'abscisse de T .

b) Prouver que m est le barycentre de $\{(O, 1), (T, n)\}$.

c) Application

Décrire un procédé de construction de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_n$.

Que devient ce procédé dans le cas de l'hyperbole d'équation

$$y = \frac{a}{x} ?$$

B) La propriété réciproque

Soit f une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. On suppose que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x > 0$.

1) Montrer que la tangente à $\mathcal{C}$ au point M_0 d'abscisse x_0

recoupe l'axe (Ox) au point $T_0 \left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, 0 \right)$.

2) On suppose que, pour tout point M_0 de $\mathcal{C}$, le projeté orthogonal m_0 de M_0 sur (Ox) est le barycentre du système $\{(O, 1), (T, n)\}$.

Montrer qu'alors f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad xy'(x) + ny(x) = 0, \text{ sur }]0, +\infty[.$$

3) Résoudre l'équation (E).

(On pourra poser $z(x) = x^n y(x)$.)

4) Énoncer alors une réciproque : « Si pour tout M de $\mathcal{C}$, m est le barycentre de $\{(O, 1), (T, n)\}$, alors... ».

44 Croissance d'organismes

D'après J.-P. et F. Bertrandias, *Mathématiques pour les Sciences de la vie*, Grenoble, Éditions PUG, 1977.

Si l'on considère qu'un organisme est une population de cellules, le développement doit tenir compte de l'interaction mutuelle des cellules – ce que les spécialistes nomment *les relations d'allométrie*. Nous envisageons ci-dessous deux modèles d'évolution du poids P de cet organisme.

1) Le modèle de von Bertalanffy (1938)

On note respectivement $T(t)$, $S(t)$ et $P(t)$ la taille, la surface et le poids à l'instant t . On admet qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $S = aT^2$ et $P = aT^3$.

Le modèle suppose que l'accroissement du poids P est proportionnel à la surface S et qu'il y a un freinage proportionnel au poids :

$$P' = bS - cP, \text{ avec } b > 0 \text{ et } c > 0.$$

a) Montrer que T vérifie :

$$T' = \frac{b}{3} - \frac{c}{3}T$$

(voir exercice 35).

b) Exprimer alors $T(t)$ en fonction de t , b et c .

c) En déduire que le poids P évolue vers un poids maximum P_m , et que l'on a :

$$P' = cP \left[\left(\frac{P_m}{P} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right].$$

d) Montrer que la surface S évolue vers un maximum S_m , et que l'on a :

$$S' = \frac{2}{3}cS \left[\left(\frac{S_m}{S} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right].$$

2) Le modèle de F.J. Richard (1959)

Si $y(t)$ est une grandeur liée à la croissance d'un organisme (taille, poids...), un modèle général est donné par l'équation différentielle :

$$y' = \frac{c}{3} \frac{y}{1-\alpha} \left[\left(\frac{A}{y} \right)^{1-\alpha} - 1 \right],$$

où c et A sont des constantes ($A > 0$), et α un paramètre réel ($\alpha \neq 1$).

a) Vérifier qu'il existe trois valeurs particulières de α pour lesquelles on retrouve le modèle de von Bertalanffy pour la taille, le poids et la surface.

b) Pour $\alpha = 2$, vérifier que l'on retrouve l'équation logistique (voir *Au cœur des problèmes*, page 159) et résoudre cette équation.

c) Lorsque α tend vers 1, vérifier que l'on retrouve le modèle de Gompertz (voir exercice 34) et résoudre l'équation.

45 Épidémie : le modèle de D. Bernoulli

Daniel Bernoulli propose en 1760 la première modélisation mathématique de propagation d'une épidémie. Pour chiffrer les bienfaits de l'« inoculation » – c'est-à-dire du vaccin – dans la prévention contre la variole, il compare les évolutions de deux populations de nouveaux-nés, l'une subissant la variole et l'autre non.

On note $S(t)$ et $\Sigma(t)$ les effectifs de ces deux populations à l'instant t , en posant $S(0) = \Sigma(0)$.

On suppose que, pour la population non exposée :

$$\Sigma'(t) = -\mu(t)\Sigma(t)$$

où $\mu(t)$ est le taux instantané de mortalité à l'instant t .

Pour la population exposée, on note $a(t)$ le nombre de personnes n'ayant pas encore contracté la maladie et $b(t)$ le nombre de celles qui, l'ayant contractée, n'en sont pas mortes, et sont donc immunisées.

On suppose que :

$$\begin{cases} a'(t) = [-\beta - \mu(t)]a(t) \\ b'(t) = -\mu(t)b(t) + \beta(1-\alpha)a(t) \\ S(t) = a(t) + b(t) \end{cases}$$

où α et β sont des constantes positives et $0 < \alpha < 1$.

1) Montrer que $S'(t) = -\mu(t)S(t) - \alpha\beta a(t)$.

2) On pose, pour tout t :

$$f(t) = \frac{S(t)}{a(t)}.$$

a) Montrer que $f'(t) = \beta f(t) - \alpha\beta$.

b) En déduire que $f(t) = \alpha + (1-\alpha)e^{\beta t}$, en remarquant que $a(0) = S(0)$.

c) $p(t) = \frac{1}{f(t)}$ est la proportion des survivants n'ayant pas contracté la variole.

Représenter graphiquement la fonction p sur $[0, +\infty[$.

3) Pour comparer les deux populations de survivants, on pose :

$$g(t) = \frac{S(t)}{\Sigma(t)}.$$

a) Montrer que

$$g'(t) = -\alpha\beta \frac{a(t)}{\Sigma(t)} = -\alpha\beta \frac{g(t)}{f(t)}.$$

b) En déduire que $\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{-\alpha\beta e^{-\beta t}}{(1-\alpha) + \alpha e^{-\beta t}}$.

c) Calculer $g(0)$.

En déduire que $g(t) = (1-\alpha) + \alpha e^{-\beta t}$.

d) Donner le tableau de variations de la fonction g . Commenter ce tableau en comparant $\Sigma(t)$ et $S(t)$.



Nombres complexes

OBJECTIFS

- Introduire un nouvel ensemble de nombres dans lequel tous les réels possèdent des racines carrées.
- Exploiter ces nombres en tant qu'outils de résolution de problèmes d'algèbre, de trigonométrie et surtout de géométrie.



« DÉFINITION : la pataphysique est la science des solutions imaginaires. »

Alfred Jarry

Avant-première

1. OBJECTIF

Introduire les nombres complexes.

2. LA RACINE CARRÉE DE -1 ?

L'histoire des nombres complexes commence en plein *Rinascimento* (Renaissance italienne) avec les **algébristes italiens** à propos de la résolution des équations de degré 3 (entre autres) telle que, par exemple, l'équation $x^3 = 15x + 4$ (E).

Citons les célébrités de l'époque : **Giralamo Cardano** (1501-1576) (dit Cardan en français) et **Nicolo Tartaglia** (vers 1500-1557) qui s'opposèrent dans des défis « algébriques » entremêlés de controverses sordides (accusations de plagiat, de vols de formules, etc.), sans oublier Scipione del Ferro, Antonio Maria Fior et Ludovico Ferrari qui, dans cette affaire, ne jouèrent pas les simples « porteurs d'eau ».

En tout état de cause, Cardan publie en 1547 (*Ars Magna*) le résultat suivant :

« Une solution de l'équation $x^3 = px + q$ est $\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$. »

Si cette formule fonctionne à merveille avec l'équation $x^3 = 36x + 91$ (voir exercice 1 ci-dessous), en revanche, elle pose problème avec l'équation (E) : $x^3 = 15x + 4$, puisqu'on

obtient « formellement » la solution : $\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

On doit à **Rafaël Bombelli** (vers 1526-1573) la lumineuse idée de calculer avec ces nombres **imaginaires** (ils ne sauraient être réels) en utilisant les règles usuelles du calcul, mais en tenant compte systématiquement du fait que $(\sqrt{-1})^2 = -1$.

En notant $i = \sqrt{-1}$ (notation due à Euler), on a par exemple :

$(1+i) + (2-3i) = 3-2i$ et $(1+i)(2-3i) = 2-3i+2i-3i^2 = 5-i$
(voir exercices 2 et 3 ci-dessous).

Et ce faisant, le très ingénieux Bombelli obtint la solution $\alpha = 4$ (voir exercice 4 ci-dessous).

Séquence 1

« À la Bombelli »

- ① À l'aide de la formule de Cardan, trouver une solution x_0 de l'équation :

$$x^3 = 36x + 91 \quad (E_1).$$

Factoriser $x^3 - 36x - 91$ par $(x - x_0)$ et en déduire toutes les solutions de (E_1) .

② Calculs symboliques (sommes)

Mettre sous la forme $x + iy$ (x, y réels) :

- $(3+5i) + (1-2i)$; • $(3-2i) + (-2+i)$;
- $(3+i) + (-3+i)$; • $(4-3i) - (1-i)$;
- $(-5+2i) - (8+i) + (3-4i) - 5i + 1$;
- $(1+i) + (1+2i) + (1+3i) - 2 - 5i$.

③ Calculs symboliques (produits)

Mettre sous la forme $x + iy$ (x, y réels) :

- $(2-5i)(4+i)$; • $(3-i)(3+i)$;
- $(3+i)^2$; • $(3+i)^3$; • i^3 ; • i^4 ;
- $(1-i)^3$; • $(1+i)^2(1-i)^2$; • $(1+i)^3$.

④ $x^3 = 15x + 4$ (Bombelli)

a) Montrer que $(2+i)^3 = 2+11i$;

$(2-i)^3 = 2-11i$; $(11i)^2 = (-11i)^2 = -121$.

b) En déduire une solution α de (E), puis toutes les autres après avoir factorisé $x^3 - 15x - 4$ par $(x - \alpha)$.

3. VERS UNE « DÉFINITION »

Si l'utilisation des nombres imaginaires se répand de plus en plus aux XVII^e et XVIII^e siècles, (en Analyse notamment), leur *statut* est loin d'être élucidé et induit bien des ambiguïtés (définition du logarithme d'un nombre imaginaire, par exemple).

C'est la **représentation géométrique des nombres imaginaires**, initiée par le Genevois Robert Argand et magistralement parachevée par Gauss (1777-1855) – le contraire nous eût étonné – qui forgera définitivement le statut mathématique des nombres complexes.

Voici ce dont il s'agit :

- un **nombre complexe** est identifié à un point du plan repéré par ses coordonnées (a, b) dans un repère orthonormal direct ;

- les **réels** sont les points $M(a, 0)$ ($a \in \mathbb{R}$) de l'axe (Ox) (axe réel) ;

- on définit l'**addition** de deux points par la règle du parallélogramme : « Si M a pour coordonnées (a, b) et M' a pour coordonnées (a', b') , le point $M'' = M + M'$ a pour coordonnées $(a + a', b + b')$ » (Fig. 1) ;

- pour le **produit**, c'est un peu plus subtil.

Argand propose la définition suivante : « Si M a pour coordonnées polaires (r, θ) et si M' a pour coordonnées polaires (r', θ') , posons que les coordonnées polaires du produit $M \times M'$ sont $(rr', \theta + \theta')$ » (Fig. 2).

La séquence 2 approfondit les idées d'Argand.

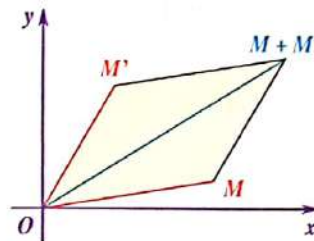


Fig. 1

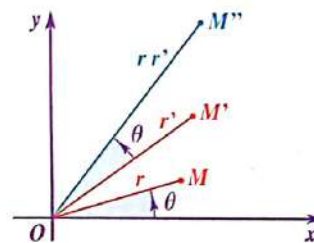


Fig. 2

Séquence 2

Le point de vue géométrique

① Quand les complexes sont réels

Montrer que le produit des points $M(a, 0)$ et $M'(a', 0)$ est le point $M''(aa', 0)$.

Piste Il faut revenir aux coordonnées polaires.

② Le point « $\sqrt{-1}$ »

a) Quelles sont les coordonnées polaires du point $J(0, 1)$?

b) Montrer que le carré $J \times J$ est le point de coordonnées cartésiennes $(-1, 0)$.

c) Soit b un réel et m le point $(b, 0)$.

Quelles sont les coordonnées cartésiennes du produit $m \times J$?

③ Des polaires aux cartésiennes

Soit (r, θ) les coordonnées polaires de M , (r', θ') celles de M' et $(rr', \theta + \theta')$ celles du point $M'' = M \times M'$ (voir ci-dessus).

a) Exprimer les coordonnées cartésiennes de M , M' et M'' en fonction de ces données.

b) Montrer que, si M , M' et M'' ont respectivement pour coordonnées cartésiennes (x, y) , (x', y') et (x'', y'') , on a :

$$x'' = xx' - yy' \quad \text{et} \quad y'' = xy' + yx'.$$

c) Comparer ce résultat avec celui d'un calcul à « la Bombelli » de $(x + iy) \cdot (x' + iy')$.

Plus rien n'empêche (et du seul point de vue calculatoire, c'est on ne peut plus commode) d'écrire $a + bi$ à la place de $M(a, b)$ (a, b réels), le nombre i étant alors le point $J(0, 1)$. Et c'est ainsi que l'ensemble des nombres complexes (ou imaginaires) vont acquérir leur droit de cité : ensemble des points du plan muni d'opérations parfaitement définies.

Note : notre conseil est de reprendre la lecture de ces deux pages (où nous avons galopé à travers plus de trois siècles d'histoire), une fois le chapitre achevé : chacun portera un regard nouveau sur leur contenu avec des idées plus affirmées...

1. Généralités

1.1 PRÉSENTATION DES NOMBRES COMPLEXES

Nous admettons le théorème suivant qui fonde ce chapitre.

THÉORÈME 1

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$, et vérifiant :

- $\mathbb{C}$ est muni d'une **addition** et d'une **multiplication** qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et suivent les mêmes règles de calcul.
- Il existe un élément i de $\mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de *manière unique* :

$$z = a + ib \text{ (} a \text{ et } b \text{ réels).}$$

Vocabulaire

- $\mathbb{C}$ est l'ensemble des *nombre complexes*.
- Avec $z = a + ib$ (a et b réels) :
 $-a$ est la **partie réelle** de z , notée $\text{Re}(z)$;
 $-b$ est la **partie imaginaire** de z , notée $\text{Im}(z)$;
 $(\text{Re}(z)$ et $\text{Im}(z)$ sont des réels.)
- Si $b = \text{Im}(z) = 0$, z est dit *réel* (on retrouve ainsi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).
- Si $a = \text{Re}(z) = 0$, z est dit *imaginaire pur* ($z = ib$, avec $b \in \mathbb{R}$).

Égalité de deux complexes

La dernière phrase du théorème peut s'énoncer ainsi :

« Deux complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire ».

Avec a, b, a' et b' réels, $a + ib = a' + ib'$ équivaut à $a = a'$ et $b = b'$.

En particulier :

$$a + ib = 0 \Leftrightarrow a = b = 0.$$

Le plan complexe

Le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est appelé **plan complexe** (Fig. 3), car il permet d'« identifier » points et nombres complexes :

- soit $z = x + iy$ un nombre complexe.

Le point M du plan de coordonnées (x, y) est l'**image** de z (ou encore *point associé à z*) : il est noté $M(z)$;

- au point M du plan de coordonnées (x, y) est associé le complexe $z = x + iy$ appelé **affixe** de M et noté z_M .

(On introduit également l'*affixe d'un vecteur* $\vec{u}$: si $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, $z_{\vec{u}} = x + iy$.)

(Deux points sont donc confondus, si et seulement si, ils ont même affixe et, de même, deux vecteurs sont égaux, si et seulement si, ils ont même affixe.)

Dans la figure 3, on a par exemple :

$$z_A = 1 \text{ et } z_B = i ;$$

$$z_C = -2 + i \text{ et } z_D = -1 - i.$$

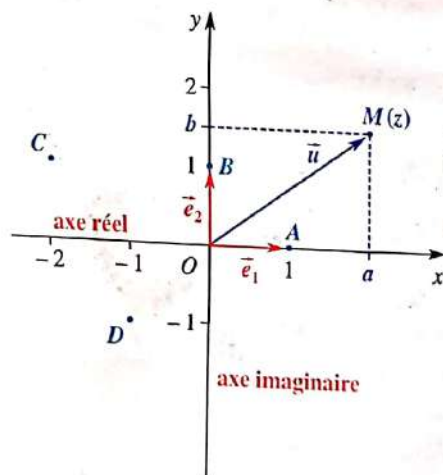


Fig. 3

1.2 OPÉRATIONS

Somme
et produit

Soit deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

Le **théorème 1** affirme que la somme $z + z'$ et le produit zz' se « calculent » en suivant les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$ en tenant compte évidemment de l'égalité $i^2 = -1$.

Ainsi :

$$\bullet z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b') ;$$

$$\bullet z \cdot z' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + iba' + i^2bb' \\ = (aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

$$(a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

On en déduit, avec $z' = -1$:

$$-z = -a - ib, \text{ puis } z - z' = (a - a') + i(b - b').$$

Inverse
et quotient

Si $z = a + ib$ est non nul, on a $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ et, par suite, $a^2 + b^2 \neq 0$. Alors, de l'égalité $(a + ib) \times (a - ib) = a^2 + b^2$, nous tirons :

$$(a + ib) \times \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} \right) = 1.$$

Ainsi, tout nombre complexe z non nul admet un **inverse** noté $\frac{1}{z}$ et nous pouvons alors définir

le **quotient** $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$ (avec $z' \neq 0$).



EXEMPLE 1

Mettre sous la forme « $a + ib$ » (a, b réels) les complexes $\frac{1}{3 - 4i}$ et $\frac{1 - i}{1 + i}$.

$$\frac{1}{3 - 4i} = \frac{3 + 4i}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{3 + 4i}{3^2 + 4^2} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

$$\text{et } \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Noter que, dans la pratique, on ne retient pas la « formule » de la proposition 1 : on fait intervenir « à propos » l'égalité $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

Voir exercices 1 à 12

$(\mathbb{C}, +, \times)$:
« un corps
commutatif »

L'exercice 8 (page 190) prend en charge d'établir que :

- $z \times (z' \times z'') = (z \times z') \times z''$: la multiplication est *associative* ;
- $z \times (z' + z'') = z \times z' + z \times z''$: la multiplication est *distributive sur l'addition*.

En résumé :

- l'**addition** dans $\mathbb{C}$ est commutative, associative et tout élément admet un opposé ;
- la **multiplication** dans $\mathbb{C}$ est commutative, associative, distributive sur l'addition et tout élément non nul admet un inverse.

Les mathématiciens disent alors que $\mathbb{C}$ muni de ces deux opérations $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un **corps commutatif**.

1.3 CONJUGAISON

DÉFINITION 1

Soit z un nombre complexe : $z = a + ib$, a et b réels.

On appelle **conjugué** de z le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$ (lire « z barre »).

Ainsi, les conjugués respectifs de -3 , i , $1 - 5i$ sont -3 , $-i$, $1 + 5i$.

Nous tenons pour évidences premières les résultats suivants :

- z réel équivaut à $z = \bar{z}$;
- z imaginaire pur équivaut à $z = -\bar{z}$;
- pour tout nombre complexe z , $\bar{\bar{z}} = z$;
- si $z = a + ib$, $z\bar{z} = a^2 + b^2$ (déjà utilisée dans le calcul de l'inverse).

Enfin, comme va le montrer la *proposition 1* (preuve facile à l'exercice 16, page 190), la conjugaison vit « en bonne entente » avec les opérations.

Proposition 1

Pour tous nombres complexes z et z' , et tout entier n :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} ; \quad \overline{-z} = -\bar{z} ; \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'} ; \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n ;$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}} \quad \text{et} \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad (z' \neq 0).$$

1.4 PREMIER APERÇU GÉOMÉTRIQUE

① Lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre, il est très commode de noter z_A l'abscisse du point A , $z_{\vec{u}}$ l'abscisse du vecteur $\vec{u}$ et $M(z)$ le point du plan complexe d'abscisse z (voir paragraphe 1.1.).

② Voici rassemblés ci-après les premiers résultats essentiels :

- Pour tout point A : $z_{\vec{OA}} = z_A$.
- Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et le réel λ :

$$z_{\vec{u} + \vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}} \quad \text{et} \quad z_{\lambda \vec{u}} = \lambda z_{\vec{u}}$$

(en particulier $z_{-\vec{u}} = -z_{\vec{u}}$, $z_{\vec{u} - \vec{v}} = z_{\vec{u}} - z_{\vec{v}}$).

- Pour tous points A et B :

$$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A \quad (\text{Fig. 4}).$$

- I milieu de $[AB]$ équivaut à $z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$.

- La translation de vecteur $\vec{u}$ amène le point $M(z)$ sur le point $M'(z')$ tel que $z' = z + z_{\vec{u}}$.

③ La figure 5 est à retenir : elle rend compte des propriétés suivantes (immédiates) :

- les points d'abscisses z et $\bar{z}$ sont **symétriques par rapport à (Ox)** ;
- les points d'abscisses z et $-z$ sont **symétriques par rapport à O** .

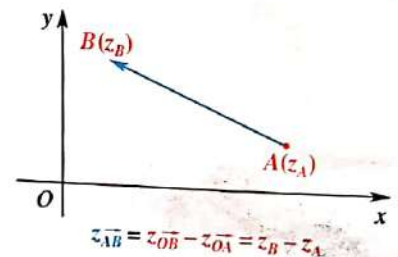


Fig. 4

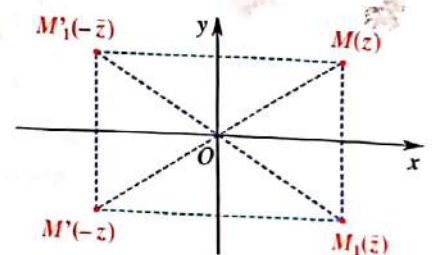


Fig. 5

2. Module et argument

2.1 COORDONNÉES POLAIRES (RAPPELS)

Repérage

Tout point M du plan distinct de O est repéré par un couple de **coordonnées polaires** (r, α) (r réel strictement positif et α réel), où :

- r est la distance OM ;
- α est une mesure de l'angle $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$ (Fig. 6).

Si (r, α) est un couple de coordonnées polaires de M , tout autre couple de coordonnées polaires est de la forme (r, α') avec $\alpha' = \alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ou encore $\alpha' = \alpha [2\pi]$ (« α' est égal à α modulo 2π »).

Pour l'origine O , on a $r = 0$, mais α n'est pas défini.

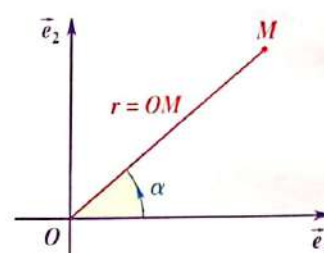


Fig. 6

Polaires et cartésiennes

Si (r, α) est un couple de coordonnées polaires de M , alors les coordonnées cartésiennes (x, y) de M sont telles que :

$$x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha.$$

Réciproquement, si $M(x, y)$ est tel que $x = r \cos \alpha$ et $y = r \sin \alpha$ avec $r > 0$, alors (r, α) est un couple de coordonnées polaires de M telles que :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \sin \alpha = \frac{y}{r}.$$

2.2 DÉFINITIONS

DÉFINITION 2

Soit z un nombre complexe *non nul*, M le point d'affixe z et (r, α) un couple de coordonnées polaires de M . Nous dirons que :

- r est le **module** de z (notation $r = |z|$) ;
- α est un **argument** de z (notation $\alpha = \arg z [2\pi]$).

Premières propriétés

- Avec $z = x + iy$ (x, y réels), on a : $|z|^2 = x^2 + y^2 = z \cdot \bar{z}$.
- Pour tout **réel** x , le module de x est la *valeur absolue* de x et :
– si $x > 0$, $\arg x = 0 [2\pi]$;
– si $x < 0$, $\arg x = \pi [2\pi]$.
- Soit $z \neq 0$; z **imaginaire pur** équivaut à $\arg z = \pm \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

• La figure 7 appuyée de résultats de base sur les angles orientés montre que, pour $z \neq 0$:

$$|\bar{z}| = |z| \quad \text{et} \quad \arg(\bar{z}) = -\arg z [2\pi] ;$$

$$|-z| = |z| \quad \text{et} \quad \arg(-z) = \pi + \arg z [2\pi]$$

(ces résultats seront récapitulés dans la partie 2.4.).

• La lecture graphique de la figure 7 montre que

$$|1 + i| = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} [2\pi].$$

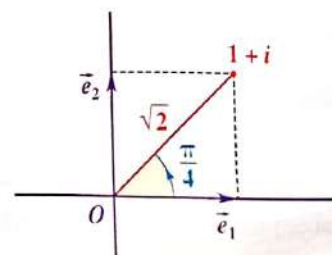


Fig. 7

2.3 FORME TRIGONOMETRIQUE

THÉORÈME 2

Soit z un nombre complexe *non nul*.

- Si $r = |z|$ et $\alpha = \arg z [2\pi]$; alors $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$.
- Si $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ avec $r > 0$, alors $r = |z|$ et $\alpha = \arg z [2\pi]$.

... Démonstration

Soit M le point d'affixe z . Le résultat découle immédiatement des relations entre les coordonnées cartésiennes (x, y) de M et ses coordonnées polaires (voir paragraphe 2.2.), compte tenu de $z = x + iy$.

Formes trigonométrique et algébrique

L'écriture $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ est la **forme trigonométrique** de z .

Par opposition, nous nommerons **forme algébrique** de z l'écriture $z = x + iy$.

Pour $z \neq 0$, les relations « de passage » sont résumées ci-dessous :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} ; \cos \alpha = \frac{x}{r} ; \sin \alpha = \frac{y}{r}$$

forme algébrique :

$$z = x + iy$$

forme trigonométrique :

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha), r > 0$$

$$x = r \cos \alpha ; y = r \sin \alpha$$

→ EXEMPLE 2

Quelle est la forme trigonométrique de $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 2 + i$?

• On a $|z_1| = 2$, d'où $z_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$.

• Avec $|z_2| = \sqrt{5}$, il vient $z_2 = \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; ceci est la *forme trigonométrique* !

(La différence avec ce qui précède est que l'on ne connaît pas explicitement de réel α tel que $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$; on a quand même $\alpha \approx 0,46$ rad.)

Voir exercices 29 à 40

Avec l'inverse

Soit $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, avec $r > 0$.

Nous avons $r^2 = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$ d'où $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{r^2} = \frac{1}{r^2} \times r(\cos \alpha - i \sin \alpha)$.

Ainsi :
$$\frac{1}{z} = \underbrace{\frac{1}{r}(\cos \alpha - i \sin \alpha)}_{\text{forme algébrique}} = \underbrace{\frac{1}{r}(\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha))}_{\text{forme trigonométrique}}.$$

Note : ce résultat (utile en soi) sera retrouvé et exploité dans le *théorème 3*.

Terrain miné

La forme trigonométrique de $-2(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ est :

$$2(\cos(\alpha + \pi) + i \sin(\alpha + \pi)).$$

2.4 FORMES TRIGONOMETRIQUES ET OPÉRATIONS

THÉORÈME 3

Soit $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ et $z' = r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')$ deux nombres complexes. Alors, on a :

- $zz' = rr'(\cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha'))$;
- $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}(\cos(\alpha - \alpha') + i \sin(\alpha - \alpha'))$ lorsque $z' \neq 0$.

... Démonstration

Développons le produit zz' :

$$zz' = rr'[(\cos \alpha \cos \alpha' - \sin \alpha \sin \alpha') + i(\sin \alpha \cos \alpha' + \cos \alpha \sin \alpha')].$$

Avec les formules d'addition, il vient :

$$zz' = rr'(\cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha')).$$

Avec $\alpha = -\alpha'$ et $r = \frac{1}{r'}$, on obtient $zz' = 1$ d'où :

$$\frac{1}{z'} = z = \frac{1}{r'}(\cos(-\alpha') + i \sin(-\alpha')) \text{ (voir note page précédente).}$$

En remplaçant alors α' par $-\alpha'$ dans la « formule » du produit, on obtient la « formule » du quotient.

Noter la simplicité de la démonstration pour un résultat capital, ne serait-ce que par le corollaire qui découle immédiatement des théorèmes 2 et 3 (comme le laissera voir l'exercice 43, page 192, où tous les circonspects de nature et les autres, aussi, sont attendus).

COROLLAIRE

Quels que soient les nombres complexes z et z' :

		(Ici, on suppose z et z' non nuls.)
Produit	$ z \times z' = z \times z' $	$\arg(zz') = \arg z + \arg z' [2\pi]$
Puissance	$ z^n = z ^n \quad n \in \mathbb{N}$	$\arg(z^n) = n \arg z [2\pi]$
Inverse	$\left \frac{1}{z}\right = \frac{1}{ z }, (z \neq 0)$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z [2\pi]$
Quotient	$\left \frac{z}{z'}\right = \frac{ z }{ z' }, (z' \neq 0)$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' [2\pi]$
Conjugué	$ \bar{z} = z $	$\arg(\bar{z}) = -\arg z [2\pi]$
Opposé	$ -z = z $	$\arg(-z) = \pi + \arg z [2\pi]$

Le calcul dans $\mathbb{C}$

Du point de vue du calcul algébrique, il est dans la nature des choses que ce tableau soit muet sur le module et l'argument d'une somme (il n'y a rien à dire ou peu).

Le « petit » schéma ci-dessous ravira les amateurs de formules simplificatrices : il indique les formes *a priori* les mieux adaptées aux divers calculs :

sommes, différences —————> forme algébrique
produits, quotients —————> forme trigonométrique

2.5 À QUOI SERT LA FORME TRIGONOMETRIQUE ?

L'étude de quelques exemples, **simples** (c'est un choix délibéré) mais parmi les plus significatifs, est un premier élément de réponse, étant entendu que la courte durée (une page) ne saurait donner la mesure définitive des choses (donc, voir les exercices).

Le calcul algébrique

La forme trigonométrique permet, dans certains cas, de calculer des **produits, quotients**, etc., en évitant d'effectuer les opérations indiquées.

→ EXEMPLE 3

Calculer $(1 + i\sqrt{3})^5$.

Le nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$ a pour module 2, et la forme trigonométrique

$z = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ montre que $\frac{\pi}{3}$ est un argument de z .

Par suite, z^5 a pour module 2^5 et pour argument $\frac{5\pi}{3}$.

Conclusion :

$$(1 + i\sqrt{3})^5 = 32\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16(1 - i\sqrt{3}).$$

Voir exercices 44 à 47

La résolution d'équations

Si la forme algébrique est adaptée à la résolution d'équations du second degré, par exemple (voir page 184), c'est la forme trigonométrique qui tient le haut du pavé dans la recherche de « racines n -ièmes ».

→ EXEMPLE 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.

Avec $r = |z|$ et $\alpha = \arg z[2\pi]$, z^3 a pour module r^3 et pour argument 3α .

Comme 1 est de module 1 et d'argument 0 $[2\pi]$, l'équation est équivalente à :

$$\begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\alpha = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} r = 1 & (\text{car } r > 0) \\ \alpha = \frac{2k\pi}{3} & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}.$$

On obtient trois solutions de module 1 et d'arguments 0, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$; à savoir :

$$1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et son conjugué } -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(Selon une longue tradition, le complexe $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est noté j .)

Voir exercices 48 et 49

Trigonométrie

On s'en serait douté... (Voir, par exemple, les exercices 50, page 192, et 92, page 195.)

3. Notation exponentielle

3.1 LA NOTATION $e^{i\alpha}$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha$ vérifie :
 $f(\alpha + \alpha') = f(\alpha) \cdot f(\alpha')$ (voir page précédente), $f'(\alpha) = i f(\alpha)$; en prolongeant les propriétés de la dérivation, on a $f = \cos + i \sin$, d'où :

$$f' = (\cos)' + i(\sin)' = -\cos + i \sin = i f.$$

Voilà qui légitime la *définition* suivante.

DÉFINITION 3

Pour tout réel α , on pose $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ⁽¹⁾.

Remarques :

- Ainsi, tout nombre complexe z non nul, de module r et d'argument α s'écrit $z = r e^{i\alpha}$: c'est la **forme exponentielle de z** . Par ailleurs, le *théorème 2* permet d'affirmer que, si $z = r e^{i\alpha}$ et $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\arg z = \alpha$ modulo 2π .
- Nous tenons à souligner le fait que $|e^{i\alpha}| = 1$ et $\arg(e^{i\alpha}) = \alpha [2\pi]$.
- Une notation cohérente et efficace : les propriétés des arguments, données par le *théorème 3* et son corollaire, montrent la pertinence d'une notation exponentielle, dont la simplicité apparaît entièrement si l'on retranscrit ces propriétés :

$$e^{i\alpha} \times e^{i\alpha'} = e^{i(\alpha + \alpha')} ; \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha'}} = e^{i(\alpha - \alpha')} ; (e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha} ; \overline{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha}.$$

Exemples

$$\begin{aligned} & \bullet e^{i0} = 1 ; e^{i\pi} = -1 ; e^{i\frac{\pi}{2}} = i ; e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i ; e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} . \\ & \bullet 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} ; (1 - i)^8 = \left(\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right)^8 = (\sqrt{2})^8 e^{-8i\frac{\pi}{4}} = 16 . \end{aligned}$$

3.2 FORMULES DE MOIVRE ET D'EULER

THÉORÈME 4

1) Formules de Moivre : pour tout réel α et tout entier n :

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n &= \cos(n\alpha) + i \sin n\alpha \\ \text{et } (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n &= \cos(n\alpha) - i \sin(n\alpha) . \end{aligned}$$

2) Formules d'Euler : pour tout réel α :

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} .$$

Toutes ces formules résultent immédiatement des relations $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$ et des propriétés des arguments.

(1) Pourquoi « e » ? Sur $\mathbb{R}$, la solution de $f'(x) = k f(x)$ (k réel fixé) et $f(0) = 1$ est la fonction $x \rightarrow e^{kx}$ (voir chapitre 3). Alors... Euler conserva la notation.

4. Équations du second degré

4.1 RACINES CARRÉES D'UN RÉEL

$$z^2 = a \text{ (} a \text{ réel)}$$

• Les solutions sur $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = a$, a réel, sont appelées **racines carrées de a** . Nous distinguons ici le mot « *racine carrée* » du symbole « $\sqrt{}$ » qui sera lu « *radical* » pour éviter toute confusion et qui n'est utilisé que pour des réels positifs.

• **Premier cas** : $a \geq 0$; l'équation $z^2 = a$ équivaut à $(z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a}) = 0$.
On obtient deux solutions **réelles** $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$, pour $a > 0$ (une seule : 0, si $a = 0$).

• **Second cas** : $a < 0$; l'équation équivaut alors à $(z - i\sqrt{-a})(z + i\sqrt{-a}) = 0$.
Toujours **deux solutions** $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$ qui sont **imaginaires conjuguées**.
Ainsi, les racines carrées de -1 sont $\pm i$, celles de -3 sont $\pm i\sqrt{3}$.

4.2 ÉQUATION $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b et c réels ; $a \neq 0$)

THÉORÈME 5

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b et c réels, $a \neq 0$) admet des solutions sur $\mathbb{C}$.
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le *discriminant* de l'équation.

• Si $\Delta = 0$, une solution unique : $x = -\frac{b}{2a}$ (réel).

• Si $\Delta \neq 0$, deux solutions :

- *réelles* si $\Delta > 0$: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;

- *complexes conjuguées* si $\Delta < 0$: $x = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

... Démonstration

La forme canonique $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ du trinôme et les racines carrées du réel Δ nous livrent ces résultats.

Note : lorsque $b' = 2b$, on peut, comme dans $\mathbb{R}$, utiliser le discriminant « réduit » $\Delta' = b'^2 - 4ac$.

➔ EXEMPLE 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

Calculons le discriminant $\Delta = -3$ et appliquons paisiblement le théorème.

Les solutions sont les complexes conjugués : $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Il s'agit des nombres complexes $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\bar{j} = j^2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ (voir exemple 4).

Voir exercices 63 à 68

5. Nombres complexes et géométrie

5.1 AVEC LES VECTEURS

Étude préliminaire

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul d'affixe z et A le point tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

De l'égalité (évidente) des affixes z_A de A et z de $\vec{u}$, nous obtenons :

$$|z| = |z_A| = OA = \|\vec{u}\| \text{ et } \arg z = \arg z_A = (\vec{e}_1, \overrightarrow{OA}) = (\vec{e}_1, \vec{u}) [2\pi].$$

Il en découle que, si le vecteur $\vec{u}'$ non nul est d'affixe z' , on a :

$$\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg z' - \arg z = (\vec{e}_1, \vec{u}') - (\vec{e}_1, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{u}') [2\pi].$$

En résumé, et en tirant quelques conséquences immédiates :

Proposition 2

Soit $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ des vecteurs non nuls d'affixes respectives z et z' . Alors :

- $|z| = \|\vec{u}\|$ et $\arg z = (\vec{e}_1, \vec{u}) [2\pi]$;
- $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = (\vec{u}, \vec{u}') [2\pi]$;
- $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ colinéaires équivaut à $\frac{z'}{z}$ réel ;
- $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ orthogonaux équivaut à $\frac{z'}{z}$ imaginaire pur.

La colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ se traduit par $(\vec{u}, \vec{u}') = 0$ ou $\pi [2\pi]$ et donc par $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = 0$

ou $\pi [2\pi]$ ce qui signifie $\frac{z'}{z}$ réel.

En ce qui concerne l'orthogonalité, on adaptera *tout seul* ce raisonnement.

5.2 ÉCRITURE COMPLEXE DE TRANSFORMATIONS

THÉORÈME 6

Soit ω un point du plan d'affixe ω et θ un réel.

- La rotation de centre Ω et d'angle θ associe au point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.
- L'homothétie de centre Ω et de rapport k (k réel non nul) associe au point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que $z' - \omega = k(z - \omega)$.

... La démonstration est effectuée aux exercices 84 et 85, page 194.

Exemple important

Les quarts de tour : comme $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$, les écritures complexes des quarts de tour de centre Ω sont :

$$z' - \omega = i(z - \omega) \quad \text{et} \quad z' - \omega = -i(z - \omega).$$

Lorsque $\Omega = O$ (origine), on obtient : $z' = iz$ et $z' = -iz$.

1. Résolution d'équations

OBJECTIF

Développer quelques procédures de résolution d'équations dans $\mathbb{C}$ en recourant à la *forme trigonométrique* (ou à la notation exponentielle) et en s'appuyant sur des techniques de *calcul algébrique* : résolution d'équations du second degré, changement de variable, « factorisation », etc.

PROBLÈME 1

Soit w le nombre complexe $w = \rho e^{i\theta}$ (ρ, θ réels avec $\rho > 0$).

- 1) Donner sous forme trigonométrique les solutions de $z^2 = w$.
- 2) Donner sous forme trigonométrique les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) : $z^3 = w$ et montrer que, si z_0 est l'une des solutions de (E), les solutions sont z_0, jz_0 et $j^2 z_0$.

Solution

- 1) Une astuce qui peut resservir ⁽¹⁾ est d'écrire $w = (\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}})^2$.

Dès lors, on a les équivalences :

$$z^2 = w \Leftrightarrow z^2 - (\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}})^2 \Leftrightarrow (z - \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}})(z + \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}) = 0.$$

D'où, les solutions de l'équation $z^2 = w$ (bien sûr opposées) :

$$\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}, -\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

- 2) En posant $z = re^{i\alpha}$ ($r > 0$), l'équation (E) est équivalente à :

$$\begin{cases} r^3 = \rho \\ 3\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} ; \text{ soit } \begin{cases} r = \sqrt[3]{\rho} \\ 3\alpha = \theta + 2k\pi \text{ ou } \alpha = \frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Nous obtenons trois solutions distinctes correspondant à $k = 0, 1$ et 2 :

$$\sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{\theta}{3}} ; \sqrt[3]{\rho} e^{i(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})} ; \sqrt[3]{\rho} e^{i(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})}.$$

Soit z_0 l'une de ces solutions : $z_0^3 = w$ (noter que $z_0 \neq 0$).

Il est clair alors que jz_0 et $j^2 z_0$ sont aussi solutions de (E). (On a, par exemple, $(jz_0)^3 = j^3 z_0^3 = z_0^3 = w$.)

Comme z_0, jz_0 et $j^2 z_0$ sont deux à deux distincts (car $z_0 \neq 0, j \neq 1$ et $j^2 \neq 1$), ce sont les trois solutions de (E).

$1, j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et $j^2 = \bar{j} = e^{-2i\frac{\pi}{3}}$
sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^3 = 1$.

Tout entier k s'écrit : $3n$ ou $3n + 1$ ou $3n + 2$ ($n \in \mathbb{Z}$).
Or, modulo 2π , on a :

$$\frac{2k\pi}{3} = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 3n \\ \frac{2\pi}{3}, & \text{si } k = 3n + 1 \\ \frac{4\pi}{3}, & \text{si } k = 3n + 2. \end{cases}$$

Voilà pourquoi on a trois solutions et pas plus.

(1) « La différence entre une méthode et une astuce ? Une méthode est une astuce qui sert plusieurs fois » (G. Polya mathématicien américain).

PROBLÈME 2 (D'APRÈS BAC)

Soit θ un réel.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 2z \cos \theta + 1 = 0$.

Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E') : z^4 - 2z^2 \cos \theta + 1 = 0$.

Solution

• Résolution de (E)

Le discriminant réduit est $\Delta' = \cos^2 \theta - 1 = -\sin^2 \theta = (i \sin \theta)^2$.

Les solutions de (E) sont donc :

$z_1 = \cos \theta + i \sin \theta$, $z_2 = \cos \theta - i \sin \theta$, ou encore :

$$z_1 = e^{i\theta}, z_2 = e^{-i\theta}.$$

• Résolution de (E')

L'équation (E') est manifestement équivalente à :

$$\begin{cases} z^2 = Z \\ Z \text{ solution de } (E) \end{cases}, \text{ c'est-à-dire à } \begin{cases} z^2 = z_1 = e^{i\theta} \\ \text{ou} \\ z^2 = z_2 = e^{-i\theta} \end{cases}.$$

Le procédé mis en œuvre dans le problème 1 fournit alors les solutions de (E') :

$$e^{i\frac{\theta}{2}}, -e^{i\frac{\theta}{2}}, e^{-i\frac{\theta}{2}}, -e^{-i\frac{\theta}{2}}.$$

• À noter

La factorisation des polynômes n'est plus inscrite dans les programmes. En conséquence, les résolutions d'équations basées sur les techniques de factorisation n'ont plus cours.

Restent quelques exercices – tels que l'exercice 2 ci-après – où « l'on factorise en développant », ce qui ne soulève guère de difficultés.

POINT D'HISTOIRE

Le théorème de d'Alembert

« Tout polynôme (non constant) à coefficients dans $\mathbb{C}$ a toujours une racine dans $\mathbb{C}$. »

Ce résultat fut démontré par Gauss en 1799 après une tentative presque réussie de d'Alembert. Ce théorème est partout appelé « théorème fondamental de l'Algèbre », sauf... en France où on lui attache le nom de d'Alembert.



Dans la foulée

❶ Les mauvaises méthodes

Soit le système d'inconnues réelles (x, y) :

$$(S) \begin{cases} x^2 - y^2 + x + 1 = 0 \\ (2x + 1)y = 0 \end{cases}$$

1) Résoudre (S) .

2) On pose $z = x + iy$ (x, y réels quelconques).

Développer $z^2 + z + 1$ et montrer que :

$$z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow (x, y) \text{ solution de } (S).$$

3) Retrouver le résultat de la question 1) et tirer une leçon de cet exercice.

❷ Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$f(z) = z^3 + (3i - 6)z^2 + (10 - 18i)z + 30i.$$

1) Montrer que :

$$f(z) = (z + 3i)(z^2 - 6z + 10).$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

❸ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^4 + 3z^2 + 2 = 0.$$

Piste Poser $z = z^2$.

2. Géométrie

OBJECTIF

Étudier les configurations géométriques du plan à l'aide des nombres complexes, avec les propriétés des affixes, modules, arguments, etc. ou encore en mobilisant l'écriture complexe des transformations géométriques usuelles (rotations notamment).

PROBLÈME 1

Le calculateur prodige ⁽¹⁾

En 1844, John Dahse calcule de tête (!) 205 décimales de π grâce à la relation $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$ dans la figure 8, dite « figure aux huit carrés ». Comment établir cette relation ?

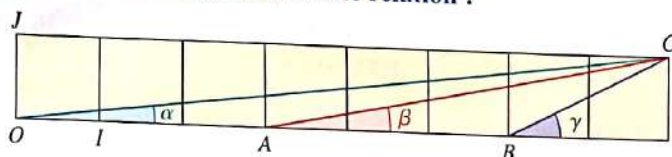


Fig. 8

① Déroutant, mais « simple »

Cet exercice peut laisser plus d'un mathématicien sur le bord du chemin..., mais si l'on pense « complexes », c'est plutôt simple. Voici l'idée : Évaluer la somme de trois angles, c'est calculer (si l'on s'y prend bien) la somme de trois arguments, c'est-à-dire l'argument du produit de trois complexes.

② Solution

On peut toujours supposer les carrés de côté 1 et munir ensuite le plan du repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ avec $\vec{e}_1 = \vec{OI}$ et $\vec{e}_2 = \vec{OJ}$.

Par lecture graphique, nous avons :

$$(\vec{e}_1, \vec{OC}) = \alpha[2\pi] ; (\vec{e}_1, \vec{AC}) = \beta[2\pi] ; (\vec{e}_1, \vec{BC}) = \gamma[2\pi].$$

$$z_A = 3 ; z_B = 6 \text{ et } z_C = 8 + i.$$

$$\text{On en déduit : } z_{\vec{OC}} = 8 + i ; z_{\vec{AC}} = 5 + i \text{ et } z_{\vec{BC}} = 2 + i ;$$

$$\text{puis : } z_{\vec{OC}} \cdot z_{\vec{AC}} \cdot z_{\vec{BC}} = (8 + i)(5 + i)(2 + i) = 65(1 + i).$$

Le produit $z_{\vec{OC}} \cdot z_{\vec{AC}} \cdot z_{\vec{BC}}$ a pour argument (« mod 2π ») :

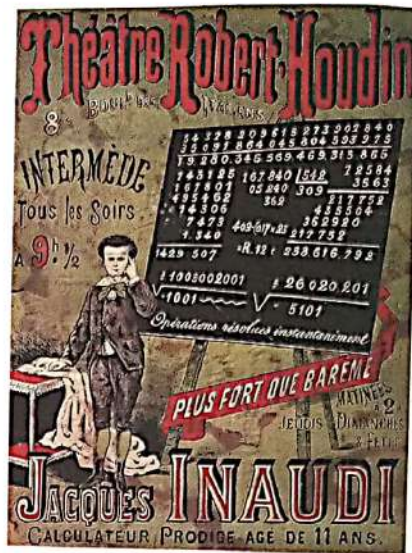
$$\bullet \text{ d'une part, l'argument de } 65(1 + i), \text{ c'est-à-dire } \frac{\pi}{4} ;$$

$$\bullet \text{ d'autre part, la somme des arguments } \alpha, \beta, \gamma \text{ de } z_{\vec{OC}}, z_{\vec{AC}} \text{ et } z_{\vec{BC}}.$$

D'où, l'égalité convoitée :

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}.$$

(1) D'après P. Eymard et J.-P. Lafon, *Autour du nombre π* , Éd. Hermann, 1999.



Rares sont les talents impossibles à monnayer...

Si α, β et γ sont les arguments de z_1, z_2 et z_3 , $\alpha + \beta + \gamma$ est l'argument de $z_1 z_2 z_3$ (toujours mod 2π).

PROBLÈME 2

Les triangles OAB et OCD sont isocèles rectangles en O , de sens direct et le point I est le milieu de $[BC]$ (Fig. 9).

Montrer que (OI) est orthogonale à (AD) .

1 Briefing

Une fois installé un repère orthonormal direct d'origine O (quoi de plus naturel ?) : $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et introduites les affixes a, b, c et d des points A, B, C et D , nous avons en perspective d'établir que $\vec{OI} \perp \vec{AD}$.

Noter que ceci est « dans nos cordes » (voir proposition 2, page 185) : la

condition équivalente est $\frac{z_{AD}}{z_{OI}}$ imaginaire pur.

Plus ennuyeuse (en apparence) est la question : « Comment traduire que, par exemple, le triangle OAB est rectangle isocèle en O de sens direct ? » Il faut in-ter-pré-ter.

Du point de vue des transformations, cela signifie que la rotation $r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$

transforme A en B . Comme cette rotation transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que $z' = iz$ (voir théorème 6), il vient $b = ia$.

La fin en roue libre (presque).

2 Éléments de solution

La solution est à rédiger (voir exercice 5 ci-après).

On doit trouver : $z_{OI} = \frac{1}{2}(ia + c)$, $z_{AD} = ic - a$.

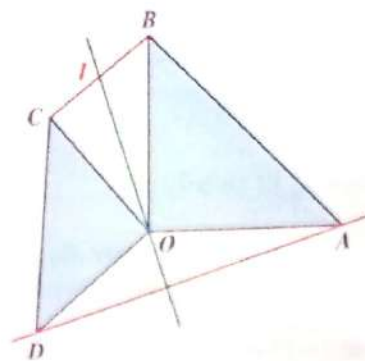


Fig. 9

UNE MÉTHODE...

À adopter et à adapter

ABC équilatéral direct (figures)

$\Leftrightarrow$

$r_A, \frac{\pi}{3} : B \mapsto C$ (transformations)

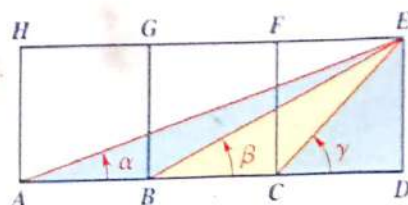
$\Leftrightarrow$

$c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$ (complexes)
(a, b, c affixes de A, B, C).

Dans la foulée

1 Les trois carrés

La figure ci-dessous représente trois carrés accolés. En s'inspirant du procédé utilisé dans le problème 1, montrer que $\alpha + \beta = \gamma$.



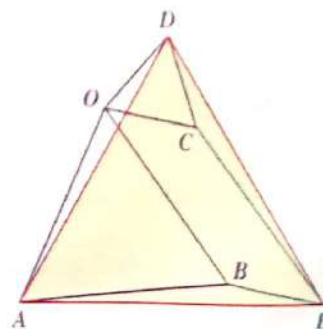
5 Activité de rédaction

Rédiger entièrement la solution du problème 2 ci-dessus.

2 Les trois triangles équilatéraux

Les triangles OAB et OCD sont équilatéraux de sens direct et $BOCE$ est un parallélogramme.

Montrer que AED est un triangle équilatéral.



Applications

Calcul dans $\mathbb{C}$

Sommes et produits

Dans les exercices 1 à 5, mettre chaque nombre complexe sous la forme algébrique $a + ib$ (a, b réels).

- 1 a) $i - (3 + 2i)$; b) $2(6 - 5i) - 3(4 + i)$.
- 2 a) $(5 + 3i)^2$; b) $(5 - 3i)^2$; c) $(5 + 3i)(5 - 3i)$.
- 3 a) $(1 + i)(1 + 2i)$; b) $i(5 - i)(i - 1)$.
- 4 a) $(1 + i)^2$; b) $(i - 1)^2$; c) $(1 + i)(i - 1) + 2$.
- 5 i^{4n} ; i^{4n+1} ; i^{4n+2} ; i^{4n+3} où n est un entier naturel.

- 6 Soit $z \in \mathbb{C}$.
Montrer que $\text{Im}(iz) = \text{Re}(z)$ et $\text{Re}(iz) = -\text{Im}z$.
- 7 Étant donné un réel θ , on pose $z = \cos \theta + i \sin \theta$.
Montrer que $\text{Re}(z^2) = \cos 2\theta$ et $\text{Im}(z^2) = \sin 2\theta$.

Piste Utiliser les formules de duplication en attendant que ce résultat devienne une banalité (voir théorème 3).

8 Des preuves

Établir les propriétés algébriques des nombres complexes mentionnés dans le cours, p. 176.

- a) L'addition et la multiplication sont commutatives et associatives.
- b) La multiplication est distributive sur l'addition.
- c) L'égalité $z \cdot z' = 0$ implique $z = 0$ ou $z' = 0$.

Inverses et quotients

Dans les exercices 9 à 11, mettre chaque nombre complexe sous la forme $a + ib$ (a et b réels).

- 9 a) $\frac{1}{i}$; b) $\frac{1}{1-i}$; c) $\frac{1}{2-3i}$.
- 10 a) $\frac{3+2i}{i}$; b) $\frac{3-5i}{2-i}$; c) $\frac{i}{2+i}$.
- 11 a) $\frac{x}{x+iy}$; b) $\frac{iy}{x+iy}$ où x et y sont des réels non nuls.
- 12 Débusquer l'intrus parmi les nombres suivants :
 $(2-i)^3$; $8+i$; $\frac{18+26i}{-2+2i}$; $2-11i$; $\frac{4}{1+i} + \frac{9}{i}$.

Conjugué

Dans les exercices 13 à 15, déterminer le conjugué de chaque nombre complexe (la forme algébrique n'est pas exigée).

- 13 a) $3 - 11i$; b) $8i$; c) $2i - 7$; d) $i(9 + 2i)$.
- 14 a) $(3 + i)(-13 - 2i)$; b) $(2 + 5i)^6$;
c) $(1 + i)^3(1 - 2i)^4$; d) $i(1 - i)^3$.
- 15 a) $\frac{2-3i}{8+5i}$; b) $\frac{i(1-9i)}{(3+7i)^2}$; c) $\frac{2}{1+i} - \frac{3}{1-i}$.
- 16 Démontrer la proposition 1 du cours, page 178.

- 17 On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Calculer j^2 et établir les relations :
 $1 + j + j^2 = 0$; $j^3 = 1$; $\frac{1}{j} = j^2 = \bar{j}$.

- 18 Soit z un nombre complexe. Parmi les nombres suivants, lesquels sont réels ? imaginaires purs ?
 $2 + z\bar{z}$; $z^2 - \bar{z}^2$; $(z + i\bar{z})(\bar{z} - iz)$; $(i^2z)(i\bar{z})$.

Un connaisseur

« Une expression symbolique (qui n'a pas de sens en elle-même) soumise à des règles fixes selon des conventions établies » : telle est la présentation du nombre complexe adoptée par Cauchy (Cours d'Analyse de l'École polytechnique en 1821). Et d'ajouter concernant le symbole $\sqrt{-1}$: « Ce n'est qu'un outil, un instrument de calcul qui ne signifie rien en lui-même mais permet d'arriver plus rapidement à la solution des problèmes que l'on pose. » (!)

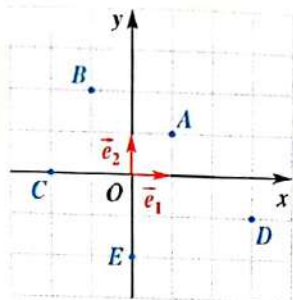
Une telle « définition » qui, en apparence, ne définit rien (en apparence seulement) n'a pas empêché Cauchy de jeter les bases (dès 1814) d'une théorie qui allait faire une longue et brillante carrière : la théorie des fonctions de la variable complexe.



Augustin Louis Cauchy
(1789-1857)

Premier aperçu géométrique

19 Dans la figure ci-contre, $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un repère orthonormal direct.



1) Déterminer les affixes :

- a) des points O, A, B, C, D et E ;
b) des vecteurs $\vec{OB}$, $\vec{AD}$, $\vec{EC}$, $\vec{CB}$ et $\vec{EB}$.

2) Vérifier que $ADEC$ est un parallélogramme.

20 Barycentre

1) Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$$1, \frac{-1+i}{2} \text{ et } -\left(\frac{1+i}{2}\right).$$

Montrer que l'origine O est le centre de gravité du triangle ABC .

2) Soit A, B et C des points d'affixes z_A, z_B et z_C et G le barycentre du système de points pondérés

$$\{(A, 2), (B, 3), (C, -4)\}.$$

Montrer que l'affixe z_G de G est :

$$z_G = \frac{1}{2+3-4}(2z_A + 3z_B - 4z_C).$$

Piste Utiliser $(2+3-4)\vec{OG} = 2\vec{OA} + 3\vec{OB} - 4\vec{OC}$.

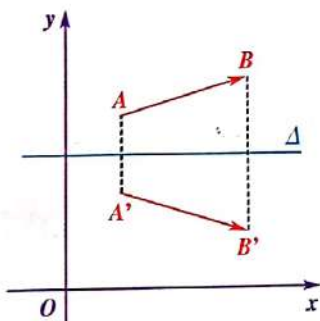
21 Conjugaison

Dans la figure ci-contre la droite Δ est parallèle à (Ox) et, par la réflexion d'axe Δ , on a :

$$s_{\Delta}(A) = A'$$

$$\text{et : } s_{\Delta}(B) = B'.$$

Montrer que les affixes des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ sont conjuguées.



Piste Vérifier que $\vec{AB} + \vec{A'B'}$ est colinéaire à $\vec{e}_1$ et que $\vec{AB} - \vec{A'B'}$ est colinéaire à $\vec{e}_2$.

22 Affixe de certaines images

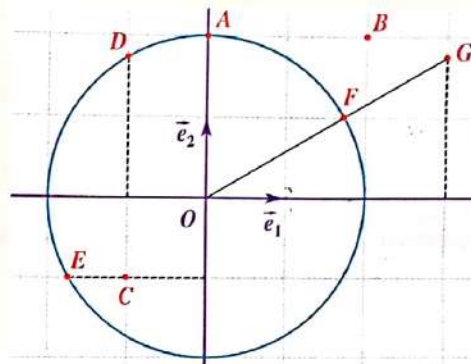
A, M et M' sont trois points du plan complexe d'affixes respectives a, z et z' .

Exprimer z' en fonction de a et z dans chacun des cas suivants :

- a) M' est le symétrique de M par rapport à A ;
b) M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{OA}$;
c) M' est le symétrique de M par rapport à la parallèle à l'axe réel qui passe par A .

Module et argument

23 Pour chacun des points A, B, C, D, E, F et G de la figure ci-dessous, donner le module et un argument de son affixe ainsi que sa forme algébrique (procéder par lecture directe éventuellement appuyée d'un calcul).



Dans les exercices 24 et 25, donner le module et un argument de chaque complexe.

24 a) -5 ; b) $\frac{2}{3}i$; c) $-7i$; d) $1+i$; e) $i-1$.

25 a) $\sqrt{3}+i$; b) $1+i\sqrt{3}$; c) $i-\sqrt{3}$.

26 Montrer que, quelque soit $t(t \in \mathbb{R})$ le nombre complexe :

$$z = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i \cdot \frac{2t}{1+t^2} \text{ est de module égal à } 1.$$

27 La bande des seize

Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes $z = x + iy$ de module 1, vérifiant :

• soit $x = 0$;

• soit $x \neq 0$ et $\tan\left(\frac{y}{x}\right) \in \left\{0, 1, -1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

Représenter les points associés à ces nombres complexes.

Piste Intervertir l'ordre des questions n'est pas mal non plus.

28 La bande des huit

Soit $z = x + iy$ un complexe non nul de module r et d'argument θ .

Montrer que les nombres complexes suivants sont tous de module r et exprimer leur argument à l'aide de θ :

$x - iy$; $-x + iy$; $-x - iy$; $y + ix$; $-y + ix$; $y - ix$; $-y - ix$.

Piste Dessin, symétries, trigonométrie (un peu).

Note : le contenu des exercices 27 et 28 est à connaître : il a son rôle à jouer.

Forme trigonométrique et opérations

Dans les exercices 29 à 31, calculer le module de chaque nombre complexe.

29 a) $(4 + 3i)(12 - 5i)$; b) $(2 - 7i)^3$.

30 a) $\frac{7}{(2-i)^2}$; b) $\frac{3+i}{4+i}$; c) $\frac{a+ib}{a-ib}$.

31 a) $\frac{3-4i}{(1+i)^2}$; b) $\frac{1}{2+3i} - \frac{1}{4+5i}$.

32 Représenter graphiquement l'ensemble des points M tels que z et z^2 aient le même module.

Dans les exercices 33 à 35, donner la forme trigonométrique de z , puis sa forme algébrique en tenant compte des conditions imposées.

33 $\arg(iz) = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$ et $|z| = 2$.

34 $\arg\left(\frac{\bar{z}}{1+i}\right) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$ et $|z| = \frac{1}{2}$.

35 $\arg\left(\frac{z}{1+i\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $|z| = 1$.

36 Représenter graphiquement, pour chaque valeur de θ , l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg(z^2) = \theta [2\pi]$.

a) $\theta = 0$; b) $\theta = \pi$; c) $\theta = \frac{\pi}{2}$; d) $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

37 Trouver un entier n ($1 \leq n \leq 25$) tel que : $\arg(1+i)^n = \arg(1+i\sqrt{3})^n = 0 [2\pi]$.

Dans les exercices 38 à 42, mettre chaque nombre complexe sous forme trigonométrique.

38 a) $(-1+i)^5$; b) $(\sqrt{3}-i)^4$; c) $(1+i\sqrt{3})^3$.

39 a) $\frac{2i-2\sqrt{3}}{4i+4}$; b) $\frac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$.

40 a) $\cos \frac{\pi}{17} - i \sin \frac{\pi}{17}$; b) $\sin \frac{\pi}{17} + i \cos \frac{\pi}{17}$.

41 a) $1 - i \tan \frac{\pi}{15}$; b) $\tan \frac{\pi}{15} + i$.

42 a) $\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2003}$; b) $(2003+i)^3 + (2003-i)^3$.

43 Démontrer le corollaire du théorème 3, page 181.

Utilisation de la forme trigonométrique

Dans les exercices 44 à 46, utiliser la forme trigonométrique pour calculer la forme algébrique de chacun des nombres complexes.

44 a) $(1+i)^6$; b) $(\sqrt{3}-i)^7$.

45 a) $(1-i)^5$; b) $(\sqrt{3}-3i)^4$.

46 a) $(2\sqrt{3}-2i)^4$; b) $\frac{(1+i\sqrt{3})^7}{(1-i\sqrt{3})^{12}}$.

47 Montrer que $(1-j)^6 = -27$ par deux méthodes :

a) après avoir écrit $1-j$ sous forme trigonométrique ;

b) à l'aide de $(1-j)^2 = 1-2j+j^2 \dots$

Rappel : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; on a $j^3 = 1$ et $1+j+j^2 = 0$.

48 1) Montrer que $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ (avec $r > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$) est solution de l'équation $z^3 = -1$ si, et seulement si, $r = 1$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$.

2) En déduire que l'équation $z^3 = -1$ admet trois solutions et que, si z_0 est l'une d'entre elles, les deux autres sont jz_0 et j^2z_0 .

49 En s'inspirant de l'exemple 4 (page 182) et de l'exercice précédent, résoudre les équations :

a) $z^3 = i$; b) $z^4 + 1 = 0$.

50 1) Soit $z = x + iy$ et $z^2 = a + ib$ les formes algébriques de z et z^2 .

Montrer que, si $|z| = 1$, on a : $x^2 = \frac{1+a}{2}$ et $y^2 = \frac{1-a}{2}$.

2) On pose $x = \cos \frac{\pi}{8}$ et $y = \sin \frac{\pi}{8}$ (ainsi $z = x + iy$ est de module 1). Donner la forme trigonométrique de z^2 et en déduire $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

À chacun son dû

La paternité du vocabulaire

- Imaginaire : Descartes, 1637.
- Nombre complexe : Gauss, 1831.
- Module : Argand, 1806.
- Notation $|z|$ (module) : Weierstrass.
- Argument : Cauchy, 1838.
- Notation i : Euler, 1777 (reprise par Gauss).

Notation exponentielle

51 Donner la forme exponentielle des nombres :
8 ; -3 ; $5i$; $-i$; $2 + 2i$; $(1 - i)^3$; $(\sqrt{3} + i)^7$.

52 Soit α un nombre réel.
Écrire avec la notation exponentielle les nombres :

- a) $-(\cos \alpha + i \sin \alpha)$; b) $-\cos \alpha + i \sin \alpha$;
c) $\sin \alpha + i \cos \alpha$; d) $-\sin \alpha + i \cos \alpha$.

53 En utilisant la notation exponentielle, déterminer le module et un argument de chacun des quotients suivants :

- a) $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$; b) $\frac{2i(1-i)}{3+3i\sqrt{3}}$; c) $\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}$.

54 Même exercice que précédemment avec :

- a) $(1-i)^{11}$; b) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{17}$; c) $(\sqrt{3}+i)^{20}$.

Mythique ?

La relation $e^{i\pi} + 1 = 0$, qui provoqua l'admiration d'Euler lui-même, a frappé les imaginations du XIX^e siècle, du fait qu'elle contient « les symboles les plus importants, union mystérieuse dans laquelle l'Arithmétique est représentée par 0 et 1, l'Algèbre par i , la Géométrie par π et l'Analyse par e » (Tobias Dantzig).

Au XX^e siècle, plus personne ne s'émerveille devant le caractère magique (?) des nombres complexes...

55 Soit α un réel $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ pour tout } k \text{ de } \mathbb{Z}\right)$ et

$t = \tan \alpha$.

1) Qu'elle est la forme exponentielle de $z = \frac{1+it}{1-it}$?

2) Mettre z sous la forme algébrique et en déduire que :

$$\cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} ; \sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}.$$

56 Chercher l'erreur

Soit à écrire sous forme exponentielle :

$$z = 1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta \quad (\theta \text{ réel}).$$

Que penser de ce qui suit ?

« On a $1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta$ et $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, d'où $z = 2 \cos \theta (\cos \theta + i \sin \theta) = 2 \cos \theta e^{i\theta}$: ceci est la forme exponentielle de z . »

57 Soit z un nombre complexe de module 1 : $|z| = 1$.
Montrer que :

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Équations dans $\mathbb{C}$

Premier degré

Dans les exercices 58 à 62, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation ou le système proposé(e).

58 a) $iz + 2 - i = 0$; b) $(3 + 5i)z = 1 - z$.

59 a) $\frac{1}{z+i} = 3 + i$; b) $\frac{z+1}{z-1} = 2i$.

60 a) $i\bar{z} = 1 - i$; b) $(7 - i)\bar{z} + 3 = 0$.

61 $(iz + 1)(z + 3i)(\bar{z} - 1 + 4i) = 0$.

62 a) $\begin{cases} z - z' = i \\ iz + z' = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2z + z' = 1 - i \\ z - iz' = 0 \end{cases}$.

Second degré

L'ensemble M de Mandelbrot

Avec un polynôme du second degré :

$$P(z) = z^2 + c \quad (c \in \mathbb{C}) \dots$$

Les images des complexes :

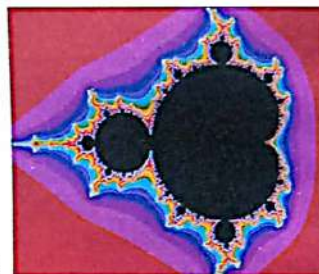
$$z_0 = 0, z_1 = P(z_0),$$

$$z_2 = P(z_1), \dots$$

$$z_n = P(z_{n-1}), \dots$$

sont bornées lorsque l'image de c est dans M et dans ce cas seulement.

Forme fractale aux propriétés fascinantes, cet ensemble M fut tracé pour la première fois en 1980 par Benoît Mandelbrot à l'aide d'un micro-ordinateur.



Dans les exercices 63 à 67, résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations proposées.

63 a) $z^2 = z + 1$;

b) $z^2 = z - 1$.

64 a) $z^2 + 2z + 5 = 0$;

b) $z^2 - \sqrt{3}z + 31 = 0$.

65 $(z^2 + 1)(z^2 + 2) \dots (z^2 + 10) = 0$.

66 $(z^2 - 6z + 10)(z^2 + 6z + 10) = 0$.

67 $(z^2 - 22z + 410)(z^2 - 34z + 410) = 0$.

68 Soit θ un réel donné, appartenant à $[0, \pi]$.

1) Calculer $e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ et $e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta}$.

2) Résoudre l'équation :

$$(z^2 - 2(\cos \theta)z + 1)(z^2 + 2(\cos \theta)z + 1) = 0,$$

et montrer que les images des solutions sont les sommets d'un rectangle.

Géométrie avec modules et arguments

69 Deux clés pour le module

1) Soit $\Omega(\omega)$ un point du plan complexe et r un réel positif. Montrer que l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - \omega| = r$ est le cercle de centre Ω et de rayon r .

2) Soit $A(a)$ et $B(b)$ deux points distincts.

Montrer que l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - a| = |z - b|$ est la médiatrice de $[AB]$.

Dans les exercices 70 à 73, représenter graphiquement l'ensemble des points $M(z)$ satisfaisant la condition imposée (l'égalité $|Z| = |\bar{Z}|$ peut servir...).

70 a) $|z - 3i| = 5$; b) $|z| = 2\sqrt{2}$.

71 a) $|z - 1| = |z - i|$; b) $|z| = |z - 2 + i|$.

72 a) $|\bar{z} + i| = 1$; b) $|z - 2 + i| = |\bar{z} + 3i|$.

73 $|-2iz + 1 - 4i| = 4$.

74 Soit $z \in \mathbb{C}$, avec $z \neq i$.

Montrer que $\frac{z+i}{z-i}$ est de module 1 si, et seulement si, z est réel.

Piste Aucun calcul.

75 Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives : $a = -1 + i$, $b = -1 - i$, $c = 2i$ et $d = 2 - 2i$.

1) Placer les points A, B, C et D .

2) Calculer les nombres complexes :

$$\frac{c-a}{d-a} \text{ et } \frac{c-b}{d-b}.$$

En déduire la nature des triangles ACD et BCD .

Arrêt sur...

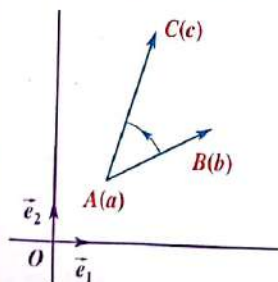
La proposition 2, avec des points :

$$|b - a| = AB ; \arg(b - a) = (\vec{e}_1, \vec{AB})[2\pi] ;$$

$$\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \frac{CA}{BA} ; \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\vec{AB}, \vec{AC})[2\pi].$$

Conseil : on ne retient pas ; on revient aux vecteurs :

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{\vec{AC}}{\vec{AB}}, \text{ etc.}$$



Écritures complexes de transformations

Dans les exercices 76 à 79, donner l'écriture complexe de chaque transformation. (Autre formulation de la consigne : étant donné une transformation qui au point $M(z)$ associe $M'(z')$, exprimer z' en fonction de z .)

76 a) Translation de vecteur $-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

b) Translation qui amène le point $A(1 + i)$ sur le point $B(-1 + 2i)$.

77 a) Homothétie de centre $\Omega(-1 - i)$ et de rapport -3 .

b) Symétrie centrale de centre $\Omega(2 + 5i)$.

78 a) Rotation de centre $\Omega(1 + 2i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

b) Quart de tour indirect de centre $\Omega(3 - i)$.

79 Rotations de centre O et d'angles :

a) $\frac{2\pi}{3}$; b) $-\frac{2\pi}{3}$; c) $\frac{\pi}{3}$; d) $-\frac{\pi}{3}$.

Dans les exercices 80 à 83, identifier la transformation qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' .

80 a) $z' = z + 3 - i$; b) $z' = 5z$; c) $z' = \bar{z}$.

81 a) $z' = -z$; b) $z' = iz$; c) $z' = -\bar{z}$.

82 a) $z' = -iz$; b) $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$; c) $z' = \left(\frac{1+i\sqrt{2}}{2}\right)z$.

83 a) $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z$; b) $z' - i = \frac{\sqrt{3}+i}{2}(z - i)$.

Les exercices 84 et 85 proposent la démonstration du théorème 6.

84 La rotation

Soit r la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ , M un point d'affixe z et $M' = r(M)$ d'affixe z' .

1) Montrer que, pour $z \neq \omega$, on a $z' \neq \omega$ et :

$$|z' - \omega| = |z - \omega| ; \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta[2\pi].$$

En déduire que $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

2) Examiner le cas $z = \omega$.

85 L'homothétie

Montrer que l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k ($k \in \mathbb{R}^*$) transforme le point $M(z)$ en $M'(z')$ tel que $z' - \omega = k(z - \omega)$.

Piste $z_{\lambda \vec{u}} = \lambda z_{\vec{u}}$ pour tout réel λ et tout vecteur $\vec{u}$.

Brèves de cours

- 86** Mettre sous forme algébrique les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{1}{1+i}, \quad z_2 = \frac{1}{1+z_1} \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{1}{1+z_2}.$$

- 87** Le nombre $\frac{1}{128} \times (1+i)^{14} + 128 \times \frac{1}{(1+i)^{14}}$ est-il un nombre réel ?

- 88** Donner quatre valeurs distinctes du réel θ ($-\pi < \theta \leq \pi$) tel que :
 $\arg(z) = \theta[2\pi]$ implique : z^2 est un imaginaire pur.

- 89** Écrire sous la forme trigonométrique :

$$z\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \text{où} \quad z = e^{i\frac{3\pi}{5}}.$$

- 90** Montrer que $\frac{(\sqrt{3} + i)^5}{(1 - i\sqrt{3})^{11}} = \frac{1}{64} \times i$.

Piste « Passer » à la forme exponentielle doit être devenu un « réflexe ».

- 91** L'inégalité $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Soit z et z' deux nombres complexes et A et B les points d'affixes respectives z et $z + z'$.

À l'aide de l'inégalité triangulaire $OB \leq OA + AB$, montrer que :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

- 92** $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Soit A_0 , A_1 et A_2 les points d'affixes respectives :

$$z_0 = 1, \quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{et} \quad z_2 = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

On désigne par K le milieu du segment $[A_0 A_2]$.

- 1) Calculer l'affixe z_K de K sous forme algébrique.
- 2) En utilisant la forme exponentielle, montrer que :

$$z_K = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

- 3) a) Vérifier que $\sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

- b) Dédurre des résultats précédents que :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

- 93** Résoudre l'équation $z^2 + 2\sqrt{3}z + 6 = 0$ et mettre les solutions sous forme exponentielle.

94 Petit tour d'horizon

Soit z_1 et z_2 deux complexes non nuls. Il s'agit d'établir que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$; (2) $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur.

Méthode 1 « Avec la forme algébrique »

Poser $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ (x_1, y_1, x_2, y_2 réels).

Méthode 2 « Avec le conjugué »

Prouver que (1) et (2) sont équivalentes à :

$$z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 0.$$

Méthode 3 « Géométrie »

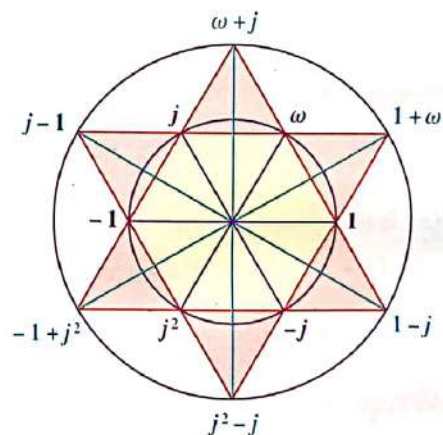
Soit les points $A(z_1)$, $B(z_2)$ et $C(-z_3)$.

Montrer que (1) équivaut à dire que $AB = AC$ ou encore $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$. Poursuivre avec des arguments.

Sous le conde

On n'aura pas manqué d'observer que les nombres

complexes $\omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $j = e^{2\frac{i\pi}{3}}$ et leurs « cousins » proches tels j^2 , $\bar{\omega}$, $-\bar{\omega}$... ou plus éloignés : $1-j$, $1+\omega$, etc. sont souvent en première ligne. Et s'il faut savoir se plier aux exigences des calculs imposés par un énoncé sur cette famille de nombres, la figure ci-dessous, rapidement réalisée à main levée (au brouillon, par exemple), en tout ou partie, livre des contrôles rapides sur la justesse de ces calculs.



• **L'hexagone régulier** (en jaune) : de nombreuses informations sont immédiatement lisibles telles que :

$$j^2 = \bar{j} = -\omega ; -j = \bar{\omega} \dots \text{ mais aussi } 1+j = \omega ;$$

$$j+j^2 = -1, \text{ etc.}$$

- Les « **pointes équilatérales** » (en rouge) : il suffit de savoir que le rayon du grand cercle est $\sqrt{3}$ (deux fois la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1) pour « cueillir » tout de suite :

$$j^2 - j = -\sqrt{3}i; 1 + \omega = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}; 1 - j = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}};$$

etc.

Exercices

Résolution d'équations

Dans les exercices 95 à 97, montrer qu'il existe trois réels a , b et c que l'on déterminera tels que $f(z) = (z + ai)(z^2 + bz + c) = 0$ et résoudre l'équation $f(z) = 0$.

95 $f(z) = z^3 + (1 + i)z^2 + (i - 1)z - i$.

96 $f(z) = z^3 + (4 - 5i)z^2 + (8 - 20i)z - 40i$.

97 $f(z) = z^3 - \frac{3}{2}iz^2 - \frac{3}{4}z + \frac{9}{8}i$.

98 On pose :

$$f(z) = z^3 - (2 + i)z^2 + (4 + i)z - 3(1 + i).$$

a) Montrer que $f(z) = (z - 1 - i)(z^2 - z + 3)$.

b) Résoudre l'équation $f(z) = 0$.

Les exercices 99 et 100 concernent le changement de variable

$Z = z + \frac{1}{z}$ ou $Z = z - \frac{1}{z}$. (On notera que, dans les deux

cas, $z^2 + \frac{1}{z^2}$ s'exprime simplement en fonction de Z .)

99 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0.$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$z + \frac{1}{z} = 1 \quad \text{et} \quad z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}.$$

3) Soit $P(z)$ le polynôme :

$$P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1.$$

a) Exprimer $\frac{P(z)}{z^2}$ en fonction de $Z = z + \frac{1}{z}$.

b) Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

100 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

a) $z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z + 1 = 0$;

b) $z^4 + 2z^3 - 5z^2 - 2z + 1 = 0$.

Piste Poser :

a) $Z = z + \frac{1}{z}$; b) $Z = z - \frac{1}{z}$.

101 On pose $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

Calculer ω^2 et en déduire les solutions de chacune des équations : $z^2 - 4i = 0$, $z^2 + 4i = 0$ et $z^4 + 16 = 0$.

102 1) Expliciter, sous forme trigonométrique, les solutions de chacune des deux équations :

$$Z^3 - e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 0 \quad \text{et} \quad Z^3 - e^{+i\frac{2\pi}{3}} = 0.$$

2) Établir que, pour tout réel α , $1 + e^{i\alpha} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

3) Résoudre l'équation $(z - 1)^6 + (z - 1)^3 + 1 = 0$.

(On pourra poser $Z = (z - 1)^3$.)

D'APRÈS BAC

103 Soit α un réel de l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

On considère l'équation d'inconnue complexe z :

$$(E) : (1 + iz)^3(1 - i \tan \alpha) = (1 - iz)^3(1 + i \tan \alpha).$$

1) Soit z une solution de (E) .

Montrer que $|1 + iz| = |1 - iz|$ et en déduire que z est réel.

2) a) Exprimer $\frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.

b) Soit z un réel ; on pose $z = \tan \varphi$ avec $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Montrer que (E) équivaut à une équation d'inconnue φ et la résoudre.

c) Déterminer les solutions z_1, z_2 et z_3 de (E) .

Piste (non indiquée dans le sujet) L'équation cherchée en 2) b) est $e^{i6\varphi} = e^{2i\alpha}$.

BAC

104 On propose de déterminer les triplets de nombres complexes (z_1, z_2, z_3) tels que :

$$(S) \begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1 z_2 z_3 = 1 \end{cases}$$

1) Vérifier que $(1, i, -i)$ est solution de (S) .
En déduire cinq autres triplets solutions.

2) Soit (z_1, z_2, z_3) une solution de (S) .

a) Montrer que z_1, z_2 et z_3 sont non nuls et que :

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 1.$$

Piste Conjugué d'un nombre complexe de module 1.

b) En déduire que, quel que soit z appartenant à $\mathbb{C}$:

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = (z - 1)(z^2 + 1).$$

c) Quels sont alors les triplets solutions de (S) ?

Trigonométrie

105 Transformation de $e^{ix} \pm e^{iy}$

1) Vérifier que $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$, $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$ et en déduire que :

$$e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} ;$$

$$e^{ix} - e^{iy} = 2i \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} .$$

Note : plus que de mémoriser ces « formules » utiles, on retient

l'idée : factoriser chaque expression par $e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$.

2) Application

Établir les formules de trigonométrie :

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \left(\frac{x-y}{2}\right) ;$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \left(\frac{x-y}{2}\right) .$$

106 Développer l'expression $e^{i\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}$

En déduire les solutions de chacune des équations :

a) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$;

b) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2}$.

107 $\cos \frac{2\pi}{5}$

On pose $\omega = e^{2i\frac{\pi}{5}}$.

1) Calculer ω^5 et prouver que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

Piste Somme des premiers termes d'une suite géométrique.

2) Soit $u = \omega + \omega^4$ et $v = \omega^2 + \omega^3$.

Calculer $u + v$ et uv et en déduire que u et v sont les solutions d'une équation du second degré que l'on résoudra.

3) En justifiant l'égalité $u = \omega + \bar{\omega}$, utiliser le résultat précédent pour calculer $\cos \frac{2\pi}{5}$.

108 Les réels a, b et c étant différents de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, quel que soit k dans $\mathbb{Z}$, on pose :

$$z = (1 + i \tan a)(1 + i \tan b)(1 + i \tan c) .$$

1) Calculer $(\cos a \cos b \cos c) z$ et $\text{Im}(z)$.

2) En déduire que :

$\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \cdot \tan b \cdot \tan c$ si, et seulement si, $a + b + c = 0 \pmod{\pi}$ (attention : « modulo π »).

3) Application

Calculer $\tan \frac{5\pi}{12}$ et en déduire $\tan \frac{\pi}{12}$.

Piste $a = \frac{\pi}{4}$, $b = \frac{\pi}{3}$.

109 La formule de Machin

On rappelle que pour tout réel $t (t \geq 0)$, il existe un unique réel

α de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\tan \alpha = t$: ce réel est noté $\text{Arctan } t$,

parfois $\tan^{-1} t$.

1) Donner la forme algébrique de $z = (5 - i)^4(1 + i)$.

2) On pose $\alpha = \text{Arctan} \frac{1}{5}$ et $\beta = \text{Arctan} \frac{1}{239}$.

Montrer que $-\alpha$ est un argument de $5 - i$ et $-\beta$ un argument de z .

En déduire que $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

3) Prouver en fait que $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$.

Piste On peut ne pas utiliser la calculatrice ; mais bon...

La chasse aux décimales

La formule précédente $\frac{\pi}{4} = 4 \text{Arctan} \frac{1}{5} - \text{Arctan} \frac{1}{239}$

permet à John Machin, en 1706, de calculer les 100 premières décimales de π .

La chasse au record de décimales de π s'est accélérée par l'utilisation d'ordinateurs de plus en plus performants et d'algorithmes de plus en plus raffinés (plus de 50 milliards de décimales sont déjà connues !).

Quête vaine ? futile ? sans intérêt (disent certains) ?

Rien n'est moins sur... (d'après P. Eymard, J.-P. Lafon, *Autour du nombre π* , Éd. Hermann, 1999).

110 Sur le cercle

Soit z et z' des complexes de module 1.

1) Montrer que, si $z' \neq z$, $\frac{zz' - 1}{z' - z}$ est réel et que $\frac{z^2 - 1}{z}$ est imaginaire pur.

Piste On pourra (ce n'est pas une obligation) utiliser la notation exponentielle.

2) Soit I, M, M' et M'' les points d'affixes respectives 1, z , z' et zz' . On suppose que $zz' \neq 1$. Montrer que :

- pour $z' \neq z$, les droites (IM'') et (MM') sont parallèles ;
- pour $z' = z$, (IM'') est parallèle à la tangente en M au cercle trigonométrique.

Remarque : on peut « s'amuser » un peu. Par exemple, à quelle propriété géométrique du cercle correspond l'égalité $z \cdot (zz') = (z^2) \cdot z'$? etc.

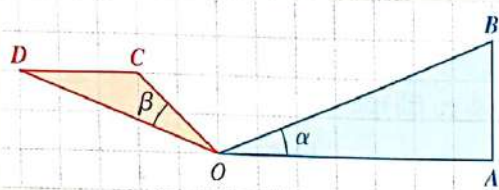
Géométrie

Lorsqu'aucune ambiguïté ne saurait être raisonnablement envisagée, les minuscules $a, b, c, \dots u, v, w, \dots$ désigneront systématiquement les affixes des points $A, B, C, \dots U, V, W, \dots$ d'une figure. Quant au point O (dont la minuscule associée pourrait prêter à confusion), sa présence dans une figure le désignera implicitement comme origine du repère, ce qui arrange tout.

Cette clause ne sera pas répétée.

111 Comparaison d'angles

Comparer les angles α et β de la figure ci-dessous.



112 On désigne par A et B les points d'affixes $z_A = 2 - i$ et $z_B = -2i$, et, pour tout nombre complexe z différent de

$$z_B, \text{ on pose } Z = \frac{z - z_A}{z - z_B}.$$

1) Déterminer, dans chaque cas, l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

- Z soit un réel ;
- Z soit un imaginaire pur (éventuellement nul) ;
- Z soit de module 1.

2) Calculer $|Z - 1| \times |z - z_B|$ et en déduire que, lorsque $M(z)$ parcourt le cercle de centre B et de rayon R , les points d'affixe Z sont tous situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

D'APRÈS BAC

113 Entiers de Gauss et quadrillage

On note $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des nombres complexes $a + ib$ où a et b sont des entiers relatifs ($a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$). (De tels nombres complexes sont appelés entiers de Gauss.)

1) Montrer que le quotient de deux éléments de $\mathbb{Z}[i]$ s'écrit $x + iy$ où x et y sont des nombres rationnels.

En déduire que $e^{i\frac{\pi}{3}}$ ne peut s'écrire comme le quotient de deux éléments de $\mathbb{Z}[i]$.

2) Étant donné un quadrillage, prouver qu'il est impossible de trouver trois nœuds du quadrillage qui soient les sommets d'un triangle équilatéral.

Piste Raisonner par l'absurde (le choix d'un repère va de soi).

114 Droite et cercle d'Euler

On considère un triangle ABC , A', B' et C' les milieux des côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$, G le centre de gravité du triangle et Γ le cercle circonscrit au triangle dont on désigne par O le centre et par R le rayon.

1) Soit h le complexe $h = a + b + c$ et H le point d'affixe h . Montrer que H est l'orthocentre du triangle et que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Piste Montrer, par exemple, que $\frac{h-a}{c-b}$ est imaginaire pur. Conséquence ?

2) On pose $\omega = \frac{a+b+c}{2} = \frac{h}{2}$ et l'on désigne par Ω le

point d'affixe ω et par $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{R}{2}$.

Soit $U(u)$ le milieu de $[AH]$.

a) Montrer que $a' - \omega = \omega - u$ et en déduire que A' et U appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ et que $[A'U]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$.

b) Montrer alors que le pied de la hauteur issue de A sur (BC) appartient à $\mathcal{C}$.

Note : on aurait évidemment les mêmes résultats avec les points homologues. Sont donc situés sur le même cercle $\mathcal{C}$ (cercle d'Euler) : les milieux des côtés, les pieds des hauteurs et les milieux des segments joignant les sommets à l'orthocentre.

115 Paramétrisation d'un cercle

1) Montrer que le cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r est l'ensemble des points $M(z)$ tels que $z = \omega + re^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

2) Soit $A(a)$ un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r . Montrer que deux points $M(z)$ et $M(z')$ du cercle $\mathcal{C}$ sont symétriques par rapport à (OA) si, et seulement si, $z \cdot z' = a^2$.

Piste Prouver que les deux propriétés signifient : $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) [2\pi]$.

116 Un circuit fermé

Soit trois points P, Q et R d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O .

Étant donné un point M_1 de $\mathcal{C}$, la perpendiculaire à (OP) menée de M_1 recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en M_2 , la perpendiculaire à (OQ) menée de M_2 recoupe $\mathcal{C}$ en M_3 et la perpendiculaire à (OR) menée de M_3 recoupe $\mathcal{C}$ en M_4 .

En M_4 , on recommence un circuit analogue.

(On convient qu'une droite tangente à un cercle en un point M de ce cercle « recoupe » le cercle en M .)

1) Faire une figure illustrant ces données.

2) Montrer que le circuit se ferme à l'issue du sixième trajet.

Piste Utiliser le résultat de l'exercice 115.

Les exercices 117 à 122 impliquent l'écriture complexe des transformations.

117 Le triangle équilatéral

Montrer que chacune des relations :

$$c - a = -j^2(b - a) \quad \text{et} \quad a + bj + cj^2 = 0$$

caractérise le fait que le triangle ABC est équilatéral de sens direct.

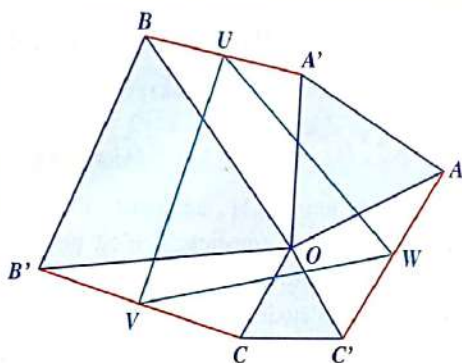
Rappel : $e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$; $j^3 = 1$; $1 + j + j^2 = 0$; etc.

118 Brouillon de solution

1) L'énoncé du problème

On considère trois triangles équilatéraux de sens direct OAA' , $OB B'$ et $OC C'$.

Montrer que les milieux U , V et W de $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$ sont les sommets d'un triangle équilatéral de sens direct.



2) La consigne

Décoder le brouillon de solution ci-dessous, justifier les résultats qu'il indique et résoudre le problème posé.

$$e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2 \text{ (O.K.)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet A(a) \rightarrow A'(-j^2 a) \\ \bullet B(b) \rightarrow B'(-j^2 b) \\ \bullet C(c) \rightarrow C'(-j^2 c) \end{array} \right\} \begin{array}{l} U : u = \frac{-j^2 a + b}{2} \\ V : v = \frac{-j^2 b + c}{2} \\ W : w = \frac{-j^2 c + a}{2} \end{array}$$

Est-ce que $w - u = -j^2(v - u)$?

119 Triangles isocèles

Le parallélogramme $ABCD$ étant donné, on construit des triangles isocèles BCE et DCF de sommets B et D tels que les angles $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DF})$ soient de même mesure α .

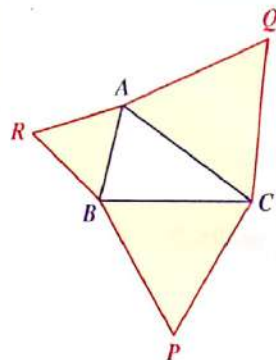
Montrer que le triangle AEF est isocèle en A et que :

$$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}) = \alpha.$$

120 Le théorème de Napoléon

On construit extérieurement au triangle ABC trois triangles équilatéraux BCP , ACQ et ABR de centres de gravité U , V et W .

Montrer que le triangle UVW est équilatéral et de même centre de gravité que le triangle ABC .

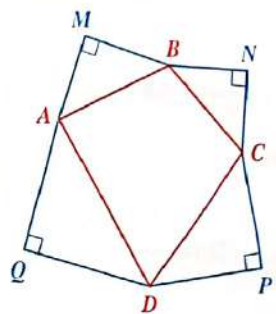


Piste Il est possible de « faire simple » :

- obtenir $3(v - u) = q - c + c - p + a - b$ et $3(w - u) = a - c + b - p + r - b$ (attention : ne pas simplifier) ;
- prouver, au passage, que $p + q + r = a + b + c$ (ne pas manquer d'interpréter).

121 La configuration de Von Aubel

Dans la configuration ci-contre, les triangles MAB , NBC , PCD et QDA sont rectangles isocèles de sens direct en M , N , P et Q .



1) Exprimer m , n , p et q en fonction de a , b , c et d .

2) Montrer que $MP = NQ$ et que $\overrightarrow{MP}$ est orthogonal à $\overrightarrow{NQ}$.

3) Soit K , L , U et V les milieux de $[AC]$, $[BD]$, $[MP]$ et $[NQ]$.

a) Exprimer $m + p$ et $n + q$ en fonction de k et ℓ . En déduire que $MNPQ$ est un parallélogramme si, et seulement si, $ABCD$ est un parallélogramme.

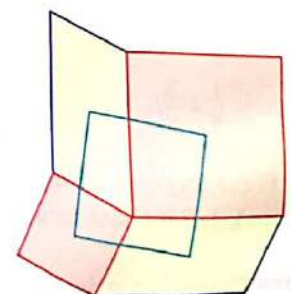
b) On suppose que $ABCD$ n'est pas un parallélogramme. Montrer que $ULVK$ est un carré.

Piste Prouver que $\frac{u+v}{2} = \frac{k+\ell}{2}$ et $u-v = i(\ell-k)$.

(Bien sûr, reste à interpréter...)

122 On considère la configuration ci-contre obtenue à partir de deux carrés ayant un sommet commun et de la construction de deux parallélogrammes.

Montrer que les centres des carrés et des parallélogrammes sont les sommets d'un carré.



Rubrique à Bac

L'étude des configurations

La quasi-totalité des exercices sur ce thème porte sur des figures déjà « installées » dans un repère : le repère est donné à l'avance, les affixes des points sont fixées, etc.

Méfiance : l'orientation résolument nouvelle des Programmes⁽¹⁾ « risque » de changer la donne et de voir fleurir quelques « vrais » exercices de Géométrie, dans la lignée de ceux présentés dans la partie *Géométrie* (exercices 111 à 122).

En tout état de cause, il est bienvenu de connaître les classiques du quotient : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z_{\overline{C}} - z_{\overline{A}}}{z_{\overline{B}} - z_{\overline{A}}}$, A, B et C étant des points distincts (voir le tableau ci-dessus issu de la proposition 2 (page 185) et de l'encadré « Arrêt sur... » (page 194).

$Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$	
$ Z = 1$	$AB = AC$
Z réel	A, B et C alignés
Z imaginaire pur	$(AB) \perp (AC)$
$Z = \pm i$	ABC rectangle isocèle en A
$Z = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$	ABC équilatéral

123 D'après BAC S, Amérique du Sud, 2000 (extrait).

On désigne par I, A et B les points d'affixes $z_I = 1$, $z_A = 2i$ et $z_B = 3 + i$.

1) Calculer l'affixe z_C du point C image de A par la symétrie de centre I .

2) Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.

En déduire le module et l'argument de ce nombre.

3) Soit D le point d'affixe z_D tel que $z_D - z_C = z_A - z_B$. Montrer que $ABCD$ est un carré.

124 D'après BAC S, Asie, 1999 (extrait).

Soit A, B et C les points d'affixes $a = -2$, $b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$ et

$$c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i.$$

1) Placer les points A, B et C et montrer que O (origine du repère), A, B et C sont sur un cercle que l'on déterminera.

(1) « L'objectif est ensuite de montrer la puissance de ce calcul (calcul avec les nombres complexes) dans les problèmes de Géométrie. »

2) Placer le point D d'affixe $d = -\frac{1}{2}$ et exprimer sous forme

trigonométrique $z' = \frac{a-c}{d-c}$. En déduire le rapport $\frac{CA}{CD}$.

Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

125 D'après BAC S, Nouvelle-Calédonie, 2000 (extrait).

1) Montrer que les points A, B et C d'affixes $z_A = 1 + i$, $z_B = \overline{z_A}$ et $z_C = 2z_B$ appartiennent au cercle de centre I d'affixe 3 et de rayon $\sqrt{5}$.

2) Calculer $\frac{z_C - 3}{z_A - 3}$ et en déduire la nature du triangle IAC .

3) Soit $E = t_2 \overline{IC}(O)$ et $D = r_{\left(0, \frac{\pi}{2}\right)}(E)$.

Calculer les affixes de E et D et montrer que (AB) et (CD) sont orthogonales.

La résolution d'équations

Péché mignon : lorsque la question 1 d'un exercice consiste à résoudre une équation, il n'est pas rare que l'énoncé nous livre les images des solutions dans la question 2, histoire d'étudier leur configuration... on doit en profiter pour vérifier les calculs.

126 D'après BAC S, Guadeloupe-Guyane-Martinique, 2000 (extrait).

1) Pour tout nombre complexe z , on pose :

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7.$$

a) Calculer $P(-1)$.

b) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z , on ait :

$$P(z) = (z + 1)(z^2 + az + b).$$

c) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives :

$$z_A = -1, z_B = 2 + i\sqrt{3}, z_C = 2 - i\sqrt{3} \text{ et } z_G = 3.$$

a) Réaliser une figure et placer les points A, B, C et G .

b) Calculer les distances AB, BC et AC .

En déduire la nature du triangle ABC .

c) Calculer un argument du nombre complexe $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$.

En déduire la nature du triangle GAC .

127 D'après BAC S, Amérique du Nord, 2001.

On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

1) Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$, puis montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait :

$$P(z) = (z^2 + 3)Q(z).$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3) Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3}$, $z_B = -i\sqrt{3}$, $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ et $z_D = \bar{z}_C$, puis montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.

O Les voilà : parions que z_A, z_B, z_C et z_D sont les solutions de $P(z) = 0$. Concernant $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$, on s'en doutait déjà un peu : ces deux complexes vérifient $z^2 + 3 = 0$ et donc vérifieront $P(z) = 0$ d'après la question 1). Un peu de Géométrie pour finir...

4) On note E le symétrique de D par rapport à O . Montrer que :

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}, \text{ puis déterminer la nature du triangle } BEC.$$

$$z' = f(z)$$

Une tendance vient d'éclore : l'étude des applications qui au point $M(z)$ associent le point $M'(z')$ avec :

$$z' = \frac{z-a}{z-b} \quad \text{ou} \quad z' = \pm i \cdot \frac{z-a}{z-b}$$

(a et b étant deux complexes fixés distincts).

Nous proposons l'étude de deux exemples et un rendez-vous au problème 133, page 203.

128 D'après BAC S, Polynésie, 2001.

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1$ et $z_B = 3i$.

Soit la fonction f de P privé du point A dans P qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = i \left(\frac{z-3i}{z+1} \right) \quad (1).$$

1) Soit C le point d'affixe $z_C = 2 - i$.

Montrer qu'il existe un seul point D tel que $f(D) = C$.

2) Déterminer la nature du triangle ABC .

3) À l'aide de l'égalité (1), montrer que, pour tout M distinct de A et de B :

$$OM' = \frac{BM}{AM} \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) [2\pi].$$

4) En déduire et construire les ensembles de points suivants :

a) l'ensemble (E) des points M tels que l'image M' soit située sur le cercle (Γ) de centre O , de rayon 1 ;

b) l'ensemble (F) des points M tels que l'affixe de M' soit réelle.

129 D'après BAC S, Asie, 2001.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe $z (z \neq -1)$, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-iz-2}{z+1}.$$

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = -1$, $b = 2i$ et $c = -i$.

1) Soit C' l'image du point C par f .

Donner l'affixe c' du point C' sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

2) Calculer l'affixe d du point D ayant pour image par f le point

$$D' \text{ d'affixe } d' = \frac{1}{2}.$$

3) Pour tout nombre complexe z différent de -1 , on note p le module de $z+1$ (c'est-à-dire $|z+1| = p$) et p' le module de $z'+i$ (c'est-à-dire $|z'+i| = p'$).

a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1 , on a : $pp' = \sqrt{5}$.

b) Si le point M appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon 2, montrer qu'alors $M' = f(M)$ appartient à un cercle (Γ') dont on précisera le centre et le rayon.

4) Pour tout nombre complexe z différent de -1 , on considère

$$\text{le nombre complexe } \omega = \frac{z-2i}{z+1}.$$

a) Interpréter géométriquement l'argument du nombre complexe ω .

b) Montrer que $z' = -i\omega$.

c) Déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixe z telle que z' soit un réel non nul.

d) Vérifier que le point D appartient aux ensembles (Γ) et (F) .

5) Représenter les ensembles (Γ) , (F) et (Γ') en prenant 4 cm pour unité graphique.

Ils sont partout

130 Arithmétique

« Tout entier est somme de quatre carrés » (sous-entendu : pour tout entier naturel N il existe des entiers naturels p, q, r et s tels que $N = p^2 + q^2 + r^2 + s^2$).

Ce résultat, énoncé par Fermat (1601-1665), fut établi en 1770 par Lagrange (1736-1813).

La démonstration (« inaccessible » en Terminale S) utilise la propriété suivante, dont nous allons donner une preuve à l'aide des... nombres complexes : « Si deux entiers sont somme de quatre carrés, il en est de même de leur produit ».

1) Soit z_1, z_2, ω_1 et ω_2 des nombres complexes. Montrer que :

$$(|z_1|^2 + |z_2|^2) \times (|\omega_1|^2 + |\omega_2|^2) = |z_1 \overline{\omega_1} + z_2 \overline{\omega_2}|^2 + |z_1 \omega_2 - z_2 \omega_1|^2.$$

2) Soit $A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, B = p^2 + q^2 + r^2 + s^2$ où a, b, c, d, p, q, r et s sont des entiers naturels.

Montrer que AB est somme de quatre carrés.

🔑 Il n'est pas bien difficile de « deviner » z_1, z_2, ω_1 et ω_2 (voir 1)) : songer simplement que si $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$ alors $|z|^2 = x^2 + y^2$ est un entier somme de deux carrés.

131 Cinématique

1) Pour t réel positif ou nul, on pose :

$$z_t = e^{2int}, z'_t = 6 + \sqrt{3}e^{2int + i\frac{\pi}{2}} \text{ et } z_t = \frac{1}{2}(z_t + z'_t).$$

$$\text{Montrer que } z_t = 3 + e^{2int + i\frac{\pi}{3}}.$$

2) Deux points M et M' tournent en même temps sur deux cercles, parcourus dans le sens trigonométrique et à la même vitesse de rotation constante de 1 tour par seconde :

• M tourne sur le cercle trigonométrique et à l'instant $t = 0, M$ est en $A(1, 0)$.

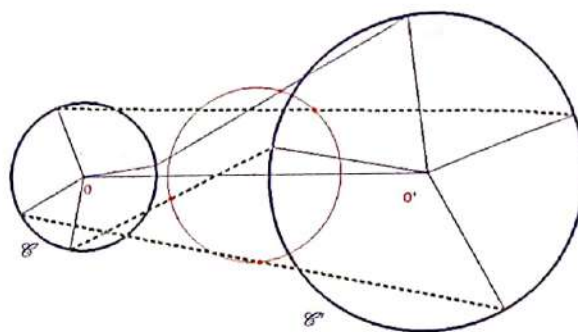
• M' tourne sur le cercle de centre $\Omega(6, 0)$ de rayon $\sqrt{3}$ et à l'instant $t = 0, M'$ est en $B(6, \sqrt{3})$.

Soit m_t le milieu de $[MM']$ à l'instant t .

Montrer que m_t tourne également dans le sens trigonométrique sur un cercle Γ , à la même vitesse de rotation que M et M' et préciser le centre et le rayon de Γ ainsi que la position de m_t à l'instant $t = 0$.

🔑 Interpréter et modéliser : les calculs sont déjà faits (voir 1)).

Note : le résultat est général (voir ci-après).



Si deux points parcourent deux cercles dans le même sens, avec la même vitesse de rotation, il en est de même pour le milieu de ces deux points.

La touche finale

La construction « moderne » des nombres complexes a été élaborée vers 1835 par le mathématicien Irlandais William R. Hamilton (1805-1866).

Elle consiste à considérer les nombres complexes comme des couples de nombres réels (a, b) ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$) et à définir explicitement la somme et le produit de tels couples par :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') ;$$

$$(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba').$$

On a alors les propriétés suivantes (voir exercice 132) :

$$(1) (a, 0) + (a', 0) = (a + a', 0) ;$$

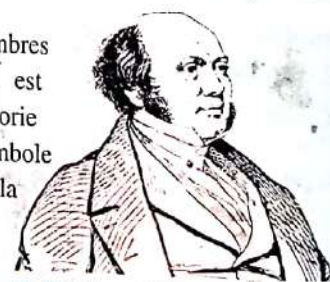
$$(2) (a, 0) \times (a', 0) = (aa', 0) ;$$

$$(3) (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) \times (1, 0) + (b, 0) \times (0, 1) ;$$

$$(4) (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0).$$

Les deux premières propriétés permettent à Hamilton d'identifier le couple $(a, 0)$ au réel a (et donc de le noter simplement : a , et par suite d'observer que le carré du couple $(0, 1)$ est égal au réel -1 (propriété (4)). Notons i ce couple $(0, 1)$ (appelé unité secondaire par Hamilton). En allégeant quelque peu les symboles opératoires, les conventions précédentes et la propriété (3) font noter $a + bi$ le couple (a, b) ; les complexes et leurs opérations viennent d'être définis :

« Dans la théorie des nombres simples, le symbole $\sqrt{-1}$ est absurde, mais dans la théorie des couples, le même symbole $\sqrt{-1}$ a un sens, à savoir la racine carrée principale au couple $(-1, 0)$ » Hamilton.



R. Hamilton (1805-1866)

132 Établir les quatre propriétés énoncées ci-dessus.

Problèmes

133 Encore $z' = f(z)$

Soit a et b deux complexes distincts, A et B les points d'affixes a et b et, pour $z \neq b$, on désigne par $M(z)$ le point d'affixe z .

I) Pour $z \neq b$, on pose $z' = f(z) = \frac{z-a}{z-b}$.

1) Montrer que $|z'| = \frac{MA}{MB}$ et que, pour $z \neq a$:

$$\arg z' = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) [2\pi].$$

2) Prouver que l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

- $|z'| = 1$, est la médiatrice de $[AB]$;
- z' soit réel, est la droite (AB) privée du point B ;
- z' soit imaginaire pur, est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de B .

Piste (Dernier point) : le théorème de l'angle droit.

3) Montrer que $|z' - 1| \times |z - b| = |b - a|$.

En déduire que, si M décrit un cercle de centre B , les points M' d'affixe z' sont tous situés sur un cercle de centre I , où I a pour affixe 1.

II) On pose $g(z) = i \cdot f(z)$ et $h(z) = -if(z)$.

1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

- $|g(z)| = 1$;
- $g(z)$ soit réel ;
- $g(z)$ soit imaginaire pur.

2) Reprendre la question précédente en remplaçant $g(z)$ par $h(z)$.

3) Montrer que, pour $z \neq b$:

$$|g(z) - i| \times |z - b| = |h(z) + i| \times |z - b| = |b - a|.$$

En déduire que, lorsque $M(z)$ décrit un cercle de centre B , les points d'affixes $g(z)$ (respectivement $h(z)$) sont tous situés sur un cercle de centre J d'affixe i (respectivement de centre J' d'affixe $-i$).

III) Mettre sous la « forme » f ou g ou h (en précisant a et b) :

$$z \mapsto \frac{2 - iz}{1 - z} ;$$

$$z \mapsto i \left(\frac{z - 3i}{z + 1} \right) \text{ (voir exercice 128) ;}$$

$$z \mapsto \frac{-iz - 2}{z + 1} \text{ (voir exercice 129) ;}$$

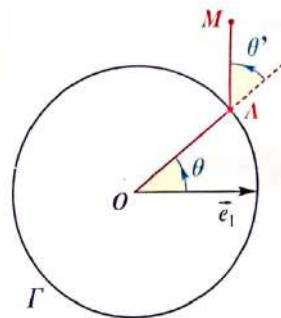
$$z \mapsto \frac{z - 2 + i}{z + 2i}.$$

134 Le bras articulé

Dans la figure ci-contre :

• A est un point du cercle trigonométrique et θ est la mesure de l'angle $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OA})$ dans l'intervalle $[0, 2\pi[$;

• M est tel que $AM = \ell$ où ℓ est une longueur fixée avec $0 < \ell < 1$ et θ' est la mesure dans $] -\pi, \pi]$ de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM})$.



On schématise ainsi le mouvement plan d'un bras articulé :

- le segment $[OA]$ tourne autour du point O ;
- le segment $[AM]$ tourne autour du point d'articulation A .

La donnée d'un couple (θ, θ') avec $0 \leq \theta < 2\pi$ et $-\pi < \theta' \leq \pi$ détermine entièrement la position du point M : un tel couple est appelé « commande ».

1) Représenter la partie du plan que peut atteindre le point M lorsque $\ell = 0,5$.

2) Évaluer l'angle $(\vec{e}_1, \overrightarrow{AM})$ en fonction de θ et θ' et en déduire que l'affixe z_M du point M est calculée par :

$$z_M = e^{i\theta}(1 + \ell e^{i\theta'}).$$

Piste $z_M = z_{\overrightarrow{OM}} = z_{\overrightarrow{OA}} + z_{\overrightarrow{AM}}$.

3) Soit r le module de z_M et α un argument de z_M . Montrer que :

$$\cos \theta' = \frac{r^2 - (1 + \ell^2)}{2\ell} ;$$

$$\alpha = \varphi + \theta \text{ avec } \cos \varphi = \frac{1 + r^2 - \ell^2}{2r}.$$

4) On suppose que $\ell = \frac{1}{2}$ et

P est le point du plan de coordonnées polaires $r_0 = 1,2$ et $\alpha_0 = 50^\circ$.

Trouver deux commandes permettant de positionner M en P .

De fait, on demande d'exprimer θ et θ' en degrés à 0,01 degré près, d'illustrer d'une figure et d'expliquer la présence d'une symétrie dans une partie de la figure.



135 Sommes trigonométriques

Soit n un entier ($n \geq 1$) et x un réel ($x \neq 2k\pi$ quel que soit $k \in \mathbb{Z}$). On pose :

$$C_n = 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx ;$$

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx.$$

L'objet du problème est d'obtenir une formule sommatoire pour C_n et S_n et d'étudier leur comportement asymptotique lorsque n tend vers $+\infty$, pour certaines valeurs de x .

1) Question préliminaire

Montrer que pour tout réel α :

$$1 - e^{i\alpha} = -2i \sin \frac{\alpha}{2} \cdot e^{i \frac{\alpha}{2}}.$$

2) On note ω le complexe $\omega = e^{ix}$.

a) Montrer que $\omega \neq 1$ et que $C_n + i S_n = \frac{1 - \omega^{n+1}}{1 - \omega}$.

b) En déduire que :

$$C_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \cos \frac{nx}{2}$$

$$\text{et : } S_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{nx}{2}.$$

Dans toute la suite du problème on suppose que $x = \frac{\pi}{n}$ et l'on note :

$$c_n = \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos(n-1) \frac{\pi}{n} ;$$

$$s_n = \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin(n-1) \frac{\pi}{n}.$$

3) Déduire des résultats obtenus à la question 2) b) que :

$$c_n = 0 \quad \text{et} \quad s_n = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2n}}.$$

Quelle est la limite de la suite de terme général $\frac{s_n}{n}$?

4) On se propose de retrouver certains des résultats de la question 3), sans utiliser les formules sommatoires obtenues à la question 2).

a) Prouver que pour $1 \leq k \leq n-1$, $e^{i \frac{k\pi}{n}} + e^{i(n-k) \frac{\pi}{n}}$ est un imaginaire pur et en déduire que $c_n = 0$.

b) Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = \sin \pi t$.

$$\text{Montrer que } \frac{s_n}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

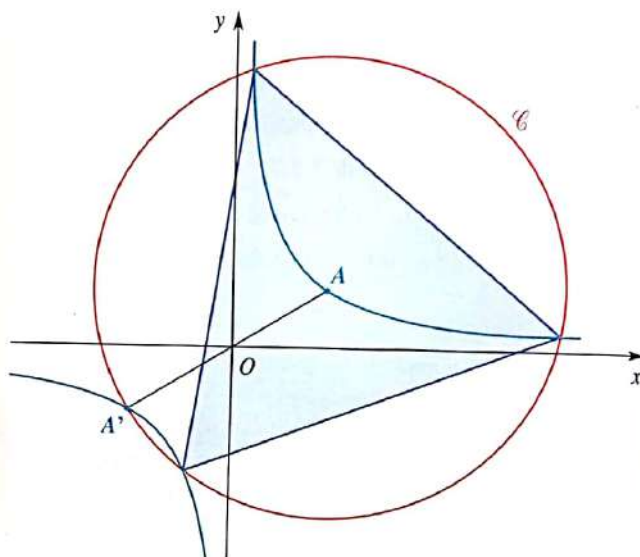
puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{n} = \int_0^1 f(t) dt$ et conclure.

136 Triangle équilatéral sur hyperbole

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $xy = 1$ (autrement dit $\mathcal{H}$ est la courbe représentative sur $\mathbb{R}^*$ de la fonction inverse), A un point de $\mathcal{H}$, A' le symétrique de A par rapport à O ($A' \in \mathcal{H}$, c'est clair) et $\mathcal{C}$ le cercle de centre A passant par A' .

Le but du problème est de montrer que le cercle $\mathcal{C}$ recoupe l'hyperbole $\mathcal{H}$ en trois points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Note : on utilisera (question 3)) le résultat suivant « Soit $u \in \mathbb{C}$, $u \neq 0$; l'équation $z^3 = u$ admet trois solutions. Si z_0 est l'une d'elles, alors les deux autres sont jz_0 et j^2z_0 ».



On désigne par ω l'affixe du point A , M est un point du plan d'affixe z et l'on pose $Z = z - \omega$.

1) a) Montrer que M appartient à $\mathcal{C}$ si, et seulement si :
 $(z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega}) = 4\omega\bar{\omega}.$

b) Prouver que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) M appartient à $\mathcal{H}$; (2) $z^2 - \bar{z}^2 = 4i$;
 (3) $z^2 - \omega^2 = \bar{z}^2 - \bar{\omega}^2.$

Piste Puisque A appartient à $\mathcal{H}$, $\omega^2 - \bar{\omega}^2 = \dots$

c) En déduire que M appartient à $\mathcal{C} \cap \mathcal{H}$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} Z \times \bar{Z} = 4\omega\bar{\omega} & (1) \\ Z^2 + 2\omega Z = \bar{Z}^2 + 2\bar{\omega}\bar{Z} & (2) \end{cases}$$

2) Montrer que le système de relations précédentes est équivalent à :

$$\begin{cases} |Z| = 2|\omega| & (1') \\ Z^3(2\omega + z) = 8\omega\bar{\omega}^2(2\omega + Z) & (2') \end{cases}$$

Piste Vérifier que (2') s'obtient en multipliant (2) par Z^2 .
 Est-ce légitime ? En déduire que M appartient à $\mathcal{C} \cap \mathcal{H}$, si et seulement si, $M = A'$ ou $Z^3 = 8\omega\bar{\omega}^2$.

3) Conclure à l'aide du résultat rappelé en début d'énoncé.

Remarque : le résultat reste valide si l'un des points est le point A' , ce qui ne peut arriver que lorsque A est de coordonnées $(1, 1)$ ou $(-1, -1)$.

→ Produit scalaire dans l'espace

OBJECTIFS

- Introduire le produit scalaire dans l'espace.
- Approfondir l'étude des solides.
- Développer la géométrie analytique dans l'espace.

*« Vertige ! Voici que frissonne
L'espace comme un grand baiser
Qui, fou de naître pour personne
Ne peut jaillir ni s'apaiser. »
Stéphane Mallarmé.*

Avant-première

1. OBJECTIFS

• Remettre nos pas dans des traces qui ne sont pas si anciennes est le premier objectif ; il s'agit donc (on l'aura compris) de **renouer avec quelques éléments de la géométrie euclidienne** de l'espace (orthogonalité, projection orthogonale, normes, distances, etc.) mais aussi du **plan** (rappel des résultats essentiels, pages 208 et 209, étoffé d'une série d'exercices, page 223).

• Le second objectif est, naturellement, d'**introduire le produit scalaire** dans l'espace. Et, l'occasion s'y prêtant, nous avons choisi d'examiner les questions que peut poser la tentative de généraliser à l'espace une notion géométrique du plan.

Voilà matière en effet à quelques solides réflexions.

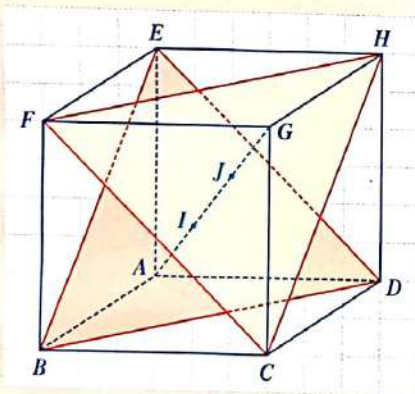
2. LES PROPRIÉTÉS D'ORTHOGONALITÉ

Les résultats dégagés ci-après seront redémontrés à l'aide du produit scalaire et/ou de la géométrie analytique : preuve, s'il en est, qu'ils n'ont rien d'anecdotique.

Séquence 1

Un cube, un tétraèdre

① La grande diagonale du cube



On considère un cube $ABCDEFGH$.

1) Montrer que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles, que (AG) perce ces plans aux centres de gravité I et J des triangles BDE et CFH et que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JG}$.

Piste $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

2) Montrer que (AG) est orthogonale aux plans (BDE) et (CFH) .

Piste Voici le raisonnement « type » : (BD) est orthogonale à deux côtés du triangle ACG (vérifier), donc...

② Le tétraèdre trirectangle

Le tétraèdre $OABC$ est trirectangle de sommet O (définition : (OA) , (OB) et (OC) sont deux à deux orthogonales) et H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC) .

1) Prouver que H est l'orthocentre du triangle ABC .

2) a) La droite (CH) rencontre (AB) en K . Montrer que :

$$(OK) \perp (AB).$$

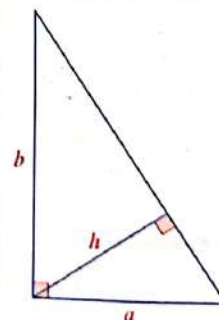
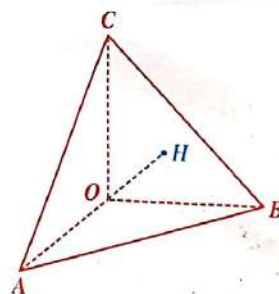
b) Établir l'égalité :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

Piste • Montrer que dans un triangle rectangle (voir figure ci-contre) :

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

• Appliquer deux fois.



3. LE PRODUIT SCALAIRE : DU PLAN À L'ESPACE ?

- L'ensemble des vecteurs de l'espace sera noté $\mathcal{E}$.
- De multiples raisons militent pour adopter comme définition « provisoire » (statut définitif à la page suivante) du produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{E}$, le nombre :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

D'abord, l'expression considérée a bien un sens et, par ailleurs et surtout, c'est ainsi que nous avons pu définir le produit scalaire dans le plan.
Et de nous féliciter de ce choix très perspicace.

• Oui, mais...

Compte tenu des objectifs déclarés, chacun se doute – en dehors de quelques « anesthésiés du jugement » – que l'affaire n'est sûrement pas aussi simple...

On n'aura pas manqué d'observer, en effet, que l'usage du produit scalaire dans le plan est d'autant plus efficace que l'on dispose :

- d'une part, de **diverses expressions** du produit scalaire ;
- d'autre part, de **commodités algébriques** (bilinéarité notamment).

Dès lors, un certain nombre de questions **méritent** d'être posées. Par exemple :

- A-t-on dans l'espace la « formule » du cosinus :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) ?$$

Ce qui nous renvoie, au préalable, à la question : « Dans l'espace, qu'est-ce que l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$? »

- Quelle est l'expression du produit scalaire en **repère orthonormal** ?

– Va-t-on bénéficier de la relation de bilinéarité $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ sans laquelle on ne peut rien ?

- Voici quelques premières réponses :

Séquence 2

Sur la bonne voie

① L'expression analytique

Rappel : étant donné un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace et un vecteur $\vec{u}(x, y, z)$, on a $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Exprimer en fonction des coordonnées des vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$:

$$\|\vec{u}\|^2, \|\vec{v}\|^2 \text{ et } \|\vec{u} - \vec{v}\|^2.$$

En déduire que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

② La relation de bilinéarité

Soit trois vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$, $\vec{v}(x', y', z')$ et $\vec{w}(x'', y'', z'')$.

1) Donner l'expression analytique des produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$.

2) Établir alors la relation :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

③ La formule du cosinus

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

1) On considère deux points O et O' de $\mathcal{E}$ et l'on définit les points A, B, A' et B' par :

$$\vec{OA} = \vec{O'A'} = \vec{u} \text{ et } \vec{OB} = \vec{O'B'} = \vec{v}.$$

Montrer que les angles géométriques $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'O'B'}$ sont égaux.

Piste Translation.

Note : un tel angle géométrique ne dépend donc que de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ et non du point O choisi pour représenter $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Voilà donc défini l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

2) À l'aide des propriétés du produit scalaire dans le plan, montrer que :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \times \cos \widehat{AOB}.$$

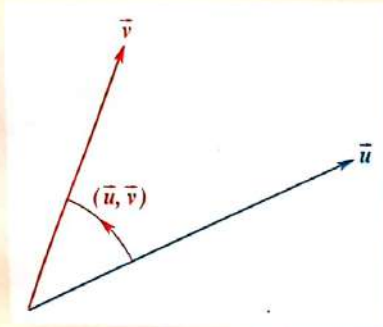
Ainsi $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Rappels

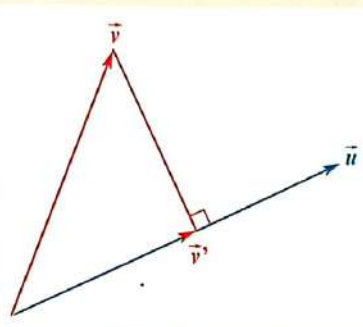
Géométrie euclidienne (plan)

Planche 1

Produit scalaire

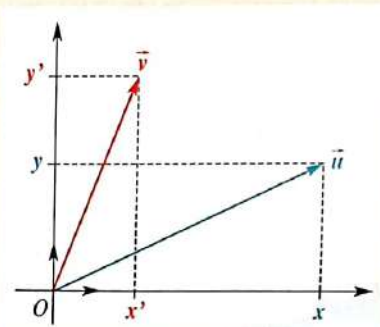


$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$$

$$\vec{v}' = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$$



En repère orthonormal :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

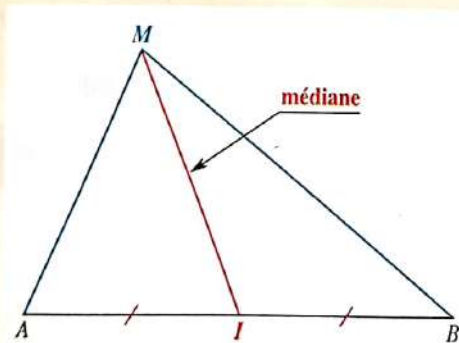
$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$$

Planche 2

Triangle

Théorème de la médiane

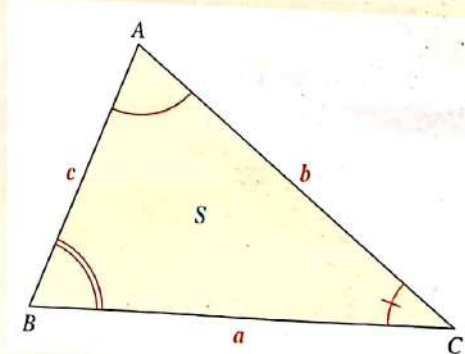


$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Relations métriques



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (\text{relation d'Al-Kashi})$$

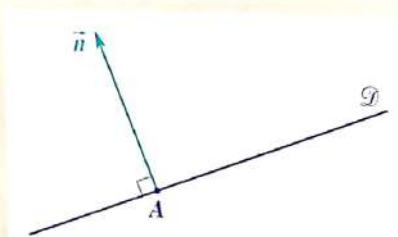
$$S = \frac{1}{2}bc \sin A \quad (\text{formule de l'aire})$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (\text{loi des sinus})$$

Droite définie par un point et un vecteur normal

$\mathcal{D}$, droite passant par A , de vecteur normal ($\vec{n} \neq \vec{0}$) :

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$



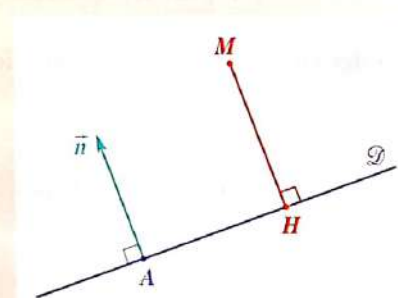
- Équation de $\mathcal{D}$, avec $A(x_0, y_0)$ et $\vec{n}(a, b)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

- Équation $ax + by + c = 0$ (a ou b non nul) ;
droite de vecteur normal :

$$\vec{n}(a, b).$$

Distance d'un point à une droite



Distance de $M(x_0, y_0)$ à la droite d'équation
 $ax + by + c = 0$:

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$d(M, \mathcal{D}) = MH = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

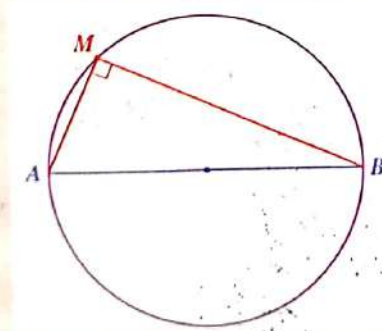
Cercles

- Γ , cercle de centre Ω , de rayon R :

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2.$$

- Γ , cercle de diamètre $[AB]$:

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$



- Équation de Γ , avec $\Omega(x_0, y_0)$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

- Équation de Γ , avec $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$:

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0.$$

1. Produit scalaire dans l'espace

1.1 DIVERSES EXPRESSIONS DU PRODUIT SCALAIRE

DÉFINITION 1

• On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{E}$ le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

• Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ est calculé par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Remarques :

• Bien que rangé sous l'enseigne « définition », le second énoncé est celui d'un *théorème*, que nous avons démontré dans la séquence 2 (exercice 1, page 207) : sa place ici n'est donc pas usurpée.

• La *définition 1* prolonge l'une de celles que l'on peut adopter pour le produit scalaire dans le plan ; de ce fait, il en découle la *règle fondamentale* suivante :

Toutes les propriétés du produit scalaire établies en géométrie plane s'appliquent dans l'espace à des vecteurs coplanaires.

Conséquence

Deux vecteurs étant toujours coplanaires, la règle fondamentale rend immédiates des relations telles que :

- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$, (α réel) ;
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$; etc.

1.2 LA FORMULE DU COSINUS

THÉORÈME 1

Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de $\mathcal{E}$, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

... Démonstration

Rappelons qu'étant donné $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et O un point de $\mathcal{E}$, l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ où $\vec{OA} = \vec{u}$ et $\vec{OB} = \vec{v}$ ne dépend pas du point O choisi (autrement dit, il ne dépend que des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$). Cet angle, mesuré dans $[0, \pi]$ puisqu'il s'agit d'un angle géométrique, est l'angle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (noté $(\vec{u}, \vec{v})$).

Les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ étant coplanaires :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \times \cos \widehat{AOB}.$$

Le théorème 1 en découle (voir séquence 2, exercice 3, page 207).

1.3 BILINÉARITÉ DU PRODUIT SCALAIRE

Proposition 1

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\vec{\mathcal{E}}$, on a :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ n'ayant aucune raison d'être coplanaires, la relation ci-dessus n'est pas une banalité.

Pour sa démonstration, voir *séquence 2, exercice 2* (page 207).

1.4 ORTHOGONALITÉ

De façon analogue à la situation plane, nous avons :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } \vec{u} \perp \vec{v}.$$

Cela nous permet d'élargir la notion d'orthogonalité de deux vecteurs :

Deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.

THÉORÈME 2

• Orthogonalité de deux droites

Deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

• Orthogonalité d'une droite et d'un plan.

Étant donné une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan $\mathcal{P}$, les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) $\mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$;
- 2) pour tous points M et N de $\mathcal{P}$, $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$;
- 3) pour tout couple $(\vec{v}, \vec{v}')$ de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}' = 0.$$

... Démonstration

La première propriété est immédiate ; quant à la deuxième, elle ne fait que traduire, à l'aide du produit scalaire, les équivalences : $\mathcal{D}$ orthogonale à $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{D}$ orthogonale à toute droite de $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{D}$ orthogonale à deux droites non parallèles de $\mathcal{P}$.



EXEMPLE 1

Redémontrer à l'aide du produit scalaire que (AG) (« la grande diagonale ») est orthogonale au plan (CFH) (voir *séquence 1, exercice 1*, page 206).

• Évaluons le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{FH}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{FH} &= (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG}) \cdot \overrightarrow{FH} \\ &= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{FH}. \end{aligned}$$

Avec $(AE) \perp \text{plan}(EFGH)$,

il vient : $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{FH} = 0$.

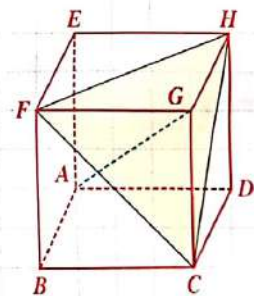
Les diagonales du carré $EFGH$ sont orthogonales :

$$\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{FH} = 0.$$

Ainsi, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{FH} = 0$.

• On démontrerait de même (faites-le !) que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$.

• Comme $(\overrightarrow{FH}, \overrightarrow{HC})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan (CFH) , d'après le *théorème 2*, (AG) est orthogonale au plan (CFH) .



Voir exercices 7 à 9

1.5 VECTEUR NORMAL À UN PLAN

Ce dont
il s'agit

Étant donné un plan $\mathcal{P}$, tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à $\mathcal{P}$ est appelé **vecteur normal** à $\mathcal{P}$ (de préférence à « vecteur orthogonal » à $\mathcal{P}$). L'intérêt de cette notion est dans le théorème suivant.

THÉORÈME 3

- Soit A un point de $\mathcal{E}$ et $\vec{n}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est un plan de l'espace.
- Réciproquement, soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Quels que soient le point A de $\mathcal{P}$ et le vecteur normal $\vec{n}$ à $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Dans chaque cas, on dit que $\mathcal{P}$ est le **plan passant par A , de vecteur normal $\vec{n}$** , ou encore le **plan passant par A orthogonal à $\vec{n}$** .

... Démonstration

Nous la ferons reposer sur l'observation suivante :

Dire que $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ revient à dire que $\mathcal{P}$ est orthogonal à une quelconque droite de vecteur directeur $\vec{n}$. Soit alors $\mathcal{D}$ une de ces droites.

Le premier énoncé découle des équivalences suivantes :

$$\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} M = A \\ \text{ou} \\ M \neq A \text{ et } (AM) \perp \mathcal{D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ M \text{ appartient au plan passant par } A \\ \text{et orthogonal à } \mathcal{D}. \end{matrix}$$

Le second énoncé ne fait que réexprimer qu'étant donné un plan $\mathcal{P}$, quels que soient le point A de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ une droite orthogonale à $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ est toujours le plan passant par A et orthogonal à $\mathcal{D}$.



EXEMPLE 2

Soit O un point de $\mathcal{E}$, $\vec{n}$ un vecteur unitaire et $\mathcal{P}$ le plan passant par O orthogonal à $\vec{n}$. On désigne par H le projet orthogonal d'un point M sur le plan $\mathcal{P}$. Exprimer $\vec{OH}$ à l'aide des vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{n}$.

Soit m le projeté orthogonal de M sur la droite $\mathcal{D}(O, \vec{n})$. Alors :

- $\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{Om}$ ($O H m M$ est un rectangle) ;
- il existe α réel tel que $\vec{Om} = \alpha \vec{n}$.

On en déduit $\vec{OM} = \vec{OH} + \alpha \vec{n}$, puis :

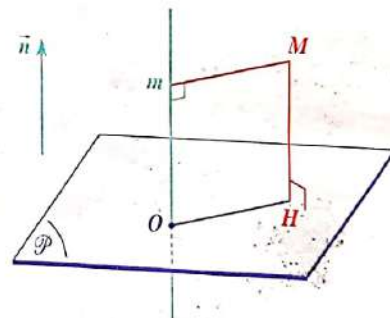
$$\vec{OM} \cdot \vec{n} = \vec{OH} \cdot \vec{n} + \alpha \|\vec{n}\|^2 = \alpha.$$

En effet :

- O et H étant dans $\mathcal{P}$, $\vec{OH} \cdot \vec{n} = 0$;
- $\vec{n}$ étant unitaire, $\|\vec{n}\|^2 = 1$.

Conclusion :

$$\vec{OH} = \vec{OM} - (\vec{OM} \cdot \vec{n}) \vec{n}.$$



Voir exercice 10

2. Géométrie analytique

Dans cette partie, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2.1 AVEC L'EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE

Rappelons que, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ est calculé par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Découlent immédiatement de cette expression du produit scalaire les résultats affichés dans la proposition 2 (dont certains nous sont déjà connus : expression de la norme, par exemple).

Proposition 2

1) Coordonnées de $\vec{u}(x, y, z)$

$$x = \vec{u} \cdot \vec{i}, y = \vec{u} \cdot \vec{j} \quad \text{et} \quad z = \vec{u} \cdot \vec{k}.$$

2) Conditions d'orthogonalité

$$\vec{u}(x, y, z) \text{ et } \vec{v}(x', y', z') \text{ orthogonaux} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0.$$

3) Norme, distance

- Avec $\vec{u}(x, y, z)$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

- Avec $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, on a :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$



EXEMPLE 3

Soit $A(-7, 12, -20)$, $B(-3, 15, -55)$, $C(20, 1, 0)$ et $D(-8, -20, -5)$.

1) Montrer que (AB) est orthogonale à (CD) .

2) Prouver que le triangle ACD est équilatéral, que le triangle BCD est isocèle en B , et retrouver sans calcul le résultat de la question 1).

1) Nous avons $\vec{AB}(4, 3, -35)$ et $\vec{CD}(-28, -21, -5)$, d'où :

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 4 \times (-28) + 3 \times (-21) + (-35) \times (-5) = -112 - 63 + 175 = 0.$$

Ainsi, (AB) est orthogonale à (CD) .

2) Avec $\vec{AC}(27, -11, 20)$, $\vec{AD}(-1, -32, 15)$ et $\vec{CD}(-28, -21, -5)$, il vient sans problème :

$$AC^2 = AD^2 = CD^2 = 1\,250.$$

Conclusion : le triangle ACD est équilatéral.

De même, avec $\vec{BC}(23, -14, 55)$ et $\vec{BD}(-5, -35, 50)$, on obtient :

$$BC^2 = BD^2 = 3\,750.$$

Le triangle BCD est donc isocèle en B .

De ces deux résultats découlent en particulier les égalités $AC = AD$ et $BC = BD$.

Interprétons : A et B sont dans le plan médiateur de $[CD]$, donc (AB) est orthogonale à (CD) .

Voir exercices 11 à 17

2.2 ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UN PLAN

Étude préliminaire

Le plan passant par $A(x_0, y_0, z_0)$, et admettant le vecteur non nul $\vec{n}(a, b, c)$ comme vecteur normal, peut être défini comme l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. La traduction analytique de cette relation donne $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, soit, en posant $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$:

$$ax + by + cz + d = 0, \text{ avec } a \text{ ou } b \text{ ou } c \text{ non nul.}$$

Réciproquement, étant donné trois réels a, b et c , dont l'un au moins est non nul, montrons que l'ensemble $\mathcal{P}$ des points $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.

Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathcal{P}$ (« ça existe »)⁽¹⁾ : $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.

Alors, $ax + by + cz + d = 0$ équivaut à $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Traduisons : $M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Nous sommes donc conduits à énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 4

Soit $\vec{n}(a, b, c)$ un vecteur non nul.

Les plans orthogonaux à $\vec{n}$ sont les plans dont une équation cartésienne est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0, \text{ avec } d \text{ réel.}$$

Remarques :

- Le théorème 4 permet de retrouver les équations des plans de coordonnées.

Le plan (xOy) , par exemple (Fig. 1), est le plan passant par O , de vecteur normal $\vec{k}(0, 0, 1)$:

$$M(x, y, z) \in (xOy) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \vec{k} = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

- Écrire l'équation d'un plan défini par un point et un vecteur normal (voir exemple 4) sera pratiquement notre seule exigence dans ce chapitre, selon un choix délibéré.

Nous attendrons le chapitre 8 pour soulever des questions telles que : écrire l'équation d'un plan passant par trois points, reconnaître par leurs équations des plans parallèles (ou perpendiculaires), etc.

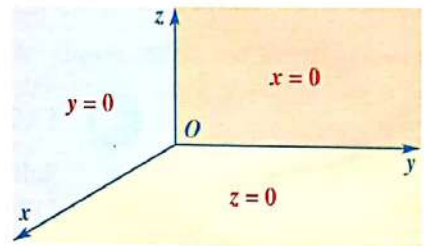


Fig. 1

→ EXEMPLE 4

Donner une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(-2, 1, 3)$ et orthogonal à (BC) avec $B(1, -2, 2)$ et $C(4, 1, -1)$.

Le vecteur $\overrightarrow{BC}(3, 3, -3)$ est normal à $\mathcal{P}$: il en est de même du vecteur $\vec{n}(1, 1, -1)$ qui lui est colinéaire.

Traduisons analytiquement la relation $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Avec $M(x, y, z)$, nous obtenons $(x + 2) + (y - 1) - (z - 3) = 0$.

Une équation de $\mathcal{P}$ est donc :

$$x + y - z + 4 = 0.$$

Voir exercices 19 à 25

(1) Si $a \neq 0$, on peut prendre $A(-\frac{d}{a}, 0, 0)$; si $b \neq 0$, on prendra $A(0, -\frac{d}{b}, 0)$; etc.

2.3 DISTANCE D'UN POINT À UN PLAN

THÉORÈME 5

Soit A un point de $\mathcal{E}$, $\vec{n}$ un vecteur non nul et $\mathcal{P}$ le plan passant par A , de vecteur normal $\vec{n}$.

Pour tout point M de $\mathcal{E}$, dont on note H le projeté orthogonal sur le plan $\mathcal{P}$, la distance MH est calculée par :

$$MH = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Cette distance est la **distance de M au plan $\mathcal{P}$** ; elle est notée $d(M, \mathcal{P})$ (on ne sera pas surpris d'apprendre, à l'exercice 29, que c'est la plus petite des distances de M à tous les points de $\mathcal{P}$).

... Démonstration

- Le vecteur $\vec{HM}$ étant colinéaire à $\vec{n}$, il existe un réel α tel que $\vec{HM} = \alpha \vec{n}$ (c'est le premier ingrédient de notre démonstration).

- Le second réside dans l'égalité :

$$\vec{AM} \cdot \vec{n} = \vec{HM} \cdot \vec{n},$$

qui résulte de $\vec{AM} = \vec{AH} + \vec{HM}$
et $\vec{AH} \cdot \vec{n} = 0$ (car $\vec{AH} \perp \vec{n}$).

- On en déduit :

$$\vec{AM} \cdot \vec{n} = (\alpha \vec{n}) \cdot \vec{n} = \alpha \|\vec{n}\|^2,$$

d'où l'expression de $\vec{HM}$: $\vec{HM} = \left(\frac{\vec{AM} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \right) \vec{n}$, puis celle de HM : $HM = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

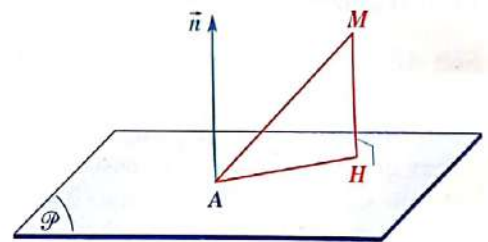


Fig. 2

COROLLAIRE

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathcal{E}$.

La distance de M_0 à $\mathcal{P}$ est calculée par $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

... Démonstration

Le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ est normal à $\mathcal{P}$, avec $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Soit $A(x_1, y_1, z_1)$ un point de $\mathcal{P}$; on a donc $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$.

Alors, pour tout point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$:

$\vec{AM} \cdot \vec{n} = a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = ax + by + cz - (ax_1 + by_1 + cz_1)$,
soit $\vec{AM} \cdot \vec{n} = ax + by + cz + d$. D'où la distance de M_0 à $\mathcal{P}$:

$$\frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$



EXEMPLE 5

Calculer la distance du point $M_0(5, 2, -3)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation :
 $x + 4y + 8z + 2 = 0$.

Appliquons simplement le précédent résultat :

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|1 \times 5 + 4 \times 2 + 8 \times (-3) + 2|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{81}} = 1.$$

Voir exercices 27 et 28

1. Étude des solides

OBJECTIF

Approfondir l'étude des propriétés des solides usuels à l'aide du **produit scalaire dans l'espace** (sans pour autant jeter aux orties les propriétés d'incidence, de parallélisme, d'orthogonalité, etc.).

PROBLÈME

Le tétraèdre régulier

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier d'arête a , et O l'isobarycentre des sommets (O est appelé centre du tétraèdre).

Établir les propriétés suivantes :

- deux quelconques arêtes opposées sont orthogonales ;
- chaque médiane est orthogonale à la face opposée ;
- le point O est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.

① Deux pistes...

Nous explorerons deux pistes :

- l'une « fléchée » *produit scalaire* (c'est la moindre des choses) ;
- l'autre, munie des *propriétés d'orthogonalité* (on ne voit pas quelle raison, *a priori*, nous la ferait tenir pour inintéressante).

② Première solution : produit scalaire

• Orthogonalité des arêtes opposées

Évaluons (par exemple) le produit scalaire

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Sachant que $AB = AD = AC = a$ et que $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$,

l'usage de « $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$ » s'impose.

Il vient $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$, d'où découle $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

De manière générale, **deux arêtes opposées sont orthogonales**.

• Les hauteurs

Soit A' le centre de gravité du triangle BCD .

Nous avons $3\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, d'où :

$$3\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} ;$$

$$3\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0 \text{ (ceci résulte}$$

des calculs précédents).

Ainsi $\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC}$, et on établirait de même que $\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BD}$.

Conclusion : (AA') est orthogonale au plan (BCD) (nous dirons que les médianes du tétraèdre sont aussi les hauteurs).

TÉTRAÈDRE 1

Lexique de base

Arête : selon le contexte, droite (ou segment) joignant deux sommets, ou encore, longueur de ce segment.

Médiane : droite (ou segment) joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée.

Bimédiane : droite (ou segment) joignant les milieux de deux arêtes opposées.

Centre de gravité : isobarycentre des sommets.

TÉTRAÈDRE 2

Il faut le savoir

Le centre de gravité appartient à chacune des quatre médianes et il est le milieu commun des trois bimédianes (segments) (ceci n'est qu'une simple application du théorème d'associativité).

• La sphère circonscrite

Comparons par exemple OB et OC , ou mieux, évaluons $OC^2 - OB^2$ (c'est la ligne à suivre avec le produit scalaire).

Avec K milieu de $[BC]$, le **théorème de la médiane** livre :

$$\begin{aligned} OC^2 - OB^2 &= 2\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= 2(\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{A'K} \cdot \overrightarrow{BC}). \end{aligned}$$

Dans le triangle équilatéral BCD , on a $\overrightarrow{A'K} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et, d'après ce qui précède, $\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, d'où :

$$OC = OB.$$

Plus généralement :

$OA = OB = OC = OD$; le centre de gravité du tétraèdre est centre de la sphère qui lui est circonscrite.

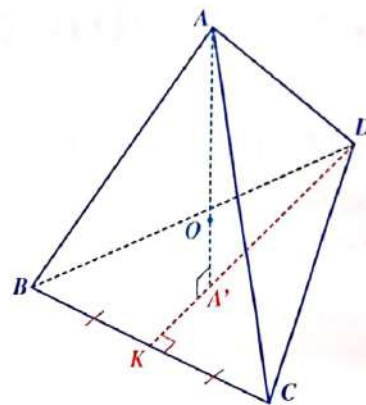


Fig. 3

③ Seconde solution : propriétés d'orthogonalité

Nous tenons des égalités $CA = CB$ et $DA = DB$ que le plan médiateur de $[AB]$ est le plan (ICD) , où I est le milieu de $[AB]$ et, bien sûr, des résultats analogues pour les autres arêtes.

Du coup, « tout est évident » : les incrédules ainsi que tous les autres verront cela dans l'exercice 1 ci-après.

SONGEZ-Y

De l'orthogonalité à bon compte

Soit $[AB]$ de milieu I .

Si $MA = MB$ et $NA = NB$, toute droite du plan (IMN) est orthogonale à (AB) : ce plan est en effet le plan médiateur de $[AB]$.

Dans la foulée

Les exercices 1 à 3 poursuivent l'étude du tétraèdre régulier (en conservant les notations introduites).

- 1) Acheter la seconde solution du problème en montrant, de plus, que chaque bimédiane est orthogonale aux arêtes qu'elle joint.

② Calculs de grandeurs

Rappel : a désigne l'arête du tétraèdre régulier (les données sont celles de la figure 3 ci-dessus).

- 1) Exprimer, en fonction de a , DK , DA' et la hauteur AA' du tétraèdre.
- 2) Soit V le volume du tétraèdre et R le rayon de la sphère qui lui est circonscrite. Donner l'expression de V et de R en fonction de a .
- 3) Évaluer $\cos \widehat{AOB}$ et $\cos \widehat{AKD}$ et donner une valeur approchée de ces deux angles en degré, à $0,01^\circ$ près.

③ Un repère orthogonal

Soit Ω le milieu de $[AA']$. Montrer que le repère (Ω, B, C, D) est orthogonal et que :

$$\|\overrightarrow{\Omega B}\| = \|\overrightarrow{\Omega C}\| = \|\overrightarrow{\Omega D}\|.$$

④ Avec le cube

Le point I est le milieu de $[BC]$ et M est un point de (AF) tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AF}$ ($x \in \mathbb{R}^*$).

- 1) Préciser pour quelle(s) valeur(s) de x :

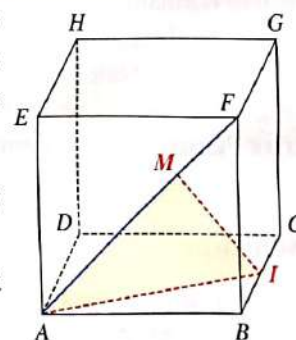
a) le triangle AMI est isocèle ;

b) le triangle AMI est rectangle.

- 2) Le point M est milieu de $[AF]$.

Comment retrouver avec une homothétie de centre B que AMI est rectangle en M ?

Piste « Grande diagonale du cube » (séquence 1, exercice 1, page 206).



2. Géométrie analytique

OBJECTIF

Investir les résultats de géométrie analytique dans l'étude des solides usuels (objectif modeste certes, mais cette soudaine humilité a ses raisons : les problèmes analytiques concernant droites et plans constituent l'un des thèmes majeurs du prochain chapitre (chapitre 8)).

PROBLÈME

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ et $C(0, 0, c)$ où a, b et c sont trois réels non nuls (Fig. 4).

Donner une équation cartésienne du plan (ABC) et en déduire que la distance h du point O à ce plan vérifie :

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

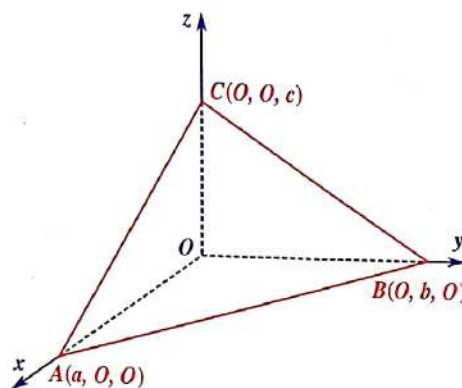


Fig. 4

1 Un peu démuni...

Il est dans nos cordes :

- d'écrire l'équation cartésienne d'un plan connaissant l'un de ses points et un vecteur normal ;
- d'évaluer la distance d'un point à un plan, dès lors que nous disposons d'une équation cartésienne de ce plan.

En revanche, nous nous sentons un peu démuni face à la demande : « Écrire l'équation cartésienne d'un plan défini par trois points ». C'est une raison supplémentaire pour y regarder de plus près...

2 Solution

- Équation cartésienne du plan $\mathcal{P} = \text{plan}(ABC)$

Nous expliciterons deux méthodes.

- Méthode 1 : « naturelle »

Cherchons un vecteur $\vec{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ normal à $\mathcal{P}$.

D'après le théorème 2 (page 211), il faut – et cela suffit – que :

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0.$$

Avec $\vec{AB}(-a, 0, b)$ et $\vec{AC}(-a, 0, c)$ nous obtenons :

$$-\alpha a + \beta b = 0 \text{ et } -\alpha a + \gamma c = 0,$$

soit :

$$\alpha a = \beta b = \gamma c.$$



Un peu d'observation vient facilement à bout de telles équations :

$\alpha = bc$, $\beta = ac$, $\gamma = ab$ en est une solution (on a en effet $\alpha a = \beta b = \gamma c = abc$).

Ainsi, $\vec{n}(bc, ac, ab)$ est normal à $\mathcal{P}$.

Il en découle une équation cartésienne de $\mathcal{P}$, plan passant par A, de vecteur normal $\vec{n}$, avec $A(a, 0, 0)$, $M(x, y, z)$ et $\vec{n}(bc, ac, ab)$; $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ s'écrit :

$$bcx + acy + abz - abc = 0$$

ou encore :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

• Méthode 2 : « malhonnête » ⁽¹⁾

L'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ est celle d'un plan.

Manifestement les coordonnées de $A(a, 0, 0)$, de $B(0, b, 0)$ et de $C(0, 0, c)$ vérifient cette équation.

C'est donc une équation du plan (ABC) !

• Distance de O au plan (ABC)

Un simple coup d'œil sur le corollaire du théorème 5 (page 215) livre :

$$h = d(O, \mathcal{P}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}, \text{ d'où l'on déduit :}$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Si (α, β, γ) est une solution, toutes les autres sont $(k\alpha, k\beta, k\gamma)$ où $k \in \mathbb{R}$ et $k \neq 0$.

MALHONNÊTE ?

Bon à connaître

Le résultat ci-contre est trop utile pour être méconnu : il peut être resservi tel quel !

Pour une méthode générale permettant d'obtenir une équation cartésienne d'un plan défini par trois points, patienter jusqu'au Chapitre 8.

Dans la foulée

5 Une suite au problème

1) À l'aide d'un calcul de volume, exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de a, b et c et vérifier que : « le carré de l'aire de la face ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces ».

2) En 1783, le mathématicien De Gua de Malves qualifia ce résultat de « généralisation du théorème de Pythagore à l'espace ». Expliquer.

6 Étude d'un tétraèdre

On considère les points $A(-7, -15, 3)$, $B(-4, 20, -1)$, $C(4, 5, 30)$ et $D(25, 0, 2)$. Montrer que $ABCD$ est un tétraèdre régulier et calculer son volume.

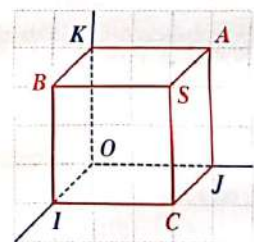
7 Toujours la grande diagonale

On construit le cube ci-contre à partir des sommets du repère (O, I, J, K) .

1) Donner une équation du plan (IJK) .

2) En déduire que $\overrightarrow{OS}$ est normal à ce plan.

Quel résultat (classique) retrouve-t-on ?



8 « $G = O$ »

Soit $A(-14, 6, 2)$; $B(-2, 14, -6)$; $C(10, -10, -6)$ et $D(6, -10, 10)$.

Vérifier que l'origine du repère est à la fois centre de gravité et centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

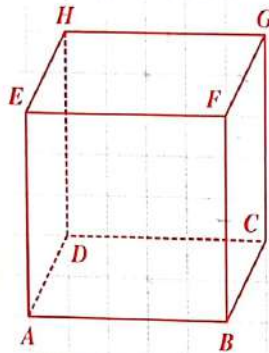
(1) Quand bien même : « Une certaine malhonnêteté créative peut être efficace quand l'occasion s'y prête. » (Ian Stewart, mathématicien contemporain.)

Applications

Produit scalaire dans l'espace

Les exercices 1 à 3 concernent le calcul de produits scalaires à partir d'éléments du cube ci-contre, d'arête a . Un tel cube sera souvent introduit dans les exercices sous l'appellation « cube standard $ABCE FGH$ », signifiant ainsi que :

- $(ABCD)$ et $(EFGH)$ sont des faces opposées ;
- (AE) , (BF) , (CG) et (DH) sont des arêtes orthogonales à ces faces.



- 1) Calculer, dans chaque cas, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction de l'arête a :
 a) $\vec{u} = \vec{EB}$, $\vec{v} = \vec{AD}$; b) $\vec{u} = \vec{EA}$, $\vec{v} = \vec{CH}$;
 c) $\vec{u} = \vec{HF}$, $\vec{v} = \vec{DG}$; d) $\vec{u} = \vec{EG}$, $\vec{v} = \vec{CH}$.
- 2) On désigne par I , J et K les milieux de $[BF]$, $[FG]$ et $[GH]$.
 1) Calculer les produits scalaires $\vec{EJ} \cdot \vec{FI}$, $\vec{EK} \cdot \vec{FI}$, $\vec{AI} \cdot \vec{BG}$ et $\vec{AJ} \cdot \vec{BC}$.
 2) Évaluer $\cos \widehat{IEK}$ après avoir calculé EI , EK et $\vec{EI} \cdot \vec{EK}$.
- 3) Les centres des faces $ABCD$ et $EFGH$ étant respectivement notés O et O' , calculer dans chaque cas $\cos(\vec{u}, \vec{v})$:
 a) $\vec{u} = \vec{OB}$, $\vec{v} = \vec{AB}$; b) $\vec{u} = \vec{OO'}$, $\vec{v} = \vec{BG}$;
 c) $\vec{u} = \vec{OE}$, $\vec{v} = \vec{BG}$; d) $\vec{u} = \vec{OH}$, $\vec{v} = \vec{BO'}$.
- 4) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Établir l'équivalence :
 $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

- 5) 1) Montrer que, pour quatre points quelconques A , B , C et D de $\mathbb{E}$, on a :

$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\vec{AC} \cdot \vec{DB}.$$

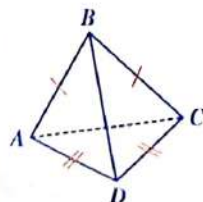
Piste $AB^2 - BC^2 = \vec{AC} \cdot (\vec{AB} + \vec{BC})$ et
 $CD^2 - DA^2 = \vec{AC} \cdot (\vec{CD} + \vec{DA})$.

- 2) Le tétraèdre $ABCD$ est tel que :

- BAC est isocèle en B ;
- DAC est isocèle en D .

Déduire de la question 1) que les arêtes (AC) et (BD) sont orthogonales. Peut-on obtenir ce résultat sans utiliser le produit scalaire ?

Piste Plan médiateur.



Orthogonalité, vecteur normal

- 6) Un tétraèdre $ABCD$ est tel que (AB) est orthogonale au plan (BCD) .
 1) Comparer les produits scalaires $\vec{AC} \cdot \vec{CD}$ et $\vec{BC} \cdot \vec{CD}$.
 2) En déduire que le triangle ACD est rectangle en C si, et seulement si, le triangle BCD est rectangle en C .
- 7) Redémontrer, à l'aide du produit scalaire, le résultat établi dans la séquence 1, exercice 2 (page 206).

Piste Un exemple : $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = (\vec{AO} + \vec{OH}) \cdot \vec{BC} = \dots$

- 8) Le triangle BCD a pour orthocentre H , et A est un point distinct de H appartenant à la perpendiculaire en H au plan (BCD) .
 Montrer que les arêtes opposées du tétraèdre $ABCD$ sont orthogonales.
Note : nous tenons là le prototype du tétraèdre orthocentrique dont l'étude complète est effectuée dans le problème 76.

- 9) 1) On suppose $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux à deux orthogonaux. Montrer que $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$.

- 2) Étudier la propriété réciproque.

Piste Considérer, par exemple, avec le cube standard :
 $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AD}$ et $\vec{w} = \vec{BH}$.

10 Trajectoire de billard

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A , de vecteur normal $\vec{n}$ et B et C deux points en dehors de $\mathcal{P}$ tels que $AB = AC$, et $\vec{AB} + \vec{AC}$ est non nul colinéaire à $\vec{n}$.

Montrer que la droite $\mathcal{D}(A, \vec{n})$ (droite passant par A de vecteur directeur $\vec{n}$) est la bissectrice intérieure issue de A dans le triangle ABC .

Piste Introduire le milieu I de $[BC]$.

L'effet miroir

« Les miroirs feraient bien de réfléchir un peu avant de renvoyer les images. » (Jean Cocteau.)

Imaginons le plan $\mathcal{P}$ comme un miroir. Alors, un rayon lumineux venant de B vers A serait réfléchi selon la demi-droite $[AC)$.

La recherche de trajectoires de lumière (ou de billard) fermées, à l'intérieur d'un solide dont les faces sont des miroirs peut donner bien des maux de tête (voir un exemple dans le cube à l'exercice 60).

Expression analytique du produit scalaire

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

11 Calculer les produits scalaires :

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u}(-1, 0, 3)$ et $\vec{v}(1, 2, -5)$.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ avec $A(-1, 3, 4)$, $B(0, 2, 1)$ et $C(-1, -1, 1)$.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v}(1, -1, 2)$.

12 Montrer que, quels que soient les réels a et b , le vecteur $\vec{u}(x, y, z)$ défini par $x = \cos a \cos b$, $y = \cos a \sin b$ et $z = \sin a$ est un vecteur unitaire.

13 On pose $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. Trouver parmi les vecteurs suivants ceux qui sont à la fois orthogonaux à $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{e}_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j}; \quad \vec{e}_2 = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k};$$

$$\vec{e}_3 = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}; \quad \vec{e}_4 = -\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}.$$

14 Donner la mesure en radian de chacun des angles des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{u}$, $\vec{j}$ et $\vec{u}$, $\vec{k}$ et $\vec{u}$, sachant que $\vec{u} = 2\vec{i} + \sqrt{2}(\vec{j} + \vec{k})$.

15 On considère les points $A(3, 4, -2)$, $B(1, 6, 0)$ et $C(-2, 2, 1)$.

Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.

16 Soit les points $A(1, 1, 3)$, $B(\sqrt{2} + 1, 0, 2)$ et $C(\sqrt{2} + 1, 2, 2)$.

1) Calculer AB , AC et évaluer l'angle $\widehat{CAB}$.
En déduire la nature du triangle ABC .

2) Contrôler le dernier résultat obtenu en calculant BC .

17 Calculer les coordonnées de l'isobarycentre G des points $A(10, 5, -10)$, $B(-1, -15, 17)$ et $C(2, 20, 21)$.
Vérifier que A , B et C déterminent un plan $\mathcal{P}$ et que G est le projeté orthogonal de $M(-10, 5, 5)$ sur le plan $\mathcal{P}$.

18 Chassé-croisé

1) Soit les vecteurs $\vec{e}_1\left(\frac{52}{57}, \frac{17}{57}, \frac{16}{57}\right)$; $\vec{e}_2\left(\frac{-23}{57}, \frac{44}{57}, \frac{28}{57}\right)$ et

$$\vec{e}_3\left(\frac{4}{57}, \frac{32}{57}, \frac{-47}{57}\right).$$

Montrer que le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est orthonormal.

2) Vérifier que les coordonnées de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ dans ce repère sont :

$$\vec{i}\left(\frac{52}{57}, \frac{-23}{57}, \frac{4}{57}\right), \vec{j}\left(\frac{17}{57}, \frac{44}{57}, \frac{32}{57}\right) \text{ et } \vec{k}\left(\frac{16}{57}, \frac{28}{57}, \frac{-47}{57}\right).$$

Équation cartésienne d'un plan

Dans les exercices 19 à 21, donner une équation cartésienne du plan passant par A et admettant le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal.

19 a) $A(3, -1, 2)$, $\vec{n}(1, 0, -4)$;

b) $A(1, -1, 0)$, $\vec{n}(1, 1, -2)$.

20 a) $A(5, -1, -6)$, $\vec{n}(1, 1, 1)$;

b) $A(-2, 1, 2)$, $\vec{n} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

21 a) $A(\sqrt{2}, 3, 0)$, $\vec{n} = -3\vec{k}$;

b) $A(3, 4, 5)$, $\vec{n}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$.

Dans les exercices 22 et 23, vérifier que chaque équation proposée est l'équation cartésienne d'un plan et trouver un point de ce plan et un vecteur normal.

22 a) $3x - 5y + z - 1 = 0$; b) $x = y$.

23 a) $3z - x - 3 = 0$; b) $y = 1 - 2x$.

Dans les exercices 24 et 25, donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ (déterminer d'abord un point de ce plan et un vecteur normal).

24 $\mathcal{P}$ est le plan médiateur du segment $[AB]$ avec $A(-1, 3, 1)$ et $B(0, 5, -3)$.

25 $\mathcal{P}$ est le plan orthogonal à la droite (AC) passant par l'orthocentre du triangle ABC avec $A(3, 0, 4)$, $B(-1, 1, 1)$ et $C(2, 0, 0)$.

26 On donne les points $A(3, -1, 4)$ et $B(0, 5, 1)$.
Montrer que (AB) est orthogonale au plan d'équation :
 $x - 2y + z - 1 = 0$.

Avis d'expert

« Si donc il n'y avait pas de corps solide dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie. »

Henri Poincaré (1854-1912)
Génie universel aux idées originales, le mathématicien français Henri Poincaré est unanimement considéré comme le dernier des scientifiques capable de comprendre la totalité des Mathématiques de son temps.



Henri Poincaré.

Distance d'un point à un plan

Dans les exercices 27 et 28, calculer la distance du point M au plan $\mathcal{P}$ (utiliser le théorème 5 ou son corollaire, page 215).

27 a) $M(1, -1, 1)$ et $\mathcal{P}$ est le plan d'équation :
 $2x + y - z - 3 = 0$.

b) $M(2, 1, 0)$ et $\mathcal{P}$ est le plan passant par l'origine du repère, de vecteur normal $\vec{n}(1, -1, -1)$.

28 a) $M = O$ (origine) et $\mathcal{P}$ est le plan médiateur de $[AB]$, avec $A(-4, 2, 1)$ et $B(5, 3, -7)$.

b) $M(-4, 4, -9)$ et $\mathcal{P}$ est le plan d'équation :

$$\frac{x}{2} + y + \frac{z}{3} - 6 = 0.$$

29 La plus petite

Soit H le projeté orthogonal d'un point M sur le plan $\mathcal{P}$.

Montrer que, pour tout point N de $\mathcal{P}$:

$$MH \leq MN \text{ avec égalité si, et seulement si, } N = H.$$

Note : voici donc la preuve annoncée (voir la remarque suivant le théorème 5) de la propriété : « MH est la plus petite distance de M aux points de $\mathcal{P}$ ».

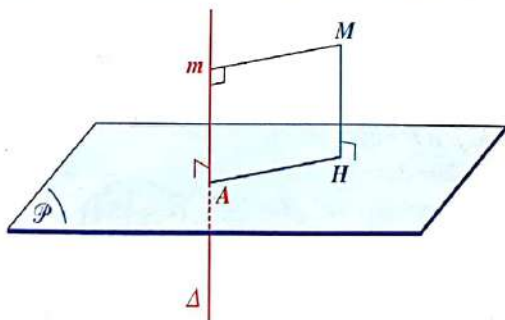
30 Distance d'un point à une droite

1) Montrer que, étant donné une droite Δ et un point M de projeté orthogonal m sur Δ , la distance Mm est la plus petite des distances de M aux points de Δ (Mm est logiquement appelée « distance de M à Δ » et notée $d(M, \Delta)$).

2) Prouver que la distance d de M à la droite Δ , droite passant par A et dirigée par $\vec{n}$ vérifie la relation :

$$d^2 = AM^2 - \frac{(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n})^2}{\|\vec{n}\|^2}.$$

Piste Examiner la figure suivante avec le théorème 5 en tête.



31 Le vecteur $\vec{n}$ ayant pour coordonnées $(1, 1, 1)$, on désigne par D la droite $\mathcal{D}(O, \vec{n})$ et par $\mathcal{P}$ le plan orthogonal à D passant par O .

En utilisant le résultat de l'exercice 30, montrer que les points $A(1, 0, 2 + \sqrt{3})$ et $B(4 + 3\sqrt{2}, 1, 1)$ sont à égale distance de la droite D et du plan $\mathcal{P}$.

Brèves de cours

32 Sur le cube standard, on définit le point K par $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

Montrer que $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$ et retrouver la propriété de la « grande diagonale du cube » (voir séquence 1, exercice 1, page 206).

33 Les faces ABC et ABD d'un tétraèdre $ABCD$ sont des triangles isométriques.

Montrer que (AB) et (CD) sont orthogonales.

34 Le tétraèdre $ABCD$ est tel que $AB = CD$.

Montrer que l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ est le plan médiateur de $[IJ]$ où I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[CD]$.

Piste Théorème de la médiane.

Les exercices 35 à 38 proposent l'étude, par la géométrie analytique, du tétraèdre $ABCD$ avec $A(-5, 6, -1)$, $B(-2, 8, -3)$, $C(1, 2, -3)$ et $D(0, 2, 1)$ (les milieux des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$ sont respectivement désignés par I, J, K, L, M et N).

35 Montrer que les arêtes opposées sont de même longueur.

36 Calculer les coordonnées du centre de gravité G du tétraèdre et prouver que G est le centre de la sphère qui lui est circonscrite.

37 Montrer que les bimédianes (IJ) , (KL) et (MN) sont deux à deux orthogonales et que chacune d'elles est orthogonale aux arêtes qu'elle joint ((IJ) orthogonale à (AB) et (CD) , etc.).

38 Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

En déduire que les angles du triangle ABC sont aigus.

À suivre

Les faces du tétraèdre que nous venons d'étudier sont des triangles isométriques (pourquoi ?) ; d'où le nom donné à ce type de tétraèdre : **tétraèdre équilatéral**. Nous conduirons une étude plus complète (exercices 64 à 67) de tels tétraèdres : on y verra que les résultats précédemment obtenus ne doivent rien au hasard.

39 Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ les plans d'équations $\mathcal{P} : x + y - z + 1 = 0$ et $\mathcal{Q} : x - y + z - 1 = 0$.

Montrer que, quels que soient les réels s et t , les points de coordonnées $(0, s, t)$ ou $(s, t - 1, t)$ sont à égale distance des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Exercices

Géométrie euclidienne (plan)

40 Relation et droite d'Euler

Soit un triangle ABC , G le centre de gravité du triangle, O le centre du cercle qui lui est circonscrit et H le point défini par :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad (1).$$

1) Montrer que $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC .

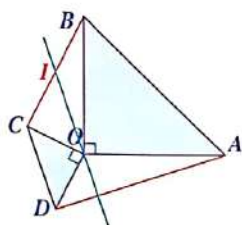
2) Déduire de (1) que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ (relation d'Euler), puis que O , G et H sont alignés.

41 Un classique... incontournable

Les triangles OAB et OCD sont rectangles isocèles en O de sens direct.

Soit I le milieu de $[BC]$.

Montrer que (OI) est orthogonale à (AD) .



42 Trois points d'un demi-cercle

Les points A , B et C appartiennent à un même demi-cercle de centre O et de rayon 1.

Montrer que :

$$\|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\| \geq 1.$$

Piste On peut supposer que A , B et C sont dans cet ordre sur le demi-cercle parcouru dans le sens trigonométrique. Ayant alors posé $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = x$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = y$, avec donc $0 \leq x \leq y \leq \pi$, développer $\|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\|^2$ et quelques calculs trigonométriques.

Exercices 43 à 45 : trois petites (?) colles.

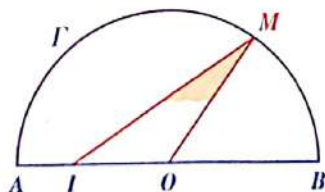
43 $ABCD$ est un rectangle, M un point avec $MA = 63$, $MB = 56$ et $MC = 16$. Que vaut MD ?

44 Un triangle a pour dimensions 33, 28 et 16.

L'un des angles du triangle est-il le double d'un autre ?

45 Γ est un demi-cercle de diamètre $[AB]$, de centre O et I un point de $[AB]$ distinct de O .

Trouver M sur Γ tel que l'angle $\widehat{OMI}$ soit le plus grand possible.



Dans les exercices 46 à 48, le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

46 Point fixe

Un rectangle $OPMQ$ varie dans le plan sous les conditions suivantes :

- P est un point de l'axe (Ox) , d'abscisse strictement positive ;
- Q est un point de l'axe (Oy) , d'ordonnée strictement positive ;
- le périmètre du rectangle $OPMQ$ est constant égal à $2p$ ($p > 0$).

Montrer que la perpendiculaire Δ menée du sommet M à la diagonale (PQ) passe par un point fixe.

Piste Prouver que Δ a pour équation :

$$m(2p - x - y) + p(y - p) = 0,$$

où m désigne l'abscisse de M .

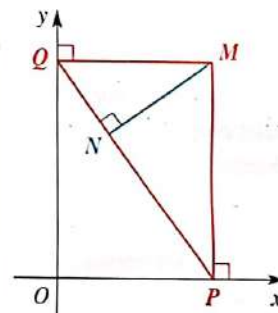
47 Le point M distinct de l'origine a pour coordonnées polaires (r, θ) .

On désigne par P et Q les projetés orthogonaux de M sur les axes (Ox) et (Oy) et par N celui de M sur la droite (PQ) .

Montrer que les coordonnées cartésiennes de N sont :

$$(r \cos^3 \theta, r \sin^3 \theta).$$

Piste $\overrightarrow{PN}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{PM}$ sur $\overrightarrow{PQ}$.



48 Un problème de concours

Étant donné deux réels a et b strictement positifs, on considère les points $A(a, 0)$, $B(a, -a)$, $C(0, b)$ et $D(-b, b)$.

1) Donner une équation cartésienne de (BC) et (AD) et montrer que ces droites sont sécantes.
(On ne cherchera pas à calculer les coordonnées de leur point d'intersection).

2) Écrire une équation cartésienne de la hauteur Δ issue de O dans le triangle OAC .

3) Montrer que les droites (BC) , (AD) et Δ sont concourantes.

Piste « Si $bx + (a+b)y = ab$ et $(a+b)x + ay = ab$, alors $-ax + by = 0$. » Voilà un résultat facile à obtenir : encore faut-il l'interpréter...

Problèmes d'orthogonalité

49 La relation d'Euler (une autre)

Soit A, B, C et D quatre points de l'espace. Montrer que :

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Piste Passer systématiquement par le point A (par exemple) :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$$

$$\text{et } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}.$$

Application 1 (géométrie plane) : retrouver que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Application 2 (géométrie dans l'espace) : montrer que dans un tétraèdre, si deux couples d'arêtes opposées sont formés de droites orthogonales, il en est de même du troisième couple.

Note : le problème 76 permettra de saisir la portée d'un tel résultat.

50 Les deux orthocentres

Le tétraèdre $OABC$ est tel que la droite (OA) est orthogonale au plan (OBC) . On désigne par H_1 l'orthocentre du triangle OBC et par H le projeté orthogonal de H_1 sur le plan (ABC) .

1) Évaluer chacun des produits scalaires $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB}$.

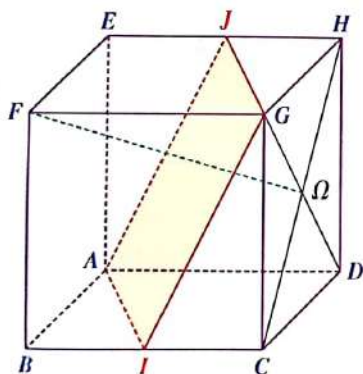
En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC .

2) On suppose de plus que (OB) est orthogonale à (OC) . Quelle propriété (classique) du tétraèdre trirectangle le résultat précédent permet-il de retrouver ?

Piste (Pour lecteur non attentionné) La propriété évoquée a été mise en évidence à l'exercice 2 de la séquence 1, page 206.

51 Dans le cube

Étant donné un cube $ABCDEFGH$, on note I le milieu de $[BC]$, J celui de $[EH]$ et Ω le centre de la face $CDHG$.



1) Montrer que A, I, G et J sont coplanaires.

2) Établir que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CH}$ et en déduire $\overrightarrow{F\Omega} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$.

3) On rappelle que la diagonale (AG) est orthogonale au plan (CFH) . À l'aide de cette propriété et du résultat précédent, montrer que la droite $(F\Omega)$ est orthogonale au plan $(AIGJ)$.

52 Projection de l'angle droit

Soit ABC un triangle rectangle en A et A', B', C' les projetés orthogonaux de A, B, C sur un plan $\mathcal{P}$ dont on désigne par $\vec{n}$ un vecteur normal unitaire ($\|\vec{n}\| = 1$).

1) Établir que :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n})\vec{n} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n})\vec{n}.$$

2) Montrer que :

$$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = -(\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n})(\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n})$$

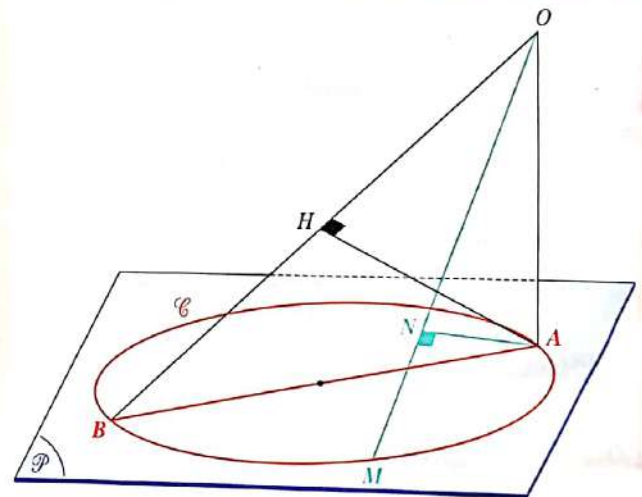
et en déduire que $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ sont orthogonaux si, et seulement si, (AB) ou (AC) est parallèle à $\mathcal{P}$.

53 D'un cercle à l'autre

Sont donnés :

- dans un plan $\mathcal{P}$, un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$;
- un point O distinct de A qui se projette orthogonalement en N sur le plan $\mathcal{P}$;
- H le projeté orthogonal de A sur (OB) .

On considère enfin un point M de $\mathcal{C}$ distinct de A et de B et l'on note N le projeté orthogonal de A sur (OM) .



1) Montrer que $\overrightarrow{MB}$ est un vecteur normal au plan (OAM) .

2) a) Montrer que $\overrightarrow{NA}$ est un vecteur normal au plan (OBM) .

b) En déduire que :

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{HN} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NH} = 0.$$

c) Prouver alors que N appartient au cercle Γ de diamètre $[AH]$ contenu dans le plan perpendiculaire à (OB) passant par H .

3) Montrer, de fait, que le lieu du point N lorsque M décrit tout le cercle $\mathcal{C}$ est le cercle Γ .

Attention : lorsque $M = B$, on a de façon évidente $\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ et, dans ce cas, la question 1) perd tout son sens. De même, lorsque $M = A$, on a, de façon non moins évidente, $N = A$ d'où $\overrightarrow{NA} = \vec{0}$ et, cette fois, c'est la question 2) a) qui ne signifie plus grand chose. Il n'empêche : dans les deux cas, le point N est parfaitement défini. Il faut donc s'assurer qu'il appartient au lieu indiqué (ce genre d'anicroches est fréquent dans les problèmes de lieu).

Calcul de grandeurs

54 Vues sous le même angle

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier et O le centre de la sphère circonscrite.

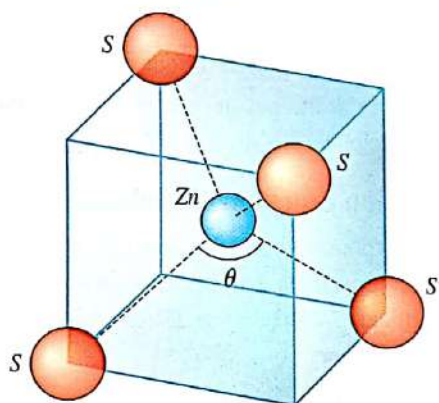
1) Montrer que les triangles OAB , OAC , OAD , OBC et OCB sont isométriques, isocèles en O , de même angle au sommet noté θ .

2) Exprimer $\|\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}\|^2$ en fonction de $R = OA$ et de θ .

3) En déduire $\cos \theta$, puis une valeur approchée de θ à $0,01^\circ$ près.

4) Prouver, à partir des résultats précédents, que les diagonales des faces d'un cube sont « vues » depuis le centre du cube sous l'angle θ .

Illustration : la molécule de minerais de sphalérite est constituée de quatre atomes de soufre, sommets d'un tétraèdre régulier et d'un atome de zinc au centre de ce tétraèdre. (L'angle θ est appelé angle de liaison.)



55 Du cube à l'hexagone régulier

Le cube standard $ABCD EFGH$ est d'arête a et l'on désigne par K le milieu de $[BG]$ et par L celui de $[AC]$.

1) Montrer que :

$$HK = EL = a\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ et que } \vec{HK} \cdot \vec{EL} = \frac{3}{4}a^2.$$

En déduire que, si I et J sont les centres respectifs des triangles équilatéraux BDE et CFH , l'angle des vecteurs $\vec{JH}$ et $\vec{IE}$ est égal à $\frac{\pi}{3}$.

2) Soit A' , C' , F' , H' et G' les projetés orthogonaux de A , C , F , H et G sur le plan (BDE) .

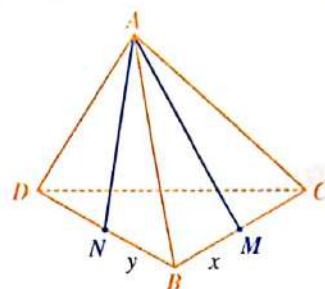
Montrer que $A' = G' = I$ et que $DH'E'F'BC'$ est un hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre I dont on précisera le rayon.

Piste Voir séquence 1, exercice 1 (page 206). (À suivre à l'exercice 70.)

56 Calculs d'angles sur le tétraèdre

D'après *Les Olympiades internationales de Mathématiques*, D. Gerll et G. Girard, Éd. Hachette.

On considère un tétraèdre régulier $ABCD$. On se propose de montrer que, quels que soient le point M du segment $[BC]$ et le point N du segment $[BD]$, la mesure de $\widehat{MAN}$ est inférieure ou



égale à $\frac{\pi}{3}$.

On pose $x = BM$ et $y = BN$, et on désigne par a l'arête du tétraèdre.

- 1) Montrer que : $MA^2 = a^2 + x^2 - ax$,
 $NA^2 = a^2 + y^2 - ay$ et $\vec{AM} \cdot \vec{AN} = \frac{a^2 + (a-x)(a-y)}{2}$.
- 2) En déduire les inégalités $AM \leq a$, $AN \leq a$ et $\vec{AM} \cdot \vec{AN} \geq \frac{a^2}{2}$, et conclure.

57 La sphère et le tétraèdre

D'après Rallye mathématique d'Alsace.

1) Exprimer le rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre régulier en fonction de son arête.

2) On considère un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ et l'on désigne par a la plus petite longueur de ses arêtes.

Soit S une sphère de centre O et de rayon R contenant A_1, A_2, A_3 et A_4 .

a) Montrer que, pour deux indices i et j distincts appartenant à $\{1, 2, 3, 4\}$, $2\vec{OA}_i \cdot \vec{OA}_j \leq 2R^2 - a^2$, avec égalité si, et seulement si :

$$OA_i = OA_j = R \text{ et } A_iA_j = a.$$

b) En déduire que :

$\|\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3 + \vec{OA}_4\|^2 \leq 16R^2 - 6a^2$, avec égalité si, et seulement si :

- $OA_i = R$, pour $i = 1, 2, 3, 4$;
- $A_iA_j = a$, pour tous les indices distincts i et j appartenant à $\{1, 2, 3, 4\}$.

3) Démontrer alors les propriétés suivantes.

Étant donné un tétraèdre dont la plus petite arête a pour longueur a :

- toute sphère contenant le tétraèdre a un rayon supérieur ou égal à $\frac{\sqrt{6}}{4}a$;

- il existe une sphère de rayon $\frac{\sqrt{6}}{4}a$ contenant le tétraèdre si, et seulement si, le tétraèdre est régulier. Dans ce cas, une telle sphère est unique : la sphère circonscrite au tétraèdre.

Géométrie analytique

58 Un cube

Soit $A(17, 0, -10)$; $B(17, 15, 10)$; $C(-3, 3, 19)$;
 $D(-3, -12, -1)$; $E(32, -16, 2)$; $F(32, -1, -22)$;
 $G(12, -13, 31)$ et $H(12, -28, 11)$.

Montrer que $ABCDEFGH$ est un cube.

59 Reprise

Reprendre l'exercice 51 (page 226) par la géométrie analytique après avoir choisi un repère orthonormal convenable.

60 Billard dans un cube

1) Montrer que les points :

$$A_1(2, 1, 3),$$

$$A_2(3, 2, 2),$$

$$A_3(2, 3, 1),$$

$$A_4(1, 2, 0),$$

$$A_5(0, 1, 1)$$

et $A_6(1, 0, 2)$ appartiennent aux différentes faces du cube ci-contre.

2) Prouver que :

$$A_1A_6 = A_2A_1 = A_3A_2 = A_4A_3 = A_5A_4 = A_6A_5$$

et que chacun des vecteurs :

$$\overrightarrow{A_1A_6} + \overrightarrow{A_1A_2}, \quad \overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_2A_3}, \quad \overrightarrow{A_3A_2} + \overrightarrow{A_3A_4},$$

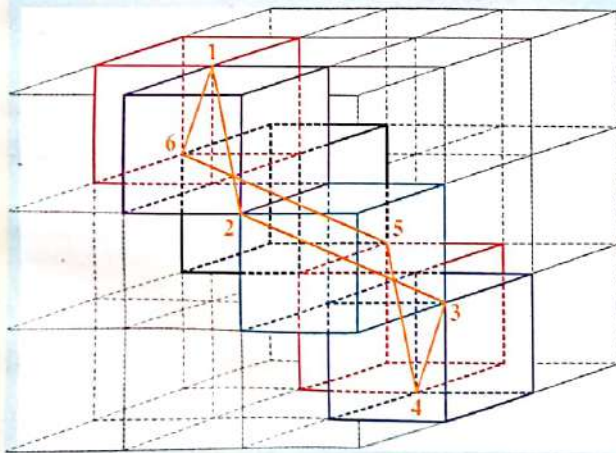
$$\overrightarrow{A_4A_3} + \overrightarrow{A_4A_5}, \quad \overrightarrow{A_5A_4} + \overrightarrow{A_5A_6}, \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A_6A_5} + \overrightarrow{A_6A_1}$$

est non nul et colinéaire au vecteur normal à la face du cube contenant respectivement $A_1, A_2, \dots, A_6$.

3) À l'aide du résultat obtenu à l'exercice 10 (page 220), prouver que la trajectoire $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_6 \rightarrow A_1$ est une trajectoire de billard (ou de lumière) dans le cube.

Prise de vue

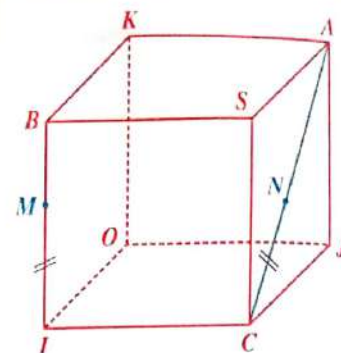
On visualise cette trajectoire de billard découverte par le mathématicien Hugo Steinhaus (bien connue des chimistes sous le nom d'« hexagone en forme de chaise ») en découpant le cube initial en 27 petits cubes : chaque segment de la trajectoire est une grande diagonale d'un petit cube.



61 Report de longueurs

Le cube $OICJKBSA$ est construit sur les sommets du repère.

À tout point M du segment $[IB]$, on associe le point N du segment $[CA]$ tel que $CN = IM$.



1) Justifier que les coordonnées de M sont de la

forme $(1, 0, m)$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $0 \leq m \leq 1$.

2) Vérifier que les coordonnées de N sont :

$$\left(1 - m\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, m\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

3) a) Montrer qu'il existe un vecteur fixe $\vec{u}$ tel que $\overrightarrow{MN} = m\vec{u} + \vec{j}$ et en déduire que (MN) reste parallèle à un plan fixe.

b) Soit P le point de $[CA]$ tel que $CP = 1$ et H le projeté orthogonal de M sur (CS) .

Retrouver géométriquement le résultat précédent en prouvant que les plans (MHN) et (BSP) sont parallèles.

4) Montrer que la droite passant par les milieux de $[IC]$ et $[MN]$ est orthogonale aux droites (IC) et (MN) .

62 Une section du tétraèdre trirectangle

On considère les points $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ et $C(0, 0, c)$ où a, b et c sont trois réels strictement positifs donnés.

Le réel m vérifiant $0 < m < a$, on désigne par :

- M le point de coordonnées $(m, 0, 0)$;

- $\mathcal{P}_m$ le plan $(M, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC})$;

- N, P et Q les points d'intersection de $\mathcal{P}_m$ avec les droites (OB) , (BC) et (AC) .

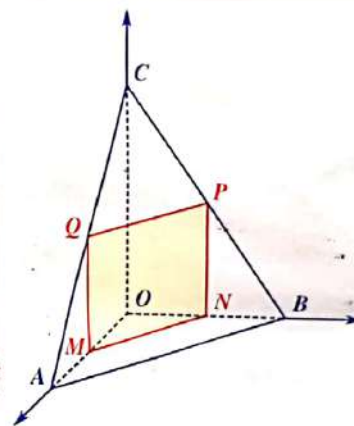
1) Calculer les coordonnées des points N, P et Q en fonction des données.

2) Montrer que $MNPQ$ est un rectangle.

3) Existe-t-il une valeur de m ($0 < m < a$) pour laquelle $MNPQ$ est un carré ? Si oui, la calculer.

4) Exprimer l'aire du rectangle $MNPQ$ en fonction des données et déterminer la valeur de m ($0 < m < a$) pour laquelle cette aire est maximale.

5) Prouver que les valeurs de m respectivement obtenues aux questions 3) et 4) sont égales si, et seulement si, $OC = AB$.



Mais comment faisaient-ils ?

Élémentaire ?

Les propriétés des solides usuels de l'espace sont connues depuis fort longtemps, en tout état de cause bien avant la mise en place des notions de barycentre, de produit scalaire (fin XIX^e siècle).

Nous proposons d'examiner sur un exemple, le **tétraèdre équi-facial**, comment pouvaient être conduites les études de solides par des méthodes dites élémentaires de nos jours.

La mise en évidence des cinq polyèdres réguliers (solides de Platon), tétraèdre, cube, octaèdre, icosaèdre et dodécaèdre, est une preuve éclatante de l'efficacité des méthodes « élémentaires » (dès lors qu'elles se trouvent en bonnes mains – ce qui est le cas avec les géomètres grecs).



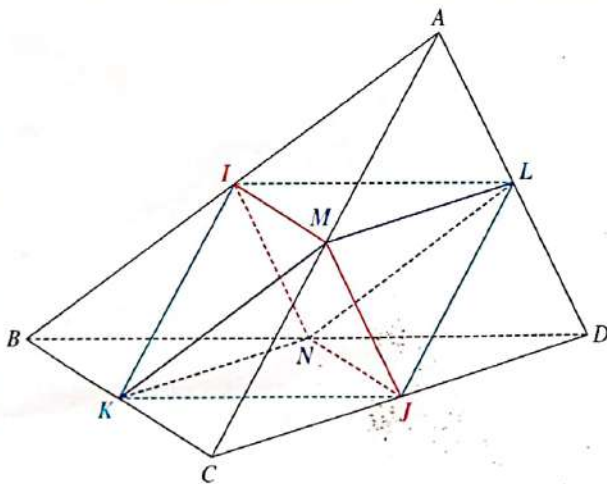
Platon (427-348 av. J.-C.)

63 L'hexaèdre des milieux d'un tétraèdre

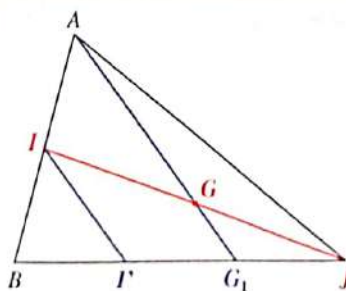
Les points I, J, K, L, M et N sont les milieux des arêtes du tétraèdre $ABCD$.

1) Montrer que $IMJN$, $JLIK$ et $KNLM$ sont des parallélogrammes de même centre, noté G dans toute la suite.

Interdit : pas de barycentre : il faut jouer le jeu...



2) Montrer que (AG) passe par le centre de gravité du triangle BCD (on pourra s'aider de la figure ci-contre où (II') est parallèle à (AG)).



Tétraèdre équifacial : un tétraèdre équifacial est un tétraèdre dont les arêtes opposées sont de même longueur (exercices 64 à 67).

64 Exemple prototype

Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit.

Montrer que le tétraèdre $ACFH$ est équifacial.

65 Caractérisations diverses

Établir que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) Le tétraèdre est équifacial.
- (2) Les bimédianes sont deux à deux orthogonales.
- (3) Chaque bimédiane est orthogonale aux deux arêtes qu'elle joint.
- (4) Le centre de gravité du tétraèdre (le point G de l'exercice 63) est aussi le centre de la sphère qui lui est circonscrite.

Vous avez dit « bizarre » ?

Effectivement, c'est l'une des bizarreries de l'espace. Dans le plan, un triangle est équilatéral si, et seulement si, « centre de gravité = centre du cercle circonscrit ». On aurait pu s'attendre à ce que, dans l'espace, la relation analogue « $G = O$ » caractérise les tétraèdres réguliers : il n'en est rien.

66 Patron d'un tétraèdre équifacial

Soit $ABCD$ un tétraèdre équifacial.

1) Les notations étant celles de l'exercice 63, on pose $GI = a$, $GK = b$ et $GM = c$.

Exprimer AB^2 , AC^2 et BC^2 en fonction de a, b et c .

En déduire que les angles du triangle ABC – et par suite ceux des autres faces qui lui sont isométriques – sont aigus.

Piste La relation d'Al-Kashi.

2) Le point A est rabattu dans le plan (BCD) en A_1 autour de (CD) , en A_2 autour de (BD) et en (A_3) autour de (BC) . Montrer que le triangle $A_1A_2A_3$ est acutangle (tous ses angles sont aigus) avec pour milieux des côtés les points B, C et D .

67 Le retour des vecteurs

1) Soit $ABCD$ un tétraèdre, I et J les milieux de $[AB]$ et $[CD]$.

a) Montrer que $2\vec{IJ} = \vec{AC} + \vec{BD}$.

b) Soit A', B', C' et D' les points définis par :

$$\vec{AA'} = \vec{BB'} = \vec{IJ} \text{ et } \vec{CC'} = \vec{DD'} = \vec{JI}.$$

Montrer que $AC'BD'A'CB'D'$ est un parallélépipède (appelé parallélépipède circonscrit au tétraèdre $ABCD$).

2) Caractériser par leur parallélépipède circonscrit :

- un tétraèdre équifacial (et justifier alors le titre de l'exercice 64) ;
- un tétraèdre régulier.

Un thème d'étude

68 Les angles dièdres

A) La définition

Soit deux demi-plans sécants selon une droite Δ .

Montrer que l'angle (mesuré dans $[0, \pi]$) des deux demi-droites obtenues comme intersection de ces demi-plans avec un plan $\mathcal{P}$ orthogonal à Δ est indépendant du plan $\mathcal{P}$ choisi.

Piste Translation.

Note : par définition, cet angle est l'angle dièdre des deux demi-plans.

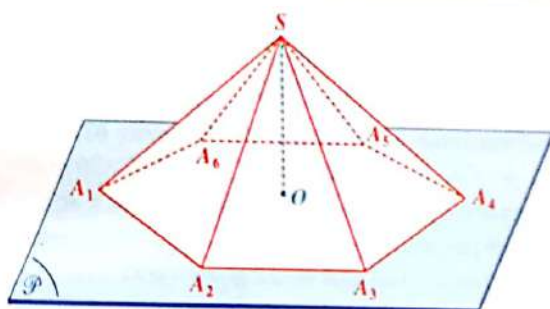
B) Premiers exemples

Calculer l'angle dièdre :

- de deux faces d'un cube ayant une arête commune ;
- de deux faces d'un tétraèdre régulier.

C) Pyramide régulière

La base de la pyramide régulière est un polygone convexe régulier à n sommets ($n \geq 3$) $A_1 A_2 \dots A_n$ inscrit dans un cercle de centre O et le sommet S de la pyramide se projette orthogonalement en O sur le plan de base (illustration avec $n = 6$).



1) Montrer que les triangles $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_{n-1}A_n$ et SA_nA_1 sont isocèles en S et de même angle au sommet noté θ dans la suite.

2) Montrer que A_1 et A_3 ont le même projeté orthogonal H sur (SA_2) .

Piste On pourra établir d'abord que $\overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{SA_2} = 0$.

3) On désigne par a le côté du polygone $A_1A_2 \dots A_n$ ($a = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_nA_1$) et par φ l'angle $\widehat{A_1HA_3}$.

a) Montrer que :

$$HA_1 = HA_3 = a \cdot \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad A_1A_3 = 2a \cos \frac{\pi}{n}.$$

b) En déduire que $\cos \varphi = 1 - 2 \cdot \frac{\cos^2 \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}$.

4) Applications

a) Retrouver les résultats obtenus en B).

b) Calculer $\cos \varphi$ et une valeur approchée de φ lorsque :

- $n = 4$ et $SA_i = a$, pour tout i (dièdre de l'octaèdre) ;
- $n = 5$ et $SA_i = a$, pour tout i (dièdre de l'icosaèdre) ;
- $n = 3$ et $\theta = \frac{3\pi}{5}$ (dièdre du dodécaèdre).

Comparer des méthodes

69 La perpendiculaire commune

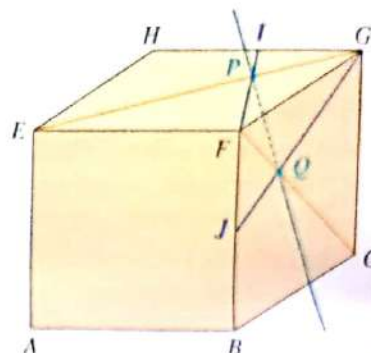
On considère un cube

(voir figure ci-contre)

et l'on désigne par :

- I et J les milieux des arêtes $[GH]$ et $[BF]$;

- P et Q les points d'intersection d'une part de (EG) et (FI) , et, d'autre part, de (FC) et (GJ) .



Il s'agit d'établir, par différentes méthodes, que la droite (PQ) est orthogonale aux droites (EG) et (FC) .

1) Question préliminaire

Montrer que P et Q sont les centres de gravité respectifs des triangles FGH et FBG .

2) Par la géométrie analytique

Introduire un repère orthonormal adapté à la résolution du problème et exprimer en fonction de l'arête a du cube les coordonnées de $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{FC}$, P , Q et $\overrightarrow{PQ}$.

Évaluer $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{FC}$ et conclure.

3) Avec le produit scalaire

a) Établir la relation $3\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GE}$.

b) En déduire que $3\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{EG} = 3\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{FC} = 0$ et conclure.

4) Avec les configurations et les transformations

On rappelle que la « grande diagonale » du cube (BH) est orthogonale au plan (ACF) (voir séquence 1, exercice 1, page 206).

a) Soit K le milieu de $[FG]$.

Quelles sont les images de H et de B par l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{3}$?

b) Conclure à l'aide de la propriété qui vient d'être rappelée.

5) Le bon choix

Évaluer PQ en fonction de l'arête a du cube.

Piste Choisir à bon escient parmi les résultats précédents.

Rubrique à Bac

En panne ?

Visiblement, les « faiseurs de sujets » de Mathématiques de la série S ne semblent guère attirés par les thèmes de géométrie euclidienne dans l'espace. En panne d'inspiration peut-être ?

En tout état de cause, il reste peu à se mettre sous la dent (pour colmater la barque qui fait un peu eau ici, consulter la rubrique *Problèmes*).

Thème 1 : Quelques variations autour de grands classiques

72 Autour de la grande diagonale du cube

D'après BAC S, Polynésie, septembre 2000 (extrait).

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

- 1) a) Exprimer plus simplement le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.
b) En déduire que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$ puis que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE) .

2) Montrer que le centre de gravité I du triangle BDE est le point d'intersection de (AG) et du plan (BDE) et préciser la position du point I sur $[AG]$.

3) (Plus difficile) Calculer la distance de H au plan (BDE) .

🔑 Le théorème 5, page 215.

73 Un tétraèdre trirectangle particulier

D'après BAC S, Amérique du Nord, juin 2000 (extrait).

L'espace est muni d'un repère orthonormal (O, I, J, K) et a est un réel positif.

On considère :

- le cube $OICJKBSA$ construit sur les sommets du repère (voir exercice 7, page 220) ;
- les points M, N et P définis par $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{ON} = a\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{CP} = a\overrightarrow{CS}$.

1) Démontrer que (OP) est orthogonale au plan (KMN) .

2) On note H le point d'intersection de (OP) et du plan (KMN) et λ le réel tel que $\overrightarrow{OH} = \lambda\overrightarrow{OP}$.

Démontrer que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OP}$ et en déduire que :

$$\lambda = \frac{a}{2+a^2} \quad \text{et} \quad HP = \frac{a^2 - a + 2}{\sqrt{a^2 + 2}}.$$

3) (Question ajoutée) Retrouver directement cette dernière égalité à partir du résultat obtenu à la question 1).

Thème 2 : Autour du barycentre

74 Ensemble

D'après BAC S, France métropolitaine, 2000 (extrait).

On considère un carré $ABCD$ de côté 1, de centre I et on appelle P le barycentre au système $\{(A, 2); (C, -1)\}$.

1) Montrer que P est le symétrique de C par rapport à A .

2) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\|8\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| \quad (1)$$

🔑 1) Géométrie plane élémentaire : se débrouiller seul.

2) Introduire les barycentres (impératif) s'ils existent et réduire, au sens :

• $8\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{NC} = 4\overrightarrow{MP}$, car :

$$P = \text{bar}\{(A, 2), (C, -1)\} = \text{bar}\{(A, 8), (C, -4)\} ;$$

• $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MI}$, car le centre d'un carré est l'isobarycentre des sommets.

Alors (1) équivaut à $\|4\overrightarrow{MP}\| = \|4\overrightarrow{MI}\|$ soit $\|\overrightarrow{MP}\| = \|\overrightarrow{MI}\|$ et là, c'est facile.

75 Tout seul

D'après BAC S, France métropolitaine, juin 2001 (extrait).

Soit trois points de l'espace A, B et C non alignés, G_1 le barycentre de $\{(A, 2), (B, 1), (C, -1)\}$ et G_2 le barycentre de $\{(A, 2), (B, -1), (C, 1)\}$.

1) Représenter les points A, B et C , le milieu I de $[BC]$ et construire les points G_1 et G_2 .

2) Déterminer l'ensemble $\mathbb{E}$ des points M de l'espace tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

3) (Question ajoutée) L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(0, 0, 2)$, $(-1, 2, 1)$ et $(-1, 2, 5)$.

a) Calculer les coordonnées de G_1 et G_2 .

b) Donner une équation de l'ensemble $\mathbb{E}$.

Note : les exercices 74 et 75 sont les seuls que nous proposerons sur ce thème. Deux raisons au moins :

- deux exercices paraissent suffisants pour donner une idée précise des sujets et solutions tellement ils sont stéréotypés ;
- du point de vue mathématique, l'intérêt de ces exercices reste à découvrir. Parions qu'ils vont disparaître définitivement – enfin – de l'épreuve de Mathématiques du BAC S.

Problèmes

76 Point de Monge et tétraèdre orthocentrique

A) Point de Monge d'un tétraèdre

On appelle point de Monge d'un tétraèdre $ABCD$, le point M_0 défini par $\overrightarrow{OM_0} = 2\overrightarrow{OG}$, où :

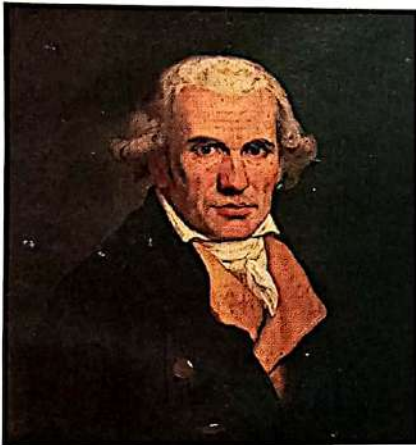
- O est le centre de la sphère circonscrite du tétraèdre ;
- G est le centre de gravité du tétraèdre.

1) Montrer que :

$$\overrightarrow{M_0A} + \overrightarrow{M_0B} + \overrightarrow{M_0C} + \overrightarrow{M_0D} = 2\overrightarrow{M_0O}.$$

En déduire la valeur du produit scalaire $2\overrightarrow{M_0I} \cdot \overrightarrow{CD}$, où I est le milieu de $[AB]$.

2) Conclure du résultat précédent que M_0 appartient à chacun des six plans passant par le milieu d'une arête du tétraèdre et orthogonal à l'arête opposée.



Gaspard Monge (1746-1818) est le père de la Géométrie descriptive.

Tout l'intéresse : les Mathématiques, les Sciences expérimentales, l'enseignement (il est l'un des fondateurs des Écoles normale et polytechnique), la politique (ministre de la Marine de 1789 à 1793 ; campagne d'Égypte avec Napoléon), etc.

Il meurt le 28 juillet 1818, sans qu'aucun hommage officiel ne lui soit rendu...

B) Tétraèdre orthocentrique

Chacune des droites, passant par un sommet du tétraèdre et orthogonale au plan de la face opposée, est appelée hauteur du tétraèdre. Et parce que les hauteurs d'un tétraèdre ne sont pas toujours concourantes (question 1)), s'introduit la notion de tétraèdre orthocentrique : tétraèdre où justement les hauteurs sont concourantes (le point de concours est alors judicieusement baptisé orthocentre du tétraèdre).

La suite du problème propose diverses caractérisations des tétraèdres orthocentriques.

1) Choisir quatre sommets d'un cube de façon à construire un tétraèdre non orthocentrique.

2) Caractérisation par les arêtes

a) Soit $ABCD$ un tétraèdre orthocentrique d'orthocentre H . Montrer que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

Piste $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \cdot \overrightarrow{CD}.$

b) Réciproquement, soit $ABCD$ un tétraèdre dont les arêtes opposées sont orthogonales :

$$(AB) \perp (CD), (AC) \perp (BD) \text{ et } (AD) \perp (BC).$$

Montrer que le point de Monge M_0 du tétraèdre appartient à chacune des hauteurs et en déduire que le tétraèdre $ABCD$ est orthocentrique d'orthocentre H tel que $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$ (relation d'Euler dans un tétraèdre orthocentrique).

Remarque : d'après l'exercice 49 (page 224), la caractérisation des tétraèdres orthocentriques que nous venons d'obtenir peut se formuler ainsi : « Un tétraèdre est orthocentrique si, et seulement si, il existe deux couples d'arêtes opposées formées de droites orthogonales ».

3) Caractérisation métrique

a) Montrer que les arêtes (AB) et (CD) d'un tétraèdre $ABCD$ sont orthogonales si, et seulement si :

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

Piste Théorème de la médiane (par exemple).

b) En déduire qu'un tétraèdre est orthocentrique si, et seulement si, la somme des carrés des longueurs de deux arêtes opposées est constante.

4) Caractérisation par les projetés orthogonaux

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) le tétraèdre est orthocentrique ;
- (2) le projeté orthogonal de chaque sommet sur la face opposée est l'orthocentre du triangle correspondant ;
- (3) le projeté orthogonal d'au moins un sommet sur la face qui lui est opposée est l'orthocentre du triangle correspondant.

5) Caractérisation par les bimédianes

Montrer qu'un tétraèdre est orthocentrique si, et seulement si, les bimédianes sont de longueur égale.

Piste Voir exercice 63.

6) Orthocentrique et équifacial

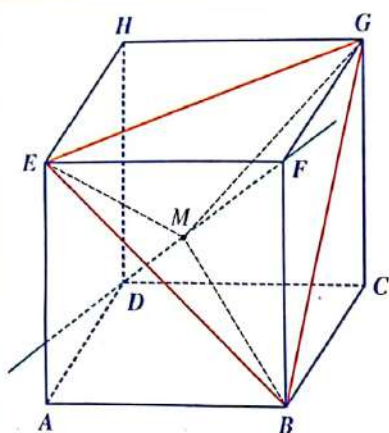
Caractériser les tétraèdres qui sont à la fois orthocentrique et équifacial.

Que dire alors des points O , G et H ?

Piste Se rapporter aux exercices 64 à 67 sur le tétraèdre équifacial.

77 Sur la grande diagonale du cube

Le cube $ABCDEFGH$ est d'arête 1 et à chaque réel x on associe le point M de la diagonale (DF) défini par $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF}$.



1) Montrer que les triangles MEB , MBG et MGE sont des triangles isocèles en M et isométriques.

2) Exprimer MB^2 en fonction de x et étudier les variations de la fonction ainsi obtenue.

Retrouver alors que la « grande diagonale » du cube (FD) perce orthogonalement le plan (BEG) au centre du triangle équilatéral BEG .

3) On désigne par θ la mesure commune dans $]0, \pi[$ des angles $\widehat{EMB}$, $\widehat{BMG}$ et $\widehat{GME}$.

a) Montrer que $\cos \theta = 1 - \frac{1}{3x^2 - 4x + 2}$.

b) Étudier les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{3x^2 - 4x + 2}$$

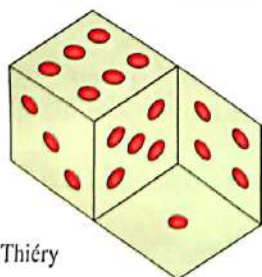
et résoudre l'équation $f(x) = 0$.

c) En déduire qu'il existe deux points M_1 et M_2 de (DF) tels que les repères (M_1, B, G, E) et (M_2, B, G, E) soient orthonormaux.

d) En quels points du segment $[DF]$ l'angle θ est-il minimum ? maximum ?

4) Comment retrouver, à l'aide de l'étude précédente, le résultat obtenu à l'exercice 54, à savoir : « chaque arête d'un tétraèdre régulier est vue depuis le centre du cube sous l'angle θ_0 tel que

$$\cos \theta_0 = -\frac{1}{3} » ?$$



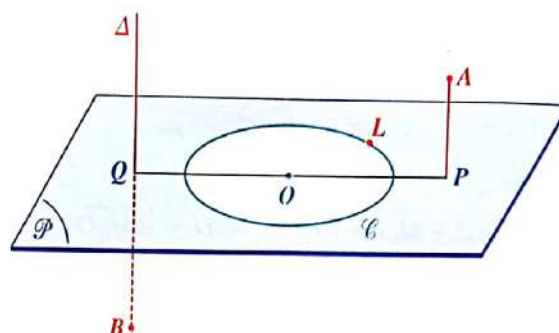
La figure de Thiéry

78 Point fixe

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O , de rayon R contenu dans un plan $\mathcal{P}$, et A un point de $\mathcal{E}$ n'appartenant pas à $\mathcal{P}$.

On propose d'établir par deux méthodes différentes que lorsque le point L varie sur le cercle $\mathcal{C}$, le plan orthogonal en L à la droite (AL) passe par un point fixe.

A) Avec le produit scalaire



Soit P le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$, Q le symétrique de P par rapport à O et enfin B un point quelconque (pour l'instant) de la perpendiculaire Δ au plan $\mathcal{P}$ passant par Q .

1) Justifier l'existence d'un réel α tel que $\overrightarrow{QB} = \alpha \overrightarrow{PA}$.

2) Soit L un point quelconque du cercle $\mathcal{C}$.

a) Établir que $\overrightarrow{LP} \cdot \overrightarrow{LQ} = R^2 - OP^2$.

Piste Un théorème de géométrie plane.

b) En déduire que $\overrightarrow{LA} \cdot \overrightarrow{LB} = R^2 - OP^2 + \alpha d^2$, où d est la distance de A au plan $\mathcal{P}$.

3) Montrer qu'il existe un point B de Δ , entièrement déterminé par les données fixes du problème, tel que, pour tout point L de $\mathcal{C}$, le plan orthogonal en L à (AL) passe par B .

Piste Il faut choisir une valeur ad-hoc pour α .

B) Avec la géométrie analytique

1) Montrer qu'il est possible de choisir un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de façon à ce que $\mathcal{C}$ ait pour équation $x^2 + y^2 = R^2$ et $z = 0$.

On note alors (a, b, c) les coordonnées de A (avec donc $c \neq 0$).

2) Soit θ un réel et L le point de $\mathcal{C}$: $L(R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$. Prouver qu'un point $M(x, y, z)$ appartient au plan passant par L et orthogonal à (AL) si, et seulement si, (x, y, z) vérifie la relation (1) :

$$(a + x)R \cos \theta + (b + y)R \sin \theta - (ax + by + cz + R^2) = 0.$$

3) Conclure quant à la question posée en donnant par ses coordonnées le point fixe cherché.

Piste Si l'on pouvait trouver un point $M(x, y, z)$ qui vérifierait la relation (1), quel que soit le réel θ ...



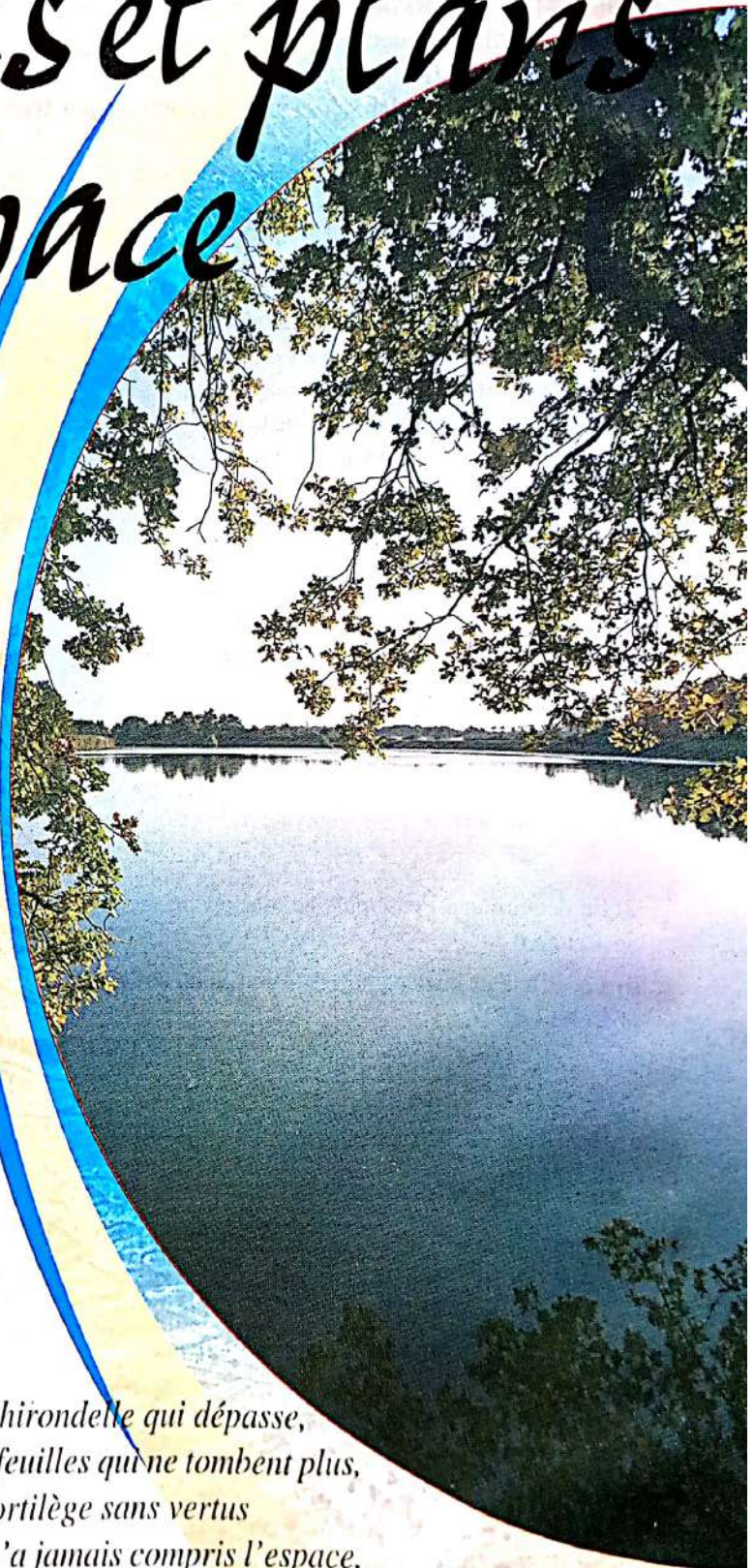
Droites et plans de l'espace

OBJECTIFS

- Poursuivre l'étude des objets de l'espace (solides, droites, plans, etc.) en approfondissant :
 - les notions de Géométrie analytique ;
 - les propriétés du barycentre.
- Développer des méthodes de résolution algébrique de problèmes issus de la Géométrie de l'espace mais aussi de l'Analyse, des Sciences économiques et sociales, etc.

*Le soir, un rien, une hirondelle qui dépasse,
Très peu de vent, les feuilles qui ne tombent plus,
Un beau détail, un sortilège sans vertus
Pour un regard qui n'a jamais compris l'espace.*

Paul Eluard



Avant-première

1. OBJECTIFS

- Donner une idée précise de la manière dont peut être défini mathématiquement l'intérieur d'un triangle est le premier objectif de cette rubrique.
- Le second est de préparer l'attaque d'une question pour l'instant sans réponse : « Comment obtenir l'équation d'un plan défini par un repère ou par trois points non alignés ? ».

2. AVEC LES BARYCENTRES

- Soit A et B deux points distincts.

Le tableau ci-contre rappelle comment peut être caractérisé un point de la droite (AB) , du segment $[AB]$ (ou encore $]AB[$ lorsque sont exclus A et B) ; son contenu rend facile la caractérisation à l'aide du barycentre d'une droite et d'un segment (exercice 1).

$M \in (AB)$	$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}, t \text{ réel}$
$M \in [AB]$	$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}, 0 \leq t \leq 1$
$M \in]AB[$	$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}, 0 < t < 1$

- Quant aux résultats de l'exercice 2, nous les exploiterons... après.

Séquence 1

À l'intérieur ?

① Droite et segment

Soit A et B deux points distincts.

- 1) Soit t un réel et $\alpha = 1 - t$.

Montrer que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ équivaut à :

$$M = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, 1 - \alpha)\}.$$

- 2) En déduire que l'ensemble de tous les barycentres de A et de B :

- à coefficients quelconques de somme non nulle, est la droite (AB) ;
- à coefficients positifs de somme non nulle, est le segment $[AB]$;
- à coefficients strictement positifs est le segment (ouvert) $]AB[$.

② Intérieur d'un triangle ABC

- 1) Soit M le barycentre de (A, α) , (B, β) et (C, γ) où $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$.

Montrer que (AM) rencontre $]BC[$ en un point P et que M appartient à $]AP[$.

Piste Montrer que $P = \text{bar}\{(B, \beta), (C, \gamma)\}$.

- 2) Soit P un point de $]BC[$.

- a) Justifier qu'il existe x réel ($0 < x < 1$) tel que :

$$P = \text{bar}\{(B, x), (C, 1 - x)\}.$$

- b) En déduire que tout point M de $]AP[$ est barycentre de A , B et C avec des coefficients strictement positifs.

Piste Écrire M comme barycentre de A et P .

À la vue de la figure 1, on se convaincra que l'on peut caractériser les points M intérieurs au triangle ABC (cotés non compris) ainsi :

- (1) la droite (AM) rencontre le segment ouvert $]BC[$ en P ;

- (2) M est un point du segment ouvert $]AP[$.

Ainsi, seul M_0 vérifie les conditions (1) et (2).

Dès lors, le résultat obtenu à l'exercice 2 s'énonce ainsi : « Un point est intérieur à un triangle si, et seulement si, il est barycentre des sommets avec des coefficients strictement positifs. »

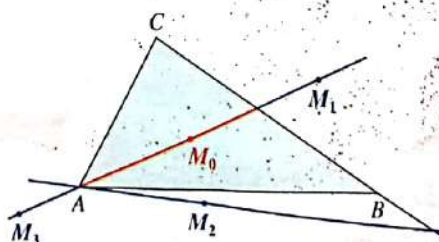


Fig. 1

3. ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UN PLAN

Si nous savons (normalement) écrire l'équation du plan passant par A et orthogonal à $\vec{n} (\vec{n} \neq \vec{0})$, nous sommes un peu plus en difficulté pour obtenir celle d'un plan défini par :

- un repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$, avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires ;
- trois points A, B et C , avec A, B et C non alignés.

Le procédé « naturel » qui permet de se tirer d'affaire (avec lequel la séquence 2 permet de se familiariser) est le suivant :

1) Déterminer un vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, en notant que :

- dans le cas du plan (ABC) , on posera $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ (par exemple) ;
- « on a le choix » : on ne s'acharnera pas à trouver « le » vecteur $\vec{n}$, puisque tout vecteur $\lambda \vec{n}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ convient également.

2) Le plan étant alors le plan passant par A et orthogonal à $\vec{n}$, écrire son équation selon la manière habituelle.

Séquence 2

Équation normale

① Dans chacun des cas ci-après, montrer que :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ;
- $\vec{n}(a, b, c)$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si, et seulement si, a, b et c vérifient le système $\mathcal{R}$ de relations indiquées, et en déduire l'équation du plan $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

a) $\vec{u}(1, -1, 4)$; $\vec{v}(2, -1, 3)$; $A(1, 0, 1)$.

$\mathcal{R} : c = a$ et $b = 5a$.

b) $\vec{u}(0, -3, 2)$; $\vec{v}(1, 0, 6)$; $A(3, -1, 0)$.

$\mathcal{R} : \text{il existe } k \text{ réel tel que :}$

$$a = -18k, b = 2k \text{ et } c = 3k.$$

② Vérifier que A, B et C déterminent un plan et en donner une équation.

a) $A(-1, 0, 1)$; $B(1, -1, 0)$; $C(-3, 0, 2)$.

b) $A(5, -1, 4)$; $B(-4, -5, 1)$; $C(0, 0, 0)$.

Piste Choisir $\vec{u}$ et $\vec{v}$ un peu astucieusement.

③ Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(-1, 2, 3)$ et dirigée par $\vec{u}(1, -1, 2)$.

Montrer que l'origine O du repère n'appartient pas à $\mathcal{D}$ et donner une équation du plan $(O, \mathcal{D})$.

Piste $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{u}$ étant tout trouvé.

Notations et conventions utiles pour la suite :

- (a, b, c) désigne le triplet des réels a, b et c , dans l'ordre ;
- l'égalité $(a, b, c) = (a', b', c')$ signifie $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$;
- en particulier $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ (triplet nul) équivaut à $a = b = c = 0$ et, par suite, écrire $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ revient à exprimer que, parmi les réels a, b et c , un au moins est non nul ;

- des expressions telles que « soit $\vec{n}(a, b, c)$ un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ » ou « soit $ax + by + cz + d = 0$ une équation de $\mathcal{P}$ » n'ont de sens que si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$;

- deux triplets non nuls (a, b, c) et (a', b', c') sont dits *proportionnels* s'il existe un réel k non nul tel que $a = ka'$, $b = kb'$ et $c = kc'$.

Exemple (à retenir) :

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{u}'(a', b', c')$ sont **colinéaires** si, et seulement si, (a, b, c) et (a', b', c') sont proportionnels. Ainsi :

- $\vec{u}(5, 1, -3)$ et $\vec{u}'(-2, 0, 3)$ ne sont pas colinéaires (à vue d'œil, on a : $b' = 0$ et $b = 1$; une relation telle que $b = kb'$ est impossible) ;
- $\vec{u}(-1, 0, 3)$ et $\vec{u}'(2, 0, -6)$ sont colinéaires ($2 = -2 \times (-1)$; $0 = -2 \times 0$; $-6 = -2 \times 3$).

1. Barycentre

1.1 RAPPEL DES NOTIONS DE BASE

THÉORÈME 1

Soit $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$ un système de points pondérés (pour $i = 1, 2, \dots, n$, A_i est un point de $\mathcal{E}$ et α_i un réel), de *masse totale* $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ non nulle.

- Il existe un unique point G tel que :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

Ce point G est appelé barycentre du système $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$.

- Quel que soit le point M de $\mathcal{E}$, on a :

$$\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MG}.$$

On écrit indifféremment (pas toujours : voir page 246) :

$$G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\} \text{ ou } G = \text{bar}\left(\frac{A_1}{\alpha_1} \mid \frac{A_2}{\alpha_2} \mid \dots \mid \frac{A_n}{\alpha_n}\right).$$

Lorsque tous les coefficients sont égaux à un même réel non nul, on dit que G est l'**isobarycentre** des points $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Exemples :

- l'isobarycentre de deux points A et B est le milieu de $[AB]$;
- l'isobarycentre des sommets A, B et C d'un triangle est le **centre de gravité** du triangle (point de concours des médianes).

1.2 DROITES ET PLANS

Proposition 1

Soit A et B deux points distincts. La droite (AB) est l'ensemble de tous les barycentres de A et B .

Soit A, B et C trois points non alignés. Le plan (ABC) est l'ensemble de tous les barycentres de A, B et C .

... Démonstration

- **Droite (AB)** : voir séquence 1, exercice 1, page 234.

- **Plan (ABC)** : le plan $\mathcal{P} = \text{plan}(ABC)$ est le plan de repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Soit $M \in \mathcal{P}$. Il existe x et y réels tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ que l'on peut écrire :

$$(1-x-y)\overrightarrow{AA} + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Comme $1-x-y+x+y = 1$ (non nul) :

$$M = \text{bar}\{(A, 1-x-y), (B, x), (C, y)\}.$$

Réciproquement, si $M = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$, on a :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC},$$

ce qui prouve que M appartient à $\mathcal{P}$.

1.3 LE THÉORÈME D'ASSOCIATIVITÉ (RAPPEL)

THÉORÈME 2

La procédure suivante ne modifie pas le barycentre d'un système de points pondérés :

- **regrouper** certains d'entre eux dont la somme des coefficients est *non nulle* ;
- les **remplacer par leur barycentre** affecté de cette *somme* ;
- **garder les autres points** tels quels.



EXEMPLE 1

Montrer que les médianes et bimédianes d'un tétraèdre concourent au centre de gravité du tétraèdre (voir page 216 pour le vocabulaire).

Soit $G = \text{bar}\{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$.

Regroupons $(B, 1)$, $(C, 1)$ et $(D, 1)$ et introduisons $G_1 = \text{bar}\{(B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$:

G_1 est le centre de gravité du triangle BCD .

D'après le théorème d'associativité, G est le barycentre de $(A, 1)$ et $(G_1, 3)$ et donc G appartient à la médiane (AG_1) .

Soit I et J les milieux de $[AB]$ et $[CD]$.

On a donc :

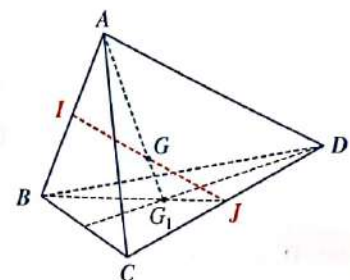
$$I = \text{bar}\{(A, 1), (B, 1)\} \text{ et } J = \text{bar}\{(C, 1), (D, 1)\}.$$

En appliquant deux fois (mais « d'un seul coup ») le théorème d'associativité, on obtient :

$$G = \text{bar}\{(I, 2), (J, 2)\}.$$

Le point G est donc le milieu de la bimédiane $[IJ]$.

Il est clair que raisonnements et résultats tiennent encore pour les autres médianes et bimédianes.



Voir exercices 1 à 3

1.4 SEGMENT ET TRIANGLE

Proposition 2

Le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres de A et B à coefficients positifs. Étant donné un triangle ABC , l'intérieur du triangle ABC est l'ensemble des barycentres de A , B et C à coefficients strictement positifs.

La démonstration a été effectuée à la séquence 1, exercice 2.

Remarques :

- Le barycentre restant inchangé après multiplication des coefficients par un scalaire non nul, on peut remplacer, dans l'énoncé précédent, « coefficients positifs » par « coefficients de même signe ».
- Le schéma ci-contre (Fig. 2) permet de distinguer parmi les barycentres à coefficients positifs de (A, α) , (B, β) et (C, γ) :
 - les points strictement intérieurs au triangle ;
 - les points sur le bord de la « plaque triangulaire ».

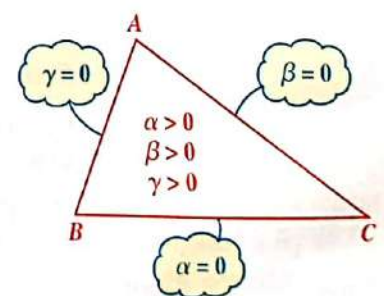


Fig. 2

2. Plans de l'espace

2.1 PLAN DÉFINI PAR UN POINT ET UN VECTEUR NORMAL

Rappel

- Le plan $\mathcal{P}$ passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et orthogonal à $\vec{n}(a, b, c)$ ($\vec{n} \neq \vec{0}$) est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
Une équation de $\mathcal{P}$ est donc $ax + by + cz + d = 0$, avec $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.
- Réciproquement, si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, l'équation $ax + by + cz + d = 0$ (avec d réel) est celle d'un plan orthogonal à $\vec{n}(a, b, c)$.

Plan $(A, \vec{u}, \vec{v})$

L'exemple ci-après illustre à nouveau comment obtenir une équation d'un plan de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ (voir séquence 2, page 235).



EXEMPLE 2

Vérifier que $\vec{n}(1, 2, -1)$ et $\vec{v}(3, -1, 2)$ ne sont pas colinéaires et donner une équation de $\mathcal{P} = \text{plan}(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $A(-1, 0, -1)$.

Cherchons un vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ normal à $\mathcal{P}$, c'est-à-dire à la fois orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, étant entendu qu'à vue d'œil, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

On obtient $a + 2b - c = 0$ (E_1) et $3a - b + 2c = 0$ (E_2).

Le calcul de $2 \times (E_1) + (E_2)$ donne $5a + 3b = 0$, et celui de $(E_1) + 2 \times (E_2)$ fournit $7a + 3c = 0$.

On peut donc choisir $a = -3$, $b = 5$ et $c = 7$, d'où le vecteur $\vec{n}(-3, 5, 7)$.

L'équation de $\mathcal{P}$ s'en déduit par $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$, soit :

$$-3(x + 1) + 5y + 7(z + 1) = 0 \text{ ou } -3x + 5y + 7z + 4 = 0.$$

Voir exercices 5 à 8

2.2 PLANS PARALLÈLES

Proposition 3

Les plans $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ et $\mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont **parallèles** si, et seulement si, (a, b, c) et (a', b', c') sont **proportionnels**.

... Démonstration

Elle ne fait que réexprimer la propriété :

$\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}' \Leftrightarrow$ les vecteurs normaux $\vec{n}(a, b, c)$ et $\vec{n}'(a', b', c')$ sont colinéaires.

Remarques :

• Tout plan parallèle au plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, étant orthogonal à $\vec{n}(a, b, c)$, admet pour équation $ax + by + cz + d' = 0$ (d' réel).

• Un plan $\mathcal{P}$ admet plusieurs équations cartésiennes. Si $ax + by + cz + d = 0$ est l'une d'elles, toutes les autres sont de la forme :

$$(\lambda a)x + (\lambda b)y + (\lambda c)z + \lambda d = 0,$$

où λ est un réel non nul.

2.3 PLANS PERPENDICULAIRES

DÉFINITION 1

Deux plans sont **perpendiculaires** lorsqu'un vecteur normal à l'un est orthogonal à un vecteur normal à l'autre.

Remarques :

- Lorsque le plan $\mathcal{P}_1$ orthogonal à $\vec{n}_1$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}_2$ orthogonal à $\vec{n}_2$ (Fig. 3) :
 - $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants ($\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne peuvent être colinéaires) ;
 - pour tout point A de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$, la droite $\mathcal{D}(A, \vec{n}_1)$ est contenue dans $\mathcal{P}_2$, et de même $\mathcal{D}(A, \vec{n}_2)$ est contenue dans $\mathcal{P}_1$.
- L'exercice 11 (page 252) prend en charge quelques caractérisations **géométriques** des plans perpendiculaires.
- La condition analytique de l'orthogonalité de deux vecteurs livre immédiatement la proposition suivante.

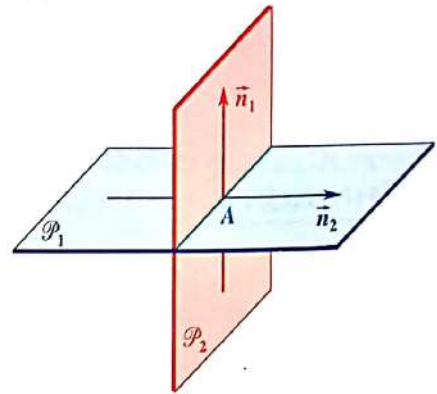


Fig. 3

Proposition 4

Les plans $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ et $\mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont **perpendiculaires** si, et seulement si, $aa' + bb' + cc' = 0$.



EXEMPLE 3

Quelle est l'équation générale d'un plan parallèle au plan (xOy) ? perpendiculaire au plan (xOy) ?

Un plan parallèle au plan (xOy) admet le vecteur $\vec{k}(0, 0, 1)$ comme vecteur normal. En désignant par $A(x_0, y_0, z_0)$ l'un de ses points, son équation est donc $z - z_0 = 0$.

Un plan perpendiculaire au plan (xOy) est orthogonal au vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ tel que $\vec{n} \cdot \vec{k} = 0$, à savoir $c = 0$.

Son équation est donc de la forme :

$$ax + by + d = 0.$$

Pour mémoire, en dehors du terme constant :

- $\mathcal{P} \parallel (xOy)$: équation sans termes « en x ni en y » ;
- $\mathcal{P} \perp (xOy)$: équation sans terme « en z ».

Voir exercices 9, 10 et 14

2.4 INTERSECTION DE DEUX PLANS

Les plans $\mathcal{P}_1$ orthogonal à $\vec{n}_1$ et $\mathcal{P}_2$ orthogonal à $\vec{n}_2$ sont **sécants** si, et seulement si, $\vec{n}_1$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}_2$. Dans ces conditions (et c'est pour l'instant la seule chose à retenir sur ce sujet) : **leur droite d'intersection est dirigée par un vecteur orthogonal à $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$** (c'est clair : pour deux points A et B de cette droite $\vec{AB} \cdot \vec{n}_1 = 0$, en considérant que $A \in \mathcal{P}_1$ et $B \in \mathcal{P}_1$ et $\vec{AB} \cdot \vec{n}_2 = 0$ pour des raisons analogues).

3. Droites de l'espace

3.1 REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE

Introduction

Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathcal{E}$, $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur non nul et $D = \mathcal{D}(A, \vec{u})$ la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

La droite D peut être décrite comme l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, t étant un réel quelconque. Ainsi, $M(x, y, z)$ appartient à D signifie : il existe t réel tel que :

$$x = x_0 + t\alpha, y = y_0 + t\beta \text{ et } z = z_0 + t\gamma.$$

Ceci nous conduit à la définition suivante.

DÉFINITION 2

Le système de relations
$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

est appelé **représentation paramétrique** de la droite passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et dirigée par $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ ($\vec{u}$ étant supposé non nul).

Remarques :

- La notation « $(t \in \mathbb{R})$ » a vocation de rappeler que, lorsque t décrit $\mathbb{R}$, le point associé $M(x, y, z)$ décrit la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ (elle n'est pas obligatoire).
- La lettre « t » est le **paramètre de la représentation**, mais d'autres lettres ($m, s, \dots$) peuvent être utilisées.



EXEMPLE 4

Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) avec $A(-1, 2, -3)$ et $B(1, -1, 1)$.

La droite (AB) n'est autre que la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ où $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Avec $\overrightarrow{AB}(2, -3, 4)$, nous obtenons la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = -3 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (1).$$

Notons que (AB) est aussi la droite $\mathcal{D}(B, \vec{u})$, d'où la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (2).$$

Cet exemple rend visible qu'une même droite peut avoir plusieurs représentations paramétriques ! Expliquons un peu. Posons $s = t - 1$ dans le système de relations (1) et observons que, lorsque t décrit $\mathbb{R}$, il en est de même de s .

Dans ces conditions, $x = 1 + 2s$, $y = -1 - 3s$ et $z = 1 + 4s$.

Et l'on retrouve le système (2), à la lettre près utilisée comme paramètre.

Voir exercices 17 à 20

3.2 SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS LINÉAIRES

Exemple introductif

Considérons les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations :

$\mathcal{P}_1 : 2x + y - z - 2 = 0$ et $\mathcal{P}_2 : x + 3y + 7z - 11 = 0$,
de vecteur normal respectif $\vec{n}_1(2, 1, -1)$ et $\vec{n}_2(1, 3, 7)$.

Comme $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont manifestement pas colinéaires, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite désignée par D .

L'équivalence qui en résulte :

$$M(x, y, z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y + 7z - 11 = 0 \end{cases} \quad (S)$$

conduit à dire que D est définie par le système (S) des deux équations linéaires. De manière plus générale :

DÉFINITION 3

Lorsque (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels, l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$ tels que :

$$(S) \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

est une droite que l'on dit « définie par le système (S) des deux équations linéaires ».

Remarque : cette définition présente le défaut majeur de ne livrer aucun renseignement de nature géométrique sur la droite D ainsi définie.

Notre exigence première sera donc d'obtenir **une représentation paramétrique de D** (riche de tels renseignements), d'autant qu'elle permettra de revenir sur une question soulevée au paragraphe 2.4.

Voici un premier exemple.

→ EXEMPLE 5

Donner une représentation paramétrique de la droite D définie par le système

$$\begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y + 7z - 11 = 0 \end{cases} \quad (\text{voir exemple introductif}).$$

• Il existe une manière assez simple de procéder, qui mérite d'être exprimée d'entrée :

utiliser l'une des coordonnées comme paramètre.

• Multiplions la seconde équation par 2 et effectuons la différence avec la première. Nous obtenons :

$$-5y - 15z + 20 = 0, \text{ soit } y = -3z + 4.$$

Réportons dans la première équation ; il vient :

$$2x + (-3z + 4) - z - 2 = 0, \text{ soit } x = 2z - 1.$$

Une représentation paramétrique de D est donc :

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 4 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Voir exercices 26 à 28

3.3 INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

Le problème posé

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et D la droite passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et dirigée par $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$.

En premier lieu, il est clair que D et $\mathcal{P}$ sont sécantes si, et seulement si, $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{n}(a, b, c)$ qui est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ ne sont pas orthogonaux, c'est-à-dire si, et seulement si, $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$.

Il s'agit, sous une telle hypothèse, d'obtenir les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de D .

Étudions un exemple.



EXEMPLE 6

Déterminer le point d'intersection du plan $\mathcal{P}: x + 2y - z + 2 = 0$ et de la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ avec $A(2, 1, -4)$ et $\vec{u}(2, -2, 4)$.

Noter qu'avec $\vec{n}(1, 2, -1)$ normal à $\mathcal{P}$, $\vec{u} \cdot \vec{n} = -5 \neq 0$.

Soit $M(x, y, z)$ le point de D défini par :

$$(1) \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = -4 + 4t \end{cases} \quad (t \text{ réel}) : \text{représentation paramétrique de } D.$$

Le point $M(x, y, z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si, $x + 2y - z + 2 = 0$, c'est-à-dire :

$$(2 + 3t) + 2(1 - 2t) - (-4 + 4t) + 2 = 0.$$

Soit, $-5t + 10 = 0$, d'où $t = 2$.

En reportant dans (1) la valeur de t ainsi obtenue, on détermine les coordonnées du point d'intersection de D et $\mathcal{P}$: $(8, -3, 4)$.

Voir exercices 29 à 36

Le cas général

Le point $M(x, y, z)$ de D défini par (1) $\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}$ (t réel) appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si, $ax + by + cz + d = 0$, soit :

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0.$$

Comme $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$, cette équation du premier degré d'inconnue t admet une unique solution t_0 (dont le calcul ici n'est d'aucun intérêt).

Les coordonnées du point d'intersection de D et de $\mathcal{P}$ sont alors obtenues en remplaçant dans (1), t par t_0 :

$$(x_0 + t_0\alpha, y_0 + t_0\beta, z_0 + t_0\gamma).$$

Commentaires

① L'étude du cas général montre :

- d'une part, comment intervient dans les calculs la condition $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$;
- d'autre part, que la méthode utilisée est gagnante à tous les coups.

② Il n'est nullement saugrenu de s'interroger :

« Et si la droite D était définie par un système de deux équations linéaires ? ».

Réponse tout de suite.

4. Intersection de trois plans

4.1 LE POINT DE VUE GÉOMÉTRIQUE

Étant donné trois plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ de vecteurs normaux $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$; il s'agit de préciser **géométriquement** l'intersection $\mathbb{E}$ de ces trois plans : $\mathbb{E} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$. Nous distinguerons deux cas (qui s'excluent mutuellement).

Deux vecteurs normaux colinéaires

Supposons – pour fixer les idées – que $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires.

Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont alors parallèles. D'où :

- soit $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$ et, *a fortiori*, l'intersection des trois plans est vide : $\mathbb{E} = \emptyset$;
- soit $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$, et nous voilà renvoyés à l'intersection de deux plans (voir le paragraphe 3.2, page 241). Nous aurons donc :
 - $\mathbb{E} = \emptyset$ si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ sont disjoints ;
 - $\mathbb{E} = \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3$ si les trois plans sont confondus ;
 - $\mathbb{E}$: droite de l'espace si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants.

Dans tous les autres cas

Les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont deux à deux sécants. En désignant par D la droite d'intersection de deux d'entre eux – $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ par exemple –, il vient :

- si D est sécante avec $\mathcal{P}_3$ en M (Fig. 4), alors $\mathbb{E} = \{M\}$;
- si $D \subset \mathcal{P}_3$ (Fig. 5), alors $\mathbb{E} = D$;
- si D ne rencontre pas $\mathcal{P}_3$, alors $\mathbb{E} = \emptyset$.

$\mathbb{E} = \{M\}$

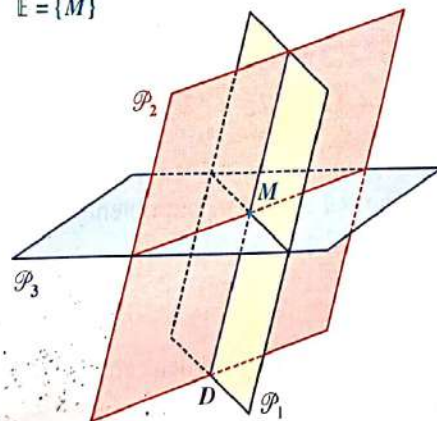


Fig. 4

$\mathbb{E} = D$

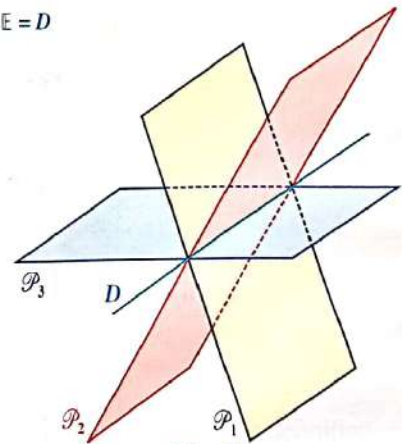


Fig. 5

Remarques :

- L'intersection de trois plans est soit l'ensemble **vide**, soit réduite à un **point**, soit une **droite**, soit un **plan**.
- Lorsque les plans sont définis par leurs **équations**, caractériser analytiquement leur intersection (coordonnées, représentation paramétrique, etc, selon qu'il s'agit d'un point, d'une droite,

etc.) revient à résoudre le système (S)
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \dots \text{équation de } \mathcal{P}_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \dots \text{équation de } \mathcal{P}_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \dots \text{équation de } \mathcal{P}_3 \end{cases}$$

4.2 LE POINT DE VUE ALGÈBRE : SYSTÈMES LINÉAIRES

Méthode des combinaisons

L'étude du système (S) ci-contre « sert de prétexte » à présenter deux méthodes de résolution en attendant la **méthode de Gauss** (voir *Au cœur des problèmes*, page 250).

$$(S) \begin{cases} 2x - y + z = 7 & (1) \\ 2y - z + x = 6 & (2) \\ 2z - x + y = 11 & (3) \end{cases}$$

Éliminons x en **combinant** convenablement les équations :

$$(2) + (3) \text{ conduit à } 3y + z = 17 \quad (4),$$

$$2 \times (2) - (1) \text{ conduit à } 5y - 3z = 5 \quad (5).$$

La **combinaison** $3 \times (4) + (5)$ donne $14y = 56$, d'où l'on déduit $y = 4$, puis $z = 5$ et enfin $x = 3$ (à l'aide de (2) par exemple).

On se doit de **vérifier** que $(3, 4, 5)$ est solution du système (voir page 254, l'encadré intitulé « Méfiance »).

Méthode de substitution

À l'aide de l'équation (1) , exprimons z en fonction de x et de y : $z = -2x + y + 7$, expression que l'on **substitue** à z dans les équations (2) et (3) .

$$\begin{cases} 2y - (-2x + y + 7) + x = 6 \\ 2(-2x + y + 7) - x + y = 11 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 3x + y = 13 \\ -5x + 3y = -3 \end{cases}$$

On résout comme on veut ce dernier système ; il admet une solution unique : $x = 3, y = 4$. On en déduit $z = 5$. On retrouve ainsi la solution $x = 3, y = 4$ et $z = 5$.

Note : la méthode de substitution permet de transformer un système en un système **équivalent** (c'est-à-dire ayant les mêmes solutions) : inutile donc (en principe) de vérifier.



EXEMPLE 7

$$\text{Résoudre le système } \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 2 & (1) \\ 4x - 3y + z = 4 & (2) \\ 2x + 12y - 7z = 2 & (3) \end{cases}$$

De l'équation (2) nous « tirons » $z = 4 - 4x + 3y$.

Reportons dans les équations (1) et (3) pour obtenir :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2(4 - 4x + 3y) = 2 \\ 2x + 12y - 7(4 - 4x + 3y) = 2 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 10x - 3y - 10 = 0 & (1') \\ 30x - 9y - 30 = 0 & (3') \end{cases}$$

Comme à vue d'œil : $(3') = 3 \times (1')$, ces deux équations se résument à une seule :

$$10x - 3y - 10 = 0, \text{ soit } x = \frac{3}{10}y + 1.$$

Il est (calculatoirement) commode de poser $y = 10t$ (t réel), d'où l'on déduit : $x = 3t + 1$ et $z = 18t$.

Ainsi, les solutions du système sont les triplets x, y, z tels que :

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 10t \\ z = 18t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}). \text{ Il s'agit de la représentation paramétrique de la droite}$$

$\mathcal{D}(A, \vec{u})$ avec $A(1, 0, 0)$ et $\vec{u}(3, 10, 18)$.

Voir exercices 37 à 40

5. Demi-espace

5.1 NOTION DE DEMI-ESPACE

Nous tiendrons pour **intuitivement évident** qu'un plan $\mathcal{P}$ sépare l'espace en deux parties disjointes situées de part et d'autre de $\mathcal{P}$ et appelées **demi-espaces limités par $\mathcal{P}$** .

Cela dit, lorsque $\mathcal{P}$ est le plan passant par A et orthogonal à $\vec{n}$, nous admettrons pouvoir distinguer ces deux demi-espaces de la manière suivante.

Soit M un point de $\mathcal{E}$ et m son projeté orthogonal sur la droite $\mathcal{D}(A, \vec{n})$. Alors :

– pour tout point M de l'un, $\vec{Am}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires de même sens :

$$\vec{Am} = \alpha \vec{n}, \text{ avec } \alpha > 0 ;$$

– pour tout point M de l'autre, $\vec{Am}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires de sens contraires :

$$\vec{Am} = \alpha \vec{n} \text{ avec } \alpha < 0 .$$

Comme $\vec{AM} \cdot \vec{n} = \vec{Am} \cdot \vec{n} = \alpha \|\vec{n}\|^2$, α est du signe de $\vec{AM} \cdot \vec{n}$.

Nous avons donc la caractérisation :

$\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow M$ appartient au plan $\mathcal{P}$;

$\vec{AM} \cdot \vec{n} > 0 \Leftrightarrow M$ appartient à l'un des demi-espaces limités par $\mathcal{P}$;

$\vec{AM} \cdot \vec{n} < 0 \Leftrightarrow M$ appartient à l'autre des demi-espaces limités par $\mathcal{P}$.

C'est la simple traduction analytique de ces résultats qui conduit au paragraphe suivant, reliant demi-espaces et inéquations.

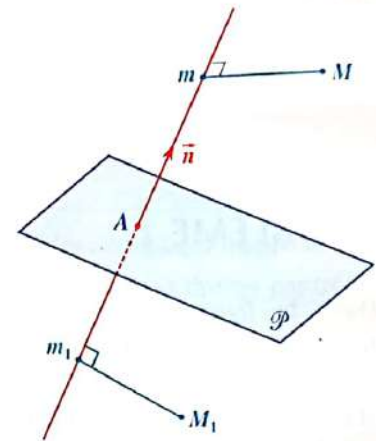


Fig. 6

5.2 INÉQUATION DÉFINISSANT UN DEMI-ESPACE

THÉORÈME 3

Soit :

– $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$;

– $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $ax + by + cz + d > 0$;

– $\mathcal{E}_2$ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $ax + by + cz + d < 0$.

Alors, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont les deux demi-espaces limités par $\mathcal{P}$.

Note :

La condition $ax + by + cz + d \geq 0$ caractérise l'ensemble $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{P}$ qui, par définition, est l'un des demi-espaces **fermés** limités par $\mathcal{P}$.

Exemples

① Le **premier octant** est, par définition, l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que : $x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0$.

② Le **cube plein** bâti sur les sommets du repère (Fig. 7) se caractérise par les relations :

$$0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq 1 ; 0 \leq z \leq 1 .$$

③ Soit $\mathcal{P}$ le plan $x - 2y - 1 = 0$.

Comme l'expression $x - 2y - 1$ est négative à l'origine O , « $x - 2y - 1 < 0$ » est le demi-espace limité par $\mathcal{P}$ contenant le point O , et – bien sûr – « $x - 2y - 1 > 0$ », c'est l'autre.

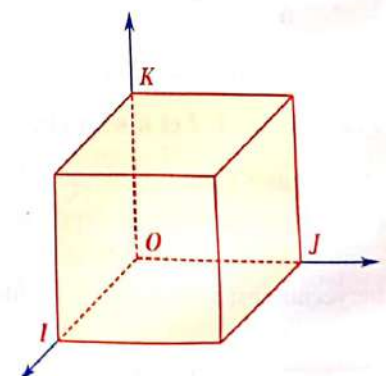


Fig. 7

PROBLÈME 2

Étant donné un tétraèdre $ABCD$, on définit les points P, Q, R et S respectivement situés sur les arêtes $[AB], [AD], [CB]$ et $[CD]$ par :

$$AP = \frac{1}{3}AB ; AQ = \frac{1}{3}AD ; CR = \frac{1}{3}CB \text{ et } CS = \frac{1}{3}CD.$$

Soit I et J les milieux de $[AC]$ et $[BD]$.

Montrer que $(PS), (QR)$ et (IJ) sont concourantes.

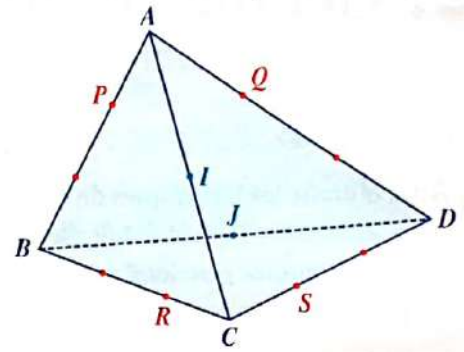


Fig. 9

1 En vue

Essayons de construire un barycentre G de A, B, C et D tel qu'en appliquant le **théorème d'associativité**, on obtienne G comme barycentre de P et S , puis G comme barycentre de Q et R , et enfin G comme barycentre de I et J . Suivront alors les alignements de G, P et S , puis de G, Q et R , et enfin de G, I et J et donc le concours visé.

C'est l'idée : remplacer un problème de concours de trois droites par trois alignements.

2 Solution

Par lecture directe, nous avons :

$$\bullet \frac{P}{3} = \text{bar} \left(\frac{A|B}{2|1} \right) \quad \frac{S}{3} = \text{bar} \left(\frac{C|D}{2|1} \right) ;$$

$$\bullet \frac{Q}{3} = \text{bar} \left(\frac{A|D}{2|1} \right) \quad \frac{R}{3} = \text{bar} \left(\frac{C|B}{2|1} \right) ;$$

$$\bullet \frac{I}{2} = \text{bar} \left(\frac{A|C}{1|1} \right) \quad \frac{J}{2} = \text{bar} \left(\frac{B|D}{1|1} \right).$$

À cet endroit, il serait criminel de ne pas introduire :

$$\frac{G}{6} = \text{bar} \left(\frac{A|B|C|D}{2|1|2|1} \right),$$

car G est barycentre de $(P, 3)$ et $(S, 3)$, barycentre aussi de $(Q, 3)$ et $(R, 3)$ et barycentre enfin de $(I, 4)$ et $(J, 2)$. C'est fini.

Question-réponse

Pourquoi disposons-nous côté à côté P et S, Q et R , puis I et J ?

Parce que les droites qui nous intéressent sont justement $(PS), (QR)$ et (IJ) .

Dans la foulée

1 Alignement

Une pyramide $ABCDE$ a pour base un parallélogramme $BCDE$ de centre O , I est le milieu de $[AO]$ et J le point de $[AB]$ tel que $AJ = \frac{1}{3}AB$.

Montrer que la droite (IJ) passe par D .

Piste Écrire les points I, J et D comme barycentres de A, B, C et E .

2 Concours

Soit $ABCD$ un tétraèdre, on définit les points G, I, J, K et L par :

- G est le centre de gravité du triangle ABC ;
- I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[BC]$;
- $\overrightarrow{DC} = 4\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{DA} = 4\overrightarrow{DL}$.

Montrer que les droites $(IK), (JL)$ et (DG) sont concourantes.

Piste $\text{bar} \{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 3)\}$.

2. Géométrie analytique

OBJECTIF

Approfondir les techniques de Géométrie analytique pour un rendement accru dans l'étude des droites et plans de l'espace (position relative par exemple), des demi-espaces (représentation, intersection), etc., et appuyer sur quelques **chausse-trappes** classiques mais sournoises.



PROBLÈME 1

Soit $A(1, -1, 2)$ et $B(2, 1, -1)$. Montrer que la droite (AB) est sécante avec $\Delta : \begin{cases} 2x + y - z - 6 = 0 \\ 3x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$, et également avec la droite (CD) où $C(0, -2, 3)$ et $D(1, 1, -2)$.

Solution

• Avec $\overrightarrow{AB}(1, 2, -3)$, une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (1).$$

La droite (AB) rencontre $\Delta : \begin{cases} 2x + y - z - 6 = 0 \\ 3x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$ si, et seulement si,

il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} 2(1+t) + (-1+2t) - (2-3t) - 6 = 0 \\ 3(1+t) - 2(-1+2t) + (2-3t) - 3 = 0 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} 7t - 7 = 0 \\ -4t + 4 = 0 \end{cases}.$$

Les deux équations ayant la même solution $t = 1$, les droites (AB) et Δ sont **sécantes en $K(2, 1, -1)$** .

• Une représentation paramétrique de (CD) est :

$$\begin{cases} x = s \\ y = -2 + 3s \\ z = 3 - 5s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}) \quad (2).$$

Les droites (AB) et (CD) sont sécantes si, et seulement si, il existe t et s tels que : $1+t = s$; $-1+2t = -2+3s$; $2-3t = 3-5s$.

Les deux premières équations livrent $t = -2$ et $s = -1$, valeurs qui vérifient la troisième (évident). Les droites sont donc **sécantes** et en remplaçant t par -2 dans (1) ou s par -1 dans (2), on obtient leur point d'intersection $L(-1, -5, 8)$.

L'objectif visé ici est la mise en évidence de deux méthodes : les résultats sont anecdotiques.

TOUR DE MAIN

Sécantes ou non ?

Lorsque les droites sont données en représentation paramétrique, utiliser toujours *deux lettres distinctes* pour les paramètres (s et t par exemple). Résoudre alors le système en s et t obtenu :

- une solution $\rightarrow$ sécantes
- sans solution $\rightarrow$ non sécantes et voir exercice 5, page 249.

PROBLÈME 2

Représenter l'ensemble S des points $M(x, y, z)$ du cube ci-contre (Fig. 10) pour lesquels il est possible de construire un triangle de côtés x, y et z .

1 Modélisation

Il s'agit donc de représenter l'intersection du cube et des trois demi-espaces définis par :

$$(1) x < y + z ; \quad (2) y < z + x ; \quad (3) z < x + y.$$

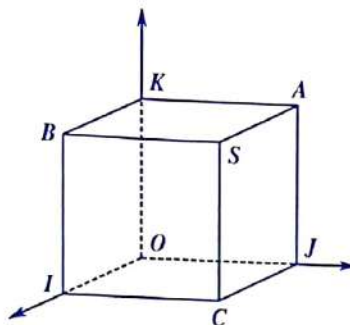


Fig. 10

Rappel

Il existe un triangle de côtés x, y et z ($x > 0, y > 0$ et $z > 0$) si, et seulement si, chacun des nombres x, y, z est strictement plus petit que la somme des deux autres.

2 Solution

Représentons la section du cube par le plan $P_1 : x - (y + z) = 0$. Les points du cube : $O, B(1, 0, 1)$ et $C(1, 1, 0)$ étant dans P_1 , la section est le triangle OBC .

Le point $I(1, 0, 0)$ n'appartient pas au demi-espace défini par « $x < y + z$ » : la condition (1) impose donc d'éliminer du cube le tétraèdre $IOBC$.

De même, les conditions (2) et (3) exigent d'éliminer du cube les tétraèdres $JOAC$ et $KOAB$.

L'ensemble S cherché est donc l'intérieur (sans les faces), du tétraèdre régulier $OABC$ (Fig. 11).

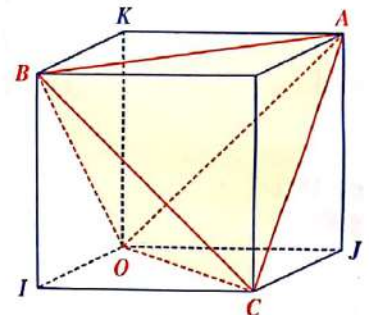


Fig. 11

Dans la foulée

3 Intersection de deux droites

- (D) est la droite passant par $A(2, 0, 0)$ de vecteur directeur $\vec{u}(0, 1, 1)$;
- (Δ) est la droite passant par $B(3, 2, 6)$ de vecteur directeur $\vec{v}(1, -2, 2)$.

Montrer que (D) et (Δ) sont sécantes en un point dont on précisera les coordonnées.

(Extrait BAC Série S, Amérique du Nord, 2001)

- 4 Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ? coplanaires ?

On donne $A(0,8 ; -1,2 ; 0,9)$,

$B(0,3 ; -0,9 ; 2,1)$, $C\left(\frac{1}{3} ; -\frac{1}{5} ; -\frac{2}{3}\right)$,

et $D\left(0 ; 0 ; \frac{2}{15}\right)$.

5 Trop, c'est trop

Les droites D_1 et D_2 sont-elles sécantes ?

$$D_1 : \begin{cases} x = 1 - 2s \\ y = 3 + 4s \\ z = -5 + 6s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}) ;$$

$$D_2 : \begin{cases} x = -5 + t \\ y = 15 - 2t \\ z = 13 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Piste Il faut interpréter.

6 Sans le coin

Représenter l'intersection du cube construit sur le repère (voir problème 2 ci-dessus) avec le demi-espace fermé défini par $x + y + z \leq 2$.

Calculer le volume du solide ainsi obtenu.

3. Systèmes linéaires

OBJECTIF

Mettre au point la **méthode de Gauss** dans la résolution de systèmes linéaires et explorer quelques **situations numériques** (issues de l'analyse, de situations économiques ou sociales...) conduisant à de tels systèmes.

PROBLÈME 1

Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes :

$$S_1 \begin{cases} 3x - 2y - z = 11 & L_1 \\ 2x - 5y - 2z = 3 & L_2 \\ -5x - y + 2z = -33 & L_3 \end{cases} ; \quad S_2 \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 2 & L_1 \\ 4x - 3y + z = 4 & L_2 \\ 2x + 12y - 7z = 2 & L_3 \end{cases}$$

1 Résolution de S_1

Éliminons x des deux dernières lignes en combinant avec L_1 :

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = 11 & L_1 \\ 11y + 4z = 13 & L_2 \leftarrow 2L_1 - 3L_2 \\ -13y + z = -44 & L_3 \leftarrow 5L_1 + 3L_3 \end{cases}$$

Éliminons z de la dernière ligne en combinant avec L_2 :

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = 11 & L_1 \\ 11y + 4z = 13 & L_2 \\ 63y = 189 & L_3 \leftarrow L_2 - 4L_3 \end{cases}$$

On en déduit, en « remontant » de la troisième ligne à la première, $y = 3$, puis $z = -5$ et enfin $x = 4$.

Le système S_1 admet donc une unique solution : $(4, 3, -5)$.

Ce sont des détails, mais il faut les connaître :

- L_1, L_2 et L_3 indiquent les lignes du système.
- on peut mettre la ligne que l'on veut en première ligne ;
- on peut éliminer l'inconnue que l'on veut ;
- la notation $L_2 \leftarrow 2L_1 - 3L_2$ indique quel est le contenu de la nouvelle deuxième ligne.

2 Résolution de S_2

Éliminons x des deux dernières lignes :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 2 & L_1 \\ 9y - 5z = 0 & L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ -9y + 5z = 0 & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases}$$

Les deux dernières équations étant équivalentes, le système S_2 est équivalent à

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 2 \\ 9y - 5z = 0 \end{cases}, \text{ qui définit géométriquement une « droite de$$

solution » à savoir tous les triplets $(1 + 3t, 10t, 18t)$ où t est un réel quelconque.

IMPÉRATIF

Pour éliminer

Pour éliminer x d'une ligne donnée (L_2 ou L_3) on ne peut que combiner **cette ligne et la ligne L_1** .

Ainsi, on est sûr d'obtenir un système équivalent (voir *exercice 52*, page 255).

PROBLÈME 2

Un problème d'Euler

« Trois personnes jouent ensemble trois parties. À chaque partie, le perdant double l'avoir de chacun des deux autres joueurs. Ils se retirent du jeu avec 24 louis chacun. On demande combien chaque joueur avait d'argent en venant, sachant que chacun d'eux a perdu une partie. »

1 Comment aborder le problème ?

On ne voit pas pourquoi on s'écarterait d'une *méthode* qui a fait ses preuves : choix des inconnues, mise en équations, résolution, etc.

Quoique...

(voir *exercice 8* ci-dessous).

2 Solution

• Choix des inconnues

Soit x , y et z les avoirs en début de partie des joueurs ayant respectivement perdu la première, la deuxième et la troisième partie.

• Mise en équations

Un tableau fait particulièrement l'affaire.

	avoir des joueurs		
parties	1 ^{er} joueur	2 ^e joueur	3 ^e joueur
au début	x	y	z
après la 1 ^{re} partie	$x - y - z$	$2y$	$2z$
après la 2 ^e partie	$2(x - y - z)$	$3y - x - z$	$4z$
après la 3 ^e partie	$4(x - y - z)$	$2(3y - x - z)$	$7z - x - y$

Nous sommes donc ramenés à résoudre le système :

$$\begin{cases} 4(x - y - z) = 24 \\ 2(3y - x - z) = 24 \\ 7z - x - y = 24 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} x - y - z = 6 \\ -x + 3y - z = 12 \\ -x - y + 7z = 24 \end{cases}$$

• Résolution du système

Nous la laissons à titre d'exercice (*exercice 7* ci-dessous).

La solution est :

$$x = 39, y = 21 \text{ et } z = 12.$$



Les Joueurs de cartes (1890-92), Paul Cézanne.

Dans la foulée

7 Résoudre le système obtenu dans le problème 2 ci-dessus par la méthode de Gauss.

8 Résoudre le problème d'Euler (*problème 2*) en examinant les avoirs des joueurs dans l'ordre inverse (fin de la troisième partie → fin de la deuxième partie, etc.).

9 Peut-on trouver un polynôme du second degré P ayant un maximum au point $\frac{3}{2}$ et tel que $P(-1) = 18$ et $P(3) = 6$?

Piste. Votre réponse est oui ? Relire l'énoncé.

Applications

Barycentre

1 Alignement

Soit $ABCD$ un parallélogramme, P le point défini par $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et Q le symétrique du milieu I de $[AB]$ par rapport à A .

Montrer que $P = \text{bar} \{(C, 1), (Q, 2)\}$ et en déduire que P , Q et C sont alignés.

2 En permutant les coefficients

Soit deux points pondérés (A, α) et (B, β) avec $\alpha + \beta \neq 0$. Montrer que $G = \text{bar} \{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ et $G' = \text{bar} \{(A, \beta), (B, \alpha)\}$ sont symétriques par rapport au milieu I de $[AB]$.

3 Avec des céviennes

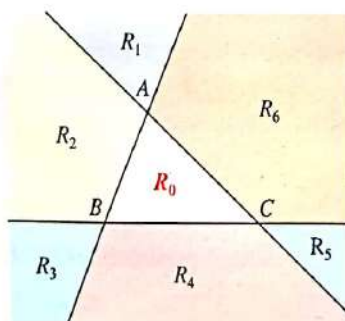
On considère un triangle ABC et :

$M = \text{bar} \{(A, 2), (B, 1), (C, 3)\}$. Montrer que :

- (AM) rencontre (BC) en un point P que l'on écrira comme barycentre de B et C ;
- (BM) rencontre (CA) en un point Q que l'on écrira comme barycentre de C et A ;
- (CM) rencontre (AB) en un point R que l'on écrira comme barycentre de A et B .

4 Régionnement

Situer chacun des points $M_1, M_2 \dots M_6$ dans l'une des régions représentées ci-dessous :



$$M_1 = \text{bar} \{(A, 2), (B, 1), (C, 3)\} ;$$

$$M_2 = \text{bar} \{(A, 1), (B, 2), (C, -8)\} ;$$

$$M_3 = \text{bar} \{(A, -3), (B, 1), (C, 5)\} ;$$

$$M_4 = \text{bar} \{(A, 1), (B, 2), (C, -1)\} ;$$

$$M_5 = \text{bar} \{(A, 1), (B, -6), (C, 3)\} ;$$

$$M_6 = \text{bar} \{(A, -4), (B, 6), (C, -3)\} .$$

Plans de l'espace

Dans les exercices 5 à 7, vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et donner une équation cartésienne du plan $P = \text{plan}(A, \vec{u}, \vec{v})$.

5 $\vec{u}(1, -1, 0)$, $\vec{v}(0, 1, -1)$ et $A = O$ (origine du repère).

6 $\vec{u}(-1, 3, 4)$, $\vec{v}(0, 0, 2)$ et $A(1, -2, -1)$.

7 $\vec{u}(1, -1, 2)$, $\vec{v}(-1, -2, 1)$ et $A(2, 1, -1)$.

8 Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés et donner une équation du plan (ABC) :

$$A(1, -1, 3), B(2, 5, -1) \text{ et } C(-3, 4, 0).$$

9 Donner l'équation du plan parallèle au plan $3x - y + z - 5 = 0$ passant par le point $A(-1, 1, 1)$.

10 Prouver que les points $A(0, 2, -1)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(1, 0, 3)$ définissent un plan parallèle au plan d'équation $2x - y - z + 4 = 0$.

11 Étant donné deux plans P_1 et P_2 de l'espace, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) P_1 contient une droite orthogonale à P_2 .

(2) P_2 contient une droite orthogonale à P_1 .

(3) P_1 et P_2 sont perpendiculaires.

12 Les plans d'équations $3x - y + 2z - 1 = 0$ et $x + 5y + z - 2 = 0$ sont-ils perpendiculaires ?

13 Soit λ un réel fixé. Montrer que l'équation :

$$\lambda x + (\lambda + 1)y + z - 1 = 0$$

est l'équation d'un plan P perpendiculaire au plan d'équation $x - y + z = 0$ et que P passe par le point $A(1, -1, 2)$.

14 Montrer que chacune des équations ci-après est celle d'un plan parallèle ou perpendiculaire à l'un des plans de coordonnées (xOy) , (yOz) et (xOz) (bien sûr : préciser).

a) $3x - z + 1 = 0$; b) $y - 5 = 0$; c) $y + 2z = 1$;

d) $x = y$; e) $z + 4 = 0$; f) $2x + 5 = 0$.

15 Montrer que les plans d'équations :

$$3x - 2y - z - 5 = 0 \text{ et } 5x + y + 2z - 4 = 0$$

sont sécants selon la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ avec $A(1, -1, 0)$ et $\vec{u}(3, 11, -13)$.

16 Prouver que les plans d'équations $x - y + 1 = 0$ et $z - x - 1 = 0$ se coupent selon une droite $\mathcal{D}$ contenue dans le plan d'équation $y - z = 0$.

Droites de l'espace

Dans les exercices 17 à 20, donner une représentation paramétrique de la droite D .

17 D est la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ avec $A(-1, 2, 5)$ et $\vec{u}(-1, 1, 4)$.

18 D est la droite (AB) avec $A(5, 0, -1)$ et $B(8, -3, 2)$.

19 D est la droite parallèle à (AB) passant par $C(-1, 6, 2)$ avec $A(1, 0, -3)$ et $B(-3, 1, 0)$.

20 D est la droite orthogonale au plan d'équation $2x - z + 1 = 0$ passant par le point $A(-2, 1, 0)$.

Dans les exercices 21 à 25, on considère la droite D de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t\sqrt{2} \\ y = 2t - 1 \\ z = t\sqrt{2} - 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

21 Le vecteur $\vec{u}(1, -\sqrt{2}, -1)$ est-il un vecteur directeur de D ?

22 La droite D est-elle contenue dans le plan d'équation : $3x + \sqrt{2}y + z - 2 + \sqrt{2} = 0$?

23 Montrer que le plan orthogonal à D passant par $A(\sqrt{2}, 2, -\sqrt{2})$ contient l'origine du repère.

24 On donne les points $A(5, -2, -7)$ et $B(1, -4\sqrt{2}, 1)$. Montrer que le milieu de $[AB]$ appartient à la droite D .

25 Donner une représentation paramétrique de la droite parallèle à D et passant par le point $P(-1, 0, -\sqrt{2})$. Cette droite passe-t-elle par le point $Q(\sqrt{2} - 1, -2, -2\sqrt{2})$?

Dans les exercices 26 à 28, vérifier que le système de deux équations linéaires définit une droite de l'espace et donner une représentation paramétrique de cette droite.

26 a) $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y - z = -1 \end{cases}$.

27 a) $\begin{cases} 2x + y - 5z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2x + y + z = 3 \end{cases}$.

28 $\begin{cases} (\beta^2 + \gamma^2)x - \alpha\beta y - \alpha\gamma z = 0 \\ (\beta + \gamma)x - \alpha y - \alpha z = 0 \end{cases}$

(α, β et γ sont trois réels non nuls avec $\beta \neq \gamma$.)

Intersection d'une droite et d'un plan

29 Montrer que le plan $P: 3x + 2y - z + 1 = 0$ est sécant avec chacun des axes de coordonnées et calculer les coordonnées des points d'intersection.

30 À connaître

Soit a, b et c trois réels non nuls et P le plan $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Quelles sont les coordonnées des points d'intersection A, B et C de P avec (Ox) , (Oy) et (Oz) ?

Dans les exercices 31 à 34, on considère la droite D de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}). \text{ Il s'agit}$$

dans chaque cas d'examiner si D est sécante avec le plan P et, si oui, de calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

31 a) $P = (xOy)$; b) $P = (yOz)$; c) $P = (xOz)$.

32 a) P a pour équation $2x + y - z = 0$.
b) P a pour équation $-x + 2y - z + 1 = 0$.

33 P est le plan passant par $A(-1, 0, 1)$, orthogonal à $\vec{u}(2, -1, 3)$.

34 P est le plan orthogonal à D passant par $I(1, 0, 0)$.

35 Quelle est l'intersection de la droite (AB) avec le plan passant par C et orthogonal à $\vec{u}$?
On donne $A(1, 2, 0)$; $B(-1, 3, -2)$; $C(3, 2, -1)$; $\vec{u}(1, -1, 4)$.

36 Soit $\mathcal{D}$ la droite (AB) avec $A(0, -1, -1)$ et $B(1, 0, 0)$.

Étudier la position relative de :

- $\mathcal{D}$ avec le plan $P_1: -3x + y + 2z + 3 = 0$;
- $\mathcal{D}$ avec le plan $P_2: 2x - 3y + z - 3 = 0$;
- $\mathcal{D}$ avec $P_3: x - 2y + 3z - 3 = 0$.



Plans verticaux et diagonaux.
F. Kupka.

Intersection de trois plans

Systèmes linéaires

Dans les exercices 37 à 40, résoudre par la méthode de son choix les systèmes proposés.

$$37 \quad a) \begin{cases} 7x + 2y = 10 \\ 3x + 2z = 10 \\ 9y + 14z = 10 \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 8 \\ 5x + y - z = 16 \\ 6x - 2y - 3z = 11 \end{cases}$$

$$38 \quad \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 8x + 5y - 2z = 0 \\ -7x - 6y + 5z = 8 \end{cases}$$

$$39 \quad \begin{cases} 2x + 3y - 5z = -16 \\ 4x + 13y - 8z = -5 \\ x + 2y + 7z = 22 \end{cases}$$

$$40 \quad a) \begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ z + x = c \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} x + y - z = a \\ x - y + z = b \\ -x + y + z = c \end{cases}$$

(Les réels a , b et c sont des réels donnés.)

Méfiance

À partir du système S $\begin{cases} x - y = 0 & (1) \\ y - z = 1 & (2) \\ z - x = 0 & (3) \end{cases}$,

formons le système S' $\begin{cases} x - z = 1 & (1) + (2) \\ z - y = 0 & (1) + (3) \\ x + y - 2z = 1 & (2) - (3) \end{cases}$

obtenu par les combinaisons indiquées.

Il est clair que le système S est sans solution alors que $(1, 0, 0)$ est une solution du système S' .

Conclusion : attention, avec certaines combinaisons, on peut réussir à épingler des solutions qui n'en sont pas.

41 Un point et un seul

1) Montrer que les plans $P_1 : -x + y - z + 3 = 0$ et $P_2 : 2x - y - z + 1 = 0$ sont sécants selon une droite D dont on donnera un vecteur directeur.

2) En déduire que D est sécante avec le plan $P_3 : 5x + 7y - 4z + 25 = 0$.

(On ne demande pas de calculer les coordonnées du point d'intersection.)

Demi-espace

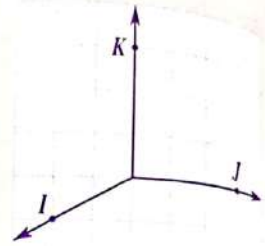
42 Au fond, en haut et à droite

Représenter sur papier quadrillé (et sur un même schéma)

l'ensemble $\mathcal{C}_1$ des points $M(x, y, z)$ tels que $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 3$ et $0 \leq z \leq 3$, ainsi que l'ensemble $\mathcal{C}_2$ des points $M(x, y, z)$ tels que :

$0 \leq x \leq 1$, $2 \leq y \leq 3$ et $2 \leq z \leq 3$.

(On choisira le repère comme indiqué dans la figure ci-dessus.)



43 Un tétraèdre

1) Déterminer les points d'intersection A , B et C du plan P d'équation $3x + 2y + 3z - 6 = 0$ avec les axes (Ox) , (Oy) et (Oz) .

2) On désigne par $\mathcal{E}_1$ le demi-espace fermé défini par $3x + 2y + 3z - 6 \leq 0$.

Vérifier que l'origine O appartient à $\mathcal{E}_1$.

3) Représenter graphiquement l'intersection de $\mathcal{E}_1$ avec le premier octant (ensemble des points à coordonnées positives ou nulles).

Quel est le solide obtenu ?

Noter la démarche : représentation soignée du plan limite et test en un point pour déterminer parmi les deux sous-espaces l'heureux élu.

44 Dans le cube

1) Représenter l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant :

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \text{ et } x + y + z \geq \frac{1}{2}.$$

2) Quel est le volume du solide obtenu ?

Une affaire à suivre

Si trois nombres réels sont pris au hasard dans l'intervalle $[0, 1]$ indépendamment les uns des autres, la probabilité

pour que leur somme soit supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$ est $\frac{47}{48}$

(presque 98 %), à savoir exactement le volume du solide obtenu à l'exercice 44 (rendez-vous au chapitre 10).

45 Piège

Que dire de l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant le système d'inéquations :

$$\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{2}y + (1 - \sqrt{2})z < 0 \\ x + (2 + \sqrt{2})y - z > 0 \end{cases} ?$$

46 1) Construire un triangle ABC et les points D et E tels que :

$$\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{CE}.$$

2) Après avoir exprimé D comme barycentre de A et B , et E comme barycentre de A et C , prouver que les milieux des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[DE]$ sont alignés.

Piste Barycentre de $(D, 3)$ et $(E, 3)$.

47 1) Prouver que les points $A(-1, 2, 3)$, $B(1, -3, 5)$ et $C(0, 1, -1)$ ne sont pas alignés et donner l'équation du plan (ABC) .

2) Montrer que le plan d'équation : $35x - 38y - 130z + 501 = 0$ est perpendiculaire au plan (ABC) et sécant avec ce plan selon la droite (AB) .

48 Donner une représentation paramétrique de la droite passant par $A(-4, -3, 2)$ et parallèle à la droite D définie par le système :

$$\begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

49 On donne les points $A(-3, 5, 1)$, $B(0, -2, -1)$, $C(0, 3, 2)$ et $D(2, -1, 0)$.

Déterminer le point d'intersection de la droite (AB) avec le plan médiateur de $[CD]$.

50 À l'œil nu

La droite définie par le système $\begin{cases} -x + 2y - 6z = 4 \\ x + 8y - 21z = 6 \end{cases}$ est-elle

sécante avec le plan $\frac{x}{2} - y + 3z - 1 = 0$?

51 Le tétraèdre $OABC$ est trirectangle de sommet O .

On a $AB = 12,5$, $BC = 24,4$ et $AC = 26,7$.

Calculer OA , OB et OC .

Piste Poser $x = OA^2$, $y = OB^2$ et $z = OC^2$.

52 Vers la méthode de Gauss

On considère des réels quelconques a, b, c, d, a', b', c' et d' et, pour un point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$, on pose :

$$f(M) = ax + by + cz + d \text{ et}$$

$$g(M) = a'x + b'y + c'z + d'.$$

Montrer que, lorsque le réel β est non nul, quel que soit le réel α :

$$\begin{cases} f(M) = 0 \\ g(M) = 0 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} f(M) = 0 \\ \alpha f(M) + \beta g(M) = 0 \end{cases}.$$

Note : le résultat est fondamental dans la méthode de Gauss.

Les calculatrices telles la *TI 89* (Texas Instrument) et la *Graph 100* (Casio) offrent le précieux avantage d'effectuer la résolution de systèmes linéaires. N'en concluons pas trop vite à l'inutilité de quelques pages de ce chapitre...

TI 89

On peut utiliser la fonction *solve*, présente dans le menu *Algebra* et accessible par $\boxed{\text{F2}} \boxed{1}$ ou la fonction *zeros* dans le même menu (accès par $\boxed{\text{F2}} \boxed{4}$).

Exemple 1

Pour résoudre le système $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 8 \\ 5x + y - z = 16 \\ 6x - 2y - 3z = 11 \end{cases}$, on entre

zeros ($[4x - 3y + 2z - 8, 5x + y - z - 16, 6x - 2y - 3z - 11]$, $[x, y, z]$) $\boxed{\text{ENTER}}$.
(attention : crochet $\boxed{2\text{nd}} \boxed{[]}$)

On obtient sur l'écran $\left[\frac{248}{79} \frac{312}{79} \frac{288}{79} \right]$: unique triplet (x, y, z) solution.

Exemple 2

Avec *zeros* ($[2x + 3y - 2z - 2, 4x - 3y + z - 4, 2x + 12y - 7z - 2]$, $[x, y, z]$) $\boxed{\text{ENTER}}$, l'affichage est $\left[\frac{1}{6} \frac{5}{9} \frac{1}{9} @1 \right]$, que l'on doit interpréter ainsi : le système admet « une droite de solutions » de représentation paramétrique :

$$\left(x = \frac{t+6}{6}, y = \frac{5t}{9}, z = t \right) t \in \mathbb{R}.$$

(@1 désigne le paramètre.)

Note : en furetant un peu, on trouvera la méthode de Gauss de résolution des systèmes (Au cœur des problèmes, partie 3, page 250).

Graph 100

La démarche à suivre est la suivante :

- aller dans le menu principal ;
- sélectionner « EQUA » (ou éventuellement appuyer sur 7) ;
- appuyer sur $\boxed{\text{F1}}$ pour sélectionner « simultanée », puis sur $\boxed{\text{F2}}$ pour la sélection du mode à 3 inconnues ;
- entrer les coefficients (comme pour un tableur) modèle tout en haut ;
- appuyer sur $\boxed{\text{F6}}$ pour obtenir la résolution du système.

Exercices

Barycentre

53 Un problème d'alignement

On considère un tétraèdre $ABCD$, I le milieu de $[AB]$, G le centre de gravité du triangle ACD et E le quatrième sommet du parallélogramme $CBDE$.

- 1) Écrire E comme barycentre de B , C et D et montrer que G est le barycentre du système $\{(E, 1), (I, 2)\}$.
- 2) En déduire que I , G et E sont alignés et préciser la position de G sur la droite (IE) .

54 Positionnement d'un point

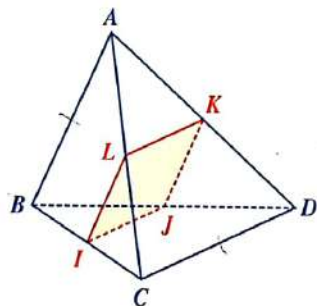
- 1) Représenter en perspective cavalière un parallélépipède $ABCDEFGH$. (On pourra se contenter d'un pavé droit, pour simplifier.)
- 2) Soit I l'isobarycentre des sommets du parallélépipède sauf G . Construire le point I dans la figure précédente.

Piste Partir du centre du parallélépipède : c'est l'isobarycentre de tous les sommets...

55 Un problème de lieu

On désigne par I , J , K et L les milieux des arêtes $[BC]$, $[BD]$, $[AD]$ et $[AC]$ d'un tétraèdre $ABCD$.

- 1) Démontrer (redémontrer ?) que $IJKL$ est un parallélogramme.



- 2) Soit x et y deux réels quelconques. Vérifier que le système :

$$\{(A, x), (B, 1-x), (D, y), (C, 1-y)\}$$
admet un barycentre et montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) $M = \text{bar} \{(A, x), (B, 1-x), (D, y), (C, 1-y)\}$,
- (2) $2\vec{IM} = x\vec{BA} + y\vec{CD}$.

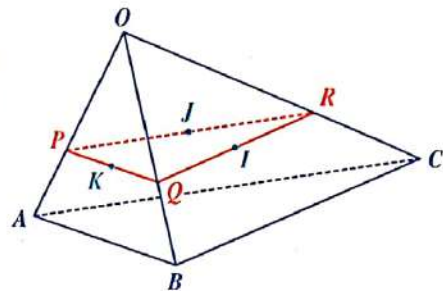
- 3) En déduire que l'ensemble des milieux M des segments $[PQ]$ où P décrit le segment $[AB]$ et Q le segment $[CD]$ est l'ensemble des points M tels que :

$\vec{IM} = x\vec{IL} + y\vec{IJ}$, x et y décrivant l'intervalle $[0, 1]$.
 Décrire géométriquement l'ensemble ainsi obtenu.

56 Concourantes ou parallèles

On coupe un tétraèdre $OABC$ par un plan $\mathcal{P}$ parallèle au plan (ABC) , et ne passant pas par le point O . On désigne par :

- P , Q et R les intersections de $\mathcal{P}$ avec les droites (OA) , (OB) et (OC) ;
- I , J et K les milieux respectifs des segments $[QR]$, $[RP]$ et $[PQ]$.



- 1) Justifier l'existence d'un réel α tel que :
 $P = \text{bar} \{(O, \alpha), (A, 1-\alpha)\}$.
- 2) Prouver que $Q = \text{bar} \{(O, \alpha), (B, 1-\alpha)\}$ et :
 $R = \text{bar} \{(O, \alpha), (C, 1-\alpha)\}$.

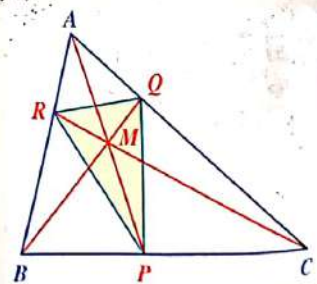
Piste Que dire des droites (PQ) et (AB) , (PR) et (AC) ? Exploiter alors que dans un plan, une projection de droite à droite conserve le barycentre.

- 3) Écrire I comme barycentre de O , B et C , J comme barycentre de O , C et A et K comme barycentre de O , A et B .
- 4) On suppose $\alpha \neq 3$. Montrer que le système $\{(O, 2\alpha), (A, 1-\alpha), (B, 1-\alpha), (C, 1-\alpha)\}$ admet un barycentre S et que les droites (AI) , (BJ) et (CK) sont concourantes en S .
- 5) On suppose $\alpha = 3$. Illustrer d'une figure et prouver que $\vec{AI} = \vec{BJ} = \vec{CK}$ (dans ce cas, les droites (AI) , (BJ) et (CK) sont parallèles).

57 À double tour

Le point M est intérieur (strictement) au triangle ABC ; (AM) coupe $[BC]$ en P , (BM) coupe $[CA]$ en Q et (CM) coupe $[AB]$ en R .

Montrer que M est intérieur (strictement) au triangle PQR .



Piste À supposer qu'ils existent, que dire des barycentres des systèmes $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ et $\{(B, \beta), (C, \gamma), (A, \alpha), (A, \alpha), (B, \beta)\}$?

Quelques méthodes de Géométrie analytique

58 Les idées claires

La droite Δ est définie par un système de deux équations

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

(On rappelle que, dans ce cas, $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2)$ ne sont pas colinéaires.)

La droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ est la droite passant par le point A et dirigée par $\vec{u}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$) et P est le plan $ax + by + cz + d = 0$, de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$

Justifier le contenu du tableau suivant :

propriétés géométriques	caractérisation vectorielle
$\Delta // \mathcal{D}(A, \vec{u})$	$\vec{u} \perp \vec{n}_1$ et $\vec{u} \perp \vec{n}_2$
$\Delta // P$	$\vec{n}, \vec{n}_1, \vec{n}_2$ coplanaires
$\Delta \perp \mathcal{D}(A, \vec{u})$	$\vec{u}, \vec{n}_1, \vec{n}_2$ coplanaires
$\Delta \perp P$	$\vec{n} \perp \vec{n}_1$ et $\vec{n} \perp \vec{n}_2$

Attention : qui dit « caractérisation » dit « propriété équivalente ». Ainsi, ligne 1, il s'agit d'établir que $\Delta // \mathcal{D}(A, \vec{u})$ si, et seulement si, $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.



« Une idée nous est claire quand elle nous frappe vivement. »
René Descartes, *Discours de la méthode*, 1637.

R. Descartes (1596-1650) est le père fondateur de la Géométrie analytique.

Les exercices 59 à 62 sont des applications des résultats dégagés à l'exercice 58.

59 1) Montrer que les plans :

$P_1 : x - y - z + 2 = 0$ et $P_2 : 3x - 2y - z + 1 = 0$ sont sécants selon une droite désignée par Δ .

2) Montrer que Δ est parallèle au plan d'équation $2x - y + 4 = 0$:

a) après avoir obtenu une représentation paramétrique de Δ ;

b) « directement », via l'exercice 58.

60 Prouver que le système d'équations $\begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

définit une droite D orthogonale à la droite (AB) , avec $A(-3, 1, 2)$ et $B(-1, 0, 1)$.

61 1) Vérifier que chaque système ci-après définit une droite :

$$D_1 \begin{cases} x = 0 \\ z = 4 \end{cases} ; \quad D_2 \begin{cases} y = 0 \\ z = -4 \end{cases} ; \quad D_3 \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} ;$$

$$D_4 \begin{cases} x + y - 5z + 4 = 0 \\ x - y - z + 20 = 0 \end{cases}$$

2) Montrer que D_4 est sécante avec chacune des droites D_1 et D_2 et que D_3 et D_4 sont parallèles.

Piste Il est enfantin d'obtenir un vecteur directeur de D_3 .

62 Montrer que les points $A(1, 2, -2)$, $B(-2, 1, -1)$ et $C(2, -1, -2)$ ne sont pas alignés et donner une représentation paramétrique de la droite passant par $M_0(1, -1, 1)$ et orthogonale au plan (ABC) .

Piste Un vecteur normal au plan (ABC) .

63 Soit D_1 et D_2 les droites définies par :

$$D_1 \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad D_2 \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$$

Montrer que la droite Δ , dont une représentation paramétrique est donnée ci-après, est sécante avec chacune des droites D_1 et D_2 et orthogonale à D_1 et D_2 :

$$\Delta : \begin{cases} x = \frac{29}{13} + 3t \\ y = -\frac{5}{13} \\ z = -\frac{11}{13} + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Note : Δ est la perpendiculaire commune aux droites D_1 et D_2 (voir problème 94, page 264).

64 Soit P le plan d'équation $y - z + 2 = 0$.

1) Montrer que les plans d'équations $x = 0$ puis $\lambda x + y + z = 0$ (λ réel quelconque) sont perpendiculaires à P et passent par l'origine du repère.

2) Réciproquement, soit Q un plan perpendiculaire à P passant par O .

a) Montrer qu'il existe deux réels a et b , avec $(a, b) \neq (0, 0)$ tels que l'équation de Q soit de la forme $ax + b(y + z) = 0$.

b) En examinant les cas $b = 0$ et $b \neq 0$, montrer que l'équation de Q est $x = 0$ ou $\lambda x + y + z = 0$ (λ réel).

Géométrie analytique

Les exercices 65 à 68 portent sur la notion de faisceau de plans contenant une droite donnée.

65 Le résultat de base

Les plans $P_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $P_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ sont sécants selon une droite D . On désigne par $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ les vecteurs $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2)$.

1) Montrer que, pour tout couple de réels $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, l'équation :

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

est l'équation d'un plan contenant D .

2) Réciproquement, soit P un plan contenant D de vecteur normal $\vec{n}$. On note A un point fixé de la droite D .

a) Justifier l'existence d'un couple de réels $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tels que : $\vec{n} = \lambda\vec{n}_1 + \mu\vec{n}_2$ et en déduire que, pour un point M de $\mathcal{E} : M$ appartient à P équivaut à :

$$\lambda(\vec{AM} \cdot \vec{n}_1) + \mu(\vec{AM} \cdot \vec{n}_2) = 0.$$

b) Prouver alors qu'une équation cartésienne de P est :

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0.$$

66 Exemple

1) Montrer que les plans $P_1 : x - y + 2z - 1 = 0$ et $P_2 : 2x + y - z + 1 = 0$ sont sécants selon une droite désignée par D .

2) Soit P un plan distinct de P_1 . Montrer que P contient D si, et seulement si, il existe un réel α tel que :

$$\alpha(x - y + 2z - 1) + 2x + y - z + 1 = 0$$

soit une équation cartésienne de P .

3) Écrire une équation cartésienne du plan contenant D et perpendiculaire à P_1 .

67 Plan défini par un point et une droite

Dans chacun des cas ci-après, vérifier que le système (S) définit une droite D de $\mathcal{E}$, que M_0 n'appartient pas à D et donner une équation cartésienne du plan passant par M_0 et contenant D .

a) $(S) : \begin{cases} 3x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 4 = 0 \end{cases} ; M_0(1, -1, 1).$

b) $(S) : \begin{cases} 2x - 5z + 4 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases} ; M_0(2, 0, 1).$

68 Distance d'un point à une droite (Acte I)

On considère les plans $P_1 : x - y + z - 3 = 0$ et $P_2 : 2x + y - 2 = 0$.

1) Montrer que P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D .

2) Soit A le point de coordonnées $A(1, 1, 1)$.

a) Donner une équation du plan P contenant la droite D et perpendiculaire à P_1 .

b) Calculer les distances de A à P_1 , de A à P et en déduire la distance de A à la droite D .

Piste Configuration formée par A et ses projetés orthogonaux sur P_1 , P et D .

69 Distance d'un point à une droite (Acte II)

Soit D la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et } A \text{ le point } A(1, -1, 2).$$

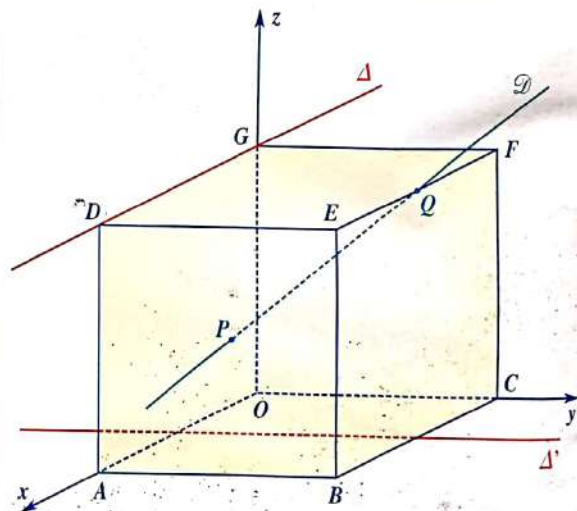
1) Déterminer le réel t de façon à ce que le point M de D qui lui est associé vérifie : (AM) est orthogonale à D .

2) En déduire la distance de A à la droite D .

70 Une propriété du cube

On considère le cube représenté ci-après, d'arête de longueur 2, et l'on désigne par :

- Δ , la droite (DG) ;
- Δ' , la droite passant par les milieux de $[OA]$ et $[BC]$;
- P , le centre de la face $ABED$, Q le milieu de $[EF]$ et $\mathcal{D}$ la droite (PQ) .



1) Établir que, quel que soit le point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$, les distances de M à la droite $\Delta : d(M, \Delta)$ et de M à la droite $\Delta' : d(M, \Delta')$ vérifient :

$$d^2(M, \Delta) = y^2 + (z - 2)^2 \text{ et } d^2(M, \Delta') = (x - 1)^2 + z^2.$$

2) Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D} = (PQ)$ et montrer que tout point de $\mathcal{D}$ est à égale distance de Δ et Δ' .

3) En quel point de $\mathcal{D}$, cette distance commune est-elle minimale ?

Systèmes linéaires

Dans les exercices 71 à 73, résoudre chaque système par la méthode de Gauss.

$$71 \quad 1 \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} ; \quad 2 \begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$72 \quad 1 \begin{cases} x + 2y - 6z = 4 \\ 2x - 2y + 3z = 4 \\ x + 8y - 21z = 6 \end{cases} ; \quad 2 \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$73 \quad 1 \begin{cases} 2x + 6y - 4z = 1 \\ x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + y - 3z = -7 \end{cases} ; \quad 2 \begin{cases} 3x + 4y + 9z = 53 \\ 7x - 10y + 3z = -23 \\ 2x + 9y - 5z = -18 \end{cases}$$

Dans les exercices 74 et 75, résoudre par la méthode de son choix chacun des systèmes.

$$74 \quad 1 \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} ; \quad 2 \begin{cases} 5x + 2z = 1 \\ y - 3z = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$75 \quad 1 \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y - 4z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} ; \quad 2 \begin{cases} 8x + 3y - 2z = 3 \\ x - 2y + z = 1 \\ 5x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

76 Interpolation quadratique

Trouver l'équation de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ qui passe par les points $A(-2, 5)$, $B(2, 1)$ et $C(4, 5)$.

77 Asymptote oblique

1) Déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout réel $x \neq 5$:

$$\frac{x^2 + x + 1}{x - 5} = ax + b + \frac{c}{x - 5}$$

2) En déduire que la courbe représentative de la fonction

$$x \mapsto \frac{x^2 + x + 1}{x - 5} \text{ admet une asymptote oblique en } +\infty \text{ et } -\infty$$

dont on précisera l'équation.

78 Primitive

1) Montrer qu'il existe trois réels a , b et c que l'on déterminera tels que, pour tout réel x , $x^2 = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$.

2) En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2(x - 1)^{2002}$.

79 Tell mother's age

D'après M. Gardner, *Les Casse-Tête mathématiques de Sam Loyd*, Éd. Dunod.

Les trois personnages : le père, la mère et l'enfant. Le père s'adresse à l'enfant :

« Voilà : nos trois âges additionnés donnent juste 70 ans. Je suis maintenant six fois plus vieux que toi et quand je ne serai plus que deux fois plus âgé que toi, nos trois âges feront un total double de ce qu'il est à présent. Peux-tu me dire quel est l'âge de maman ? »

Note : les âges, exprimés en années, ne sont pas nécessairement des nombres entiers.

80 Faisceau de plans à la brasserie

1) Montrer que le système de deux équations

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 14,1 \\ x + 2y + 2z = 10,4 \end{cases} \text{ définit une droite } D \text{ de l'espace qui est}$$

contenue dans le plan d'équation $3x + 4y - 17,8 = 0$.

2) Application : « Deux sandwiches, un café, trois Coca : 14,1 € ». « Un sandwich, deux cafés, deux Coca : 10,4 € ».

Combien coûtent « Trois sandwiches et quatre Coca » ?

81 Le pull marine

Une piscine peut être remplie par trois robinets-vannes A, B et C. Le temps de remplissage est de :

- 4 h 48 min lorsque A et B sont ouverts et C fermé ;
- 2 h 40 min lorsque B et C sont ouverts et A fermé ;
- 3 h lorsque C et A sont ouverts et B fermé.

Déterminer le temps de remplissage de la piscine :

a) par les trois robinets-vannes simultanément ouverts ;

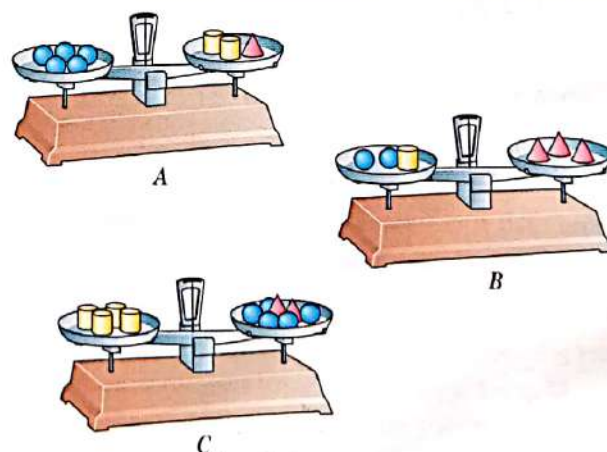
Piste Nul besoin de système linéaire.

b) par chacun des robinets-vannes fonctionnant seul.

82 « C'est une question d'équilibre »

Les balances A et B sont en équilibre.

La balance C penchera-t-elle à droite, à gauche, ou est-elle en équilibre ?



Les exercices 83 à 86 concernent les points remarquables du triangle (orthocentre, centre du cercle circonscrit, centre du cercle inscrit) comme barycentres des sommets. En préliminaires à l'exercice 83, quelques relations métriques dans le triangle sont établies, avec les notations usuelles concernant les angles et les côtés d'un triangle ABC voir chapitre 7, Rappel, page 208.

83 Relations métriques

1) Établir les relations :

$$a = b \cos C + c \cos B ; \quad b = c \cos A + a \cos C$$

et $c = a \cos B + b \cos A$.

2) On pose $p = a \cos A$, $q = b \cos B$, $r = c \cos C$,
 $\alpha = a \cos B \cos C$, $\beta = b \cos C \cos A$,
 $\gamma = c \cos A \cos B$.

a) Prouver que :

$$p + q + r = 2(\alpha + \beta + \gamma) = 2c \sin A \sin B.$$

b) En déduire que chacun des systèmes :

$$\{(A, p), (B, q), (C, r)\} \quad \text{et} \quad \{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$$

admet un barycentre.

84 Orthocentre

Soit le système $\{(A, a \cos B \cos C), (B, b \cos C \cos A) \text{ et } (C, c \cos A \cos B)\}$.

D'après l'exercice précédent (question 2)), ce système admet un barycentre H .

1) Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC .

2) On suppose le triangle ABC non rectangle. Prouver que H est barycentre du système $\{(A, \tan A), (B, \tan B), (C, \tan C)\}$. En déduire que H est intérieur au triangle si, et seulement si, le triangle est acutangle c'est-à-dire avec tous ses angles aigus.

85 Centre du cercle circonscrit

1) À l'aide de la relation d'Euler $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$, montrer que le centre O du cercle circonscrit au triangle est le barycentre du système :

$$\{(A, a \cos A), (B, b \cos B), (C, c \cos C)\}.$$

2) Prouver que l'on a aussi :

$$O = \text{bar} \{(A, \sin 2A), (B, \sin 2B), (C, \sin 2C)\}.$$

86 Centre du cercle inscrit

Rappel : soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs unitaires et de même sens que $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$. Alors, la droite passant par A et dirigée par $\vec{u} + \vec{v}$ est la bissectrice intérieure issue de A dans le triangle ABC .

Soit I le barycentre du système $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$. Montrer que I appartient à chaque bissectrice intérieure du triangle. (Le point I est donc le centre du cercle inscrit au triangle.)

87 Système de Cramer

On considère un système linéaire de trois équations à trois inconnues :

$$S \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 & (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 & (2) \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

où $a_1, b_1, \dots, b_3, c_3, d_3$ sont des réels quelconques.

On dit qu'un tel système est de Cramer lorsqu'il admet une solution unique.

1) Montrer que S est un système de Cramer si, et seulement si :

- le système des deux équations (1) et (2) définit une droite D ;
- l'équation (3) est l'équation d'un plan P ;
- D et P sont sécants.

2) On introduit les vecteurs $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2)$ et $\vec{n}_3(a_3, b_3, c_3)$.

Déduire de la question 1) que S est un système de Cramer si, et seulement si :

- $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires ;
- $\vec{n}_3$ est non nul ;
- il existe un vecteur orthogonal à $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ mais pas à $\vec{n}_3$.

3) Soit $\vec{w}$ le vecteur :

$$\vec{w}(b_1c_2 - c_1b_2, -(a_1c_2 - c_1a_2), a_1b_2 - b_1a_2).$$

a) Montrer que l'égalité $\vec{w} = \vec{0}$ équivaut à $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires.

b) Vérifier par un calcul que $\vec{w} \cdot \vec{n}_1 = \vec{w} \cdot \vec{n}_2 = 0$.

4) Déduire des résultats précédents que S est un système de Cramer, si, et seulement si, le nombre Δ (appelé déterminant du système) et défini par :

$$\Delta = a_3(b_1c_2 - c_1b_2) - b_3(a_1c_2 - c_1a_2) + c_3(a_1b_2 - b_1a_2) \text{ est non nul.}$$

Déterminant

La notion de déterminant – le terme est dû à Cauchy – se généralise à un système linéaire de n équations à n inconnues (système (n, n)). C'est l'algèbre linéaire, mise au point dans la seconde partie du XIX^e siècle, qui vient expliquer que cette notion est moins « calculatoire » qu'il n'y paraît.

Quant au mathématicien suisse Gabriel Cramer (1704-1752), nous lui sommes redevables de la résolution complète des systèmes (n, n) « par les déterminants » (*Tratado de Algebra*, publié deux ans après sa mort).



Gabriel Cramer



88 Perpendiculaire commune

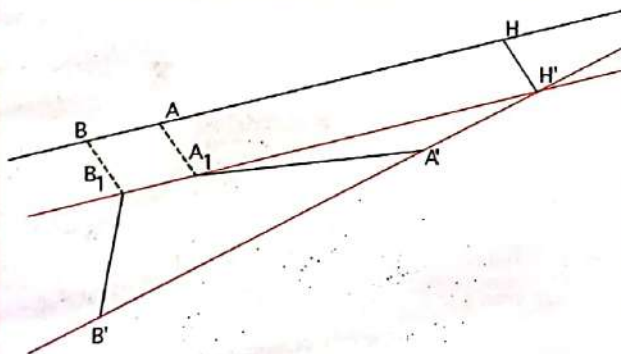
L'étude de la notion de perpendiculaire commune à deux droites (non coplanaires) de l'espace, amorcée à l'exercice 63, page 257, sera approfondie dans le problème 94, page 264. On pourra s'appuyer sur la construction de cette perpendiculaire commune que nous proposons de réaliser ici avec le logiciel Geospac W.

- 1) Créer deux droites (AB) et $(A'B')$ de l'espace.
- 2) Créer le plan P passant par A' et parallèle aux droites (AB) et $(A'B')$.
- 3) Créer les projetés orthogonaux A_1 et B_1 des points A et B sur le plan P ; pour cela, cliquer successivement sur **Créer**, **Point**, **Point image par**, **projection orthogonale sur un plan**.
- 4) Créer le point H' , intersection des droites $(A'B')$ et (A_1B_1) .
Remarque : le logiciel accepte de créer ce point H' car les droites $(A'B')$ et (A_1B_1) sont coplanaires; à titre d'expérience, demander au logiciel de créer le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$...
- 5) Créer le point H , projeté orthogonal de H' sur la droite (AB) .

6) Contrôle : bien évidemment, $\widehat{AHH'} = 90^\circ$.
Pour « mesurer » l'angle $A'H'H$, cliquer successivement sur **Créer**, **Numérique**, **Calcul géométrique**, **Angle géométrique**, et remplir la fenêtre obtenue en choisissant comme unité le degré.
Faire afficher cette mesure avec :

Créer, **Affichage**, **Variable numérique déjà créée**.

La figure suivante est celle que l'on doit obtenir.



Pour une meilleure lisibilité, les divers segments, correspondant aux différentes constructions réalisées, sont matérialisés avec des couleurs différentes.

89 D'après BAC, Nouvelle-Calédonie, 2000.

Il s'agit ici d'utiliser le logiciel Geospac W pour effectuer des calculs vectoriels, analytiques et de grandeurs (distances, aires, volumes...).

Le texte en « caractères usuels » correspond au libellé des questions posées le jour de l'examen, le texte en italique correspond à nos indications.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(4, 0, 0), B(2, 4, 0), C(0, 6, 0)$$

$$S(0, 0, 4), E(6, 0, 0), F(0, 8, 0).$$

1) Réaliser une figure à l'aide de Geospac W comportant les points définis dans l'exercice et que l'on complètera au fur et à mesure.

2) Montrer que le point E est l'intersection des droites (BC) et (OA) .

Créer l'intersection E' des droites (OA) et (BC) et faire afficher les coordonnées du point E' . (Attention, l'origine est désignée par la lettre o minuscule.)

3) On admettra que F est le point d'intersection des droites (AB) et (OC) .

Contrôler cette affirmation.

a) Déterminer à l'aide de Geospac W une équation du plan (SEF) .

*Pour cela cliquer successivement sur **Créer**, **Affichage**, **Equation d'un plan**.*

b) Calculer à l'aide de Geospac W les coordonnées du point A' , barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(S, 3)$.

c) On considère le plan P parallèle au plan (SEF) et passant par A' .

Vérifier à l'aide de Geospac W qu'une équation cartésienne de P est $4x + 3y + 6z - 22 = 0$.

4) Le plan P coupe les arêtes $[SO]$, $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$ de la pyramide $SOABC$ respectivement aux points O' , A' , B' et C' .

Dessiner ces points sur la figure.

Déterminer à l'aide de Geospac W les coordonnées de O' , B' et C' .

5) Vérifier à l'aide de Geospac W que le quadrilatère $O'A'B'C'$ est un parallélogramme.

Rubrique à Bac

Les exercices 90 et 91 proposent un tour d'horizon appuyé de commentaires à travers les thèmes favoris qu'abordent les sujets (toujours sous forme d'exercices).

90 D'après BAC S, Nouvelle-Calédonie, juin 2001.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 2, 2)$, $B(3, 2, 1)$ et $C(1, 3, 3)$.

1) Montrer que les points A , B et C déterminent un plan.
Donner une équation de ce plan.

O Aucune difficulté sur le premier point : il suffit de vérifier que $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires. En ce qui concerne le second, parions qu'elle serait plutôt formulée ainsi : « Déterminer un vecteur orthogonal à $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ et en déduire une équation de ce plan ».

2) On considère les plans (P_1) et (P_2) d'équations respectives :

$$(P_1) : x - 2y + 2z - 1 = 0,$$

$$(P_2) : x - 3y + 2z + 2 = 0.$$

a) Montrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.
On notera (Δ) leur droite d'intersection.

b) Montrer que le point C appartient à la droite (Δ) .

c) Démontrer que le vecteur $\vec{u}(2, 0, -1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) .

d) En déduire une représentation paramétrique de la droite (Δ) .

O Il suffit de vérifier que les vecteurs normaux à P_1 et P_2 ne sont pas colinéaires et qu'ils sont orthogonaux à $\vec{u}$ (le reste est banal).

3) Pour déterminer la distance du point A à la droite (Δ) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 3 \\ z = -k + 3 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}),$$

on considère le point M de paramètre k de la droite (Δ) .

a) Déterminer la valeur de k pour que les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux.

b) En déduire la distance du point A à la droite (Δ) .

O En écrivant $\vec{AM} \cdot \vec{u} = 0$, on obtient une équation du premier degré d'inconnue k et de solution k_0 . Le point M_0 de paramètre k_0 de la droite (Δ) est alors le projeté orthogonal de A sur (Δ) . Par suite, la distance AM_0 est la distance de A à (Δ) .

91 D'après BAC S, Centres étrangers, Groupe 1, juin 2000.

On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 km. Le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ représente le sol.

Les deux « routes aériennes » à contrôler sont représentées par deux droites D_1 et D_2 , dont on connaît des représentations paramétriques :

$$D_1 : \begin{cases} x = 3 + a \\ y = 9 + 3a \\ z = 2 \end{cases} \text{ ; avec } a \in \mathbb{R} ;$$

$$D_2 : \begin{cases} x = 0,5 + 2b \\ y = 4 + b \\ z = 4 - b \end{cases} \text{ , avec } b \in \mathbb{R}.$$

1) a) Indiquer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}_1$ directeur de la droite D_1 et d'un vecteur $\vec{u}_2$ directeur de la droite D_2 .

b) Prouver que les droites D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires.

O Il faut prouver que D_1 et D_2 ne sont ni parallèles (voir que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires), ni sécantes (voir la méthode utilisée dans le problème 1, partie 2., page 248), en notant au passage la bienveillance des auteurs du sujet qui paramétrise D_1 et D_2 avec deux paramètres a et b .

2) On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, de coordonnées $S(3; 4; 0,1)$, un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (R) . Soit P_1 le plan contenant S et D_1 et soit P_2 le plan contenant S et D_2 .

a) Montrer que D_2 est sécante à P_1 .

b) Montrer que D_1 est sécante à P_2 .

O Déterminer $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ (facile) et raisonner ainsi : si D_2 était parallèle à P_1 , alors P_1 serait orthogonal à $\vec{n}$ (pourquoi ?) et donc $\vec{SA} \cdot \vec{n} = 0$ pour A appartenant à D_1 , or...

Noter (c'est assez rare) que l'énoncé ne suggère aucune démarche.

c) Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de (R) pour que cette droite coupe chacune des droites D_1 et D_2 .

Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

O Aucun calcul et sans état d'âme examiner l'intersection des plans P_1 et P_2 .

Problèmes

92 Intersection de trois plans

On considère un tétraèdre $OA_1A_2A_3$ et l'on désigne par :

- $\mathcal{P}_1$ le plan (OA_2A_3) et $\vec{n}_1$ un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$;
- $\mathcal{P}_2$ le plan (OA_3A_1) et $\vec{n}_2$ un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$;
- $\mathcal{P}_3$ le plan (OA_1A_2) et $\vec{n}_3$ un vecteur normal à $\mathcal{P}_3$.

On suppose qu'aucun des sommets A_1 , A_2 et A_3 ne se projette orthogonalement en O sur la face opposée.

1) Montrer que les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ sont non nuls, avec :

- $\vec{u}_1 = (\vec{n}_3 \cdot \vec{n}_1)\vec{n}_2 - (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)\vec{n}_3$;
- $\vec{u}_2 = (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)\vec{n}_3 - (\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3)\vec{n}_1$;
- $\vec{u}_3 = (\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3)\vec{n}_1 - (\vec{n}_3 \cdot \vec{n}_1)\vec{n}_2$.

Piste Supposer $\vec{u}_1 = \vec{0}$ (par exemple).

Étape 1

Établir que $\vec{n}_3 \cdot \vec{n}_1 = 0$ et $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

Étape 2

En déduire que (OA_1) est orthogonale à $\mathcal{P}_1$ et obtenir une contradiction.

2) Montrer que le plan $\mathcal{Q}_1$ orthogonal à $\vec{u}_1$ et passant par O est l'unique plan contenant (OA_1) et perpendiculaire à $\mathcal{P}_1$.

Piste Pour l'unicité, effectuer un raisonnement par l'absurde :

« Si deux plans distincts perpendiculaires à $\mathcal{P}_1$ contiennent (OA_1) , ... ».

Note : de même, le plan $\mathcal{Q}_2$ (respectivement $\mathcal{Q}_3$) orthogonal à $\vec{u}_2$ (respectivement à $\vec{u}_3$) et passant par O est l'unique plan contenant (OA_2) (respectivement (OA_3)) et perpendiculaire à $\mathcal{P}_2$ (respectivement à $\mathcal{P}_3$).

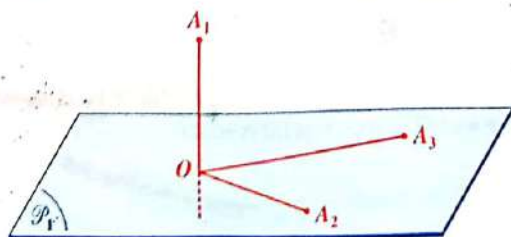
3) a) Montrer que les plans $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ et $\mathcal{Q}_3$ sont deux à deux distincts.

b) Montrer que $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{0}$ et en déduire que les plans $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ et $\mathcal{Q}_3$ se rencontrent selon une droite passant par O .

Commentaires

Si, par exemple, A_1 se projette en O sur le plan $\mathcal{P}_1 = \text{plan}(OA_2A_3)$, il existe une infinité de plans contenant (OA_1) et perpendiculaires à $\mathcal{P}_1$: tous les plans contenant (OA_1) (voir la figure ci-dessous).

Voilà expliquée la restriction imposée au tétraèdre en début d'énoncé.



93 Sur la sphère

Dans un repère orthonormal (O, I, J, K) , on considère les points A , B et C sur la sphère de centre O , de rayon 1, de cotes positives ou nulles, tels que :

• A appartient au plan (OIK) et $\widehat{TOA} = \theta_1$, avec $0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$;

• C appartient au demi-plan défini par $z = 0$ et $y \geq 0$ et : $\widehat{TOC} = \varphi$, avec $0 \leq \varphi \leq \pi$;

• B appartient au plan (OCK) et $\widehat{COB} = \theta_2$, avec $0 \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$.

1) Faire une figure illustrant ces données.

2) Montrer que les coordonnées de A et C sont données par : $A(\cos \theta_1, 0, \sin \theta_1)$ et $C(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$.

3) Soit H le projeté orthogonal de B sur le plan (IOJ) .

Prouver que $\overrightarrow{OH} = \cos \theta_2 \overrightarrow{OC}$ et en déduire l'abscisse x_B de B .

4) Déduire des résultats précédents que :

$$\cos \widehat{AOB} = \cos \varphi \times \cos \theta_1 \times \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \times \sin \theta_2.$$

5) Application

Sur la surface terrestre, la courbe de longueur minimale reliant deux points est l'arc de grand cercle passant par ces deux points (section de la sphère par le plan diamétral contenant ces deux points) : elle est appelée **orthodromie**.

Calculer la longueur en milles de l'orthodromie entre Plymouth (Grande-Bretagne) et New York (États-Unis), à l'aide des données suivantes :

- New York : 40,43° nord, 74,01° ouest ;
- Plymouth : 50,23° nord, 4,10° ouest ;
- rayon de la sphère terrestre : 6 375 km ;
- 1 mille = 1,859 km.

La plus courte, la meilleure ?

Bien que de plus court chemin, l'orthodromie entre Plymouth et New York n'est pratiquement jamais utilisée en navigation : trop semée d'embûches (icebergs, brumes de Terre-Neuve, ...), elle nécessite de plus une rectification du cap « à chaque instant », au contraire de la loxodromie : navigation à cap constant (2 920 milles entre Plymouth et New York).

94 Perpendiculaire commune

Soit deux droites $D = \mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $D' = \mathcal{D}(A', \vec{u}')$ non coplanaires.

Il s'agit dans ce problème :

- de montrer qu'il existe une unique droite Δ sécante à D et à D' et orthogonale à D et à D' (par définition, Δ sera appelée **perpendiculaire commune** à D et à D') ;
- d'étudier quelques propriétés liées à la droite Δ (propriétés géométriques, métriques et point de vue analytique).

I) Existence et unicité de la droite Δ

Soit M un point de D et M' un point de D' .

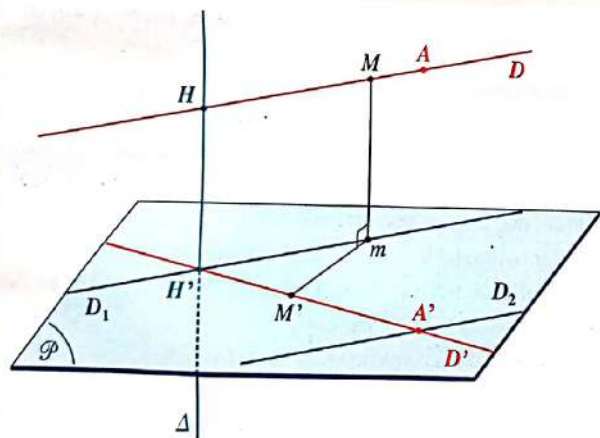
1) Justifier qu'il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u}$, $\overrightarrow{A'M'} = y\vec{u}'$ et montrer que la droite (MM') est orthogonale à D et à D' si, et seulement si, (x, y) est solution du système :

$$\begin{cases} x\|\vec{u}\|^2 - y(\vec{u} \cdot \vec{u}') = \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} \\ x(\vec{u} \cdot \vec{u}') - y\|\vec{u}'\|^2 = \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}' \end{cases}$$

2) Montrer que le déterminant de ce système est non nul et en déduire l'existence d'une perpendiculaire commune à D et à D' et son unicité.

II) Propriétés géométriques

Dans toute cette partie, on pourra s'appuyer sur la figure ci-après dont les divers éléments sont précisés au fur et à mesure dans l'énoncé (voir aussi la construction réalisée avec Geospac W, exercice 88, page 261).



1) Montrer que D est parallèle au plan $\mathcal{P} = \text{plan}(A', \vec{u}', \vec{u})$ et en déduire que la projection orthogonale D_1 de D sur le plan $\mathcal{P}$ est parallèle à D et sécante avec D' en un point noté H' (sur la figure, D_2 est la parallèle à D menée de A' : son seul rôle est de mieux visualiser le plan $\mathcal{P}$).

2) Prouver alors que la perpendiculaire Δ au plan $\mathcal{P}$ menée de H' est la perpendiculaire commune à D et à D' .

3) On désigne par H le point d'intersection de Δ et $\mathcal{D}$. Montrer que, quels que soient les points M de $\mathcal{D}$ et M' de $\mathcal{D}'$, on a $HH' \leq MM'$.

Piste Utiliser le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.

Note : ainsi, la perpendiculaire commune à D et à D' rencontre D et D' en des points H et H' tels que HH' est la plus petite distance entre les points de D et ceux de D' : on l'appelle **distance entre les droites D et D'** .

III) Le point de vue analytique

On donne $A(1, 0, -1)$, $\vec{u}(2, -1, 0)$, $A'(2, 1, 1)$ et $\vec{u}'(0, 2, 3)$.

1) Montrer que $D = \mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $D' = \mathcal{D}(A', \vec{u}')$ ne sont pas coplanaires.

2) Calculer les coordonnées des points d'intersection H et H' de la perpendiculaire commune Δ à D et D' avec les droites D et D' .

Piste Déterminer les réels s et t tels que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= s\vec{u} ; \overrightarrow{A'H'} = t\vec{u}' \\ \text{et } \overrightarrow{HH'} \cdot \vec{u} &= \overrightarrow{HH'} \cdot \vec{u}' = 0. \end{aligned}$$

3) En déduire une représentation paramétrique de Δ et la distance entre les droites D et D' .

95 Parallèle à un plan fixe

L'espace étant muni d'un repère orthonormal (O, I, J, K) on considère les droites :

- $\mathcal{D}_1$ passant par K et parallèle à (OJ) ;
- $\mathcal{D}_2$ passant par $L(0, 0, 2)$ et parallèle à (OI) ;
- $\Delta = (OA)$ où A est le point de coordonnées $(1, 1, 0)$.

1) Montrer que $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et Δ sont deux à deux non coplanaires.

2) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ .

3) Soit P un point de Δ . On désigne par $\mathcal{P}_1$ le plan passant par P et contenant $\mathcal{D}_1$ et par $\mathcal{P}_2$ le plan passant par P et contenant $\mathcal{D}_2$.

a) Justifier que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant une droite notée $\mathcal{D}$ qui passe par P .

b) Vérifier que $P(3, 3, 0)$ appartient à Δ et représenter graphiquement les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, Δ et la droite $\mathcal{D}$ correspondant au point $P(3, 3, 0)$.

4) On revient au cas général : P quelconque sur Δ , et l'on désigne par a l'abscisse de P .

a) Exprimer en fonction de a les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}_1$ normal à $\mathcal{P}_1$ et celles d'un vecteur $\vec{n}_2$ normal à $\mathcal{P}_2$.

b) On pose $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{k}$.

Prouver que le vecteur $-2\vec{u} + \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

c) En déduire que, quel que soit le point P de Δ , la droite $\mathcal{D}$ reste parallèle à un plan fixe dont on précisera un repère.

→ Probabilités, conditionnement et indépendance

OBJECTIFS

- Poursuivre l'étude des phénomènes aléatoires entreprise en classe de Première.
- Introduire un nouvel outil probabiliste : la notion de probabilité conditionnelle.
- Présenter quelques applications dans divers domaines : jeux, Médecine, Génétique, etc.

« Rien n'est moins sûr que l'incertain. »

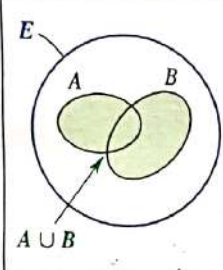
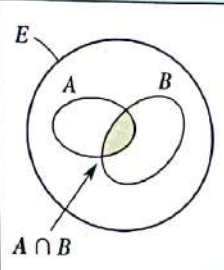
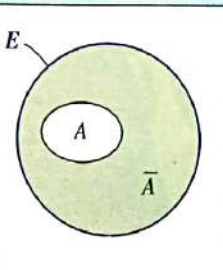
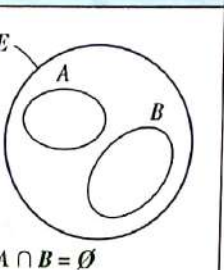
Pierre Dac

Avant-première

1. OBJECTIFS

- Renouer avec le langage et les notations : expérience aléatoire, événement, probabilité, variable aléatoire... (nous commencerons par un rappel sur les ensembles).
- Revoir quelques calculs sur les probabilités et les variables aléatoires.
- Introduire la notion de **probabilité conditionnelle**.

2. LANGAGE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE (RAPPEL)

réunion de A et B : $A \cup B$	intersection de A et B : $A \cap B$	complémentaire de A : $\bar{A}$	A et B sont disjoints : $A \cap B = \emptyset$
			

Partition

Les parties $A_1, A_2, \dots, A_p$ constituent une **partition** de E si elles sont deux à deux disjointes et si leur réunion est égale à E (Fig. 1).

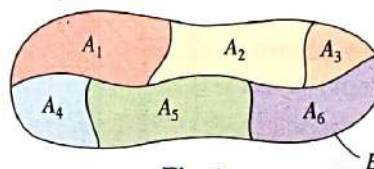


Fig. 1

3. CALCUL DE PROBABILITÉS

Rappel : lorsque toutes les issues sont équiprobables :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre total d'issues}}$$

Séquence 1

Deux expériences de référence

① Avec un dé

On lance 2 fois de suite un dé équilibré.

1) Représenter dans un tableau les 36 issues équiprobables.

2) Calculer la probabilité des événements :

A : « on obtient un double » ;

B : « on obtient 2 numéros consécutifs » ;

C : « on obtient au moins un six » ;

D : « la somme des numéros dépasse 7 ».

② Avec une pièce

On lance 4 fois de suite une pièce de monnaie honnête et équilibrée.

1) Dresser la liste des 16 issues équiprobables.

2) Quel est l'événement le plus probable : A ou B ?

A : « 2 piles et 2 faces ».

B : « 3 piles et 1 face ou 3 faces et 1 pile ».

4. VARIABLES ALÉATOIRES

Rappel : si une variable aléatoire X prend les valeurs $x_1, \dots, x_n$, la loi de X peut être définie à l'aide du tableau suivant, dans lequel $p_i = P(X = x_i)$.

valeurs x_i	x_1	...	x_n
probabilités p_i	p_1	...	p_n

On calcule alors l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X par :

$$\mu = E(X) = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n ; \quad \text{Var} X = p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2 ;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

Séquence 2

Deux façons de jouer à la roulette

Au jeu de la roulette, les 37 numéros $\{0, 1, 2, \dots, 36\}$ sont équiprobables ; de plus, 18 de ces numéros sont rouges. On considère les deux jeux suivants.

Jeu n° 1

On mise 1 € sur « rouge » ; on gagne 1 € si un numéro rouge sort, sinon on perd sa mise.

Jeu n° 2

On mise 1 € sur un numéro ; on gagne 35 € si le numéro sort, sinon on perd sa mise.

1) On note X le gain réalisé avec le jeu n° 1.

Déterminer la loi de X , calculer son espérance et sa variance.

2) On note Y le gain réalisé avec le jeu n° 2.

Déterminer la loi de Y , calculer son espérance et sa variance.

3) Comparer les deux jeux (gain moyen, risque...) à l'aide des résultats précédents.

5. NOTION DE PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Séquence 3

Une approche fréquentiste

Les 400 élèves de Terminale d'un lycée sont répartis en deux groupes : A et D selon leur langue vivante 1 (LV1) : anglais ou allemand. Le tableau suivant précise cette répartition pour les garçons (G) et les filles (F).

LV1	anglais (A)	allemand (D)
garçons (G)	130	50
filles (F)	140	80

Un élève est choisi au hasard dans le fichier des Terminales.

1) Calculer la probabilité :

a) que l'élève soit une fille (notée $P(F)$) ;

b) que l'élève ait pour LV1 l'allemand.

2) Sachant que l'élève est une fille, quelle est la probabilité que sa LV1 soit l'allemand ?

3) Comparer ce résultat avec $\frac{P(D \cap F)}{P(F)}$.

Nous avons calculé à la question 2) la probabilité de D sachant que F est réalisé.

Ce nombre, que nous noterons $P(D/F)$ en cours, est égal à :

$$\frac{\text{effectif de } D \cap F}{\text{effectif de } F} = \frac{\text{fréquence de } D \cap F \text{ dans } E}{\text{fréquence de } F \text{ dans } E}.$$

Cela explique le résultat obtenu en 3).

Nous nous appuyerons là-dessus pour la définition de la probabilité conditionnelle.

1. Le point sur les probabilités

1.1 MODÉLISATION D'UNE EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

Loi de probabilité

Lorsqu'une expérience aléatoire comporte un nombre fini d'issues⁽¹⁾, on définit sur l'ensemble $E = \{x_1, \dots, x_r\}$ – E est appelé **univers** – des issues une **loi de probabilité** en se donnant une suite de nombres $(p_1, \dots, p_r)$ vérifiant :

$$\text{pour tout } i \ (1 \leq i \leq r) : p_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^r p_i = 1.$$

Exemple : lorsqu'on prélève au hasard une boule dans l'urne représentée sur la figure 2, si l'on considère les trois issues R (rouge), B (bleue) et J (jaune), plusieurs choix des p_i remplissent les conditions précédentes, mais le modèle choisi n'est bon que lorsque les **fréquences statistiques** f_i se rapprochent des p_i , quand le nombre d'expériences devient grand.



Fig. 2

Notre intuition nous conduit au modèle ci-contre :

issue x_i	R	B	J
probabilité p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Loi équirépartie (ou équiprobabilité)

Soit $P = (p_1, \dots, p_r)$, une loi de probabilité sur $E = \{x_1, \dots, x_r\}$.

On dit que la loi P est **équirépartie** sur E si tous les p_i sont égaux.

Dans ce cas (fréquent), on a pour chaque issue x_i : $P(x_i) = p_i = \frac{1}{r}$.

Paramètres associés (issues numériques)

Soit $E = \{x_1, \dots, x_r\}$ un ensemble de **nombres** représentant les issues d'une expérience aléatoire, et $P = (p_1, \dots, p_r)$ une loi de probabilité sur E .

On appelle :

– **espérance** de la loi P le nombre :

$$\mu = \sum_{i=1}^r p_i x_i;$$

– **variance** de la loi P le nombre :

$$V = \sum_{i=1}^r p_i (x_i - \mu)^2 = \sigma^2;$$

– **écart-type** de la loi P le nombre :

$$\sigma = \sqrt{V}.$$

(1) Lorsque l'ensemble des issues est infini (certains cas seront envisagés au chapitre 10), on ne définit pas la probabilité à partir des issues, mais à partir de certains événements permettant d'obtenir tous les autres par union, intersection, complémentaire...

1.2 PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT

Événements

Soit $E = \{x_1, \dots, x_r\}$ l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.

On appelle **événement** toute partie A de E .

Un événement $\{x_i\}$ réduit à une seule issue est un **événement élémentaire**.

E est l'**événement certain**, $\emptyset$ (qui est une partie de E) est l'**événement impossible**.

• Par définition, la probabilité d'un événement A est la **somme** de toutes les probabilités des issues appartenant à A . (On convient que $P(\emptyset) = 0$.)

• Dans le cas de l'**équiprobabilité**, cette définition ramène le calcul de $P(A)$ à un problème de **comptage** (ou de **dénombrement**).

Certaines procédures classiques de dénombrement seront mises en évidence au *chapitre 10* où nous effectuerons une synthèse sur la question.

THÉORÈME 1

Lorsqu'il y a **équiprobabilité** sur E , on a, pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } E}$$

1.3 PROPRIÉTÉS DES PROBABILITÉS

Ces propriétés, établies en classe de Première, sont rassemblées dans le tableau suivant :

parties de E	vocabulaire des événements	propriété
A	A quelconque	$0 \leq P(A) \leq 1$
$\emptyset, E$	événement impossible , certain	$P(\emptyset) = 0 \quad P(E) = 1$
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont incompatibles	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
$\bar{A}$	$\bar{A}$ est l'événement contraire de A	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
A, B	A et B quelconques	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



EXEMPLE 1

On extrait une carte au hasard d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de l'événement C : « la carte n'est ni un roi ni un cœur » ?

On a $C = \overline{A \cup B}$, avec A : « un roi » et B : « un cœur ».

Or $P(A) = \frac{1}{8}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$.

On en tire :

$$P(A \cup B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}, \text{ d'où :}$$

$$P(C) = \frac{21}{32}.$$

Voir exercices 1 à 9

1.4 VARIABLES ALÉATOIRES

Exemple

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 2 € pour chaque résultat « Pile » et on perd 1 € pour chaque « Face ».

L'ensemble des issues est $E = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$ et il est de bon sens de choisir l'équiprobabilité sur E .

L'application $X : E \mapsto \mathbb{R}$, qui à chaque issue associe le **gain** correspondant, prend les valeurs $-3, 0, 3$ et 6 ; pour chaque valeur (telle que $+3$), on peut considérer l'événement

$$(X = +3) = \{PPF, PFP, FPP\} \text{ et associer sa probabilité } \left(\frac{3}{8}\right).$$

On obtient une nouvelle **loi de probabilité** sur l'ensemble des gains $E' = X(E) = \{-3, 0, 3, 6\}$; nous la nommons **loi de X** :

gain x_i	$x_1 = -3$	$x_2 = 0$	$x_3 = 3$	$x_4 = 6$
probabilité $p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

DÉFINITION 1

• Une **variable aléatoire** X est une application définie sur un ensemble E muni d'une probabilité P , à valeurs dans $\mathbb{R}$.

X prend les valeurs $x_1, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, \dots, p_n$ définies par :

$$p_i = P(X = x_i).$$

• L'affectation des p_i aux x_i permet de définir une nouvelle loi de probabilité sur $E' = \{x_1, \dots, x_n\}$. Cette loi, notée **P'** ou **P_X** , est appelée la **loi de X** .

| **Espérance, variance, écart-type d'une variable aléatoire.**

DÉFINITION 2

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, \dots, p_n$.

On appelle respectivement **espérance mathématique** de X , **variance** de X et **écart-type** de X , l'espérance, la variance et l'écart-type de la **loi de probabilité P_X** de X (au sens défini à la page 268).

Notations : $E(X)$, $\text{Var}(X)$, $\sigma(X)$.



EXEMPLE 2

Calculer $E(X)$, $\text{Var}(X)$ et $\sigma(X)$ pour la variable X de l'exemple ci-dessus.

$$E(X) = -3 \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{3}{8} + 6 \times \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

C'est le gain moyen.

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \frac{1}{8} \times \left(-3 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \times \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \times \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \times \left(6 - \frac{3}{2}\right)^2 \\ &= 6,75 ; \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} \approx 2,60.$$

Voir exercices 10, 11, 15 à 18

1.5 PROPRIÉTÉS DE L'ESPÉRANCE, DE LA VARIANCE...

Quelques interprétations

• $E(X)$ est la **moyenne** des valeurs x_i , **pondérées** par les valeurs p_i ; l'analogie avec la moyenne statistique permet de noter $E(X) = \bar{X}$.

• Dans le domaine des jeux (le terme « espérance » vient de là), $E(X)$ est le **gain moyen** que peut espérer un joueur sur un grand nombre de parties.

Cela permet de qualifier un jeu d'**équitable** (ou **honnête**) lorsque $E(X) = 0$; lorsque $E(X) > 0$, le jeu est **favorable** au joueur – **défavorable** si $E(X) < 0$.

• Tout comme en statistique, variance et écart-type sont des paramètres de dispersion. Plus qu'à leur valeur intrinsèque, il faut accorder une signification à leur comparaison, pour deux variables aléatoires définies sur le même ensemble.

En terme de jeu, cette dispersion traduit le **risque** de gagner ou perdre gros.

Le résultat suivant permet de simplifier certains calculs (voir *exemple 3*).
Il sera démontré dans l'*exercice 12*, page 283.

THÉORÈME 2 (Linéarité de l'espérance)

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur la même situation, et a un réel.

Alors l'espérance des nouvelles variables aléatoires $X + Y$ et aX est donnée par :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX) = aE(X).$$



EXEMPLE 3

On lance trois dés. Quelle est, en moyenne, la somme des points obtenus ?

Soit X_1 , X_2 et X_3 , les variables aléatoires désignant les points obtenus sur chaque dé.

La somme des points obtenus est $X = X_1 + X_2 + X_3$.

Comme $E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3,5$,

nous en tirons $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$ soit :

$$E(X) = 10,5.$$

(N'est-ce pas tout simple ?)

Voir *exercice 14*



Les conséquences suivantes du *théorème 2* seront prouvées dans l'*exercice 13*, page 283.

COROLLAIRE

Soit X une variable aléatoire, a et b deux réels. Alors :

$$E(X + b) = E(X) + b ;$$

$$\text{Var}(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 ;$$

$$\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}X \quad \text{et} \quad \sigma(aX) = |a| \sigma(X) ;$$

$$\text{Var}(X + b) = \text{Var}(X) \quad \text{et} \quad \sigma(X + b) = \sigma(X).$$

En d'autres termes : ajouter b à une variable, cela ajoute b à son espérance mais ne change pas sa variance ni son écart-type ; multiplier une variable par a , cela multiplie son espérance par a et sa variance par a^2 .

2. Probabilités conditionnelles

2

2.1 DÉFINITION

DÉFINITION 3

Soit A un événement de l'ensemble E des issues, tel que $P(A) \neq 0$.

On définit sur E une nouvelle probabilité, notée P_A , en posant, pour tout événement B :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

P_A est appelée **probabilité conditionnelle sachant que A est réalisé**, et on note encore $P_A(B) = P(B/A)$: « probabilité de B sachant A ».

Notes

- Cette définition s'appuie sur l'approche effectuée dans la *séquence 3*, page 267, et la généralise. Il faut souligner que nous admettons le fait que P_A est bien une probabilité.
- Il est fréquent que la probabilité conditionnelle $P_A(B) = P(B/A)$ découle immédiatement de l'expérience aléatoire. L'égalité qui la définit est alors plus efficace ainsi écrite :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A).$$

→ EXEMPLE 4

On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne ci-contre.

Quelle est la probabilité de tirer deux rouges ?

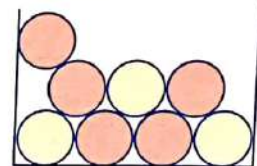
Considérons les événements A : « une rouge en premier » et B : « une rouge en second ».

Il est clair que $P(A) = \frac{5}{8}$, et nous voulons calculer :

$$P(A \cap B), \text{ soit } P(A) \times P(B/A).$$

Or $P(B/A)$ est la probabilité d'obtenir une rouge dans l'urne qui ne contient plus que quatre rouges et trois jaunes.

$$\text{On a donc } P(B/A) = \frac{4}{7}, \text{ puis } P(A \cap B) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14}.$$



Voir exercices 19 à 23

2.2 FORMULE DES « PROBABILITÉS TOTALES »

THÉORÈME 3

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements de probabilité non nulle, réalisant une **partition** de l'univers E . Alors, pour tout événement B :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) \text{ avec, pour } 1 \leq k \leq n :$$

$$P(A_k \cap B) = P(A_k) \times P_{A_k}(B).$$

... Démonstration

Le résultat découle de ce que les $\{A_k \cap B\}$ ($1 \leq k \leq n$) constituent une partition de B , et de la *définition 3*.

2.3 MISE EN ŒUVRE DANS LE CAS D'ÉPREUVES RÉPÉTÉES

L'idée

Lorsque la réalisation d'un événement B dépend de celle d'autres événements $A_1, A_2, \dots$ qui constituent une partition de l'univers E , on utilise la formule des probabilités totales pour le calcul de $P(B)$.

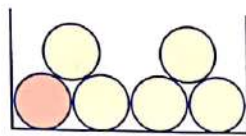
L'intérêt ? Il réside dans le fait que le calcul de $P(A_1 \cap B), P(A_2 \cap B), \dots$ se fait à l'aide des probabilités conditionnelles $P(B/A_1), P(B/A_2), \dots$ qui découlent de l'expérience.

L'exemple suivant illustre cet aspect (voir aussi la rubrique *Méthode*, page 275, pour une autre présentation des choses).

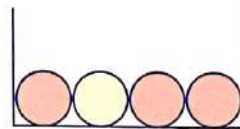


EXEMPLE 5

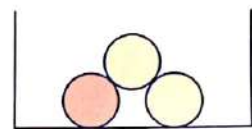
On considère les urnes U_1, U_2 et U_3 schématisées ci-dessous.



U_1 : 1 rouge, 5 jaunes



U_2 : 3 rouges, 1 jaune



U_3 : 1 rouge, 2 jaunes

On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne.
Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

1) Modélisation et notations

L'univers E (ensemble des issues) est l'ensemble des boules des trois urnes.

Notons U_1 l'événement « l'urne choisie est U_1 » ; on définit de même U_2 et U_3 .

Notons R et J les événements respectifs « la boule tirée est rouge » et « la boule tirée est jaune ».

2) Solution

Nous devons calculer $P(R)$. Or, U_1, U_2 et U_3 constituent une partition de E .

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(U_1 \cap R) + P(U_2 \cap R) + P(U_3 \cap R).$$

Calculons ces trois probabilités ; il est clair que :

$$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}.$$

D'autre part, $P(R/U_1) = \frac{1}{6}$ (c'est la probabilité de tirer une rouge de U_1).

De même $P(R/U_2) = \frac{3}{4}$ et $P(R/U_3) = \frac{1}{3}$.

Il en résulte :

$$P(U_1 \cap R) = P(U_1) \times P(R/U_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18},$$

et de façon analogue :

$$P(U_2 \cap R) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(U_3 \cap R) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Finalement, $P(R) = \frac{1}{18} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$, soit $P(R) = \frac{5}{12}$.

Voir exercices 24 et 25

3. Indépendance

3.1 ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

DÉFINITION 4

On dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

(Cela revient à dire, si $P(A) \neq 0$, que $P(B/A) = P(B)$.)

Remarque : la seconde formulation rend plus naturelle la définition : il paraît normal de considérer comme « indépendants », au sens intuitif du terme, deux événements A et B dès lors que la probabilité de B est la même que la probabilité de B sachant A .

3.2 VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES

DÉFINITION 5

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers E .

X prend les valeurs $x_1, \dots, x_n$ et Y les valeurs $y_1, \dots, y_m$.

On dit que X et Y sont **indépendantes** lorsque, pour tous i et j ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$), les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants.

3.3 EXPÉRIENCES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES

Principe

Il n'est pas rare que des expériences aléatoires répétées (identiques ou non) soient **indépendantes**, au sens intuitif du terme. Dans ce cas, nous admettrons que, conformément à l'intuition :

- la probabilité de la liste des résultats est le produit des probabilités de chaque résultat ;
- deux variables aléatoires attachées à deux expériences différentes sont indépendantes.

Commentaire

Ce principe peut se justifier, dans certains cas, par le dénombrement effectif des listes de résultats (voir *Analyse Première S*, collection Terracher, page 263 : le **principe multiplicatif**, ou encore le chapitre 10 de ce volume).

→ EXEMPLE 6

On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée. Quelle est la probabilité de l'événement A : « on obtient au moins une fois Pile » ?

D'après le principe précédent, $P(\bar{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$ (c'est la probabilité d'obtenir n fois Face). Donc :

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

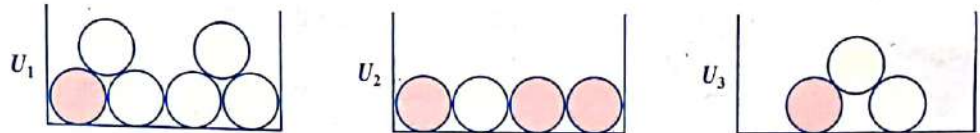
Voir exercices 26 à 31



Méthode

La méthode des arbres de probabilités

Considérons à nouveau la situation de l'exemple 5, page 273, avec les trois urnes :



L'expérience est celle décrite à l'exemple 5, avec les mêmes notations.

Chemins

Nous assimilons l'intersection de deux événements à un **chemin** ; ainsi $U_1 \cap R$ peut être assimilé au chemin $U_1 \rightarrow R$ (ou bien : $R \rightarrow U_1$).

Nous convenons de placer sur chaque **branche** d'un chemin un nombre : une **probabilité sur la première branche**, des **probabilités conditionnelles sur les autres**.

Sur l'exemple, cela donne : $\xrightarrow[\text{P}(U_1)]{\frac{1}{3}} U_1 \xrightarrow[\text{P}(R/U_1)]{\frac{1}{6}} R$

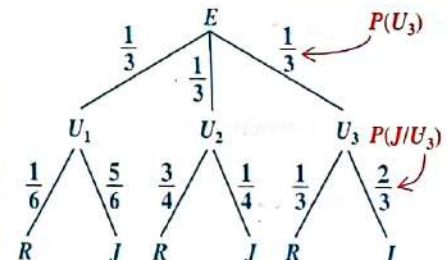
Arbre

Le déroulement de l'expérience aléatoire peut être schématisé dans un **arbre** (de gauche à droite ou de haut en bas) constitué de tous les chemins possibles.

Principe de construction

Tous les chemins qui partent d'un événement constituent une partition de cet événement.

Toutefois, on peut parfois se contenter d'un arbre partiel (voir *Au cœur des problèmes*, partie 2, page 279).



➔ Règles de calcul dans un arbre

① La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités marquées sur ses branches.

$$\text{Ainsi } P(U_1 \cap R) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6}$$

(ce que traduit l'égalité $P(U_1 \cap R) = P(U_1) \times P(R/U_1)$).

② La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui conduisent à cet événement.

$$\text{Ainsi } P(R) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{12} \quad (\text{ce que traduit la formule des probabilités totales : voir exemple 5, page 273}).$$

Voir exercices 32 à 37

1. Utilisation de modèles de référence

OBJECTIF

Utiliser des modèles – désormais bien connus – d'expériences aléatoires classiques (telles que **lancer de dés, de pièces, tirages dans une urne**) dans le traitement d'autres expériences aléatoires.

PROBLÈME 1

Le problème des taxis

(D'après A. Engel, *Les Certitudes du hasard*, Paris, Aléas Éditeur, 1990)

Dans une ville, les taxis sont numérotés $1, 2, \dots, n$.

Dans la rue, un promeneur observe les quatre premiers taxis qui passent, et note leurs numéros : 93, 205, 77 et 191.

Un chauffeur de taxi interrogé prétend que $n = 650$.

Quel crédit peut-on donner à cette affirmation ?

1 Un modèle

Supposons que le chauffeur a dit vrai : $n = 650$.

Dans ce cas, l'expérience aléatoire qui consiste à noter les quatre premiers numéros qui passent revient à **réaliser quatre tirages successifs avec remise dans une urne** contenant 650 boules numérotées de 1 à 650.

Les quatre numéros observés nous incitent à considérer l'événement A : « **les quatre boules tirées ont un numéro inférieur ou égal à 205** ».

Le calcul de $P(A)$ apportera un certain crédit à l'affirmation du chauffeur (si $P(A)$ est « raisonnable ») ou la discréditera (si $P(A)$ est trop proche de 0).

2 Calculs et interprétation

Le schéma classique des tirages indépendants avec remise nous donne :

$$P(A) = \left(\frac{205}{650}\right)^4 \approx 9,9 \times 10^{-3}.$$

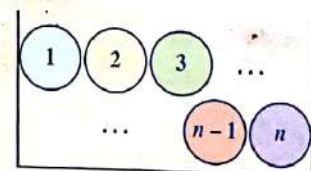
Si le chauffeur a dit vrai, l'événement A a moins de 1 % de chance de se produire ! Cela jette un doute sur l'affirmation.

Remarque : le calcul effectué ne dit pas que le chauffeur a menti, mais il aide à prendre une décision, qui, elle, est toute subjective. Nous pouvons, par exemple, décider que le chauffeur a menti dès lors que $P(A) < 0,01$ ou fixer un seuil différent (0,005 ou 0,05 sont des seuils classiques).

PASSE-PARTOUT

Le modèle de l'urne

Les tirages (avec ou sans remise) de boules dans une urne : un grand nombre de situations s'y ramènent. Ainsi, lancer trois dés revient à réaliser trois tirages avec remise dans une urne contenant six boules numérotées 1, 2, ..., 6.



PROBLÈME 2

Le problème des anniversaires

Dans une classe de 34 élèves, est-il raisonnable de parier que deux élèves au moins fêtent leur anniversaire le même jour de l'année (événement A) ?

① Un modèle

Nous supposons que toutes les années ont exactement 365 jours (on néglige les années bissextiles) et que chaque élève peut être né, de façon équiprobable, l'un des 365 jours de l'année.

La donnée des 34 jours anniversaires peut être assimilée à 34 tirages successifs avec remise dans une urne contenant 365 boules numérotées de 1 à 365.

② Les calculs

L'événement A qui nous intéresse est l'ensemble des listes de 34 tirages contenant au moins deux numéros identiques.

La probabilité de l'événement contraire $\bar{A}$ (l'ensemble des listes contenant 34 numéros tous distincts) est plus simple à calculer :

$$P(\bar{A}) = \left(\frac{365}{365}\right) \times \left(\frac{364}{365}\right) \times \left(\frac{363}{365}\right) \times \dots \times \left(\frac{332}{365}\right) \approx 0,205.$$

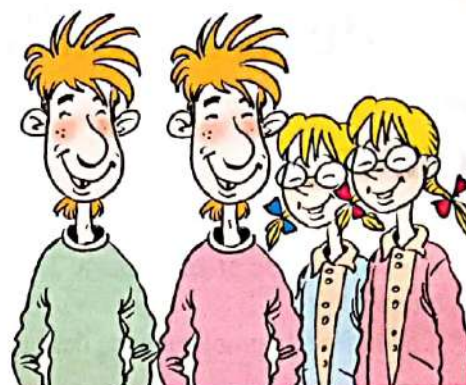
De l'égalité, $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, il ressort :

$$P(A) \approx 0,795.$$

Il y a près de 80 % de chances de gagner le pari !

Remarque : si l'on note p_n la probabilité de A dans une classe de n élèves, les valeurs de p_n ajoutent à l'étonnement :

n	15	20	23	30	50	57
p_n	25 %	41 %	50 %	70 %	97 %	99 %



Explication du calcul

- Au premier tirage, n'importe quel numéro convient : 365 possibilités ;
- au deuxième tirage, il faut éviter le premier numéro tiré : 364 possibilités ;
- au troisième tirage, il faut éviter les deux premiers numéros tirés : 363...

Dans la foulée

① Les signes du zodiaque

Étant donné un groupe de n personnes ($n \geq 2$), on note p_n la probabilité que deux personnes au moins soient nées sous le même signe zodiacal (il y a 12 signes).

1) Que vaut p_n si $n \geq 13$?

2) Calculer p_7 et p_8 .

Remarque ?

② On tire les pois

Un pâtissier mélange trois fèves dans 1 kg de pâte feuilletée et confectionne deux galettes.

1) Montrer que la probabilité que chaque galette contienne au moins une fève est 0,75.

2) Combien aurait-il fallu placer de fèves pour que cette probabilité dépasse 0,99 ?

2. Utilisation d'arbres de probabilités

OBJECTIFS

- Savoir utiliser une partition pour calculer des probabilités, à l'aide d'un **arbre** (voir *Méthode*, page 275) ou de la formule des probabilités totales.
- S'initier à la problématique des tests de dépistage en médecine.

PROBLÈME 1

L'expérience clé

Deux urnes U_1 et U_2 contenant respectivement cinq boules rouges, trois vertes et une rouge, quatre vertes sont représentées ci-contre (Fig. 3).

On choisit une urne au hasard, puis on prélève au hasard une boule dans cette urne.

La boule tirée est rouge ; quelle est la probabilité qu'elle provienne de U_1 ?

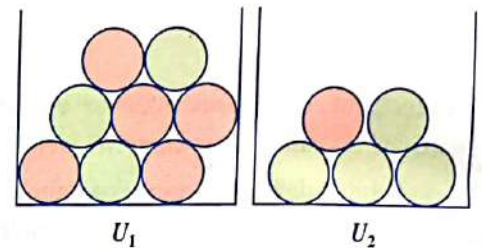


Fig. 3

1 Modélisation et notations

Notons U_1 (resp. U_2) l'événement « l'urne choisie est U_1 » (resp. U_2), puis R (resp. V) l'événement « la boule tirée est rouge » (resp. verte).

L'énoncé nous demande de calculer $P(U_1/R)$.

Ce calcul nécessite la connaissance de $P(R)$ et de $P(U_1 \cap R)$, d'où l'idée de calculer $P(U_1 \cap R)$ et $P(R)$ à l'aide d'un arbre.

2 Les calculs

Les données nous conduisent à l'arbre réduit ci-contre (Fig. 4) (les chemins correspondant aux événements $U_1 \cap V$ et $U_2 \cap V$ ne sont pas construits).

Nous en déduisons :

$$P(R) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}, \text{ soit :}$$

$$P(R) = \frac{33}{80}.$$

La définition de la probabilité conditionnelle conduit à :

$$P(U_1/R) = \frac{P(U_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{5}{8}}{\frac{33}{80}}, \text{ d'où :}$$

$$P(U_1/R) = \frac{25}{33} \approx 0,76.$$

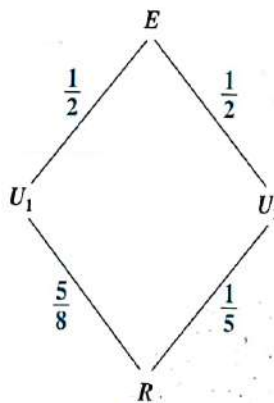


Fig. 4

À NOTER

Arbres « réduits »

On peut ne représenter que les chemins qui aboutissent aux événements considérés (sans en oublier). Cela simplifie l'arbre et épargne des calculs de probabilités inutiles.

PROBLÈME 2

Valeur diagnostique d'un test

Le test de dépistage d'une maladie possède les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'un individu malade ait un test positif est 0,99 ;
- la probabilité qu'un individu sain ait un test négatif est 0,99.

Exprimer en fonction de p (proportion de malades dans la population) la probabilité qu'un individu, dont le test est positif, soit malade.

1 Formalisation et notations

Notons T l'événement : « le test est positif » et M l'événement : « la personne est malade ».

Les données de l'énoncé se traduisent par :

$$P(M) = p ; P_M(T) = P(T/M) = 0,99 ;$$

$$P_{\bar{M}}(\bar{T}) = P(\bar{T}/\bar{M}) = 0,99.$$

La question est : « calculer $P(M/T)$ ».

Dès lors, nous utiliserons le schéma de résolution du problème 1.

L'expérience aléatoire

Elle consiste à « prélever » un individu au hasard dans la population.

2 Solution

• Calcul de $P(T)$

D'après l'arbre ci-contre (Fig. 5) :

$$P(T) = 0,99p + 0,01(1-p),$$

$$\text{soit : } P(T) = 0,98p + 0,01.$$

• Calcul de $P(M/T)$

$$P(M/T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,99p}{0,98p + 0,01},$$

$$\text{soit : } P(M/T) = \frac{99p}{98p + 1}.$$

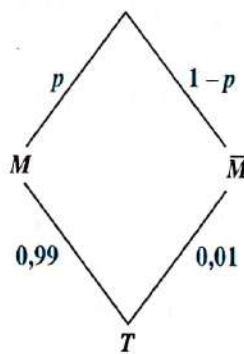


Fig. 5

Explication

Puisque $P_{\bar{M}}(\bar{T}) = 0,99$,

alors :

$$P_{\bar{M}}(T) = 0,01$$

($P_{\bar{M}}$ est une probabilité).

• Quelques valeurs vont nous aider à commenter ce résultat

p	0,001	0,010	0,1	0,3	0,5	0,8
$P(M/T)$	0,090	0,5	0,917	0,977	0,990	0,997

Conclusion : un test positif n'est probant que si $p \geq 0,1$. Si la maladie est plus rare, un test positif ne prouve rien.

Note

En médecine, pour dépister une maladie rare, en cas de test positif, on effectue plusieurs autres tests indépendants.

Dans la foulée

3 Fausse alerte ?

Un système d'alarme fonctionne ainsi :

- s'il y a danger, la probabilité que l'alarme se déclenche est 0,99 ;

– en l'absence de danger, elle se déclenche avec une probabilité de 0,005.

La probabilité qu'un danger se présente est 0,001.

L'alarme se déclenche ; quelle est la probabilité que ce soit une fausse alerte ?

3. Probabilités appliquées à d'autres Sciences

OBJECTIF

Présenter quelques utilisations du calcul des probabilités dans certaines Sciences « appliquées » : nous mettrons l'accent sur la Génétique.

PROBLÈME

La loi de Hardy-Weinberg (1908)

Lorsqu'un gène peut prendre deux formes (ou allèles) A et a , un individu peut avoir l'un des trois génotypes : AA , Aa ou aa .

On considère une population (génération 0) dans laquelle les proportions respectives de ces trois génotypes sont p_0 , q_0 et r_0 .

On admet que les couples se forment au hasard quant aux génotypes considérés (appariement aléatoire).

1) Exprimer, en fonction de p_0 , q_0 et r_0 , la probabilité p_1 qu'un enfant de la génération 1 ait le génotype AA , puis celles, notées q_1 et r_1 , qu'il ait le génotype Aa ou aa .

2) Montrer que p_1 , q_1 et r_1 s'expriment seulement à l'aide de $\alpha = p_0 - r_0$.

En déduire p_2 , q_2 et r_2 (ces mêmes proportions à la génération 2) et conclure.

① Un enfant ne peut avoir le génotype AA que lorsque les génotypes de ses deux parents sont du type AA ou Aa . Le calcul de p_1 peut alors résulter de l'arbre ci-dessous (Fig. 6).

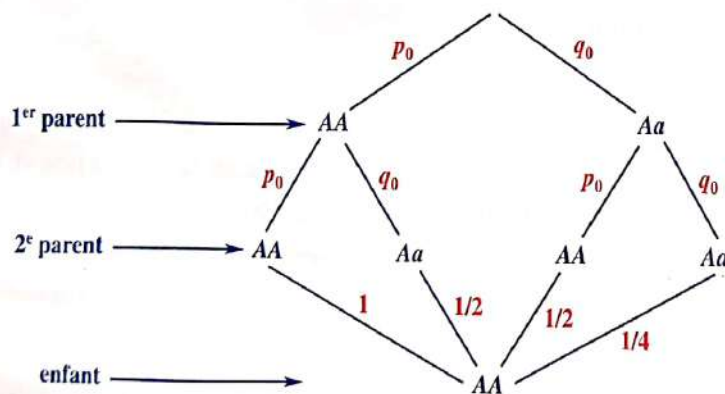


Fig. 6

On en déduit :

$$p_1 = p_0^2 + \frac{1}{2}p_0q_0 + \frac{1}{2}p_0q_0 + \frac{1}{4}q_0^2, \text{ soit } p_1 = \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2.$$

Explications

• Si les génotypes des parents sont AA et Aa , la loi du génotype de l'enfant est :

génotype	AA	Aa
probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

• Si les génotypes des parents sont Aa et Aa , la loi du génotype de l'enfant est :

AA	Aa	aa
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

• Le calcul de r_1 est identique, en échangeant les rôles de A et a , donc de p_0 et r_0 :

$$r_1 = \left(r_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2.$$

• On en déduit $q_1 = 1 - p_1 - r_1 = 1 - \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2 - \left(r_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2$.

② Avec $\alpha = p_0 - r_0$, on obtient $q_0 = 1 - p_0 - r_0 = 1 - 2p_0 + \alpha$,

donc $p_1 = \left(p_0 + \frac{1}{2} - p_0 + \frac{\alpha}{2}\right)^2$, soit : $p_1 = \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2$.

De même, $r_1 = \left(p_0 - \alpha + \frac{1}{2} - p_0 + \frac{\alpha}{2}\right)^2$, soit : $r_1 = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$.

Remarque : $p_1 - r_1 = \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 = \alpha = p_0 - r_0$.

Enfin, $q_1 = 1 - p_1 - r_1 = 1 - \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$, soit :

$$q_1 = \frac{1-\alpha^2}{2}.$$

Ainsi p_1 , q_1 et r_1 s'expriment uniquement à l'aide de α .

Comme on a $\alpha = p_1 - r_1 = p_0 - r_0$ (voir remarque ci-dessus), il en résulte qu'à la génération 2, les proportions p_2 , q_2 et r_2 s'expriment de la même manière à l'aide de $\alpha = p_1 - r_1$.

Conclusion : si p_n , q_n et r_n désignent les proportions des génotypes AA , Aa et aa à la n -ième génération, les suites (p_n) , (q_n) et (r_n) sont constantes à partir de $n = 1$, et valent respectivement :

$$p_n = \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2, q_n = \frac{1-\alpha^2}{2}, r_n = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2.$$

Lors d'un appariement aléatoire, il y a stabilité des génotypes à partir de la génération 1 (loi de Hardy-Weinberg).

Bien noter

On a : $p_0 + q_0 + r_0 = 1$;

$p_1 + q_1 + r_1 = 1$;

etc.



Gregor Mendel (1822-1884)
Religieux et botaniste autrichien.
Il énonce en 1866 les lois de transmission des caractères génétiques (voir exercice 4, ci-dessous).

Dans la foulée

④ Les lois de Mendel (gènes à deux allèles)

Établir les lois du génotype de l'enfant (utilisées dans l'arbre du problème ci-dessus) dans les cas où les génotypes des parents sont :

- AA et Aa ;
- Aa et Aa .

⑤ Loi de Hardy-Weinberg pour les allèles

Les notations sont celles du problème ci-dessus.

On désigne par u_n et v_n les proportions des allèles A et a dans la population.

1) Montrer que $u_n = p_n + \frac{q_n}{2}$ et $v_n = r_n + \frac{q_n}{2}$.

2) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont constantes à partir de $n = 0$ et exprimer u_n et v_n en fonction de α .

Applications

Probabilités : calculs de base

1 Les pièces

On lance cinq fois de suite une pièce de monnaie équilibrée, et on considère que les issues sont les « mots » tels que *FFPFP*, *PFPPP*... (*P* : pile, *F* : face).

- 1) Quel est le nombre total d'issues ?
- 2) Calculer la probabilité des événements suivants :
 - a) « quatre piles au moins » ; b) « plus de faces que de piles » ;
 - c) « une série de longueur 3 au moins » (c'est-à-dire : au moins trois piles consécutives ou trois faces consécutives).

2 Les naissances

En supposant que chaque naissance donne, de façon équiprobable, une fille ou un garçon, déterminer la probabilité que, dans une famille de cinq enfants choisie au hasard, il y ait :

- a) quatre garçons au moins ; b) plus de filles que de garçons ;
- c) trois enfants au moins consécutifs et de même sexe.

Piste Les exercices 1 et 2 sont-ils vraiment différents ?

3 L'enquête

Dans une population, on constate que 42 % des individus n'ont jamais fait de ski, que 58 % n'ont jamais pris l'avion, mais que 29 % ont déjà fait du ski et pris l'avion.

Lorsqu'on rencontre quelqu'un au hasard, quelle est la probabilité qu'il n'ait jamais fait de ski et qu'il n'ait jamais pris l'avion ?

4 Dans une urne

Mille boules numérotées de 0 à 999 sont placées dans une urne. On tire une boule au hasard et on note X le numéro sorti.

- 1) Calculer la probabilité des événements :
 A : « X est divisible par 5 » ; B : « X se termine par 0 » ;
 C : « X est multiple de 2 » ; D : « X est divisible par 3 ».
- 2) Déterminer la probabilité des événements : $A \cap C$, $A \cup C$, $B \cap D$, $B \cup D$, $A \cap D$, $A \cup D$, puis $A \cap \bar{B}$ et $\bar{C} \cup \bar{D}$.

5 La loterie

Dans une loterie, on vend cent billets dont trois sont gagnants.

- 1) On achète un billet. Quelle est la probabilité qu'il soit gagnant ?
- 2) On achète deux billets. Quelle est la probabilité de gagner au moins un lot ?

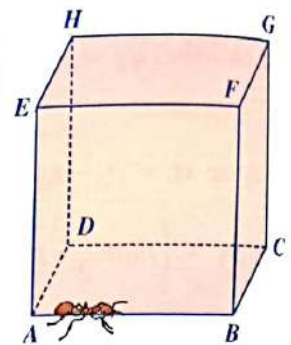
6 Promenade aléatoire sur un cube

Une fourmi part du sommet A d'un cube (figure ci-contre) et effectue trois déplacements le long des arêtes du cube.

De chaque sommet, elle choisit au hasard un des trois sommets voisins.

- 1) Décrire à l'aide d'un arbre les 27 trajets possibles de la fourmi, et vérifier qu'après les trois déplacements, elle ne peut se retrouver qu'en B , D , E ou G .

- 2) Calculer les probabilités correspondantes.



7 Le problème du duc de Toscane

On lance trois dés et on considère les événements :

A : « la somme est égale à 9 » et B : « la somme est égale à 10 ».

- 1) Montrer que l'expérience peut être modélisée à l'aide de 216 issues équiprobables.

- 2) Comparer $P(A)$ et $P(B)$.

Deux précurseurs

Au XVI^e siècle, ce problème défiait l'intuition des joueurs – dont le duc de Toscane – qui considéraient à tort d'autres issues non équiprobables. Il fut correctement résolu par Galilée (1564-1642) et Cardan (1501-1576). Ce dernier écrit vers 1530 le premier livre de probabilités : *Liber de ludo aleae*.

8 Le menu aléatoire

Un restaurant présente une carte comprenant 60 plats : 20 entrées, 25 plats principaux et 15 desserts. Les plats sont numérotés de 1 à 60.

Un client distrait choisit au hasard trois numéros distincts.

Calculer la probabilité qu'il ait choisi :

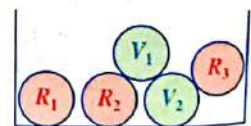
- a) trois desserts ;
- b) un repas complet (une entrée, un plat principal et un dessert).

9 Tirages aléatoires

Une urne contient trois boules rouges (notées R_1 , R_2 , R_3) et deux boules vertes (notées V_1 et V_2).

Calculer la probabilité d'obtenir deux boules vertes lorsqu'on réalise deux tirages successifs :

- a) avec remise ;
- b) sans remise.



10 Premier pour gagner

Un joueur lance un dé ; si le numéro est un nombre premier, le joueur gagne une somme égale au nombre considéré (en euros) ; sinon il perd ce même nombre d'euros.

1) Si X est le gain algébrique réalisé, donner la loi de X et calculer son espérance mathématique et son écart-type.

2) Le jeu est-il favorable au joueur ?

11 La loi du maximum

Lorsqu'on lance deux dés, on note X la variable aléatoire qui, à une issue (a, b) , associe le plus grand des deux nombres a et b .

1) Déterminer la loi de X .

2) Calculer $E(X)$, $\text{Var}(X)$ et $\sigma(X)$.

12 Linéarité de l'espérance

Soit $E = \{e_1, \dots, e_r\}$ l'univers associé à une expérience aléatoire et P la distribution de probabilités associée.

1) Si X est une variable aléatoire définie sur E , montrer que son espérance s'exprime par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^r X(e_i) P(e_i).$$

2) En déduire une démonstration du *théorème 2*, page 271.

13 Propriétés des paramètres

Démontrer le corollaire du *théorème 2*, page 271.

14 100 lancers d'une pièce

Lorsqu'on lance 100 fois une pièce de monnaie équilibrée, quel est le nombre moyen de faces obtenues ?

Piste Si X est le nombre de faces obtenues, nul besoin d'écrire la loi de X ! Se reporter à l'exemple 3 du cours, page 271.

15 Comparaison de deux jeux

On lance deux dés et on considère les deux jeux suivants :

1) Jeu n° 1

On gagne 8 € si il sort un cinq ou un six, on perd 10 € sinon. On note X le gain réalisé.

Donner la loi de X , calculer son espérance et son écart-type.

2) Jeu n° 2

On gagne 350 € si le double-six sort, on perd 10 € sinon. On note Y le gain réalisé.

Donner la loi de Y , calculer son espérance et son écart-type.

3) Comparer les deux jeux (gain moyen, risque). Auquel joueriez-vous ?

(Cette dernière question est pure affaire de goût.)

16 Un jeu favorable, mais...

On lance deux fois de suite un dé équilibré.

1) Si la somme des points est 12, on gagne 4 millions d'euros, sinon on perd 100 000 euros. Calculer le gain moyen.

2) Joueriez-vous à ce jeu ?

Attention !

Si dans l'exercice précédent l'espérance de gain est séduisante, on ne saurait en faire un critère absolu de décision : qui jouerait à un jeu en étant presque sûr de perdre 100 000 € – ce qui est déjà une somme conséquente ? Il en serait tout autrement si l'on divisait gains et pertes par 100 000 (voir aussi *chapitre 10, exercice 31*, page 285).

17 Longueur d'une série

On lance cinq fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.

1) Écrire la liste des issues de cette expérience :

$$E = \{FFFFF, FFFFP, \dots, PFFFF\}.$$

(Si, si : toutes les issues !)

2) Soit X la variable qui décompte la longueur de la première série de faces consécutives (ainsi $X(FFPFP) = 2$, $X(PFPFF) = 1$, et on décide que $X(PFFFF) = 0$). Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$.

3) Soit Y la variable qui décompte la longueur de la plus longue série de faces consécutives.

Déterminer la loi de Y et calculer $E(Y)$.

4) Soit Z la variable qui décompte la longueur de la plus longue série (de piles ou de faces consécutives).

Déterminer la loi de Z et calculer $E(Z)$.

18 On choisit un chiffre...

Un casino propose deux jeux :

• **jeu A** : on choisit un chiffre (parmi 0, 1, ..., 9) selon une loi de probabilité telle que la probabilité du chiffre i est proportion-

nelle à $i + 1$; le gain associé au chiffre i est $\frac{2520}{i+1}$;

• **jeu B** : on choisit un chiffre (parmi 0, 1, ..., 9) selon une loi de probabilité telle que la probabilité du chiffre i est proportion-

nelle à $\frac{1}{i+1}$; le gain associé au chiffre i est $135 \times (i + 1)$.

1) Déterminer la loi de probabilité des dix chiffres pour le jeu A et calculer le gain moyen.

2) Mêmes questions pour le jeu B.

3) Quel jeu choisir ?

4) On modifie le jeu B pour qu'il offre le même gain moyen que le jeu A en associant au chiffre i le gain $x \times (i + 1)$. Calculer x .

19 Groupes sanguins et facteur rhésus

Dans une population, les individus sont répartis en quatre groupes sanguins : A, B, AB et O et, à l'intérieur de chaque groupe, en rhésus + ou rhésus -, selon le tableau suivant (en %).

groupe	A	B	AB	O
rhésus +	32,8	8,1	4,15	36
rhésus -	7,2	1,9	0,85	9

Un individu est choisi au hasard. Calculer la probabilité :

- qu'il soit du groupe O, sachant qu'il a un rhésus - ;
- qu'il ait un rhésus -, sachant qu'il est du groupe O.

20 Questions de taille

Dans un lycée, 40 % des garçons et 15 % des filles mesurent plus de 1,80 m. De plus, 60 % des élèves sont des filles. Sachant qu'un élève choisi au hasard mesure plus de 1,80 m quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

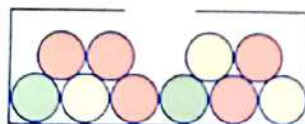
21 Avec deux dés

On lance deux dés équilibrés. On considère les événements A : « la somme est paire », B : « on a obtenu au moins un six » et C : « on a obtenu un double ».

- Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ et $P(B \cap C)$.
- En déduire $P_A(B)$, $P_A(C)$, $P_B(A)$, $P_B(C)$, $P_C(A)$ et $P_C(B)$.

22 Avec ou sans remise

Une urne contient 5 boules rouges, 3 jaunes et 2 vertes, indiscernables au toucher.



- On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir 2 rouges ? 2 jaunes ? 2 vertes ? 2 boules de même couleur ?
- Mêmes questions si l'on remet dans l'urne la boule issue du premier tirage.

23 Avec trois événements

- Soit A , B et C , trois événements vérifiant $P(A) \neq 0$ et $P(A \cap B) \neq 0$.

Montrer que :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B/A) \times P(C/A \cap B).$$

- Dans l'urne de l'exercice précédent, on réalise 3 tirages successifs sans remise.

Quelle est la probabilité d'obtenir 3 rouges ? 3 jaunes ?

24 Peu importe le rang

- Dans l'urne de l'exercice 22, on tire successivement et sans remise 2 boules.

On note les événements R_1 : « la première boule tirée est rouge », R_2 : « la deuxième est rouge », et de même J_1 , J_2 , V_1 et V_2 .

- À l'aide d'une partition convenable, calculer $P(R_2)$.
- Calculer de même $P(J_2)$ et $P(V_2)$.
- Comparer les nombres trouvés à $P(R_1)$, $P(J_1)$ et $P(V_1)$. Remarque ?

- Dans la même urne, on réalise à présent trois tirages successifs sans remise. Calculer la probabilité de R_3 : « la troisième boule tirée est rouge ». Remarque ?

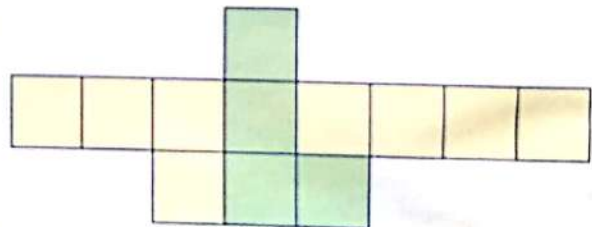
Piste L'exercice 23...

Encore plus fort

Le résultat précédent persiste quelle que soit la composition initiale de l'urne et quel que soit le rang du tirage ! Mais la démonstration demande un peu plus de travail...

25 Trois protocoles

Trois personnes A , B et C choisissent une case au hasard dans la figure suivante.



On s'intéresse à l'événement V : « la case choisie est verte ».

A affirme : « $P(V) = \frac{1}{3}$ » ; B répond : « mais non, $P(V) < \frac{1}{4}$ » ; enfin, C prétend : « $P(V) > \frac{1}{2}$ ».

- Envisager les trois protocoles suivants du choix de la case :

- choix d'une case parmi les douze ;
- choix d'une colonne au hasard, puis d'une case au hasard dans cette colonne ;
- choix d'une ligne au hasard, puis d'une case au hasard dans cette ligne.

Dans chaque cas, calculer $P(V)$.

- Quelle est la morale de cette histoire ?

À suivre

... Dans le chapitre 10, « La corde de Bertrand », page 328.

Indépendance

26 Tir à l'arc

1) Soit A et B deux événements indépendants. Montrer qu'il en est de même pour :

a) A et $\bar{B}$; b) $\bar{A}$ et B ; c) $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

2) Deux archers tirent simultanément. Les deux événements « A atteint la cible » et « B atteint la cible » sont indépendants et de probabilités respectives $\frac{4}{5}$ et $\frac{7}{8}$.

Calculer la probabilité des événements :

a) A et B atteignent tous deux la cible ;

b) seul A atteint la cible ;

c) la cible est manquée ;

d) la cible est atteinte ;

e) un seul tireur atteint la cible.

27 Sécurité d'un trimoteur

(D'après A. Engel, *Enseignement des Probabilités et de la Statistique*, CEDIC)

L'avion ci-contre se maintient en vol si le moteur central ou les moteurs sur les ailes fonctionnent.



Le moteur central a pour

sécurité $P_1 = \frac{199}{200}$, les

moteurs d'ailes ont chacun la sécurité $P_2 = \frac{9}{10}$ et les moteurs

fonctionnent ou non indépendamment les uns des autres.

Quel est la probabilité que l'avion tombe ?

28 Variables indépendantes

On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée.

1) On désigne par X_1 le nombre de faces au premier lancer (X_1 prend les valeurs 0 ou 1), et X_2 le nombre de faces aux deux derniers lancers.

Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.

2) Soit Y_1 la variable aléatoire prenant la valeur 0 si les deux premiers lancers donnent le même résultat, et 1 dans le cas contraire. On définit de même la variable Y_2 avec les deux derniers lancers.

Donner la loi de Y_1 et de Y_2 , puis montrer que Y_1 et Y_2 sont indépendantes.

3) Montrer que X_1 et Y_1 sont indépendantes.

4) Les variables X_2 et Y_2 le sont-elles ?

Note : les variables Y_1 et Y_2 servent à compter les séries (ou « blocs ») de piles ou de faces parmi les lancers : $1 + Y_1 + Y_2$ est le nombre de séries.

29 Avec trois événements

On lance deux fois une pièce de monnaie. Les événements A , B , C sont définis par : A : « pile sort en premier », B : « pile sort en second » et C : « les deux sorties sont identiques ».

1) Montrer que A et B sont indépendants, puis que A et C et enfin B et C le sont.

2) Comparer $P(A \cap B \cap C)$ et $P(A)P(B)P(C)$.

L'indépendance

La notion se généralise à un nombre quelconque d'événements ; on dit que $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont indépendants lorsque toute intersection d'un nombre quelconque d'entre eux a pour probabilité le produit des probabilités de ces événements. Ainsi les événements A, B, C de l'exercice précédent, quoique deux à deux indépendants, ne sont pas indépendants dans leur ensemble.

30 Le devoir surveillé

Contrôle de probabilités aujourd'hui en Terminale...

Mais le « prof de math » est terriblement distrait : il se trompe d'étage une fois sur cinq, oublie sa clé de salle une fois sur dix, et oublie ses sujets à la maison une fois sur quinze. Quelle est la probabilité que le contrôle ait lieu, sans retard ?

31 Un exercice de Bac

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux événements suivants :

A : « on obtient des boules des 2 couleurs » ;

B : « on obtient au plus 1 blanche ».

1) a) Calculer la probabilité de l'événement : « toutes les boules tirées sont de même couleur ».

b) Calculer la probabilité de l'événement : « on obtient exactement 1 boule blanche ».

c) En déduire que les probabilités $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$ sont :

$$P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}, P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \text{ et } P(B) = \frac{n+1}{2^n}.$$

2) Montrer que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ si, et seulement si :

$$2^{n-1} = n + 1.$$

3) Soit (u_n) la suite définie pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2 par :

$$u_n = 2^{n-1} - (n + 1).$$

Calculer u_2 , u_3 et u_4 .

Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

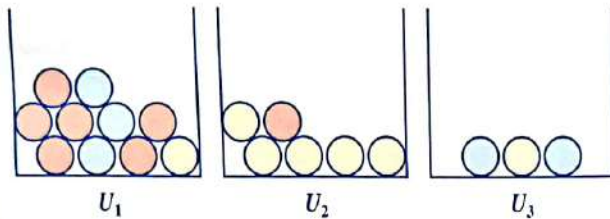
4) En déduire la valeur de l'entier n tel que les événements A et B soient indépendants.

La méthode des arbres

Les exercices suivants utilisent de façon immédiate la méthode décrite page 275. D'autres seront proposés dans la rubrique Exercices.

32 Trois urnes

Les urnes U_1 , U_2 et U_3 contiennent des boules jaunes, rouges et bleues, selon le schéma suivant :



On choisit une urne au hasard, puis une boule au hasard dans cette urne.

On note U_1 , U_2 et U_3 les événements respectifs : « l'urne choisie est U_1 », etc., et R , B et J les événements : « la boule tirée est rouge », etc.

1) À l'aide d'un arbre de probabilités, déterminer la probabilité des événements suivants :

$$U_1 \cap R, U_2 \cap R, U_3 \cap R, R \cap B, R \cap J, R \cup B, R \cup J$$

et :

$$B \cup J.$$

2) Sachant qu'on a tiré une rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de U_1 ?

33 Trois dés

Un sac contient trois dés indiscernables au toucher : l'un est équilibré et ses faces sont marquées de 1 à 6 ; le deuxième est équilibré et comporte quatre faces marquées 1 et deux faces marquées 6 ; le troisième est pipé de telle sorte que les probabilités d'apparition des numéros 1, 2, 3, 4, 5 et 6 soient proportionnelles à ces numéros.

On lance un dé prélevé au hasard.

1) Quelle est la probabilité de sortir un 6 ?

2) Un jeu propose de miser 10 € sur le fait que le numéro sorti soit supérieur ou égal à 4. Joueriez-vous à ce jeu ?

34 La météo en Syldavie

(D'après A. Engel, *Les Certitudes du hasard*, Aléas Éditeur)

En Syldavie, le temps évolue ainsi : s'il fait beau (B) un jour donné, il fera encore beau le lendemain avec la probabilité $\frac{5}{6}$;

s'il pleut (P), il pleuvra le lendemain avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

On est dimanche, et il fait beau.

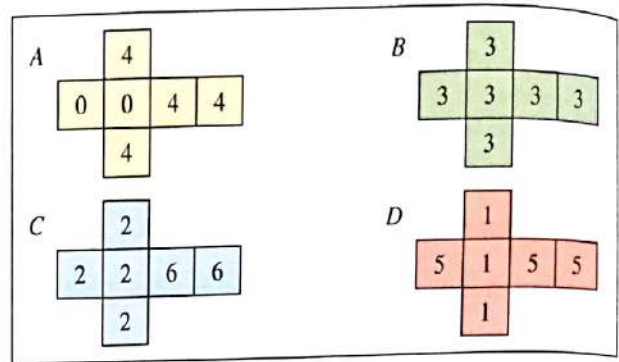
Quelle est la probabilité :

a) qu'il fasse beau mardi ?

b) qu'il pleuve mercredi ?

35 Les dés de Bradley Efron

Quatre dés équilibrés A , B , C et D ont leurs faces marquées comme l'indiquent les patrons ci-dessous :



Paul et Jeanne jouent au jeu suivant : Paul commence, choisit un dé et le lance.

Ensuite Jeanne choisit l'un des trois dés restants et le lance à son tour. Le gagnant est celui qui sort le plus grand numéro.

Montrer que, quel que soit le dé choisi par Paul, Jeanne peut choisir un dé qui lui assure de gagner avec une probabilité égale

$$\text{à } \frac{2}{3}.$$

36 Stabilité à la limite

Une urne U_1 contient n boules blanches et 10 boules noires ; une autre urne U_2 contient 1 boule blanche et 1 boule noire. On tire au hasard 1 boule de U_1 que l'on place dans U_2 ; puis on tire au hasard 1 boule dans U_2 .

1) Calculer la probabilité p_n pour que cette dernière boule tirée soit blanche.

2) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter le résultat.

37 Tirs au but

Lors d'une longue séance de tirs au but, un gardien arrête le premier tir avec la probabilité 0,3, puis :

– s'il a arrêté un tir, il arrête le suivant avec la probabilité 0,5 ;
– s'il a pris un but, il arrête le tir suivant avec la probabilité 0,2.

On admet que tous les tirs sont « cadrés » et l'on note p_n la probabilité que le gardien arrête le n -ième tir (ainsi $p_1 = 0,3$).

1) À l'aide d'un arbre de probabilités, montrer que, pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0,3p_n + 0,2$.

2) On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = p_n - \frac{2}{7}$.

Montrer que la suite (u_n) est géométrique.

3) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter le résultat.

Info

L'expérience aléatoire décrite à l'exercice 37 est un exemple de processus markovien convergent. (Du nom du Russe Andreï Markov (1856-1922).)

38 Quasi-certitude

Un tireur atteint une cible quatre fois sur cinq.
Combien de tirs doit-il effectuer pour être sûr, à 99,9 %, d'atteindre la cible au moins une fois ?

39 Toute la ville joue

1) Une pièce de monnaie, considérée comme tout à fait honnête du point de vue probabiliste, est lancée 20 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir 20 faces ?

2) Chacun des 730 000 habitants d'une grande ville réalise en même temps l'expérience précédente.

« Il n'y a même pas une chance sur deux qu'un habitant au moins obtienne 20 faces. »

Vrai ou faux ?

40 Le singe dactylographe

1) Un singe n'ayant aucune suite dans les idées enfonce à 40 reprises, au hasard, une touche d'un clavier qui en comporte 108.

Quelle est la probabilité qu'il écrive (avec les espaces), le vers de Mallarmé :

« UN COUP DE DÉS JAMAIS N'ABOLIT LE HASARD » ? (Événement A.)

2) On répète n fois l'expérience précédente. Déterminer la probabilité p_n que l'événement A se produise au moins une fois.

3) Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat paradoxal.

4) Déterminer le plus petit entier n tel que $p_n > 10^{-10}$ (on pourra utiliser l'approximation $\ln(1+u) \approx u$ pour u voisin de 0). Expliquer alors le paradoxe. Ouf... !

41 Le premier problème du chevalier de Méré

« A-t-on plus de chances d'obtenir un six (au moins une fois) en lançant un dé quatre fois, ou d'obtenir un double-six (au moins une fois) en lançant deux dés 24 fois ? »

(Problème posé à Pascal par le chevalier de Méré en 1654.)

1) Première situation

On lance un dé quatre fois de suite.

Calculer la probabilité de l'événement A : « on obtient au moins un six ».

2) Seconde situation

On lance deux dés 24 fois de suite.

Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois un double-six. Conclure.

A suivre

Voir l'exercice 54, page suivante.

Dans les exercices 42 à 46, on considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés équilibrés.

42 Calculer la probabilité des événements A : « on obtient un double », B : « la somme est égale à 7 » et C : « on obtient deux chiffres consécutifs ».

43 Avec les notations précédentes, calculer $P(B \cap C)$, $P(B \cup C)$ et $P(\bar{B} \cap \bar{C})$.

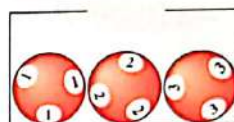
44 Soit X la variable aléatoire qui, au résultat (a, b) , associe $|b - a|$.

Déterminer la loi de X . Calculer son espérance mathématique et sa variance.

45 Sachant que la somme est supérieure ou égale à 8, quelle est la probabilité d'avoir obtenu au moins un six ?

46 Les événements F : « la somme est un multiple de 3 » et G : « le résultat du dé n° 1 est un multiple de 3 » sont-ils indépendants ?

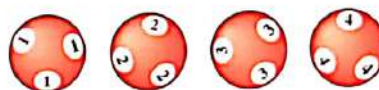
47 1) On tire successivement les trois boules de l'urne ci-contre. Les issues sont notées 123, 132, ...321.



Soit X la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le nombre de points fixes obtenus (un chiffre est un point fixe s'il est à la même place que dans la liste $\{1, 2, 3\}$; ainsi, pour l'issue 132, il y a un seul point fixe).

Déterminer la loi de X et son espérance mathématique.

2) Même question que précédemment avec une urne contenant les quatre boules.



48 Une usine fabrique des composants à l'aide de trois machines A, B et C qui produisent respectivement 60 %, 30 % et 10 % des composants. La probabilité qu'un composant soit défectueux est de 0,02 s'il provient de la machine A, 0,05 s'il provient de B et 0,07 s'il provient de C.

Quelle est la probabilité qu'un composant pris au hasard soit défectueux ?

49 1) Un dé est lancé dix fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le six ?

2) Combien de fois faut-il lancer ce même dé pour être sûr, à 99 %, d'obtenir au moins une fois un six ?

Note : « être sûr à 99 % » signifie « la probabilité de l'événement considéré est supérieure ou égale à 0,99 ».

Exercices

Utilisation de modèles de référence

50 Les petits pains aux raisins

(D'après A. Engel, *Les Certitudes du hasard*, Aléas Éditeur)

Combien de raisins de Corinthe doit-on mettre dans 2 000 g de pâte pour être certain à 99 % qu'il y ait au moins un raisin dans chaque petit pain de 50 g ?

(Autrement dit : on veut que la probabilité que chaque petit pain contienne au moins un raisin soit supérieure ou égale à 0,99.)

Piste Soit n le nombre de raisins. Chacun des raisins a la probabilité $\frac{39}{40}$ de ne pas se trouver dans l'un des 40 petits pains donnés...

51 Le loto sportif

On constitue une grille de loto sportif en cochant l'une des 3 cases $\boxed{1}$ $\boxed{N}$ $\boxed{2}$ pour chacun des 13 matches de football sélectionnés.

($\boxed{1}$: victoire à domicile ; $\boxed{N}$: match nul ; $\boxed{2}$: victoire à l'extérieur.)

Une personne joue une grille au hasard. Calculer la probabilité :

- qu'elle trouve les 13 résultats justes ;
- qu'elle trouve au moins 1 résultat juste ;
- qu'elle trouve au moins 2 résultats justes sachant que sa réponse au match n° 1 est juste.

52 L'impasse

1) Lors de la préparation d'un concours, un candidat n'a étudié que 50 des 100 leçons possibles à l'oral.

On a disposé 100 papiers contenant chacun une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons différentes. Le candidat, lorsqu'il se présente à l'oral, tire successivement deux papiers.

Calculer la probabilité :

- qu'il ne connaisse aucun des deux sujets ;
- qu'il connaisse les deux ;
- qu'il connaisse un et un seul des sujets ;
- qu'il en connaisse au moins un.

2) On considère à présent que le candidat a étudié n des 100 leçons ($n \leq 100$) et a réalisé une « impasse » sur les autres.

a) Quelle est la probabilité p_n qu'il connaisse au moins un des deux sujets ?

b) Déterminer les entiers n tels que $p_n \geq 0,95$.

D'APRÈS BAC

53 Rangement de n objets dans n boîtes

On dispose de n objets, et chacun est placé au hasard dans l'une quelconque des n boîtes $B_1, \dots, B_n$.

1) a) Déterminer la probabilité que B_1 contienne : aucun des objets ; les n objets.

b) Déterminer le nombre moyen d'objets que contient B_1 .

2) On pose, pour $1 \leq i \leq n$, $X_i = 1$ si la boîte B_i est vide, et $X_i = 0$ sinon.

a) Que représente $X = X_1 + \dots + X_n$?

b) Déterminer la loi de X_i et son espérance mathématique.

c) En déduire le nombre moyen u_n de boîtes vides, à l'issue du rangement.

Quelle est la limite de $\frac{u_n}{n}$?

54 Le deuxième problème du chevalier de Méré

Deux joueurs A et B engagent chacun 32 pistoles dans le jeu suivant : on lance une pièce de monnaie jusqu'à l'apparition de 3 piles ou de 3 faces (pas forcément consécutives). Si les 3 piles sortent d'abord, le joueur A gagne, sinon B gagne.

(Ainsi le jeu se termine en 5 lancers au plus.) Le vainqueur emporte les 64 pistoles.

« Au premier lancer, pile sort. Mais pour une raison mystérieuse, on doit arrêter le jeu. Comment répartir les 64 pistoles ? »

1) Un modèle

On convient de considérer la suite fictive de la partie en lançant 4 fois une pièce de monnaie. Expliciter les 16 issues, et celles amenant le gain de A (on rappelle que le premier lancer a donné le résultat « pile »). En déduire la probabilité que A gagne.

2) Répartir alors équitablement les 64 pistoles.

Faire-part

1654 : Le Calcul des Probabilités est né.

Les historiens s'accordent sur l'année 1654 au cours de laquelle, à la suite d'un échange épistolaire célèbre, le « Parisien » Blaise Pascal et le Toulousain Pierre de Fermat résolvent le problème ci-dessus par des méthodes différentes. Si la méthode

proposée s'apparente à celle de Fermat, laissons à Pascal le mot de la fin : « Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse qu'à Paris. »



Utilisation d'arbres de probabilités

55 La fausse pièce

On dispose de 1 000 pièces de monnaie : 999 tout à fait normales et une avec deux faces marquées pile. On tire une pièce au hasard et on la lance dix fois de suite.

- 1) Calculer la probabilité d'obtenir dix fois pile.
- 2) Sachant qu'on a obtenu dix fois pile, quelle est la probabilité qu'on ait tiré la fausse pièce ?

Probabilité « des causes »

Lorsque la réalisation d'un événement B peut découler de celle d'un événement A , il est fréquent que l'on s'intéresse à $P(A/B)$: c'est la probabilité de la « cause » A après avoir observé la « conséquence » B . Le calcul procède en deux temps :

– le calcul de $P(A \cap B)$ et de $P(B)$ à l'aide d'un arbre (ou de la formule des probabilités totales) ;

– le calcul de $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Les calculs de probabilité des causes ont été initiés par le pasteur (et mathématicien) anglais Thomas Bayes (1702-1761).

Depuis, ils sont abondamment utilisés dans toutes sortes de domaines, allant du contrôle d'une production à la médecine (voir *Au cœur des problèmes*, problème 2, page 279). Bref, on les utilise dans tous les domaines où la cause est inconnue.

56 Le répondeur

Un artisan est contacté à domicile par ses clients, sur appel téléphonique, et dispose d'un répondeur. Lorsque l'artisan est absent, il branche systématiquement le répondeur ; lorsqu'il est présent, il le branche une fois sur trois.

Un client forcené et féru de statistiques constate que, lorsqu'il téléphone, il tombe quatre fois sur cinq sur le répondeur.

Un client téléphone à l'artisan ; on note A l'événement : « l'artisan est présent » et R : « le client obtient le répondeur ».

- 1) Exprimer $P(R)$ en fonction de $P(A)$. En déduire $P(A)$.
- 2) Sachant que le client obtient le répondeur, déterminer la probabilité que l'artisan soit présent.

D'APRÈS BAC

57 Nombre moyen de tirages

Une urne contient trois boules jaunes et trois boules rouges. On tire les boules au hasard, une par une, sans remise, jusqu'à obtenir une boule jaune.

Combien doit-on tirer de boules, en moyenne ?

58 La bonne stratégie

Un joueur de tennis X bat un joueur A avec la probabilité a et il bat un autre joueur B avec la probabilité b . On suppose qu'il bat plus souvent B que A (c'est-à-dire : $a < b$).

Lors d'un tournoi, X doit jouer trois parties en rencontrant alternativement les joueurs A et B .

X est déclaré vainqueur s'il gagne deux parties consécutives.

- 1) Calculer en fonction de a et b la probabilité que X soit déclaré vainqueur :

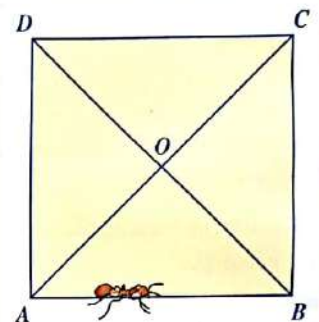
- a) s'il rencontre A , puis B , puis A ;
- b) s'il rencontre B , puis A , puis B .

- 2) Dans quel cas X a-t-il la meilleure chance d'être vainqueur ? Est-ce vraiment paradoxal ?

59 Promenade aléatoire sur un carré

Une fourmi part de A et suit les segments du réseau ci-contre.

Chaque déplacement l'amène d'un sommet à l'un des sommets reliés par un segment, choisi de façon aléatoire.



- 1) Calculer la probabilité que la fourmi parvienne au sommet O en quatre déplacements au plus.
 - 2) On note p_n la probabilité que la fourmi parvienne pour la première fois en O au n -ième déplacement ($n \geq 1$).
- a) Calculer p_1 et montrer que :

$$p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}.$$

- b) Étudier $\lim [p_1 + p_2 + \dots + p_n]$. Interpréter le résultat.

60 Au pays des menteurs

Dans ce pays, tous les habitants mentent avec la probabilité p . Une information vraie est transmise à une personne par l'intermédiaire de n habitants du pays. On note V_k l'événement : « l'information transmise par la k -ième personne est vraie », et $p_k = P(V_k)$.

- 1) Vérifier que $p_1 = 1 - p$ et exprimer p_{k+1} en fonction de p_k et de p , à l'aide d'un arbre.

- 2) On pose $u_k = p_k - \frac{1}{2}$.

Montrer que la suite (u_k) est géométrique.

- 3) En déduire que la probabilité que l'information finalement transmise soit vraie est :

$$p_n = \frac{1}{2}(1 + (1 - 2p)^n).$$

Déterminer et interpréter $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Des probabilités en génétique

Les exercices 61 à 63 sont relatifs à la transmission héréditaire des caractères (lois de Mendel) et à leur stabilité (lois de Hardy-Weinberg).

61 Loi du phénotype (gène à deux allèles)

Lorsqu'un gène possède deux allèles A et a , un individu peut avoir l'un des trois génotypes AA , Aa ou aa ; il transmet alors aléatoirement un des deux allèles à son enfant.

1) Déterminer la loi du génotype d'un enfant lorsque les deux parents ont pour génotypes respectifs Aa et Aa .

2) Il est fréquent que des individus AA et Aa paraissent semblables ; on dit alors que l'allèle A est dominant et que a est récessif. Dans ce cas, l'individu possède le phénotype A et il existe dans la population deux phénotypes : A (correspondant aux génotypes AA et Aa), et a (correspondant au seul génotype aa). C'est le cas, par exemple, pour la couleur des yeux, etc.

On se place dans une population où les proportions des génotypes AA , Aa et aa sont respectivement p , q , r et on suppose qu'il y a appariement aléatoire.

a) Sachant qu'un individu a le phénotype A , déterminer la loi de son génotype.

b) Même question sachant qu'il a le phénotype a .

c) Un enfant a deux parents ayant le phénotype A . Déterminer la loi de son phénotype.

Piste Déterminer d'abord la probabilité qu'il ait l'un des trois génotypes AA , Aa ou aa .

d) Un enfant a deux parents ayant les phénotypes A et a . Déterminer la loi de son phénotype.

e) Déterminer la loi du phénotype d'un enfant choisi au hasard.

Piste Envisager les six cas possibles pour les génotypes des deux parents.

62 Transmission de deux caractères

Sur des chromosomes différents considérons deux gènes :

– l'un ayant pour allèles A et a , A étant dominant (voir exercice précédent) ;

– l'autre ayant pour allèles B et b , B étant dominant.

1) Avec deux parents de génotypes $AABB$ et $AaBb$, montrer que l'enfant a quatre génotypes possibles (donner la loi) et un seul phénotype possible (voir l'exercice précédent).

2) Avec deux parents de génotypes $AaBb$ et $AaBb$, déterminer la loi du génotype de l'enfant (neuf possibilités) et celle de son phénotype.

3) Même question avec deux parents de génotypes $AABb$ et $AaBb$.

63 Gènes à plusieurs allèles

Un des gènes définissant le groupe sanguin peut avoir trois états : les allèles A , B et O .

Il existe donc, pour un individu donné, six génotypes possibles, mais, l'allèle O étant récessif par rapport à A et B , seulement quatre phénotypes possibles.

Le tableau suivant récapitule la situation :

génotype	AA ou AO	BB ou BO	AB	OO
phénotype (groupe sanguin)	A	B	AB	O

On considère une population dans laquelle, à la génération 0, les proportions des allèles A , B et O sont respectivement u , v et w . On se place dans l'hypothèse selon laquelle les couples se forment au hasard relativement à ces trois allèles (appariement aléatoire).

1) Exprimer, pour un enfant de la génération 1, la probabilité de chacun des six génotypes possibles, en fonction de u , v , w .

2) En déduire la loi du phénotype de l'enfant.

3) On note u_1 , v_1 et w_1 les proportions respectives des allèles A , B et O dans la génération 1.

Montrer que $u_1 = u$, $v_1 = v$ et $w_1 = w$.

(C'est la loi de Hardy-Weinberg pour les gènes à allèles multiples : il y a stabilité des allèles, dès la première génération.)

4) Dans une population, les proportions des trois allèles sont respectivement $u = 0,25$, $v = 0,08$ et $w = 0,67$.

a) Déterminer les proportions des six génotypes et celles des quatre phénotypes, à partir de la génération suivante.

b) Un enfant du groupe A a sa mère du groupe A . Est-il plus probable que son père soit du groupe A ? du groupe B ? du groupe O ? du groupe AB ?

c) Deux parents ont pour groupes A et B . Déterminer la loi du groupe d'un enfant.



Clonage : la stabilité génétique sans la diversité (Magritte, 1953).

Rubrique à Bac

Florilège de questions de cours

Il est d'usage que, lorsque les Probabilités « tombent » au BAC, un des deux exercices leur soit consacré. Le but de l'évaluation étant de contrôler un maximum de points du programme, la plupart des sujets « ratissent large » en faisant appel à plusieurs thèmes, parmi lesquels :

- l'utilisation (commandée ou non) d'arbres de probabilités ;
- les épreuves répétées indépendantes ou non ;
- les probabilités conditionnelles et les probabilités « des causes » (voir page 289) ;
- les variables aléatoires ;
- les suites et les probabilités ;
- etc.

Nous proposons ci-après quelques morceaux choisis, parmi les sujets récents, avec quelques « pistes » en cas de besoin...

64 BAC S, Polynésie, 2001.

Une boîte contient 8 cubes : $\begin{cases} 1 \text{ gros rouge et 3 petits rouges ;} \\ 2 \text{ gros verts et 1 petit vert ;} \\ 1 \text{ petit jaune.} \end{cases}$

Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte (on admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur).

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1) On note A l'événement : « obtenir des cubes de couleurs différentes » ; B l'événement : « obtenir au plus un petit cube ».

a) Calculer la probabilité de A .

b) Vérifier que la probabilité de B est égale à $\frac{2}{7}$.

☛ Un arbre, avec seulement les chemins menant à A ou B .

2) Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'espérance mathématique de X .

3) L'enfant répète n fois l'épreuve : « tirer simultanément 3 cubes de la boîte », en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants.

On note P_n la probabilité que l'événement B soit réalisé au moins une fois.

a) Déterminer P_n en fonction de n .

b) Déterminer le plus petit entier n tel que $P_n \geq 0,99$.

65 BAC S, groupe 1, juin 2000.

Une urne contient six boules bleues, trois boules rouges et deux boules vertes, indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément au hasard trois boules de l'urne.

a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « les boules sont toutes de couleurs différentes » ;

E_2 : « les boules sont toutes de la même couleur ».

b) On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules, associe le nombre de boules bleues tirées.

Établir la loi de probabilité de X et calculer $E(X)$.

2) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On procède cette fois de la façon suivante : on tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

On effectue ainsi k tirages successifs.

Quelle est la valeur minimale de k pour que la probabilité de ne tirer que des boules bleues soit au moins mille fois plus grande que la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?

66 BAC S, sujet national, juin 2000.

Les résultats numériques seront donnés sous forme de fractions.

Dans une classe de 30 élèves sont formés un club photo et un club théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a 2 élèves qui sont membres des 2 clubs à la fois.

1) On interroge un élève de la classe pris au hasard.

On appelle P l'événement : « l'élève fait partie du club photo », et T l'événement : « l'élève fait partie du club théâtre ».

Montrer que les événements P et T sont indépendants.

2) Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

a) On appelle T_1 l'événement : « le premier élève appartient au club théâtre ». Calculer $p(T_1)$.

b) On appelle T_2 l'événement : « l'élève pris en photo appartient au club théâtre ». Calculer $p(T_2/T_1)$ et $p(T_2/\overline{T_1})$.

En déduire $p(T_2 \cap T_1)$ et $p(T_2 \cap \overline{T_1})$.

c) Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club théâtre est 0,2.

3) Toutes les semaines, on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié.

Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite.

Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines, aucun membre du club théâtre n'ait été photographié.

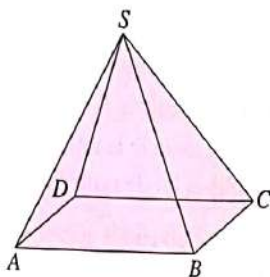
67 BAC S, Antilles-Guyane, juin 2000.

1) Une fourmi se déplace sur les arêtes de la pyramide $ABCD$. Depuis un sommet quelconque, elle se dirige au hasard (on suppose qu'il y a équiprobabilité) vers un sommet voisin ; on dit qu'elle « fait un pas ». La fourmi se trouve en A .

a) Après avoir fait deux pas, quelle est la probabilité qu'elle soit :

- en A ? – en B ?
- en C ? – en D ?

b) Pour tout nombre entier $n > 0$, on note S_n l'événement : « la fourmi est au sommet S après n pas », et p_n la probabilité de cet événement. Donner p_1 .



En remarquant que $S_{n+1} = S_n \cap \overline{S_n}$, montrer que :

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n).$$

2) On considère la suite (p_n) , définie pour tout entier $n > 0$

par : $p_1 = \frac{1}{3}$ et $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$.

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n > 0$:

$$p_n = \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right).$$

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

68 BAC S, Polynésie, septembre 2000.

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k (k est un entier et $1 \leq k \leq 6$).

Ce dé a été pipé de telle sorte que :

- les six faces ne sont pas équiprobables ;
- les nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 , dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r ;
- les nombres p_1, p_2 et p_4 , dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

1) Démontrer que $p_k = \frac{k}{21}$ pour $1 \leq k \leq 6$.

2) On lance ce dé une fois et on considère les événements suivants :

- A : « le nombre obtenu est pair » ;
- B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 » ;
- C : « le nombre obtenu est 3 ou 4 ».

a) Calculer la probabilité de chacun de ces événements.

b) Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.

c) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Les événements A et C sont-ils indépendants ?

3) On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :

- d'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois noires ;
- d'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une noire.

Le joueur lance le dé :

- s'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1 ;
- s'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2 .

On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche ; on note G cet événement.

a) Déterminer la probabilité des événements $G \cap A$, puis G .

b) Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.

69 BAC S, Amérique du Sud, novembre 2000.

Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2, indiscernables au toucher.

On tire une boule du sac, on note son numéro x et on la remet dans le sac ; puis on tire une seconde boule, on note son numéro y et on la remet dans le sac.

Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

À chaque tirage de deux boules, on associe dans le plan, muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le point $M(x, y)$.

On désigne par (D) le disque de centre O et de rayon 1,7.

1) Placer dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points correspondant aux différents résultats possibles.

2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « le point M est sur l'axe des abscisses » ;

B : « le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 ».

3) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe la somme $x^2 + y^2$.

a) Déterminer la loi X et calculer $E(X)$.

b) Montrer que la probabilité de l'événement : « le point M appartient au disque (D) » est égale à $\frac{4}{9}$.

4) On tire cinq fois de suite, de façon indépendante, deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi cinq points du plan. Quelle est la probabilité de l'événement C : « au moins un de ces points appartient au disque (D) » ?

5) On renouvelle n fois de suite, de façon indépendante, le tirage de deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi n points du plan.

Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'événement : « au moins un de ces points appartient à (D) » soit supérieure ou égale à 0,999 9.

Problèmes

70 Les deux pièces

Deux pièces de monnaie A et B , indiscernables à la vue et au toucher, sont truquées de telle sorte que « Face » sort avec la probabilité a (pièce A) ou b (pièce B).

On suppose qu'un joueur choisit une pièce au hasard et la lance ; s'il obtient « Face », il gagne et relance la même pièce ; s'il obtient « Pile », il perd et change de pièce avant de rejouer ; ainsi de suite.

On note respectivement, pour $n \geq 1$, A_n , B_n et S_n les événements :

- A_n : « la pièce A est lancée au n -ième coup » ;
- B_n : « la pièce B est lancée au n -ième coup » ;
- S_n : « le joueur gagne au n -ième coup ».

On pose enfin $\alpha_n = P(A_n)$ et $p_n = P(S_n)$.

1) Simulation de l'expérience

Simuler, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, cette expérience avec 100 lancers :

- lorsque $a = 0,3$ et $b = 0,5$;
- lorsque $a = 0,4$ et $b = 0,6$;
- lorsque $a = b = 0,4$.

Dans chaque cas, on observera une stabilisation des valeurs de p_n vers un nombre à préciser.

2) Expression de α_n

- Que vaut α_1 ?

Exprimer α_{n+1} en fonction de α_n à l'aide d'un arbre de probabilités.

- On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \alpha_n - \frac{1-b}{2-(a+b)}$.

Vérifier que la suite (u_n) est géométrique, puis exprimer u_n en fonction de a et b .

- En déduire une expression de α_n en fonction de n , a et b .

3) Expression de p_n

- À l'aide d'un arbre, exprimer p_n en fonction de α_n .

- En déduire que, pour $n \geq 1$:

$$p_n = \frac{a+b-2ab}{2-(a+b)} - \frac{(a-b)^2}{2[2-(a+b)]} \times (a+b-1)^{n-1}.$$

- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Vérifier avec la question 1).

4) Cas particuliers

- Lorsque $a = b$, vérifier que la suite (p_n) est constante. Interpréter.

- Lorsque $a + b = 1$, vérifier que (p_n) est constante et montrer que $p_n \geq \frac{1}{2}$.

Interpréter ce dernier résultat.

71 Relecture de fautes⁽¹⁾

Un livre contient N erreurs. On suppose qu'à chaque relecture, une erreur est corrigée avec la probabilité $\frac{3}{4}$ et que les erreurs différentes sont corrigées ou non, de façon indépendante. Il est procédé à n relectures indépendantes.

1) Dans cette question, $n = 1$ et $N = 100$

- On note, pour $1 \leq i \leq 100$, X_i le nombre d'erreurs restant sur la i -ième erreur de départ, après la relecture (X_i prend les valeurs 0 ou 1).

Déterminer la loi de X_i et calculer son espérance mathématique.

- En déduire le nombre moyen d'erreurs restantes, après la relecture.

Piste Considérer $X = X_1 + \dots + X_{100}$.

2) Dans cette question, $N = 100$ et n est quelconque

On considère les événements :

- F_i : « l'erreur i n'est pas corrigée à l'issue des n relectures » (pour $1 \leq i \leq 100$) ;
- A_n : « toutes les erreurs sont corrigées ».

- Calculer $P(F_i)$.

- Vérifier que $A_n = \overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \dots \cap \overline{F_{100}}$.

En déduire $P(A_n)$.

- Déterminer le nombre minimal de relectures nécessaires, pour être sûr à 99 % que toutes les erreurs aient été corrigées.

3) Dans cette question, N et n sont quelconques

On définit l'événement A_n comme à la question 2).

- Exprimer $P(A_n)$ en fonction de n et N .

- Avec l'hypothèse $P(A_n) \geq 0,99$, vérifier que :

– si le livre ne comporte que 3 fautes, 5 relectures sont nécessaires ;

– 9 relectures permettent d'éliminer (avec 99 % de certitude) jusqu'à 2 634 fautes !

4) Dans cette question, N est inconnu et $n = 2$

On suppose que chaque erreur est corrigée avec la probabilité a (resp. b) par le premier relecteur (resp. le second relecteur).

- Exprimer en fonction de a , b et N les nombres moyens d'erreurs corrigées par chacun des relecteurs, puis par les deux à la fois.

- 126 erreurs ont été corrigées par le premier relecteur, 150 par le second, et 90 par les deux à la fois. Estimer N .

(1) Ce problème est dédié :

- à un éditeur compréhensif ;
- aux relecteurs scrupuleux ;
- aux lecteurs indulgents.

Les auteurs

72 Grattage ou tirage

(D'après BAC 2001)



Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
Un joueur achète 10 € un billet permettant de participer à un jeu constitué d'un grattage suivi d'une loterie.

Il gratte une case sur le billet. Il peut alors gagner 100 € avec une probabilité de $\frac{1}{50}$ ou bien ne rien gagner.

G désigne l'événement : « le joueur gagne au grattage ».

Il participe ensuite à une loterie avec le même billet. À cette loterie, il peut gagner 100 €, ou 200 €, ou bien ne rien gagner.

L_1 désigne l'événement : « le joueur gagne 100 € à la loterie ».

L_2 désigne l'événement : « le joueur gagne 200 € à la loterie ».

P désigne l'événement : « le joueur ne gagne rien à la loterie ».

Si le joueur n'a rien gagné au grattage, la probabilité qu'il gagne 100 € à la loterie est $\frac{1}{70}$, et la probabilité qu'il gagne 200 € à la loterie est $\frac{1}{490}$.

1) a) Faire un arbre sur lequel on indiquera les renseignements qui précèdent.

b) Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il n'a rien gagné au grattage.
Compléter l'arbre obtenu avec cette valeur.

c) Au bout de chaque branche, indiquer le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.

2) On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.

La probabilité de l'événement : « $X = 90$ » est $\frac{2}{125}$.

La probabilité de l'événement : « $X = 190$ » est $\frac{1}{250}$.

a) Montrer que la probabilité que le joueur gagne 100 € à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 € au grattage, est égale à $\frac{1}{10}$.

b) Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 € au grattage.

c) Déterminer la loi de probabilité de X .

Calculer l'espérance de X .

73 Le caractère hémophile

(D'après J.-L. Boursin, *Les Structures du hasard*, Paris, Éd. du Seuil)

Le sexe d'un individu est caractérisé par deux chromosomes : XY chez l'homme, XX chez la femme. Chaque enfant reçoit aléatoirement l'un des deux chromosomes de son père et de sa mère, ce qui détermine son sexe : c'est une fille ou un garçon selon qu'il a reçu « X » ou « Y » de son père.

Le caractère hémophile est attaché à une altération de X en X' (« maladie » du chromosome X), de sorte que :

- les hommes ayant reçu $X'Y$ sont hémophiles ;
- les femmes ayant reçu XX' ne sont pas malades (car X est dominant et masque X' récessif), mais pourront transmettre X' à leur descendance ;
- les « individus » $X'X'$ n'existent pas (dans ce cas, l'enfant n'est pas viable).

1) Déterminer la loi de la structure chromosomique d'un enfant dans les cas suivants :

- a) son père est « normal » (XY) et sa mère transmetteuse (XX') ;
- b) son père est hémophile ($X'Y$) et sa mère « normale » (XX) ;
- c) son père est hémophile et sa mère transmetteuse.

2) Une femme a un père « normal » (XY), un grand-père maternel « normal », et un oncle maternel mort d'hémophilie.

Déterminer la probabilité des événements :

- N : « la femme est « normale » (XX) » ;
- $\bar{N}$: « la femme est transmetteuse ».

3) La femme précédente a n garçons ($n \geq 1$).

a) Déterminer la probabilité qu'aucun de ses fils ne soit hémophile (événement B_n).

b) Sachant qu'aucun de ses n fils n'est hémophile, quelle est la probabilité que la femme soit « normale » ?

c) À partir de quelle valeur de n est-on sûr à 95 % que la femme est « normale », sachant qu'elle a eu n fils « normaux » ?

4) La femme de la question 2) a eu n petits-fils « normaux » par l'une de ses filles, qui a épousé un homme non hémophile. Quelle est la probabilité de N ?

La génétique aujourd'hui

En 1953, les Anglais F. Crick et J. Watson découvrent la structure géométrique en double hélice de l'ADN, donnant un essor nouveau à la Génétique.



→ Lois de probabilité

OBJECTIFS

- Introduire les rudiments du dénombrement et de la combinatoire.
- Approfondir l'étude des lois de probabilité, discrètes ou continues.
- Sensibiliser au problème de l'adéquation d'une loi de probabilité à des données expérimentales.

« Tu crois au Dieu qui joue aux dés,
et moi à la seule valeur des lois. »

Albert Einstein
(lettre à Max Born)

Avant-première

1. OBJECTIFS

- Revenir sur les deux principes de base du dénombrement : les principes de la somme et du produit.
- Initier à la notion de loi de probabilité continue.

2. PRINCIPES DE LA SOMME ET DU PRODUIT

• Le principe de la somme

Soit E un ensemble fini et $A_1, A_2, \dots, A_p$ (Fig. 1) des parties de E formant une partition de E (à savoir : les parties sont deux à deux disjointes et leur réunion est égale à E).

Alors :

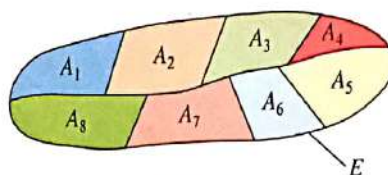


Fig. 1

$$\text{card } E = \text{card } A_1 + \text{card } A_2 + \dots + \text{card } A_p.$$

• Le principe du produit

Si une situation comporte k étapes offrant respectivement $n_1, n_2, \dots, n_k$ possibilités où chacun des nombres n_i ne dépend que de l'étape i , alors le nombre total d'issues est :

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k.$$

(Bien noter que ce principe n'exige pas l'indépendance des étapes, mais seulement l'indépendance du nombre de possibilités offertes à chaque étape.)

Exemple :

Combien peut-on écrire de nombres de trois chiffres deux à deux distincts avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 ?

Il y a trois étapes. La première étape « choix du premier chiffre » offre $n_1 = 6$ possibilités, la deuxième « choix du deuxième chiffre » offre $n_2 = 5$ possibilités (tous les chiffres, sauf celui utilisé à l'étape 1, et ce quel que soit ce chiffre) et il reste $n_3 = 4$ possibilités pour le troisième chiffre.

D'où le résultat : $6 \times 5 \times 4 = 120$.

Séquence 1

« Les grands principes »

① Reprendre l'exemple précédent sachant que l'on n'impose plus aux chiffres d'être deux à deux distincts.

② À Vincennes

Dix-huit trotteurs au départ : combien de tiercés dans l'ordre est-il possible d'obtenir ?

③ Montrer que le nombre de façons de ranger les cinq lettres M, A, T, H et S est :

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1.$$

Ce nombre sera noté $5!$ (« factorielle 5 »).

④ Les quatre couleurs

On dispose de quatre couleurs pour colorier la carte ci-contre (deux pays ayant une frontière commune ne peuvent recevoir la même couleur). Dénombrer les coloriages possibles.



⑤ Combien peut-on former de codes comportant trois lettres distinctes de l'alphabet (sauf O) suivies de quatre chiffres quelconques pris parmi 0, 1 et 2 ? (Exemple : bac 2002.)

3. NOTION DE LOIS CONTINUES

• Vers la probabilité d'intervalles

Le graphique ci-contre (à vocation vulgarisatrice) donne la distribution des tailles dans une population P fixée.

Il s'agit de l'**histogramme des fréquences** des tailles de tous les individus (rangées, par exemple, dans des classes d'amplitude 0.3) (unité : le centimètre).

L'aire du domaine en rouge (Fig. 2) représente donc la **probabilité** qu'un individu pris au hasard dans la population P ait une taille comprise entre x_1 et x_2 .

Cette probabilité sera simplement appelée **probabilité de l'intervalle** $[x_1, x_2]$ et notée $P([x_1, x_2])$. Observons que :

- toutes les tailles étant entre $[a, b]$, on a $P([a, b]) = 1$;
- la courbe $\mathcal{C}$ est représentative d'une fonction f positive, supposée continue, appelée **densité** de P , et que l'on a alors :

$$P([x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} f(s) ds ;$$

- la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = P([a, x]) = \int_a^x f(t) dt$ a pour dérivée f ;
- pour tout x , $P(\{x\}) = 0$ (normal – à y réfléchir – : la probabilité qu'un individu mesure exactement $\sqrt{3}$ m, ou toute autre valeur, est nulle !).

• La loi uniforme

Comme le stipulent les notices des constructeurs, les fonctions ALEA() d'Excel et rand() de la calculatrice (dont nous ferons bon usage) retournent (sic) « un réel aléatoire entre 0 et 1 ».

De fait, il s'agit d'une simulation « discrétisée » d'une **loi de probabilité qui modélise** ce que l'on pourrait appeler « le choix indifférent d'un réel au hasard entre 0 et 1 ».

La séquence 2 explore l'affaire...

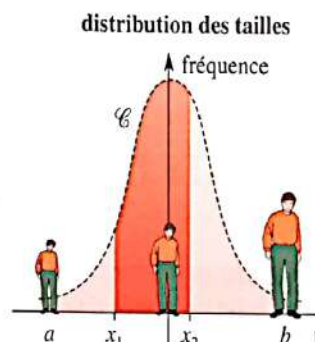


Fig. 2

Séquence 2

« La loi uniforme »

1 Simulation

a) Choisir un intervalle $[a, b]$ de $[0, 1]$, simuler 1 000 tirages d'un réel de $[0, 1]$ (avec ALEA() ou rand()) et déterminer la fréquence des nombres « tombant » dans $[a, b]$.

b) Quelle conjecture peut-on émettre entre cette fréquence et la longueur de $[a, b]$ (diversifier dans la classe le choix de $[a, b]$) ?

2 Étude de la loi

La loi uniforme sur $[0, 1]$ « attribue » à chaque intervalle $[a, b]$ de $[0, 1]$ la probabilité :

$$P([a, b]) = b - a.$$

a) Représenter graphiquement la fonction F qui à x ($0 \leq x \leq 1$) associe $F(x) = P([0, x])$.

b) Quelle est la densité de cette loi de probabilité ?

c) Interpréter par une aire, sur le graphique représentatif de f , chacune des probabilités suivantes :

• $P([0,6 ; 1])$, $P([0,2 ; 0,3] \cup [0,5 ; 1])$;

• $P\left(\left\{\frac{1}{3}\right\}\right)$ plus généralement $P(\{x_0\})$ où x_0 est donné dans $[0, 1]$;

• $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ où :

$A = [0,1 ; 0,6]$ et $B = [0,3 ; 0,7]$.

1. Dénombrement

1.1 LISTES D'ÉLÉMENTS D'UN ENSEMBLE FINI

Notion de listes

Soit E un ensemble fini de n éléments ($n \geq 1$) et p un entier ($p \geq 1$).

Une suite ordonnée de p éléments de E , non nécessairement distincts, est simplement appelée **liste de p éléments de E** .

Si l'on impose à une liste de p éléments de E de ne contenir que des éléments de E deux à deux distincts, on ne peut espérer que la liste contienne plus de n éléments : voilà pourquoi la notion de liste de p éléments de E deux à deux distincts n'a de sens que pour $1 \leq p \leq n$.

Proposition 1

Soit E un ensemble fini de n éléments ($n \geq 1$).

- Pour tout entier p ($p \geq 1$), le nombre de listes de p éléments de E est n^p .
- Pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq n$, le nombre de listes de p éléments de E deux à deux distincts est :

$$n(n-1)\dots(n-p+1) \quad (p \text{ facteurs}).$$

... Démonstration

Elle repose entièrement sur le principe multiplicatif.

Dans le premier cas (éléments non nécessairement distincts), il y a n possibilités pour chacun des p éléments de la liste, d'où le résultat : n^p .

Dans le second (éléments deux à deux distincts), il y a n possibilités pour le premier élément de la liste, puis $n-1$ pour le deuxième, $n-2$ pour le troisième... $n-(p-1) = n-p+1$ pour le p -ième.

Le principe multiplicatif indique alors le résultat énoncé dans la proposition 1.

→ EXEMPLE 1

Une urne contient 10 boules numérotées de 0 à 9. Combien y a-t-il de tirages possibles de 3 boules :

- a) avec remise (la boule tirée est remise dans l'urne avant chaque nouveau tirage) ;
- b) sans remise.

a) Un tirage de 3 boules avec remise correspond à une liste de 3 éléments parmi 10 ; leur nombre est donc :

$$10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1\,000.$$

b) Un tirage de 3 boules sans remise correspond à une liste de 3 éléments deux à deux distincts (la boule tirée n'est pas remise dans l'urne) parmi 10.

Leur nombre est donc calculé par :

$$10 \times 9 \times 8 = 720.$$

Note : le tirage de boules dans une urne (avec ou sans remise) permet de modéliser bon nombre de problèmes. À retenir donc.

Voir exercices 1 à 4

1.2 PERMUTATIONS

DÉFINITION 1

On appelle **permutation** d'un ensemble E de n éléments toute liste de n éléments de E deux à deux distincts.

Une permutation peut être perçue sous des aspects très variés.

• Liste ou classement

Voici les six permutations de l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$:

$(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ et $(3, 2, 1)$.

• Permutation (au sens « dynamique » du terme)

La figure 3 indique comment ont été permutés les cinq éléments x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 : cela correspond à la liste $(x_2, x_4, x_1, x_3, x_5)$.

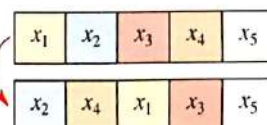


Fig. 3

• Tableau

Le tableau ci-contre représente une permutation de $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. En convenant d'une lecture « horizontal vers vertical », il s'agit ici de la liste $(2, 4, 1, 3, 5)$. De manière plus générale, on peut identifier une permutation d'un ensemble à n éléments à un tableau carré de n^2 cases tel qu'il y ait une case et une seule coloriée dans chaque ligne et chaque colonne.

5					
4					
3					
2					
1					
	1	2	3	4	5

• Etc.

Proposition 2

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments ($n \geq 1$) est le nombre noté $n!$ (lire « factorielle n ») défini par :

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1.$$

• Cela résulte immédiatement de la proposition 1.

Voici les factorielles des dix premiers entiers (voir tableau ci-contre) qui laissent déjà entrevoir que $n!$ croît assez vite avec n : c'est vrai.

On convient que $0! = 1$: ce n'est pas une lubie. Cela permet d'étendre sans restriction un certain nombre de relations à tous les entiers naturels (ne serait-ce que la relation :

$$(n+1)! = (n+1) \times (n!)$$

qui est alors vraie pour tout entier naturel n).

• Soit E un ensemble à n éléments.

Le nombre de listes de p éléments de E deux à deux distincts, avec $1 \leq p \leq n$, est calculé par $n(n-1)\dots(n-p+1)$ (voir proposition 1) ou encore :

$$\frac{n(n-1)\dots(n-p+1) \times (n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

$1! = 1$
$2! = 2$
$3! = 6$
$4! = 24$
$5! = 120$
$6! = 720$
$7! = 5\,040$
$8! = 40\,320$
$9! = 362\,880$
$10! = 3\,628\,800$

2. Combinaisons

2.1 DÉFINITION, NOTATION

DÉFINITION 2

Soit E un ensemble fini de n éléments et p un entier vérifiant $0 \leq p \leq n$; on appelle **combinaison de p éléments de E toute partie de E ayant p éléments**.

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{p}$ (lire « p parmi n »).

Notons que dans un ensemble E à n éléments, il y a n parties à un élément, une seule à n éléments : E , et encore une seule à 0 élément : la partie vide. Nous avons donc :

$$\binom{n}{1} = n, \binom{n}{n} = 1 \text{ et } \binom{n}{0} = 1.$$

2.2 DÉNOMBREMENT DES COMBINAISONS

THÉORÈME 1

Pour n et p entiers tels que $0 \leq p \leq n$, on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

... Démonstration

Pour obtenir toutes les listes de p éléments deux à deux distincts d'un ensemble E de n éléments, nous procédons en deux étapes :

- **Étape 1 : « Choix d'une partie de E à p éléments »** : il y a $\binom{n}{p}$ possibilités.
- **Étape 2 : « Classement des p éléments »** : il y a $p!$ possibilités.

D'après le principe du produit, nous obtenons $\binom{n}{p} \times p!$ listes de p éléments de E deux à deux

distincts. La proposition 1 livre alors l'égalité $n(n-1)\dots(n-p+1) = \binom{n}{p} \times p!$, d'où :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$



EXEMPLE 2

Au Loto, combien y a-t-il de tirages de 6 numéros parmi 49 ?

Un tirage de 6 numéros parmi les numéros 1, 2, ..., 49 est une combinaison de 6 éléments parmi 49.

Le nombre de tirages possibles est donc :

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 13\,983\,816.$$



De façon plus générale, il y a $\binom{n}{p}$ tirages possibles de p

boules parmi n boules, ces tirages étant sans remise (on ne remet pas les boules déjà tirées) et simultanés ou non ordonnés (comme au Loto).

Voir exercices 9 à 11

2.3 COEFFICIENTS BINOMIAUX ET FORMULE DU BINÔME

THÉORÈME 2

• Pour tous entiers n et p tels que $0 \leq p \leq n$, on a : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

• Pour tous entiers n et p tels que $1 \leq p \leq n-1$, on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \text{ (relation de Pascal).}$$

... **Démonstration** (voir *exercice 15*, page 320)

Soit E un ensemble de n éléments.

• $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$: le fait d'associer à chaque partie A de E la partie complémentaire $\bar{A}$ rend visible qu'il y a autant de parties de E ayant p éléments que de parties ayant $n-p$ éléments (si A a p éléments, $\bar{A}$ en a alors $n-p$).

• Soit $n \geq 2$ et a un élément fixé de E . Effectuons une **partition** des parties de E à p éléments :

• *celles ne contenant pas a* : ce sont les parties à p éléments parmi les $n-1$ éléments de E distincts de a ; il y en a donc $\binom{n-1}{p}$;

• *celles contenant a* : on les obtient en ajoutant l'élément a aux parties à $p-1$ éléments parmi les $n-1$ éléments de E distincts de a ; il y en a donc $\binom{n-1}{p-1}$.

Le **principe de la somme** livre alors : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

Le triangle de Pascal

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Fig. 4

La relation de Pascal permet de calculer $\binom{n}{p}$ connaissant $\binom{n-1}{p}$ et $\binom{n-1}{p-1}$.

On calcule alors les coefficients $\binom{n}{p}$ dans le tableau ci-contre en bordant de « 1 » la première colonne et la diagonale, et en utilisant le schéma (Fig. 4).

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
...									

THÉORÈME 3

Soit a et b des nombres complexes et n un entier ($n \geq 1$). On a :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p} = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Nous donnerons la démonstration de ce *théorème* à l'*exercice 17*, page 320.

Cette formule explique le nom de **coefficients binomiaux** donné aux $\binom{n}{p}$.

Elle est souvent utilisée avec $a = x$ et $b = 1$:

$$(x+1)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} + \dots + \binom{n}{p} x^p + \dots + \binom{n}{n-1} x + 1.$$

3. Exemples de lois discrètes

3.3 C

THÉOR

3.1 LA LOI DE BERNOULLI

Épreuve de Bernoulli



Jacques Bernoulli
(1654-1705)

Une **épreuve de Bernoulli** est une épreuve aléatoire ayant **deux issues contraires** de probabilités respectives p et q , avec $p + q = 1$.

• *Exemples*

• Lancer d'une pièce de monnaie équilibrée, avec pour issues contraires : PILE (probabilité $p = 1/2$) et FACE (probabilité $q = 1/2$).

• Tirage d'une boule dans une urne contenant 70 boules blanches et 30 boules rouges, avec pour issues contraires :

– S : « tirer une boule blanche », de probabilité $p = 0,7$;

– $E = \overline{S}$: « tirer une boule rouge », de probabilité $q = 0,3$.

• *Note* : il est commode de désigner l'alternative du résultat d'une épreuve de Bernoulli par [succès ; échec], en abrégé S et E (le choix de ce qui est dénommé succès ou échec étant évidemment arbitraire).

Loi de Bernoulli

Soit une épreuve de Bernoulli d'issues contraires S (probabilité p), E (probabilité q) et X la variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\}$ définie ainsi :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si l'issue de l'épreuve est } S \text{ (probabilité } p) ; \\ 0 & \text{si l'issue est } E \text{ (probabilité } q = 1 - p). \end{cases}$$

Par définition, la loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée **loi de Bernoulli de paramètre p** .

Le calcul de l'espérance et de la variance de X est immédiat (voir cependant l'exercice 25, page 320) ; on obtient $E(x) = p$ et $V(x) = pq$.

3.2 LA LOI BINOMIALE

DÉFINITION 3

• Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli *identiques et indépendantes* d'issues contraires S (probabilité p) et E (probabilité q) avec $p + q = 1$.

• La variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$: « nombre de succès » suit, par définition, la **loi binomiale de paramètres n et p** .

La loi binomiale de paramètres n et p est notée $\mathcal{B}(n, p)$.

• La répétition des n épreuves de Bernoulli peut-être « décalée dans le temps » (lancer n fois de suite la même pièce de monnaie) ou « simultanée » (lancer n pièces de monnaie identiques dès lors que les lancers sont indépendants).

• Les *issues élémentaires* d'un schéma de Bernoulli sont les **listes de n lettres, chaque lettre étant S ou E** . Par exemple, pour $n = 5$ la liste $SSESE$ est l'issue : succès à la première épreuve, succès à la deuxième, échec à la troisième, succès à la quatrième et échec à la cinquième.

3.3 CARACTÉRISTIQUES DE LA LOI BINOMIALE

THÉORÈME 4

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

1) Pour $k = 0, 1, \dots, n$, la probabilité de $(X = k)$ est $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

2) L'espérance et la variance de X sont $E(X) = np$; $V(X) = npq$.

... Démonstration

1) L'événement $(X = k)$ est l'ensemble des listes de n lettres écrites avec les lettres S et E où S apparaît k fois et $E(n - k)$ fois.

Il est clair qu'il existe $\binom{n}{k}$ listes de ce type.

Par ailleurs, les épreuves étant indépendantes, la probabilité d'une liste est égale au produit des probabilités de chaque résultat S ou E (voir chapitre 9, page 274) à savoir :

$$p^k q^{n-k}.$$

La probabilité de l'événement $(X = k)$ est donc $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

2) Les résultats sur l'espérance et la variance sont admis (l'exercice 33 en propose une démonstration et souligne que l'égalité $S(X) = np$ n'est pas faite pour nous étonner).

Remarques

- 1) La formule du binôme: $1 = (p + q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n P(X = k)$ confirme ce que l'on est en droit d'attendre d'une loi de probabilité et vient expliquer l'appellation « loi binomiale ».
- 2) La probabilité d'obtenir au moins un succès est calculée par $P(X \geq 1)$ soit $1 - P(X = 0)$ à savoir : $1 - q^n$ (on retrouve un résultat classique du chapitre 9).



EXEMPLE 3

Un Q.C.M. comporte 10 questions offrant chacune 3 réponses possible.

On répond complètement au hasard. Quelles sont les probabilités :

a) d'obtenir 2 réponses exactes ?

b) d'avoir la « moyenne » (au sens 5 réponses ou plus exactes) ?

La variable aléatoire X : « nombre de réponses justes au Q.C.M. en répondant tout au hasard suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ (10 questions) et $p = \frac{1}{3}$

(« une chance sur trois de tomber juste »). D'où :

$$\text{a) } P(X = 2) = \binom{10}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^8 = \frac{10 \times 9}{2} \times \frac{2^8}{3^{10}} = \frac{1}{6} \frac{280}{561} \text{ (environ 19,5 \%)}$$

$$\text{b) } P(X \geq 5) = \sum_{k=5}^{10} P(X = k) = \sum_{k=5}^{10} \binom{10}{k} \times \frac{2^{10-k}}{3^{10}},$$

soit, avec la calculatrice : 0,213 environ (21,3 %).

Voir exercices 29 à 32

4. Lois continues (généralités), loi uniforme

4

4.1 LOI DE PROBABILITÉ À DENSITÉ

DÉFINITION 4

Une loi de probabilité P sur un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ est déterminée par une fonction f définie, continue, positive sur I telle que $\int_a^b f(t) dt = 1$ et appelée **densité** de P .

Pour tout intervalle $[\alpha, \beta]$ contenu dans I , la probabilité de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ est

$$P([\alpha, \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt.$$

- La probabilité de $[\alpha, \beta]$ n'est donc rien d'autre que l'aire du domaine ci-contre (Fig. 5).

- On a $P([a, b]) = 1$ et pour tout x_0 de I :

$$P(\{x_0\}) = 0 \text{ (car } \int_{x_0}^{x_0} f(t) dt = 0).$$

- Les seuls événements que nous considérerons dans la

suite seront des *réunions finies d'intervalles* contenus dans I et les règles usuelles du calcul des probabilités s'appliquent à ces événements.

Par exemple, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, en notant que $P(A \cap B)$ peut être nulle sans que A et B soient disjoints (c'est le cas si $A \cap B$ est fini).

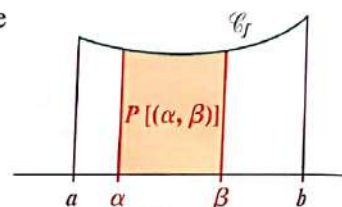


Fig. 5

4.2 LA LOI UNIFORME

DÉFINITION 5

On appelle **loi uniforme** sur $I = [a, b]$, la loi de probabilité P dont la densité f est une **fonction constante** sur I .

Il est facile de voir que la valeur de la constante est le réel $\frac{1}{b-a}$ (voir exercice 38) et donc que la **probabilité d'un intervalle** $J = [\alpha, \beta]$ est calculée par le rapport des longueurs :

$$\frac{\beta - \alpha}{b - a} = \frac{\text{longueur de } J}{\text{longueur de } I}.$$

Dans le cas de la loi uniforme sur $[0, 1]$, la **probabilité d'un intervalle** est alors la **longueur de cet intervalle**.

La loi uniforme généralise au « continu » ce que la loi équirépartie est au « discret ». Elle intervient dans de nombreuses situations notamment dans le « **choix d'un point au hasard sur un segment (ou un intervalle) I** ». Nous conviendrons d'accorder à cette expression la signification suivante : « la probabilité que le point appartienne à un sous-segment (ou sous-intervalle) J de I est $P(J)$, où P est la loi uniforme sur I ».

4.3 VARIABLE ALÉATOIRE – FONCTION DE RÉPARTITION

Exemple introductif

Soit OAB un triangle rectangle isocèle de côté 1 (Fig. 6). Un point M étant pris « au hasard » sur $[AB]$ (c'est-à-dire selon la loi uniforme sur $[0, 1]$), l'angle géométrique $\theta = \widehat{AOM}$ varie aléatoirement dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

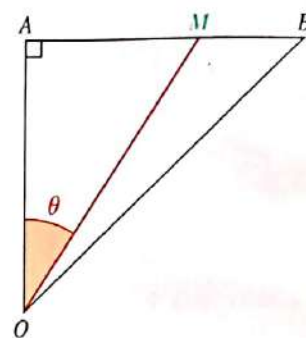


Fig. 6

Examinons de plus près le comportement aléatoire de l'angle θ en considérant l'événement $(0 \leq \theta \leq \alpha)$, α étant un réel de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Il est clair que $0 \leq \theta \leq \alpha \Leftrightarrow \tan \theta \leq \tan \alpha$.

Comme $\tan \theta = \frac{AM}{AO} = AM$, il vient :

$$0 \leq \theta \leq \alpha \Leftrightarrow AM \leq \tan \alpha.$$

Ainsi, la probabilité de l'événement $(0 \leq \theta \leq \alpha)$ est égale à celle de l'événement $(AM \leq \tan \alpha)$ qui n'est autre que $\tan \alpha$ puisque M suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. On a donc :

$$P(0 \leq \theta \leq \alpha) = \tan \alpha = \int_0^\alpha (1 + \tan^2 t) dt \quad (\tan' = 1 + \tan^2).$$

Nous résumerons cela en disant que θ est une variable aléatoire à valeurs dans $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ qui suit la loi de probabilité (baptisée « loi tangente ») dont la densité est la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(t) = 1 + \tan^2 t$.

Cet exemple sous-tend la généralisation suivante :

DÉFINITION 6

Soit une loi de probabilité P sur $I = [a, b]$ de densité f .

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans I suit la loi de probabilité P si

$$P(a \leq X \leq x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ pour tout } x \text{ de } [a, b].$$

Fonction de répartition

Lorsque aucune ambiguïté n'est à craindre, nous noterons simplement par $(X \leq x)$ l'événement $(a \leq X \leq x)$ et par $(X \geq x)$ l'événement $(x \leq X \leq b)$. Cela dit, la fonction F définie sur $[a, b]$ par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_a^x f(t) dt$$

est appelée **fonction de répartition de la variable aléatoire X** .

Voici l'essentiel de ses propriétés (immédiates à établir) :

- F est dérivable sur I et $F' = f$;
- $P(X > x) = 1 - F(x)$, pour tout x de I ;
- Pour $h > 0$ et x dans I , avec $x + h$ dans I :

$$P(x \leq X \leq x + h) = F(x + h) - F(x).$$

Noter que cette probabilité est aussi celle de l'événement :

$$(x \leq X) \cap (X \leq x + h).$$

5. La loi exponentielle

5

5.1 DÉFINITION – PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Étude préliminaire

Soit λ un réel strictement positif et f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(s) = \lambda e^{-\lambda s}$. La fonction f est strictement **positive**, **continue** (elle est même indéfiniment dérivable), décroissante avec $\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s) = 0$.

Il est clair, par ailleurs, que la fonction $t \rightarrow -e^{-\lambda t}$ est une primitive de f sur $[0, +\infty[$, d'où nous tirons :

$$\int_0^t f(s) ds = 1 - e^{-\lambda t}, \text{ puis } \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f(s) ds = 1.$$

Tous les éléments se trouvent réunis pour généraliser à l'intervalle $[0, +\infty[$ la notion de loi de probabilité à densité.

Posons tout d'abord que, pour $[a, b] \subset [0, +\infty[$:

$$P([a, b]) = \int_a^b f(s) ds,$$

d'où il résulte en particulier que, pour $t \geq 0$:

$$P([0, t]) = \int_0^t f(s) ds = 1 - e^{-\lambda t}$$

(c'est l'aire du domaine en bleu dans la figure 7).

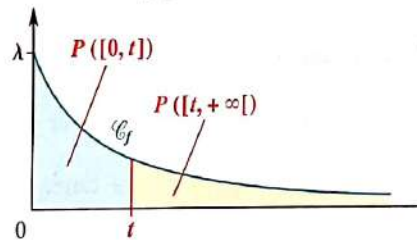


Fig. 7

Quant à l'aire du domaine en jaune, elle est finie et calculée par $1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$. La probabilité de l'intervalle $[t, +\infty[$ sera donc $e^{-\lambda t}$.

Nous pouvons maintenant former la définition suivante.

DÉFINITION 7

Soit λ un réel *strictement positif*.

La fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(s) = \lambda e^{-\lambda s}$ est la **densité** d'une loi de probabilité P , appelée **loi exponentielle de paramètre λ** .

Remarque : cette définition s'étend naturellement à une variable aléatoire.

Une **variable aléatoire** T à valeurs dans $[0, +\infty[$ suit la loi exponentielle de paramètre λ lorsque la probabilité de l'événement $(0 \leq T \leq t)$ – noté simplement $(T \leq t)$ – est

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds.$$

On a donc :

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \text{ et } P(T > t) = e^{-\lambda t}.$$

On désigne encore par F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F(t) = P(T \leq t)$ et cette fonction est encore appelée **fonction de répartition de la variable aléatoire T** .

5.2 LOI DE DURÉE DE VIE SANS VIEILLISSEMENT

Mise en place de la notion

La **durée de vie** d'un individu (au sens statistique du terme) est une **variable aléatoire** T à valeurs dans $[0, +\infty[$, où l'événement $(T \geq t)$, avec $t \geq 0$, signifie que l'individu est vivant à l'instant t .

On dit alors que T suit la **loi de durée de vie sans vieillissement** si la probabilité que l'individu soit vivant à l'instant $t+h$ ($h \geq 0$), sachant qu'il est vivant à l'instant t , ne dépend pas de t ($t \geq 0$). Autrement dit, en formalisant un peu :

$P(T \geq t+h | T \geq t)$ ne dépend pas de t (pour tout $h \geq 0$).



Étude mathématique ⁽¹⁾

- Indépendante de t , la probabilité ci-dessus est égale à $P(T \geq h | T \geq 0)$ (en choisissant $t = 0$). Comme l'événement $(T \geq 0)$ est l'événement certain, on obtient :

$$P(T \geq h | T \geq 0) = P(T \geq h), \text{ soit :}$$

$$P(T \geq t+h | T \geq t) = P(T \geq h) \quad (1).$$

- D'après la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P(T \geq t+h | T \geq t) = \frac{P((T \geq t+h) \cap (T \geq t))}{P(T \geq t)} = \frac{P(T \geq t+h)}{P(T \geq t)},$$

car $(T \geq t+h)$ est inclus dans $(T \geq t)$, d'où :

$$(T \geq t+h) \cap (T \geq t) = (T \geq t+h).$$

Alors, compte tenu de (1), nous obtenons :

$$\frac{P(T \geq t+h)}{P(T \geq t)} = P(T \geq h) \quad (2).$$

- En posant $\varphi(t) = P(T \geq t)$, pour $t \geq 0$, la relation (2) s'écrit :

$$\varphi(t+h) = \varphi(t) \times \varphi(h), \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } h \geq 0.$$

Comme φ est non nulle (pas d'individu mort-né), en supposant φ dérivable, nous tenons du chapitre 3, page 80 – et aussi un peu de l'exercice 46, page 322 –, que la solution de cette équation fonctionnelle est $\varphi(t) = e^{\alpha t}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Par ailleurs, φ étant une probabilité, $\varphi(t) < 1$, pour $t \geq 0$, ce qui impose $\alpha < 0$.

Ainsi, il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $\varphi(t) = e^{-\lambda t}$.

- De l'égalité $P(T < t) = 1 - P(T \geq t) = 1 - \varphi(t)$, nous tirons $P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et ce résultat tout à fait remarquable : la variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre λ .

Commentaires

1 Aspects techniques de la démonstration

L'exercice 46 revient sur quelques aspects de la démonstration, notamment sur l'hypothèse « φ est une fonction dérivable » et l'exploitation qui en a été faite.

2 Le paramètre λ

Nous donnerons un sens à ce paramètre dans *Au cœur des problèmes*, page 313.

3 Applications

Cette loi s'applique dans de nombreuses situations sous des formes variées (« mourir sans vieillir ») : voir le thème sur la radioactivité (page 312), mais également à la durée de fonctionnement de systèmes qui ne sont pas sujets à un phénomène d'usure.

(1) Il est conseillé de connaître son cours sur la fonction exponentielle (chapitre 3) et sur les probabilités conditionnelles (chapitre 9).

1. Calcul de probabilités

OBJECTIF

Si le calcul de probabilités sur un ensemble fini d'épreuves est la matière première de cette rubrique, le mot d'ordre est :

- exploiter de manière un peu plus creusée le dénombrement ;
- tirer profit des lois discrètes que nous avons sous la main ;
- éviter les calculs (trop) technologiques.

PROBLÈME

« Le Loto national »

Nous ne considérons ici que des tirages de 6 numéros parmi 1, 2, ..., 49 (donc, des tirages « dépollués » du numéro complémentaire).

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « le tirage ne comporte que des nombres pairs » ;

E_2 : « le tirage comporte les numéros fétiches de Donald : 15 et 7 »

(N.B. le 15 juillet est la Saint-Donald...) ;

E_3 : « un même numéro (au moins) est dans les 2 tirages de samedi prochain ».

2) Peut-on dire qu'en moyenne, un numéro donné apparaît dans un tirage 1 fois sur 8 ?

① Remarque préliminaire

La loi de probabilité étant la loi équirépartie⁽¹⁾ (chaque combinaison de 6 numéros parmi 49 a la même probabilité de « sortir »), la probabilité de chacun des événements E_i , $i = 1, 2, 3$ est calculée par :

$$P(E_i) = \frac{\text{card} E_i}{\text{card} \Omega}, \text{ où } \Omega \text{ est l'ensemble de tous les tirages possibles,}$$

ensemble dont le cardinal est $\binom{49}{6}$.

② Le calcul des probabilités

• E_1 : « que des pairs »

Un tirage ne comportant que des nombres pairs s'obtient en prenant 6 numéros parmi les 24 numéros pairs entre 1 et 49.

On a donc $\text{card} E_1 = \binom{24}{6}$, d'où :

$$P(E_1) = \frac{\binom{24}{6}}{\binom{49}{6}} = \frac{24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19}{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44} \approx 0,00962$$

soit $P(E_1) \approx 0,962 \%$.

(1) C'est aussi le cas du montant des enjeux : une moitié pour la Française des jeux, l'autre moitié pour les gagnants. (Dans le genre, c'est le record ; si, si.)



1	10	20	30	40	2	10	20	30	40
1	11	21	31	41	1	11	21	31	41
2	12	22	32	42	2	12	22	32	42
3	13	23	33	43	3	13	23	33	43
4	14	24	34	44	4	14	24	34	44
5	15	25	35	45	5	15	25	35	45
6	16	26	36	46	6	16	26	36	46
7	17	27	37	47	7	17	27	37	47
8	18	28	38	48	8	18	28	38	48
9	19	29	39	49	9	19	29	39	49

• E_2 : « le cas Donald »

Tout tirage comportant les numéros 15 et 7 se construit ainsi :

- 1) mettre momentanément 15 et 7 sur le côté ;
- 2) tirer 4 numéros parmi les 47 restants ($\binom{47}{4}$ possibilités) ;
- 3) adjoindre maintenant 15 et 7 aux 4 numéros tirés.

Il y a donc $\binom{47}{4}$ tirages comportant les numéros 15 et 7, d'où

$$P(E_2) = \frac{\binom{47}{4}}{\binom{49}{6}} = \frac{5}{392}, \text{ soit : } P(E_2) \approx 0,0127 \text{ \%.}$$

• E_3 : « au moins 1, deux fois de suite »

Pour qu'aucun numéro n'apparaisse deux fois de suite, il faut et il suffit que le second tirage de 6 numéros soit effectué dans les numéros 1 à 49 « épurés » des 6 numéros du premier tirage.

Ceci offre $\binom{43}{6}$ possibilités, d'où $p(\bar{E}_4) \approx 0,436$.

Conclusion : $P(E_4) \approx 56,4 \text{ \%.}$

③ Un calcul de moyenne

La probabilité qu'un numéro donné « sorte » lors d'un tirage est

$$p = \frac{\binom{48}{5}}{\binom{49}{6}} = \frac{6}{49} \text{ (pourquoi ? ; voir ci-contre).}$$

La **variable aléatoire X** : « nombre de fois où un numéro donné sort au cours de 8 tirages » suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = \frac{6}{49}$.

On a donc $E(X) = 8p = \frac{48}{49} \approx 0,98$ (presque 1).

On peut donc avancer raisonnablement **qu'en moyenne, un numéro donné est dans un tirage 1 fois sur 8.**

Dans la foulée

① Quelle est la probabilité que deux points pris au hasard parmi n points d'un cercle soient deux points voisins ?

② Même question que dans l'exercice 1 avec une droite.

③ On tire au hasard 3 nombres parmi 10 nombres strictement positifs et 15 strictement négatifs. Quelle est la probabilité que le produit de ces 3 nombres soit négatif ?

④ « Chuck-a-luck »

C'est un jeu de foire pour le badaud naïf qui peut parier 1 € sur un entier compris entre 1 et 6.

On lance 3 dés. Si le nombre misé sort 1, 2 ou 3 fois, on lui rembourse sa mise plus 1 €, 2 € ou 3 €. Sinon, il perd sa mise.

Quel est le « gain » moyen par partie ?



SAVOIR-FAIRE

L'art de compter

La situation ci-contre est exemplaire : pour dénombrer les tirages ayant telle ou telle propriété, on décrit pas à pas un procédé de construction systématique de tels tirages. C'est gagnant à tout coup.

Un classique : « au moins un » doit immédiatement faire songer à l'événement contraire « aucun ».

Comment construire un tirage contenant un numéro donné ?

2. Autour de la loi uniforme

OBJECTIF

Choisir au hasard un réel dans $[0, 1]$, un point sur un segment ou sur un cercle, un instant entre midi et quatorze heures, etc. : autant de situations qui peuvent relever de la *loi uniforme*, autant de questions à examiner de près : **simulation, calcul de probabilité, recherche de densité**, etc. C'est l'idée.

PROBLÈME 1

Un point M est pris au hasard sur le demi-cercle Γ de diamètre $[AB]$, de centre O et de rayon 1 (Fig. 8).

Quelle est la probabilité p que le triangle AOM soit d'aire inférieure ou égale à 0,25 ?

1 « Choisir au hasard »

Nous conviendrons que, sans autre précision, « choisir un point M au hasard sur le demi-cercle Γ » revient à dire que :

« l'angle $\theta = \widehat{AOM}$ suit la loi uniforme sur $[0, \pi]$ ».

2 Une solution

L'aire S du triangle AOM est $S = \frac{1}{2} OA \cdot OM \cdot \sin \widehat{AOM} = \frac{1}{2} \sin \theta$.

Un peu de trigonométrie élémentaire indique alors que :

$$S \leq 0,25 \Leftrightarrow \sin \theta \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \pi.$$

La probabilité p de l'événement $(S \leq 0,25)$ est donc la probabilité

$P\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]\right)$ où P est la loi uniforme sur $[0, \pi]$.

Les intervalles $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ et $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ sont disjoints, de même longueur $\frac{\pi}{6}$, et

donc de même probabilité $\frac{1}{6}$; par suite $p = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

PROBLÈME 2

On choisit au hasard et indépendamment l'un de l'autre deux nombres réels dans $[0, 1]$ et l'on désigne par T le plus grand des deux. Calculer la densité de T .

1 L'idée majeure

Elle consiste à obtenir la **fonction de répartition** F de T , c'est-à-dire calculer $F(t) = P(T < t)$, pour $t \in [0, 1]$.

En effet, à supposer F dérivable, on aura $F'(t) = f(t)$ où f est la densité cherchée (voir le cours, page 305).

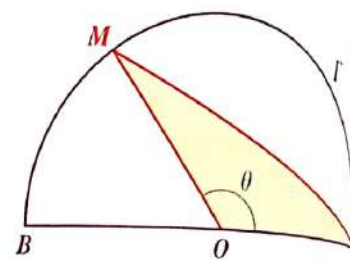


Fig. 8

AU HASARD

Pourquoi « uniforme » ?

La longueur d'un arc de cercle étant proportionnelle à l'angle au centre θ qui l'intercepte, si l'on choisit sur Γ la loi P où la probabilité d'un arc est :

$\frac{\text{longueur de l'arc}}{\text{longueur de } \Gamma}$, alors θ suit la loi uniforme sur $[0, \pi]$.

Note : d'autres choix sont possibles (voir exercice 60, page 324).

C'est l'idée qui fonctionne dans la simulation (voir thème 2, page 317).

② Le point de vue probabiliste

Soit X le premier nombre pris au hasard dans $[0, 1]$ et Y le second.

D'après l'énoncé, X et Y sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$ et manifestement l'on a $T = \max(X, Y)$.

Soit $t \in [0, 1]$. La remarque, somme toute évidente :

« deux nombres sont plus petits que t si, et seulement si, chacun d'eux est plus petit que t » montre que l'événement $(T < t)$ est l'intersection $(X < t) \cap (Y < t)$. D'où :

$$\begin{aligned} P(T < t) &= P((X < t) \cap (Y < t)) \\ &= P(X < t) \times P(Y < t) = t \times t = t^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $F(t) = t^2$ et donc :

$$f(t) = F'(t) = 2t.$$

③ Le point de vue géométrique

Nous admettons que le choix au hasard de deux nombres x et y de $[0, 1]$ indépendamment l'un de l'autre peut être modélisé par le choix au hasard d'un point $M(x, y)$ dans le carré C (Fig. 9), ce qui signifie simplement :

« la probabilité d'une partie A du carré C est l'aire de A . »

Soit alors t un réel de $[0, 1]$ et A_t l'ensemble des points $M(x, y)$ de C tels que $\max(x, y) \leq t$.

La figure 10 rend visible que l'aire de A_t est égale à t^2 ; on retrouve que :

$$F(t) = P(T < t) = t^2.$$

Commentaires

À de rares exceptions près (tels le problème 2 ci-dessus où l'exercice 6 ci-après), les moyens nous feront défaut pour attaquer de tels problèmes où se « mêlent » deux (ou plusieurs) variables aléatoires sous le point de vue probabiliste : le point de vue géométrique, via le calcul d'aires, sera à privilégier.

INDÉPENDANCE

Le cas continu

Deux variables aléatoires X et Y qui suivent la loi uniforme sur I sont indépendantes lorsque les événements $(a < X < b)$ et $(c < Y < d)$ sont indépendants ($[a, b]$ et $[c, d]$ quelconques dans I) : c'est dans l'ordre des choses.

En particulier, on aura :

$$\begin{aligned} P((X < x) \cap (Y < y)) \\ = P(X < x) \times P(Y < y). \end{aligned}$$

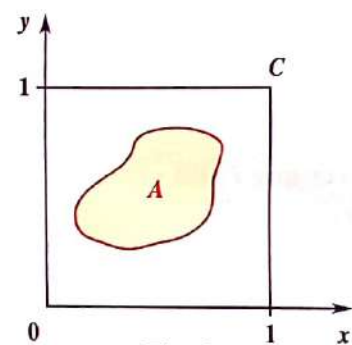


Fig. 9

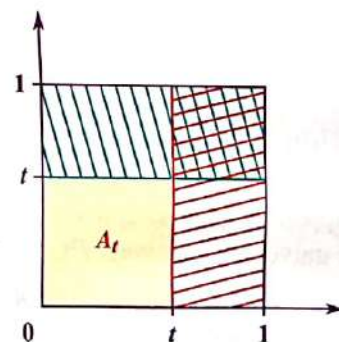


Fig. 10

Dans la foulée

⑤ Avec la corde

Les données et notations sont celles du problème 1 :

1) Montrer que $AM = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

2) En déduire la probabilité de l'événement : $(1 \leq AM \leq \sqrt{3})$.

3) Soit I et J les points de Γ tels que :

$$\widehat{AOI} = \frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad \widehat{AOJ} = \frac{2\pi}{3}.$$

Calculer AI , AJ et retrouver le résultat de 2).

⑥ Minimum de deux nombres

Les données sont celles du problème 2, mais il s'agit cette fois de calculer la densité de m où m est le minimum des deux nombres :

a) en représentant, pour $t \in [0, 1]$, l'ensemble des points $M(x, y)$ du carré C tels que $\min(x, y) \leq t$ (point de vue géométrique).

b) en exploitant les résultats obtenus sur $\max(x, y)$ et le calcul de probabilités (point de vue probabiliste).

3. La désintégration radioactive

OBJECTIF

Aborder sous divers aspects la loi de désintégration radioactive en mettant en évidence une prouesse du calcul des Probabilités : opérer le passage du caractère aléatoire de la désintégration d'un noyau individuel au caractère déterministe de l'évolution d'une population de noyaux radioactifs.

PROBLÈME 1

1) La variable aléatoire T « durée de vie d'un noyau radioactif » vérifie la propriété suivante :

$P(T < t + h / T \geq t)$ ne dépend pas de t (pour $h \geq 0$).

Montrer que T suit une loi exponentielle (on note λ ($\lambda > 0$) le paramètre).

2) Les durées de vie de plusieurs noyaux (en nombre fini) d'un même corps sont des variables aléatoires de même loi, indépendantes.

Soit N_0 le nombre de noyaux à l'instant $t = 0$.

Montrer que le nombre moyen N_t de noyaux non désintégrés à l'instant t est $N_t = N_0 e^{-\lambda t}$.

Solution

① Rappelons (voir chapitre 9) que, pour deux événements A et B d'un même univers, nous avons $P(A/B) + P(\bar{A}/B) = 1$.

Avec $A = (T < t + h)$, d'où $\bar{A} = (T \geq t + h)$, et $B = (T \geq t)$, il vient :

$$P(T \geq t + h / T \geq t) = 1 - P(T < t + h / T \geq t),$$

ce qui prouve que $P(T \geq t + h / T \geq t)$ ne dépend pas non plus de t , autrement dit (voir le cours, page 307) :

T suit une loi de durée de vie sans vieillissement.

Il existe donc $\lambda > 0$ tel que T suive la loi exponentielle de paramètre λ .

② Soit t fixé. Pour l'ensemble des N_0 noyaux, nous avons N_0 répétitions indépendantes d'une même épreuve à deux issues contraires : « être désintégré à l'instant t (probabilité $e^{-\lambda t}$) ou non ».

La variable aléatoire X_t = nombre de noyaux non désintégrés à l'instant t suit donc la loi binomiale de paramètres N_0 et $e^{-\lambda t}$.

Son espérance mathématique $E(X_t)$ est alors $E(X_t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

D'où le résultat : le nombre moyen N_t de noyaux non désintégrés à l'instant t est $N_t = N_0 e^{-\lambda t}$.

MODÉLISATION

Le problème 1 rend explicites les deux hypothèses de base de la désintégration radioactive, que voici, sous forme de formules bien senties :

- Un noyau meurt sans vieillir.
- La mort d'un noyau n'affecte pas les noyaux voisins.

Chaque « noyau » suit la loi exponentielle de même paramètre λ .

Pour chacun d'eux, on a donc :

$$P(T > t) = e^{-\lambda t}.$$

PROBLÈME 2 (approche différentielle)

En 1902, Rutherford et Soddy énoncent la loi de décroissance radioactive : « La probabilité qu'un noyau d'un corps radioactif se désintègre durant l'intervalle de temps Δt est $\lambda \Delta t$ ($\lambda > 0$). »
À l'aide d'une équation différentielle, retrouver la fonction de répartition de la variable aléatoire T : « durée de vie d'un noyau ».

1 Interprétation de la loi de Rutherford-Soddy

Nous devons la comprendre ainsi : $P(T < t + \Delta t / T \geq t) = \lambda \Delta t$, ce qui ne signifie pas autre chose que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(T < t + h / T \geq t)}{h} = \lambda$.

2 Étude mathématique

Nous avons $P(T < t + h / T \geq t) = \frac{P((T < t + h) \cap (T \geq t))}{P(T \geq t)}$.

Avec $F(t) = P(T < t)$, nous pouvons écrire :

$$P(T \geq t) = 1 - F(t) ;$$

$$P((T < t + h) \cap (T \geq t)) = P(t \leq T \leq t + h) = F(t + h) - F(t).$$

D'où l'on déduit :

$$\frac{P(T < t + h / T \geq t)}{h} = \frac{F(t + h) - F(t)}{h} \times \frac{1}{1 - F(t)}.$$

En faisant tendre h vers 0, il vient :

$$\lambda = F'(t) \times \frac{1}{1 - F(t)}, \text{ soit :}$$

$$F'(t) + \lambda F(t) = \lambda \quad (E)$$

(la résolution de l'équation (E) est l'objet de l'exercice 7 ci-dessous).

3 Remarques

Dans le cadre de la loi de durée de vie sans vieillissement, la constante λ s'interprète comme l'inverse de la durée de vie moyenne (c'est la généralisation de la notion d'espérance mathématique du « discret » au « continu » qui explique ce résultat (voir exercice 8 ci-dessous)).



Lord Ernest Rutherford
(1871-1937).

INFO

Les constantes de la désintégration radioactive

- λ est la constante radioactive (ou de désintégration) ;

- $\frac{1}{\lambda}$ est le temps caractéristique ; de fait c'est la durée de vie moyenne d'un noyau ;

- la demi-vie ou période $\widehat{T}$ est telle que : $N_{t+\widehat{T}} = \frac{1}{2} N_t \quad \forall t \geq 0$.

$$\text{On a : } \widehat{T} = \frac{1}{\lambda} \ln 2$$

(voir chapitre 5, page 157).

Avec les notations habituelles, cela signifie $E(T) = \frac{1}{\lambda}$.

Dans la foulée

7 L'équation (E)

Résoudre l'équation différentielle (E).

Piste C'est une équation différentielle du type

$$y' + ay = b ; \text{ condition initiale ?}$$

8 Durée de vie moyenne

La variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre λ et de densité désignée par f .

Montrer que $\int_0^t sf(s)ds$ a une limite τ quand $t \mapsto +\infty$, que l'on calculera en fonction de λ .

Note : dans un « vrai » cours, τ serait définie comme $E(T)$, espérance mathématique de la variation aléatoire T .

4. Adéquation à une loi équirépartie

OBJECTIF

Sensibiliser à la notion de preuve statistique.

À partir de résultats théoriques, simplement abordés à l'aide d'une simulation, il va s'agir de réfléchir sur des données (plutôt que d'appliquer des recettes), et décider le rejet d'un modèle théorique si une certaine fonction des données expérimentales a une valeur jugée *a priori* exceptionnelle.

PROBLÈME

Une expérience aléatoire conduisant à k issues $x_1, \dots, x_k$, dont les probabilités respectives sont $p_1, \dots, p_k$, est réalisée n fois.

1) a) Pour $1 \leq i \leq k$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de l'issue x_i , sur les n expériences.
Donner la loi de N_i et son espérance mathématique.

b) Pour mesurer les « écarts aux moyennes », on considère la variable aléatoire :

$$D^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Montrer que l'espérance mathématique de D^2 : $E(D^2)$ est indépendante de n et des p_i .

2) Dans le cas de 120 lancers d'un dé équilibré, conjecturer, à l'aide de simulations, les vingtiles v_{18} et v_{19} de la loi de D^2 (définis par $P(D^2 > v_{18}) = 0,1$ et $P(D^2 > v_{19}) = 0,05$).

3) On convient, pour une expérience analogue, de rejeter la régularité d'un dé de façon significative au seuil de 10 % (ou de 5 %) lorsque la valeur observée d^2 de D^2 dépasse v_{18} (ou v_{19}).

Pour les 120 lancers, les six numéros sont sortis respectivement 26, 13, 22, 27, 12 et 20 fois.

Le dé est-il régulier ?

1) a) Sans ambiguïté, N_i suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_i)$.

On en déduit :

$$E(N_i) = np_i \text{ et } V(N_i) = np_i(1 - p_i).$$

b) D'après la linéarité de l'espérance :

$$E(D^2) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{np_i} E[(N_i - np_i)^2] = \sum_{i=1}^k \frac{1}{np_i} V(N_i).$$

Rappel : propriétés de l'espérance et de la variance (voir chapitre 9, théorème 2 et corollaire, page 271) :

$$V(X) = E[(X - E(X))^2].$$

On déduit de ce qui précède :

$$E(D^2) = \sum_{i=1}^k (1 - p_i) = \sum_{i=1}^k 1 - \sum_{i=1}^k p_i.$$

Finalement :

$$E(D^2) = k - 1.$$

2) Nous avons simulé sur Excel 1 000 échantillons de 120 lancers d'un dé. Voici deux résumés visuels des résultats obtenus (Fig. 11 et Fig. 12).

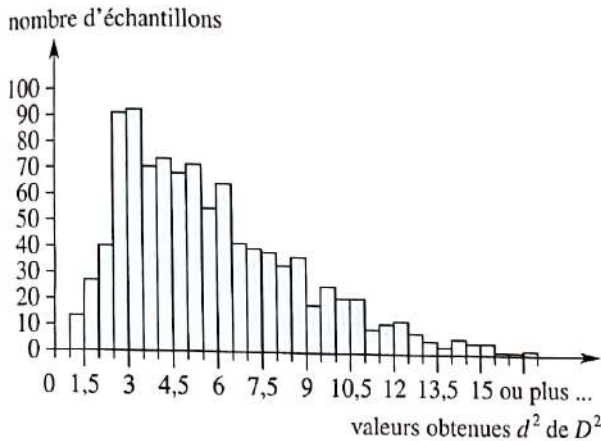


Fig. 11 : Histogramme

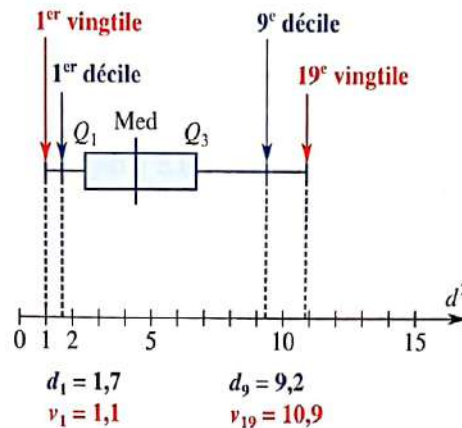


Fig. 12 : Boîte à moustaches

Commentaire : d^2 dépasse la valeur 9,2 dans 10 % des cas, et dépasse 10,9 dans 5 % des cas.

3) Pour le dé observé, $d^2 = 10,1$.

- $d^2 < v_{19}$: au seuil de 5 %, on ne peut pas rejeter l'hypothèse de régularité du dé, c'est-à-dire le modèle équiréparti ;
- $d_9 < d^2$: au seuil de 10 %, on décide de rejeter l'hypothèse de régularité du dé.

Détail de calcul :

$$d^2 = \frac{(26 - 20)^2}{20} + \dots + \frac{(20 - 20)^2}{20}$$

Dans la foulée

9 Reprendre la question 3) du problème précédent avec chacun des dés A, B et C, pour lesquels on a obtenu les six numéros :

- dé A : 17, 27, 17, 26, 18 et 15 fois ;
- dé B : 20, 20, 8, 20, 20 et 32 fois ;
- dé C : 13, 18, 27, 27, 22 et 13 fois.

D^2 et khi-deux : petite info

On montre en Probabilités que la loi de la variable D^2 ne dépend pas de n dès que n est assez grand (en pratique : $n \geq 30$), mais ne dépend que du nombre k d'issues (ou de modalités).

Cette loi est proche de celle d'une variable unique notée χ^2 (khi-deux) dont les vingtiles sont donnés par des tables (voir exercices, page 326).

Le nombre $E(D^2) = k - 1$ est appelé « nombre de degrés de liberté » de cette variable.

Applications

Dénombrement

1) Combien de nombres de trois chiffres distincts peut-on former à l'aide des six chiffres 2, 3, 5, 6, 7 et 9 ?

2) Combien de ces nombres sont :

a) pairs ? b) multiples de 5 ? c) inférieurs à 500 ?

2) Combien y a-t-il de listes de n éléments, chaque élément étant « OUI » ou « NON » ?

En déduire que le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n .

3) 1) Montrer qu'il y a $9 \times (10)^{p-1}$ nombres de p chiffres exactement ($p \geq 1$) et que 9^p d'entre eux ne comportent pas le chiffre 0 dans leur écriture.

2) Quel est le pourcentage de nombres inférieurs à 1 milliard qui comportent le chiffre 0 dans leur écriture ?

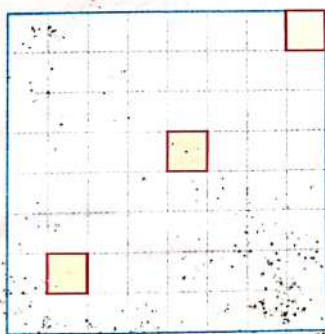
4 Les initiales

Les initiales d'une personne sont le couple formé par la première lettre de son prénom et la première lettre de son nom (qu'ils soient composés ou non).

Montrer que, dans un village de 677 habitants ou plus, il existe toujours deux personnes ayant les mêmes initiales.

5) Dénombrer les anagrammes du mot MIRE (mots de quatre lettres formés avec les mêmes lettres, comme EMIR, RIME, et pouvant être sans signification tels MIER, MRIE...).

6) De combien de manières peut-on compléter (en coloriant) le quadrillage ci-contre sachant qu'il doit y avoir un carreau colorié et un seul sur chaque ligne et chaque colonne ?



7 Qui à côté de qui ?

De combien de façons peut-on répartir huit personnes autour d'une table ronde ?

Piste Non, la réponse n'est pas 40 320.

8 Les inséparables

De combien de manières peut-on aligner n objets sachant que deux d'entre eux X et Y doivent être à côté l'un de l'autre ?

Combinaisons, $\binom{n}{p}$

9) À l'écrit d'un examen, on doit traiter huit exercices au choix parmi dix.

a) Combien y a-t-il de choix possibles ?

b) Même question sachant que les deux premiers exercices sont obligatoires.

10 Des triangles

Soit n points du plan ($n \geq 3$) tels que 3 quelconques d'entre eux ne sont pas alignés.

Combien peut-on construire de triangles distincts dont les sommets sont parmi ces n points ?

11 Cordes d'un cercle

Soit n points sur un cercle.

1) Combien déterminent-ils de cordes ?

2) Quel est le nombre de points d'intersection situés à l'intérieur du cercle lorsque, en chaque point, passent au plus deux cordes ?

12) À l'aide d'une expression de $\binom{n}{p}$, montrer que, pour $1 \leq p-1 \leq n-1$, on a :

$$n \binom{n-1}{p-1} = p \binom{n}{p}.$$

13 Le poids des mots

On considère les mots de n lettres écrits avec les lettres A et B .

1) Combien y a-t-il de tels mots comportant p lettres A exactement où p est un entier tel que $0 \leq p \leq n$?

2) Soit a et b deux réels. Le « poids » d'un mot comportant p lettres A (et donc $n-p$ lettres B) est $a^p \times b^{n-p}$.

Montrer que l'ensemble de tous les mots « pèse » :

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}.$$

Note : cet exercice pourra servir – au moins en tant qu'image mentale – dans la démonstration de la formule du binôme par dénombrement (voir exercice 18, page 320).

14 Au Scrabble

Combien de mots distincts de sept lettres peut-on écrire avec les lettres $\boxed{E} \boxed{E} \boxed{E} \boxed{E} \boxed{T} \boxed{T} \boxed{N}$?

Piste Combien d'emplacements possibles pour $\boxed{E}$? puis pour $\boxed{T}$? etc. (La réponse est 105.)

- 15** Démontrer la relation de Pascal en utilisant l'expression des coefficients du binôme.

16 La fontaine romaine

Montrer que, lorsque l'écoulement est permanent, les volumes d'eau qui se déversent dans les vasques d'un même niveau sont proportionnels aux coefficients du triangle de Pascal.



- 17** Une urne contient n boules rouges et n boules blanches.

1) Soit k entier ($0 \leq k \leq n$).

Combien y a-t-il d'échantillons de n boules contenant k boules rouges et $n - k$ boules blanches ?

2) À l'aide du principe de la somme, en déduire que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

18 La formule du binôme

En développant (mentalement) le produit $(a+b)(a+b) \dots (a+b)$ formé de n facteurs, préciser combien de fois est obtenu chacun des termes suivants :

$b^n, ab^{n-1}, \dots, a^{n-p}b^p, \dots, a^{n-2}b^2, a^{n-1}b, a^n$.

En déduire la formule du binôme (voir *théorème 3*, page 301).

- 19** Développer à l'aide de la formule du binôme :

- a) $(1+x)^6$; b) $(x-1)^6$;
c) $(a+b)^7$; d) $(a-b)^7$.

- 20** Développer et simplifier les nombres complexes :

- a) $(1+i)^5$; b) $(1-i)^4$;
c) $(1+2j)^6$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

- 21** Développer par la formule du binôme :
 $(\cos x + i \sin x)^4$ (x réel).

Exprimer alors $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$.

22
$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$$

Établir la relation ci-dessus de deux manières différentes :

- a) en développant $(1+1)^n$ par la formule du binôme ;
b) en dénombrant de deux manières différentes les parties d'un ensemble à n éléments (voir *exercice 2*, page 319).

Lois discrètes (premiers exemples)

- 23** On distribue 4 cartes au hasard d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir les 4 as ?

- 24** On tire simultanément au hasard deux nombres entiers entre 1 et 100. Lequel des événements suivants est le plus probable ?

- La somme des nombres est un nombre pair.
- La somme des nombres est un nombre impair.

- 25** Un sac contient un jeton marqué « 1 », deux jetons marqués « 2 », etc., jusqu'à cinq jetons marqués « 5 ». On gagne si, en tirant deux jetons du sac, on obtient le même nombre sur chaque jeton.

Quelle est la probabilité de gagner avec la meilleure des deux stratégies ?

a) Tirage avec remise.

b) Tirage sans remise.

- 26** On lance deux dés : l'un normal, l'autre ayant trois faces marquées 0 et trois faces marquées 6.

Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire :

$X =$ « somme des points obtenus » ?

27 La loi de Benford

Soit E l'ensemble $E = \{1, 2, \dots, 9\}$.

Pour $k \in E$, on pose $p_k = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

(Rappel : $\log$ est le logarithme décimal.)

- 1) Montrer qu'en associant à $k = 1, 2, \dots, 9$ le réel p_k , on définit une loi de probabilité sur E , appelée loi de Benford.

- 2) À l'aide de la calculatrice, tabuler les valeurs p_k à 10^{-3} près.

- 3) Relever 1 000 nombres dans un journal (les cours de la Bourse, par exemple), dresser un tableau donnant la fréquence du premier chiffre de ces nombres et comparer avec les résultats obtenus en 2). Étonnant, non ?

Note : il y a mieux : si le journal propose une double cotation en francs et en euros, par exemple, les relevés des fréquences de la question 3), d'une part en francs, d'autre part en euros, conduisent à des résultats à peu près similaires !

Il en serait de même en relevant le premier chiffre du nombre d'habitants des 35 560 communes de la France !!!

28 La loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\}$ avec pour loi de probabilité :

$$P(X=1) = p \text{ et } P(X=0) = q \quad (q = 1-p).$$

Montrer que $E(X) = p$ et $V(X) = pq$.

Piste La définition seule :

$$V(X) = (1-p)^2 \times p + (0-p)^2 \times q.$$

Loi binomiale

- 29** On lance cinq dés irréprochables simultanément. Quelle est la probabilité d'obtenir deux as ? trois as ?
- 30** On a acheté un dé à quatre faces blanches et deux faces noires chez un honnête commerçant. On lance le dé six fois de suite, les lancers étant indépendants et l'on désigne par X la variable aléatoire « nombre de faces noires obtenues ».
- Donner la loi de probabilité de X , son espérance et sa variance.

- 31** Un tireur atteint la cible avec une probabilité de 0,6. Montrer qu'il faut sept tirs minimum pour que la probabilité d'atteindre au moins deux fois la cible dépasse 99 %.

- 32** On lance une pièce de 1 € (il n'y a pas plus franc pour le calcul de probabilités) mille fois. Quelle est la probabilité d'obtenir 545 PILE ou plus ?

1) Donner une estimation spontanée sous forme de pourcentage.

2) Activer la calculatrice sur ce calcul.

Faire les deux exercices qui suivent (il y a largement le temps) et commenter le résultat fourni.



33 Espérance de la loi binomiale

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p ($0 < p < 1$) et l'on pose $q = 1 - p$. Il s'agit de calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X .

1) Montrer que $E(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

2) Développer selon la formule du binôme $f(x) = (px + q)^n$, pour x réel.

3) En déduire deux expressions de $f'(x)$, puis que $E(X) = np$.

Remarque : si l'on gagne 1 € par « succès » (probabilité p) à chaque épreuve, nous tenons de l'exercice 28 qu'à chaque épreuve l'on gagne en moyenne p €. La répétition de n épreuves identiques et indépendantes nous fait espérer un gain moyen de np € : on pouvait s'en douter.

- 34** « Lancez 15 fois de suite une pièce de monnaie. Si vous obtenez 15 FACE vous gagnez 100 millions d'euros, sinon vous perdez 150 €.

1) Montrer que l'espérance de gain est supérieure à 2 900 €. Jouez-vous ?

2) On divise les enjeux par 10 000. Jouez-vous ?

Lois continues, loi uniforme

Dans les exercices 35 à 37, montrer que la fonction f est la densité d'une loi de probabilité P et calculer la probabilité de l'événement A .

35 $I = [0, 1]$; $f(x) = 2x$; $A = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

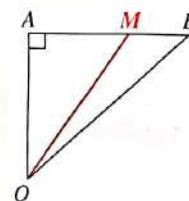
36 $I = [0, n]$ (n entier $n \geq 1$) ; $f(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^{n-1}$;
 $A = [0, a]$ avec $0 \leq a \leq n$.

37 $I = [-1, 1]$; $f(x) = 1 - |x|$;
 $A = [a, b]$ avec $-1 \leq a < b \leq 1$.

- 38** Montrer que, si la loi de probabilité P sur $[a, b]$ admet une densité f constante, alors $f(x) = \frac{1}{b-a}$, pour tout x de $[a, b]$.

Dans les exercices 39 et 40, on considère l'exemple introductif donné dans le cours page 305.

Rappel : « M est pris au hasard sur $[AB]$. »



- 39** Montrer que les variables aléatoires $S = \text{aire}(AOM)$ et $S' = \text{aire}(OMB)$ suivent toutes deux la loi uniforme sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

- 40** Soit X la variable aléatoire $X = \text{« longueur de } OM \text{ »}$. Montrer que X est à valeurs dans $[1, \sqrt{2}]$ et calculer la probabilité de $(X \leq a)$ (a donné dans $[1, \sqrt{2}]$).

- 41** Montrer que, si la variable aléatoire U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, pour tous réels a et b tels que $a < b$, $X = (b-a)U + a$ suit la loi uniforme sur $[a, b]$.

Application

Comment simuler le tirage de nombres au hasard dans $[0, 2\pi]$? dans $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$?

- 42** On considère l'expérience aléatoire suivante :
- on tire au hasard un premier nombre x dans $[0, 1]$;
 - on définit un second nombre y par :
 - si $0 \leq x < 0,3$, on prend $y = x$;
 - si $0,3 \leq x \leq 1$, on choisit y au hasard dans $[0,3 ; 1]$.

1) Simuler cette expérience aléatoire.

2) Peut-on considérer que y est pris au hasard dans $[0, 1]$?

Loi exponentielle

Dans les exercices 43 à 45, on considère une variable aléatoire T à valeurs dans $[0, +\infty[$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda (\lambda > 0)$.

43 On suppose que $\lambda = 1$.

1) Tracer sur deux graphiques différents les courbes représentatives de la fonction de répartition de T et de sa densité.

2) Interpréter graphiquement sur chacun d'eux les probabilités $P(T \leq 0,5)$ et $P(T > 1)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

44 Pour quelle valeur de t les événements $(T < t)$ et son contraire ont-ils la même probabilité ?

45 Montrer que la probabilité de l'événement $(T > \frac{1}{\lambda})$ ne dépend pas de λ et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

46 Soit φ une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ non nulle telle que : $\varphi(t+h) = \varphi(t) \cdot \varphi(h)$ (1), pour tous les réels positifs t et h .

1) Montrer que $\varphi'(t) = \alpha \varphi(t)$ pour tout $t \geq 0$ avec $\alpha = \varphi'(0)$.

Piste Voir chapitre 3, séquence 1, exercice 2, page 80.

2) En déduire que $\varphi(t) = e^{\alpha t}$ pour $t \geq 0$.

Remarque : avec $\varphi(t) = P(T \geq t)$ (voir cours, page 307), la fonction φ est monotone décroissante. Or, on peut montrer assez facilement qu'une fonction monotone satisfaisant l'équation fonctionnelle (1) est dérivable. L'hypothèse « φ dérivable » dans la démonstration est donc (en théorie) superflue.

Phénomènes exponentiels

Sous certaines conditions, le temps d'attente entre deux réalisations d'un même événement (apparition d'une étoile filante dans le ciel, par exemple (voir exercice 69)) est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle.

L'ensemble de ces conditions a été décrit par le mathématicien français Siméon Denis Poisson, élève préféré de Laplace.

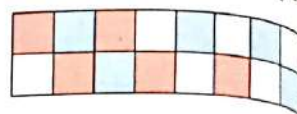


Siméon Denis Poisson (1781-1842).

Brèves de cours

47 Bleu, blanc, rouge

Un drapeau est constitué de deux rangées de n cases. On désigne par u_n le nombre de manières de le colorier en utilisant au plus les couleurs bleu, blanc, rouge de façon que deux cases ayant un côté commun n'aient pas la même couleur (un exemple de coloriage pour $n = 8$ est représenté ci-contre).



1) Calculer u_1 et montrer que, pour tout $n \geq 2$, $u_n = 3u_{n-1}$.

2) En déduire u_n .

48 « À tous les coups, on gagne »

Une urne contient deux boules rouges et une boule jaune. On tire une boule de l'urne : le gain est de 1 € si une boule rouge est tirée et 2 € s'il s'agit de la jaune. L'expérience est réalisée trois fois de suite, la boule tirée étant remise à chaque fois dans l'urne.

Soit X la variable aléatoire « gain à l'issue des trois tirages ».

1) Préciser les valeurs de X .

2) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer $E(X)$.

49 Quelle est la probabilité p_n d'obtenir exactement n PILE en lançant $2n$ pièces de monnaie ?

À l'aide de l'approximation de Stirling (1692-1770) :

« $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ pour n assez grand », montrer que

$$p_n \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \text{ et en déduire } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n.$$

50 Vrai ou faux ?

« Si l'on tire un réel au hasard dans $[0, 1]$, il est plus probable d'avoir sa racine carrée inférieure à 0,4 que son carré plus grand que 0,7. »

51 Montrer que, si une variable aléatoire T à valeurs dans $[0, +\infty[$ suit une loi exponentielle, alors :

$$P(T \geq t+h | T \geq t) = P(T \geq h)$$

pour $t \geq 0$ et $h \geq 0$.

Note : ce résultat est une réponse à la question naturelle que tout un chacun se pose : « Si la durée de vie d'un individu suit une loi exponentielle, est-ce qu'elle suit la loi de durée de vie sans vieillissement ? » (Comme il se voit, la réponse est oui.)

52 Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère un cercle C de centre O et dont le rayon r est choisi au hasard dans $[0, 1]$.

Quelle est la probabilité que le cercle C rencontre la droite d'équation $x+y=1$?

Exercices

Avertissement : toutes les simulations demandées ont un « modèle de référence » dans la partie 5, page 316.

Calcul de probabilités

53 On effectue un tirage aléatoire, avec remise, de deux boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . Quelle est la probabilité que le numéro de la boule tirée en premier soit strictement supérieur à celui de la boule tirée en second ?

Piste Les nœuds d'un quadrillage.

54 Le plus gros numéro

Une urne contient 17 boules numérotées de 1 à 17. On extrait simultanément, au hasard, deux boules de l'urne et l'on désigne par X la variable aléatoire :

X = « plus grand des numéros apparus sur les deux boules ».

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Montrer que : $E(X) = 12$.
- Étudier le cas général (n boules ($n \geq 2$) au lieu de 17).

Piste $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ et

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

55 Keno

Au Keno (jeu organisé par la Française des jeux), on détermine par tirage au sort 20 numéros gagnants parmi les numéros de 1 à 70. Voici un extrait du règlement.

Keno			
VOUS AVEZ JOUÉ	VOUS EN AVEZ TROUVÉ	VOS CHANCES DE GAGNER	GAIN pour une mise de 3 €
10 numéros	10	1/2 147 181	600.000 €
	9	1/47 238	7.500 €
	8	1/2 571	300 €
	7	1/261	30 €
	6	1/44	15 €
	5	1/12	6 €
	0	1/39	6 €

1) Contrôler l'exactitude des résultats (aux arrondis près) de la colonne « Vos chances de gagner ».

2) Quelle est la perte moyenne du joueur misant 3 € sur dix numéros ?

56 Loto : tirages sans numéros voisins

Un tirage au Loto (toujours six numéros parmi $\{1, 2, \dots, 49\}$) est dit « sans numéros voisins » (en abrégé : tirage « S.V. ») lorsqu'il ne comporte pas deux numéros consécutifs.

1) Montrer que, pour tout tirage « S.V. » :

$\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$, rangé par ordre croissant $y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_5 < y_6$, il existe une et une seule partie de six éléments $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ contenue dans $\{1, 2, \dots, 43, 44\}$ telle que :

- $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$;
- $y_1 = x_1$; $y_2 = x_2 + 1$; $y_3 = x_3 + 2$; $y_4 = x_4 + 3$; $y_5 = x_5 + 4$; $y_6 = x_6 + 5$.

2) En déduire le nombre de tirages « S.V. » au Loto et la probabilité qu'un tirage comporte au moins deux numéros consécutifs.

57 Les éléphants et les raquettes

D'après *Exercices ordinaires de Probabilités*, G. Frugier, Éd. Ellipses.

Lorsque les éléphants sautent en parachute au-dessus de la savane, ils chaussent des raquettes pour ne pas s'enliser. Il y a deux types de raquettes pour pachydermes : certains utilisent quatre raquettes à petit tamis, une à chaque patte, et les autres deux raquettes à grand tamis, pour les pattes postérieures. Les fixations sont les mêmes pour les deux types de raquettes. La probabilité pour qu'une raquette se détache avant le contact avec le sol est notée p .

1) Un éléphant saute avec quatre raquettes à petit tamis. Quelle est la probabilité P qu'il ait moins (strictement) de deux raquettes encore aux pattes à l'atterrissage ?

2) Un éléphant saute avec deux raquettes à grand tamis. Quelle est la probabilité Q qu'il n'ait aucune raquette aux pattes à l'atterrissage ?

3) Sachant qu'un éléphant s'enlise s'il a perdu plus de la moitié de son équipement, comparer, en fonction des valeurs de p , les probabilités de s'enliser avec chacun des types de raquettes.

58 Combien d'impasses ?

Le programme d'un examen oral est constitué d'une liste de cent sujets. On propose à chaque candidat trois sujets pris aléatoirement dans la liste : le candidat traite alors le sujet de son choix. Combien de sujets au minimum un candidat doit-il connaître pour avoir plus de 75 % de chances de savoir traiter au moins un sujet le jour de l'examen ?

Soit n ce nombre de sujets. Montrer que le problème se ramène à résoudre $u_n \leq 242\,550$, avec :

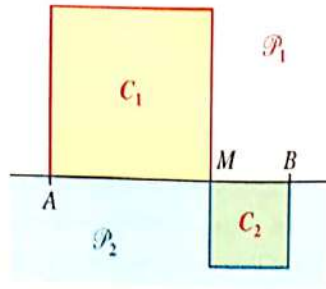
$$u_n = (100 - n)(99 - n)(98 - n).$$

(On pourra « estimer » u_n à $(99 - n)^3$ et rester rigoureux.)

Autour de la loi uniforme

59 Les deux carrés

Un point M étant choisi au hasard sur le segment $[AB]$ de longueur 4, on construit le carré C_1 dans le demi-plan $\mathcal{P}_1$ et le carré C_2 dans le demi-plan $\mathcal{P}_2$ comme indiqué dans la figure ci-contre.



1) Quelle est la probabilité d'avoir :

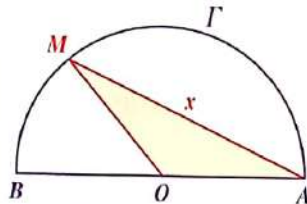
$$\text{aire}(C_1) = \text{aire}(C_2) ?$$

2) Quel est de l'événement :

$E = (\text{aire}(C_1) + \text{aire}(C_2)) \geq 10$ et de son contraire $\bar{E}$ le plus probable ?

60 La corde uniforme

À tout réel x pris au hasard dans $[0, 2]$ on associe le point M du demi-cercle Γ , de diamètre $[AB]$, de centre O et de rayon 1, tel que $AM = x$.



1) **Préliminaire calculatoire**

Montrer que l'ensemble des solutions S dans $[0, 2]$ de

l'inéquation d'inconnue x : $\left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\left(\frac{x}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{16}$ est :

$$S = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1)\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1), 2\right].$$

2) En déduire que la probabilité de l'événement

« $\text{aire}AOM \leq 0,25$ » est $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

61 Première décimale

Au réel x pris au hasard dans $[0, 1]$ on associe $D(x)$: « première décimale de x ».

Quelle est la loi de la variable aléatoire D ?

62 Partie entière

Soit n un entier naturel fixé ($n \geq 1$). Au réel x pris aléatoirement dans $[0, n]$ on associe $E(x) =$ « partie entière de x ». Quelle est la loi de la variable aléatoire E ?

63 La question d'Halmos (à suivre)

« On tire au hasard une suite de nombres de $[0, 1]$, indépendamment les uns des autres. En moyenne, quel est le plus petit nombre de tirages nécessaires pour que la somme des nombres tirés soit plus grande que 1 ? »

Nous demandons une simulation et une conjecture : c'est tout.

64 L'événement $(X = Y)$

On considère deux variables aléatoires X et Y suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0, 1]$.

1) On suppose X et Y indépendantes.

Montrer géométriquement que la probabilité de l'événement $(X = Y)$ est nulle.

Note : ce résultat, très utile, sera en première ligne dans le problème 87, page 330.

2) Construire X et Y tels que la probabilité de $(X = Y)$ soit non nulle.

Piste Voir l'exercice 42, page 321.

65 La distribution triangulaire de Simpson

On choisit au hasard et indépendamment l'un de l'autre deux réels dans $[0, 1]$ et on effectue leur somme S .

1) À l'aide d'une simulation, proposer une représentation graphique de la densité de S .

2) Déterminer la fonction de répartition de S .

Piste Remarquer que S est à valeurs dans $[0, 2]$ et adopter une résolution géométrique en distinguant les intervalles $[0, 1]$ et $[1, 2]$.

3) En déduire la densité de S et sa représentation graphique.

66 Le problème de la rencontre

Deux personnes A et B ont rendez-vous en un lieu donné entre 20 h et 21 h. Chacune décide aléatoirement de son instant d'arrivée, attend un quart d'heure avant de repartir, sauf si elle est arrivée entre 20 h 45 et 21 h, auquel cas elle quitte les lieux à 21 h.

Il s'agit de calculer la probabilité que les deux personnes se rencontrent.

1) Simuler 1 000 expériences consistant à choisir au hasard deux réels x et y dans $[0, 1]$ et déterminer la proportion de ces expériences pour lesquelles $|x - y| \leq \frac{1}{4}$.

2) En quoi la simulation de la question 1) est-elle une simulation de la situation à l'étude ?

3) Répondre à la question posée à l'aide d'une représentation géométrique et d'un calcul d'aires.

4) Traiter le problème en remplaçant la durée d'attente « un quart d'heure » par t (exprimé en heure) où $0 < t < 1$ et préciser pour quelles valeurs de t la rencontre a plus d'une chance sur deux de se produire.

Note : le cas plus général « n personnes » est abordé dans le problème 87, page 330. Signalons par ailleurs qu'une version discrétisée a été abordée dans l'ouvrage *Analyse, Première S* (exercice 59, page 280) de la même collection.

Autour de la loi exponentielle

67 La constante macabre

La durée de vie d'un individu est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ .

Montrer que :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{P(T < t+h | T \geq t)}{h} = \lambda.$$

Note : la constante λ apparaît comme la « constante de mort subite » puisque le résultat ci-dessus peut s'interpréter ainsi : « la probabilité de décéder durant l'intervalle de temps Δt est $\lambda \Delta t$ ». Moins morbide est de remarquer qu'il s'agit de la propriété réciproque de la loi de Rutherford-Soddy. Et là encore, comme à l'exercice 51, il était « normal » de s'interroger.

68 Simulation à partir de la loi uniforme

Soit λ un réel strictement positif.

1) Soit u un réel appartenant à $[0, 1[$.

On pose $x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u)$.

Montrer que $x \geq 0$ et que, pour tout réel $a \geq 0$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(1) x \leq a ; \quad (2) u \leq 1 - e^{-\lambda a}.$$

2) En déduire que, si la variable aléatoire U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors la variable aléatoire $X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ .

3) Application

Construire un échantillon de 100 nombres distribués selon la loi exponentielle de paramètre 2, en simulant le tirage de 100 nombres au hasard dans $[0, 1]$.

69 Les étoiles filantes

Sont fixés : une unité de temps et un instant origine $t = 0$.

On considère un événement E dont la réalisation dans le temps est aléatoire et l'on suppose satisfaites les hypothèses suivantes :

- (H_1) La probabilité que E se réalise durant l'intervalle de temps $[t, t+h]$ ($h \geq 0$) ne dépend que de h . Cette probabilité est notée $P(h)$.

- (H_2) Les événements « E se réalise durant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ » et « E se réalise durant l'intervalle de temps $[t_3, t_4]$ » sont indépendants lorsque $]t_1, t_2[$ et $]t_3, t_4[$ sont disjoints.

- (H_3) En moyenne, E se réalise λ fois par unité de temps ($\lambda > 0$).

Pour $h \geq 0$, on pose $Q(h) = 1 - P(h)$.

1) Soit $h \geq 0$ et $h' \geq 0$. On considère les événements (pour $t \in [0, +\infty[$) :

- A_1 : « E ne se réalise pas durant l'intervalle de temps $[t, t+h]$ ».

- A_2 : « E ne se réalise pas durant l'intervalle de temps $[t+h, t+h+h']$ ».

- A_3 : « E ne se réalise pas durant l'intervalle de temps $[t, t+h+h']$ ».

Montrer que $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$ sont indépendants, qu'il en est de même de A_1 et A_2 et que $A_3 = A_1 \cap A_2$.

En déduire que $Q(h+h') = Q(h) \times Q(h')$.

2) On suppose P dérivable sur $[0, +\infty[$.

Montrer qu'il existe un réel μ ($\mu > 0$) tel que $Q(h) = e^{-\mu h}$.

Piste S'inspirer du cours (page 307) et de l'exercice 46.

3) Soit T la variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty[$ définie par :

T = « temps d'attente entre deux réalisations de E ».

Montrer que T suit la loi exponentielle de paramètre μ .

4) On rappelle (voir exercice 8 et remarque page 313) que le paramètre μ s'interprète comme l'inverse de l'espérance mathématique $E(T)$ ($E(T)$ n'est autre ici que le temps moyen d'attente entre deux réalisations de E).

Montrer que $\mu = \lambda$.

Piste Proportionnalité.

5) Application

L'événement E se réalise en moyenne 12 fois par heure. Quelle est la probabilité que E ne se réalise pas durant 5 min ? 15 min ? une demi-heure ?

« Une étoile filante, les gars. Faites un vœu. »

Jean-Paul Sartre.



Commentaires

De nombreux phénomènes aléatoires dans le temps peuvent être assimilés à un événement E satisfaisant les hypothèses (H_1) , (H_2) et (H_3) :

- apparition d'une étoile filante dans le ciel (voir le titre de l'exercice) ;
- appel téléphonique à un standard téléphonique (aux heures de bureau) ;
- etc.

Adéquation à une loi donnée

Dans les exercices de cette partie, les notations sont celles de Au cœur des problèmes, pages 314 et 315. On donne ci-dessous, pour la variable D^2 à « s degrés de liberté », la valeur critique du 19^e vingtile v_{19} .

s (degrés de liberté)	1	2	3	4	5	9
v_{19}	3,84	5,99	7,82	9,49	11,07	16,92

On rappelle que $s = k - 1$ (où k est le nombre de modalités) et que, si la valeur observée d^2 de D^2 dépasse v_{19} , on décide de rejeter le modèle théorique (au seuil de 5 %).

La « Formule » est : $d^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$.

70 La pièce acceptable

On lance 100 fois une pièce de monnaie.

Entre quelles valeurs doit être compris le nombre de faces obtenues pour que la pièce soit considérée comme « équilibrée » ?

71 L'égalité des sexes

Dans une commune, en 2001, on a enregistré 418 naissances de garçons et 388 naissances de filles. Le maire annonce : « Dans ma commune, il naît autant de filles que de garçons. »

Dans tout le pays, en 2001, 41 800 garçons et 38 800 filles sont nés. Le président annonce : « Dans mon pays, il naît autant de filles que de garçons. »

L'un des deux élus a une formation en Statistique. Peut-on deviner lequel ?

72 Le test des paires

Après avoir lancé 600 fois un dé, on a obtenu les résultats suivants :

numéro	1	2	3	4	5	6
nombre d'occurrences	85	99	115	98	86	117

1) Calculer d^2 . Peut-on rejeter la régularité du dé ?

2) On regroupe les résultats par paires, suivant les trois modalités : $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 6\}$.

Répondre aux mêmes questions.

3) Alors ?

73 L'affaire Snodgrass

Dix lettres publiées en 1861 sous le pseudonyme Quintus Curtius Snodgrass furent attribuées à Mark Twain. Que peut-on en penser à la lecture des résultats suivants ?

• Fréquences des mots de n lettres dans l'œuvre de Mark Twain :
 $n = 2$: 0,177 ; $n = 3$: 0,232 ; $n = 4$: 0,191 ;
 $n \geq 5$: 0,400.

• Nombres de mots de n lettres dans les dix lettres de Q.C. Snodgrass : $n = 2$: 2 685 ; $n = 3$: 2 752 ; $n = 4$: 2 302 ; $n \geq 5$: 5 436.

74 Les décimales de Pi

Source : J.-P. Delahaye, *Le Fascinant Nombre π* , Pour la Science, Diffusion Belin.

En 1995, Y. Kanada a calculé 6 442 450 000 décimales de π . En prenant les six premiers milliards, on dénombre les quantités suivantes de 0, de 1, etc. :

« 0 » : 599 963 005 ; « 1 » : 600 033 260 ; « 2 » : 599 999 169 ;
 « 3 » : 600 000 243 ; « 4 » : 599 957 139 ; « 5 » : 600 017 178 ;
 « 6 » : 600 016 588 ; « 7 » : 600 009 044 ; « 8 » : 599 987 038 ;
 « 9 » : 600 017 038.

« Peut-on considérer que les décimales de π sont aléatoires ? Répondre à cette question en calculant d^2 dans les cas suivants :

a) avec les dix issues ;

b) en regroupant les résultats par paires (voir exercice 72) choisies librement.

Aléatoire ?

Bien d'autres tests existent (regroupement des décimales, étude des « séries », des « blocs » de k chiffres, ...) pour mesurer le caractère aléatoire des décimales de π . Tous conduisent à la conclusion invariable selon laquelle ces décimales se comportent comme une suite de chiffres tirés au hasard.

Aucun mathématicien aujourd'hui n'a de réponse définitive, ni même d'explication sur la question.

75 Le cas Mendel

La théorie de Mendel (voir chapitre 9) prévoit que le croisement de petits pois jaunes et ronds avec des petits pois verts et anguleux donnera naissance à quatre nouvelles variétés avec les

probabilités $\frac{9}{16}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{1}{16}$.

Pour appuyer ses résultats, Mendel réalisa l'expérience et publia ses résultats : il avait les effectifs 315, 101, 108 et 32 pour les quatre variétés.

1) Calculer la valeur de d^2 . Le résultat est-il probant ?

2) Avec trois degrés de liberté, le premier décile de D^2 est $d_1 = 0,584$.

Expliquer pourquoi on peut qualifier de « chanceux » l'échantillon expérimental de Mendel.

Chanceux ou malhonnête ?

Le statisticien Fischer, en mettant bout à bout tous les résultats de Mendel, a trouvé une probabilité de 0,000 04 d'obtenir des résultats aussi conformes à la théorie... De quoi jeter un doute sérieux sur leur honnêteté scientifique !

Échantillon... d'exercices

Les exercices 76 à 81 ne comportent guère d'indications (parfois même aucune), selon un choix délibéré de notre part. Il faut y voir une invitation à « jouer le jeu » : chercher... avant de tourner le manuel, car, malgré tout, nous avons regroupé en bas de page les « Pistes » traditionnelles qui donnent aux questions de cet ouvrage cette forme adoucie bien connue...

76 Parité

On lance une pièce de monnaie équilibrée n fois.
Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair de PILE ?

77 Le Q.C.M.

Un Q.C.M. (questionnaire à choix multiple) comporte 100 questions ; pour chaque question, 3 réponses sont proposées (dont une seule juste).

Montrer que, si un élève répond « tout au hasard », il a moins de 5 chances sur 100 d'obtenir 42 réponses justes ou plus.

78 Le truquage impossible

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, toutes deux à valeurs dans $\{1, 2, \dots, n\}$, et S la variable aléatoire $S = X + Y$ à valeurs dans $\{2, 3, \dots, 2n\}$ (c'est clair).

1) On suppose qu'il existe un réel p ($0 < p < 1$) tel que :

$$P(S = 2) = P(S = 2n) = p.$$

Sachant que, pour $x > 0$, on a : $x + \frac{1}{x} \geq 2$ (à vérifier tout de même), montrer que $P(S = n + 1) \geq 2p$.

2) En déduire que S n'est jamais équirépartie (quelles que soient X et Y).

Encore Halmos

La leçon à tirer de l'exercice précédent est la suivante : on ne peut pas modifier les probabilités de sortie des six faces d'un dé, puis d'un autre, de façon à ce que la somme des points obtenus (en lançant les deux dés) suive la loi uniforme sur $\{2, 3, \dots, 11, 12\}$!

La solution que nous avons proposée est due à Paul Halmos, mathématicien américain d'origine hongroise de renommée internationale – pas un plaisantin donc – qui propose comme solution à l'exercice 63 : « Manifestement, le nombre cherché est entre 2 et 3. Il n'y a qu'un seul nombre intéressant entre 2 et 3 ; la réponse doit être e. »

(Bien sûr, suit la démonstration... inaccessible en classe de Terminale S.)



79 Retour au passé

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire une par une, au hasard, et avec remise les boules de l'urne jusqu'à ce que l'on tombe pour la première fois sur un numéro obtenu auparavant (après quoi, on s'arrête et on étudie la question qui suit).

Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

X = « nombre de tirages effectués » ?

80 Sans entier

Soit n un entier ($n \geq 2$) et a un réel fixé avec $0 < a < 1$.

On choisit un réel x au hasard dans l'intervalle $[0, n]$.

Quelle est la probabilité que l'intervalle $[x, x + a]$ ne contienne aucun entier naturel ?

(On pourra effectuer une simulation avec $a = 0,3$, pour diverses valeurs de n .)

81 Le problème de la rencontre (variante)

Les données sont celles de l'exercice 66, sauf que l'instant d'arrivée de A n'est plus aléatoire : il est fixé à 20 h 30.

Quelle est la probabilité que A et B se rencontrent sachant que, lorsque A arrive au lieu de rendez-vous (à 20 h 30 donc), il ne trouve personne ?

Quelques pistes

calculer la probabilité conditionnelle $P(E_2/E_1)$.
l'événement : « la rencontre entre A et B a lieu ». Il s'agit de
Soit E_1 l'événement : « B n'est pas là à 20 h 30 » et E_2

Exercice 81 :

calculer la probabilité de leur réunion.

Prouver que les A_k sont deux à deux incompatibles et

$$k \in [a, a + x] \text{ »}$$

Soit pour $k = 0, 1, \dots, n$ l'événement A_k :

Exercice 80 :

facile de calculer $P(X > k)$.

Voir que X est à valeurs dans $\{2, \dots, n + 1\}$ et qu'il est

Exercice 79 :

et utiliser l'indication de l'énoncé avec $x = \frac{p_1}{p_1}$

observer que $P(S = n + 1) < p_1 q_n + p_n q_1$

Obtenir $p_1 q_1 = p_n q_n = p$,

$$q_1 = P(Y = 1) ; q_n = P(Y = n).$$

$$\text{Poser } p_1 = P(X = 1) ; p_n = P(X = n) ;$$

Exercice 78 :

Les piles de la calculatrice seraient-elles usées ?

Exercice 77 :

regrouper et interpréter.

Développer $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^n$ à l'aide de la formule du binôme,

Exercice 76 :

Thème d'étude : la corde de Bertrand

est dans son ouvrage *Calcul des Probabilités* publié en 1889, que Joseph Bertrand (1822-1900) discute du problème suivant :

Une corde est tracée au hasard sur un cercle. Quelle est la probabilité p qu'elle soit plus longue que le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle ? »

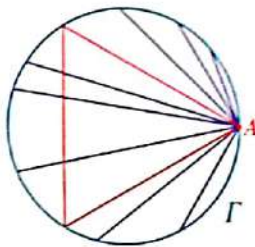
Les exercices 82 à 84 explorent « le tracé au hasard d'une corde sur un cercle ». Nous notons le cercle Γ , son rayon R et fournissons gratuitement la longueur du côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle Γ : $R\sqrt{3}$.

82 Une extrémité est fixée

Une extrémité A de la corde est fixée sur Γ et l'autre extrémité B est choisie « au hasard » sur Γ (c'est-à-dire selon la loi uniforme sur Γ).

Construire le triangle équilatéral de sommet A inscrit dans Γ et montrer que la probabilité

cherchée p est $\frac{1}{3}$.



Rappel : dans la loi uniforme sur un cercle, la probabilité d'un arc de cercle est proportionnelle à la longueur de l'arc.

83 Avec le milieu de la corde

1) Soit I un point intérieur à Γ , distinct du centre O . Montrer qu'il existe une unique corde de Γ admettant I comme milieu.

Note : on peut donc convenir que tout protocole de choix « au hasard » du point I dans le disque est un protocole de choix « au hasard » de l'unique corde de milieu I : c'est parti...

2) La corde est tracée « au hasard » par le choix de son milieu I dans le disque selon la loi uniforme du disque (pour laquelle la probabilité d'une partie (convenable...) A du disque est :

$$\frac{\text{aire de } A}{\text{aire du disque}}).$$

Montrer que $p = \frac{1}{4}$.

3) Le milieu I de la corde est choisi au hasard de façon que la distance OI suive la loi uniforme sur $[0, R]$.

Prouver que $p = \frac{1}{2}$.

Remarque : dans les deux cas (questions 2) et 3)), la probabilité de choisir $I = O$ est nulle, ce qui réfute d'avance les doutes sur la justesse des calculs effectués, suite à la restriction imposée au point I à la première question ($I \neq O$).

84 Loi uniforme sur un carré

A) Préliminaires géométriques

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct d'origine O . Soit x et y deux réels de l'intervalle $[0, 2\pi[$ et M et N les points de Γ d'affixes respectives Re^{ix} et Re^{iy} .

1) Montrer que $MN = 2R \left| \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \right|$.

2) À l'aide d'une résolution graphique, montrer que l'ensemble des solutions dans $] -\pi, \pi[$ de l'inéquation $|\sin t| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ est

$$\text{l'ensemble } S = \left[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right].$$

3) En déduire que l'ensemble des couples (x, y) tels que :

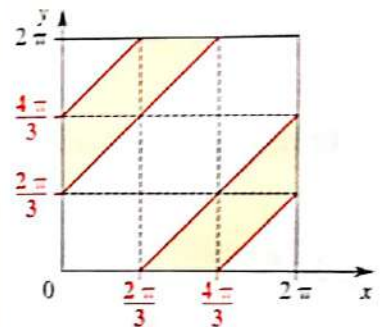
$$0 \leq x < 2\pi ;$$

$$0 \leq y < 2\pi ;$$

$$\left| \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \right| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

est représenté graphiquement par le domaine $\mathcal{D}$ ci-contre (en jaune).

Quelle est l'aire de ce domaine ?



B) Les probabilités

On considère le protocole suivant :

(1) Choisir au hasard dans $[0, 2\pi[$ (donc selon la loi uniforme) deux réels x et y , indépendamment l'un de l'autre.

(2) Tracer la corde de Γ ayant pour extrémités les points M et N d'affixes Re^{ix} et Re^{iy} .

Montrer que, selon ce protocole, on a $p = \frac{1}{3}$.

Paradoxe ?

Ce grand classique des probabilités continues fait carrière sous le nom de « paradoxe de Bertrand », car en son temps il parut paradoxal : on ne comprenait pas, en effet, que des conditions expérimentales différentes, pour le choix « au hasard » de la corde dans les divers procédés décrits, conduisaient à des probabilités différentes pour un même événement.

Signalons toutefois que, si l'on réfère le choix au hasard d'une corde à celui du choix au hasard de chacune de ses extrémités (selon la loi uniforme sur le cercle), indépendamment l'une de l'autre, c'est le protocole précédent (exercice 84) qui est à retenir.

Problèmes

85 Le problème des parties

Soit E un ensemble à n éléments ($n \geq 1$). On dresse la liste de toutes les parties de E et chaque partie est recopiée sur un carton. On obtient donc 2^n cartons (voir exercice 22, page 320) que l'on suppose indiscernables et que l'on place dans une urne. On tire alors, au hasard et *sans remise*, deux cartons de l'urne. On s'intéresse à la probabilité P que la réunion des deux parties obtenues sur les deux cartons soit égale à E .

1) Résoudre le problème à l'aide d'un arbre lorsque $n = 1$, puis $n = 2$.

2) Combien y a-t-il de tirages possibles dans le cas général ?

3) Soit A une partie de E à k éléments ($0 \leq k \leq n$).

Démontrer que le nombre de parties B distinctes de A telles que $A \cup B = E$ est :

- $2^n - 1$ si $k = n$ (c'est-à-dire si $A = E$);
- 2^k si $0 \leq k < n$.

Piste Lorsque $A \neq E$, trouver un moyen systématique pour construire toutes les parties B telles que $A \cup B = E$ (on pourra utiliser le complémentaire A^c de A dans E).

4) En déduire que le nombre de tirages favorables est :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k + 2^n - 1.$$

5) Conclure à l'aide de la formule du binôme que :

$$P = \frac{3^n - 1}{2^n(2^n - 1)}.$$

6) Question subsidiaire

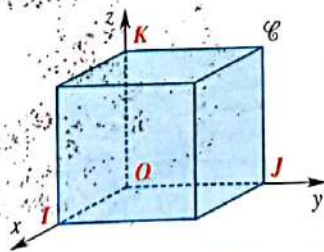
Reprendre le problème en supposant que le tirage est effectué *avec remise*, toutes choses égales par ailleurs.

86 La loi uniforme dans le cube

On admet la généralisation suivante.

« le choix au hasard de trois nombres x, y et z dans $[0, 1]$, indépendamment les uns des autres, peut être modélisé par le choix au hasard d'un point $M(x, y, z)$ dans le cube $\mathcal{C}$ (voir figure ci-contre), ce qui signifie que la probabilité d'une partie (convenable) A contenue dans le cube est le volume de A ».

(L'espace est muni d'un repère orthonormal (O, I, J, K) .)



A) Construction d'un triangle

On choisit au hasard trois nombres x, y et z indépendamment les uns des autres dans l'intervalle $[0, 1]$.

Quelle est la probabilité de pouvoir construire un triangle de côtés (longueurs) x, y et z ?

Piste Rappel : étant donné trois réels x, y , et z strictement positifs, il existe un triangle de côtés x, y et z si, et seulement si, $x < y + z$, $y < z + x$ et $z < x + y$.

Pour construire l'intersection du cube $\mathcal{C}$ avec le demi-espace d'équation $x < y + z$, observer que trois sommets du cube sont dans le plan $x = y + z$.

B) Somme de trois nombres

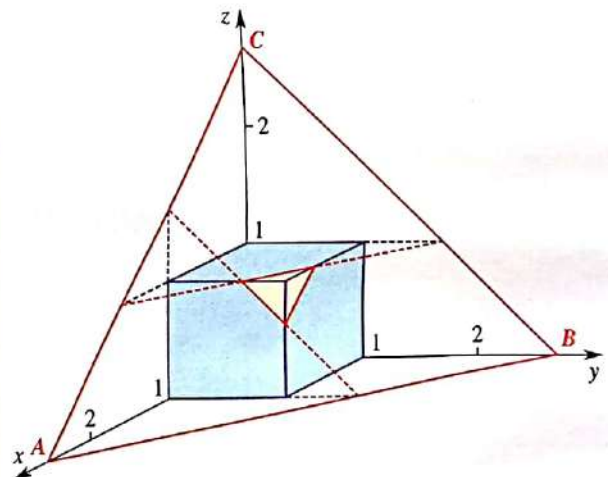
1) Constructions géométriques

Soit t un réel positif, A, B et C les points $A(t, 0, 0)$, $B(0, t, 0)$ et $C(0, 0, t)$, E_t la partie du cube $\mathcal{C}$ contenue dans le demi-espace d'équation $x + y + z \leq t$ et V_t le volume de E_t .

a) Représenter, en perspective cavalière, la section du cube $\mathcal{C}$ par le plan d'équation $x + y + z = t$ en distinguant les cas :

$$t \in [0, 1]; t \in [1, 2]; t \in [2, 3].$$

Piste Dans le cas « difficile » ($t \in [2, 3]$), voici le démarrage de la construction (à justifier évidemment) :



b) En déduire que pour :

$$t \in [0, 1] \quad V_t = \frac{1}{6} t^3;$$

$$t \in [1, 2] \quad V_t = \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{2} (t-1)^3;$$

$$t \in [2, 3] \quad V_t = 1 - \frac{1}{6} (3-t)^3.$$

2) On tire trois nombres au hasard dans $[0, 1]$ indépendamment les uns des autres.

Déterminer et représenter graphiquement la densité de la variable aléatoire S : « somme des trois nombres ».

87 La cerise sur le gâteau

A) Résultat préliminaire

On désigne par P la loi de probabilité uniforme sur $[0, \alpha]$ ($\alpha > 0$ donné). On suppose que, pour des événements $E_1, E_2, \dots, E_n$ ($n \geq 2$), on a :

$P(E_i \cap E_j) = 0$ pour tous indices i et j distincts ($1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n$).

Alors, dans ces conditions, la probabilité de la réunion des événements $E_1, E_2, \dots, E_n$ est donnée par :

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{i=1}^n P(E_i).$$

Note : ce résultat (de portée générale) pourra être admis ou démontré par récurrence sur n (ce n'est pas difficile).

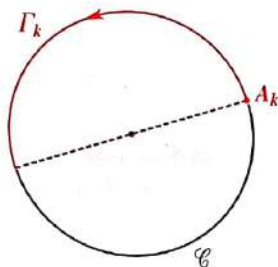
B) Des points sur un cercle

On place au hasard et indépendamment les uns des autres n points $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 3$) sur un cercle $\mathcal{C}$.

On propose de calculer la probabilité de l'événement E : « les n points appartiennent à un même demi-cercle ».

Pour cela, on considère pour $k = 1, 2, \dots, n$ les événements E_k définis ainsi :

E_k : « les points $A_1, A_2, \dots, A_n$ appartiennent au demi-cercle Γ_k parcouru sur le cercle $\mathcal{C}$ à partir de A_k dans le sens trigonométrique (extrémités comprises) ».



1) Montrer que $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$.

2) Calculer $P(E_k)$ pour $k = 1, 2, \dots, n$ et montrer que pour $i \neq j$ l'événement $E_i \cap E_j$ est contenu dans l'événement $(A_i = A_j)$.

3) Conclure à l'aide du résultat préliminaire que $P(E) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

4) Indications pour une simulation (avec $n = 5$)

Soit I un point fixé du cercle $\mathcal{C}$ et A_i ($1 \leq i \leq 5$) cinq points de $\mathcal{C}$.

On note θ_i la mesure dans $[0, 2\pi[$ de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA_i})$, M le maximum des θ_i ($1 \leq i \leq 5$) et m le minimum des θ_i ($1 \leq i \leq 5$).

a) Montrer que, si $M - m \leq \pi$, alors $A_1 \dots A_5$ sont sur un même demi-cercle.

La réciproque est-elle vraie ?

b) Soit A'_i le symétrique de A_i par rapport à O , θ'_i la mesure dans $[0, 2\pi[$ de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA'_i})$, M' le maximum des θ'_i et m' le minimum des θ'_i ($1 \leq i \leq 5$).

Justifier que $A_1, \dots, A_5$ sont sur un même demi-cercle si, et seulement si :

$$M - m \leq \pi \text{ ou } M' - m' \leq \pi.$$

Piste Montrer que, si $\theta_i \leq \pi$, alors $\theta'_i = \theta_i + \pi$ et que, si $\theta_i > \pi$, alors $\theta'_i = \theta_i - \pi$.

c) En déduire un protocole de simulation par des tirages indépendants de cinq nombres au hasard dans $[0, 2\pi[$.

C) Le problème des rencontres : le cas général

Soit t un réel fixé ($0 < t < 1$). On choisit au hasard n nombres $t_1, t_2, \dots, t_n$ dans $[0, 1]$, indépendamment les uns des autres, et l'on désigne par I_k (pour $k = 1, 2, \dots, n$) l'intervalle :

$$I_k = \begin{cases} [t_k, t_k + t] & \text{si } t_k + t \leq 1 \\ [t_k, 1] & \text{si } t_k + t > 1 \end{cases}$$

Il s'agit de calculer la probabilité de l'événement E :

E : « les intervalles $I_1, I_2, \dots, I_n$ ont au moins un point en commun ».

On introduit pour $i = 1, 2, \dots, n$ les événements E_i .

E_i : « $t_i < 1 - t$ et $t_k \in [t_i, t_i + t]$ pour tout k ($1 \leq k \leq n$) » et l'événement E_0 : « $t_k \geq 1 - t$ pour tout k ($1 \leq k \leq n$) ».

1) Montrer que $E = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$.

2) Établir que :

$$P(E_0) = t^n \text{ et } P(E_i) = (1 - t) \times t^{n-1}$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$.

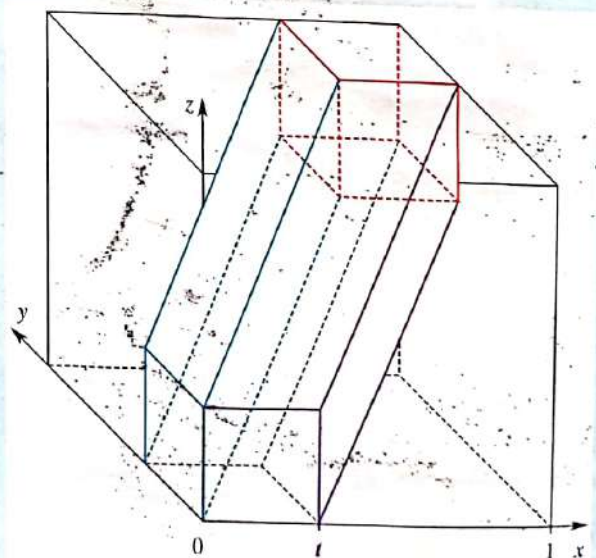
3) Montrer que, pour $i = 1, 2, \dots, n$, E_0 et E_i sont incompatibles et que, pour $i \neq j$ ($1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n$), $E_i \cap E_j$ est contenu dans $(t_i = t_j)$.

4) En déduire que $P(E) = t^n + n(1 - t)t^{n-1}$ et expliquer en quoi le modèle retenu dans ce problème généralise le « problème de la rencontre » à n personnes (voir exercice 66, page 324).

Quel point de vue ?

Si nous avons fait prévaloir le point de vue géométrique lorsque $n = 2$ (voir exercice 66), son abandon est plus que légitime dès que $n \geq 4$ (la représentation graphique en dimension supérieure ou égale à 4 n'étant pas un cadeau) et nous nous sommes tournés alors vers le point de vue probabiliste (voir ci-dessus).

On peut hésiter lorsque $n = 3$... pas trop longtemps à la vue du solide ci-dessous (livré à titre gracieux) où chacun pourra « reconnaître les événements » E_0, E_1, E_2 et E_3 (via la convention t_1 sur (Ox) , t_2 sur (Oy) et t_3 sur (Oz)).





Division euclidienne et congruences dans $\mathbb{Z}$

OBJECTIFS

- Consolider les acquis en Arithmétique : division euclidienne, PGCD, algorithme d'Euclide...
- Installer des notions et résultats nouveaux : congruences, PPCM, théorèmes de Bézout et de Gauss.
- Employer ces notions dans la résolution de problèmes (divisibilité, codage, cryptographie...).

« Eh arithmétique, un et un font deux.
En amour, un et un devraient faire un,
et ça fait deux tout de même. »

Guy de Maupassant

Avant-première

1. OBJECTIFS

Le programme nous commande conjointement d'effectuer la synthèse des connaissances acquises (au Collège et en classe de Seconde) concernant l'Arithmétique et d'en compléter les savoirs (démonstrations de certains résultats, nouvelles notions de base). Aussi avons-nous organisé cette rubrique selon trois thèmes :

- renouer avec les problèmes de **divisibilité, multiples, diviseurs** ;
- percevoir l'utilité de considérer la division entre entiers, et principalement **le reste** ;
- dégager certains **résultats théoriques sur les entiers** qui seront utilisés dans ce chapitre.

2. DIVISIBILITÉ, MULTIPLES, DIVISEURS

Séquence 1

Réveil de quelques notions

① Une curiosité numérique

1) Vérifier que les entiers suivants sont des multiples de 37 :

- a) les nombres de trois chiffres identiques (comme 222, 777...);
- b) les nombres de six chiffres identiques (comme 555 555...);
- c) les nombres écrits en juxtaposant trois fois deux chiffres identiques (comme 717 171...).

2) Expliquer tout cela.

② Nombres parfaits

On dit qu'un entier naturel est **parfait** s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts (autres que lui-même) positifs.

Vérifier que 6, 28 et 496 sont parfaits.

③ Liste des diviseurs communs et PGCD

1) Dresser la liste des diviseurs positifs de 420, puis de 1 386, puis la liste des diviseurs communs à 420 et 1 386.

2) Comparer avec la liste des diviseurs de leur PGCD.

Rappel : algorithmes de détermination de la liste des diviseurs positifs d'un entier

• La méthode « artisanale »

On écrit les multiplications : $496 = 1 \times 496$
 $= 2 \times 248$
 $= 4 \times 124$
 $\vdots$
etc.

Les diviseurs sont obtenus par paires :
1 et 496, 2 et 248, etc (sauf éventuellement le dernier, lorsque le nombre est un carré).

• Avec un tableur

On introduit les entiers 1, 2, 3,... (aussi loin que l'on veut) dans la colonne A.

	A	B	C
1	nombre →		496
2			
3	1		1
4	2		2
5	3		non
6	4		4
7	5		non

Formule

$= \text{SI}(\text{MOD}(\$C\$1;A3) = 0 ; A3 ; \text{« non »})$

On étend la formule (colonne C).

3. DIVISION EUCLIDIENNE (AVEC QUOTIENT ET RESTE)

La séquence qui suit met en scène cette division entre entiers apprise à l'école primaire et que nous nommerons dans le cours : « **division euclidienne** ».

Séquence 2

L'important, c'est le reste

① Un problème de calendrier

« Sachant que le 1^{er} janvier 2002 était un mardi, à quel jour de la semaine correspondra le 1^{er} janvier 2040 ? »

1) Calculer le nombre N de jours séparant ces deux dates.

2) Déterminer le reste de la division de N par 7 et conclure.

② En trigonométrie

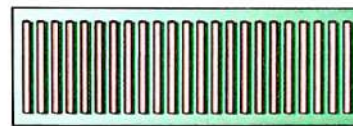
Pour quelles valeurs de l'entier n a-t-on l'égalité :

$$\cos\left(n \frac{\pi}{18}\right) = -\frac{1}{2} ?$$

③ Le jeu de Fort Boyard

Dans une épreuve de ce jeu télévisé, un candidat est opposé au « Maître des Jeux ».

Face à un alignement de bâtonnets (ici : 23), chacun doit, à tour de rôle, retirer 1, 2 ou 3 bâtonnets, au choix. Celui qui retire le dernier bâtonnet a perdu.



Le candidat commence.

1) Montrer que, pour gagner, le candidat doit laisser, à chaque étape, un nombre de bâtonnets dont le reste est 1 dans la division par 4.

2) Est-ce toujours possible ?

Nous dégagerons dans le cours, page 337, la propriété « d'avoir le même reste » avec la **notion de congruence**.

4. QUELQUES PROPRIÉTÉS THÉORIQUES DES ENTIERS

Nous admettons dans ce chapitre la propriété suivante, qui en est un des piliers :

« **Toute partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un plus petit élément.** » (Axiome)

La séquence qui suit utilise cet axiome. Les résultats dégagés seront exploités dans le cours.

Séquence 3

Propriétés des entiers

① Le principe de descente infinie

1) Soit (a_n) une suite infinie d'entiers naturels, décroissante au sens large.

Montrer que, à partir d'un certain rang, cette suite est stationnaire.

2) En déduire le « principe » suivant, mis en évidence par Pierre de Fermat :

« Toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie. »

② La fonction partie entière

Soit x un réel.

Montrer qu'il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$n \leq x < n + 1.$$

Commencer par supposer $x \geq 0$, et considérer l'ensemble $E = \{p \in \mathbb{N}, p > x\}$.

Cet entier n est noté $E(x)$ (partie entière de x).

③ Encadrement de a par deux multiples de b

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$bq \leq a < b(q + 1).$$

1. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1.1 MULTIPLES ET DIVISEURS (RAPPELS)

DÉFINITION 1

Soit a et b deux entiers relatifs.

On dit que a est un **multiple** de b (ou que b est un **diviseur** de a) s'il existe un entier relatif k tel que $a = kb$.

On dit encore que a est **divisible** par b ou que b **divise** a .

Propriétés immédiates

- ① Les multiples d'un entier a sont les nombres $0, a, -a, 2a, -2a, \dots$; nous ne résistons pas à la tentation de noter $a\mathbb{Z}$ cet ensemble.
- ② Tout entier a admet des diviseurs, parmi lesquels les entiers $1, -1, a, -a$.
- ③ Si $a \neq 0$, tout diviseur b de a vérifie $-|a| \leq b \leq |a|$, ce qui résulte de l'égalité $a = kb$, avec $k \neq 0$.
Cela montre que **tout entier non nul admet un nombre fini de diviseurs**.

1.2 OPÉRATIONS SUR LES MULTIPLES

THÉORÈME 1

Soit a, b et c des entiers relatifs quelconques.

Si a et b sont des multiples de c , alors la **somme** $a + b$, la **différence** $a - b$, et plus généralement, toute **combinaison linéaire** $au + bv$ (u, v dans $\mathbb{Z}$), sont des multiples de c .

Ce résultat peut aussi s'énoncer en terme de diviseurs :

« Si c divise a et b , alors c divise $a + b$, $a - b$ et $au + bv \dots$ »

Pour la démonstration, voir l'exercice 4, page 352.



EXEMPLE 1

Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, $9^n - 2^n$ est multiple de 7.

- La propriété annoncée est aisément vérifiée pour $n = 0$.
- Supposons que $9^n - 2^n$ soit multiple de 7 ; alors :

$$9^{n+1} - 2^{n+1} = 2 \times (9^n - 2^n) + 7 \times 9^n$$

ce qui est une combinaison linéaire à coefficients entiers des deux multiples de 7 : $9^n - 2^n$ et 7.

Cela montre que $9^{n+1} - 2^{n+1}$ est un multiple de 7, et achève la démonstration.

Voir exercices 5 à 8

2.1 LE RÉSULTAT

THÉORÈME 2 ET DÉFINITION 2

2.2 CALCUL

2. Division euclidienne

2.1 LE RÉSULTAT FONDAMENTAL

THÉORÈME 2 ET DÉFINITION 2

Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul.

Il existe un unique couple (q, r) d'entiers relatifs vérifiant à la fois :

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b.$$

On nomme **division euclidienne de a par b** l'opération qui, au couple (a, b) , associe le couple (q, r) ; q est le **quotient**, r est le **reste**.

... Démonstration

Existence de q et r

Nous avons établi (voir *séquence 3*, page 333) l'existence de la partie entière $E(x)$ d'un réel x ; soit alors $q = E\left(\frac{a}{b}\right)$. L'entier q est défini par l'encadrement :

$$q \leq \frac{a}{b} < q + 1,$$

soit encore :

$$bq \leq a < b(q + 1).$$

Posons alors $r = a - bq$; l'entier r vérifie : $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

Unicité

Supposons qu'il existe deux couples d'entiers (q, r) et (q', r') vérifiant simultanément :
 $a = bq + r = bq' + r'$, $0 \leq r < b$ et $0 \leq r' < b$.

Nous en tirons : $r - r' = b(q' - q)$, donc $r - r'$ est multiple de b
 et $-b < r - r' < b$.

Cela implique $r - r' = 0$, puis, comme $b \neq 0$, $q' - q = 0$.

La conclusion en découle : $r = r'$ et $q = q'$.

2.2 CALCUL PRATIQUE DU QUOTIENT ET DU RESTE

La démonstration précédente nous livre un moyen de calcul du quotient et du reste, à l'aide des relations :

$$q = E\left(\frac{a}{b}\right) \quad \text{et} \quad r = a - bq.$$

On peut cependant, selon l'appareil disponible, utiliser certaines fonctions intégrées :

- sur **Texas (TI 89)** : $\boxed{\text{Int Div}}$ (a, b) et $\boxed{\text{mod}}$ (a, b) donnent le quotient et le reste de la division de a par b ;
- chez **Casio (Graph 25...)** : $a \boxed{\text{Int } \div} b$ et $a \boxed{\text{Rmdr}} b$ remplissent la même fonction ;
- sur un **tableur** : même chose avec **QUOTIENT** ($a ; b$) et **MOD** ($a ; b$).



3. Le langage des congruences

3.1 ENTIERS CONGRUS MODULO n

DÉFINITION 3

Soit n un entier naturel ($n \geq 2$), a et b deux entiers relatifs.

On dit que a et b sont **congrus modulo n** lorsque a et b ont le **même reste** dans la division euclidienne par n .

On note alors :

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{ou} \quad a \equiv b(n).$$

Commentaires

Ainsi, par exemple, $2003 \equiv 3(10)$; $57 \equiv 1(7)$; $-6 \equiv 1(7)$; etc.

La notion de congruence, dégagée par Gauss au XIX^e siècle, prend tout son intérêt dès lors qu'on s'intéresse seulement *au reste*, pour une propriété donnée ; ainsi :

- une année est bissextile lorsque son millésime n vérifie $n \equiv 0 \pmod{4}$;

- $\cos\left(n \frac{\pi}{3}\right) = -1$ lorsque $n \equiv 3 \pmod{6}$.

De par sa définition, la relation de congruence vérifie les propriétés suivantes, analogues à celles de l'égalité :

- $a \equiv a \pmod{n}$;
- si $a \equiv b \pmod{n}$, alors $b \equiv a \pmod{n}$;
- si $a \equiv b(n)$ et $b \equiv c(n)$, alors $a \equiv c(n)$.

Cette dernière propriété nous autorise à écrire des « congruences en chaîne », telles que :

$$17 \equiv 13 \equiv 5 \equiv 1 \equiv -11 \pmod{4}.$$

THÉORÈME 3

Soit n un entier naturel ($n \geq 2$), a et b deux entiers relatifs.

Alors $a \equiv b(n)$ si, et seulement si, $a - b$ est un multiple de n .

... Démonstration

Écrivons les divisions euclidiennes de a et b par n :

$$a = nq + r \text{ avec } 0 \leq r < n \quad \text{et} \quad b = nq' + r' \text{ avec } 0 \leq r' < n.$$

On en tire :

$$(a - b) = n(q - q') + (r - r') \quad \text{et} \quad -n < r - r' < n.$$

- Si $a \equiv b(n)$, alors $r - r' = 0$, donc $a - b = n(q - q')$: $a - b$ est un multiple de n .
- Réciproquement, supposons que $a - b$ est un multiple de n .

Il en résulte que $r - r' = (a - b) - n(q - q')$; ce nombre est aussi un multiple de n , d'après le théorème 1, page 334. Comme $-n < r - r' < n$, la seule possibilité est $r - r' = 0$.

Donc $a \equiv b(n)$, ce qui achève notre affaire.

Remarque : ainsi, dire que r est le reste de a dans la division par n équivaut aux conditions :

$$a \equiv r(n) \quad \text{et} \quad 0 \leq r < n.$$

3.2 PROPRIÉTÉS DES CONGRUENCES

THÉORÈME 4

Soit n un entier naturel ($n \geq 2$), a, a', b et b' des entiers relatifs vérifiant :

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{et} \quad a' \equiv b' \pmod{n}.$$

Alors :

$$a + a' \equiv b + b' \pmod{n}, \quad aa' \equiv bb' \pmod{n}$$

et, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $a^k \equiv b^k \pmod{n}.$

Nous pouvons résumer ces propriétés par la phrase suivante : « La relation de congruence est **compatible** avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}$. »

... Démonstration

- Compte tenu du *théorème 3*, les hypothèses impliquent que $a - b$ et $a' - b'$ sont des multiples de n : il existe q et q' entiers tels que :

$$a - b = qn \quad \text{et} \quad a' - b' = q'n.$$

- Alors $(a + a') - (b + b') = (q + q')n$
et $aa' - bb' = (a - b)a' + (a' - b')b = (qa' + q'b)n$.

Ces égalités montrent que $(a + a') - (b + b')$ et $aa' - bb'$ sont des multiples de n , donc que :

$$a + a' \equiv b + b' \pmod{n} \quad \text{et} \quad aa' \equiv bb' \pmod{n}.$$

- La troisième affirmation se prouve par récurrence sur k , à l'aide de la deuxième : nous en confions la preuve au lecteur.



EXEMPLE 2

Déterminer les restes successifs dans la division euclidienne par 7 des nombres :

$$50^{100} ; 100 ; 100^3 ; 50^{100} + 100^{100}.$$

1) Reste de 50^{100}

On a $50 \equiv 1(7)$, donc $50^{100} \equiv 1^{100} \equiv 1(7)$:
le reste est 1.

2) Reste de 100

Écrivons $100 = 50 \times 2$; comme $50 \equiv 1(7)$, alors $100 \equiv 1 \times 2 \equiv 2(7)$:
le reste est 2.

3) Reste de 100^3

Comme $100 \equiv 2(7)$, alors $100^3 \equiv 2^3 \equiv 8 \equiv 1(7)$:
le reste est 1.

4) Reste de $50^{100} + 100^{100}$

$100^{100} = 100^{3 \times 33 + 1} = (100^3)^{33} \times 100$, donc $100^{100} \equiv 1^{33} \times 2 \equiv 2(7)$.
Ainsi $50^{100} + 100^{100} \equiv 1 + 2 \equiv 3(7)$:
le reste est 3.

Voir exercices 16 à 24

Bien d'autres applications des congruences suivront dans *Au cœur des problèmes*.

4. PGCD et PPCM de deux entiers

4

4.1 GÉNÉRALITÉS

THÉORÈME 5 ET DÉFINITION 4

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

- L'ensemble des diviseurs communs à a et b admet un **plus grand élément** D , appelé le **PGCD** de a et b .
- L'ensemble des multiples communs strictement positifs de a et b admet un **plus petit élément** M , appelé le **PPCM** de a et b .

Notations : $D = \text{PGCD}(a, b)$, $M = \text{PPCM}(a, b)$.

... Démonstration

L'ensemble des diviseurs communs à a et b contient l'entier 1, donc n'est pas vide. De plus, cet ensemble est fini (comme intersection de deux ensembles finis).

Nous en déduisons qu'il admet un plus grand élément D .

L'ensemble des multiples communs, strictement positifs, de a et b est une partie de $\mathbb{N}$ non vide (le nombre $|ab|$ appartient à cet ensemble) ; donc, d'après le résultat rappelé dans *Avant-première*, cet ensemble admet un plus petit élément M .

Détermination pratique



- De façon artisanale, il est toujours possible de déterminer le PGCD et le PPCM à partir de la liste des diviseurs communs (ou des premiers multiples communs positifs), lorsque les nombres ne sont pas trop grands (voir page 332).
- À la calculatrice : les instructions $\boxed{\text{gcd}}$ (a, b) et $\boxed{\text{lcm}}$ (a, b) calculent le PGCD et le PPCM (Texas TI 89 : menu $\boxed{\text{MATH}}$ $\boxed{\text{NUMBER}}$, Casio Graph 100 : menu $\boxed{\text{CAS}}$ $\boxed{\text{CALC}}$).
- Pour d'autres méthodes : voir la partie 4.3, ainsi que les propriétés, page 341, ou encore le chapitre 12, avec la décomposition en facteurs premiers.

4.2 NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

DÉFINITION 5

On dit que deux entiers relatifs non nuls a et b sont **premiers entre eux** ou **étrangers**, lorsque leur PGCD est égal à 1.

Les définitions 4 et 5 permettent de dégager quelques énoncés (connus ?) sur le calcul des fractions. Soit a et b deux entiers non-nuls ; alors :

- la fraction est **irréductible** lorsque a et b sont premiers entre eux ;
- sinon, on peut la réduire en **divisant a et b par leur PGCD** ;
- le plus petit **dénominateur commun** de deux fractions est le **PPCM** des dénominateurs ; le PPCM est donc le dénominateur commun le plus simple, lorsque l'on doit ajouter ou soustraire deux fractions.

4.3 L'ALGORITHME D'EUCLIDE

Le résultat suivant permet de calculer $D = \text{PGCD}(a, b)$ sous forme algorithmique.

THÉORÈME 6

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. La suite des divisions euclidiennes :

- de a par b : $a = bq_0 + r_0$;
- de b par r_0 (si $r_0 \neq 0$) : $b = r_0q_1 + r_1$;
- de r_0 par r_1 (si $r_1 \neq 0$) : $r_0 = r_1q_2 + r_2$;
- $\vdots$
- de r_{n-1} par r_n (si $r_n \neq 0$) : $r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}$

fini par s'arrêter, un des restes r_i étant nul.

Le **dernier reste non nul** est alors le **PGCD** de a et b (si $r_0 = 0$, c'est b).

... Démonstration

Les inégalités $b > r_0 > r_1 > \dots > r_n > \dots \geq 0$ montrent que (r_n) est une suite strictement décroissante d'entiers naturels, donc (voir *Avant-première*), cette suite est finie.

D'autre part, considérons l'égalité $a = bq_0 + r_0$:

- tout diviseur de a et b divise $a - bq_0$, soit r_0 : c'est un diviseur de b et r_0 ;
- tout diviseur de b et r_0 divise $bq_0 + r_0$, soit a : c'est un diviseur de a et b .

Ainsi, les diviseurs communs de a et b sont ceux de b et r_0 , et il en va de même pour le plus grand d'entre eux :

$$\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r_0).$$

On peut appliquer ce raisonnement à chaque égalité ; si r_i est le premier reste nul, on a :

$$\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r_0) = \text{PGCD}(r_0, r_1) = \dots = \text{PGCD}(r_{i-2}, r_{i-1}).$$

Or $r_{i-2} = r_{i-1}q_i + 0$, donc r_{i-1} divise r_{i-2} ; par suite, ce dernier PGCD est r_{i-1} .

Le processus itératif mis en œuvre est appelé **algorithme d'Euclide**⁽¹⁾.

➔ EXEMPLE 3

Déterminer le PGCD de 1 958 et 4 539.

$$1\,958 = 4\,539 \times 0 + 1\,958 \quad (r_0 = 1\,958) ;$$

$$4\,539 = 1\,958 \times 2 + 623 \quad (r_1 = 623) ;$$

$$1\,958 = 623 \times 3 + 89 \quad (r_2 = 89) ;$$

$$623 = 89 \times 7 + 0 \quad (r_3 = 0).$$

On en déduit $\text{PGCD}(1\,958, 4\,539) = r_2 = 89$.

Voir exercices 27 à 29

Remarques

- Le petit nombre d'étapes utilisées dans l'exemple ci-dessus montre toute la performance de cet algorithme. (Voir *Avec un logiciel*, page 350, pour programmer cet algorithme.)
- Si $a < b$, la première ligne de l'algorithme a pour effet d'échanger a et b ; en effet, avec $a = 35$ et $b = 78$, on obtient $35 = 78 \times 0 + 35$, puis $78 = 35 \times 2 + 8 \dots$

(1) Ce procédé était connu des Grecs sous le nom d'**anthyphérèse** (c'est-à-dire : action d'enlever tour à tour ; pour trouver le PGCD de 70 et 18, on enlevait 18 à 70, et ce, autant de fois qu'il était possible, etc.). Il est décrit dans le Livre X des *Éléments* d'Euclide (voir aussi exercice 29, page 354).

5. Les théorèmes de Bézout et de Gauss

5.

5.1 LE THÉORÈME DE BÉZOUT

THÉORÈME 7

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et D leur PGCD.
Il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = D$.
(C'est l'égalité de Bézout.)

... Démonstration

Considérons l'ensemble G des entiers naturels non nuls de la forme $am + bn$ (avec m et n dans $\mathbb{Z}$).

• G est une partie de $\mathbb{N}$ non vide (on vérifie facilement que $|a| \in G$), donc G admet un plus petit élément d : il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $au + bv = d$.

• D est un diviseur de a et b , donc de $au + bv = d$. Cela montre que $D \leq d$.

• Montrons que d divise a et b ; la division euclidienne de a par d s'écrit :

$$a = dq + r, \text{ avec } 0 \leq r < d.$$

On en tire : $r = a - dq = a - (au + bv)q = a(1 - qu) + b(-vq)$.

Cette égalité montre que r est de la forme « $am + bn$ » ; comme $r < d$ et d est le plus petit élément de G , il en résulte $r \notin G$.

Donc $r = 0$ (car si $r \neq 0$, on aurait $0 < r$ et par suite $r \in G$) ; cela prouve que $a = dq$, donc d divise a . On établit de même que d divise b .

• Conclusion

d est un diviseur commun de a et b vérifiant $D \leq d$, donc $D = d$, d'après la définition du PGCD. Cela achève la démonstration.

Conséquences

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

① Tout diviseur commun à a et b divise leur PGCD.

② a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux entiers relatifs u et v tels que :

$$au + bv = 1.$$

③ L'équation $ax + by = d$ (d entier fixé non nul) admet des solutions entières si, et seulement si, d est un multiple de $D = \text{PGCD}(a, b)$.

Ces affirmations seront prouvées dans l'exercice 40, page 355.

Pour la résolution de l'équation $ax + by = d$, voir *Au cœur des problèmes*, page 346.

➔ EXEMPLE 4

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $2n + 1$ et $3n + 1$ sont premiers entre eux.

On a $3(2n + 1) - 2(3n + 1) = 1$, donc, d'après la conséquence 2 ci-dessus, $2n + 1$ et $3n + 1$ sont premiers entre eux.

Voir exercices 38 et 52

5.2 LE THÉORÈME DE GAUSS

THÉORÈME 8

Soit a, b et c , trois entiers relatifs non nuls.
Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c .

... Démonstration

Puisque a divise bc , il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $bc = ka$.
Comme a et b sont premiers entre eux, il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.
On en tire : $c = acu + bcv = acu + kav = a(cu + kv)$.
Cette égalité montre clairement que a divise c .

Conséquences

Nous en tirons immédiatement deux conséquences remarquables.

- Si a et b divisent un entier c , et si a et b sont étrangers, alors ab divise c .
- Si un entier a est premier avec chacun des entiers $b_1, b_2, \dots, b_k$, alors a est premier avec leur produit $b_1 \dots b_k$.

... Preuves

Voir les exercices 41 à 43, page 355.

5.3 APPLICATIONS : PROPRIÉTÉS DU PGCD ET DU PPCM

Ces propriétés découlent des théorèmes de Bézout et de Gauss. Elles sont rassemblées ci-dessous et seront prouvées dans les exercices 45 et 46, page 355.

Propriétés

Soit a et b deux entiers naturels non nuls, D leur PGCD et M leur PPCM.

- Il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux, tels que :
 $a = Da'$ et $b = Db'$.
- On a les relations : $M = Da'b' = ab' = ba'$ et $MD = ab$.
- L'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble des diviseurs de D .
- L'ensemble des multiples communs à a et b est l'ensemble des multiples de M .



EXEMPLE 5

Déterminer le PGCD et le PPCM de 1 365 et 858.

Écrivons l'algorithme d'Euclide :

$$1\,365 = 858 \times 1 + 507$$

$$858 = 507 \times 1 + 351$$

$$507 = 351 \times 1 + 156$$

$$351 = 156 \times 2 + 39$$

$$156 = 39 \times 4 + 0$$

Donc le PGCD est 39 (dernier reste non nul).

$$\text{La relation } MD = ab \text{ fournit } M = \frac{1\,365 \times 858}{39} = 30\,030.$$

Le PPCM est 30 030.

Voir exercices 47 à 49 et 53

1. Problèmes de divisibilité

OBJECTIFS

Deux outils sont ici envisagés : le raisonnement par récurrence et les propriétés des congruences.

PROBLÈME

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^{2n} - 4^n$ est divisible par 7.

1 Méthodes, idées

Envisageons les méthodes préconisées dans les objectifs :

- pour le raisonnement par récurrence, si $u_n = 5^{2n} - 4^n$, il va s'agir d'exprimer u_{n+1} en fonction de u_n :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= 5^{2n+2} - 4^{n+1} = 25 \times 5^{2n} - 4 \times 4^n \\&= 25(5^{2n} - 4^n) + 21 \times 4^n ;\end{aligned}$$

- pour l'utilisation des congruences, tout est basé sur la « remarque » :
 $5^{2n} = (5^2)^n$ et $5^2 \equiv 4 \pmod{7}$...

2 Méthode 1 : par récurrence

Posons $u_n = 5^{2n} - 4^n$; il est clair ($u_0 = 0$) que u_0 est multiple de 7.

Supposons que u_n est un multiple de 7 ; alors, d'après ce qui précède :

$$u_{n+1} = 25u_n + 21 \times 4^n = 25u_n + 7 \times (3 \times 4^n).$$

Ainsi, u_{n+1} est la somme de deux multiples de 7, donc c'est un multiple de 7.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un multiple de 7.

3 Méthode 2 : avec les congruences

Comme $5^2 \equiv 4 \pmod{7}$, il vient $5^{2n} \equiv (5^2)^n \equiv 4^n \pmod{7}$.

Donc : $5^{2n} - 4^n \equiv 4^n - 4^n \equiv 0 \pmod{7}$.

Cela prouve que $5^{2n} - 4^n$ est un multiple de 7.

MÉTHODE 1

Par récurrence

Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et utiliser les propriétés des multiples (théorème 1, page 334).

MÉTHODE 2

Congruences

Pour montrer que a est multiple de n , on prouve que $a \equiv 0 \pmod{n}$.
C'est souvent plus élégant.

Dans la foulée

- 1 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $8^n - 3^{3n}$ est un multiple de 19.
(Deux méthodes.)

- 2 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $7 + 6^n + 5^{2n} + 4^{3n}$ est un multiple de 3.
(Une méthode au choix.)

2. Critères de divisibilité

OBJECTIF

Obtenir et savoir utiliser quelques critères simples de divisibilité.

PROBLÈME

Divisibilité par 3 et par 9

1) Établir la règle suivante : « Un entier naturel a le même reste dans la division par 9 (ou par 3) que la somme de ses chiffres (lorsqu'il est écrit en base dix). »

2) Application : quels sont les entiers divisibles par 3, puis par 9, parmi 2 004 ; 111 ; 123 456 789 et 777 777 777 ?

1 Quelle méthode ?

Si l'entier x s'écrit $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ en base dix, nous avons la décomposition :

$$x = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0 \quad (1).$$

Dès lors, nous pouvons utiliser les congruences dans cette égalité. C'est l'idée.

2 Solution

1) Puisque $10 \equiv 1 \pmod{9}$ et $10 \equiv 1 \pmod{3}$, il est clair que toute puissance de 10 vérifie $10^k \equiv 1 \pmod{9}$ et $10^k \equiv 1 \pmod{3}$.

D'après l'égalité (1) et les propriétés des congruences, il vient :

$$x \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod{9 \text{ et } 3}.$$

Cela démontre la règle annoncée.

2) Application

• $2\,004 \equiv 2 + 4 \equiv 6 \pmod{9}$: 2 004 n'est pas divisible par 9.

• $2\,004 \equiv 6 \equiv 0 \pmod{3}$: 2 004 est divisible par 3.

On procède de même pour les autres nombres.

SOUVENIR

La preuve par neuf

Telle qu'on l'enseigne en Primaire, la preuve par neuf est basée, elle aussi, sur les congruences modulo 9. Essayer et adopter.

Dans la foulée

3 Divisibilité par 2 et 5, par 4 et 25

Soit n un entier naturel.

1) Si $n = 10a + b$, montrer que $n \equiv b \pmod{2}$ et $n \equiv b \pmod{5}$.

Énoncer un critère de divisibilité par 2 ou 5.

2) En écrivant $n = 100c + d$ (c et d entiers), établir et énoncer, de même, un critère de divisibilité par 4 ou 25.

4 Divisibilité par 7

1) Soit n un entier naturel qui s'écrit :

$$n = 10a + b \quad (a, b \text{ dans } \mathbb{N}).$$

Montrer que n est divisible par 7 si, et seulement si, $a - 2b$ est divisible par 7.

2) Application : sans calculatrice, déterminer les nombres divisibles par 7 parmi 25 718 ; 62 216 ; 46 663 et 38 983.

4. Problèmes de rationalité

OBJECTIF

Savoir si un réel donné est rationnel (c'est-à-dire quotient de deux entiers) est l'un des problèmes historiques majeurs en Mathématiques. Nous allons illustrer l'intérêt du théorème de Gauss sur des exemples simples de tels problèmes.

PROBLÈME

« $\sqrt{n}$ est entier ou irrationnel »

On considère le polynôme $P(x) = x^2 + ax + b$ (a et b entiers).

1) Montrer que si $P(\alpha) = 0$ et α rationnel, alors α est entier.

2) Application : justifier le titre du problème.

1 Comment utiliser l'hypothèse ?

Le rationnel α peut s'écrire sous forme irréductible $\alpha = \frac{p}{q}$, avec p et q premiers entre eux. C'est la l'essentiel.

2 Solution

1) L'hypothèse $P(\alpha) = 0$ s'écrit :

$$\frac{p^2}{q^2} + a \frac{p}{q} + b = 0, \quad \text{soit} \quad p^2 + apq + bq^2 = 0.$$

Puisque q divise $apq + bq^2$, il doit diviser p^2 .

Or, q est premier avec p , donc (théorème de Gauss) q doit diviser p ; répétons ce raisonnement : q doit diviser 1.

Conclusion : $q = \pm 1$, donc $\alpha = \pm p$. Ainsi α est un entier.

2) Application

$\sqrt{n}$ est une racine du polynôme $P(x) = x^2 - n$.

On déduit de 1) que si $\sqrt{n}$ est rationnel, c'est un entier.

Conclusion : $\sqrt{n}$ est soit irrationnel, soit entier.

(Dans ce dernier cas, n est le carré d'un entier.)

UN CHOIX DÉCISIF

Pour utiliser les outils de l'arithmétique avec un irrationnel α , écrivons α sous forme irréductible $\alpha = \frac{p}{q}$, avec $P.C.D.(p, q) = 1$.

Par exemple, pour $\alpha = \sqrt{2}$, on a $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $P.C.D.(p, q) = 1$.

A SAISIR

Nous avons prouvé, au passage, que

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \dots$ sont irrationnels, mais aussi les nombres tels que $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or), etc.

Dans la foulée

6 $\sqrt[n]{n}$ est entier ou irrationnel

1) Soit n un entier naturel. Montrer que si $\sqrt[n]{n}$ est rationnel, alors c'est un entier.

2) Justifier le titre de l'exercice.

7 Le cas de $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

1) Calculer α^2 , puis $(\alpha^2 - 5)^2$.

2) En déduire que α est racine d'un polynôme du quatrième degré.

3) Prouver que α est irrationnel.

5. L'équation diophantienne

$$ax + by = D$$

$$(D = \text{PGCD}(a, b))$$

OBJECTIF

Une équation diophantienne est une équation à coefficients entiers, et dont les inconnues sont entières (Diophante, III^e siècle de notre ère).

L'objectif est de savoir résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une équation du type :

$$ax + by = D \quad (D = \text{PGCD}(a, b)) \quad \text{ou} \quad ax + by = kD.$$

PROBLÈME

Soit (E) l'équation : $62x + 43y = 1$.

- 1) Écrire l'algorithme d'Euclide avec les entiers 62 et 43.
- 2) Déterminer une solution particulière (x_0, y_0) de (E) .
- 3) Résoudre alors l'équation (E) .

1) L'algorithme d'Euclide

$$62 = 43 \times 1 + 19 \quad (4)$$

$$43 = 19 \times 2 + 5 \quad (3)$$

$$19 = 5 \times 3 + 4 \quad (2)$$

$$5 = 4 \times 1 + 1 \quad (1)$$

Remarquons que, d'après la dernière égalité, $\text{PGCD}(62, 43) = 1$, donc l'équation (E) admet des solutions (théorème de Bézout).

2) Une solution particulière de (E)

• L'idée

Nous allons déterminer une solution particulière en remontant les égalités (1), (2), (3) et (4) dans l'algorithme, et en éliminant les restes successifs sauf le PGCD.

• Mise en œuvre

• Étape 1 : on réécrit (1) : $5 = 4 \times 1 + 1$ (1').

• Étape 2 : il s'agit d'éliminer le reste 4 dans (2).

Comme (1') contient le produit 4×1 , nous multiplions (2) par 1 :

$$19 \times 1 = 5 \times 3 + 4 \times 1 = 5 \times 3 + 5 - 1 \text{ d'après (1').}$$

Nous obtenons : $19 \times 1 = 5 \times 4 - 1$ (2').

• Étape 3 : il s'agit d'éliminer le reste 5 dans (3).

Comme (2') contient le produit 5×4 , nous multiplions (3) par 4 :

$$43 \times 4 = 19 \times 8 + 5 \times 4 = 19 \times 8 + 19 \times 1 + 1 \text{ d'après (2').}$$

Nous obtenons : $43 \times 4 = 19 \times 9 + 1$ (3').

Bien noter : le PGCD 1 reste présent dans chacune des égalités obtenues (en rouge).



Diophante, mathématicien grec de l'école d'Alexandrie (vers 250), auteur des *Arithmétiques*.

• **Étape 4** : il s'agit d'éliminer le reste 19 dans (4).

Comme (3') contient le produit 19×9 , nous multiplions (4) par 9 :

$$62 \times 9 = 43 \times 9 + 19 \times 9 = 43 \times 9 + 43 \times 4 - 1 \text{ d'après (3')}.$$

Nous obtenons : $62 \times 9 = 43 \times 13 - 1$ (4').

• **Conclusion**

D'après (4'), $62 \times (-9) + 43 \times 13 = 1$, donc :

$$(-9, 13) = (x_0, y_0) \text{ est une solution particulière de (E).}$$

3) Solution générale de E

L'équation (E) équivaut à :

$$62x + 43y = 62x_0 + 43y_0 ;$$

soit encore à :

$$62(x - x_0) = 43(y_0 - y) \text{ (E')}.$$

• 62 doit diviser $43(y_0 - y)$; or 62 est premier avec 43, donc **62 doit diviser** $y_0 - y$ (théorème de Gauss).

• On établit de même que **43 doit diviser** $x - x_0$.

Ainsi il existe deux entiers k et ℓ tels que :

$$y_0 - y = 62k \quad \text{et} \quad x - x_0 = 43\ell.$$

• Enfin, puisque (E') s'écrit $62 \times 43\ell = 43 \times 62k$, on en tire $k = \ell$.

• **Conclusion**

$$x = x_0 + 43k = -9 + 43k \quad \text{et} \quad y = y_0 - 62k = 13 - 62k.$$

Réciproquement, il est clair que ces valeurs sont solutions de (E).

Donc la solution générale de (E) est l'ensemble des couples :

$$\{(-9 + 43k, 13 - 62k), k \in \mathbb{Z}\}.$$

Note

Cet algorithme « manuel » est peu propice à la programmation. Nous en présentons un autre dans la rubrique *Avec un logiciel* (page 350).

RAPPORT D'ÉTAPES

L'équation $ax + by = D$

1) Écrire l'algorithme d'Euclide avec a et b .

2) Chercher une solution particulière (x_0, y_0) : on remonte les égalités en éliminant les restes successifs sauf le PGCD.

3) Solution générale : on se ramène à :

$$a(x - x_0) = b(y_0 - y)$$

pour conclure avec le théorème de Gauss.

Dans la foulée

8 On considère l'équation diophantienne :

$$(E) : 17x - 33y = 1.$$

1) Déterminer « à vue » une solution particulière de (E).

2) En déduire une solution particulière de :

$$(E') : 17x - 33y = 5.$$

3) Résoudre (E') dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

9 1) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :

$$51x + 54y = 2\,004.$$

2) Déterminer les couples d'entiers naturels solutions de cette équation.

10 D'après bac 2001

1) Déterminer un couple d'entiers solution de (E) :

$$91x + 10y = 1.$$

2) En déduire une solution particulière de (E') :

$$91x + 10y = 412.$$

Résoudre alors (E').

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $A_n = 3^{2n} - 1$ est divisible par 8.

4) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :

$$A_3x + A_2y = 3\,296.$$

6. Problèmes de Cryptographie

OBJECTIFS

Il s'agit d'illustrer l'emploi de quelques notions et résultats d'Arithmétique en Cryptographie, science qui s'occupe de chiffrer et déchiffrer des messages à l'aide d'une clé.

Nous nous en tenons ici à des méthodes élémentaires à **clé cachée**, et nous présenterons au chapitre suivant un aperçu des méthodes modernes, à **clé publique**.

Les outils utilisés sont ici, pour l'essentiel :

- la notion de **congruence** ;
- la résolution de l'équation diophantienne $ax + by = 1$.

PROBLÈME

Le chiffrement affine

On assimile les lettres de l'alphabet français A, B, ..., Z aux nombres 0, 1, ..., 25 et on code ces nombres par la fonction de « hachage » :

$$f \begin{cases} \{0, 1, \dots, 25\} \rightarrow \{0, 1, \dots, 25\} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

avec $f(x) \equiv 17x + 22 \pmod{26}$.

(Autrement dit, $f(x)$ est le reste de $17x + 22$ dans la division par 26.)

1) Chiffrer le mot « HUIT ».

2) Déterminer un entier u tel que $17u \equiv 1 \pmod{26}$.

En déduire l'expression d'une fonction de déchiffrage g , de $\{0, 1, \dots, 25\}$ dans lui-même, telle que :

$$y = f(x) \pmod{26} \Leftrightarrow x = g(y) \pmod{26}.$$

3) Déchiffrer alors le mot « QWXA ».

1) Les lettres H, U, I et T correspondent aux nombres 7, 20, 8 et 19.

Or $f(7)$ est le reste de $17 \times 7 + 22$ dans la division par 26, soit $f(7) = 11$.

On trouve de même $f(20) = 24$, $f(8) = 2$ et $f(19) = 7$.

Les nombres 11, 24, 2 et 7 correspondent aux lettres L, Y, C et H.

Conclusion : le mot chiffré est « L Y C H ».

2) L'idée pour trouver u

Une première méthode : la chance ! Si quelques essais avec des multiples simples de 17 (34, 51, 68...) s'avèrent fructueux, inutile d'aller plus loin.

$$17 \times 2 \equiv 8 \pmod{26}$$

$$17 \times 3 \equiv 25 \pmod{26}$$

$$17 \times 4 \equiv 16 \pmod{26}$$

... pas de chance !

Sinon, il faut remarquer que la condition $17u \equiv 1 \pmod{26}$ équivaut à : il existe $v \in \mathbb{Z}$ tel que $17u - 1 = 26v$, soit encore :

$$17u - 26v = 1.$$

Nous sommes donc ramenés à une équation diophantienne connue (voir partie 5).

Solution rédigée

Par la méthode décrite dans la partie 5, nous obtenons facilement la solution générale de l'équation $17u - 26v = 1$ (u, v dans $\mathbb{Z}$) :

$$u = -3 + 26k, v = -2 + 17k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Une seule valeur de u vérifie $0 \leq u \leq 25$; c'est $u = 23$.
(En fait, la valeur $u_0 = -3$ convient tout autant.)

Alors : $y \equiv 17x + 22 \pmod{26} \Leftrightarrow 23y \equiv 23 \times 17x + 506 \pmod{26}$

$$\Leftrightarrow 23y - 506 \equiv x \pmod{26}$$

$$\Leftrightarrow 23y + 14 \equiv x \pmod{26}.$$

La fonction de déchiffrement est donc :

$$g : y \mapsto 23y + 14 \pmod{26}.$$

3) Le mot « Q W X A » correspond à la séquence 16 22 23 0.

On obtient facilement :

$$g(16) = 18, g(22) = 0, g(23) = 23, g(0) = 14.$$

Le mot « en clair » est donc « S A X O ».

Remarque : cependant, puisque $17 \times 3 \equiv 25 \equiv -1 \pmod{26}$ on a $17 \times (-3) \equiv 1 \pmod{26}$.
Donc $u = -3$ convient.
Il faut parfois forcer la chance.

Voir la remarque ci-dessus pour une solution particulière :
 $u_0 = -3$, donc $v_0 = -2$.

Bien noter que :
 $23 \times 17 \equiv 1 \pmod{6}$.

Dans la foulée

11 On reprend la méthode du chiffrement affine avec la fonction de hachage :

$$f : x \mapsto 11x - 18 \pmod{26}.$$

1) Chiffrer le mot « J A U N E ».

2) Définir une fonction de déchiffrement g .

3) Déchiffrer le mot « W N S Y ».

12 1) Avec le chiffrement affine :

$$f : x \mapsto ax + b \pmod{26},$$

montrer que, lorsque a est premier avec 26, on peut déterminer une fonction de déchiffrement.

Combien de valeurs de a ($0 \leq a \leq 25$) correspondent à cette condition ?

2) Avec $a = 13$, donner un exemple d'ambiguïté possible.

Du militaire au civil

De Jules César (celui-ci utilisait un chiffrement affine avec $a = 1$ et $b = 3$) à la fin des années 1960, la Cryptographie utilisait des méthodes à clé cachée et restait l'apanage des militaires. Depuis 1975 et l'invention des clés publiques (voir chapitre 12) toute l'économie en est envahie : reconnaissance de cartes bancaires, commerce sur Internet...

7. Avec un logiciel



OBJECTIF

Il s'agit d'obtenir un algorithme simple et efficace pour déterminer une solution particulière de l'équation :

$$ax + by = D \quad (D = \text{PGCD}(a, b)).$$

(On sait alors obtenir la solution générale de cette équation : voir *Au cœur des problèmes*, partie 5.)

PROBLÈME

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

On note $r_0, r_1, \dots, r_n, r_{n+1}$, les restes successifs de l'algorithme d'Euclide appliqué aux entiers a et b ($r_n = \text{PGCD}(a, b)$, $r_{n+1} = 0$).

1) Montrer que, pour tout k ($0 \leq k \leq n$), il existe deux entiers u_k et v_k tels que $au_k + bv_k = r_k$.

Définir u_k et v_k par récurrence.

2) Programmer le calcul de u_k et v_k sur un tableur.

En déduire une solution particulière de l'équation $ax + by = D$ ($D = \text{PGCD}(a, b)$).

1) Avant de démarrer

Puisque les entiers r_k sont définis par récurrence :

$$r_k = r_{k+1}q_{k+2} + r_{k+2}$$

(égalité portant sur trois termes consécutifs), nous démarrerons la récurrence en faisant porter l'hypothèse sur deux termes.

Solution rédigée

Montrons par récurrence que, pour tout k ($0 \leq k \leq n$), il existe deux entiers u_k et v_k tels que $au_k + bv_k = r_k$.

- Si $k = 0$: on a $a + b(-q_0) = r_0$, donc $u_0 = 1$ et $v_0 = -q_0$.

- Si $k = 1$: on a $b = r_0q_1 + r_1 = (a - bq_0)q_1 + r_1$.

On en tire :

$$a(-q_1) + b(1 + q_0q_1) = r_1, \text{ donc :}$$

$$u_1 = -q_1 \quad \text{et} \quad v_1 = 1 + q_0q_1.$$

- supposons que l'on ait trouvé u_k, v_k, u_{k+1} et v_{k+1} tels que :

$$au_k + bv_k = r_k \quad \text{et} \quad au_{k+1} + bv_{k+1} = r_{k+1}.$$

Alors :

$$r_{k+2} = r_k - r_{k+1}q_{k+2} = (au_k + bv_k) - (au_{k+1} + bv_{k+1})q_{k+2}.$$

Rappel

Les entiers r_k

($0 \leq k \leq n+1$) sont définis par les égalités :

$$a = bq_0 + r_0$$

$$b = r_0q_1 + r_1$$

$$r_0 = r_1q_2 + r_2$$

$\vdots$

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$$

$$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0$$

$$(0 \leq r_i < r_{i-1}).$$

La récurrence porte sur deux termes : il est nécessaire de l'initialiser sur deux valeurs ($k = 0$ et $k = 1$).

On en tire :

$$r_{k+2} = a(u_k - u_{k+1}q_{k+2}) + b(v_k - v_{k+1}q_{k+2}).$$

Cela montre que $r_{k+2} = au_{k+2} + bv_{k+2}$ avec les relations :

$$u_{k+2} = u_k - u_{k+1}q_{k+2} \quad \text{et} \quad v_{k+2} = v_k - v_{k+1}q_{k+2}.$$

Conclusion : la propriété annoncée est démontrée et les suites (u_k) et (v_k) ont été définies par récurrence.

Remarque : puisque $au_n + bv_n = r_n = \text{PGCD}(a, b)$, le couple (u_n, v_n) est une solution particulière de l'équation.

2) Calcul pratique des suites (u_k) et (v_k)

Sur le tableur Excel ci-dessous nous avons organisé et présenté les calculs de la manière suivante :

F4		fx = SI(D4=0;"",F2-C4*F3)					
	A	B	C	D	E	F	
1	a	b	quotients q(k)	restes r(k)	u(k)	v(k)	
2	78	35	2	8	1	-2	
3			4	3	-4	9	
4			2	2	9	-20	
5			1	1	-13	29	
6			2	0			
7					#####	#VALEUR!	
8			#VALEUR!	#VALEUR!	#####	#VALEUR!	
9			#VALEUR!	#VALEUR!	#####	#VALEUR!	
10			#VALEUR!	#VALEUR!	#####	#VALEUR!	
11			#VALEUR!	#VALEUR!	#####	#VALEUR!	
12			#VALEUR!	#VALEUR!	#####	#VALEUR!	
13			#VALEUR!	#VALEUR!	#####	#VALEUR!	

Utilisation

- Placer les valeurs de a et b souhaitées en A2 et B2.
Le programme fonctionne pourvu que a ne soit pas multiple de b (dans ce cas, $r_0 = 0$ et le problème est sans intérêt) et que $a > b > 0$.
(On ramène aisément les autres cas à celui-là).

- Le dernier reste non nul est le PGCD (ici, c'est 1, placé en D5).
- Sur la ligne du PGCD, on obtient une solution (u, v) particulière :
$$78 \times (-13) + 35 \times 29 = 1.$$

Formules utilisées

- Initialisation** ($k = 0$ et $k = 1$)
En C2 : = QUOTIENT (A2 ; B2)
En D2 : = MOD (A2 ; B2)
En E2 : 1
En F2 : = - C2
En C3 : = QUOTIENT (B2 ; D2)
En D3 : = MOD (B2 ; D2)
En E3 : = SI (D3 = 0 ; " " ; - C3)
En F3 : = SI (D3 = 0 ; " " ; 1 + C2*C3)

Relations de récurrence

- En C4 :
= SI (D3 = 0 ; " " ; QUOTIENT (D2 ; D3))
En D4 :
= SI (D3 = 0 ; " " ; MOD (D2 ; D3))
En E4 :
= SI (D4 = 0 ; " " ; E2 - C4*E3)
En F4 :
= SI (D4 = 0 ; " " ; F2 - C4*F3)

Ces relations sont étendues vers le bas, aussi loin que l'on veut.

Dans la foulée

1) Organiser le calcul et déterminer une solution particulière de chacune des équations :

$$39x - 52y = 3 ;$$

$$215x + 813y = 1 ;$$

$$2\,005x - 1\,789y = 1.$$

2) Déterminer une solution de chacune des congruences :

$$39x \equiv 3 \pmod{52} ;$$

$$813x \equiv 1 \pmod{215} ;$$

$$2\,005x \equiv 1 \pmod{1\,789}.$$

Applications

Multiples, diviseurs

1 Dresser la liste des diviseurs positifs des entiers suivants par la méthode « artisanale » (voir *Avant-première*, page 332) : 36, 48, 50, 150, 120 et 230.

2 Même exercice, en utilisant un tableur (voir *Avant-première*, page 332), avec les entiers : 500, 540, 620, 650, 736, 840 et 2 310.

3 Nombres amiables

Deux entiers sont dits amiables si chacun d'eux est égal à la somme des diviseurs stricts (autres que lui-même) de l'autre. Vérifier que 220 est amiable avec un autre entier.

Piste Faire la somme des diviseurs de 220 autres que 220.

4 Une preuve

Démontrer le *théorème 1* du cours, page 334.

5 À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{n+5} - 3^n$ est un multiple de 11.

6 1) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 5n$ est un multiple de 6.

2) En déduire que les entiers suivants sont des multiples de 6 :

a) $n^3 + 17n - 12$;

b) $n^3 + 2\,003n$;

c) le produit de trois entiers consécutifs.

7 Montrer que, pour tout entier naturel n :

a) $5^n - 1$ et $13^n - 1$ sont divisibles par 4 ;

b) en général, pour tout k , $(4k + 1)^n - 1$ est divisible par 4.

Piste Les suites géométriques et la somme des termes.

8 1) Soit n un entier naturel non nul, et d un diviseur positif de n .

Montrer que, pour tout entier $a \geq 1$, $a^n - 1$ est divisible par $a^d - 1$.

Piste Poser $n = kd$ et $x = a^d$.
Alors $(x^k - 1) = (x - 1)(\dots)$.

2) Application

Montrer que $2^{2\,004} - 1$ est divisible par 3, 7, 63 et 65.

Piste On pourra d'abord déterminer les diviseurs de 2 004.

Division euclidienne

9 Dans chaque cas, écrire la division euclidienne de a par b :

a) $a = 2\,004$ et $b = 35$; b) $a = 5\,000$ et $b = 17$;
c) $a = -5\,000$ et $b = 17$; d) $a = 18$ et $b = 50$.

10 A et B sont deux entiers naturels vérifiant $A = 13B + 50$. Écrire la division euclidienne :

a) de A par 13 ; b) de $-A$ par 13 ; c) de $3A + 20$ par 13.

11 Dans la division euclidienne de a par b ($b \geq 1$), on note q le quotient et r le reste.

a) Si $b = 7$, quelles sont les valeurs possibles de r ?

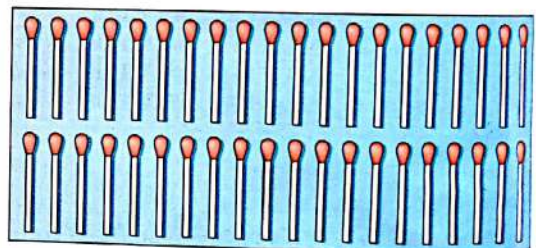
b) Si $b = 9$ et $q = -3$, quelles sont les valeurs possibles de a ?

c) Si $a = 54$ et $r = 3$, déterminer b et q .

12 Lorsqu'on divise a par b , le reste est 8 ; lorsqu'on divise $2a$ par b , le reste est 5. Que vaut b ?

13 Un jeu de Nim

Sur la figure suivante, 40 allumettes sont disposées sur le tapis



Deux joueurs prennent chacun, à tour de rôle, une, deux, trois ou quatre allumettes. Celui qui prend la dernière allumette perd la partie.

Il existe une stratégie gagnante pour le joueur qui commence. Exposer cette stratégie.

14 « Ah, ça ira... »

Quel jour de la semaine correspond à la date du 14 juillet 1789 ? (On rappelle que les millésimes multiples de 100 ne sont pas bissextiles, sauf les multiples de 400.)

15 L'écriture décimale

Soit x un entier naturel. On effectue les divisions euclidiennes :

– de x par 10 : $x = 10q_0 + r_0$;

– de q_0 par 10 : $q_0 = 10q_1 + r_1$;

– de q_1 par 10 : $q_1 = 10q_2 + r_2$;

Sachant que $q_2 = 0$, quelle est l'écriture décimale de x ?

Congruences

16 En utilisant les propriétés des congruences, déterminer le reste dans la division par 13 de chacun des entiers suivants : 100, 27, 127, 2 700, 100^4 , 27^4 et $27^2 004$.

17 1) Vérifier les congruences $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ et $3^6 \equiv 1 \pmod{13}$.

2) En déduire que $2^{70} + 3^{70}$ est divisible par 13.

18 1) Vérifier que $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$. En déduire le reste de 10^6 dans la division par 7.

2) Effectuer la division euclidienne de 2 005 par 6.

3) Déduire des questions précédentes le reste de $10^{2\,005}$ dans la division par 7.

19 Par une démarche analogue à celle de l'exercice précédent, déterminer le reste de $10^{2\,005}$ dans la division par 19.

Piste Examiner les premières puissances de 10 (modulo 19), jusqu'à ce que...

20 Puissances quatrièmes

1) Pour chaque entier k compris entre 0 et 9, déterminer le reste de la division euclidienne de k^4 par 10.

2) Si n est un entier naturel, quel peut être le chiffre des unités de n^4 ?

21 Puissances cinquièmes

1) Pour chaque entier k compris entre 0 et 9, déterminer le reste de la division euclidienne de k^5 par 10.

2) En déduire que, pour tout entier n , $n^5 - n$ est divisible par 10.

22 Quelques propriétés des congruences

Soit a et n deux entiers naturels ($n \geq 2$) tels que $a \equiv 1 \pmod{n}$.

1) Montrer que, pour tout diviseur positif d de n , $a \equiv 1 \pmod{d}$.

2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a^k \equiv 1 \pmod{n}$.

3) Montrer que $\cos\left(\frac{2a\pi}{n}\right) = \cos\frac{2\pi}{n}$.

4) Si K est un entier tel que $2^n \equiv 1 \pmod{K}$, prouver que : $2^a \equiv 2 \pmod{K}$.

23 Une méthode élégante

Résoudre les deux questions de l'exercice 7, page 352 à l'aide des congruences.

24 D'après bac 1999

1) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

En déduire que $2^{3n+1} - 2$ et $2^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7.

2) Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère le nombre :

$$A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}.$$

a) Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?

b) Démontrer que, si $p = 3n + 1$, alors A_p est divisible par 7.

c) Étudier le cas où $p = 3n + 2$.

25 Les restes d'une progression arithmétique (Acte I)

1) Deux exemples

a) Déterminer les restes successifs modulo 20 des termes de la suite arithmétique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_n = 12n + 5$.

b) Même question avec les restes modulo 6 de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_n = 10n + 3$.

c) Peut-on formuler une conjecture ?

2) Cas général

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = an + b$ et on considère la suite des restes de u_n dans la division par p (a, b et p sont des entiers naturels fixés, $p \geq 2$).

a) Combien existe-t-il de restes distincts possibles ?

b) En déduire que parmi les nombres $u_0, u_1, \dots, u_p$, il existe deux nombres ayant le même reste.

(On notera m et $m + \tau$ les deux plus petits rangs des entiers vérifiant cette propriété ; ainsi :

$$u_m \equiv u_{m+\tau} \pmod{p}, \text{ avec } m \geq 0 \text{ et } \tau > 0.$$

c) Montrer que pour tout entier k , $u_{\tau+k} \equiv u_k \pmod{p}$.

En déduire que la suite des restes est périodique de période τ , à partir du rang 0, et que $\tau \leq p$.

Regard sur...

Carl-Friedrich Gauss
(1777-1855).

On lui doit la première étude
complète des congruences en
1801.



PGCD et PPCM

26 Dans chaque cas, déterminer le PGCD, puis le PPCM des entiers a et b par une méthode au choix.

- a) $a = 35$ et $b = 84$; b) $a = 39$ et $b = 52$;
c) $a = 48$ et $b = 54$; d) $a = 60$ et $b = 45$.

27 À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD des entiers a et b .

- a) $a = 441$ et $b = 777$; b) $a = 2\,004$ et $b = 9\,185$;
c) $a = 1\,600$ et $b = 259$; d) $a = 5\,000$ et $b = 1\,515$.

28 Les entiers suivants sont-ils premiers entre eux ?

- a) $a = 4\,847$ et $b = 5\,633$; b) $a = 5\,617$ et $b = 813$.

29 PGCD par différences successives

1) Soit a et b deux entiers non nuls.

Montrer que les diviseurs communs de a et b sont aussi les diviseurs communs de b et $a - b$.

2) En déduire que $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, a - b)$.

3) Calculer le PGCD de 1 575 et 210 par cette méthode, répétée autant qu'il est besoin.

30 Des rectangles et des carrés

1) On veut découper un rectangle de 24 cm sur 40 cm en carrés dont le côté est le plus grand possible, sans perte.
Quel doit être le côté du carré ?

2) On dispose d'un grand nombre de rectangles du type précédent que l'on veut assembler bord à bord pour former un carré, le plus petit possible.
Quel doit être le côté du carré ?

31 Périodes

1) Déterminer la plus petite période strictement positive pour chacune des fonctions :

$$f: x \mapsto \cos\left(\frac{2\pi}{21}x\right) \quad \text{et} \quad g: x \mapsto \left(\frac{2\pi}{35}x\right).$$

2) En déduire la plus petite période strictement positive de $f + g$.

32 Conjonction d'astres

Si, en un point donné du ciel, un astre A apparaît tous les 28 jours et un astre B tous les 77 jours, avec quelle périodicité les verra-t-on simultanément en ce point ?

33 Une équation

Déterminer tous les entiers naturels x inférieurs à 200 et tels que $\text{PGCD}(x, 324) = 12$.

34 Avec la décomposition

Soit $a = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^4$ et $b = 2 \times 3^4 \times 5^2 \times 11$.
Exprimer $\text{PGCD}(a, b)$ et $\text{PPCM}(a, b)$ comme un produit de facteurs.

(Cet exercice anticipe – à peine – sur le chapitre suivant : décomposition en facteurs premiers.)

35 La poursuite

Sur un vélodrome, deux cyclistes partent en même temps d'un point M et roulent à vitesse constante.

Le coureur A boucle le tour de circuit en 35 secondes et le coureur B en 42 secondes.

Au bout de combien de temps le coureur A aura-t-il exactement un tour d'avance ?



36 Le réseau

Sur une feuille de papier millimétré, un réseau rectangulaire de 210 mm sur 175 mm est quadrillé tous les millimètres.

On trace la diagonale de ce rectangle.

Par combien de points du réseau, en dehors des deux extrémités, le segment diagonal passe-t-il ?

37 Avec les nombres de Mersenne

1) À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer : $\text{PGCD}(2^{12} - 1, 2^8 - 1)$, puis $\text{PGCD}(2^{14} - 1, 2^{10} - 1)$.
Peut-on émettre une conjecture ?

2) Soit m et n deux entiers vérifiant $0 < m \leq n$.
On se propose de déterminer le PGCD D de $2^n - 1$ et $2^m - 1$.
(De tels nombres sont appelés « nombres de Mersenne » lorsque n et m sont des nombres premiers : voir chapitre 12.)

a) Soit r le reste de la division euclidienne de n par m .
Montrer que $2^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $2^n - 1$ par $2^m - 1$.

b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, exprimer D en fonction de $d = \text{PGCD}(n, m)$.

c) En déduire que, lorsque m et n sont premiers entre eux, alors $2^n - 1$ et $2^m - 1$ sont aussi premiers entre eux.

Théorèmes de Bézout et de Gauss

38 Soit n un entier naturel non nul.

En utilisant l'égalité de Bézout, montrer que :

- a) n et $n + 1$ sont premiers entre eux ;
- b) $2n + 1$ et $9n + 4$ sont premiers entre eux ;
- c) $3n - 2$ et $5n - 3$ sont premiers entre eux.

39 On pose, pour n entier relatif ($n \neq 7$), $a_n = n + 7$ et $b_n = 3n - 4$.

1) Calculer $3a_n - b_n$.

En déduire que le PGCD de a_n et b_n est un diviseur de 25.

2) On pose $d_n = \text{PGCD}(a_n, b_n)$.

Montrer que $d_n = \text{PGCD}(a_n, 25)$.

3) En déduire les équivalences :

a) $d_n = 5 \Leftrightarrow n \equiv 3 \pmod{5}$; b) $d_n = 25 \Leftrightarrow n \equiv 18 \pmod{25}$.

4) En dehors des deux cas précédents, prouver que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Les exercices 40 à 42 établissent certains résultats du cours.

40 Démontrer les trois conséquences du théorème de Bézout (voir page 340) relatives aux entiers relatifs a et b :

1) Tout diviseur commun à a et b divise leur PGCD.

2) Si $au + bv = 1$ (u, v dans $\mathbb{Z}$) alors a et b sont premiers entre eux.

3) L'équation $ax + by = d$ admet des solutions si, et seulement si, d est un multiple de $\text{PGCD}(a, b)$.

41 Démontrer la première conséquence du théorème de Gauss : « Si a et b divisent un entier c , et si a et b sont étrangers, alors ab divise c . »

Piste Il existe deux entiers k et ℓ tels que $c = ka = \ell b$.
Montrer alors que b divise k .

42 Démontrer la deuxième conséquence du théorème de Gauss : « Si a est premier avec chacun des entiers $b_1, \dots, b_k$, alors a est premier avec leur produit. »

Piste Pour $k = 2$, considérer un diviseur d commun à a et $b_1 b_2$. Montrer que, nécessairement, $d = 1$. Terminer en raisonnant par récurrence.

43 Rédiger une autre démonstration du résultat de l'exercice précédent en utilisant l'égalité de Bézout.

44 Soit a et b deux entiers premiers entre eux.

1) Montrer que, pour tous m et n dans $\mathbb{N}$, a^m et b^n sont premiers entre eux.

2) Si d et d' sont des diviseurs respectifs de a et b , montrer que d et d' sont premiers entre eux.

Propriétés du PGCD et du PPCM

Les deux exercices qui suivent établissent les propriétés du PGCD et du PPCM énoncées à la page 341. On pose $D = \text{PGCD}(a, b)$ et $M = \text{PPCM}(a, b)$.

45 1) Montrer la propriété : « il existe a' et b' premiers entre eux, tels que $a = Da'$ et $b = Db'$ ». (Utiliser l'égalité de Bézout.)

2) Établir les relations « $M = Da'b' = ab' = ba'$ et $MD = ab$ » à l'aide des questions suivantes.

a) Montrer que $Da'b'$ est un multiple commun à a et b .

b) Montrer que $\frac{M}{D}$ est un entier, divisible par a' et par b' .

Conclure que M est un multiple de $Da'b'$, à l'aide d'une conséquence du théorème de Gauss.

c) Dédire de a) et b) l'égalité $M = Da'b'$.

Établir les autres égalités.

46 1) Montrer que l'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble des diviseurs de D . (Utiliser l'égalité de Bézout.)

2) Les notations sont celles de l'exercice précédent.

a) Soit m un multiple commun à a et b .

Montrer que ma' et mb' sont des multiples de M .

b) À l'aide de l'égalité de Bézout, en déduire que m est un multiple de M .

c) Prouver alors la propriété : « L'ensemble des multiples communs à a et b est l'ensemble des multiples de M . »

47 Dans chacun des cas suivants, déterminer $D = \text{PGCD}(a, b)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide, puis $M = \text{PPCM}(a, b)$.

a) $a = 576$ et $b = 480$; b) $a = 225$ et $b = 350$;

c) $a = 845$ et $b = 234$; d) $a = 935$ et $b = 561$.

48 Entiers à PGCD et PPCM connus

Le but de cet exercice est de déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels dont le PGCD est 16 et le PPCM 1 536.

1) Si (a, b) est un couple solution, montrer qu'il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux vérifiant :

$$a = 16a', b = 16b' \text{ et } a'b' = 96.$$

2) Déterminer tous les couples (a', b') convenables.

3) En déduire tous les couples (a, b) solutions du problème.

49 PGCD et PPCM de plusieurs entiers

On étend les définitions du PGCD et du PPCM à plusieurs entiers non nuls.

1) Montrer que $\text{PGCD}(a, b, c) = \text{PGCD}(a, \text{PGCD}(b, c))$.

2) Prouver une propriété analogue pour le PPCM.

Un peu, de tout

50 Multiple de 17

Il s'agit dans cet exercice de déterminer tous les entiers n tels que $2^n - 1$ est un multiple de 17.

1) Vérifier que $2^8 \equiv 1 \pmod{17}$. En déduire que si $n = 8k$ ($k \in \mathbb{N}$), $2^n - 1$ est multiple de 17.

2) Si n est un entier quelconque, on écrit la division euclidienne de n par 8 : $n = 8k + r$.

Vérifier que $2^n \equiv 2^r \pmod{17}$.

En déduire tous les entiers n cherchés.

51 Multiple de 19

Le but de cet exercice est de prouver que, pour tout entier naturel n , l'entier $N = 2^{2^{n+2}} + 3$ est un multiple de 19.

1) Vérifier cette affirmation pour $n = 0$.

2) Vérifier que $2^6 \equiv 1 \pmod{9}$.

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier naturel k tel que : $2^{6n} = 9k + 1$.

3) À l'aide de congruences, déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{18} par 19.

4) En utilisant les questions 3) et 4), prouver l'affirmation précédente pour tout n .

52 La somme et le produit

Soit a et b deux entiers premiers entre eux, u et v deux entiers tels que : $au + bv = 1$.

On pose $s = a + b$ et $p = ab$.

1) Montrer, en utilisant l'égalité de Bézout, que a et s sont premiers entre eux.

2) Calculer $(u + v - uv)s - (u - v)^2p$.

Que peut-on en déduire pour s et p ?

53 Les restes d'une progression arithmétique (Acte II)

Cet exercice poursuit l'étude (entreprise à l'exercice 25) des restes modulo p des entiers $u_n = an + b$ (a, b entiers naturels, $a \neq 0$).

On rappelle que la suite des restes est périodique de période $\tau \leq p$ et que τ est le plus petit entier non nul tel que :

$$u_0 \equiv u_\tau \pmod{p}.$$

1) a) Montrer qu'il existe deux entiers a' et p' , premiers entre eux, tels que :

$$a = da' \text{ et } p = dp', \text{ avec } d = \text{PGCD}(a, p).$$

b) En déduire que $a'\tau \equiv 0 \pmod{p'}$, puis que $\tau = p'$.

c) Exprimer la période τ en fonction de p et d .

2) Application

Déterminer la période des restes (modulo 20) des suites (u_n) :

a) $u_n = 7n + 2$; b) $u_n = 36n + 11$; c) $u_n = 15n + 1$.

Brèves de cours

54 1) Montrer, en utilisant un produit remarquable, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $6^n - 1$ est un multiple de 5.

2) En déduire que $6^n + 2\,004$ est un multiple de 5.

55 Dresser la liste des diviseurs positifs de 72, puis de 60. En déduire le PGCD de 72 et 60.

Quel est leur PPCM ?

56 L'égalité $a = 15q + 51$ correspond-elle à la division euclidienne de a par 15 ? Sinon, écrire l'égalité correspondante.

57 Déterminer le reste dans la division par 31 de chacun des entiers : 32 ; 100 ; 3 200 ; 132 ; 32^{800} ; 900 ; 900^{900} .

58 1) Vérifier que $6^8 \equiv -1 \pmod{17}$. En déduire le reste modulo 17 de 6^{16} .

2) Effectuer la division euclidienne de 500 par 16. En déduire le reste modulo 17 de 6^{500} .

59 À l'aide des congruences, déterminer le reste dans la division par 12 du nombre :

$$A = 5^{20} \times 7^{40} \times 11^{60} \times 13^{80} \times 17^{100}.$$

60 À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD : a) de 1 333 et 961 ; b) de 2 109 et 629 ; c) de 841 et 437.

61 Les entiers 1 849 et 1 591 sont-ils premiers entre eux ? (Répondre à l'aide de l'algorithme d'Euclide.)

62 Montrer que, pour tout entier n non nul, $4n + 1$ et n sont premiers entre eux. En est-il de même de $4n$ et $n + 1$?

63 Existe-t-il des couples d'entiers (x, y) solutions de chacune des équations suivantes ?

$$\text{a) } 37x + 25y = 1 ; \quad \text{b) } 51x + 39y = 1 ;$$

$$\text{c) } 51x + 39y = 2\,004.$$

64 a) Un entier n est divisible par 6 et par 35 ; est-il divisible par 210 ?

b) Un entier n est divisible par 6 et par 15 ; est-il divisible par 90 ?

65 Si deux entiers positifs ont pour PGCD 6 et pour PPCM 102, quels sont ces entiers ?

Piste Soit a et b deux entiers ; il existe a' et b' premiers entre eux, ...

66 Vrai ou faux

Si $\text{PPCM}(a, b) = ab$, alors a et b sont étrangers.

Exercices

Problèmes de divisibilité

Dans les exercices 67 à 69, démontrer l'affirmation proposée de deux manières :

- par récurrence ;
- en utilisant les congruences (voir Au cœur des problèmes, page 342).

67 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 6.

68 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

69 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $6^n - 5^{2n}$ est divisible par 19.

Dans les exercices 70 et 71, même consigne, mais une seule méthode est requise.

70 Pour tout n impair, $16^{2n+1} + 18^n$ est un multiple de 17.

71 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^{6n+1} + 3^{3n+1}$ est un multiple de 13.

Escroquerie ?

Les énoncés qui précèdent piochent dans un filon inépuisable qui sera partiellement révélé au chapitre suivant, avec le théorème de Fermat-Euler. À suivre, donc...

72 Divisibilité par 11

1) Soit x un entier qui s'écrit en base dix :

$$x = \overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0}.$$

(Les a_i sont les chiffres ; $0 \leq a_i \leq 9$ et $a_n \neq 0$.)

a) Établir que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}.$$

b) En déduire que :

$$x \equiv (a_0 + a_2 + a_4 + \dots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots) \pmod{11}.$$

c) Énoncer alors un critère de divisibilité par 11.

2) Application

Déterminer, pour chacun des entiers suivants, le reste de la division euclidienne par 11.

a) 123 456 789 ; b) 10 891 089 ;

c) $\underbrace{555 \dots 5}_{100 \text{ chiffres } 5}$; d) 147 856 103 ;

e) 975 318 642 097 531.

73 Divisibilité par 13

1) Soit n un entier naturel qui s'écrit :

$$n = 10a + b, \text{ avec } a, b \text{ dans } \mathbb{N}.$$

Prouver que n est divisible par 13 si, et seulement si, $a + 4b$ est divisible par 13.

2) Application

Sans calculatrice, déterminer les nombres divisibles par 13 parmi :

569 556 ; 8 888 ; 6 666 ; 6 567.

Piste Exemple : avec 6 666, $a = 666$ et $b = 6$, donc $a + 4b = 690$;

avec 690, $a = 69$ et $b = 0$, donc $a + 4b = 69$;

avec 69, $a = 6$ et $b = 9$, donc $a + 4b = 42$.

74 Divisibilité par 17

1) Soit n un entier naturel qui s'écrit :

$$n = 10a + b, \text{ avec } a \text{ et } b \text{ dans } \mathbb{N}.$$

Prouver que n est divisible par 17 si, et seulement si, $a - 5b$ est divisible par 17.

2) Application

Sans calculatrice, déterminer les nombres divisibles par 17 parmi :

16 831 ; 152 592 ; 16 983 ; 83 521.

75 Utilisation des critères

1) À l'aide des critères de divisibilité (voir aussi page 343), vérifier que le nombre $A = 847\,016\,495\,325$ est divisible par 3, par 5, par 7, par 11, par 13 et par 17.

2) En déduire que A est divisible par $B = 255\,255$, puis que A est divisible par B^2 .

76 Avec le symbole $\binom{n}{p}$

Soit n et p deux entiers tels que $0 < p \leq n$.

Le symbole $\binom{n}{p}$ est défini au chapitre 10 de ce livre par :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \times \dots \times (n-p+1)}{p(p-1) \times \dots \times 2 \times 1}.$$

1) Démontrer l'égalité $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$.

2) En déduire que, lorsque $0 < p \leq n$ et lorsque n et p sont premiers entre eux, alors n divise $\binom{n}{p}$.

77 Codes barres et permutation

Cet exercice reprend le codage UPC des codes barres, défini dans le problème résolu de la page 344, avec les mêmes notations.

Un code s'écrit $a_1 \dots a_{13}$ (clé comprise). On suppose que, lors de la lecture optique, deux chiffres consécutifs a_{2k-1} et a_{2k} sont permutés (cette erreur est fréquente).

1) Montrer que, pour que l'erreur ne soit pas détectée, il faut et il suffit que :

$$3a_{2k} + a_{2k-1} \equiv 3a_{2k-1} + a_{2k} \pmod{10}.$$

2) Prouver que cette condition équivaut à :

$$a_{2k-1} \equiv a_{2k} \pmod{5}.$$

3) En déduire qu'une erreur de ce type n'est pas détectée une fois sur dix.

78 La clé du R.I.B.

Le R.I.B. (relevé d'identité bancaire) comporte de gauche à droite 5 chiffres pour le code de la banque, 5 chiffres pour le code du guichet, 11 chiffres pour le numéro du compte, 2 chiffres pour la clé K , ainsi calculée : si A est le nombre à 21 chiffres, et si r est le reste de la division euclidienne de $100 \times A$ par 97, alors $K = 97 - r$.

1) Calculer la clé pour le relevé : 13009 00034 04312721543 **.

2) Décrire un procédé de calcul pratique de la clé à l'aide d'une calculatrice.

Piste Poser :

$$100A = B \times (10^7)^2 + C \times 10^8 + D \times 10^2$$

avec $0 \leq C < 10^6$ et $0 \leq D < 10^6$.

3) Montrer que, si dans le nombre complet à 23 chiffres, un et un seul des chiffres est erroné, l'erreur est détectée, et qu'il en est de même si deux chiffres consécutifs sont permutés.

79 Les numéros de cartes bancaires

Un numéro de carte bancaire est de la forme $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ où les a_i sont des entiers compris entre 0 et 9.

Sur ces chiffres, on définit l'application m :

$$m(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq 2x \leq 9 \\ x_1 + x_2 & \text{si } 2x = 10x_1 + x_2 \end{cases} \quad (\text{avec } 0 \leq x_i \leq 9).$$

On impose alors à un numéro de carte de vérifier la règle de Luhn :

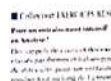
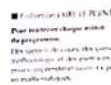
$$a_0 + m(a_1) + a_2 + m(a_3) + \dots \equiv 0 \pmod{10}.$$

1) Fabriquer un numéro de carte bancaire à 16 chiffres.

2) Montrer que si un seul chiffre est erroné, l'erreur est détectée.

Piste L'application m est une bijection de $\{0, 1, \dots, 9\}$ dans lui-même. Vérifier et utiliser.

80 Clés des numéros I.S.B.N.



L'International Book Number Standard permet de coder tous les ouvrages édités dans le monde entier. Il utilise des mots de longueur 10 écrits à l'aide de chiffres 0, 1, ..., 9 et du symbole X qui représente le nombre 10 (qui ne peut être utilisé au besoin, que pour la clé). Le premier chiffre désigne le pays, un autre bloc de chiffres désigne l'éditeur. Le suivant est le numéro donné

par l'éditeur, le dernier symbole est la clé K , ainsi calculée : si $a_1 a_2 \dots a_{10}$ est le numéro I.S.B.N. complet, le nombre

$$\sum_{i=1}^{10} i a_{11-i} \text{ doit être divisible par 11.}$$

1) Vérifier la règle précédente pour l'ouvrage ci-dessus.

2) Calculer la clé des numéros suivants :

3 371 08452 . , 0 16852 059 . , 2 59602 369 . .

3) Montrer que, si un et un seul chiffre est erroné, l'erreur est détectée.

4) Montrer que, si deux chiffres consécutifs sont permutés, l'erreur est détectée.

5) Trouver toutes les valeurs de a et b telles que 2 84225 0 ab soit un code I.S.B.N. valide.

81 Le code correcteur de Hamming

Considérons, par exemple, les nombres de 10 chiffres (numéros de téléphone) décimaux $a_1 a_2 \dots a_{10}$. On rajoute une clé de deux chiffres $a_{11} a_{12}$, où a_{11} et a_{12} sont l'un des symboles 1, 2, ..., 9, X (X représentant la valeur 10), ainsi définis :

– a_{11} est le reste de la division de $\sum_{i=1}^{10} a_i$ par 11 ;

– a_{12} est le reste de la division de $\sum_{i=1}^{10} i \cdot a_i$ par 11.

1) Calculer la clé pour chacun des numéros : 0380451956 et 0380395230.

2) On suppose que, lors de la communication, une erreur est commise sur un et un seul des numéros a_i . Quelle incidence cette erreur a-t-elle sur les clés ? (Distinguer les cas $1 \leq i \leq 10$, $i = 11$, $i = 12$.) Montrer alors qu'on peut corriger l'erreur. Comment ?

3) Détecter et corriger l'erreur dans les numéros suivants : 03 80 55 21 17 X5, 04 67 33 64 20 57 et 03 80 36 48 31 21.

Problèmes de rationalité

Rappel : un nombre rationnel peut se mettre sous forme irréductible $\frac{a}{b}$, avec a et b premiers entre eux (ou $a = 0$). Si un nombre non nul ne peut pas se mettre sous cette forme, alors il est irrationnel.

82 Le cas de $a + b\sqrt{2}$

On pose, pour a et b entiers non nuls, $\alpha = a + b\sqrt{2}$.
Montrer que α est irrationnel.

Piste Nous avons prouvé que $\sqrt{2}$ est irrationnel dans Au cœur des problèmes, page 345.

83 Le cas d'une racine n -ième

- 1) Montrer que $\sqrt[3]{2}$ est irrationnel.
- 2) Soit n un entier ($n \geq 2$), et α un entier naturel. Montrer que toute racine rationnelle du polynôme $x^n - \alpha$ est nécessairement entière.
- 3) En déduire que le nombre $\sqrt[n]{\alpha}$ est irrationnel, sauf si α est la puissance n -ième d'un entier.

84 Le cas d'un polynôme à coefficients entiers

Soit x une racine rationnelle du polynôme :
 $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, où $n \geq 1$, et $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sont des entiers.

- 1) Montrer que x est entier.
- 2) Énoncer un résultat concernant les racines du polynôme :

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0.$$

85 Quelques applications

- 1) On pose $\alpha = 2\sqrt{5} + \sqrt{7}$.
a) Calculer α^2 , puis $(\alpha^2 - 27)^2$.
En déduire que α est racine d'un polynôme du quatrième degré à coefficients entiers, dont le coefficient de x^4 est égal à 1.
b) En utilisant le résultat de l'exercice précédent, montrer que α est irrationnel.
- 2) Montrer de même que $\beta = \sqrt{20} - 2\sqrt{19}$ et $\gamma = 3\sqrt{10} + 5\sqrt{11}$ sont irrationnels.

86 Le cas de $\cos \frac{\pi}{9}$

- 1) Pour tout réel x , établir l'égalité :

$$\cos(3x) = 4\cos^3x - 3\cos x.$$

- 2) En déduire que le réel $\alpha = \cos \frac{\pi}{9}$ est irrationnel.

L'équation $ax + by = D$

Dans les exercices 87 à 90, résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation proposée en utilisant les méthodes dégagés dans Au cœur des problèmes, page 346.

(Pour la recherche d'une solution particulière, on n'oubliera pas de remarquer, dans certains cas, une solution évidente, avant de s'engager dans l'algorithme d'Euclide.)

87 a) $5x - 3y = 1$; b) $2x + 7y = 3$.

88 a) $26x + 65y = 13$; b) $60x - 21y = 6$.

89 a) $50x + 9y = 1$; b) $18x + 25y = 2$.

90 a) $34x - 213y = 1$; b) $144x + 625y = 3$.

91 1) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que :
 $8x \equiv 7 \pmod{5}$.

2) Résoudre l'équation :
 $336x + 210y = 294$, $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

D'APRÈS BAC

92 On considère l'équation (E) : $18x + 15y = 2\,004$.

- 1) Déterminer une solution particulière de (E).
- 2) Résoudre (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- 3) Déterminer tous les couples d'entiers naturels solutions de (E).

93 Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne le point $A(12; 18)$.

On désigne par B un point de l'axe $(O, \vec{i})$ et par C un point de l'axe $(O, \vec{j})$ tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$.

On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C .

- 1) Démontrer que le couple (x, y) est solution de l'équation (E) :

$$2x + 3y = 78.$$

- 2) On se propose de trouver tous les couples (B, C) de points ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

a) Montrer que l'on est ramené à l'équation (E), avec x et y appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs.

b) À partir de la définition de B et C , trouver une solution particulière (x_0, y_0) de (E), avec x_0 et y_0 appartenant à $\mathbb{Z}$.

c) Démontrer qu'un couple (x, y) d'entiers relatifs est solution de l'équation (E) si, et seulement si, il est de la forme $(12 + 3k; 18 - 2k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

d) Combien y a-t-il de couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que :

$$-6 \leq x \leq 21 \text{ et } -5 \leq y \leq 14 ?$$

BAC

94 D'après bac 1999

1) On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où (x, y) est un couple de nombres entiers relatifs.

a) Donner une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2) Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple (a, b) de nombres entiers vérifiant :

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$

a) Montrer que le couple $(a, -b)$ est solution de (E).

b) Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3) a) Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où (x, y) est un couple de nombres entiers relatifs.

b) Au VIII^e siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune.

Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

95 Système de congruences

On se propose de déterminer les entiers relatifs x vérifiant le système :

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{11} \\ x \equiv 4 \pmod{15} \end{cases} \quad (1).$$

1) Montrer que la résolution de (1) se ramène à celle de l'équation :

$$11u + 15v = 1, u, v \text{ dans } \mathbb{Z} \quad (2).$$

2) Résoudre (2) ; en déduire les solutions de (1).

Le théorème chinois

La résolution d'un système de congruences :

$$\begin{cases} x \equiv x_0 \pmod{p} \\ x \equiv x_1 \pmod{q} \end{cases}$$

est lié, à l'origine, à des problèmes d'Astronomie du type :
« Si tel astre, de période d'apparition p , est apparu il y a x_0 jours, et tel autre, de période q , est apparu il y a x_1 jours, quels jours ces deux astres seront-ils en conjonction dans le ciel ? »

Les astronomes chinois avaient résolu ce problème, dont on sait qu'il a toujours des solutions si p et q sont premiers entre eux.

Les exercices suivants présentent des chiffrements classiques élémentaires à clé secrète.

Les systèmes modernes utilisent des clés publiques, dont le principe sera exposé au chapitre suivant.

96 Un chiffrement affine

On assimile les 26 lettres de l'alphabet français : A, B, ..., Z aux nombres 0, 1, ..., 25.

On code alors un nombre x ainsi : le nombre codé $f(x)$ est le reste de la division euclidienne de $41x + 37$ par 26.

En d'autres termes : $f(x) \equiv 41x + 37 \pmod{26}$.

1) Coder le mot « ROIS ».

2) Déterminer un entier n tel que $41n \equiv 1 \pmod{26}$.

3) Décoder alors le mot « ITOT », en expliquant soigneusement la méthode utilisée.

97 Un autre chiffrement affine

Dans cet exercice, la fonction de chiffrement est :

$$f: x \mapsto 17x + 40 \pmod{26}.$$

1) Chiffrer le mot « NUAGE ».

2) Déterminer une fonction de déchiffrement g , de $\{0, 1, \dots, 25\}$ dans lui-même, telle que :

$$f(x) \equiv y \pmod{26} \Leftrightarrow x \equiv g(y) \pmod{26}.$$

3) Déchiffrer alors le mot « SQROMOB ».

98 Le chiffrement de Lester Hill (1929)

Dans ce chiffrement, la fonction de codage agit sur des couples de nombres choisis dans $\{0, 1, \dots, 25\}$:

$$f: (x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2).$$

Posons, par exemple :

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 11x_2 \pmod{26} \\ y_2 = 8x_1 + 3x_2 \pmod{26} \end{cases} \quad (1).$$

Ainsi le mot « KL » correspondant au couple $(10, 11) = (x_1, x_2)$ est codé par $(y_1, y_2) = (15, 9)$, soit « PJ ».

1) Coder le mot « REQUIN » en détachant les trois blocs de deux lettres.

2) Décodage :

a) Montrer que, si x_1, x_2, y_1 et y_2 vérifient (1), alors :

$$\begin{cases} -3y_1 + 11y_2 = 73x_1 \pmod{26} \\ 8y_1 - 5y_2 = 73x_2 \pmod{26} \end{cases}$$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :

$$73x + 26y = 1, \text{ avec } 0 \leq x \leq 25.$$

c) Décoder alors le mot « KQJLRHTN ».

Rubrique à Bac

Contenu des sujets

La plupart des sujets de baccalauréat gravitent autour de deux notions :

- la divisibilité, le PGCD et le PPCM ;
- l'équation diophantienne $ax + by = D$.

Nous en proposons un florilège.

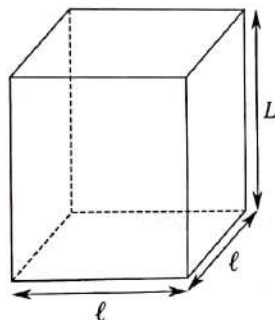
Remarque : à partir de la session 2003, il faut s'attendre à des sujets faisant appel aux congruences qui ont pris une importance nouvelle dans les programmes applicables en septembre 2002.

Divisibilité, PGCD, PPCM

99 D'après BAC S, Antilles-Guyane, juin 2001.

1) Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L , à base carrée de côté ℓ , où ℓ et L sont des entiers naturels non nuls tels que $\ell < L$.

On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).



a) Dans cette question, $\ell = 882$ et $L = 945$.

Quelle est la plus grande valeur possible pour a ?

Quelles sont les valeurs possibles pour a ?

b) Dans cette question, le volume de la boîte B est $v = 77\,760$.

On sait que, pour remplir la boîte B , la plus grande valeur possible de a est 12.

Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions.

2) On veut remplir une caisse cubique C , dont l'arête c est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question 1) (les boîtes B , empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide).

a) Dans cette question, $\ell = 882$ et $L = 945$.

Quelle est la plus petite arête c pour la caisse C ?

Quel est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête c ?

b) Dans cette question, le volume de la boîte B est 15 435.

On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105.

Quelles sont les dimensions ℓ et L ?

100 D'après BAC S, Nouvelle-Calédonie, mars 2001.

Dans tout l'exercice, x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$.

S est l'ensemble des couples (x, y) tels que $\text{PGCD}(x, y) = y - x$.

1) a) Calculer $\text{PGCD}(363, 484)$.

b) Le couple $(363, 484)$ appartient-il à S ?

2) Soit n un entier naturel non nul ; le couple $(n, n + 1)$ appartient-il à S ? Justifier votre réponse.

3) a) Montrer que (x, y) appartient à S si, et seulement si, il existe un entier naturel k non nul tel que :

$$x = k(y - x) \quad \text{et} \quad y = (k + 1)(y - x).$$

b) En déduire que, pour tout couple (x, y) de S , on a :

$$\text{PPCM}(x, y) = k(k + 1)(y - x).$$

4) a) Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b) En déduire l'ensemble des couples (x, y) de S tels que :

$$\text{PPCM}(x, y) = 228.$$

Équation $ax + by = D$

101 D'après BAC S, groupe 1, juin 2001.

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A , qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B , dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition *simultanée* des deux objets aux yeux de l'astronome.

Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1 .

1) Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1 . Montrer que le couple (u, v) est solution de l'équation (E_1) : $35x - 27y = 2$.

2) a) Déterminer un couple d'entiers relatifs (x_0, y_0) solution particulière de l'équation (E_2) : $35x - 27y = 1$.

b) En déduire une solution particulière (u_0, v_0) de (E_1) .

c) Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1) .

d) Déterminer la solution (u, v) permettant de déterminer J_1 .

3) a) Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

b) Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999 ; quelle est la date exacte du jour J_1 ? (L'année 2000 était bissextile.)

c) Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

102 D'après BAC S, Amérique du Nord, juin 2001.

1) Montrer que, pour tout entier relatif n , les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

2) On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Vérifier, en utilisant par exemple la question 1), que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$ puis une solution (x_0, y_0) de (E).

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

c) Application : déterminer les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.

☞ On remarquera que le point M de coordonnées (x, y) appartient à la droite (D) si, et seulement si, le couple $(x, -y)$ vérifie l'équation (E).

Le sujet qui suit mélange les deux notions : résolution de l'équation $ax + by = D$ et recherche de PGCD...

103 D'après BAC S, Pondichéry, juin 2001.

1) On considère l'équation (1) d'inconnue (n, m) élément de $\mathbb{Z}^2$:

$$11n - 24m = 1 \quad (1).$$

a) Montrer, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).

c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2) Recherche du PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$

a) Montrer que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

☞ Là, on peut utiliser les congruences... modulo 9.

b) (n, m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire :

$$(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9.$$

c) Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$.

(On rappelle l'égalité :

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^0),$$

valable pour tout entier naturel n non nul). Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

$$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9.$$

d) Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.

e) Déduire des questions précédentes le PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

☞ Utiliser à la fois les questions a) et d), et les propriétés du PGCD.

Utilisation possible des congruences

104 D'après BAC S, sujet national, juin 2001.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère le point $M_n(\cos \alpha_n, \sin \alpha_n)$ avec $\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}$.

1) Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p ; montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si, et seulement si, $(n - p)$ est multiple de 12.

2) a) On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(4, 9)$ est solution, résoudre l'équation (E).

b) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$.

105 D'après BAC S, Pondichéry, juin 2000.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1) a) Pour $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.

b) Démontrer que, pour tout n , $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7. En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.

Halte : c'est là que l'on peut utiliser à bon escient les congruences.

c) À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.

d) De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?

☞ La division euclidienne de 1 000 par 6 (question c)) ou de n par 6 (question d)).

e) En déduire que, pour tout entier naturel n , 3^n est premier avec 7.

$$2) \text{ Soit } U_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i,$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Montrer que, si U_n est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7.

b) Réciproquement, montrer que, si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors U_n est divisible par 7.

En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.

☞ Pour la réciproque, le théorème de Gauss...

Problèmes

106 Écriture en base b

A) Le résultat fondamental

Soit b un entier naturel ($b \geq 2$) fixé et x un entier naturel non nul.

1) On considère la suite des divisions euclidiennes :

$$\begin{aligned} & \text{de } x \text{ par } b && : x = bq_0 + x_0 ; \\ (\text{si } q_0 \neq 0) & \text{de } q_0 \text{ par } b && : q_0 = bq_1 + x_1 ; \\ & \vdots && \\ (\text{si } q_{n-1} \neq 0) & \text{de } q_{n-1} \text{ par } b && : q_{n-1} = bq_n + x_n ; \text{ etc.} \end{aligned}$$

a) Montrer que la suite (q_n) ainsi définie est strictement décroissante.

b) En déduire que l'algorithme finit par s'arrêter, en donnant un quotient $q_n = 0$.

c) Si n est le plus petit entier tel que $q_n = 0$, montrer que :

$$x = x_n b^n + x_{n-1} b^{n-1} + \dots + x_1 b + x_0 \quad (1),$$

avec pour tout i : $0 \leq x_i \leq b-1$ et $x_n \neq 0$.

d) Réciproquement, si (1) est réalisée, montrer que les x_i sont calculés à l'aide de l'algorithme de départ.

Remarque : on dit que (1) est l'écriture de x en base b . Pratiquement, on exprime chacun des nombres $0, 1, \dots, b-1$ par un unique symbole de la liste :

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots\}.$$

B) Applications

1) Écrire en base deux les entiers compris entre un et vingt.

2) Écrire le nombre « deux mille quatre » en base dix (!), en base deux, en base cinq, et en base douze.

3) Un nombre s'écrit $x = \overline{4\,444}^5$ (quatre chiffres 4 en base cinq).

Donner l'écriture de x en base dix.

4) Donner l'écriture en base dix des nombres :

$$\begin{aligned} a &= \overline{210\,210}^3 ; & b &= \overline{10\,642}^7 ; \\ c &= \overline{111\,111\,111}^2 ; & d &= \overline{10\alpha\,0\beta}^{12} . \end{aligned}$$

107 Triplets pythagoriciens

On appelle triplet pythagoricien tout triplet (x, y, z) d'entiers strictement positifs vérifiant l'équation diophantienne :

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (1).$$

1) Des exemples

a) Déterminer « expérimentalement » tous les triplets pythagoriciens vérifiant $x \leq y$ et $z \leq 13$.

b) Vérifier que le triplet $(2\,004, 27\,853, 27\,925)$ est pythagoricien.

2) Deux « représentations » géométriques

a) Si (x, y, z) vérifie (1), que dire du triangle de côtés x, y et z ?

b) Montrer qu'à chaque triplet pythagoricien, on peut associer un point à coordonnées rationnelles du cercle trigonométrique par l'application :

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right).$$

Quels sont les triplets associés au même point ?

3) Avec multiples et diviseurs

Soit (x, y, z) un triplet pythagoricien. Montrer que :

a) pour tout entier k , le triplet (kx, ky, kz) l'est aussi ;

b) pour tout diviseur d commun à x, y et z , le triplet $\left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d} \right)$ l'est aussi.

Dans la suite, on se limite à étudier les triplets pythagoriciens (x, y, z) n'ayant aucun diviseur commun positif autre que 1. De tels triplets sont appelés primitifs. La suite propose de déterminer tous ces triplets.

4) Soit (x, y, z) un triplet pythagoricien primitif. Établir que :

a) les trois couples (x, y) , (x, z) et (y, z) sont étrangers ;

b) x, y et z ne sont pas tous impairs ;

c) un seul des trois entiers est pair ;

d) l'un des entiers x et y est pair et l'autre impair. On suppose dans la suite que x est pair et que y et z sont impairs.

5) a) Montrer que l'équation (1) est équivalente à :

$$\left(\frac{x}{z} \right)^2 = \left(\frac{z+y}{2} \right) \left(\frac{z-y}{2} \right),$$

avec $\frac{x}{z}, \frac{z+y}{2}, \frac{z-y}{2}$ entiers, $\frac{z+y}{2}$ et $\frac{z-y}{2}$ étrangers.

b) En déduire qu'il existe deux entiers u et v tels que :

$$u^2 = \frac{z+y}{2}, \quad v^2 = \frac{z-y}{2} \quad \text{et} \quad 0 < v < u.$$

Exprimer x, y et z en fonction de u et v .

6) Réciproquement, soit u et v deux entiers tels que $0 < v < u$, et $d \geq 1$.

On pose $x = 2duv$, $y = d(u^2 - v^2)$, $z = d(u^2 + v^2)$.

a) Vérifier que (x, y, z) vérifie (1).

En déduire la forme générale de tous les triplets pythagoriciens.

b) Montrer que, si $d = 1$ et si u et v sont premiers entre eux et de parité différente, le triplet obtenu est primitif.

7) Déterminer tous les triplets primitifs correspondant à :

$$0 < v < u \leq 7.$$

108 Carrés, puissances dans une progression arithmétique

Les parties A et B sont indépendantes.

A) Des carrés

1) Dans chacun des cas suivants, montrer que la suite (u_n) contient une infinité de carrés :

- a) $u_n = an + 1$ ($a \in \mathbb{N}^*$, a quelconque) ;
- b) $u_n = 5n + 4$;
- c) $u_n = 13n + 3$.

Piste Pour a), développer $(ak + 1)^2$ pour k quelconque...

2) Démontrer le résultat général : « La suite de terme général $an + b$ contient une infinité de carrés parfaits si, et seulement si, il existe un entier x tel que $b \equiv x^2 \pmod{a}$ ».

B) Des puissances

Soit Q l'entier : $Q = 2^{770} \times 3^{924} \times 4^{1980} \times 5^{2100}$.

1) Déterminer le PGCD des entiers :

- a) 770, 924, 1 980 et 2 100 ;
- b) 771, 924, 1 980 et 2 100 ;
- c) 770, 925, 1 980 et 2 100 ;
- d) 770, 924, 1 981 et 2 100 ;
- e) 770, 924, 1 980 et 2 101.

(Étendre à plusieurs entiers la définition du PGCD.)

2) En déduire que les cinq termes de la progression arithmétique : $Q, 2Q, 3Q, 4Q, 5Q$ sont tous des puissances d'entiers.

109 Rationnels et écriture décimale

Dans ce problème, x est un nombre rationnel strictement positif, écrit sous la forme irréductible $x = \frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers premiers entre eux ($a \geq 1, b \geq 1$).

A) L'algorithme de la division ordinaire

On définit les deux suites d'entiers (x_i) et (r_i) par les divisions euclidiennes suivantes :

$$\begin{cases} a = bx_0 + r_0 & (\text{de } a \text{ par } b) \\ 10r_0 = bx_1 + r_1 & (\text{de } 10r_0 \text{ par } b) \\ 10r_1 = bx_2 + r_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 10r_i = bx_{i+1} + r_{i+1} & (\text{de } 10r_i \text{ par } b) \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

1) Calculer x_i et r_i pour $0 \leq i \leq 10$ avec les rationnels suivants $\frac{7}{16}, \frac{3}{125}$ et $\frac{2}{7}$.

Vérifier sur ces exemples que les nombres $x_1, \dots, x_i$ sont les décimales obtenues dans la division ordinaire de a par b , et que $r_0, r_1, \dots, r_p, \dots$ sont les restes partiels.

2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$:

$$x = x_0 + \frac{x_1}{10} + \dots + \frac{x_n}{10^n} + \frac{r_n}{10^n b}.$$

b) En déduire que r_n est aussi le reste de la division euclidienne de $10^n a$ par b .

c) On suppose que x est un nombre décimal, c'est-à-dire que l'écriture de x en base 10 est finie :

$$x = \overline{x_0 x_1 \dots x_n} \quad (x_0 \in \mathbb{N} \text{ et, si } i \geq 1 : 0 \leq x_i \leq 9).$$

Montrer alors que b divise 10^n .

d) Réciproquement, on suppose que b divise 10^n ; montrer alors que x est décimal.

B) Rationnels non décimaux

Soit $x = \frac{a}{b}$ un rationnel non décimal.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, r_n \neq 0$.

En déduire que les nombres r_n ne peuvent prendre que $b-1$ valeurs au plus.

2) a) En déduire qu'il existe deux entiers p et q ($p \geq 1$ et $q \geq 0$) tels que $r_q = r_{q+p}$, et que, si p et q sont les deux plus petits entiers vérifiant cette propriété, alors la suite (r_n) est périodique de période p à partir du rang q .

b) Prouver alors que (x_n) est périodique de même période p à partir du rang $q+1$.

3) a) Montrer que les entiers p et q définis dans la question précédente sont les deux plus petits entiers vérifiant $p \geq 1, q \geq 0$ et :

$$10^q \equiv 10^{q+p} \pmod{b}.$$

b) Lorsque b est premier avec 10, montrer que la condition précédente peut s'écrire :

$$10^p \equiv 1 \pmod{b}.$$

En déduire que, dans ce cas, la périodicité commence à la première décimale.

c) L'entier q et la longueur p de la période dépendent-ils de a ?

4) Applications

Déterminer la période p pour les rationnels suivants :

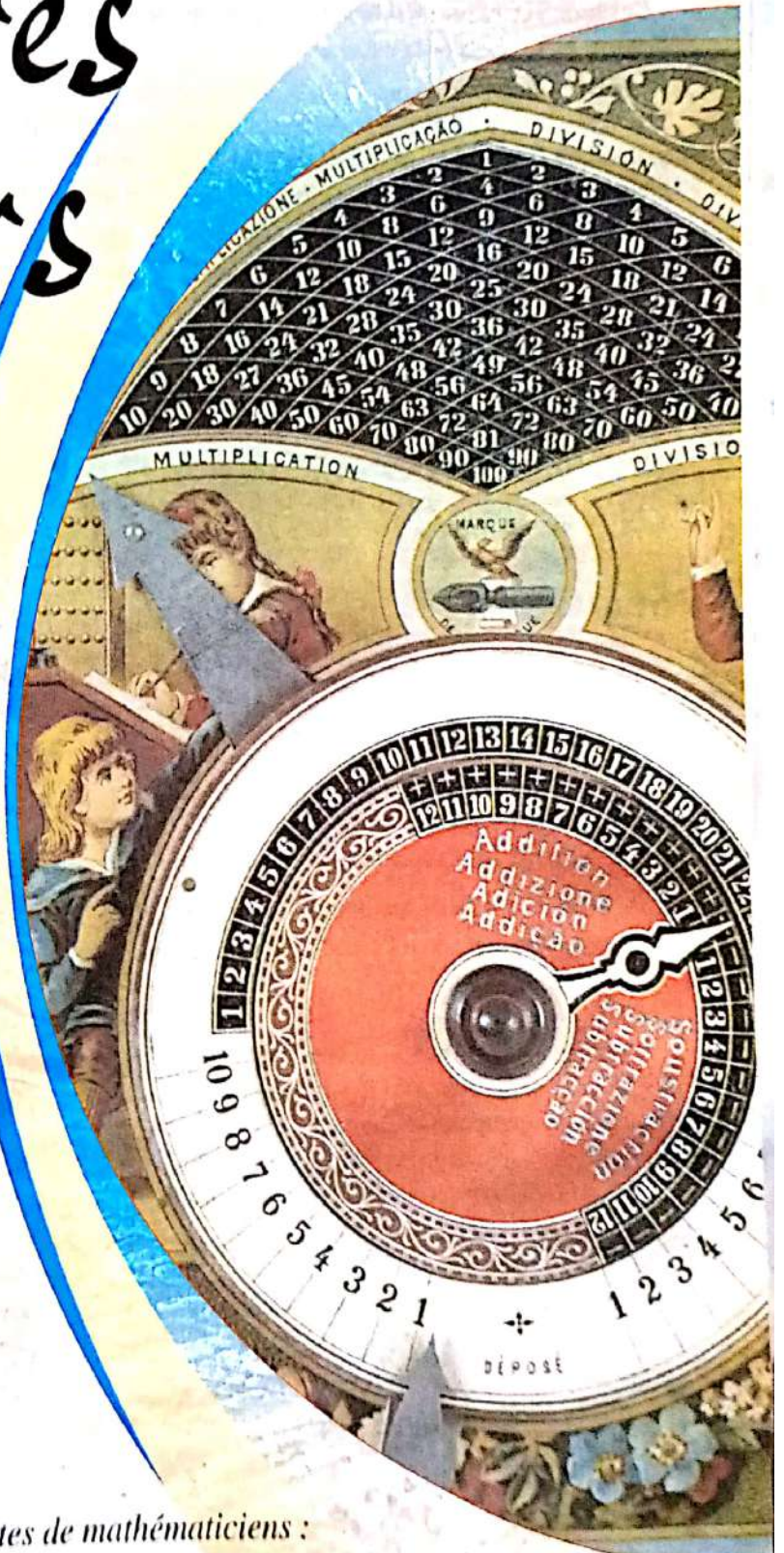
$$\frac{3}{7}, \frac{5}{12}, \frac{25}{112}, \frac{11}{52}, \frac{1}{189}, \frac{3}{224}.$$

→ Nombres premiers

OBJECTIFS

- Introduire la notion de nombres premiers et mettre en place le théorème fondamental de l'Arithmétique.
- Exploiter quelques résultats consistants sur les congruences modulo p (p premier) dans les problèmes de divisibilité, factorisation, Cryptologie... et de recherche de nombres premiers.

« Il y a trois sortes de mathématiciens :
 – ceux qui savent compter,
 – et ceux qui ne le savent pas. »



Avant-première

1. OBJECTIFS

« En observant les nombres premiers, on éprouve le sentiment d'être en présence d'un des plus inextricables secrets de la création. »

Cette citation de Don Zagier, éminent spécialiste de la Théorie des Nombres, tend à souligner le contraste entre la simplicité de la définition d'un nombre premier : « **entier naturel plus grand que 1 dont les seuls diviseurs sont 1 et lui-même** » et la difficulté d'appréhender ces entiers, véritables « briques » élémentaires de l'Arithmétique comme le montre le théorème fondamental de l'Arithmétique (théorème 2, page 371).

Nous proposons une simple visite de reconnaissance avec l'idée de commencer à ancrer quelques modes de **raisonnement** qui ont fait leurs preuves en Arithmétique (et dont nous ferons notre bon pain par la suite).

2. UNE RENCONTRE INSOLITE

Tout de suite, au cœur du sujet.

Séquence 1 La parabole de Matiassevitch

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$.

Étant donné m et n entiers ($m \geq 2$ et $n \geq 2$), on trace les deux droites joignant les deux points de $\mathcal{P}$:

- d'une part, d'abscisses m et $-n$;
- d'autre part, d'abscisses $-m$ et n .

1) Prouver que ces deux droites se coupent sur l'axe (Oy) en un point dont l'ordonnée est un entier naturel que l'on calculera.

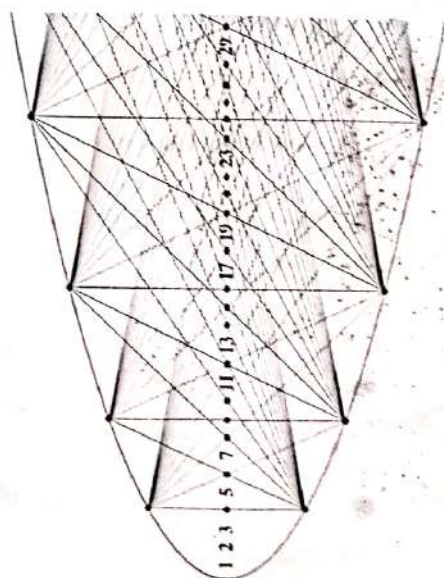
2) On marque d'un point noir les points ainsi obtenus, m et n décrivant tous les entiers supérieurs ou égaux à 2.

Montrer que les ordonnées des points non marqués sont tous les nombres premiers supérieurs ou égaux à 4.

3) Comment utiliser le graphique obtenu comme table de multiplication ?

Les points « noircis » sont les points d'ordonnées $m \times n$ avec $m \geq 2$ et $n \geq 2$: de tels nombres seront appelés **composés** *a contrario* des nombres premiers : ils admettent en effet des diviseurs **propres** (un diviseur propre d'un entier n est un diviseur de n différent de 1 et de n).

L'idée : « éliminer les composés, il restera les nombres premiers » fonde la notion de **crible** dans la recherche des nombres premiers (voir *Le crible d'Ératosthène*, page 369).



3. LES BONS APPUIS

• Deux propriétés fondamentales de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels sont en toile de fond de ce chapitre : il ne nous paraît pas inutile de les rappeler :

- (1) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
- (2) Toute partie majorée de $\mathbb{N}$ est finie (et réciproquement).

(Rappel : une partie A de $\mathbb{N}$ est dite majorée, s'il existe un nombre M (non nécessairement entier) tel que, pour tout a de A , on ait $a \leq M$.)

La séquence qui suit présente un premier exemple d'utilisation de ces propriétés dans le cadre des nombres premiers (que nous reprendrons dans le cours).

Séquence 2

Toujours un diviseur premier

- ① Soit $n \geq 2$ et $D(n)$ l'ensemble des diviseurs d de n tels que $2 \leq d \leq n$.

Montrer que $D(n)$ admet un plus petit élément p , puis que p est premier.

Note : ainsi, tout entier naturel $n \geq 2$ admet un diviseur premier.

- ② Soit n un entier ($n \geq 2$). On pose :
 $N = n! + 1$ ($n!$: factorielle n).

1) Soit p un nombre premier divisant N .
Montrer que $p > n$.

2) Que peut-on en conclure sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers ?

• Peut-être, la dernière question de la séquence 2 en a laissé quelques-uns sur le bord du chemin, faute de critères « d'infinitude ». Réparons cet oubli.

Une partie A de $\mathbb{N}$ (non vide) est infinie dès lors qu'elle vérifie l'une des propriétés suivantes :

- (1) pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe p dans A tel que $p > n$;
- (2) pour tout q de A , il existe p dans A tel que $p > q$;
- (3) $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ et, pour m et n quelconques distincts, on a $a_m \neq a_n$.

La séquence 3 légitime ces critères et propose quelques applications.

Séquence 3

Les nombres de Fermat

- ① Montrer que chacune des propriétés (1), (2) ou (3) implique que A n'est pas finie.

Piste Pour (3) supposer A contenu dans $[0, k]$ (k entier) et considérer $a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}$.

② Les nombres de Fermat

Pour $n \geq 0$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$.

Les nombres F_n sont les nombres de Fermat.

1) Tester à la calculatrice si F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4 sont premiers.

2) Fermat pensait que tous les nombres F_n étaient premiers. Il fut désavoué par Euler qui montra que F_5 est divisible par 641.

Vérifier à l'aide de la calculatrice.

3) Montrer que, pour $k \geq 0$:

$$F_{n+k} - 1 = (F_n - 1)^{2^k}.$$

En déduire que $F_{n+k} \equiv 2 \pmod{F_n}$.

4) Montrer alors que, pour $m \neq n$, F_m et F_n sont premiers entre eux.

5) Soit p_n le plus petit diviseur premier de F_n et A l'ensemble :

$$A = \{p_0, p_1, \dots, p_n, \dots\}.$$

Montrer que, pour $m \neq n$, on a $p_m \neq p_n$.

Retrouver, ainsi, que l'ensemble des nombres premiers est infini.

1. Généralités sur les nombres premiers

1.1 DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

DÉFINITION 1

Un nombre premier est un entier naturel supérieur ou égal à 2 qui n'admet comme diviseurs dans $\mathbb{N}$ que 1 et lui-même.

Le plus petit nombre premier est 2 (1 n'est pas premier) ; c'est à l'évidence le seul nombre premier pair. Les suivants (dans l'ordre croissant) sont : 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ...
Un entier naturel n ($n \geq 2$) non premier est dit **composé** : c'est un nombre qui admet un diviseur d tel que $2 \leq d < n$.

Proposition 1

Tout entier naturel n ($n \geq 2$) admet un diviseur premier.

Si n est composé, il admet un diviseur premier p tel que $2 \leq p \leq \sqrt{n}$.

... Démonstration

- Comme n divise n , si n est premier, il n'y a rien à dire.
- Si n est composé, l'ensemble des diviseurs d de n tels que $2 \leq d < n$ n'est pas vide : il admet donc un plus petit élément p ($p \geq 2$) **nécessairement premier**.
En effet, si p était composé, il admettrait un diviseur d tel que $2 \leq d < p$; tout diviseur de n étant un diviseur de p , p ne serait plus le plus petit diviseur de n supérieur ou égal à 2.
L'entier n s'écrit $n = p \times q$ avec $2 \leq p \leq q$, par définition de p .
On en déduit :

$$p^2 \leq pq = n, \text{ soit } p \leq \sqrt{n}.$$

En résumé, p est premier et $2 \leq p \leq \sqrt{n}$.

1.2 L'INFINITÉ DES NOMBRES PREMIERS

THÉORÈME 1

Il existe une infinité de nombres premiers.

... Nouvelle démonstration

Supposons l'ensemble des nombres premiers finis ; notons q le plus grand d'entre eux et $N = 2 \times 3 \times 5 \times \dots \times q + 1$, où $2 \times 3 \times 5 \times \dots \times q$ désigne le produit de tous les nombres premiers entre 2 et q .

Il existe p premier divisant N (proposition 1) : p ne peut être ni 2, ni 3, ..., ni q , sinon p diviserait $2 \times 3 \times \dots \times q$ et, divisant N , il diviserait leur différence $N - 2 \times 3 \times \dots \times q = 1$, ce qui est absurde.

Donc p est un nombre premier plus grand que q : contradiction avec l'hypothèse faite sur q .

Note : ce raisonnement **par l'absurde** est une réplique de celui attribué à Euclide.

1.3 LE CRIBLE D'ÉRATOSTHÈNE

Exemple

Pour dresser la liste des nombres premiers entre 2 et 100, la méthode du crible d'Ératosthène consiste à :

- écrire la liste des entiers inférieurs ou égaux à 100 ;
- éliminer successivement les multiples propres⁽¹⁾ de 2, ceux de 3... puis ceux de p , où p est le premier nombre non encore éliminé, etc.

Les entiers éliminés (sur fond bleu dans le *tableau* ci-après) sont les entiers composés entre 2 et 100. Les entiers restants (sur fond jaune) sont donc les **premiers** inférieurs à 100.

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

◊ ÉRATOSTHÈNE ◊

Remarques sur le crible

① Pour éliminer les multiples propres de 7, par exemple, commencer à $7^2 = 49$: il est sûr que les précédents (2×7 , 3×7 , 4×7 , 5×7 , 6×7) ont déjà été éliminés. Ceci est général.

② Il est possible de savoir à l'avance « jusqu'où aller ».

En effet, d'après la *proposition* 1, tout entier composé n admet un diviseur premier p tel que $2 \leq p \leq \sqrt{n}$.

Si $n \leq 100$, alors $\sqrt{n} \leq 10$, et donc tout entier composé sera éliminé en tant que multiple propre de 2 ou 3 ou 5 ou 7.

Commentaires

• Mathématicien et astronome, contemporain d'Archimède (III^e siècle av. J.-C.), Ératosthène fut conservateur de la Grande Bibliothèque d'Alexandrie. Si on lui doit la première mesure scientifique sérieuse du rayon terrestre, il ne demeure que quelques fragments de ses ouvrages.

• Quant au crible auquel son nom est associé, il nous est connu par un texte de Nicomaque de Gérace (qui vécut 300 ans après lui) et à qui, semble-t-il, nous sommes redevables du mot *crible* : « les nombres premiers se trouvent ainsi séparés du reste comme dans un crible ».

• Dévoreur d'espace-mémoire appliqué tel quel (stockage oblige), le crible d'Ératosthène reste cependant « raisonnable » pour des nombres de taille... « raisonnable ».

(1) Multiple propre de n : multiple de n distinct de n .

2. Divisibilité et nombres premiers

Les résultats qui suivent ne sont que des reformulations du théorème de Gauss et de ses conséquences (chapitre 11, page 341) dans le cas particulier des nombres premiers. Les démonstrations étant évidentes, elles sont laissées pour la plupart à l'entraînement du lecteur (exercices 7 à 9, page 383) qui, de plus, est prié de faire le distinguo qui s'impose entre nombres premiers entre eux (ou étrangers) et nombres premiers.

2.1 THÉORÈME DE GAUSS ET NOMBRES PREMIERS

Observons en premier lieu que deux entiers non premiers entre eux ont un diviseur premier commun, d'où il découle que :

si p est un nombre premier et a un entier, p et a sont étrangers si, et seulement si, p ne divise pas a .

Le théorème de Gauss livre alors ce résultat majeur :

Proposition 2

Un nombre premier divise un produit de facteurs si, et seulement si, il divise l'un de ces facteurs.

En particulier, si p premier divise une puissance a^k , alors nécessairement p divise a ($a = p \times q$), d'où découle que p^k divise a^k (puisque manifestement $a^k = p^k \times q^k$).

2.2 CONSÉQUENCES

• Si un nombre premier p divise un produit de facteurs premiers, alors p est l'un de ces facteurs premiers.

En effet, si p premier divise le produit $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k$ où $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont tous des nombres premiers, d'après la proposition 2, p divise l'un des nombres $p_1, p_2, \dots, p_k$. Chacun de ces nombres étant premier, si p divise p_i alors $p = p_i$.

Par exemple, si un nombre premier p divise $2^{1515} \times 3^{1789} \times 5^{2002}$, alors on a $p = 2$ ou $p = 3$ ou $p = 5$.

• Il est clair, par ailleurs, que, si p et q sont deux nombres premiers distincts et α et β deux entiers naturels non nuls, alors p^α et q^β sont étrangers.

Par suite, si p^α et q^β divisent tous deux un entier n , il en est de même de leur produit (Conséquence 1 du théorème de Gauss (voir chapitre 11, théorème 8, page 341).)

C'est la généralisation (immédiate) de ce résultat que nous soulignerons.

Soit $p_1, p_2, \dots, p_k$ des nombres premiers distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ des entiers naturels non nuls.

Si, pour tout $i = 1, 2, \dots, k$, $p_i^{\alpha_i}$ divise un entier n alors le produit $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ divise aussi l'entier n .

3. Le théorème fondamental de l'Arithmétique

3.1 LA DÉCOMPOSITION EN FACTEURS PREMIERS

THÉORÈME 2

Tout entier naturel n ($n \geq 2$) se décompose en **produit de facteurs premiers** et cette décomposition est **unique** à l'ordre près des facteurs.

Démonstration

• Analyse

Supposons que $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ où $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont des nombres premiers distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des entiers naturels non nuls. Nous tenons de la partie 2.2 précédente que :

- les seuls nombres premiers divisant n sont $p_1, p_2, \dots, p_k$;
- pour $i = 1, 2, \dots, k$, $p_i^{\alpha_i}$ divise n mais $p_i^{\alpha_i+1}$ ne divise pas n .

En effet, si, par exemple, $p_1^{\alpha_1+1}$ divisait n , en écrivant $n = p_1^{\alpha_1+1} \times q$ et en simplifiant, on aurait :

$$p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = p_1 q, \text{ d'où } p_1 = p_2 \text{ ou } p_1 = p_3 \dots \text{ ou } p_1 = p_k, \text{ ce qui n'est pas.}$$

Autrement dit, α_i est l'exposant de la plus grande puissance de p_i divisant n .

En résumé, si n admet une décomposition en produit de facteurs premiers, cette décomposition est unique : nous n'avons pas le choix, ni pour les p_i , ni pour les α_i .

• Synthèse

Soit $p_1, p_2, \dots, p_k$ tous les nombres premiers divisant n (il y en a d'après la proposition 1) et, pour $i = 1, 2, \dots, k$, désignons par α_i l'entier naturel non nul tel que $p_i^{\alpha_i}$ divise n et $p_i^{\alpha_i+1}$ ne divise pas n .

D'après la partie 2.2, $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ divise n : il existe donc q ($q \geq 1$) tel que :

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \times q.$$

Alors, nécessairement $q = 1$.

Supposons $q \geq 2$. Il existe un nombre premier p divisant q , a fortiori n , et par suite il existe un indice i ($1 \leq i \leq k$) tel que $p = p_i$.

Il est alors visible que $p_i^{\alpha_i+1}$ divise n , ce qui n'est pas.

Conclusion : on ne peut avoir $q \geq 2$, d'où $q = 1$ et $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$.

• Remarque

Il existe d'autres démonstrations (voir exercice 20, page 383). Celle-ci est constructive, au sens où elle indique un procédé de décomposition en facteurs premiers (voir l'exemple ci-après).



EXEMPLE 1

Quelle est la décomposition en facteurs premiers de $n = 16\,758$?

On détermine le plus petit diviseur premier de 16 758 (c'est 2), puis celui du quotient... jusqu'à obtenir un quotient égal à 1, par essais successifs des nombres premiers dans l'ordre croissant. La disposition pratique est indiquée ci-contre.

On obtient $n = 2 \times 3^2 \times 7^2 \times 19$.

16 758	2
8 379	3
2 793	3
931	7
133	7
19	19
1	

Voir exercices 16 à 19

3.2 APPLICATION AUX DIVISEURS ET AUX PUISSANCES

Proposition 3

Soit n un entier dont la décomposition en facteurs premiers est $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$.

Les diviseurs (positifs) de n sont les entiers de la forme :

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}, \text{ avec } 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i \text{ pour } i = 1, 2, \dots$$

... Démonstration

On trouvera une démonstration complète à l'exercice 25 (page 384), démonstration d'autant plus aisée qu'on aura fait siennes les idées suivantes :

- Tout diviseur premier de n est l'un des p_i ($1 \leq i \leq r$).
- Si $p_i^{\beta_i}$ divise n , alors $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ ($1 \leq i \leq r$).

L'application de ce résultat aux calculs du PGCD et PPCM de deux entiers est proposée aux exercices 27 et 28 page 384.



EXEMPLE 2

Soit p un nombre premier ($p \geq 3$) et n et k dans $\mathbb{N}^*$.

Quel est le nombre de diviseurs de $N = 2^n \times p^k$?

Les diviseurs de N sont les $2^j p^m$ avec $0 \leq j \leq n$ et $0 \leq m \leq k$, à savoir :

- pour $j = 0$: $1, p, p^2 \dots p^k$;
- pour $j = 1$: $2, 2p, 2p^2 \dots 2p^k$;
-
- pour $j = n$: $2^n, 2^n p, 2^n p^2 \dots 2^n p^k$.

Il n'y a plus qu'à compter : $(n+1)$ lignes comportant chacune $(k+1)$ termes.

Le résultat est $(n+1)(k+1)$.

Note : il existe un résultat général (voir exercice 51, page 387).

Voir exercices 26 à 28

Proposition 4

Soit n un entier dont la décomposition en facteurs premiers est $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ et k un entier ($k \geq 2$).

Il existe un entier a dans $\mathbb{N}^*$ tel que $n = a^k$ (on dit alors que n est une puissance k -ième) si, et seulement si, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ sont tous multiples de k .

Lorsque $k = 2$, on dit que n est un carré et, lorsque $k = 3$, on dit que n est un cube (tout cela est très naturel).

... Démonstration

Il est évident que n et a ont les mêmes diviseurs premiers.

En écrivant $a = p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}$, on a :

$$a^k = p_1^{k\beta_1} \dots p_r^{k\beta_r}.$$

L'unicité de la décomposition en facteurs premiers fait le reste ; comme $n = a^k$, on a :

$$\alpha_i = k\beta_i, \dots, \text{ et } \alpha_r = k\beta_r.$$

4. Le théorème de Fermat

4.1 LE GRAND ET LE PETIT

Le *théorème 3* ci-après est souvent appelé « **Petit théorème de Fermat** » en opposition au « **Grand théorème de Fermat** » popularisé (y compris par La Poste) depuis sa résolution complète par Andrew Wiles en 1994 (voir l'encadré, page 389).



Pierre de Fermat (1601-1665).

4.2 LE THÉORÈME DE FERMAT

THÉORÈME 3

Soit p un nombre premier. Quel que soit l'entier a premier avec p on a :

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

... Démonstration

Considérons les $(p-1)$ nombres $a, 2a, \dots, (p-1)a$ et notons $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$ leurs restes respectifs dans la division euclidienne par p .

• Comme p ne divise pas k lorsque $1 \leq k \leq p-1$, ni a (car p est premier avec a), p ne divise pas ka (*proposition 2*). Conclusion :

aucun reste r_k n'est nul ($k = 1, 2, \dots, p-1$).

• Pour $1 \leq k < k' \leq p-1$, on a $1 \leq k' - k \leq p-1$.

Donc p ne divise ni $k' - k$, ni a : il ne divise alors pas $(k' - k)a = k'a - ka$.

Ainsi $r_{k'} \neq r_k$: les restes r_k sont deux à deux distincts ($k = 1, 2, \dots, p-1$).

• Il en découle que l'ensemble des restes $\{r_1, r_2, \dots, r_{p-1}\}$ est égal à l'ensemble des nombres $\{1, 2, \dots, p-1\}$, et donc que $r_1 r_2 \dots r_{p-1} = (p-1)!$

Des $(p-1)$ congruences $ka \equiv r_k \pmod{p}$ ($k = 1, 2, \dots, p-1$) nous tirons :

$$a \times (2a) \times \dots \times (p-1)a \equiv r_1 \times r_2 \times \dots \times r_{p-1} \pmod{p}, \text{ soit :}$$

$$(p-1)! \times a^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p}.$$

Cela signifie que p divise $(p-1)!(a^{p-1} - 1)$ et comme p est premier, alors p ne divise pas $(p-1)!$, et par suite p divise $a^{p-1} - 1$, ce qui manifestement est équivalent au résultat cherché.

Résultat corollaire : quel que soit a : $a^p \equiv a \pmod{p}$ (ou : p divise $a^p - a$). C'est une banalité si p divise a , une conséquence directe du *théorème 3*, sinon.



EXEMPLE 3

Quels sont les nombres premiers p tels que p divise $2^p + 1$?

D'après le théorème de Fermat, p divise $2^p - 2$; s'il divise $2^p + 1$, il divise la différence 3 : le seul candidat est 3.

Comme 3 divise $2^3 + 1$ (c'est 9), 3 est l'heureux élu.

Voir exercices 32 à 37

1. Utilisation de la décomposition en facteurs premiers

OBJECTIF

Utiliser la décomposition en facteurs premiers (existence, unicité, applications aux diviseurs, etc.) dans la résolution de problèmes d'Arithmétique.

PROBLÈME 1

1) Soit a et b dans $\mathbb{N}^*$, premiers entre eux.

Montrer que, si le produit ab est un cube, alors a et b eux-mêmes sont des cubes.

2) En déduire que le produit de trois entiers naturels non nuls consécutifs n'est jamais un cube⁽¹⁾.

Solution

1) Considérons la décomposition en facteurs premiers de $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ et de $b = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \dots q_\ell^{\beta_\ell}$.

Comme a et b sont premiers entre eux, chacun des nombres $p_1, p_2, \dots, p_k$ est distinct de $q_1, q_2, \dots, q_\ell$.

De ce fait, la décomposition en facteurs premiers de ab est $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \cdot q_1^{\beta_1} \dots q_\ell^{\beta_\ell}$ (voir ci-contre).

Par la proposition 4, page 372, on en déduit que, si ab est un cube, $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_\ell$ sont tous des multiples de 3 et donc que a et b sont des cubes.

2) Écrivons les trois entiers naturels non nuls consécutifs sous la forme $n-1, n, n+1$ (avec $n \geq 2$).

Leur produit est alors $(n^2-1)n$.

Si ce produit est un cube, comme manifestement n^2-1 et n sont premiers entre eux, les résultats obtenus en 1) s'appliquent : n^2-1 et n sont des cubes. Il existe donc $x \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$n^2-1 = x^3 \text{ et } n = y^3.$$

On en déduit $y^6 = x^3 + 1$ qui montre que $x^3 + 1$ est un cube ($x^3 + 1 = (y^2)^3$) strictement plus grand que x^3 .

On a donc $x^3 + 1 \geq (x+1)^3$, d'où $x^3 + 1 \geq x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, ce qui impose $x = 0$ et contredit $x \in \mathbb{N}^*$.

Conclusion : le produit de trois entiers naturels non nuls n'est jamais un cube.

(1) D'après un résultat général d'Erdős et Selfridge (1975) : « Le produit de m entiers consécutifs (non nuls) n'est jamais une puissance k -ième. »

(L'exercice 1, page 375, étudie le cas $m = 3$ et $k = 2$.)

ATTENTION

Le poids des mots

Dire que $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ est **la** décomposition en facteurs premiers de n signifie :

- (1) $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$.
- (2) $p_1, \dots, p_k$ sont des premiers deux à deux distincts.
- (3) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont des entiers naturels non nuls.

x et y sont non nuls car $n \geq 2$.

PROBLÈME 2

Les nombres parfaits ⁽¹⁾

Un nombre entier est dit parfait si il est égal à la somme de ses diviseurs stricts (c'est-à-dire distincts de lui-même). Ainsi, 6 et 28 sont parfaits, puisque :

$$6 = 1 + 2 + 3 \quad \text{et} \quad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

1) Montrer que 496 et 8 128 sont des nombres parfaits (résultats découverts par le mathématicien grec Nicomaque).

2) Montrer que, si $2^n - 1$ est premier, alors $2^{n-1}(2^n - 1)$ est parfait (Euclide, *Éléments*, livre IX).

Solution

1) • La liste des diviseurs de 496 est donnée par le tableau ci-contre.

On vérifie alors sans peine que :

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496.$$

Ainsi, **496 est un nombre parfait.**

• Le cas du nombre 8 128 peut être abordé de la même manière.

Ses diviseurs stricts sont :

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1\,016, 2\,032, 4\,064.$$

2) Soit p un nombre premier distinct de 2 et N le nombre $N = 2^{n-1} \times p$ ($n > 1$).

Il est clair que l'égalité ci-dessus n'est autre que la décomposition de N en facteurs premiers.

Voici alors la liste de tous les diviseurs de N :

$$1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}, p, 2p, 2^2p, \dots, 2^{n-1}p.$$

Ainsi, la somme S des diviseurs de N (N compris) est :

$$S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} + p(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1})$$

$$= (1 + p)(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}),$$

$$\text{soit :} \quad S = (1 + p)(2^n - 1).$$

• Avec $p = 2^n - 1$, on obtient $S = 2^n(2^n - 1)$, soit :

$$S = 2 \times 2^{n-1}(2^n - 1) = 2N.$$

Il en découle que la somme des diviseurs stricts de N est $S - N = N$.

Ainsi, **le nombre N est parfait.**

496	1
248	2
124	4
62	8
31	16

À LA MAIN

L'exploit de Lucas

$2^{126} \times (2^{127} - 1)$ est le plus grand nombre parfait obtenu « à la main⁽²⁾ ». Cet exploit a été réalisé par Édouard Lucas (1842-1891) en 1876.

Note : comme on le verra au problème 79, les nombres parfaits pairs sont étroitement liés aux nombres de Mersenne : $2^p - 1$, premiers.

$1 + 2 + \dots + 2^{n-1}$ est la somme des termes d'une suite géométrique ; elle est donc égale à $\frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$.

Dans la foulée

1) En s'inspirant de ce qui a été fait dans le problème 1, montrer que le produit de trois entiers naturels non nuls consécutifs n'est jamais un carré.

2) 1) Trouver tous les entiers naturels n et k tels que : $(k + 1)(2n + k) = 154$.

2) En déduire tous les entiers naturels n et k tels que : $n + (n + 1) + \dots + (n + k) = 77$.

(1) L'étude des nombres parfaits est complétée aux problèmes 78 à 80, page 392.

(2) Ce nombre s'écrit avec 77 chiffres.

2. Travailler « modulo p » (p premier)

OBJECTIF

Se familiariser avec quelques « tours de main » dans le travail avec les congruences modulo p (p premier).

(On notera que, si le problème 1 se limite à des aspects purement « techniques », le problème 2 – malgré son apparente simplicité – propose (déjà) une vraie trouvaille.)

PROBLÈME 1

Soit p un nombre premier (a, b et $n \dots$ sont des entiers).

1) Simplification (sous-condition)

Montrer que, si $na \equiv nb \pmod{p}$ et si $n \not\equiv 0 \pmod{p}$, alors :
 $a \equiv b \pmod{p}$.

2) Calcul de puissances

Soit a un nombre premier avec p .

Montrer que, si n est un multiple de $p - 1$, alors :
 $a^n \equiv 1 \pmod{p}$.

3) Inverse modulo p

Soit a un nombre premier avec p .

Montrer qu'il existe un entier b tel que :
 $ab \equiv 1 \pmod{p}$ et b est une puissance a .

Solution

① Revenons aux entiers (sans les congruences) :

- $na \equiv nb \pmod{p}$ signifie : p divise $na - nb = n(a - b)$.
- $n \not\equiv 0 \pmod{p}$ signifie : p ne divise pas n .

Il résulte de la proposition 2, page 370, que, puisque p est premier, p divise $a - b$, ce que l'on peut écrire $a \equiv b \pmod{p}$.

② La clé est dans le théorème de Fermat

Comme a est premier avec p : $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Dès lors, si n est un multiple de $p - 1$, c'est-à-dire s'il existe $k \geq 1$ tel que $n = k \times (p - 1)$, on obtient :

$$a^n \equiv a^{k \times (p-1)} \equiv (a^{p-1})^k \equiv 1^k \equiv 1, \text{ tout cela modulo } p.$$

③ Toujours Fermat

Comme a est premier avec p : $a^{p-1} \equiv 1$ (déjà dit).

Alors le nombre $b = a^{p-2}$ est bien une puissance de a , et manifestement $ab \equiv 1 \pmod{p}$.

(Si $p = 2$, on trouve $b = a^0 = 1$. Curieux ? Non ; il suffit de réfléchir un tout petit peu.)

AVIS AUX AMATEURS

500 000 \$

C'est le prix attribué par l'E.S.F. (Electronic Frontier Foundation) pour qui découvrira un nombre premier de plus d'un milliard de chiffres décimaux !

Au XX^e siècle, le record (plus grand nombre premier découvert) est détenu par le nombre : $2^{6\,972\,593} - 1$ qui s'écrit avec plus de 2 millions de chiffres (chapitre 3, exercice 4).

La proposition 2 s'énonce également ainsi :

si $xy \equiv 0 \pmod{p}$, alors $x \equiv 0 \pmod{p}$ ou $y \equiv 0 \pmod{p}$ avec p premier et x et y entiers.

D'après « Bézout », comme a et b sont premiers entre eux, il existe u et v tels que :

$au + bv = 1$, d'où $au \equiv 1 \pmod{p}$.
Mais cela ne nous dit pas, contrairement à « Fermat », que u est une puissance de a .

PROBLÈME 2

Soit a un entier naturel non nul pair.

- 1) Montrer que tout nombre premier p divisant $a^2 + 1$ est de la forme $4n + 1$.
- 2) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n + 1$.

1 Quelles idées ?

Comme $a^2 + 1$ est impair, tout premier p divisant $a^2 + 1$ est impair, donc de la forme $4n + 1$ ou $4n + 3$.

Il faudrait éliminer la forme « $4n + 3$ ». Comment ? Comme p est premier avec a ... c'est là qu'il faut songer au théorème de Fermat.

Tout nombre p est de la forme $4n$ ou $4n + 1$ ou $4n + 2$ ou $4n + 3$.

- $4n$ n'est pas premier ;
- $4n + 2$ n'est premier que pour $n = 0$, c'est-à-dire pour $p = 2$.

2 Solution

1) Soit p premier divisant $a^2 + 1$. On a donc :

$$a^2 \equiv -1(p), \text{ d'où } a^4 \equiv 1(p).$$

Par ailleurs, p ne divise pas a (c'est clair : $a \equiv 0(p)$ impliquerait $a^2 \equiv 0(p)$) et donc, d'après le théorème de Fermat : $a^{p-1} \equiv 1(p)$.

Supposons que p s'écrive $p = 4n + 3$. On a $p - 1 = 4n + 2$; d'où :

$$a^{p-1} \equiv (a^4)^n \times a^2 \equiv 1 \times (-1) \equiv -1 \pmod{p}.$$

Ceci implique $1 \equiv -1(p)$, soit $p = 2$; or p est impair.

Conclusion : l'hypothèse $p = 4n + 3$ est à rejeter : p est de la forme $4n + 1$.

2) Soit N un entier ($N \geq 2$) et soit $a = N!$

On sait (proposition 1, page 368) qu'il existe p premier divisant $a^2 + 1$.

D'après 1), comme a est pair, p est de la forme $4n + 1$. Par ailleurs, p premier ne divisant pas $a = N!$, on a nécessairement $p > N$.

En résumé, pour tout entier N ($N \geq 2$), il existe un nombre premier de la forme $4n + 1$ plus grand que N .

Il existe donc une infinité de nombres premiers de la forme $4n + 1$.

EULER, ENCORE

Avec les sommes de deux carrés

« Un nombre premier est de la forme $4n + 1$ si, et seulement si, il est somme de deux carrés. »

$$5 = 2^2 + 1^2, 13 = 3^2 + 2^2,$$

$$17 = 4^2 + 1^2, 29 = 5^2 + 2^2,$$

$$41 = 5^2 + 4^2, 53 = 7^2 + 2^2,$$

$$61 = 6^2 + 5^2, \text{ etc.}$$

Ce résultat, conjecturé par Fermat, fut établi par... Euler (s'il est facile de montrer qu'un nombre premier p somme de deux carrés est de la forme $4n + 1$, la réciproque est un peu moins immédiate).

Dans la foulée

1 Un Mersenne très composé

Soit $p_1, p_2, \dots, p_k$ k nombres premiers impairs et distincts. On pose :

$$n = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1) \text{ et } M_n = 2^n - 1.$$

Prouver que M_n est divisible par chacun des nombres $p_1, p_2, \dots, p_k$.

2 La forme $8n + 1$

Soit a un entier naturel non nul pair.

1) Montrer que tout premier p divisant $a^4 + 1$ est de la forme $8n + 1$.

Piste Utiliser le résultat du problème 2 pour montrer que p est de la forme $8n + 1$ ou $8n + 5$.

Éliminer le cas $8n + 5$ à l'aide du théorème de Fermat.

2) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $8n + 1$.

Piste Recopier « mot à mot » la résolution de la question 2) du problème 2.

3. Le système cryptographique R.S.A.

OBJECTIF

Présenter un système cryptographique à clef publique basé sur la difficulté de factoriser des grands nombres entiers.

PROBLÈME

L'Arithmétique du système R.S.A.

Soit p et q deux nombres premiers distincts ($p \neq 2$ et $q \neq 2$).

On pose $n = pq$ et on désigne par e un entier tel que :

$$1 < e < (p-1)(q-1) \text{ et } e \text{ premier avec } (p-1)(q-1).$$

1) Montrer qu'il existe d unique tel que :

$$1 \leq d < (p-1)(q-1) \text{ et } ed \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}.$$

2) Prouver que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m^{ed} \equiv m \pmod{n}$.

1 Solution

1) Il s'agit d'une conséquence du théorème de Bézout, qui dans son énoncé général se présente ainsi :

« Soit a et b des entiers premiers entre eux ($a > 1$ et $b > 1$), alors il existe un entier u_0 unique tel que $1 \leq u_0 \leq b-1$ et $au_0 \equiv 1 \pmod{b}$. »

(La démonstration est prise en charge par l'exercice 5 ci-après.)

2) Comme $n = pq$ est produit de deux premiers distincts, démontrer que n divise $m^{ed} - m$ revient à démontrer que p et q divisent tous deux $m^{ed} - m$: c'est l'idée.

Par ailleurs, d'après la question 1), il existe k entier tel que $ed = 1 + k(p-1)(q-1)$. Il est clair alors que k est positif.

• Si p divise m , alors banalement, $m^{ed} \equiv m \equiv 0 \pmod{p}$.

• Sinon, nous pouvons utiliser le **théorème de Fermat** : $m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, d'où nous déduisons :

$$m^{ed} = m^{1+k(p-1)(q-1)} = m \times (m^{p-1})^{k \times (q-1)},$$

soit : $m^{ed} \equiv m \pmod{p}$.

En échangeant p et q et en recopiant mot à mot s'annonce $m^{ed} \equiv m \pmod{q}$.

Le résultat est au rendez-vous.

(On notera la modestie des contenus mathématiques mis en jeu !)

R.S.A. pour Rivest, Shamir et Adleman, les créateurs du système⁽¹⁾.



Étienne Bézout (1730-1783).

$k < 0$ impliquerait $ed \leq 0$, ce qui n'est pas.

(1) L'article original sur R.S.A., le système aujourd'hui universel, est paru en 1978 : *A method for obtaining digital signature and public key cryptosystems*.

2 Le fonctionnement du système R.S.A.

Nous l'expliciterons dans le cas général avec, en parallèle, un exemple numérique « naïf ».

Pour permettre à A (comme Alice) – ou à tout autre personne – de transmettre des informations à B (comme Bob), le protocole est le suivant :

1) Le destinataire **B choisit** deux entiers premiers distincts **p** et **q** ainsi qu'un nombre **e** (entre 1 et $(p-1)(q-1)$) premier avec $(p-1)(q-1)$.

2) **B calcule** l'unique entier **d** tel que :

$$1 \leq d < (p-1)(q-1) \quad \text{et} \quad e \times d \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}.$$

3) **B diffuse** largement les entiers **n** = **pq** et **e** tout en gardant secret les entiers **p**, **q** et **d**.

4) Pour envoyer un message à B, A convertit ce message en une suite de nombres inférieurs à **n**.

Pour chiffrer chacun de ces nombres **m**, A **calcule** le nombre **c** entre 1 et **n** tel que $m^e \equiv c \pmod{n}$, qu'elle transmet à B.

5) **B déchiffre** c en calculant $c^d \pmod{n}$.

(Et comme $c^d = m^{de}$ et que, d'après le problème 1, $m^{de} \equiv m \pmod{n}$, B « retrouve » le nombre **m**.)

Alice et Bob sont les personnages classiques de la Cryptologie.

Exemple numérique

• $p = 41$ et $q = 53$ sont premiers distincts.

• $n = pq = 2\,173$.

• $(p-1)(q-1) = 2\,080$.

• $e = 1\,427$ est premier avec 2 080 comme le montre l'algorithme d'Euclide qui au passage livre $d = 1\,083$.
(Voir chapitre 11, page 339.)

3 Exemple

Avec les données numériques de l'exemple ci-dessus pour transmettre $M = 356\,453\,213$, Alice découpe **M** par tranches de trois chiffres $m_1 = 213$, $m_2 = 453$ et $m_3 = 356$ (c'est un moyen simple de s'assurer que $m_i < 2\,173$) en commençant par la droite.

Avec $e = 1\,427$, Alice obtient :

$$\begin{aligned} \bullet m_1 &= 213 & m_1^e &\equiv 1\,273 \pmod{n} & \text{d'où } c_1 &= 1\,273 ; \\ \bullet m_2 &= 453 & m_2^e &\equiv 907 \pmod{n} & \text{d'où } c_2 &= 0\,907^{(1)} ; \\ \bullet m_3 &= 356 & m_3^e &\equiv 1\,297 \pmod{n} & \text{d'où } c_3 &= 1\,297 . \end{aligned}$$

Est donc transmis à Bob : 127 309 071 297.

Bob découpe le nombre reçu en tranches de quatre chiffres 1 297, 0 907, 1 273 et retrouve m_1, m_2, m_3 en calculant c_1^d, c_2^d, c_3^d modulo **n**.

UN GRAIN DE SABLE ?

L'authentification

Pour l'instant, rien n'assure à Bob que le message reçu est bien d'Alice !

Le système R.S.A. offre une parade « imbattable » (voir exercice 8, page 380).

Les mots pour le dire

La **Cryptologie** est l'étude des techniques mathématiques liées à la sécurité de l'information, c'est-à-dire la confidentialité, l'intégrité des données, l'authentification d'une entité (personne, ordinateur, carte de crédit...) et l'authentification de l'origine des données.

La cryptologie se scinde en deux parties :

- la **cryptographie**, étude des moyens de parer aux attaques humaines sur la communication ;
- la **cryptanalyse**, tentative pour un adversaire de déchiffrer un texte chiffré ou de trouver les secrets du chiffrement.

(1) Avec $n = 2\,173$, il faut s'attendre à trouver des nombres de quatre chiffres parmi les c_i : on « normalise » donc les écritures en utilisant le chiffre 0 autant qu'il est nécessaire.

4 Commentaires

Un système à clef publique

Le couple (n, e) connu de tout un chacun permet donc à « tout public » de transmettre un message à Bob.

La sécurité du système

Si l'on sait factoriser n sous la forme $n = pq$, connaissant e , on trouve d sans problème et la lecture du courrier électronique de Bob se fait comme dans un livre ouvert.

De même, on montre que, connaissant n, e et d , on trouve rapidement p et q .

La sécurité du système tient pour l'essentiel dans :

- la construction de nombres premiers « grands » (on sait faire) ;
- la **difficulté de décomposer un nombre grand** (300 chiffres, par exemple) **en produit de deux nombres premiers**.

Mais personne ne sait si une attaque du R.S.A. qui éviterait la factorisation est impossible !

Les fonctions à sens unique

La fonction *one-way* de Bob f_B est la fonction de $X = \{1, 2, \dots, n\}$ dans X définie par $f(m) = m^e \bmod n$: elle est connue de tout le monde.

En revanche, la fonction réciproque $f_B^{-1} : m \rightarrow m^d \bmod n$ n'est connue que de Bob et est pratiquement impossible à calculer, sauf si l'on dispose d'une information supplémentaire (*trapdoor information*), d'où le nom donné à une telle fonction : **fonction trappe**.

PATATRAS

Le R.S.A. - 155

En 1999, un nombre de 155 chiffres (qui servait de clef à un système R.S.A.) a été décomposé en produit de deux facteurs premiers de 78 chiffres chacun (C.W.I. Amsterdam)⁽¹⁾. Le temps cumulé de calculs a été évalué à 8 000 Mips (8 000 millions d'instructions par seconde pendant un an !).

Depuis, la Société R.S.A. *Data Security* recommande des nombres de 309 chiffres, voire 617 chiffres.

Note : c'est la taille d'un nombre mesurée en bits qui conduit à 155, 309, 617...

Dans la foulée

5 Avec Bézout

Démontrer la propriété énoncée dans la résolution de la question 1) du problème.

Piste Existence : si $au + bv = 1$, effectuer la division euclidienne de u par v .

Unicité : évidente.

Les exercices 6 et 7 concernent l'exemple numérique accompagnant la description du fonctionnement du système R.S.A.

6 On choisit $e = 1\,071$ (au lieu de 1 427).

Vérifier que $\text{PGCD}(e, 2\,080) = 1$ et calculer d .

7 Warning : over Flow

Comment effectuer les calculs de $m^e \bmod n$ avec la calculatrice ? (Voir page 390.)

8 Sûr, c'est Alice !

Alice dispose également d'une fonction trappe f_A (f_A est publique ; f_A^{-1} n'est connue que d'Alice).

Alice envoie à Bob un message contenant :

- ce qu'elle avait à lui dire ;
- une double signature : $A, f_A^{-1}(A)$.

Comment Bob peut-il s'assurer que le message reçu vient bien d'Alice ?

(1) À titre de curiosité !

10941 73864 15705 27421 80970 73220 40357 61200 37329 45449 20599 09138 42131
47634 99842 88934 78471 79972 57891 26733 24976 25752 89978 18337 97076 53724
40271 46743 53159 33543 33897 =
102 63959 28297 41105 77205 41965 73991 67590 07165 67808 03806 68033 41933
52179 07113 07779 ×
106 60348 83801 68454 82092 72203 60012 87867 92079 58575 98929 15222 70608
23719 30628 08643

Annexe

« Les nombres premiers pairs sont extrêmement rares. »

Paul Halmos (déjà cité, voir chapitre 10)

« Aimez ce que jamais on ne verra deux fois. »

Alfred de Vigny (*Les Destinées*)

1. LES CALCULATRICES

Compte tenu de la taille des nombres que nous serons amenés à manipuler, les calculatrices Casio Graph 100 et Texas TI 89 offrent un délai de réponse plus qu'acceptable aux deux questions centrales :

- savoir si un nombre est premier ou composé ;
- lorsque le nombre est composé, obtenir sa décomposition en produit de facteurs premiers.

Une exception toutefois :
l'exponentiation modulaire rapide
(voir exercices 73 et 74, page 390).

2. LA LISTE DES NOMBRES PREMIERS INFÉRIEURS À 1 000

Sa consultation ne peut que faciliter la résolution de certains exercices.

[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997]

INFO

La conjecture de Goldbach

Même dans le cours le plus élémentaire sur les nombres premiers, on ne peut pas ne pas citer la célèbre (et redoutable) conjecture de Goldbach (1690-1764).

Dans une lettre à Euler, Christian Goldbach conjecture que :

« Tout nombre pair plus grand que 2 est somme de deux nombres premiers. »

Personne – jusqu'à présent – n'a pu établir cette propriété !

De là à se sentir pousser des ailes...

3. « MERVEILLEUX NOMBRES PREMIERS »

C'est le titre du « fabuleux ouvrage » de Jean-Paul Delahaye (Pour la Science, Éditions Belin, 2000) *Voyage au cœur de l'Arithmétique*, passionnant, drôle, truffé d'histoires, d'anecdotes, etc. (Il y a aussi quelques mathématiques solides...)

Les « fans » vont se régaler.

Les autres aussi.

Applications

Quelques précisions

- L'expression « diviseur d'un entier naturel » sous-entend (sauf mention explicite du contraire) « diviseur strictement positif de cet entier naturel ».
- Certains exercices sont précédés du logo . Comme tout un chacun le devine, il convient de laisser momentanément la calculatrice se reposer : les calculs à la main, d'une part, peuvent permettre de mieux saisir la portée d'une proposition, d'un théorème et, d'autre part, procurent souvent des éléments de réflexion sur la conduite à adopter en présence de moyens de calcul plus puissants (calculatrice, ordinateur...).

Généralités sur les nombres premiers

L'exercice 1 rappelle deux factorisations classiques particulièrement utiles dans les exercices : nous y ferons référence par l'enseigne qui les abrite : « factorisation standard ».

1 Factorisation standard

Soit n un entier naturel ($n \geq 1$) et a un entier.

1) Montrer que :

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1).$$

2) On suppose n impair : $n = 2k + 1$ avec $k \geq 1$.

Établir que :

$$a^{2k+1} + 1 = (a + 1)(a^{2k} - a^{2k-1} + a^{2k-2} - \dots + a^2 - a + 1).$$

2  Déterminer à l'aide de divisions successives et de la proposition 1, page 368, si les entiers suivants sont premiers ou composés :

97 ; 109 ; 117 ; 271 ; 323 ; 401 ; 527 ; 719.

3 Presque jamais premier

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

1) Montrer que $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2$.

2) À quelles conditions $a^4 + 4b^4$ est-il premier ?

4 À chacun son métier

1) Dans les *Inédits* de Marcel Pagnol (Éditions Pastorelli, 1992), l'écrivain indique que, pour tout n entier impair $n \geq 1$, $n + (n + 2) + n(n + 2)$ est premier. Qu'en pensez-vous ?

2) Vérifier ce résultat dû à Euler (1772) :

« Le nombre $n^2 + n + 41$ est premier pour $n = 0, 1, 2, \dots, 39$. »

Et pour $n = 40$?

Comment étudier ce dernier cas sans la calculatrice ?

5 Les nombres de Mersenne

Pour $n \geq 1$, le n -ième nombre de Mersenne est le nombre $M_n = 2^n - 1$ (voir chapitre 11, exercice 35, page 354).

1) Quels sont les nombres premiers parmi les nombres M_n pour $n \leq 6$?

2) Montrer que, si d est un diviseur de n , M_n est divisible par $2^d - 1$.

Piste « Factorisation standard » (exercice 1).

En déduire que, si M_n est premier, alors n est premier.

3) Si p est premier, M_p est-il également premier ?

4) Soit a et n deux entiers tels que $a \geq 2$ et $n \geq 2$.

Montrer que, si $a^n - 1$ est premier, alors nécessairement $a = 2$ et n est premier.

Piste La même que la précédente.

6 Des « trous » arbitrairement grands

Soit n un entier donné ($n \geq 1$) ; montrer que la liste suivante comporte n entiers naturels consécutifs dont aucun n'est premier :

$(n+1)! + 2$; $(n+1)! + 3$; ... ; $(n+1)! + n$; $(n+1)! + n + 1$.

Piste Il n'est pas bien difficile de trouver un diviseur de chacun.

Schizophrénique ?

L'exercice 6 indique, par exemple, qu'en choisissant une valeur ad hoc de n , on peut trouver une suite de mille milliards de mille entiers consécutifs vide de nombres premiers ! Peut-on pour autant prendre pour argent comptant l'idée d'une déperdition irrévocable des nombres premiers ?

Un résultat postulé par Bertrand en 1845 et fermement établi par le brillant mathématicien russe Tchebychev vient modérer une telle impression : « Si $n > 3$, entre n et $2n$ se trouve toujours un nombre premier. »

Voilà pourquoi certains mathématiciens, tel Ian Stewart, n'hésitent pas à se prononcer sur le « caractère schizophrénique des nombres premiers ».



Pafnouti Tchebychev
(1821-1894).

Divisibilité et nombres premiers

Dans les exercices 7 à 9, il s'agit d'établir des résultats énoncés dans le cours, page 370.

- 7 Soit p un nombre premier et a un entier.
Montrer que p et a sont étrangers si, et seulement si, p ne divise pas a .
- 8 Démontrer la proposition 2 à l'aide du théorème de Gauss (chapitre 11, page 341).
- 9 1) Soit p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que, si p divise n^2 , alors p divise n .
- 2) Plus généralement, montrer que, si p premier divise n^k , alors p divise n .
- 10 Est-ce que le nombre 2 003 est un diviseur de 2 002 ! (factorielle 2 002) ?

Piste 2 003 est premier (inutile de vérifier).

- 11 Quels sont les diviseurs premiers du nombre :
101 000 ... 00 ?
(Le nombre de « zéros » après 101 n'est pas connu.)
- 12 Montrer que, si 17 divise n^{100} (n entier, $n \geq 2$), alors le quotient $q = \frac{n^{100}}{17}$ est divisible par 17^{99} .
- 13 Soit n un entier ($n \geq 1$) et $N = (n+5)^3 - n^3$.
- 1) Montrer que 5 divise N .
- 2) Prouver que, si 5^2 divise N , alors 5^3 aussi.

Piste Montrer que, si 5^2 divise N , alors 5 divise n .

- 14 Démontrer que pour n entier ($n \geq 1$) $30n+7$ n'est jamais la somme de deux nombres premiers.

15 Deux entiers et leurs successeurs

Étant donné un entier k supérieur ou égal à 2, on pose :

$$m = 2^k - 2 \text{ et } n = 2^k(2^k - 2).$$

- 1) Montrer qu'un nombre premier divise m si, et seulement si, il divise n .

- 2) Vérifier que :

$$n+1 = (m+1)^2.$$

En déduire qu'un nombre premier divise $n+1$ si, et seulement si, il divise $m+1$.

Note : nous venons de fabriquer une infinité de couples (m, n) tels que :

- m et n ont les mêmes diviseurs premiers ;
- $m+1$ et $n+1$ ont les mêmes diviseurs premiers.

Décomposition en facteurs premiers

Exercices 16 à 19 : ✕

- 16 Déterminer la décomposition en facteurs premiers des nombres : 80 ; 220 ; 400 ; 729 ; 1 500.
- 17 Même exercice avec : 196 ; 240 ; 570 ; 300^{300} ; 5 040.
- 18 À l'aide de la décomposition en facteurs premiers, mettre les fractions suivantes sous forme irréductible :

$$\frac{315}{84} ; \frac{1\,792}{96} ; \frac{480}{225} ; \frac{637}{1\,183} ; \frac{540}{192}.$$

- 19 Mettre chacun des nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers avec b sans facteur carré (c'est-à-dire b non divisible par un carré supérieur à 2) :

$$\sqrt{1\,460} ; \sqrt{640} ; \sqrt{1\,715} ; \sqrt{1\,998} ; \sqrt{1\,201\,250}.$$

- 20 Nous proposons ici une autre démonstration de l'existence d'une décomposition en facteurs premiers. Soit A l'ensemble des entiers n ($n \geq 2$) qui ne sont pas produits de facteurs premiers⁽¹⁾. On suppose A non vide et l'on note n_0 ($n_0 \geq 2$) le plus petit élément de A . Montrer que n_0 est composé et obtenir une contradiction. Conclusion ?

21 Ristournes

Un détaillant de matériel audiovisuel effectue trois remises successives sur un article qui coûtait 300 € et qu'il vend alors 222,87 €.

Quels sont les pourcentages (nombres entiers) des trois remises ?

Pas un mot

1903 : Réunion de la Société américaine de Mathématiques, conférence : « Sur la factorisation des grands nombres » par F.N. Cole (université Columbia).

Cole, sans prononcer un mot, calcula au tableau :

$$2^{67} - 1 = 147\,573\,952\,589\,676\,412\,927,$$

puis dans un autre coin du tableau le produit :

$$193\,707\,721 \times 761\,838\,257\,287.$$

Les deux résultats coïncidaient.

Cole, toujours sans un mot, retourna s'asseoir sous les applaudissements. Une conjecture vieille de plus de 250 ans « le nombre de Mersenne $2^{67} - 1$ est premier » venait de s'écrouler.

(1) Dire qu'un entier n est produit de facteurs premiers signifie exactement ceci : « Il existe un entier $k : k \geq 1$ et des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_k$ (non nécessairement distincts) tels que :

$$n = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k.$$

(Lorsque $k = 1$, cela veut dire simplement que n est premier.)

Nombres premiers et suites arithmétiques

22 De la forme $4n + 3$

Soit q un nombre premier tel que $q > 5$ et $5 \times 7 \times \dots \times q$ le produit de tous les nombres premiers entre 5 et q .
On pose $N = 2^2 \times 5 \times 7 \times \dots \times q + 3$.

1) Soit p un nombre premier divisant N .

Montrer que $p > q$ et que p est de la forme $4n + 1$ ou $4n + 3$.

2) Soit $N = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition de n en facteurs premiers.

Montrer qu'il existe i ($1 \leq i \leq r$) tel que p_i soit de la forme $4n + 3$.

Piste Raisonner par l'absurde : que dire du produit de nombres tous congrus à 1 modulo 4 ?

3) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n + 3$.

23 De la forme $6n + 5$

Adapter le raisonnement utilisé dans l'exercice précédent pour montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6n + 5$.

Pour cela, considérer $N = 2 \times 3 \times 7 \times 11 \times \dots \times q + 5$ où q est un nombre premier ($q > 5$) et $7 \times 11 \times \dots \times q$ le produit des premiers entre 7 et q .

Le théorème de Dirichlet

Le difficile théorème de Dirichlet énonce que, « si a et b sont deux entiers premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $an + b$ ».

Le cas « $4n + 1$ » (voir problème 2, page 375) est significatif de la complexité de l'affaire (voir aussi l'exercice 24 ci-après).

Nous démontrerons – tout de même – que, si p est premier, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $np + 1$ (voir problème 76).



Gustav Dirichlet
(1805-1859).

24 « Dirichlet : suite »

Soit q un nombre premier ($q > 3$). On désigne par $3 \times 5 \times \dots \times q$ le produit de tous les nombres premiers compris entre 3 et q et l'on pose :

$$N = 2^2 \times 3 \times 5 \times \dots \times q + 1$$

(il est clair que $N \equiv 1 \pmod{4}$).

À l'aide de la calculatrice, trouver un nombre premier q tel que tout diviseur premier de N soit congru à 3 modulo 4. (Voilà pourquoi le raisonnement utilisé précédemment ne peut fonctionner ici : si $a \equiv 3 \pmod{4}$ et si $b \equiv 3 \pmod{4}$, alors $ab \equiv 1 \pmod{4}$.)

Facteurs premiers : divisibilité, puissance

25 Démontrer la proposition 3, page 372.

Piste Avec les notations introduites, montrer que tout diviseur premier p d'un diviseur d de n est l'un des nombres $p_1, p_2, \dots, p_r$.

26 Soit n un entier admettant exactement six diviseurs.

1) Peut-on trouver trois (ou plus) diviseurs premiers de distincts ?

2) En déduire que n s'écrit :

• $n = p^5$ où p est un nombre premier, ou bien :

• $n = p^2 \times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts.

27 PGCD et PPCM

Soit $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ et $b = p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}$ où :

• $p_1, p_2, \dots, p_r$ sont des nombres premiers distincts ;

• $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_r$ des entiers positifs ou nuls.

On pose $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$ et $\mu_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$.

1) Montrer que $d = p_1^{\gamma_1} \dots p_r^{\gamma_r}$ est le PGCD de a et de b et que $m = p_1^{\mu_1} \dots p_r^{\mu_r}$ est le PPCM de a et de b .

2) Application

Calculer PGCD (a, b) et PPCM (a, b) :

a) $a = 2^3 \times 5 \times 11^2 \times 17$; $b = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11^2 \times 13$

b) $a = 2^4 \times 7 \times 13^5 \times 17$; $b = 2 \times 3^2 \times 7^2 \times 13^3$.

28 À l'aide du résultat de l'exercice 27, retrouver que, pour tous entiers a et b : $a \times b = \text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b)$.

29 Montrer que, si un entier n est à la fois un cube et un carré, alors n est une puissance sixième.

30 Les carrés impossibles

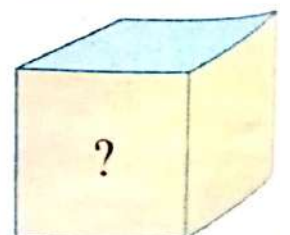
Prouver qu'il est impossible de trouver un entier n ($n \geq 1$) tel que $3n$ et $5n$ soient tous deux des carrés.

Piste Raisonner par l'absurde en supposant que $3n$ et $5n$ sont des carrés : prouver que 3 et 5 divisent n et examiner la parité des exposants de 3 et 5 dans la décomposition de n en facteurs premiers.

31 Le problème de la cuve

La cuve est à peu près cubique. En tout état de cause, elle est à base carrée. Ses dimensions sont des nombres entiers de décimètres et son volume est 1 450 litres à 2 litres près.

Quelles sont les dimensions de la cuve ?



Le théorème de Fermat

32 Montrer que les nombres 4^{20} , 9^{20} , 16^{20} , 25^{20} , 36^{20} et 49^{20} sont tous congrus à 1 modulo 41.

Piste 4, 9, 16, 25, 36 et 49 : rien de particulier ?

33 Prouver que, pour tout entier n , 7 divise $3^{6n} - 1$:

a) en utilisant l'une des méthodes mises en place dans le chapitre 11, page 342 ;

b) à l'aide du théorème de Fermat.

34 Soit p un nombre premier différent de 2. Montrer que p divise $1 + 2 + \dots + 2^{p-2}$.

35 Est-ce que 97 divise la somme $\sum_{n=1}^{98} n^{96}$?

36 Trouver tous les nombres premiers p tels que p divise $3^p + 1$.

37 Un « Poulet »

1) Soit n ($n \geq 1$) un nombre impair tel que $2^{n-1} \equiv 1(n)$. Montrer que n est composé.

2) Prouver que $2^{340} \equiv 1(341)$, mais que 341 est composé.

Les nombres de Poulet

Les nombres de Poulet (mathématicien français du début du XX^e siècle) sont les entiers n **composés** tels que $2^{n-1} \equiv 1(n)$. Ainsi, 341 est un nombre de Poulet.

Ces nombres ruinent l'espoir de fabriquer un test de primalité (test permettant de savoir si un nombre est premier) à l'aide du théorème de Fermat puisque :

$\begin{cases} \text{si } 2^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}, \text{ alors } n \text{ est composé ;} \\ \text{si } 2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}, \text{ alors } n \text{ est soit premier, soit un} \\ \text{nombre de Poulet (par définition), donc composé.} \end{cases}$

Mais il n'est cependant pas inintéressant d'y regarder de plus près (exercice 38).

38 Parmi les nombres entiers inférieurs à 25 milliards, 1 091 987 405 et 21 853 sont des nombres de Poulet (donc composés).

On prend un nombre au hasard inférieur à 25 milliards et l'on décide de déclarer, après avoir calculé 2^{n-1} modulo n :

$\begin{cases} \bullet \text{ si } 2^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}, n \text{ est composé ;} \\ \bullet \text{ si } 2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}, n \text{ est premier (sic).} \end{cases}$

On va « sûrement » annoncer quelques bêtises... De façon plus précise

1) Quelle est la probabilité d'énoncer un résultat erroné ?

2) Quelle est la probabilité que le nombre soit premier sachant qu'il a été annoncé comme tel ?

Brèves de cours

39 Les repunits

Pour $n \geq 1$, le repunit u_n est le nombre de n chiffres tous égaux à 1 (dans le système décimal) :

$u_1 = 1$, $u_2 = 11$, $u_3 = 111$, etc.

1) Quels sont les nombres premiers parmi u_2 , u_3 , u_4 et u_5 ?

2) Montrer que, si n est multiple de 3, u_n n'est pas premier.

3) Prouver que $u_n = \frac{10^n - 1}{9}$.

En déduire que, si n est composé, il en est de même de u_n .

Piste Encore la factorisation standard (exercice 1, page 382).

(On ignore s'il existe une infinité de repunits premiers : pour $n \leq 30\,000$, il n'y a que cinq repunits premiers u_n , obtenus pour $n = 2, 19, 23, 317$ et $1\,031$.)

40 Montrer que, pour tout entier n ($n \geq 0$), la fraction $\frac{5^{n+1} + 6^{n+1}}{5^n + 6^n}$ est irréductible.

Piste Soit p un nombre premier divisant numérateur et dénominateur...

Dans les exercices 41 à 43, on désigne par Δ_n le plus petit entier supérieur ou égal à 1 qui ne divise pas n ($n \geq 1$).

41 1) Calculer Δ_n pour $1 \leq n \leq 10$.

2) Quels sont les entiers n pour lesquels :

a) $\Delta_n = 1$; b) $\Delta_n = 2$?

3) Soit p un nombre premier ($p \neq 2$). On pose $n = (p-1)!$. Calculer Δ_n .

42 1) Peut-on trouver un entier n tel que : $\Delta_n = 6$? $\Delta_n = 77$?

2) Déterminer par sa décomposition en facteurs premiers un entier n tel que $\Delta_n = 5^2$.

43 Soit n un entier différent de 1.

Montrer qu'il existe un nombre premier p et un entier naturel k ($k \geq 1$) tels que $\Delta_n = p^k$.

Piste Utiliser la décomposition de Δ_n en facteurs premiers à l'aide de la remarque banale – mais essentielle – : si $1 \leq d < \Delta_n$, alors d divise n .

44 Soit p un nombre premier. On pose $n = (p-1) \times 2^{p-2}$. Il s'agit d'établir que p divise $6n^2 + 5n + 1$.

1) Vérifier le résultat lorsque $p = 2$.

2) On suppose $p \neq 2$.

Montrer que $n^2 \equiv 2^{p-3}(p)$.

Conclure.

Exercices

Nombres premiers, nombres composés

45 On considère la suite d'entiers définis par :

$$\begin{cases} u_1 = 1! \\ u_n = n! - u_{n-1} \text{ pour } n \geq 2 \end{cases}$$

Pour $n \geq 3$, u_n est-il premier ?

(La question ne se pose pas pour $u_1 = 1$ et $u_2 = 1$.)

46 Alternance

La question à l'étude est la suivante : « Quels sont les nombres premiers parmi les nombres 101, 10 101, 1 010 101, etc. ? »

On désigne par a_n le nombre 101 ... 01 où apparaît n fois le chiffre 1 ($n \geq 2$).

1) Montrer que $11a_n = (10^n + 1)u_n$ où u_n est le repunit de longueur n : $u_n = 11 \dots 1$, avec n chiffres tous égaux à 1 (voir exercice 39, page 385).

2) On suppose n impair. Vérifier que 11 divise $10^n + 1$ et en déduire que u_n est un diviseur de a_n avec $1 < u_n < a_n$.

3) On suppose n pair.

a) Montrer que 11 divise u_n .

Piste Pour faire au plus court – et d'autant que c'est facile –, utiliser le critère de divisibilité par 11 (exercice 72, chapitre 11, page 357).

b) En déduire que $10^n + 1$ divise a_n et préciser s'il s'agit d'un diviseur strict de a_n .

4) Répondre à la question posée.

Une infinité ou non ?

Établir s'il existe ou non une infinité de nombres premiers dans une suite donnée (telle : $2^n - 1$, $2^{2^n} + 1$, etc.) ou possédant une particularité donnée mobilise pas mal de professionnels de la Théorie des Nombres (et quelques amateurs aussi). Sur ce sujet, voici deux des problèmes toujours non résolus qui ont acquis une certaine célébrité :

- Existe-t-il une infinité de nombres premiers de la forme $n^2 + 1$ (comme $5 = 2^2 + 1$, $17 = 4^2 + 1$, $37 = 6^2 + 1$, ...) ?

- Existe-t-il une infinité de nombres premiers jumeaux ?

(Lorsque p et $p + 2$ sont tous deux premiers, ils sont dénommés nombres premiers jumeaux ; exemples : 3 et 5, 5 et 7, 11 et 13, 17 et 19, etc.)

47 Le théorème de Wilson

1) Soit p un nombre premier ($p \geq 5$) et $A = \{2, \dots, p-2\}$. Montrer que, pour tout $x \in A$, $x^2 - 1$ n'est pas divisible par p .

2) a) Soit $x \in A$; prouver qu'il existe un entier u tel que :

$$xu \equiv 1 \pmod{p} ;$$

b) en déduire l'existence d'un entier r de A , unique, distinct de x , tel que :

$$xr \equiv 1 \pmod{p} ;$$

c) établir alors que $2 \times \dots \times (p-2) \equiv 1 \pmod{p}$; puis que :

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p} .$$

3) Ce résultat demeure-t-il vrai lorsque $p = 2$? $p = 3$?

4) Réciproquement, soit p un entier ($p \geq 2$) tel que :

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p} .$$

En utilisant l'égalité de Bézout, montrer que p est premier.

5) En déduire le Théorème de Wilson : « Un nombre p est premier si, et seulement si, $(p-1)! + 1 \equiv 0(p)$ » (on n'oubliera pas les cas $p = 2$ et $p = 3$).

Commentaire : ce critère de primalité – c'en est un – est inopérant du seul point de vue calculatoire. ⁽¹⁾

48 Un carré et un cube

D'après le concours australien de Mathématiques.

On cherche le plus petit entier $n \neq 0$ tel que $3n$ soit un carré et $5n$ un cube. Soit donc a et b ($a \geq 1$ et $b \geq 1$) tels que :

$$3n = a^2 \quad \text{et} \quad 5n = b^3 .$$

1) Montrer que 3 et 5^2 divisent n .

2) En déduire que 3^3 divise $5n$.

3) Conclure.

49 Reprendre l'exercice précédent en remplaçant 3 et 5 par des nombres premiers p et q distincts.

50 Un exercice des Olympiades russes (1991)

Trouver tous les entiers relatifs a, b, c et d tels que :

$$\begin{cases} ac - 2bd = 3 \\ ad + bc = 1 \end{cases}$$

Piste (rigolote) Introduire les nombres complexes ⁽²⁾

$$z = a + i\sqrt{2}b, \quad z' = c + i\sqrt{2}d \quad \text{et calculer } z \cdot z' .$$

Finir avec les carrés des modules. (Noter que, sans la piste, ...) ^(?)

(1) Pour tester si le modeste « 17 » est premier avec ce procédé, il faut donc calculer :

$$16! + 1 = 20\,922\,789\,888\,001$$

et regarder si ce nombre est divisible par 17 ; il l'est :

$$16! + 1 = 17 \times 1\,230\,752\,346\,353 .$$

On est sauvé : 17 est premier.

Avec le nombre de diviseurs

Le résultat annoncé dans le cours (exemple 3, page 373) est au rendez-vous à l'exercice 51. Suivent quelques applications (exercices 52 à 54).

51 Nombre de diviseurs

Soit la décomposition de n en facteurs premiers $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$.

Montrer que le nombre de diviseurs de n est calculé par : $(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_r)$.

52 Quel est le plus petit entier naturel possédant exactement 28 diviseurs ?

Piste Faire la liste des candidatures « sérieuses » (ce qui n'est pas le cas de $19^3 \times 37^6$ – trop grand – qui a pourtant 28 diviseurs) et comparer.

53 Montrer qu'un entier admet un nombre impair de diviseurs si, et seulement si, c'est un carré.

54 Le problème des lampes

On considère 1 000 lampes numérotées de 1 à 1 000 qui peuvent être allumées ou éteintes. Une lampe change d'état lorsque d'éteinte elle devient allumée ou encore lorsque d'allumée elle devient éteinte (logique).

Au départ, toutes les lampes étant éteintes, on effectue l'une après l'autre 1 000 manipulations (Manip. en abrégé) selon la règle suivante :

Manip 1 : seules les lampes dont le numéro est multiple de 1 changent d'état (tout le monde l'aura compris : toutes les lampes s'allument) ;

Manip 2 : seules les lampes dont le numéro est multiple de 2 changent d'état ;

Manip 3 : seules les lampes dont le numéro est multiple de 3 changent d'état ;

etc., jusqu'à :

Manip 1 000 : seules les lampes dont le numéro est multiple de 1 000 changent d'état.



On demande les numéros des lampes allumées à la fin de cette histoire.

Piste Juste au-dessus...

Nombres premiers et coefficients du binôme

55 Une autre démonstration du théorème de Fermat

1) Soit p un entier ($p \geq 2$).

Établir que, pour tout entier k ($1 \leq k \leq p-1$) :

$$k \times \binom{p}{k} = p \times \binom{p-1}{k-1}.$$

Dans toute la suite de l'exercice, p est un nombre premier.

2) Montrer que p divise $\binom{p}{k}$ pour $1 \leq k \leq p-1$.

(Ce résultat est un cas particulier de celui obtenu à l'exercice 76 du chapitre 11, page 357).

3) À l'aide de la formule du binôme, en déduire que, pour a et b entiers :

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

4) Démontrer par récurrence sur n ($n \geq 1$) que $n^p \equiv n \pmod{p}$ et retrouver ainsi le théorème de Fermat.

56 Une caractérisation des nombres premiers

Soit p un entier naturel ($p \geq 2$).

On suppose que pour $k = 1, 2, \dots, p-1$, p divise $\binom{p}{k}$.

1) À l'aide de la relation de Pascal (chapitre 10, page 301), montrer par récurrence sur k que, pour $1 \leq k \leq p-1$, on a :

$$\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}.$$

2) On suppose p non premier.

a) Prouver qu'il existe un diviseur s de p tel que $1 \leq s-1 \leq p-1$ et déduire de la question précédente que :

$$\binom{p-1}{s-1} \equiv (-1)^{s-1} \pmod{p}.$$

b) On pose $p = s \times q$ ($q \geq 1$).

À l'aide du résultat obtenu à la question 1) de l'exercice précédent, montrer que :

$$\binom{p}{s} = q \times \binom{p-1}{s-1}$$

et en déduire que :

$$q \times (-1)^{s-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

c) Obtenir alors une contradiction.

Commentaire : la propriété obtenue « p est premier si, et seulement si, p divise $\binom{p}{k}$ pour $k = 1, 2, \dots, p-1$ », en tant que test de primalité a la même efficacité que celle du théorème de Wilson (exercice 47, page 386) : l'efficacité « d'une toile d'araignée pour arrêter les avalanches » (Ian Stewart – déjà cité).

Utilisation de la décomposition en facteurs premiers

57 « $2^n + 1$ est-il un carré ? »

1) Soit n un entier ($n \geq 1$) et $m \in \mathbb{N}$ tels que :

$$2^n + 1 = m^2.$$

a) Montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que :

$$0 \leq p < q \leq n, p + q = n \text{ et } m = 2^p + 1 = 2^q - 1.$$

b) En déduire que $p = q - p = 1$.

Que vaut alors n ?

2) Pour quelle(s) valeur(s) de $n \in \mathbb{N}$, $2^n + 1$ est-il un carré ?

Le principe des tiroirs. Il n'y a pas à discuter : lorsque l'on range $n + 1$ objets (ou davantage) dans n tiroirs, alors il y a un tiroir qui contient au moins deux objets. Ce « principe des tiroirs » appelé aussi « principe de Dirichlet » (voir page 384) est mis en œuvre dans les exercices 58 et 59.

58 L'un divise l'autre

Soit $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, $(n + 1)$ entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à $2n$. Il s'agit de montrer que l'on peut toujours trouver deux nombres distincts parmi $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ tels que l'un divise l'autre.

1) Constaté le phénomène pour $n = 6$, puis pour $n = 9$.

2) a) Montrer que, pour $i = 1, 2, \dots, n + 1$, chaque a_i peut s'écrire sous la forme :

$$a_i = 2^{m_i} \times q_i$$

où m_i est un entier positif ou nul et q_i un nombre impair.

Piste Distinguer les cas : a_i est pair ; a_i est impair.

b) Combien y a-t-il de nombres impairs inférieurs à $2n$?

En déduire qu'il existe deux nombres égaux parmi $q_1, q_2, \dots, q_{n+1}$ et conclure.

3) Question subsidiaire

Montrer que, parmi $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, il existe aussi deux nombres premiers entre eux !

59 Le plus petit

1) Montrer que, parmi n entiers consécutifs l'un deux est toujours divisible par n ($n \geq 1$).

2) a) Trouver un entier n ($n \geq 2$) tel que :

- tout produit de n entiers consécutifs est divisible par le nombre 3 003 ;
- il existe un produit de $n - 1$ entiers consécutifs non divisible par 3 003.

b) Même question en remplaçant 3 003 par 2 009.

Piste Les réponses ne sont ni 3 003, ni 2 009.

60 Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels dont le PGCD est 16 et le PPCM 1 536.

Piste Exercice 27, page 384.

61 « Les zéros de $1\,000!$ »

L'exercice a pour but de déterminer par combien de zéros se termine le nombre $1\,000!$ (prière de lire « factorielle mille » et non « mille point d'exclamation » ...).

1) Montrer qu'il existe des entiers p et q ($p \geq 1$ et $q \geq 1$) et un entier N premier avec 10 tels que :

$$1\,000! = 2^p \cdot 5^q \cdot N.$$

2) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1 000 divisibles par 5, puis par 5^2 , puis par 5^3 , etc. ?

En déduire que $q = 249$.

3) Établir que $q < p$ et que q est le nombre cherché.

62 L'équation $a^m = b^n$ ($a > 1, b > 1$)

Soit m et n deux entiers donnés premiers entre eux. On propose de caractériser les entiers a et b , solutions de $a^m = b^n$, ($a \geq 2$ et $b \geq 2$).

1) Montrer que a et b ont les mêmes facteurs premiers.

2) On considère les décompositions de a et de b en facteurs premiers (les mêmes, donc) :

$$a = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} \text{ et } b = p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}.$$

a) Montrer que, pour $1 \leq i \leq r$, on a $m\alpha_i = n\beta_i$.

b) En déduire que, pour $1 \leq i \leq r$, il existe un entier k_i ($k_i \geq 1$) tel que $\alpha_i = k_i \times n$ et $\beta_i = k_i \times m$.

c) On pose $x = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ ($x \geq 2$).

Montrer que $a = x^n$ et $b = x^m$.

3) Vérifier que, réciproquement, quel que soit x entier $x \geq 2$,

$a = x^n$ et $b = x^m$ vérifient $a^m = b^n$.

Note : le résultat est pris en défaut si m et n ne sont plus premiers entre eux. Avec $m = 4$ et $n = 6$, on a une solution avec $a = 8$ et $b = 4$ ($8^4 = 4^6$). Mais il est impossible de trouver x entier tel que $8 = x^6$ et $4 = x^4$.

63 L'âge du capitaine (incontournable)

Rallye de Bourgogne 1998.

Le capitaine dit à son fils :

« La cabine n° 1 abrite M. Dupont et ses deux filles. Le produit de leurs trois âges est 2 450 et la somme de leurs trois âges est égale à quatre fois le tien. Peux-tu trouver les âges des trois passagers ? »

Après un instant, le fils répond : « Non, il me manque une donnée. »

Le capitaine ajoute alors : « Je suis plus âgé que M. Dupont. »

Le fils du capitaine en déduit aussitôt les trois réponses.

Quel est l'âge du capitaine ? de son fils ? de M. Dupont ?

Quels sont les âges des deux filles ?

Fermat dans la coulisse

Les exercices 64 à 69 sont de diverses factures ; comme l'indique le titre de cette partie, ils se rejoignent dans la mise à contribution du théorème de Fermat.

64 Le club des cinq

- 1) Déterminer un entier n tel que 9×401 divise $10^n - 1$.
- 2) En déduire qu'il existe un multiple de 2 005 qui s'écrit avec le seul chiffre 5 : 555...5.

65 Congruence

- 1) Montrer par récurrence sur n , que pour tout entier $n (n \geq 1)$, on a $10^n \equiv 4(6)$.
- 2) En déduire que $10^{10^n} \equiv 4(7)$, pour tout $n \geq 1$.

Piste Utiliser 1) sous la forme : il existe k tel que $10^n = 6k + 4$.

66 Divisibilité

Les entiers m et n sont donnés avec $m \geq n \geq 1$. On pose $N = mn(m^{60} - n^{60})$.

- 1) Soit p un nombre premier tel que $p - 1$ divise 60. Montrer que p divise N .

Piste Deux cas : p divise $m - n$ (et c'en fini) ou non (alors : Fermat).

- 2) En déduire que 56 786 730 divise N .

67 Les nombres de Carmichael

- 1) Montrer que $n = 561$ est le produit de trois nombres premiers distincts p, q et r tels que $p - 1, q - 1$ et $r - 1$ divisent $n - 1$. En déduire que pour tout entier a premier avec n , on a : $a^{n-1} \equiv 1(n)$.

- 2) Reprendre la question précédente avec $n = 1\,105$.

Les trouble-fête

Le théorème de Fermat énonce que « si p est premier, alors pour tout entier a premier avec p , on a : $a^{p-1} \equiv 1(p)$ ». Il est naturel de s'interroger sur la propriété réciproque, à savoir « Soit n un entier tel que, pour tout a premier avec n , on ait : $a^{n-1} \equiv 1(n)$. Peut-on affirmer que n est premier ? » La réponse est NON, comme nous venons de le voir avec $n = 561$, $n = 1\,105$, ... il existe une infinité de tels nombres (résultat récent : 1992), appelés nombres de Carmichael.

Ces nombres ruinent définitivement l'espoir de construire un test de primalité par l'utilisation directe d'une « réciproque » du théorème de Fermat : il n'en existe pas.

68 Les nombres de Cullen

- 1) Soit p un nombre premier impair.

Pour k entier ($k \geq 1$), on pose $n = (p-1)(kp+1)$.

- a) Prouver que $n \equiv -1(p)$ puis que $2^n \equiv 1(p)$.
- b) En déduire que p divise $n \cdot 2^n + 1$.

- 2) Les nombres de la forme $n \cdot 2^n + 1$ sont appelés nombres de Cullen (Sierpinski, 250 problèmes de Théorie des Nombres, Éditions Hachette). Montrer que pour tout nombre premier impair p , il existe une infinité de nombres de Cullen divisibles par p .

69 « La forme $6n+1$ »

Le résultat en vue est le suivant : « Il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6n+1$ ».

Pour cela, on considère un entier naturel x non nul, multiple de 6 et un nombre premier p divisant $x^2 + x + 1$.

- 1) Montrer que $p \neq 2$ et $p \neq 3$ et en déduire qu'il existe un entier n tel que $n \geq 1$ et $p = 6n+1$ ou $p = 6n+5$.
- 2) Établir que $x^3 \equiv 1(p)$ puis que $x^{6n} \equiv 1(p)$, pour tout entier n .

Piste Un classique : $x^3 - 1 = (x^2 + x + 1) \times (\dots)$.

- 3) On suppose qu'il existe $n \geq 1$ tel que $p = 6n+5$.

Montrer alors que $x \equiv 1(p)$.

Quelle valeur obtient-on pour p ?

- 4) Déduire de ce qui précède que p est de la forme $6n+1$.

- 5) Soit N un entier ($N \geq 3$). On pose $x = N$!

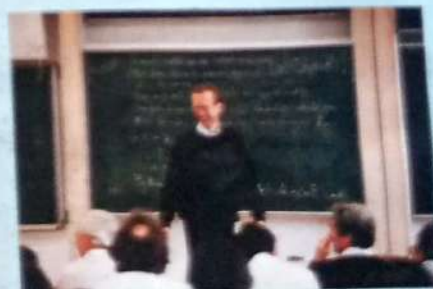
Prouver que $p > N$.

- 6) Conclure.

Le « Grand »

Le Grand Théorème de Fermat énonce que « Étant donné un entier $n \geq 3$, il est impossible de trouver des entiers x, y et z supérieurs ou égaux à 1 tels que $x^n + y^n = z^n$ » (le cas $n = 2$ a été étudié à l'exercice 107 du chapitre II, page 363).

Pendant trois siècles environ, ce résultat a résisté aux mathématiciens les plus brillants, jusqu'en 1994 où Andrew Wiles fit de la conjecture de Fermat, un « vrai » théorème (c'est-à-dire avec une preuve à la clé).



70 Heureux ou malheureux ?

D'après « Les Jeux mathématiques », le Monde (Problème 66 du 21.04.98).

Un nombre heureux est un nombre qui peut s'écrire comme somme de deux entiers naturels (non nuls) dont il divise le produit (exemple : 98 est un nombre heureux car : $98 = 70 + 28$ et 98 divise $70 \times 28 = 1\,960 = 98 \times 20$).

1) Montrer que 50 est heureux mais que 15 ne l'est pas (on dit qu'il est malheureux).

2) Soit k et m deux entiers naturels avec $k \geq 1$ et $m \geq 2$. Prouver que $k \times m^2$ est un nombre heureux.

3) À l'aide de la décomposition en facteurs premiers, établir qu'un nombre sans facteurs carrés (c'est-à-dire non divisible par un carré supérieur à 2) est malheureux.

71 Un tableau infini

On considère le tableau infini de lignes $L_1, L_2, \dots, L_k, \dots$ où la ligne L_k est formée des termes de la suite arithmétique de premier terme $k \times (k + 1)$ et de raison $k + (k + 1)$ (pour tout $k \geq 1$).

L_1	2	5	8	11	14	...
L_2	6	11	16	21	26	...
L_3	12	19	26	33	40	...
...	...	...	...	...	...	...

Soit n un entier naturel ($n \geq 1$).

1) Montrer que n est dans le tableau si, et seulement si, il existe k et N entiers ($k \geq 1$ et $N \geq 0$) tels que :

$$n = (2k + 1)N + k(k + 1).$$

2) En déduire que $4n + 1$ est premier si, et seulement si, n n'est pas dans le tableau.

72 La décomposition impossible

1) On suppose qu'il existe des entiers naturels non nuls m, n et a tels que :

$$(4m + 3)(4n + 3) = 4a^2 + 1.$$

a) Soit p un premier quelconque divisant $4m + 3$.

Montrer que p est impair et que $(2a)^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} (p)$.

b) À l'aide du théorème de Fermat, montrer que $p \equiv 1 (4)$.

c) En utilisant la décomposition de $4m + 3$ en facteurs premiers, obtenir une contradiction.

2) Soit $a \geq 1$. Montrer que le nombre $4a^2 + 1$ est composé si, et seulement si, il existe des entiers naturels m et n (avec $m \neq 0$ ou $n \neq 0$) tels que :

$$4a^2 + 1 = (4m + 1)(4n + 1).$$

L'exponentiation modulaire rapide

Le système cryptographique R.S.A. (voir page 378) conduit à calculer par exemple le nombre c_2 tel que $1 \leq c_2 \leq 2\,173$ et $453^{1\,427} \equiv c_2 \pmod{2\,173}$.

Inutile de s'acharner sur la calculatrice : elle se montrera rétive au calcul de $\text{mod}(453^{1\,427}, 2\,173)$ enfin, présentez tel quel.

Les exercices qui suivent ont pour but de dégager un procédé autorisant de tels calculs et de mesurer le « temps de calcul ».

73 Écriture d'un entier en base 2

1) À l'aide de l'algorithme des divisions euclidiennes successives (voir chapitre 11, problème 106, page 363) écrire $1\,427$ en base 2.

2) La fonction $\log_2$ (logarithme de base 2) est définie pour

$x > 0$ par $\log_2(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}$ (voir chapitre 3, exercice 109,

page 104).

Montrer que le nombre de chiffres de l'écriture d'un entier n en base 2 est calculé par $E(\log_2 n + 1)$ (E : partie entière).

Piste Un calcul analogue en base 10 est dans le chapitre 3, page 94.

74 Calcul de puissances modulo p

Pour a entier et $p \geq 2$, on note « $a \bmod p$ », l'unique entier a' entre 0 et $p - 1$ tel que $a \equiv a' \pmod{p}$ (reste de la division euclidienne de a par p).

1) On pose :

$x_1 = a \bmod p, x_2 = x_1^2 \bmod p, \dots, x_k = x_{k-1}^2 \bmod p$. Exprimer x_k comme une puissance de $a \bmod p$.

2) En utilisant l'écriture de $1\,427$ en base 2 (exercice précédent) montrer qu'il suffit de 15 multiplications $\bmod p$ pour calculer $a^{1\,427} \bmod p$ connaissant $a \bmod p$.

3) Prouver que, pour n assez grand, le nombre de multiplications $\bmod p$ à effectuer pour calculer $a^n \bmod p$ peut être estimé majoré par $2 \times \log_2 n$.

Calculer ce nombre lorsque $n = 10^6$ puis $n = 10^9$.



Un exemple de mise en œuvre de système cryptographique.

Problèmes

Deux thèmes organisent cette rubrique ; pour chacun d'eux, nous indiquons quelles parties sont indépendantes les unes des autres.

Thème 1 : Ordre d'un élément modulo un nombre premier

Les problèmes 76 et 77 sont indépendants : ils font tous deux appel au résultat dégagé dans le problème 75.

75 Ordre modulo p

Soit p un nombre premier et a un entier ($a \geq 1$) premier avec p .

1) Montrer que l'ensemble des entiers k ($k \geq 1$) tels que $a^k \equiv 1(p)$ n'est pas vide.

2) On désigne alors par s le plus petit élément de cet ensemble. Soit k un entier ($k \geq 1$) tel que $a^k \equiv 1(p)$.

a) Montrer que le reste r de la division euclidienne de k par s vérifie $a^r \equiv 1(p)$.

b) En déduire que $r = 0$ puis que s divise k .

3) Montrer alors que s divise $p - 1$.

Note : le nombre s est l'ordre de a modulo p (il n'est défini que si a est premier avec p). Voici résumés les résultats utiles pour la suite.

- 1) $s \geq 1$ et $a^s \equiv 1(p)$.
- 2) $k \geq 1$ vérifie $a^k \equiv 1(p)$ si, et seulement si, s divise k .
- 3) s divise $p - 1$ (Fermat oblige : voir questions 1) et 3)).

76 Diviseurs premiers d'un nombre de Fermat

Pour n entier ($n \geq 1$), on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ et l'on désigne par p un nombre premier divisant F_n .

1) Montrer que p est impair et que $2^{2^n} \equiv -1(p)$.

2) Soit s l'ordre de 2 modulo p (s est bien défini car p est impair).

a) Prouver que s divise 2^{n+1} .

b) Montrer que, pour $0 \leq r \leq n$, 2^{2^r} n'est pas congru à 1 mod p .

Piste : Raisonner par l'absurde en élevant à la puissance d'exposant 2^{n-r} .

3) En déduire que $s = 2^{n+1}$, puisqu'il existe un entier k ($k \geq 1$) tel que $p = k \times 2^{n+1} + 1$.

Attention : tout premier divisant F_n est de cette forme, mais il n'est pas dit que les nombres $k \times 2^{n+1} + 1$ soient nécessairement premiers.

4) Applications

Sans utiliser la décomposition en facteurs premiers qu'effectue la calculatrice, montrer que F_4 est premier, F_5 ne l'est pas et expliquer pourquoi ; on en vient naturellement à essayer 641 comme diviseur de F_5 (voir l'exercice 2, page 382).

77 Encore Dirichlet, encore Mersenne

Soit p un nombre premier et x un entier naturel non nul.

Il s'agit de montrer que tout nombre premier divisant $(x+1)^p - x^p$ est de la forme $np + 1$ et d'examiner quelques applications.

1) Soit q un nombre premier divisant $(x+1)^p - x^p$.

a) Montrer que $q \geq 3$ et que q est premier avec x .

En déduire que :

$$x^{p(q-1)} \equiv 1 \pmod{q}.$$

b) On pose $a = (x+1)x^{q-2}$.

Montrer que $a^p \equiv 1 \pmod{q}$ mais que $a \not\equiv 1 \pmod{q}$.

En déduire que l'ordre de a modulo q est égal à p , puisqu'il existe n ($n \geq 1$) tel que $q = np + 1$.

2) Application 1

On pose $x = N!$ (N entier naturel non nul).

Montrer que tout nombre premier divisant $(x+1)^p - x^p$ est plus grand que N .

En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $np + 1$.

3) Application 2

On pose $x = 1$. Montrer que tout nombre premier et $p \neq 2$ divisant le nombre de Mersenne $M_p = 2^p - 1$ (p premier) est de la forme :

$$2kp + 1 \quad (k \geq 1).$$

On veut savoir « à la main » si M_{11} est composé.

Quel est votre premier essai ?

Les nombres « records »

Sauf entre 1989 et 1992, le « record » (le plus grand nombre premier découvert) a toujours été un nombre de Mersenne.

On ignore si, parmi les nombres M_p (p premier) une infinité sont premiers, une infinité sont composés.

Bien sûr, l'une des deux propriétés est nécessairement satisfaite, peut-être même les deux...



Martin Mersenne (1588-1648)

Thème 2 : les nombres parfaits

Les problèmes 79 et 80 sont indépendants : chacun utilise le résultat du problème 78.

78 Somme des diviseurs d'un entier

Pour tout entier n ($n \geq 1$), on note $\sigma(n)$ la somme de tous les diviseurs de n (ainsi $\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$).

1) Soit p un nombre premier et k un entier ($k \geq 1$).

Montrer que :

$$\sigma(p^k) = 1 + p + \dots + p^k = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}.$$

2) Soit toujours p premier, $k \geq 1$. On considère un entier q premier avec p .

a) Montrer que la liste des diviseurs de $n = p^k \times q$ est : $d, pd, p^2d, \dots, p^kd$ où d est un diviseur quelconque de q .

b) En déduire que :

$$\sigma(p^k q) = \sigma(p^k) \times \sigma(q).$$

3) Soit n un entier ($n \geq 2$) et $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en facteurs premiers. Montrer que :

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + \dots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + \dots + p_2^{\alpha_2}) \dots (1 + p_r + \dots + p_r^{\alpha_r}).$$

Piste De proche en proche ou par récurrence sur r pour être plus rigoureux.

On rappelle qu'un nombre parfait n est un nombre tel que $\sigma(n) = 2n$ (il revient au même de dire que la somme des diviseurs stricts de n (distincts de n) est égale à n).

79 Les nombres parfaits pairs

Soit N un entier naturel non nul pair.

1) Justifier l'existence d'un entier n ($n \geq 2$) et d'un entier naturel q impair tel que :

$$N = 2^{n-1} \times q.$$

2) On suppose N parfait.

a) Montrer que :

$$2^n q = (2^n - 1) \sigma(q)$$

et en déduire que, si s est la somme des diviseurs stricts de q , on a :

$$q = (2^n - 1)s.$$

b) Prouver alors que $s = 1$, puis que $q = 2^n - 1$ est premier.

Piste La relation obtenue en a) indique en particulier que s est un diviseur strict de q .

c) Utiliser les résultats de l'exercice 5, page 382, pour montrer que n est premier et donc que :

$$N = 2^{p-1} M_p$$

où $M_p = 2^p - 1$ avec p et M_p premiers.

Et les impairs ?

Les résultats du problème précédent et du problème 2 (page 375) montrent que la destinée des nombres parfaits pairs (en existe-t-il une infinité ?) est définitivement scellée à celle des nombres de Mersenne, premiers puisque : les nombres parfaits pairs sont les $2^{p-1} \cdot M_p$ où p et $M_p = 2^p - 1$ sont premiers.

En ce qui concerne les nombres impairs, les arithméticiens ont quelques solides raisons de conjecturer qu'il n'existe pas de nombres parfaits impairs (il n'y en a aucun plus petit que 10^{50} (*sic*) ou divisible par moins de 11 premiers distincts, etc.) Pourtant, en 1638, Descartes crut bien en tenir un (voir ci-après).



René Descartes (1596-1650).

80 À la recherche de...

A) L'erreur de Descartes

On pose $N = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 22\,021$.

1) Vérifier avec la calculatrice que :

$$(1 + 3 + 3^2)(1 + 7 + 7^2)(1 + 11 + 11^2)(1 + 13 + 13^2)(1 + 22\,021) = 2N.$$

2) Pourtant, le nombre N impair n'est pas parfait. Où est l'erreur ?

Piste Revoir soigneusement le résultat obtenu (question 3)).

B) Un résultat (facile) de Sylvester

1) Soit n un entier ($n \geq 2$) et α un entier ($\alpha \geq 1$).

Montrer que :

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} < \frac{n}{n-1} \leq 2.$$

2) Soit p un nombre premier et α un entier ($\alpha \geq 1$).

Montrer que p^α n'est pas un nombre parfait.

3) Soit p et q deux nombres premiers impairs distincts et α et β deux entiers tels que $\alpha \geq 1$ et $\beta \geq 1$. On pose $N = p^\alpha q^\beta$. Montrer que :

$$\frac{\sigma(N)}{N} < \frac{p}{p-1} \times \frac{q}{q-1}$$

et en déduire que N n'est pas parfait.

Piste Utiliser la question 1) et remarquer que parmi p et q l'un est supérieur ou égal à 3, l'autre est supérieur ou égal à 5 (James J. Sylvester (1814-1897), mathématicien britannique).

Similitudes

OBJECTIFS

- Introduire une classe de transformations : les similitudes, incluant rotations, translations, réflexions, homothéties et toutes leurs composées.
- Investir les propriétés des similitudes dans l'étude des figures, les problèmes de lieux et de constructions.

« Dès l'époque secondaire, les mollusques construisaient leur coquille en suivant les leçons de la géométrie transcendante. »

Gaston Bachelard



Avant-première

1. OBJECTIF

On en prendra rapidement conscience : ce chapitre additionne les demandes en direction du produit scalaire, des angles orientés, des nombres complexes, des transformations, etc. : se préparer à « faire feu de tout bois » est donc l'objectif de cette rubrique.

2. BON À CONNAÎTRE

Contrairement à ce que pourrait laisser croire son intitulé, cette séquence n'est pas un fouillis d'exercices de révision : toutes les propriétés mises en évidence seront utilisées par la suite.

Séquence 1

« Méli-mélo »

① Avec les nombres complexes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O, I, J) .

1) Les affixes des points A, B, A' et B' vérifient :

$$\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Déterminer $\frac{A'B'}{AB}$ et l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

2) Le repère (O', I', J') est orthonormal.

Montrer qu'il existe un réel θ tel que les affixes u de $\overrightarrow{O'I'}$ et v de $\overrightarrow{O'J'}$ dans le repère (O, I, J) vérifient :

$$u = e^{i\theta} \text{ et } v = ie^{i\theta} \text{ ou } v = -ie^{i\theta}.$$

② Avec le produit scalaire

1) Donner une expression du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en fonction seulement des distances AB, AC et BC (A, B et C sont des points du plan).

2) Soit (O, I, J) un repère orthonormal et M le point de coordonnées (x, y) .

Que vaut $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OI}$? $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OJ}$?

③ Avec le barycentre

Soit A et B deux points d'affixes a et b , et α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

Montrer que le point G d'affixe z est barycentre de (A, α) et (B, β) si, et seulement si :

$$(\alpha + \beta)z = \alpha a + \beta b.$$

3. TRANSFORMATIONS DU PLAN

• Rappelons qu'une transformation plane f est une application du plan P dans lui-même qui « atteint tout point du plan une et une seule fois ». En le disant autrement : « Pour tout point m de P , il existe un unique point M de P tel que $f(M) = m$ ».

On peut alors introduire l'application qui associe, à tout point m de P , le point M tel que $f(M) = m$. Il s'agit encore d'une transformation appelée **transformation réciproque** de f et notée f^{-1} .

• Par ailleurs, étant donné deux transformations f et g , on note $g \circ f$ la composée de f par g définie par $g \circ f(M) = g(f(M))$, et que l'on peut schématiser ainsi :

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & M_1 = f(M) & & \\ & & \downarrow g & & \\ & & M_1 & \xrightarrow{g} & M' = g(M_1) = g(f(M)) \end{array}$$

La séquence 2 vise à se familiariser avec de telles notions.

Séquence 2

« f^{-1} et $g \circ f$ »

1 Des transformations réciproques

Déterminer la transformation réciproque :

- de la translation de vecteur $\vec{u}$;
- de l'homothétie de centre O , de rapport k ($k \in \mathbb{R}^*$) ;
- de la rotation de centre O , d'angle θ ($\theta \in \mathbb{R}$) ;
- de la réflexion d'axe Δ .

2 L'algèbre des compositions

Soit f, g et h des transformations.

Établir les équivalences :

- $f \circ g = \text{id}_P \Leftrightarrow f = g^{-1} \Leftrightarrow g = f^{-1}$.
- $f \circ g = h \Leftrightarrow f = h \circ g^{-1} \Leftrightarrow g = f^{-1} \circ h$.

3 Le principe de composition

Soit f et g deux transformations.

1) On suppose que f et g vérifient la propriété : « l'image de toute droite est une droite ». Montrer qu'il en est de même de $g \circ f$.

2) Montrer que, si f et g conservent les milieux, alors $g \circ f$ aussi.

3) Prouver que, si f et g changent tous les angles orientés en leurs opposés, alors $g \circ f$ conserve les angles orientés.

Remarque : le principe de composition permet de transférer à $g \circ f$ certaines des propriétés de f et g : conservation du parallélisme, de l'orthogonalité, du barycentre... images des figures usuelles (cercle $\rightarrow$ cercle...), mais il faut savoir rester prudent (voir exercice 3, ci-dessus).

• Avec l'écriture complexe

Soit t et r les transformations d'écritures complexes⁽¹⁾ :

$t: z' = z + 1$ et $r: z' = iz$, et f la composée $t \circ r$:

- r associe au point $M(z)$ le point $M_1(z_1)$ avec $z_1 = iz$;
- t associe au point $M_1(z_1)$ le point $M'(z')$ avec $z' = z_1 + 1$.

L'écriture complexe de $t \circ r$ est alors $z' = iz + 1$: c'est la composée dans le même ordre des écritures complexes de r et t . Ce résultat est général : l'écriture complexe de la composée de deux transformations s'obtient en composant dans le même ordre leurs écritures complexes.

Voici, sur ce sujet, de quoi s'entraîner un peu.

Séquence 3

« Écritures complexes »

1 Déterminer, dans chaque cas, l'écriture complexe de $f \circ g$ et de $g \circ f$:

- $f: z' = 2z + i$; $g: z' = -iz + 1$.
- $f: z' = \bar{z} + 1$; $g: z' = (i + 1)z$.
- $f: z' = -z + i$; $g: z' = 2\bar{z} - 1$.
- $f: z' = i\bar{z} - 1$; $g: z' = -2z + 1$.

2 Identifier géométriquement les transformations t, r et $t \circ r$ de l'exemple introductif ci-dessus.

Piste Chercher un point fixe de $t \circ r$.

3 Soit ω un nombre complexe.

Reconnaître les transformations géométriques f et g d'écritures :

- $h: z' - \omega = k(z - \omega)$ (k réel $k \neq 0$) ;
- $r: z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ (θ réel).

Montrer à l'aide des écritures complexes que :

$$h \circ r = r \circ h.$$

4 Soit s d'écriture complexe $z' = j\bar{z} + 1 - j$. Montrer que $s \circ s = \text{id}_P$.

(Rappel : $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.)

(1) Compte tenu du contexte, on peut alléger la tournure jusqu'à « soit $t: z' = z + 1$ ». (Personne ne peut se tromper.)

1. Similitudes : généralités

1.1 DÉFINITION ET PREMIERS EXEMPLES

DÉFINITION 1

Soit k un réel strictement positif.

On appelle **similitude de rapport k** toute transformation du plan qui multiplie les distances par k , à savoir :

quels que soient les points A et B d'images A' et B' , on a $A'B' = k \cdot AB$.

Remarques :

- D'emblée, on peut penser qu'une similitude de rapport k correspond à un **agrandissement** ou à une **réduction** à l'échelle k : patientons un peu pour redonner un sens mathématique précis à de telles expressions.

- Il est facile de montrer (c'est à la charge de l'exercice 16, page 413) qu'une similitude est aussi une transformation qui **conserve les rapports de distances**.

Exemples

① Une **homothétie** de rapport k est une similitude :

- de rapport k , si $k > 0$;
- de rapport $-k$, si $k < 0$.

En effet, nous tirons de la relation vectorielle fondamentale d'une homothétie de rapport k : $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$, l'égalité $M'N' = |k|MN$, d'où...

② Une similitude de rapport 1, c'est-à-dire une **transformation qui conserve les distances**, est appelée **isométrie** (nous y reviendrons). Ainsi, translations, rotations et réflexions sont des isométries.

③ Comme nous le verrons, l'**écriture complexe d'une similitude** (clef de voûte de ce chapitre) ne va pas arriver en sifflant...

Un premier exemple est utile dès maintenant sur ce sujet.



EXEMPLE 1

Montrer que les transformations s et s' d'écritures complexes :

$$s : z' = (2+i)z + 1+i \quad \text{et} \quad s' : z' = (2+i)\bar{z} + (1+i)$$

sont des similitudes dont on précisera le rapport.

Soit $A(a)$ et $B(b)$ deux points et $A'(a')$ et $B'(b')$ leurs images par :

• s : on a $a' = (2+i)a + 1+i$ et $b' = (2+i)b + (1+i)$ d'où :

$$b' - a' = (2+i)(b-a).$$

Ainsi $|b' - a'| = |2+i||b-a| = \sqrt{5}|b-a|$. On a donc :

$A'B' = \sqrt{5}AB$: S est une similitude de rapport $\sqrt{5}$.

• s' : cette fois $a' = (2+i)\bar{a} + 1+i$ et $b' = (2+i)\bar{b} + 1+i$, d'où :

$$b' - a' = (2+i)(\bar{b} - \bar{a}) = (2+i)\overline{(b-a)}.$$

Comme $|\overline{b-a}| = |b-a|$, on obtient : $|b' - a'| = |2+i||b-a| = \sqrt{5}|b-a|$,

soit : $A'B' = \sqrt{5}AB$: S' est aussi une similitude de rapport $\sqrt{5}$.

Voir exercices 13 à 16

1.2 PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Produit scalaire

Dans toute cette partie, s désigne une similitude de rapport k et nous continuons à noter les images par s des points $A, B, C, \dots$, par $A', B', C', \dots$

$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = k^2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et, si s est une isométrie, $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
Cela résulte de l'expression des produits scalaires :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) ; \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \frac{1}{2}(A'B'^2 + A'C'^2 - B'C'^2)$$

et des égalités :

$$A'B' = k AB, A'C' = k AC \text{ et } B'C' = k BC.$$

Angles géométriques

Une similitude conserve les angles géométriques : $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$.

Utilisons cette fois comme expression du produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} \text{ et } \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = A'B' \cdot A'C' \cdot \cos \widehat{B'A'C'}.$$

La propriété précédente jointe aux égalités $A'B' = k AB$ et $A'C' = k AC$ livrent $\cos \widehat{B'A'C'} = \cos \widehat{BAC}$.

Comme $\widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{BAC}$ sont des angles géométriques – donc mesurés dans $[0, \pi]$ – on en déduit $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$.

Repère orthonormal

L'image par une similitude d'un repère orthonormal (O, I, J) est un repère orthogonal (O', I', J') où $O'I' = O'J' = k$ (rapport de la similitude).

Ceci est une conséquence immédiate de ce qui précède et nous observons que : l'image d'un repère orthonormal par une isométrie est un repère orthonormal.

1.3 COMPOSITION, DÉCOMPOSITION

Proposition 1

La transformation réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.

La composée de deux similitudes de rapports k_1 et k_2 est une similitude de rapport $k_1 \cdot k_2$.

La preuve de ce résultat (presque immédiate) est laissée à titre d'exercice (voir exercice 17, page 413).

Voici, en revanche, une application intéressante : « La composée d'une homothétie et d'une isométrie est une similitude ». Mais, à dire vrai, c'est la réciproque qui est très intéressante :

Proposition 2

Toute similitude de rapport k ($k > 0$) est la composée d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie.

... Démonstration

Soit s une similitude de rapport k ($k > 0$) et h une homothétie de rapport $\frac{1}{k}$. D'après la proposition 1, $h \circ s$ est une similitude de rapport $k \cdot \frac{1}{k} = 1$, c'est-à-dire une isométrie f .

De $h \circ s = f$, il n'y a plus qu'à « tirer » $s = h^{-1} \circ f$, en notant que h^{-1} est une homothétie de rapport k .

C.Q.F.D.

2. Écriture complexe d'une similitude

2.1 ÉCRITURE COMPLEXE D'UNE ISOMÉTRIE

THÉORÈME 1

Les **isométries** du plan sont les transformations d'écriture complexe :

$$z \mapsto e^{i\theta} z + b \quad \text{ou} \quad z \mapsto e^{i\theta} \bar{z} + b,$$

θ étant un nombre réel et b un nombre complexe.

... Démonstration

Première partie

Comme on le verra à l'exercice 22, page 413, il est enfantin d'établir que les transformations d'écritures complexes :

$$z \mapsto e^{i\theta} z + b \quad \text{et} \quad z \mapsto e^{i\theta} \bar{z} + b$$

sont des isométries.

Ce qui suit (la réciproque) est autrement sérieux.

Seconde partie

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct (O, I, J) , f est une isométrie du plan et O', I', J' sont les images respectives de O, I, J par f .

Nous savons que (O', I', J') est un repère orthonormal (voir partie 1.2, page 397).

Lemme

Soit M un point du plan et M' son image par f .

Si $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$ (x, y réels), alors $\overrightarrow{O'M'} = x\overrightarrow{O'I'} + y\overrightarrow{O'J'}$.

Comme (O', I', J') est un repère, il existe x', y' réels tels que :

$$\overrightarrow{O'M'} = x'\overrightarrow{O'I'} + y'\overrightarrow{O'J'}.$$

Par ailleurs, les repères (O, I, J) et (O', I', J') étant *orthonormaux*, on a :

$$x = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OI}, \quad y = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OJ}$$

et de même :

$$x' = \overrightarrow{O'M'} \cdot \overrightarrow{O'I'}, \quad y' = \overrightarrow{O'M'} \cdot \overrightarrow{O'J'}.$$

La propriété relative au produit scalaire (voir partie 1.2, page 397) assure des égalités :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{O'M'} \cdot \overrightarrow{O'I'} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{O'M'} \cdot \overrightarrow{O'J'}.$$

Par suite, $x = x'$ et $y = y'$; le lemme est démontré.

Fin de la démonstration

Soit u et v les affixes (dans le repère (O, I, J)) des vecteurs $\overrightarrow{O'I'}$ et $\overrightarrow{O'J'}$.

• Comme $\|\overrightarrow{O'I'}\| = 1$, il existe un réel θ tel que $u = e^{i\theta}$.

• Avec $\|\overrightarrow{O'J'}\| = 1$ et $\overrightarrow{O'J'} \perp \overrightarrow{O'I'}$, v s'écrit : $v = \pm iu = \pm ie^{i\theta}$.

Soit alors M d'affixe $z = x + iy$. On a donc $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$, d'où, d'après le lemme :

$$\overrightarrow{O'M'} = x\overrightarrow{O'I'} + y\overrightarrow{O'J'}.$$

En désignant par b l'affixe de O' et par z' celle de M' , on obtient :

$$z' - b = xu + yv, \quad \text{soit} \quad z' = xu + yv + b.$$

Finalement :

• si $v = ie^{i\theta}$, $z' = xe^{i\theta} + yie^{i\theta} + b = (x + iy)e^{i\theta} + b$: $z' = e^{i\theta}z + b$;

• si $v = -ie^{i\theta}$, $z' = xe^{i\theta} - yie^{i\theta} + b = (x - iy)e^{i\theta} + b$: $z' = e^{i\theta}\bar{z} + b$.

C'est fini : très beau théorème, comme on les aime.

2.2 ÉCRITURE COMPLEXE D'UNE SIMILITUDE

THÉORÈME 2

Les similitudes sont les transformations d'écriture complexe :

$$z \longrightarrow az + b \quad \text{ou} \quad z \longrightarrow a\bar{z} + b,$$

où :

- a et b sont des nombres complexes, avec $a \neq 0$;
- le rapport de la similitude est le module de a .

... Démonstration

D'après la *proposition 2*, une similitude s de rapport k ($k > 0$) est la composée d'une homothétie h de rapport k et d'une isométrie f .

Comme l'écriture complexe de h est $z' = kz + b_1$ (où $b_1 \in \mathbb{C}$), si :

• l'écriture complexe de l'isométrie f est $z' = e^{i\theta}z + b_2$ ($b_2 \in \mathbb{C}$), alors $s = h \circ f$ est telle que $z' = k(e^{i\theta}z + b_2) + b_1$, soit :

$$z' = az + b,$$

avec $a = ke^{i\theta}$, d'où $|a| = k$ et peu importe b ;

• l'écriture complexe de f est $z' = e^{i\theta}\bar{z} + b_2$ ($b_2 \in \mathbb{C}$), alors $s = h \circ f$ est telle que

$$z' = k(e^{i\theta}\bar{z} + b_2) + b_1, \text{ soit : } z' = a\bar{z} + b,$$

avec $a = ke^{i\theta}$ et toujours $|a| = k$.

COROLLAIRE

Toute similitude est la composée de translations, réflexions, rotations et homothéties.

... Démonstration

Translations, réflexions, rotations et homothéties sont des similitudes ; d'après la *proposition 1*, il en est de même de leurs composées.

Réciproquement, il suit du *théorème 2* que toute similitude s'obtient en composant (en tout ou partie) les transformations d'écritures :

$$z \longrightarrow \bar{z} ; \quad z \longrightarrow e^{i\theta}z \quad (\theta \text{ réel}) ; \quad z \longrightarrow kz \quad (k \in \mathbb{R}^*) ; \quad z \longrightarrow z + b \quad (b \in \mathbb{C})$$

où nous reconnaissons – dans l'ordre – une réflexion, une rotation, une homothétie et une translation.

2.3 PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES

L'essentiel

- Une similitude transforme une droite en droite, un segment en segment et un cercle en cercle.
 - Une similitude conserve le parallélisme, l'orthogonalité, le contact, le barycentre et multiplie les aires par le carré de son rapport.
- Explication de la cueillette ? Le principe de composition (voir Avant-première, séquence 2, page 395) sauf pour le barycentre que nous proposons d'examiner à part (voir exercice 29, page 414).

3. Similitude directe, similitude indirecte

3.1 EFFET SUR LES ANGLES ORIENTÉS

THÉORÈME 3

Les similitudes d'écriture complexe $z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$) conservent les angles orientés, et les similitudes d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ ($a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$) changent les angles orientés en leur opposé.

... Démonstration

Soit s une similitude et trois points distincts A, B et C d'images A', B' et C' par s .

① s est d'écriture complexe $z' = az + b$

On a alors $z_{A'} = az_A + b$, $z_{B'} = az_B + b$ et $z_{C'} = az_C + b$, d'où :

$$z_{\overrightarrow{A'B'}} = z_{B'} - z_{A'} = a(z_B - z_A) = az_{\overrightarrow{AB}} \text{ et, de même, } z_{\overrightarrow{A'C'}} = az_{\overrightarrow{AC}}.$$

Il en découle $\frac{z_{\overrightarrow{A'C'}}}{z_{\overrightarrow{A'B'}}} = \frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$ et donc $\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{A'C'}}}{z_{\overrightarrow{A'B'}}}\right) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) [2\pi]$, soit :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) [2\pi].$$

② s est d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$

Les calculs analogues nous conduiraient cette fois à :

$$\frac{z_{\overrightarrow{A'C'}}}{z_{\overrightarrow{A'B'}}} = \frac{\overline{z_{\overrightarrow{AC}}}}{\overline{z_{\overrightarrow{AB}}}} = \overline{\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right)}, \text{ d'où } \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{A'C'}}}{z_{\overrightarrow{A'B'}}}\right) = -\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) [2\pi], \text{ soit :}$$

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) [2\pi].$$

3.2 SIMILITUDE : DIRECTE OU INDIRECTE

- Les similitudes d'écriture $z' = az + b$ qui conservent les angles orientés sont appelées **similitudes directes** et **déplacements** s'il s'agit d'une isométrie ($|a| = 1$).

Les translations et les rotations sont des déplacements ; nous verrons que ce sont les seuls.

- Les autres similitudes (écriture $z' = a\bar{z} + b$) sont (évidemment) appelées **indirectes** et **antidépacements** dans le cas des isométries ($|a| = 1$).

Les réflexions sont des antidépacements : nous verrons que ce ne sont pas les seuls.

• Les poissons d'Escher

Ils illustrent (Fig. 1) ce que sont des formes semblables **directement** telles A et B : B est une réduction de A et l'**orientation** a été conservée, ce qui n'est pas le cas des formes A et C indirectement semblables. Soulignons que B et C , de même taille, se correspondent par un **antidépacement** et qu'il n'était que temps, à la huitième page d'un chapitre consacré aux similitudes, de donner à voir des formes semblables...

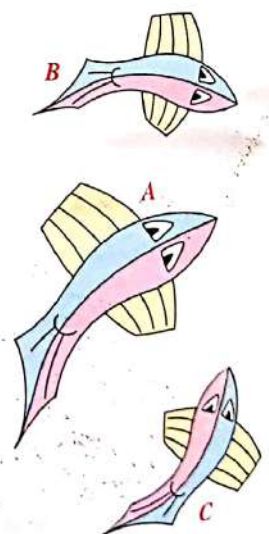


Fig. 1

3.3 POINTS FIXES D'UNE SIMILITUDE

Le cas des réflexions

Nous avons pu ranger les réflexions parmi les **antidéplacements** parce que :

- d'une part, ce sont des *isométries* ;
- d'autre part, il nous était connu qu'elles *changent les angles orientés en leurs opposés*.

En conséquence, l'écriture complexe d'une réflexion est de la forme :

$$z' = a\bar{z} + b \text{ avec } a \text{ et } b \text{ complexes et } |a| = 1.$$

La réciproque est fautive (voir thème d'étude, page 422).

Voici, sous forme d'exemple, une première application.



EXEMPLE 2

Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives u et v .

Quelle est l'écriture complexe de la réflexion d'axe (AB) ?

L'écriture complexe est *a priori* de la forme $z' = a\bar{z} + b$ avec $|a| = 1$.

Comme la réflexion d'axe (AB) fixe A et B , nous avons :

$$\begin{cases} u = a\bar{u} + b \\ v = a\bar{v} + b \end{cases} : \text{voici un « petit » système d'inconnues } a \text{ et } b \text{ qui se résout sans}$$

peine :
$$a = \frac{v-u}{\bar{v}-\bar{u}}, \text{ puis } b = u - a\bar{u}.$$

On obtient, en arrangeant un peu (le souci, ici, n'est pas l'esthétisme ; il s'agit de donner mieux à voir) :

$$z' - u = \frac{v-u}{\bar{v}-\bar{u}} (\bar{z} - \bar{u}).$$

Remarques :

- $a = \frac{v-u}{\bar{v}-\bar{u}}$ répond à la demande $|a| = 1$ $\left(\left| \frac{v-u}{\bar{v}-\bar{u}} \right| = \left| \frac{v-u}{\overline{v-u}} \right| = 1 \right).$

- Mieux : toute transformation d'écriture $z' = a\bar{z} + b$ qui fixe A et B est la réflexion d'axe (AB) .

Voir exercices 30 à 34

Proposition 3

Toute similitude qui fixe deux points distincts A et B est soit l'**identité**, soit la **réflexion d'axe (AB)** .

... Démonstration

- Les points fixes d'une similitude s d'écriture $z' = az + b$ ont pour affixes les solutions de l'équation $z = az + b$ ou $(1-a)z = b$. Alors :

- si $a \neq 1$, il existe un seul point fixe ;
- si $a = 1$, il n'y a aucun point fixe si $b \neq 0$ et tous les points sont fixes si $b = 0$; la similitude s est alors l'**identité**.

- Si s a pour écriture $z' = a\bar{z} + b$ et si elle fixe A et B , alors s est la **réflexion d'axe (AB)** (voir exemple 2, remarques).

4. Similitudes directes

4.1 FORME RÉDUITE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE

THÉORÈME 4

Soit s la similitude directe d'écriture complexe $z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$).

- Lorsque $a = 1$, s est la **translation** de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b .
- Lorsque $a \neq 1$, s admet **un seul point fixe** Ω et s est la **composée** dans un ordre indifférent :
 - de l'**homothétie** de centre Ω et de rapport k , avec $k = |a|$;
 - de la **rotation de même centre** Ω et d'angle θ , avec $\theta = \arg a [2\pi]$.

L'écriture complexe de s est alors :

$$z' - \omega = k e^{i\theta} (z - \omega)$$

où ω est l'affixe du point fixe Ω .

... Démonstration

Nous supposons $a \neq 1$ (le cas $a = 1$ étant une évidence).

- Il est clair que l'équation aux points fixes de s : $z = az + b$ ou $(1 - a)z = b$ admet une unique solution ω ($\omega = \frac{b}{1-a}$, si l'on y tient).

Le point $\Omega(\omega)$ est donc l'**unique point fixe** de s .

- Comme $\omega = a\omega + b$, la relation $z' = az + b$ s'écrit :

$$z' - \omega = a(z - \omega).$$

En écrivant a sous la forme $a = k e^{i\theta}$ (où $k = |a|$ et $\theta = \arg a [2\pi]$), on obtient :

$$z' - \omega = k e^{i\theta} (z - \omega) \quad (1).$$

- La rotation r de centre Ω et d'angle θ et l'homothétie de centre Ω et de rapport k ont pour écritures complexes respectives :

$$r: z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega) ; \quad h: z' - \omega = k(z - \omega).$$

Il est clair alors qu'en composant dans n'importe quel ordre les écritures complexes de r et de h , on obtient l'écriture complexe (1). On a donc :

$$h \circ r = r \circ h = s.$$

Note : comme l'illustre la figure 2, l'égalité $h \circ r = r \circ h$ est en soi géométriquement évidente.

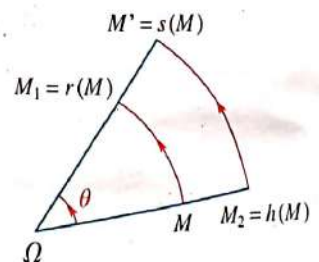


Fig. 2

Vocabulaire

L'écriture de s sous la forme $h \circ r$ (ou $r \circ h$) s'appelle la **forme réduite** de s . On dit alors que s est la **similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle θ** (et lorsqu'on ne peut vraiment faire autrement, on la note $s(\Omega, k, \theta)$).

À bien noter : h et r ont le **même** centre, le rapport de l'homothétie h est **positif**, et une saisie immédiate de toute cette information est proposée par l'écriture complexe :

$$z' - \omega = k e^{i\theta} (z - \omega) \quad (\omega \in \mathbb{C}, \theta \text{ réel}, k \text{ réel positif}).$$

4.2 PREMIÈRES APPLICATIONS

Mise sous
forme réduite

Il convient de savoir obtenir la forme réduite d'une similitude directe : un exemple est bienvenu pour illustrer le procédé.



EXEMPLE 3

Quelle est la forme réduite de la similitude directe d'écriture complexe $z' = (1+i)z + 1$?

L'équation aux points fixes de $s : z = (1+i)z + 1$ a pour solution $\omega = i$.

En écrivant $a = 1+i$ sous la forme exponentielle $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, l'écriture de

s est alors $z' - i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - i)$.

s est donc la similitude directe de centre $\Omega(i)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Voir exercices 40 à 49

Terrain miné

Soit λ un réel négatif. La forme réduite de la composée $h_{(O, \lambda)} \circ r_{(O, \theta)}$ (θ réel) est :

$$h_{(O, -\lambda)} \circ r_{(O, \theta + \pi)}.$$

En particulier, la forme réduite de l'homothétie $h_{(O, \lambda)}$ (lorsque $\lambda < 0$) est $h_{(O, -\lambda)} \circ s_O$ (s_O étant la symétrie de centre O).

La proposition qui suit résume l'essentiel des propriétés géométriques d'une similitude directe définie par centre, rapport et angle.

Proposition 4

Soit s la similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle θ .

1) Un point, son image et le centre

Pour tout point M d'image M' par s , on a :

$$\Omega M' = k \cdot \Omega M \text{ et } (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta [2\pi] \text{ (lorsque } M \neq \Omega \text{)}.$$

2) Deux points et leurs images

Pour tous points A et B d'images A' et B' , on a :

$$A'B' = k AB \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta [2\pi] \text{ (lorsque } A \neq B \text{)}.$$

... Démonstration

Seule la toute dernière propriété vaut une explication que l'on va trouver dans l'écriture complexe de s :

On a en effet : $z_{A'} - \omega = ke^{i\theta}(z_A - \omega)$ et $z_{B'} - \omega = ke^{i\theta}(z_B - \omega)$, d'où :

$$\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} = \frac{(z_{B'} - \omega) - (z_{A'} - \omega)}{z_B - z_A} = \frac{ke^{i\theta}(z_B - z_A)}{z_B - z_A} = ke^{i\theta}.$$

Comme $k > 0$, on en déduit $\arg\left(\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}\right) = \theta [2\pi]$.

Ceci n'est autre que l'égalité $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta [2\pi]$.

Remarques :

• On notera que le résultat précédent tient pour une rotation.

• Dans le cas particulier d'une similitude directe d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$, on a donc qu'une droite et son image sont orthogonales.

4.3 AUTRES DÉFINITIONS D'UNE SIMILITUDE DIRECTE

Avec un triangle

Étant donné un triangle ABC (Fig. 3), il existe une seule similitude directe de centre A transformant B en C : il s'agit de la similitude directe de centre A , de rapport $k = \frac{AC}{AB}$ et d'angle $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Cela revient donc à introduire une similitude directe par son centre, un point et son image.

Dans les figures suivantes qui font référence aux triangles les plus en vue de la géométrie (*triangle rectangle isocèle*, *triangle équilatéral*), nous indiquons le rapport k et l'angle θ de la similitude directe de centre Ω qui transforme M en M' (voir aussi l'exercice 51, page 416).

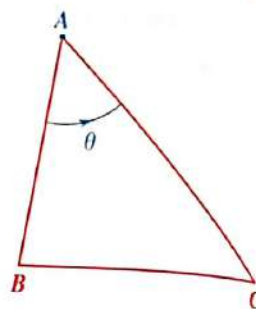


Fig. 3

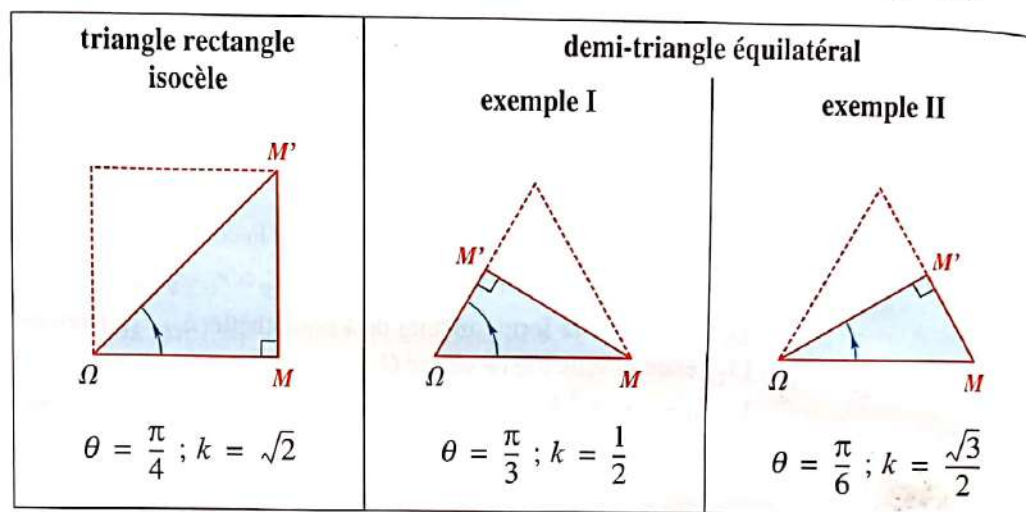


Fig. 4

THÉORÈME 5

« Deux points et leurs images »

Soit A, B, A' et B' des points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.

Il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B' .

... Démonstration

Une similitude directe s'écrit en complexe $z' = az + b$ transformant A en A' et B en B' si, et seulement si, on a : $z_{A'} = az_A + b$ et $z_{B'} = az_B + b$.

Comme $z_A \neq z_B$, il vient $a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$ ($a \neq 0$, car $A' \neq B'$), puis $b = z_{A'} - az_A$.

Il existe donc une seule similitude directe transformant A en A' et B en B' : la similitude

directe d'écriture complexe $z' - z_{A'} = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}(z - z_A)$.

Remarques :

- Si $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, cette similitude est la translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.
- Sinon, nous tirons de la proposition 4 que son rapport k et son angle θ sont tels que :

$$A'B' = kAB \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta [2\pi].$$

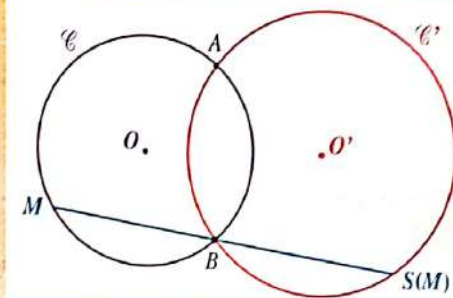
Par suite, lorsque $A'B' = AB$, c'est-à-dire lorsque $k = 1$, cette similitude est une rotation d'angle θ .

4.4 LA CONFIGURATION DES DEUX CERCLES SÉCANTS

THÉORÈME 6

Soit deux cercles $\mathcal{C}$ de centre O et $\mathcal{C}'$ de centre O' sécants en A et B et S la similitude directe de centre A qui transforme O en O' . Alors :

- $S(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$;
- pour tout point M de $\mathcal{C}$, M , B et $S(M)$ (qui est donc un point de $\mathcal{C}'$) sont alignés.



... Démonstration

(Nous donnons les grandes étapes : tous les détails à l'exercice 55, page 417.)

L'image par S du cercle $\mathcal{C}$ de centre O passant par A est le cercle de centre $S(O) = O'$ passant par $S(A) = A$: il s'agit donc du cercle $\mathcal{C}'$.

Dans un repère orthonormal direct d'origine O et d'axe réel (OO') , O' est d'affixe ω (ω est donc réel), A est d'affixe a ($a \in \mathbb{C}$) et, par suite, B est d'affixe $\bar{a}$. Dans ces conditions :

- l'écriture complexe de S est : $z' = \left(1 - \frac{\omega}{a}\right)z + \omega$;
- soit $M(z)$ un point de $\mathcal{C}$ et $M'(z')$ son image par S . Alors l'affixe Z de $\overrightarrow{BM}$ ($Z = z - \bar{a}$) et celle Z' de $\overrightarrow{BM'}$ ($Z' = z' - \bar{a}$) vérifient :

$$\frac{Z'}{Z} = 1 + \omega \cdot \frac{(z + \bar{z}) - (a + \bar{a})}{|z - \bar{a}|^2} \text{ (nombre manifestement réel).}$$

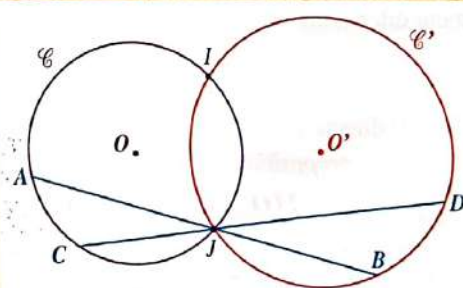
Ainsi, $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires, B , M et M' sont donc alignés.

COROLLAIRE

Soit A, B, C et D distincts tels que :

- (AB) et (CD) sont sécantes en J ;
- les cercles circonscrits $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ aux triangles ACJ et BDJ se recoupent en I .

Alors, la similitude directe S qui transforme A en B et C en D est de centre I .



... Démonstration

D'après le théorème 6, la similitude σ de centre I qui transforme le centre O de $\mathcal{C}$ en O' , centre de $\mathcal{C}'$ transforme :

- A en B , car $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{C}'$ et J, A, B sont alignés ;
- C en D , car $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{C}'$ et J, C, D sont alignés.

Par suite $\sigma = S$ (théorème 5) et donc S est de centre I .

Note : le cas « $I = J$ » (cas où $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents) est examiné à l'exercice 57, page 417.

1. Étude de configurations

OBJECTIF

S'il s'agit d'investir les similitudes dans l'étude des figures, souligner les diverses facettes sous lesquelles elles peuvent intervenir (composée de transformations, écriture complexe, associée à un triangle, etc.) est aussi un objectif majeur dans cette première partie.

PROBLÈME 1⁽¹⁾

Les triangles OAB et OCD sont rectangles isocèles en O , de sens direct, et le point I est le milieu de $[BC]$ (Fig. 5).

À l'aide de la composée $r \circ h$, où r est la rotation de centre O , d'angle $\frac{\pi}{2}$, et h l'homothétie de centre B , de rapport 2, montrer que :

$$AD = 2OI \text{ et } (AD) \perp (OI).$$

1 Solution

• Nature de $s = h \circ r$

Il s'agit d'une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

• Action sur certains éléments de la figure

De façon évidente, $h(I) = C$ et $r(C) = D$, d'où $s(I) = D$.

Posons $O' = h(O)$; on a alors $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{BO}$ (voir Fig. 5) et, par suite :

$$OO' = OA \text{ et } (\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

Autrement dit, r transforme O' en A et donc $s(O) = A$.

• Conclusion

La similitude directe s transforme I en D et O en A .

En appliquant la *proposition 4* (page 403), on obtient :

$$DA = 2IO \quad (\text{le rapport } k \text{ de } s \text{ est } k = 2);$$

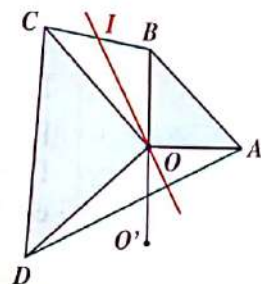
$$(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{DA}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \left(\text{l'angle } \theta \text{ de } s \text{ est } \theta = \frac{\pi}{2} \right).$$

2 Mise en évidence d'une démarche

Pour œuvrer efficacement dans l'étude de figures avec une transformation composée, nous serons conduits :

- à préciser la **nature** de cette transformation ainsi que les **éléments géométriques** qui s'y rapportent (en tout ou partie) ;
- à étudier son **action** sur certains éléments de la figure (cette démarche est illustrée dans l'encadré ci-contre).

(1) Le problème a déjà été abordé avec les nombres complexes (*chapitre 6*, page 189).



(Le point O n'intervient que dans la solution.)

Fig. 5

UNE DÉMARCHE

Illustration

$s = r \circ h$	
nature	action
similitude	$I \rightarrow D$
rapport 2	$O \rightarrow A$
angle $\frac{\pi}{2}$	[On « regarde » l'action successive de h et de r .]
[On applique les théorèmes du cours.]	

Conclusion

$$AD = 2OI \quad (\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{DA}) = \frac{\pi}{2}$$

[On utilise les propriétés géométriques d'une similitude.]

PROBLÈME 2

Le triangle ABC étant donné, on construit trois triangles rectangles isocèles IBC , JCA et KAB comme l'indique la figure 6.

- Montrer que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AJ}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KI})$ et que $\frac{AJ}{AC} = \frac{KI}{AC}$.
- En déduire que $IJAK$ est un parallélogramme.

1 Faisons le point

Le triangle JAC étant rectangle isocèle en J , de sens direct, on a immédiatement :

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AJ}) = \frac{\pi}{4}; \quad \frac{AJ}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1).$$

À nous de « voir » maintenant que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KI}) = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{KI}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ce « genre » d'égalités (angles et rapports) n'est pas sans évoquer la propriété « deux points et leurs images par une similitude directe ». (proposition 4, page 403). Par ailleurs, nous savons qu'il existe une unique similitude directe qui transforme A en K et C en I (théorème 5, page 404). Peut-on la visualiser ? la faire émerger de la figure ? La configuration ci-contre donne la réponse !

2 Solution

La similitude directe de centre B , d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ transforme A en K et C en I . Ainsi :

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KI}) = \frac{\pi}{4}; \quad \frac{KI}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2).$$

Nous tirons de (1) et (2) : $(\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{KI}) = 0 [2\pi]$ et $AJ = KI$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{KI}$ sont donc colinéaires de même sens et de même norme ; ils sont égaux : $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{KI}$.

Conclusion : $IJAK$ est un parallélogramme.

Dans la foulée

1 Alignement

Les triangles OAB , OCD et OEF sont équilatéraux de sens direct.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1) A , C et E sont alignés ;
- (2) B , D et F sont alignés ;
- (3) les milieux de $[AB]$, $[CD]$ et $[EF]$ sont alignés.

2 Variation sur le parallélogramme

1) Tracer un quadrilatère $ABCD$, puis les triangles rectangles isocèles AIB , BIC , CKD et DAL de sommets respectifs I , J , K et L tels que :

- AIB et CKD soient de sens direct ;
- BIC et DLA soient de sens direct.

2) On pose $\omega = 1 + i$. À l'aide de similitudes directes bien choisies, établir que :

- $z_B - z_A = \omega(z_I - z_A)$ et $z_B - z_C = \omega(z_J - z_C)$;
 - $z_D - z_C = \omega(z_K - z_C)$ et $z_D - z_A = \omega(z_L - z_A)$;
- (z_M désigne l'afixe de M).

3) En déduire la nature du quadrilatère $IJKL$.

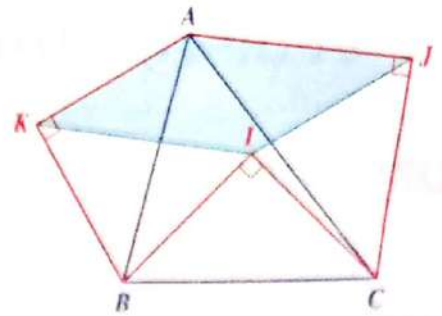
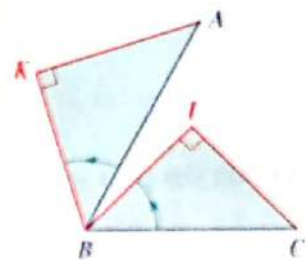


Fig. 6

COMMENT VOIR ?

Soyons physionomistes



Cette figure évoque l'action d'une similitude directe S affiliée au demi-carré : centre : B ; angle : $\frac{\pi}{4}$; rapport : $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$S: \begin{cases} C \rightarrow I \\ A \rightarrow K \end{cases}$$

2. Problèmes de lieux et de constructions

OBJECTIF

Éprouver les similitudes dans les problèmes de lieux et constructions géométriques. (On s'en serait douté.)

PROBLÈME 1

Soit Γ un demi-cercle de diamètre $[AB]$, de centre O (Fig. 7).

À tout point M de Γ distinct de A , on associe le point M' tel que :

- A, M et M' sont alignés dans cet ordre ;
- $MM' = BM$.

Quel est le lieu du point M' lorsque M décrit $\Gamma - \{A\}$?

1 Ouvrons un peu les yeux

Manifestement, le triangle BMM' est isocèle de sommet M ($MM' = MB$) et le théorème de l'angle droit (« le triangle MAB est rectangle en M ») nous indique qu'il est aussi rectangle.

Bref, le triangle MBM' est rectangle isocèle en M et, à la vue de la figure 8, de sens direct.

Cherchons à interpréter l'association $M \rightarrow M'$ à l'aide d'une transformation (car, selon l'encadré ci-contre, c'est dans ce genre de situations que les transformations font merveille).

C'est facile (le monde est petit) : il s'agit de l'une des similitudes directes de centre B affiliées au triangle rectangle isocèle.

Partant de là, une solution se met en place.

2 Solution

Tout se trouve réuni dans le paragraphe précédent pour pouvoir affirmer

que la similitude directe s de centre B , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

associe le point M' au point M .

Le lieu Γ' de M' est donc l'image par s de Γ privé de A , à savoir : le demi-cercle ⁽¹⁾ de diamètre $[A'B]$ privé de A' où A' est l'image de A par s , qui est donc de centre O' image de O par s .

Comme le montre la figure 9, il n'y a aucune difficulté à construire A' et O' et partant Γ' .

(1) Bien sûr, il existe deux demi-cercles de diamètre $[A'B]$: nous choisissons le « bon » sans sourciller.

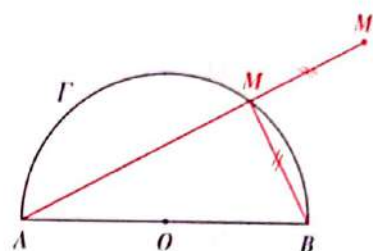


Fig. 7

À NE PAS RATER

Lieux et transformations

• Le problème type

Par une construction géométrique, on associe à tout point M d'une figure F un point M' .

Quel est le lieu de M' ?

• L'aubaine

Si l'on reconnaît dans $M \rightarrow M'$ une transformation usuelle f , c'est fini.

Le lieu cherché est l'image de F par f . (Les immanquables sont à l'exercice 3, page 409.)

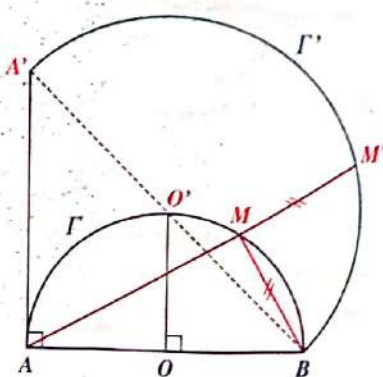


Fig. 9

PROBLÈME 2

Soit une droite $\mathcal{D}$ et deux points A et P n'appartenant pas à $\mathcal{D}$.
Construire un carré $ABCD$ de sens direct (Fig. 10) tel que :

- (CD) passe par P ;
- B appartient à $\mathcal{D}$.

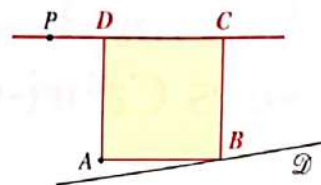


Fig. 10

1 Une entrée dans le problème

Réalisons en premier lieu une **figure d'étude** (telle la figure 10) où $ABCD$ est un carré satisfaisant aux conditions imposées.

L'idée est de *caractériser* le sommet D du carré, puisque, de manière évidente, tout le reste de la construction en découle.

2 Analyse des conditions imposées

• La condition « (CD) passe par P »

Comme (DA) et (DC) sont orthogonales, « (CD) passe par P » équivaut à « (DA) orthogonale à (DP) », ou encore, d'après le théorème de l'angle droit, à « D appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AP]$ ».

• La condition « B appartient à $\mathcal{D}$ »

Comme le quart de tour direct r de centre A transforme B en D , la propriété « $B \in \mathcal{D}$ » peut se traduire par « $D \in \mathcal{D}'$ », où $\mathcal{D}'$ est l'image de $\mathcal{D}$ par r .

3 Construction et discussion

La figure 11 laisse apparaître deux points d'intersection D_1 et D_2 de la droite $\mathcal{D}'$ avec le cercle $\mathcal{C}$; il y a donc **deux carrés solutions** : $AB_1C_1D_1$ et $AB_2C_2D_2$. (La discussion dans son ensemble est proposée à l'exercice 4 ci-dessous.)

Ceci est la *méthode des lieux* : chaque condition définit un lieu géométrique ; reste à « prendre » l'intersection des lieux...

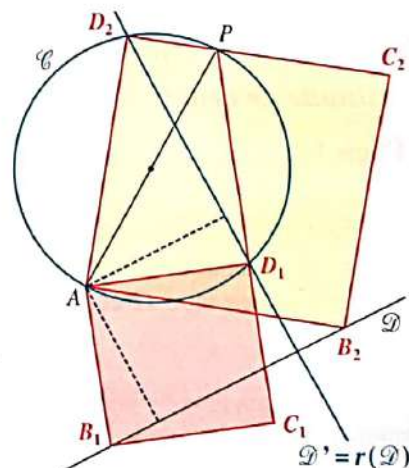


Fig. 11

Dans la foulée

3 Les immanquables

Soit $\mathcal{D}$ une droite et A un point en dehors de $\mathcal{D}$.
Déterminer dans chaque cas le lieu du point M' lorsque M décrit $\mathcal{D}$.

- AMM' est équilatéral de sens indirect.
- AMM' est rectangle isocèle en A de sens direct.
- AMM' est rectangle isocèle en M de sens direct.
- AMM' est rectangle isocèle en M' de sens direct.
- AMM_1 est équilatéral de sens direct et M' est le milieu de $[MM_1]$.
- AM_1M' est équilatéral de sens direct où M_1 est la symétrique de A par rapport à M .

Piste $M \rightarrow M'$ est dans chaque cas une transformation « connue ».

4 Discussion du problème 2

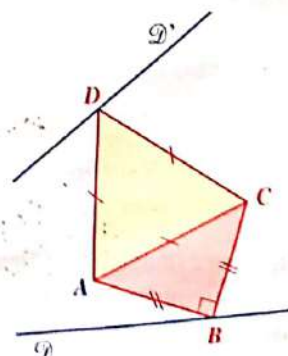
Soit I le milieu de $[AP]$, J le point tel que AJI soit rectangle isocèle en A de sens direct et ℓ la distance de J à $\mathcal{D}$.

Discuter du nombre de solutions au problème 2 par comparaison de ℓ et AJ .

5 Les droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et le point A sont donnés.

Construire un quadrilatère $ABCD$ formé d'un triangle équilatéral ACD et d'un triangle rectangle isocèle en B , ABC , tous deux de sens direct, avec :

$B \in \mathcal{D}$ et $D \in \mathcal{D}'$.



Applications

Transformations

Cette batterie d'exercices (1 à 12) porte sur les transformations : composition, principe de conservation de propriétés géométriques, écriture complexe, etc. L'objectif est d'affermir les idées mises en place dans Avant-première.

Écriture complexe

Dans chacun des exercices 1 à 3, donner l'écriture complexe des transformations f et g .

- 1 a) f est la translation de vecteur $-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.
b) g est la translation qui amène A d'affixe $1+i$ sur B d'affixe $-1+2i$.
- 2 a) f est l'homothétie de centre Ω d'affixe $-1-i$ et de rapport -3 .
b) g est la symétrie centrale de centre Ω d'affixe $2+5i$.
- 3 a) f est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{6}$ et de centre Ω d'affixe $1+2i$.
b) g est le quart de tour direct de centre Ω d'affixe $3-i$.

Dans les exercices 4 et 5, identifier la transformation plane d'écriture complexe $z \rightarrow z'$ et préciser les éléments géométriques qui la caractérisent.

- 4 a) $z' = z + i$; b) $z' = -iz + 1$.
c) $z' = 2z + 1 - i$; d) $z' = -z + 2(1-i)$.
- 5 a) $z' = 3z + 2i$; b) $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$.
c) $z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}z$; d) $z' = i(1-z)$.

- 6 On considère des points A, B, A' et B' (avec $A \neq B$ et $A' \neq B'$ d'affixes respectives a, b, a' et b') et f l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe :

$$z' = \frac{b'-a'}{b-a}(z-a) + a'.$$

- 1) Montrer que f transforme A en A' et B en B' .
- 2) Préciser la nature de f dans chacun des cas suivants :
a) $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$;
b) $A'B' = AB$;
c) $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ ($k \in \mathbb{R}$; $k \neq 0$; $k \neq 1$).

Composition

- 7 Soit f et g deux transformations de transformations réciproques f^{-1} et g^{-1} .

Montrer que $f \circ g$ admet pour transformation réciproque $g^{-1} \circ f^{-1}$.

Attention ! La transformation réciproque de $f \circ g$ n'est pas $f^{-1} \circ g^{-1}$ (sauf cas d'espèce).

Dans les exercices 8 et 9, donner l'écriture complexe de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

- 8 a) $f: z' = 2z^2 + 1$; $g: z' = z - 1$.
b) $f: z' = 2iz - 1$; $g: z' = (1+i)z + 1$.
- 9 a) $f: z' = (3+i)z + i$; $g: z' = \bar{z}$.
b) $f: z' = \frac{z+\bar{z}}{2}$; $g: z' = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

- 10 1) Donner l'écriture complexe de la réflexion s d'axe (Ox) , de la rotation r de centre O , d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de la composée $f = r \circ s$.

2) Soit A le point d'affixe $1+i$.

Montrer que, pour tout point M d'image $M' = f(M)$, on a :

$$OM' = OM \quad \text{et} \quad AM' = AM.$$

3) En déduire que f est la réflexion d'axe (OA) .

Piste Médiatrice.

11 Le poids des mots

Soit I et J deux points distincts du plan P , et f l'application de P dans P définie par :

$$f(I) = J, \quad f(J) = I \quad \text{et} \quad f(M) = M,$$

pour tout M distinct de I et J .

- 1) Montrer que f est une transformation et que $f^{-1} = f$.
- 2) Est-ce que f conserve les milieux ? l'alignement ? les distances ?
- 3) Est-ce que l'image par f de toute droite de P est une droite de P ?

- 12 Soit f et g deux transformations du plan telles que l'image d'une droite quelconque est encore une droite. Montrer qu'il en est de même pour $f \circ g$ et que, de plus, si f et g conservent le parallélisme et l'orthogonalité, alors $f \circ g$ aussi.

Généralités sur les similitudes

Dans les exercices 13 à 15, montrer que chacune des transformations f et g est une similitude et préciser son rapport.

13 a) f est une symétrie centrale.

b) $g = h \circ h$, où h est une homothétie de rapport -2 .

14 a) f est d'écriture complexe $z' = -3iz + 1$.

b) g est d'écriture complexe $z' = (1-i)\bar{z}$.

15 a) $f = h \circ r$, où h est l'homothétie de centre O et de rapport -3 et r la rotation de centre O , d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) $g = h \circ r$, où h est une homothétie de rapport -3 et r une rotation et c'est tout (nous voulons dire qu'aucune information n'est donnée sur le centre de h ou de r , ni sur l'angle de r).

16 Avec les rapports de distances

Une transformation f conserve les rapports de distances, lorsque, pour tous points A, B, C et D , avec $A \neq B, C \neq D$, d'images A', B', C' et D' par f , on a :

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}.$$

1) Montrer qu'une similitude conserve les rapports de distances.

2) Soit f une transformation conservant les rapports de distances et soit A et B deux points distincts fixés, d'images A' et B' par f . On pose $k = \frac{A'B'}{AB}$ ($k > 0$).

Montrer alors que f est une similitude de rapport k .

17 Une preuve

Établir la proposition 1 (page 397) sur la transformation réciproque d'une similitude et sur la composée de deux similitudes.

Les groupes

On appelle **groupe de transformations** toute famille G de transformations, qui, comme la famille des similitudes, vérifient :

* si f appartient à la famille G , alors f^{-1} aussi ;

* si f et g appartiennent à la famille G , alors $f \circ g$ également.

Les groupes de transformations tiennent le « haut du pavé » dans le programme d'Erlangen, monument géométrique du mathématicien allemand Felix Klein.



Felix Klein (1849-1925).

Écriture complexe d'une similitude

Dans les exercices 18 à 21, on note r la rotation de centre O , d'angle $\frac{\pi}{2}$, h l'homothétie de centre O , de rapport 2, s la réflexion d'axe (Ox) et t la translation de vecteur $2\vec{e}_1$.

Il s'agit de montrer que chacune des transformations f et g est une similitude et de donner son écriture complexe.

18 a) $f = s \circ h$; b) $g = h \circ s$.

19 a) $f = s \circ r \circ t$; b) $g = t \circ r \circ h$.

20 a) $f = h \circ t \circ s$; b) $g = s \circ t \circ h$.

21 a) $f = r \circ s \circ h$; b) $g = s \circ r \circ h$.

22 Établir la première partie du théorème 2, page 399.

23 Chacun chez soi

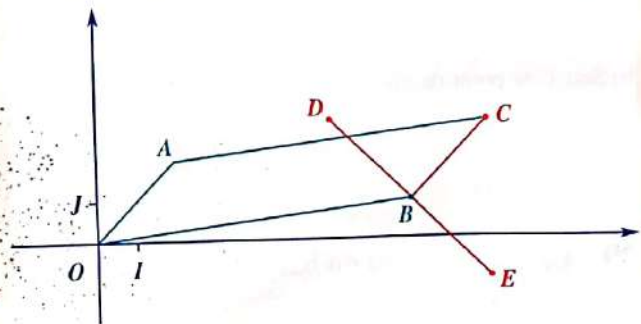
1) Soit u et v deux nombres complexes tels que $uz = v\bar{z}$, pour tout z de $\mathbb{C}$.

Montrer que $u = v = 0$.

2) En déduire que, si a et b sont des complexes non nuls, l'écriture complexe $z' = az + b\bar{z}$ n'est jamais celle d'une similitude (comme l'indique le titre de l'exercice, on se méfiera du salmigondis des écritures $z' = az + b$ et $z' = a\bar{z} + b$).

24 Soit deux points A d'affixe a et B d'affixe b du plan complexe. On construit :

- le point C tel que $AOBC$ soit un parallélogramme ;
- les points D et E tels que les triangles BCD et BCE soient isocèles rectangles en B , BCD étant de sens direct et BCE de sens indirect.



1) Soit s la similitude d'écriture complexe $z' = az + b$.

Montrer que l'image du repère (O, I, J) par s est le repère (B, C, D) et que, si M a pour coordonnées (x, y) dans le repère (O, I, J) , son image M' par s a pour coordonnées (x, y) dans le repère (B, C, D) .

2) Reprendre la question précédente en remplaçant s par s' d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ et le repère (B, C, D) par le repère (B, C, E) .

Piste C'est immédiat pour qui est acclimaté à la démonstration du théorème 2, page 399.

Propriétés géométriques

25 Soit s la similitude d'écriture complexe :
 $z' = 2i\bar{z} + 3(1-i)$.

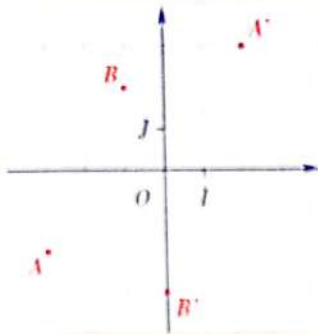
1) Montrer que le point Ω d'affixe $(1-i)$ est fixe par s ($s(\Omega) = \Omega$).

2) Soit A le point d'affixe 2. Calculer l'affixe du point $A' = s(A)$ et montrer que Ω, A et A' sont alignés.

Piste Une figure, s'il vous plaît.

3) Comment montrer, sans aucun calcul, que, si M appartient à la droite (ΩA) , il en est de même de son image par s ?

Dans les exercices 26 à 28, on considère la figure ci-contre (que l'on reproduira en tenant compte du quadrillage), où A' et B' sont les images de A et de B par une similitude s :
 $A' = s(A)$,
 $B' = s(B)$.



26 a) Quel est le rapport de s ?

b) Construire le point K tel que $s(K) = I$.

27 a) Construire l'image par s du cercle de centre A passant par O .

b) On pose $O' = s(O)$.

Le triangle $O'A'B'$ est-il rectangle ?

28 a) L'image par s de la médiatrice de $[AB]$ est-elle parallèle à (AB') ?

b) Soit C le point de coordonnées $(-1, 0)$ et C' son image par s .

Montrer que le triangle $A'B'C'$ est isocèle rectangle en C' et calculer son aire.

29 La conservation du barycentre⁽¹⁾

1) Soit (A_1, α_1) , (A_2, α_2) et (A_3, α_3) des points pondérés où α_1, α_2 et α_3 sont des réels de somme non nulle. On note z_1, z_2 et z_3 les affixes de A_1, A_2 et A_3 .

Montrer que le point G d'affixe z est le barycentre des points (A_1, α_1) , (A_2, α_2) et (A_3, α_3) si, et seulement si :

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)z = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3.$$

2) Montrer, à l'aide des écritures complexes, que les similitudes conservent le barycentre.

(1) Le résultat est établi pour trois points : il se généralise facilement à n points.

Similitude indirecte

30 Déceler les similitudes indirectes parmi f, g et h :

- $f = r \circ s$ où r est une rotation et s une symétrie centrale ;
- g est d'écriture complexe :

$$z \rightarrow z' \text{ avec } z' - i = i(\overline{z - i}) ;$$

- h est d'écriture complexe $z' = -iz + i\bar{z}$.

31 En s'inspirant de l'exemple 2, page 401, donner l'écriture complexe de la réflexion d'axe Δ d'équation $x - y - 1 = 0$.

Piste Pour s'inspirer de l'exemple cité, encore faudrait-il deux points de Δ ...

32 Montrer que l'écriture complexe $z' = e^{i\frac{\pi}{8}} \bar{z}$ est celle de la réflexion d'axe (OA) où A est le point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{16}}$.

Piste La proposition 3, page 401, délivre une solution en « une ligne »...

33 1) Montrer qu'il existe une unique similitude indirecte s transformant :

$$A(-4 + 4i) \text{ en } A'(2 + 2i)$$

$$\text{et } B(-4 + 6i) \text{ en } B'(-2 - 2i).$$

2) Déterminer l'image de $C(-1 + 3i)$ par s sans utiliser l'écriture complexe !

34 Étude d'une similitude indirecte

Soit s la transformation d'écriture complexe :

$$z' = -2i\bar{z} + 1 + 2i.$$

1) Préciser la nature de s et montrer que le point I d'affixe 1 est l'unique point fixe de s .

Piste Résoudre l'équation aux points fixes en posant $z = x + iy$.

2) Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre I de rapport $\frac{1}{2}$ et en déduire celle de chacune des transformations $h \circ s$ et $s \circ h$.

Quelle remarque peut-on faire ?

3) On note σ la composée $h \circ s$.

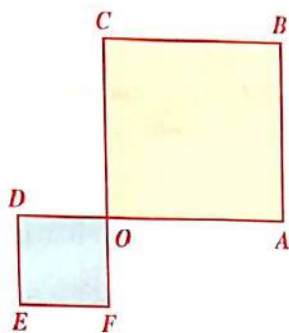
Prouver que le point J d'affixe i est fixe par σ et en déduire que σ est la réflexion d'axe (IJ) .

Piste La proposition 3, page 401.

4) Conclure que s est la composée dans un ordre indifférent de la réflexion d'axe (IJ) et de l'homothétie de centre I et de rapport 2.

Forme réduite d'une similitude directe

Dans les exercices 35 à 37, on considère la figure ci-contre où les deux carrés sont tels que $\overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{OD}$. Établir que chaque transformation $f \circ g$ est une similitude directe de centre O et préciser son angle et son rapport.



- 35 • f est l'homothétie de centre O qui transforme D en A ;
 • g est la rotation de centre O qui transforme D en F .

- 36 • f est la rotation de centre O qui transforme C en A ;
 • g est l'homothétie de centre O qui amène B sur le centre du carré $ODEF$.

- 37 • f est l'homothétie de centre O qui transforme C en F ;
 • g est la similitude directe de centre O qui transforme A en B .

- 38 Le triangle OAB est isocèle en O , mais non rectangle et l'on pose $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Soit h l'homothétie de centre O , de rapport $\cos \theta$, r la rotation de centre O , d'angle θ et $s = h \circ r$ (s est donc une similitude directe).

1) Construire l'image de A par s .

2) Quelle est la forme réduite de s ?

- 39 Soit s une similitude directe de centre O , de rapport k et d'angle θ .

Montrer que, si s s'écrit $h \circ r$, où h est une homothétie de centre Ω , de rapport k' ($k' > 0$) et r une rotation de même centre Ω et d'angle θ' , alors :

$$\Omega = O, k' = k \text{ et } \theta' = \theta [2\pi].$$

Note : il est donc légitime de parler de « la » forme réduite de s .

« Eadem mutato resurgo » ⁽¹⁾



Coupe de la partie interne d'un nautilus. Toutes les parties de la spirale sont semblables entre elles, c'est-à-dire indistinguables à l'échelle près.

(1) « Semblable à moi-même je renaiss. »

Similitude directe et écriture complexe

Dans les exercices 40 à 42, donner l'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω d'affixe ω , de rapport k et d'angle θ .

40 $\omega = 1 + i$; $k = 2$; $\theta = \frac{\pi}{2}$.

41 $\omega = 0$; $k = \sqrt{3}$; $\theta = \frac{\pi}{3}$.

42 $\omega = 1 - 2i$; $k = 2\sqrt{2}$; $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

Dans chacun des exercices 43 à 46, étudier la transformation géométrique définie par l'écriture complexe proposée (« étudier » signifie identifier la transformation (translation, homothétie, rotation, similitude directe...) et préciser les éléments géométriques qui la caractérisent (centre, rapport, angle, etc.)).

43 a) $z' = z + 2 + i$; b) $z' = -z + 2i$;

c) $z' = 3z - 2$; d) $z' = \frac{1}{i}z$.

44 a) $z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z$; b) $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)z$.

45 a) $z' = 2z + 1 - i$; b) $z' - i = (\sqrt{3} + i)(z - i)$.

46 a) $z' = -2iz + 5$; b) $z' = (3 + 4i)z - 4 - 8i$.

- 47 Quels sont l'angle et le rapport de la similitude directe

d'écriture complexe $z' = (1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}z + i$?

- 48 Soit k un réel non nul.

Quel est l'angle de la similitude directe d'écriture complexe :

$$z' = kiz + b \quad (b \in \mathbb{C}) ?$$

- 49 Soit u un nombre complexe et f la transformation d'écriture complexe $z' = u^2z + u - 1$.

- 1) Pour quelles valeurs de u , f est-elle une translation ?

Préciser alors, par son affixe, le vecteur de la translation obtenue.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $u \neq 1$ et que $u \neq -1$.

- 2) Montrer que le point Ω d'affixe $\omega = \frac{-1}{1+u}$ est l'unique point fixe de f .

- 3) Déterminer les valeurs de u pour lesquelles f est une symétrie centrale et représenter graphiquement les centres de ces symétries.

- 4) Reprendre la question 3) en remplaçant « symétrie centrale » par « quart de tour direct ».

- 5) Caractériser f lorsque $u = 1 - i$.

D'APRÈS BAC

Propriétés géométriques d'une similitude directe

50 Placer deux points distincts O et A et construire à la règle et au compas l'image de A par chacune des similitudes suivantes, toutes de centre O :

a) angle $\frac{3\pi}{4}$, rapport $\sqrt{2}$;

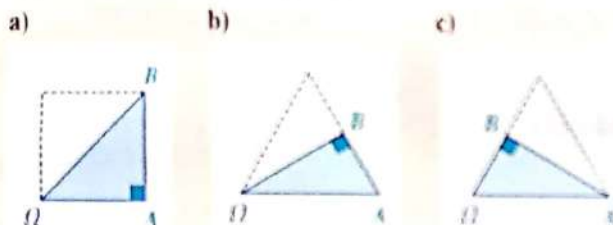
b) angle $-\frac{\pi}{6}$, rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

c) angle $\frac{2\pi}{3}$, rapport $\frac{1}{2}$;

d) angle $-\frac{\pi}{2}$, rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

51 Donner l'angle, le rapport et l'écriture complexe de chacune des similitudes directes de centre Ω qui transforme A en B , puis B en A .

- figure a) : demi-carré ;
- figures b) et c) : demi-triangle équilatéral.



Une idée derrière la tête !

Cela ne doit faire aucun doute, l'insistance accordée aux configurations précédentes est facile à saisir : dès lors qu'il devient de notoriété publique que, par une similitude d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$, « un point, son image et le centre » (de la similitude) sont les sommets d'un triangle rectangle isocèle, il devient naturel d'enrôler cette similitude dans un problème de géométrie pour montrer qu'un triangle est rectangle isocèle. C'est, semble-t-il, lumineux.

52 Les triangles OAB et OCD sont rectangles isocèles en O de sens direct, I est le milieu de $[OB]$ et J est le milieu de $[OD]$.

1) Montrer qu'il existe une similitude directe s de centre O , dont on précisera l'angle et le rapport, telle que $s(A) = I$ et $s(C) = J$.

2) En déduire que (AC) et (IJ) sont orthogonales et que $AC = 2IJ$.

Piste « Deux points et leurs images » de la proposition 4, page 403.

53 Dans la figure ci-contre formée de deux carrés, I est le milieu de $[CD]$ et J celui de $[EF]$.

La similitude directe qui transforme B en D et I en J a-t-elle le même centre que celle qui transforme B en I et D en J ?

Note : le problème 103 en dira plus long sur ce sujet.



L'artiste et le géomètre

Limite carrée (1964) : une des estampes de M.-C. Escher avec figures semblables, inspirées par les travaux du très célèbre géomètre contemporain H.S.M. Coxeter. Le commentaire de Coxeter :

« Pas mal, mais tout simplement euclidien, donc sans grand intérêt » (!)



Limite carrée, xylogravure, 1964.

54 Soit s une similitude directe de centre O , d'angle θ ($\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$), A et B deux points distincts de O et $A' = s(A)$, $B' = s(B)$.

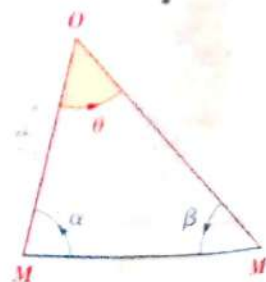
1) Établir que :

$$\frac{OB'}{OA'} = \frac{OB}{OA} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) [2\pi].$$

2) Montrer que la similitude directe de centre O qui transforme A en B transforme A' en B' , puis que les angles orientés du triangle OAA' sont égaux aux angles orientés correspondants du triangle $OB B'$.

3) En déduire que, quel que soit le point M du plan, distinct de O , d'image M' par s , les angles orientés du triangle OMM' sont constants.

(Cela signifie que, dans la figure ci-contre, les angles α et β sont indépendants du point M choisi, θ étant évidemment l'angle de la similitude.)



la configuration des deux cercles sécants

55 Retour sur la démonstration (théorème 6)

Voici quelques détails sous la forme d'indications :

1) Écriture complexe de S .

Piste $z' = \left(1 - \frac{\omega}{a}\right)z + \omega$ est bien l'écriture complexe

d'une similitude directe : chercher l'image de A , de O et conclure.

2) Le calcul de $\frac{Z'}{Z}$.

Piste $M(z)$ est sur le cercle de centre O passant par A : on a donc $z \cdot \bar{z} = a \bar{a}$.

56 Soit deux points distincts O et O' . Le cercle $\mathcal{C}$ de centre O passant par O' et le cercle $\mathcal{C}'$ de centre O' passant par O se coupent en A et B . Une droite passant par B recoupe $\mathcal{C}$ en $P (P \neq B)$ et $\mathcal{C}'$ en $Q (Q \neq B)$.

Montrer que le triangle APQ est équilatéral.

57 Cas de figure

Les droites (AB) et (CD) se coupent en J et l'on suppose que le cercle $\mathcal{C}$ de centre O circonscrit au triangle ACJ est tangent en J au cercle $\mathcal{C}'$ de centre O' circonscrit au triangle BDJ .

1) Justifier qu'il existe une homothétie h de centre J qui transforme O en O' .

2) Montrer que $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

3) Construire l'image par h d'un point de $\mathcal{C}$ quelconque.

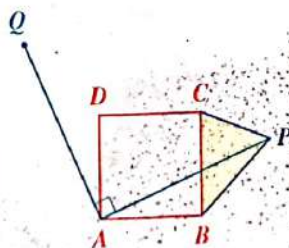
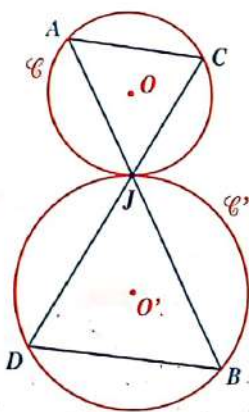
4) En déduire l'image de A et C par h , puis que (AC) est parallèle à (BD) .

Note : ceci est le complément annoncé au corollaire du théorème 6, page 405.

58 Dans la figure ci-contre $ABCD$ est un carré de sens direct, de côté a , BPC est un triangle isocèle en B , et Q est l'image de P par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que $DQ = a$.

2) Construire l'image par r du cercle de centre B et de rayon a et en déduire que P , C et Q sont alignés.



Brèves de cours

59 Quelle est la transformation réciproque de la transformation d'écriture complexe :

$$z' = i(\bar{z} - 1) ?$$

60 Montrer que les points $A(i)$ et $B(1+i)$ sont des points fixes de la transformation d'écriture complexe $z' = \bar{z} + 2i$. En déduire la nature géométrique de cette transformation.

61 Soit h l'homothétie de centre A , de coordonnées $A(-2, 1)$ et de rapport 2, et r la rotation de centre B , de coordonnées $B(1, 0)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Montrer que $h \circ r$ et $r \circ h$ sont des similitudes directes et donner la forme réduite de chacune.

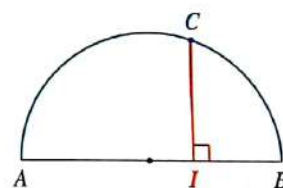
62 La similitude directe s de centre O est distincte de la symétrie centrale de même centre. Pour tout point M du plan d'image M' par s , on désigne par m le milieu de $[MM']$.

1) Montrer que l'application qui à M associe le point m est (encore) une similitude directe de centre O .

Piste L'écriture complexe.

2) Préciser son angle et son rapport lorsque s est la rotation d'angle θ ($\theta \neq \pi [2\pi]$).

63 Prouver que la similitude directe de centre I qui transforme B en C transforme C en A . Retrouver (?) ainsi que IC est la moyenne géométrique de IA et IB ($IC = \sqrt{IA \times IB}$).



64 Soit s la similitude directe d'écriture :

$$z' = \frac{3 + \sqrt{3}i}{4} \cdot z + \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

1) Préciser son rapport, son angle et l'affixe de son centre Ω .

2) Montrer que, pour tout point M , distinct de Ω , d'image M' par s , le triangle $\Omega MM'$ est rectangle en M' .

65 Le triangle ABC étant rectangle en A , on désigne par $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$ et par $\mathcal{C}'$ le cercle de diamètre $[AC]$.

1) Montrer que le second point d'intersection H de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ (autre que A) est le pied sur $[BC]$ de la hauteur issue de A .

2) Préciser l'image du cercle $\mathcal{C}$ par la similitude directe de centre A qui transforme B en C .

3) Une droite Δ passant par H recoupe $\mathcal{C}$ en P ($P \neq H$) et $\mathcal{C}'$ en Q ($Q \neq H$).

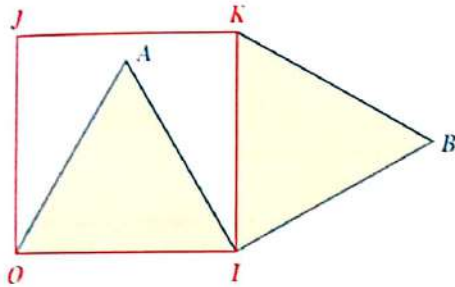
Que dire (d'intéressant) sur le triangle APQ ?

Exercices

Étude de configurations

66 Un classique

Dans la figure ci-après, $OIKJ$ est un carré de sens direct et les triangles OIA et KIB sont équilatéraux de sens direct.



Soit r la rotation de centre I , d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- 1) Montrer que les points $r(A)$, $r(B)$ et $r(J)$ sont alignés.
- 2) En déduire que J, A et B sont alignés.

67 Losange

Les triangles OAB et OCD sont isocèles de sommet O et de même angle au sommet α :

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OC}, \vec{OD}) = \alpha [2\pi].$$

Soit I, J, K et L les milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

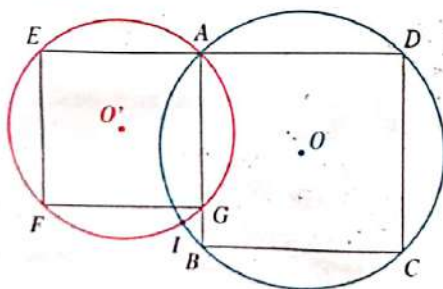
- 1) Montrer que $IJKL$ est un losange.

Piste Établir que $AC = BD$ à l'aide d'une rotation.

- 2) En déduire que (IK) et (JL) sont orthogonales.

68 Concourance

Les cercles circonscrits aux carrés $ABCD$ et $AEFG$, de centres respectifs O et O' , se recoupent en I .



- 1) Quel est l'angle de la similitude s de centre A qui transforme O en O' ?
- 2) Déterminer les images par s des points B, C et D .
- 3) En déduire que les droites (BE) , (CF) et (DG) passent par I .

69 Les deux rectangles

On considère deux rectangles de sommet commun O : $OABC$ et $ODEF$ de sens direct.

Montrer que les droites (AD) et (CF) sont orthogonales si, et seulement si, les rectangles ont le même format.

(Rappel : le format d'un rectangle est le rapport $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$.)

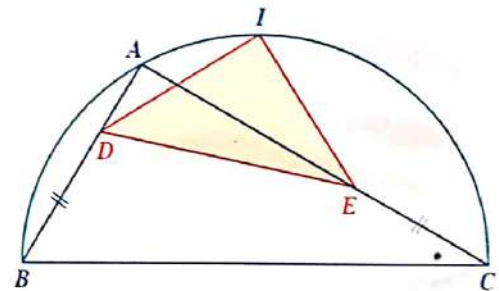
Piste Soit s la similitude de centre O transformant A en C . Considérer le point $D' = s(D)$.

70 Triangle rectangle isocèle

Le triangle ABC est inscrit dans le demi-cercle de diamètre $[BC]$. I est le point d'intersection de ce demi-cercle avec la médiatrice de $[BC]$ et les points D et E sont tels que :

$$D \in [AB], E \in [AC] \text{ et } BD = CE.$$

On se propose de montrer que le triangle IDE est rectangle isocèle en I .



- 1) Justifier l'existence d'une rotation transformant B en C et D en E .
- 2) Évaluer son angle et en déduire qu'elle est de centre I .
- 3) Conclure.

71 Avec l'écriture complexe

Soit s une similitude directe de centre O , A et B deux points distincts autres que O , et $C = s(A)$, $D = s(B)$.

On note a, b, c et d les affixes de A, B, C et D .

- 1) Montrer qu'il existe ω ($\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 1$) tel que :

$$c = \omega a \text{ et } d = \omega b.$$

- 2) La similitude de centre A qui transforme B en D transforme O en P et la similitude de centre B qui transforme A en C transforme O en Q .

Montrer que les affixes p de P et q de Q vérifient :

$$p = \frac{ab(1-\omega)}{b-a} \text{ et } q = \frac{ab(1-\omega)}{a-b}.$$

- 3) Que peut-on en conclure sur la position relative des points O, P et Q ?

Lieux géométriques

Dans les exercices 72 à 74, on considère un carré $ABCD$ de sens direct et M un point de la diagonale (BD) .

72 Point fixe

Soit m_1 et m_2 les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB) et (AD) .

Montrer que, lorsque M décrit (BD) , la médiatrice de $[m_1 m_2]$ passe par un point fixe.

Piste Quart de tour.

73 Carré mobile

On construit le carré $AMNP$ de sens direct dont on note Q le centre. Construire les lieux des points N , P et Q , le point M décrivant la droite (BD) .

74 Cercle mobile

On construit le triangle équilatéral direct AMM' .

Quel est le lieu du centre du cercle circonscrit du triangle AMM' lorsque M décrit (BD) ?

75 On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R , et une droite $\mathcal{D}$ ne rencontrant pas $\mathcal{C}$.

1) Soit A un point de $\mathcal{D}$. On note E_A l'ensemble des points M du plan vérifiant la propriété : « Il existe un point N du cercle $\mathcal{C}$ tel que le triangle AMN est équilatéral de sens direct. »

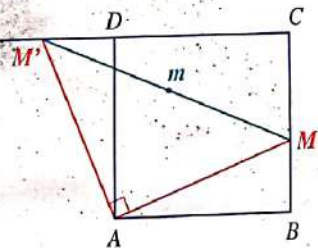
Montrer que E_A est un cercle dont on déterminera le centre Ω_A et le rayon R_A . Construire E_A .

2) Quel est l'ensemble des points Ω_A lorsque A décrit $\mathcal{D}$? Construire cet ensemble.

D'APRÈS BAC

76 Le carré $ABCD$ est de sens direct.

Soit M un point de (BC) : la perpendiculaire en A à (AM) rencontre (CD) en M' et l'on note m le milieu de $[MM']$.



1) Montrer que le triangle AMM' est isocèle rectangle en A de sens direct.

Piste Quart de tour de centre A .

2) Quel est le lieu de m lorsque M décrit (BC) ?

Piste Il est facile de trouver une similitude de centre A qui amène M sur m .

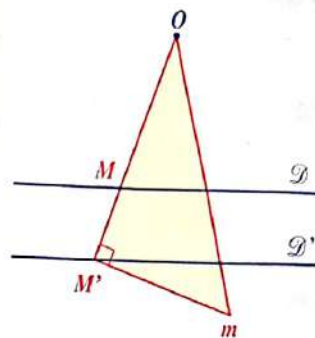
77 Reprendre l'exercice précédent par des « méthodes élémentaires » en démontrant que le milieu m de $[MM']$ appartient à la médiatrice de $[AC]$.

Attention, ce n'est pas fini : il faut une réciproque.

78 Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$

sont parallèles et O est dans le demi-plan ouvert de frontière $\mathcal{D}$ ne contenant pas $\mathcal{D}'$. Soit M un point de $\mathcal{D}$, M' le point d'intersection de $\mathcal{D}'$ avec (OM) et m le point tel que :

- $M'm = OM$;
- le triangle $OM'm$ est rectangle en M' de sens direct.



1) Montrer qu'il existe une homothétie h de centre O transformant $\mathcal{D}$ en $\mathcal{D}'$.

2) Établir que l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Om})$ est constant.

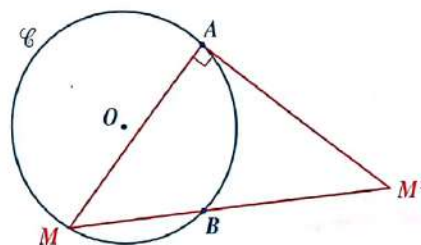
3) Trouver une similitude s de centre O telle que $s(M) = m$, pour tout M de $\mathcal{D}$.

4) Construire le lieu géométrique de m lorsque M décrit $\mathcal{D}$.

79 On considère deux points A et B d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O , non diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$, et l'on désigne par $\mathbb{E}$ le cercle $\mathcal{C}$ privé des points A et B .

1) Soit M un point de $\mathbb{E}$.

Justifier que la droite (BM) et la perpendiculaire en A à la droite (AM) sont sécantes. On désigne par M' leur point d'intersection.



2) Montrer que la médiatrice de $[AB]$ et la tangente en B au cercle $\mathcal{C}$ sont sécantes en un point noté Ω et que les droites (AO) et $(A\Omega)$ sont orthogonales.

3) Soit s la similitude directe de centre A transformant O en Ω .

a) Construire l'image Γ du cercle $\mathcal{C}$ par s et préciser les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de Γ .

b) Montrer que, pour tout point M de $\mathbb{E}$, les droites (AM) et $(AS(M))$ sont orthogonales.

Piste Que peut-on dire de l'angle de s ?

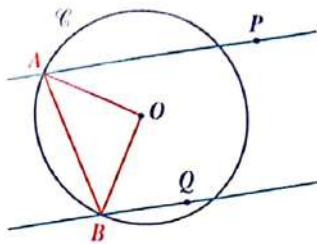
c) En déduire que $M' = s(M)$, pour tout point M de $\mathbb{E}$.

Piste Se tourner vers le théorème 6, page 405.

4) En déduire le lieu du point M' lorsque M décrit $\mathbb{E}$.

Problèmes de construction

- 80** On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O , un point P extérieur à $\mathcal{C}$ et un point Q intérieur à $\mathcal{C}$. Construire un triangle OAB isocèle rectangle de sommet O , de sens direct, avec A et B sur $\mathcal{C}$ et (AP) parallèle à (BQ) .



Piste Soit P' l'image de P par le quart de tour direct de centre O . Exploiter, après l'avoir démontrée, la propriété : $(PA) \parallel (BQ) \Leftrightarrow (BP') \perp (BQ)$, OAB étant un triangle solution.

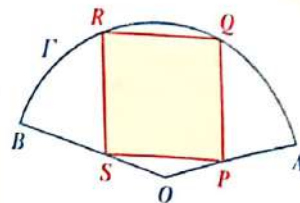
Dans les exercices 81 à 83, on considère deux droites parallèles distinctes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et un point A en dehors de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Il s'agit de construire un triangle équilatéral ABC de sens direct, le sommet B appartenant à $\mathcal{D}$ et vérifiant de plus la propriété indiquée.

- 81** Le sommet C appartient à $\mathcal{D}'$.
82 Le milieu de $[AC]$ appartient à $\mathcal{D}'$.
83 Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC appartient à $\mathcal{D}'$.

- 84** On considère un arc de cercle Γ de centre O et d'extrémités A et B .

Construire un carré $PQRS$, avec :

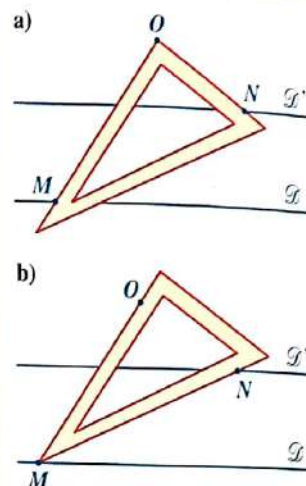
$P \in [OA]$, $S \in [OB]$,
 Q et R appartiennent à Γ .



85 Le problème de l'équerre

On donne deux droites parallèles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, un point O (dans la disposition de la figure ci-contre) et une équerre d'angles 90° , 60° et 30° .

Construire M sur $\mathcal{D}$ et N sur $\mathcal{D}'$ de façon que l'on puisse disposer l'équerre comme indiquée dans les figures a) et b).



Piste Étudier le triangle OMN cherché : il est de ceux à qui « on sait » rattacher une similitude directe familière.

Sous la houlette...

La houlette de berger couve en silence une beauté fascinante et une étonnante complexité : infiniment semblable à elle-même, infiniment riche de versions réduites de sa propre image.

Si l'on désigne, de gauche à droite, par a, b et c les zones repérées par les petites flèches dans les photos ci-dessous, alors – voilà le moment d'ouvrir les yeux – : b est un agrandissement de a, c est un agrandissement de b et... a un agrandissement de c !



a)



b)



c)

Triangles semblables

Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables lorsqu'il existe une similitude σ telle que :

$$\sigma(A) = A', \sigma(B) = B' \text{ et } \sigma(C) = C'$$

(si σ est directe, les triangles sont directement semblables, sinon ils sont indirectement semblables).

Les exercices 86 à 90 étudient quelques caractérisations des triangles semblables et proposent quelques applications.

86 Caractérisation dans le plan complexe

On note a, b, c, a', b' et c' les affixes des points A, B, C, A', B' et C' .

1) Rappeler l'écriture complexe de l'unique similitude directe transformant A en A' et B en B' .

Piste Pourquoi « rappeler » ? Voir cours, page 404.

2) En déduire que ABC et $A'B'C'$ sont directement semblables si, et seulement si :

$$\frac{c' - a'}{c - a} = \frac{b' - a'}{b - a} \quad (1).$$

3) Soit $A_1B_1C_1$ l'image du triangle $A'B'C'$ par la réflexion d'axe (Ox) (axe réel).

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- ABC et $A'B'C'$ sont indirectement semblables ;
- ABC et $A_1B_1C_1$ sont directement semblables ;

$$\frac{c' - a'}{b' - a'} = \left(\frac{c - a}{b - a} \right) \quad (2).$$

87 Caractérisations géométriques

Prouver que chacune des propriétés suivantes caractérise le fait que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables :

(I) $\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}$ et $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$ (égalité d'angles géométriques).

$$(II) \frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}.$$

(III) Les angles géométriques aux sommets A, B et C du triangle ABC sont respectivement égaux aux angles géométriques aux sommets A', B' et C' du triangle $A'B'C'$.

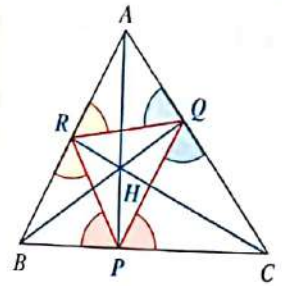
Piste L'exercice 86 pour (1) ; le reste avec la relation d'Al-Kashi.

La nature est bien faite

Il est quand même rassurant que la notion de triangles semblables adoptée dès la classe de Seconde (propriété (III) de l'exercice 87) vienne coïncider avec celle introduite dans le début de cette rubrique !

88 Trajet de lumière

Soit ABC un triangle acutangle (« dont tous les angles sont aigus »), H l'orthocentre du triangle et P, Q et R les pieds des hauteurs.



1) Montrer que les triangles PBR , PQC et AQR sont semblables au triangle ABC .

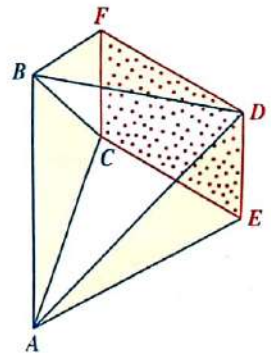
Piste Utiliser la caractérisation (1) de l'exercice 87.

2) En déduire que le trajet $P-Q-R-P$ est un trajet de lumière, à savoir « les angles géométriques de même couleur sont égaux ».

3) Retour à la question 1). Les triangles sont-ils directement semblables ou indirectement semblables ?

89 On considère un triangle ABC et un point donné D .

On construit alors les triangles ADE et DBF directement semblables au triangle ABC . Montrer que $CEDF$ est un parallélogramme.



90 Un problème de construction

• **Données initiales** (en bleu)

Un triangle PQR , un cercle Γ et un point A de Γ .

• **Le problème de construction**

Construire un triangle ABC directement semblable au triangle PQR , avec B et C appartenant à Γ .

• **Les constructions intermédiaires** (en noir ou vert)

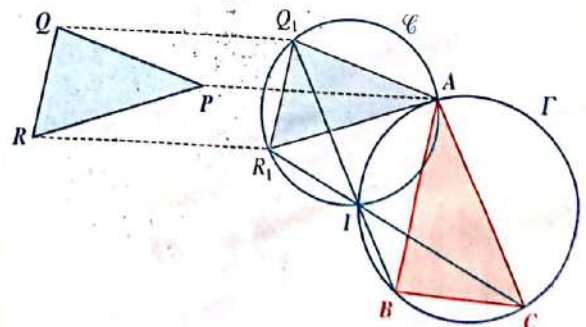
– le triangle AQ_1R_1 est le translaté du triangle PQR par la translation $t_{\vec{PA}}$;

– $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle AQ_1R_1 qui recoupe Γ en I ;

– (Q_1I) recoupe Γ en B et (R_1I) recoupe Γ en C .

• **La consigne**

Montrer que le triangle ABC (en rouge) est solution du problème de construction.



Thème d'étude : les antidéplacements

91 Transformation $z' = e^{i\theta} \bar{z}$

Soit θ un réel et A le point d'affixe $e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Montrer que la réflexion d'axe (OA) a pour écriture complexe :

$$z' = e^{i\theta} \bar{z}.$$

Piste Se munir de la proposition 3, page 401.

92 Les antidéplacements

Déduire de l'exercice précédent et de l'écriture complexe des antidéplacements que tout antidéplacement du plan est la composée d'une réflexion et d'une translation (éventuellement de vecteur nul).

93 La symétrie glissée

Étant donné une droite $\mathcal{D}$ et un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$ ($\vec{u}$ est donc non nul), on appelle symétrie glissée d'axe $\mathcal{D}$ et de vecteur $\vec{u}$ la transformation :

$$\sigma = t_{\vec{u}} \circ s_{\mathcal{D}}.$$

1) Montrer que σ est un antidéplacement et que :

$$\sigma = s_{\mathcal{D}} \circ t_{\vec{u}}.$$

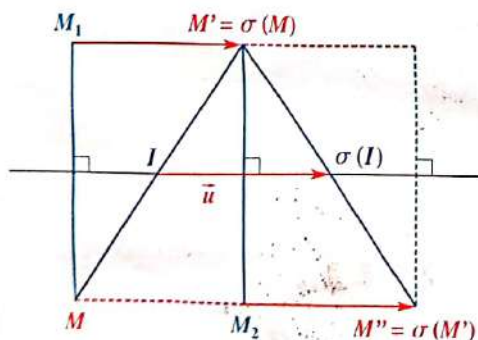
2) Soit M un point d'image M' par σ .

Montrer que le milieu I de $[MM']$ appartient à $\mathcal{D}$ et que M appartient à $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $MM' = \vec{u}$.

3) La transformation σ a-t-elle des points fixes ?

4) Prouver que $\sigma \circ \sigma = t_{2\vec{u}}$.

Note : la « configuration des deux rectangles » (avec un point M , son image $M' = \sigma(M)$, l'image de M' : $M'' = \sigma(M')$ et quelques intermédiaires) permet de rassembler l'essentiel de ces propriétés.



Exemple : dans la frise ci-dessous, deux motifs successifs se correspondent par une symétrie glissée.



94 Forme réduite d'un antidéplacement

Soit D une droite, $\vec{v}$ un vecteur et σ l'antidéplacement :

$$\sigma = t_{\vec{v}} \circ s_D.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ tel que D soit la droite $\mathcal{D}(O, \vec{e}_1)$.

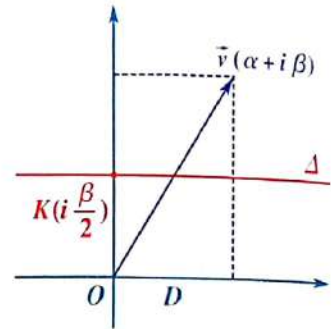
On désigne par :

• $\alpha + i\beta$ l'affixe de $\vec{v}$ (α, β réels) ;

• K le point d'affixe

$$\left(i\frac{\beta}{2}\right);$$

• Δ la parallèle à D passant par K .



1) Montrer que l'écriture complexe de σ est $z \rightarrow z'$ avec :

$$z' - i\frac{\beta}{2} = \overline{\left(z - i\frac{\beta}{2}\right)} + \alpha.$$

2) Prouver que l'écriture complexe de la réflexion d'axe Δ , s_{Δ}

est : $z \rightarrow z'$ avec $z' - i\frac{\beta}{2} = \overline{z - i\frac{\beta}{2}}.$

3) On pose $\vec{u} = \alpha \vec{e}_1$. Montrer que :

a) si $\alpha = 0$, σ est la réflexion d'axe Δ ;

b) si $\alpha \neq 0$, σ est la symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$.

Classification

Nous sommes maintenant en mesure de classer les *isométries* du plan, et, comme l'indique le tableau suivant, deux critères suffisent :

- effet sur les *angles orientés* (déplacement ou antidéplacement) ;
- existence ou non de *points fixes*.

	AVEC point fixe	SANS point fixe
déplacement	rotation	translation
antidéplacement	réflexion	symétrie glissée

Dans les exercices 95 à 97, vérifier que la transformation σ définie par son écriture complexe est un antidéplacement et préciser s'il s'agit d'une réflexion (on donnera alors deux points distincts de l'axe) ou d'une symétrie glissée (on donnera un point de l'axe et l'un de ses vecteurs directeurs).

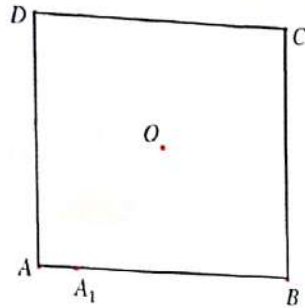
95 a) $z' = i\bar{z} + 2i$; b) $z' = i\bar{z} + i - 1$.

96 a) $z' = -\bar{z} + 3i$; b) $z' = i\bar{z} + 5(1 - i)$.

97 $z' = -\bar{z} + 2\omega$, où $\omega \in \mathbb{C}$. (Discuter suivant les valeurs de ω .)

98 « Eadem mutato resurgo »... version macro

1) Placer quatre points A, B, C et D qui soient les sommets d'un carré, puis tracer à l'aide de Cabri-géomètre le polygone $ABCD$. Placer le centre O du carré $ABCD$ et un point A_1 sur le côté $[AB]$ de ce polygone.

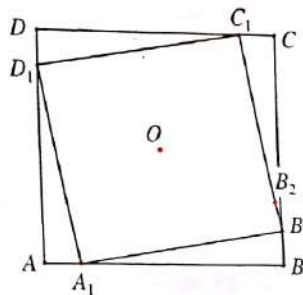


2) On considère la similitude S de centre O qui envoie A sur A_1 .

Utiliser la deuxième macro définie page 411 afin de déterminer l'image D_1 de D .

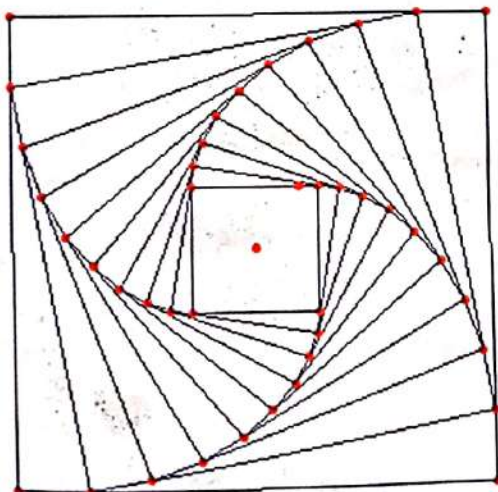
Cette macro permet-elle d'obtenir directement l'image B_1 de B par S et l'image C_1 de C par S ?

Construire B_1 et C_1 en choisissant correctement des points initiaux, puis l'image B_2 de B_1 par S .



3) Créer la macro permettant de passer la configuration « polygone $ABCD$ et point A_1 » à la configuration « polygone $B_1C_1D_1A_1$ et point B_2 ».

4) Utiliser plusieurs fois cette macro pour obtenir le dessin ci-dessous.



5) Déplacer le point A_1 sur le polygone et interpréter les différentes figures obtenues.

6) Reprendre cet exercice avec, comme figure de départ, un triangle équilatéral, un pentagone régulier...

99 Deux macros pour la symétrie glissée

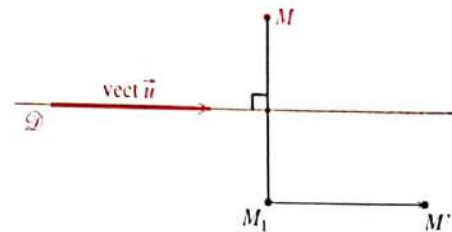
A) Soit σ la symétrie glissée de vecteur $\vec{u}$ et d'axe $\mathcal{D}$.

On propose de créer la macro correspondante.

1) Construire l'image M' de M par $t_{\vec{u}} \circ S_{\mathcal{D}}$.

2) En déduire la macro correspondant à σ et la valider.

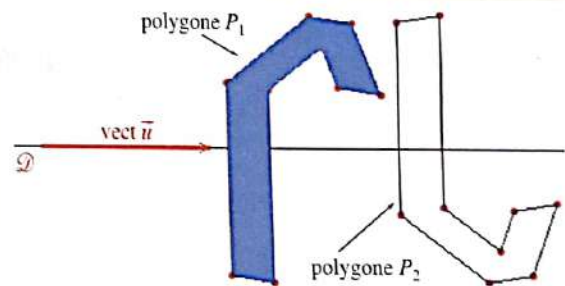
B) Réalisation d'une frise



1) Créer un polygone P_1 .

2) Déterminer les images de ses sommets par la symétrie glissée σ en utilisant la macro de la partie A.

3) Tracer le polygone P_2 et créer la macro permettant d'obtenir le polygone P_2 à partir du polygone P_1 .



4) Utiliser cette macro pour réaliser la frise ci-dessous.



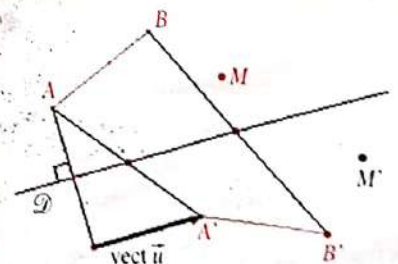
C) Soit σ la symétrie glissée qui envoie (A, B) sur (A', B') .

1) Tracer deux segments $[AB]$ et $[A'B']$ de même longueur.

2) Déterminer le vecteur $\vec{u}$ et l'axe $\mathcal{D}$ de σ .

3) En utilisant la macro précédemment créée, déterminer l'image d'un point M .

4) Créer la macro correspondante.



Rubrique à Bac

Des suites géométriques

Soit S la similitude directe de centre Ω , de rapport k , d'angle θ . La suite de points du plan $(A_n)_{n \geq 0}$ définie par la donnée de A_0 et la relation de récurrence $A_{n+1} = S(A_n)$ est susceptible de conduire à l'étude de quelques suites géométriques :

- les suites des longueurs $(\Omega A_n)_{n \geq 0}$ et $(A_n A_{n+1})_{n \geq 0}$ (toutes deux de raison k) ;
- la suite complexe $(Z_n)_{n \geq 0}$, avec $Z_n = z_n - \omega$, où z_n est l'afixe de A_n et ω celle de Ω (suite géométrique de raison le nombre complexe $a = ke^{i\theta}$, etc.).

100 D'après BAC S, Amérique du Sud, novembre 2000 (extrait).

Soit S la transformation d'écriture complexe :

$$z' = (1 + i)z - i.$$

1) Montrer que S est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques (on note Ω le centre de S).

2) Montrer que, pour tout nombre z , on a $z' - z = i(z - 1)$. En déduire, que pour tout point M distinct de Ω et d'image M' par S , le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle en M .

O Ayant bien suivi le cours, nous savons cela depuis longtemps...

3) On définit dans le plan une suite (M_n) de points en posant : $M_0 = 0$, $M_1 = S(M_0)$, ... et $M_n = S(M_{n-1})$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $d_n = \Omega M_n$.

Démontrer que la suite (d_n) est une suite géométrique. Converge-t-elle ?

101 La spirale (une autre)

Soit S la similitude directe de centre O , de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

On définit la suite de points $(A_n)_{n \geq 0}$ par :

- A_0 est le point d'afixe 6 ;
- $A_{n+1} = S(A_n)$ pour tout $n \geq 0$.

1) Exprimer en fonction de n l'afixe z_n de A_n et préciser pour quelles valeurs de n , A_n est un point de l'axe réel.

2) a) Montrer que $A_n A_{n+1} = \frac{1}{2} O A_n$ et en déduire $A_n A_{n+1}$ en fonction de n .

b) Exprimer en fonction de n la longueur L_n de la ligne polygonale formée des segments $[A_0 A_1]$, $[A_1 A_2]$, ... $[A_{n-1} A_n]$ et étudier le comportement à l'infini de la suite $(L_n)_{n \geq 0}$.

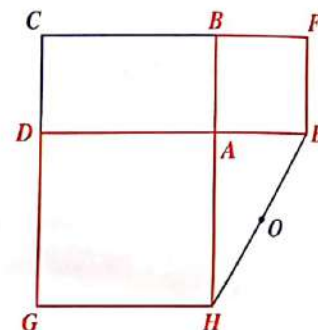
Deux points et leurs images

Étant donné des points A, B, A' et B' tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, le théorème 5, page 404, permet d'introduire la similitude directe S qui transforme A en A' et B en B' (similitude directe qui est un déplacement (rotation ou translation) lorsque $A'B' = AB$).

La recherche de la forme réduite de S (ou, ce qui revient au même, la recherche de son centre, de son angle et de son rapport) est susceptible d'alimenter quelques sujets.

102 D'après BAC S, Polynésie, septembre 2000 (extrait).

Dans la figure ci-contre $ABCD$ est un rectangle de sens direct, $AEFB$ et $ADGH$ sont des carrés de sens direct. On note O le milieu de $[EH]$.



1) a) Exprimer $\overrightarrow{AO}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AH}$, et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BD}$ et en déduire que la médiane issue de A dans le triangle AEH est une hauteur du triangle ABD .

O Un résultat plus général a été obtenu dans ce chapitre, problème 1, page 406, ainsi que dans le chapitre 6, page 189.

2) On pose $AB = 1$ et $AD = k$ ($k > 0$) et l'on désigne par S la similitude directe qui transforme A en B et D en A .

a) Déterminer l'angle et le rapport de S .

b) Déterminer l'image de la droite (BD) , puis l'image de la droite (AO) par cette similitude S .

c) En déduire que le point d'intersection Ω des droites (BD) et (AO) est le centre de la similitude S .

O Accéder directement au résultat suivant n'est pas difficile : « le pied H de la hauteur issue de A sur $[BD]$ dans le triangle ABD est le centre de S ».

Considérons pour cela la similitude S_1 de centre H qui trans-

forme D en A : comme $(\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{HA}) = \frac{\pi}{2}$, S_1 est d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Alors, en notant $A_1 = S_1(A)$, on a $(HA_1) \perp (HA)$ (pourquoi ?) et $(AA_1) \perp (DA)$ (encore pourquoi ?) et donc $A_1 = B$.

Par suite $S_1 = S$ (unicité de la similitude qui amène D sur A et A sur B).

Problèmes

103 Le quadrilatère complet

Soit A, B, C et D quatre points distincts tels que, d'une part, les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point noté E et, d'autre part, les droites (AC) et (BD) sont sécantes en un point noté F .

Remarque : la configuration obtenue est baptisée « quadrilatère complet ».

On désigne par S la similitude directe qui transforme A en B et C en D , et par S' la similitude directe qui transforme A en C et B en D .

1) Montrer que ni S , ni S' ne sont des translations.

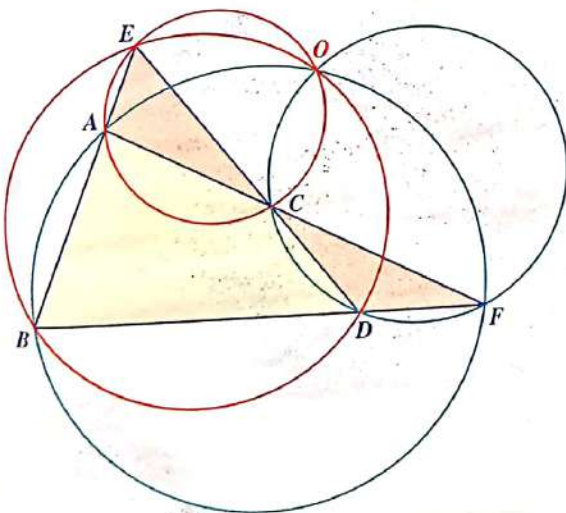
Dans toute la suite, on choisit pour origine O du plan complexe le centre de S .

2) Montrer alors que les affixes a, b, c et d des points A, B, C et D vérifient la relation $ad = bc$.

3) En déduire que la similitude de centre O qui transforme A en C transforme B en D , puis que O est aussi le centre de S' .

4) Montrer que les cercles circonscrits aux triangles EAC, EBD, FAB et FCD passent par O .

Piste C'est le moment d'aller rechercher le corollaire du théorème 6, page 405 (ci-après, la figure dans son ensemble).



Note : comme un quadrilatère complet définit « naturellement » quatre triangles (EAC, EBD, FAB et FCD), le résultat ci-dessus – fleuron géométrique de quelques lycéens des années 1960 – s'énonce ainsi :

« Les cercles circonscrits aux quatre triangles d'un quadrilatère complet ont un point commun. »

104 Composée de similitudes

A) Le résultat de base

Soit s_1 une similitude directe de rapport k_1 ($k_1 > 0$), d'angle θ_1 , et s_2 une similitude directe de rapport k_2 ($k_2 > 0$), d'angle θ_2 .

Montrer que l'écriture complexe de la composée $s_2 \circ s_1$ est de la forme :

$$z' = k_1 k_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \cdot z + b,$$

où b appartient à $\mathbb{C}$.

B) Parallélogramme

Étant donné un triangle ABC , on construit les triangles AEB, ACF et CDB équilatéraux de sens direct.

Soit r la rotation de centre A , d'angle $\frac{\pi}{3}$, r' la rotation de centre C , d'angle $-\frac{\pi}{3}$, et t la composée $t = r' \circ r$.

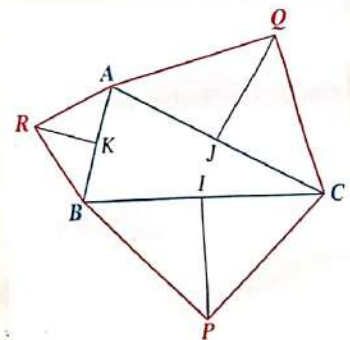
1) À l'aide du résultat de la partie A), montrer que t est une translation.

2) En déduire que $AEDF$ est un parallélogramme.

Piste Action de $r' \circ r$ sur... (à vous de trouver).

C) Concours

Le triangle ABC est donné avec, pour milieux des côtés, les points I, J et K , et les triangles BPC, CQA et ARB sont rectangles isocèles de sens direct en P, Q et R .



1) Préciser l'angle et le rapport de la similitude s_1 de centre C transformant Q en A , et de la similitude s_2 de centre B transformant A en R .

2) À l'aide du résultat de base (partie A)), montrer que $s_2 \circ s_1 = r\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3) Montrer que la droite (BQ) est orthogonale à la droite (PR) .

4) Généraliser ce dernier résultat pour prouver que $(AP), (BQ)$ et (CR) sont concourantes.

105 Un triangle équilatéral

D'après Similitudes, groupe de Géométrie, IREM d'Aquitaine, 1998.

A) Un résultat de base

Utiliser les écritures complexes pour montrer que la composée $t \circ s$ d'une translation t et d'une similitude directe s de rapport k et d'angle θ est une similitude directe de même rapport k et de même angle θ .

B) Question préliminaire

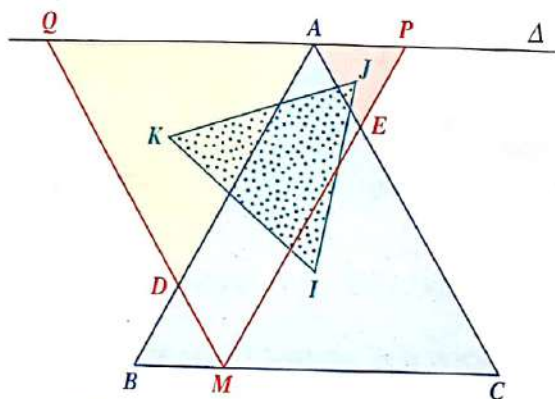
Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct et de centre O . Déterminer l'angle et le rapport de chacune des similitudes directes suivantes :

- s_1 est de centre A et transforme O en C ;
- s_2 est de centre A et transforme B en O .

C) L'étude de figure

On considère un triangle équilatéral ABC de sens direct, Δ une droite passant par A et parallèle à (BC) et M un point de (BC) distinct de B et C :

- la parallèle en M à (AB) rencontre Δ en P et (AC) en E ;
- la parallèle en M à (AC) rencontre Δ en Q et (AB) en D .



1) Montrer que AEP et AQD sont des triangles équilatéraux de sens direct et que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{CB}$.

2) Soit I, J et K les centres des triangles équilatéraux ABC, AEP et AQD . On désigne par s_1 la similitude directe de centre A , de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$, par s_2 la similitude directe de centre

A , de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$, et par f la composée $s_2 \circ t_{\overrightarrow{CB}} \circ s_1$.

À l'aide du résultat de base, montrer que f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

3) Montrer que $f(I) = I$ et $f(J) = K$.

En déduire que le triangle IKJ est équilatéral de sens direct.

106 Trois cercles avec un point commun

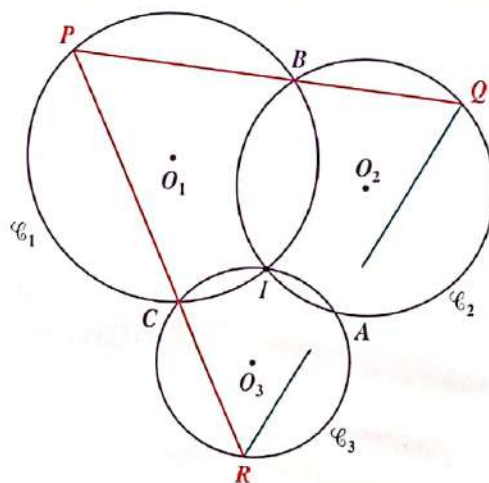
Dans ce problème, on utilise le résultat obtenu dans la première partie du problème 104.

Trois cercles $\mathcal{C}_1$ de centre O_1 , de rayon R_1 , $\mathcal{C}_2$ de centre O_2 , de rayon R_2 , et $\mathcal{C}_3$ de centre O_3 , de rayon R_3 ont un point I en commun et se recoupent mutuellement en A, B et C (voir figure ci-dessous).

Soit P un point de $\mathcal{C}_1$; la droite (PB) recoupe $\mathcal{C}_2$ en Q et la droite (PC) recoupe $\mathcal{C}_3$ en R .

(On suppose que, comme dans la figure ci-dessous, les points P, Q et R sont distincts des points d'intersection des cercles I, A, B et C .)

Le but du problème est de montrer que la droite (QR) passe par A .



On désigne par :

- s la similitude directe de centre I transformant O_3 en O_1 ;
- s' la similitude directe de centre I transformant O_1 en O_2 ;
- σ la similitude directe de centre I transformant O_3 en O_2 .

1) Préciser avec les données de la figure l'angle et le rapport de chacune de ces similitudes.

En déduire que $s' \circ s = \sigma$.

2) Quelle est l'image de R par $s' \circ s$?

3) À l'aide du théorème 6, page 405, montrer que (QR) passe par A .

Sections planes de surfaces

OBJECTIFS

- Approfondir l'étude des surfaces.
- Découvrir quelques propriétés des fonctions de deux variables à l'aide de leurs représentations graphiques par des surfaces.



« L'art est une démonstration dont la nature est la preuve. »

George Sand

Avant-première

1. OBJECTIFS

- Les équations des **cylindres et cônes de révolution** ont été introduites en classe de Première (dans les cas simples) : réveiller quelques souvenirs sur ce sujet est le premier objectif.
- Ayant fondamentalement en vue dans ce chapitre les **sections planes de surfaces**, le terrain sera d'autant mieux préparé que sera dégrossi le travail d'étude à accomplir sur les courbes ainsi obtenues (travail basé pour l'essentiel sur le *changement de repère*) : voilà le second objectif.

2. CYLINDRES ET CÔNES

- Rappelons quelques notions de base.

• Cylindre :

Axe (Oz) et base : le cercle $\mathcal{C}$ de centre O , de rayon R du plan (Oxy) .

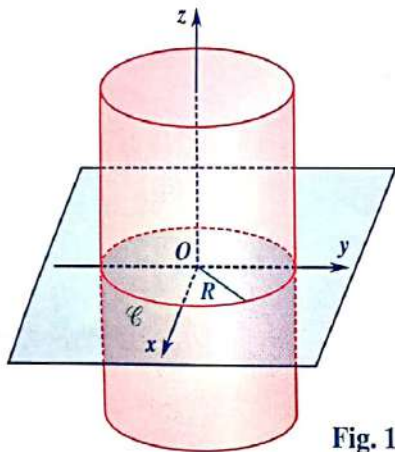


Fig. 1

• Cône :

Sommet O , axe (Oz) et base : le cercle Γ du plan $z = a$, de rayon R de centre appartenant à (Oz) .

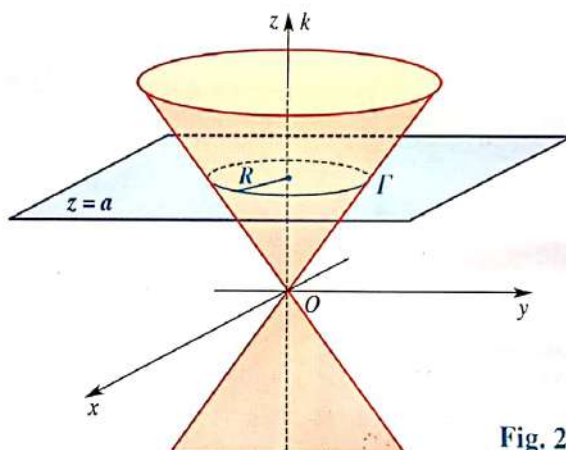


Fig. 2

- La séquence 1 revient sur les équations du cylindre et du cône et sur quelques sections planes.

Séquence 1

Cylindre et cône

① Le cylindre

Rappel : « M appartient au cylindre (S) ci-dessus » signifie : le projeté orthogonal de M sur (Oxy) appartient au cercle $\mathcal{C}$.

- 1) Donner l'équation de (S) .
- 2) Quelle est la section de (S) par le plan d'équation : $z = a$ ($a \in \mathbb{R}$) ?
- 3) Préciser la section de (S) par les plans :
 - a) $x = 2R$;
 - b) $x = -R$;
 - c) $x = \frac{R}{2}$;
 - d) $y = R$;
 - e) $y = -3R$;
 - f) $y = \frac{R}{3}$.

② Le cône

Rappel : « M appartient au cône C ci-dessus » signifie : $M = O$, sinon (OM) est sécante avec Γ .

- 1) Soit $M(x, y, z)$ n'appartenant pas à (Oxy) .
Montrer que $z \neq 0$ et que (OM) perce le plan $z = a$ au point $m\left(a\frac{x}{z}, a\frac{y}{z}, a\right)$.
- 2) En déduire que l'équation de C est :
$$a^2(x^2 + y^2) = R^2z^2 \text{ et qu'elle peut s'écrire : } r^2z^2 = x^2 + y^2 \text{ avec } r > 0.$$

3. LA NOTION D'HYPERBOLE

• Étant donné un plan $\mathcal{P}$, une hyperbole (H) du plan $\mathcal{P}$ est une courbe de ce plan vérifiant la propriété suivante :

Il existe un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ de $\mathcal{P}$ et un réel a non nul tels que l'équation de (H) dans ce repère soit $xy = a$ (ou, si l'on préfère, (H) est la courbe représentative dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ de la fonction numérique $x \mapsto \frac{a}{x}$).

• Si la séquence 2 propose un premier exemple non trivial, on retiendra surtout la méthode mise en œuvre : « méthode du changement de repère ».

Séquence 2

Un premier exemple

Soit C la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto x + \frac{1}{x}$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Étudier f (variations, limites) et tracer la courbe C ainsi que ses asymptotes.

2) On pose $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{j}$.

a) Montrer que $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère.

b) Soit (X, Y) les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et (x, y) les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer que $x = X$ et $y = X + Y$.

Piste Partir de $\vec{OM} = X\vec{u} + Y\vec{v} = \dots$

c) Montrer que $y = x + \frac{1}{x}$ si, et seulement si, $XY = 1$.

d) En déduire que C est une hyperbole.

• Voici maintenant un exemple plus en rapport avec nos préoccupations futures, exemple où « rien ne nous sera épargné » (mais nous n'y pouvons rien) : le couple de coordonnées utilisé sera le patibulaire (y, z) (au lieu du sympathique (x, y)), le repère du plan $\mathcal{P}$ sera $(I, \vec{j}, \vec{k})$, etc.

Considérons le cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (Fig. 3) et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x = 1$.

L'étude de la section du cône par le plan $\mathcal{P}$ est l'objet de la séquence 3.

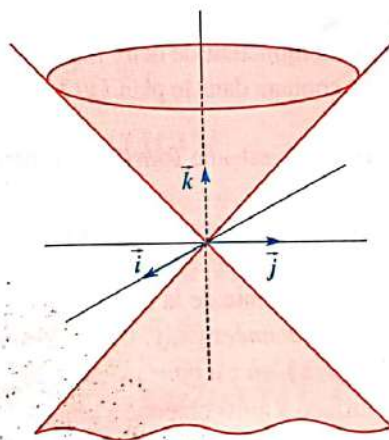


Fig. 3

Séquence 3

Section de cône

1) Montrer que $(I, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère du plan $\mathcal{P}$ où I est le point de coordonnées $(1, 0, 0)$.

2) Montrer que l'intersection du cône et du plan $\mathcal{P}$ est la courbe (H) de $\mathcal{P}$ d'équation $x^2 - y^2 = 1$ dans le repère $(I, \vec{j}, \vec{k})$.

3) On pose $\vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j} + \vec{k})$; $\vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{j} + \vec{k})$.

Prouver que $(I, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un repère orthonormal de $\mathcal{P}$.

4) Soit M un point de $\mathcal{P}$, (y, z) ses coordonnées dans le repère $(I, \vec{j}, \vec{k})$ et (Y, Z) ses coordonnées dans le repère $(I, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Exprimer y et z en fonction de Y et de Z .

Piste Partir de $\vec{IM} = Y\vec{e}_1 + Z\vec{e}_2 = \dots$

5) Montrer que $z^2 - y^2 = 1$ si, et seulement si, $YZ = \frac{1}{2}$, et en déduire que la courbe (H) est une hyperbole.

1. Généralités sur les surfaces

Dans tout ce chapitre, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et, selon l'usage, nous désignerons par (Ox) , (Oy) , (Oz) les axes de coordonnées et par (Oyz) , (Ozx) , (Oxy) les plans de coordonnées (d'équations respectives : $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$).

1.1 ÉQUATION D'UNE SURFACE

Exemples

- La **sphère** S de centre O et de rayon R se définit comme l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $OM = R$ ou encore $OM^2 = R^2$.

L'expression analytique de la distance dans $\mathcal{E}$ autorise à écrire :

$M(x, y, z)$ appartient à S si, et seulement si, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Ainsi, nous dirons que S a pour équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

- Considérons le cylindre de révolution C de la figure 4.

Un point $M(x, y, z)$ appartient à C si, et seulement si, $x^2 + y^2 = 1$, z étant quelconque.

L'équation du cylindre C est donc :

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Attention : ne pas faire de confusion avec l'équation du cercle Γ qui est la conjonction de deux relations : $x^2 + y^2 = 1$ et $z = 0$ (car Γ est contenu dans le plan (xOy)).

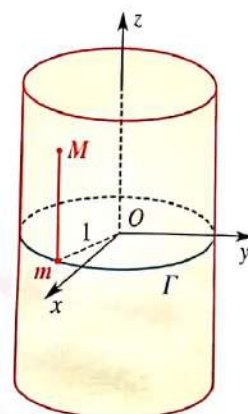


Fig. 4

Surface résolue en z

Lorsque f est une fonction de deux variables x et y , telle que :

$$f: (x, y) \mapsto 2x + y, f: (x, y) \mapsto x^2 + y^2,$$

$f: (x, y) \mapsto xy$, etc., nous pouvons associer à f une surface S définie de la manière suivante : à chaque point m de coordonnées $(x, y, 0)$, on fait correspondre le point $M(x, y, z)$ où z a pour valeur $z = f(x, y)$ (Fig. 5).

La surface S ainsi obtenue a donc pour équation :

$$z = f(x, y).$$

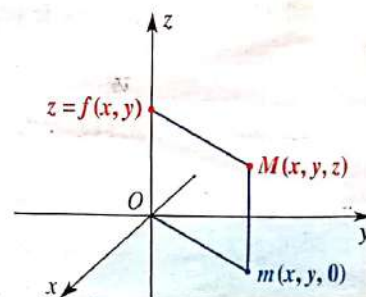


Fig. 5

1.2 SURFACE DE RÉVOLUTION

Soit Γ une courbe contenue dans le plan (Oyz) .

- Intuitivement**, si l'on fait tourner le plan (Oyz) autour de (Oz) , la courbe Γ engendre une surface S de $\mathcal{E}$.

- Mathématiquement**, la surface de révolution d'axe (Oz) engendrée par Γ est l'ensemble S des points de tous les cercles C_m , m décrivant Γ (voir figure 6).

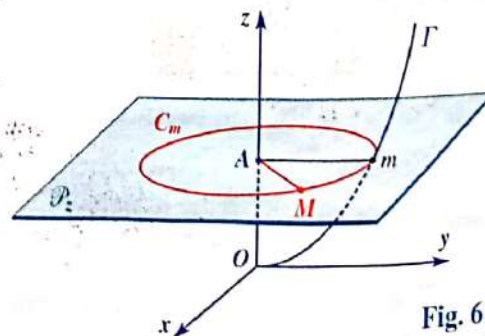


Fig. 6

2. Sections planes de surfaces

2.1 GÉNÉRALITÉS

Conformément au programme, nous ne considérerons dans ce chapitre que des sections planes d'une surface par des **plans parallèles aux plans de coordonnées**.

Considérons, par exemple, une surface (S) dont l'équation est de la forme $z = f(x, y)$.

Soit k un réel donné et $\mathcal{P}$ le plan parallèle au plan (Oxy) d'équation $z = k$ (Fig. 7).

Lorsqu'elle est non vide, la section de (S) par le plan $\mathcal{P}$ est la courbe C_k d'équation⁽¹⁾ :

$$C_k \begin{cases} f(x, y) = k \\ z = k \end{cases}$$

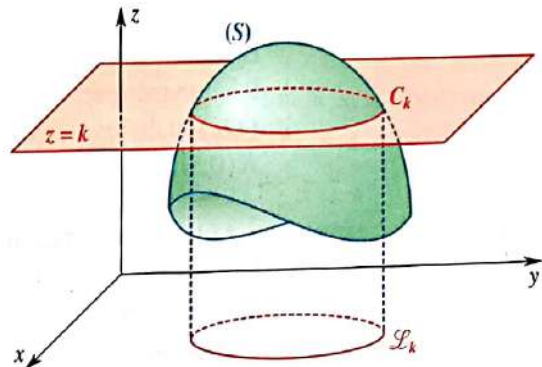


Fig. 7

Si l'on projette orthogonalement la courbe C_k sur le plan (Oxy) , on obtient une courbe $\mathcal{L}_k$ « identique » à C_k telle que : les points de (S) associés aux points $m(x, y, 0)$ de $\mathcal{L}_k$, c'est-à-dire les points $M(x, y, z)$ avec $z = f(x, y)$, sont les points de (S) de même cote k .

Voilà pourquoi $\mathcal{L}_k$ est appelée **une courbe de niveau**⁽²⁾ de f .

2.2 CAS D'UN CYLINDRE DE RÉVOLUTION

Soit $\mathbb{C}$ le cylindre de révolution d'axe (Oz) et de base le cercle du plan (Oxy) de centre O , de rayon R (Fig. 8) :

– l'équation du cylindre est :

$$x^2 + y^2 = R^2 ;$$

– la section de $\mathbb{C}$ par un plan parallèle à (Oxy) est le cercle de ce plan, centré sur (Oz) et de rayon R .

Les plans d'équations $x = a$ et $y = a$ (a réel) rencontrent le cylindre selon :

– **une génératrice**, lorsque $|a| = R$;

– **deux génératrices**, lorsque $|a| < R$.

(Lorsque $|a| > R$, les plans ne rencontrent pas le cylindre.)

Tout cela est parfaitement évident.

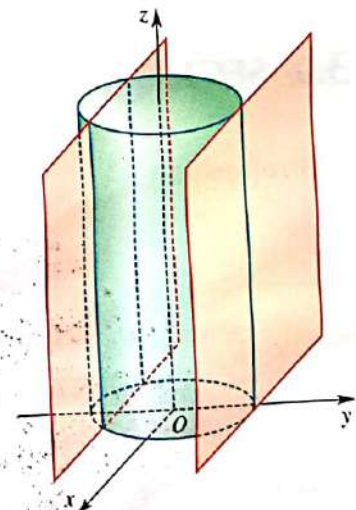


Fig. 8

(1) Et non $f(x, y) = k$, qui est encore l'équation d'une surface.
(2) La terminologie vient de la topographie (voir exercice 7, page 444).

3. Cônes de révolution

3.1 CÔNES DE RÉVOLUTION D'AXE (Oz) ET DE SOMMET O

Proposition 1

Les cônes de révolution de sommet O et d'axe (Oz) sont les surfaces d'équation $r^2 z^2 = x^2 + y^2$, où r est un réel ($r > 0$).

... Démonstration

D'après l'exercice 2, page 428, un cône de révolution de sommet O et d'axe (Oz) admet une équation de la forme $r^2 z^2 = x^2 + y^2$, avec $r > 0$.

Réciproquement, la surface d'équation $r^2 z^2 = x^2 + y^2$ est le cône de sommet O , d'axe (Oz) et de base circulaire le cercle Γ du plan $z = 1$, de rayon r , centré sur (Oz) au point $K(0, 0, 1)$.

Compléments

• Autre interprétation⁽¹⁾ du réel r ($r > 0$)

Les points $A(0, r, 1)$ et $A'(0, -r, 1)$ sont des points de Γ diamétralement opposés.

L'angle géométrique $\widehat{AOA'}$, qui, par définition, est l'angle au sommet du cône (Fig. 9), est tel que $\widehat{AOA'} = 2\alpha$ avec :

$$\alpha = \widehat{AOK} = \widehat{A'OK},$$

et l'on a $r = \tan \alpha$.

• Génératrice

Toute droite passant par O et rencontrant Γ est une génératrice du cône et :

- toute génératrice fait partie du cône ;
- le cône est la surface formée par toutes les génératrices.

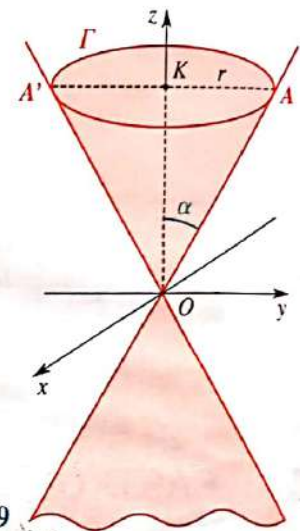


Fig. 9

3.2 SECTION PAR UN PLAN PARALLÈLE À (Oxy)

Proposition 2

Le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = a$ ($a \neq 0$) sectionne le cône C d'équation $r^2 z^2 = x^2 + y^2$ ($r > 0$) selon le cercle $\mathcal{C}$ du plan $\mathcal{P}$ de centre $\Omega(0, 0, a)$ et de rayon $R = r \times |a|$.

... Démonstration

Les équivalences qui suivent assurent du résultat :

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in C \cap \mathcal{P} &\Leftrightarrow \begin{cases} z = a \\ r^2 z^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = a \\ x^2 + y^2 = r^2 a^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} M \in \mathcal{P} \\ \Omega M^2 = R^2 \text{ où } R = r \times |a| \end{cases} \end{aligned}$$

(1) Une autre interprétation de r est proposée à l'exercice 15 (page 445) et, par ailleurs, l'usage de l'expression « cône de révolution » sera expliqué à l'exercice 16 (page 445).

3.3 SECTION PAR UN PLAN PARALLÈLE À (Oyz) OU (Ozx)

Étude préliminaire

Soit C le cône d'équation $r^2 z^2 = x^2 + y^2$, $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x = a$ ($a \neq 0$), A le point $A(a, 0, 0)$ et $\mathcal{H}$ la section de C par le plan $\mathcal{P}$.

Les équivalences suivantes étant immédiates :

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{H} &\Leftrightarrow x = a \text{ et } r^2 z^2 = a^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = y\vec{i} + z\vec{k} \text{ avec } r^2 z^2 - y^2 = a^2, \end{aligned}$$

il vient que l'équation de $\mathcal{H}$ dans le repère $(A, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{P}$ est :

$$r^2 z^2 - y^2 = a^2.$$

Posons $\vec{e}_1 = r\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{e}_2 = -r\vec{j} + \vec{k}$.

Il est clair que $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un repère du plan $\mathcal{P}$ et que, si un point M de $\mathcal{P}$ a pour coordonnées (y, z) dans le repère $(A, \vec{j}, \vec{k})$ et (Y, Z) dans le repère $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on a :

$$\overrightarrow{AM} = Y\vec{e}_1 + Z\vec{e}_2 = Y(r\vec{j} + \vec{k}) + Z(-r\vec{j} + \vec{k}) = r(Y - Z)\vec{j} + (Y + Z)\vec{k}.$$

Comme $\overrightarrow{AM}$ s'écrit $y\vec{j} + z\vec{k}$, et ce de manière unique, on a :

$$y = r(Y - Z) \quad \text{et} \quad z = Y + Z.$$

Par suite, la relation $r^2 z^2 - y^2 = a^2$ est équivalente à :

$$r^2(Y + Z)^2 - r^2(Y - Z)^2 = a^2 \quad \text{ou encore} \quad 4r^2 YZ = a^2.$$

Ainsi, la courbe $\mathcal{H}$ a pour équation dans le repère $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan $\mathcal{P}$:

$$YZ = \frac{a^2}{4r^2}.$$

Il s'agit d'une hyperbole du plan $\mathcal{P}$, d'asymptotes les droites $\mathcal{D}(A, \vec{e}_1)$ et $\mathcal{D}(A, \vec{e}_2)$.
En conclusion, et en en disant un peu plus long :

THÉORÈME 1

Soit C le cône d'équation $r^2 z^2 = x^2 + y^2$.

• La section du cône par le plan (yOz) est la réunion des droites D_1 et D_2 d'équations respectives dans le repère $(O, \vec{j}, \vec{k})$:

$$D_1 : rz - y = 0 ; \quad D_2 : rz + y = 0.$$

• La section du cône par le plan $x = a$ ($a \neq 0$) est une hyperbole $\mathcal{H}$ de sommet $A(a, 0, 0)$ et d'asymptotes parallèles à D_1 et D_2 .

Remarques :

• Le premier point est évident, et si l'on note que $D_1 = \mathcal{D}(0, \vec{e}_1)$ et $D_2 = \mathcal{D}(0, \vec{e}_2)$, le parallélisme des asymptotes de l'hyperbole $\mathcal{H}$ aux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne l'est pas moins.

• L'étude de la section du cône par un plan parallèle à (Ozx) conduirait à des résultats analogues : elle est abandonnée à l'entraînement du lecteur (voir exercice 18, page 445).

• À titre d'exemple, la figure 10 propose la section du cône $4z^2 = x^2 + y^2$ par le plan $x = 1$.

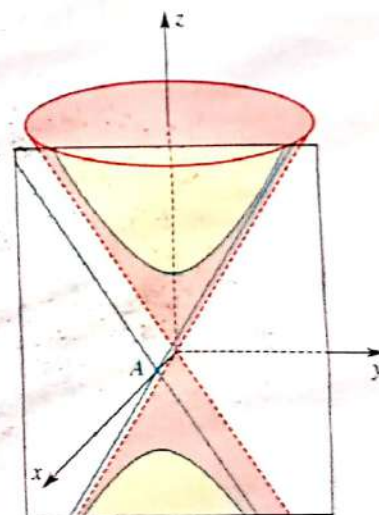


Fig. 10

4. Surface d'équation $z = x^2 + y^2$

4.1 VISUALISATION DE LA SURFACE

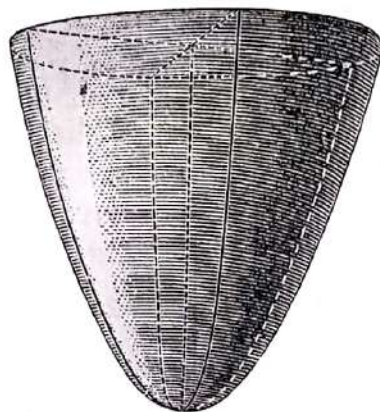


Fig. 11 a

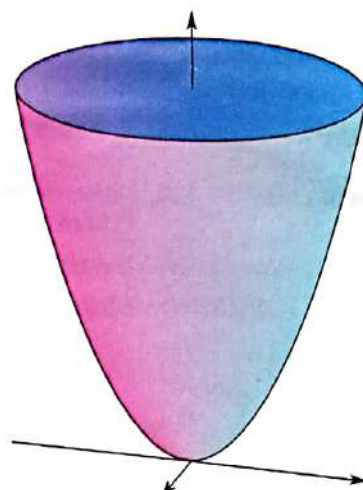


Fig. 11 b

La figure 11a est extraite du *Traité de Géométrie* d'Eugène Rouche et de Charles de Comberousse, Paris, Gauthier Villars, 1871.

4.2 UN PARABOLOÏDE DE RÉVOLUTION

Proposition 3

La surface (S) d'équation $z = x^2 + y^2$ est la **surface de révolution** engendrée par rotation autour de l'axe (Oz) de la **demi-parabole** contenue dans le plan (yOz) , d'équation $z = y^2$, avec $y \geq 0$.

... Démonstration

Soit $m(0, y, z)$ un point fixé du plan (yOz) , A le point $A(0, 0, z)$, $\mathcal{P}_z$ le plan parallèle à (xOy) « de cote z » et C le cercle de centre A passant par m , contenu dans $\mathcal{P}_z$ (Fig. 12).

Un point $M(X, Y, Z)$ appartient à C si, et seulement si :

$$\begin{cases} Z = z \\ AM^2 = Am^2 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} Z = z \\ X^2 + Y^2 = y^2 \end{cases}$$

Il s'ensuit que, lorsque $m(0, y, z)$ appartient à la demi-parabole du plan (yOz) d'équation $z = y^2$, tout point $M(X, Y, Z)$ du cercle C vérifie l'équation $Z = X^2 + Y^2$, autrement dit : tout point M du cercle C appartient à la surface (S) .

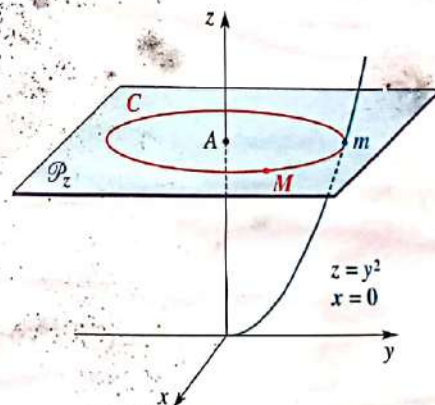


Fig. 12

Conséquence

Pour des raisons maintenant évidentes, la surface (S) d'équation $z = x^2 + y^2$ est appelée **paraboloïde de révolution** d'axe (Oz) .
(Le lecteur un peu physionomiste aura reconnu le « phare » des exercices 81 du chapitre 1 (page 35) et 7 du chapitre 4 (page 130)).

4.3 SECTIONS PLANES

Proposition 4

« Plans parallèles au plan (xOy) »Soit a un réel positif et $\mathcal{P}_a$ le plan d'équation $z = a$.La section de la surface (S) d'équation $z = x^2 + y^2$ par le plan $\mathcal{P}_a$ est le cercle de centre $A(0, 0, a)$, de rayon $\sqrt{a}$ contenu dans $\mathcal{P}_a$.

... Démonstration

Compte tenu du théorème précédent, ce résultat ne saurait nous étonner ; en voici, cependant, une démonstration directe (Fig. 13). On a :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P}_a \cap (S) \Leftrightarrow \begin{cases} z = a \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Comme $AM^2 = x^2 + y^2$, ceci équivaut encore à :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = a \\ AM^2 = a \end{cases}$$

On obtient finalement :

$$M \in \mathcal{P}_a \text{ et } AM = \sqrt{a}.$$

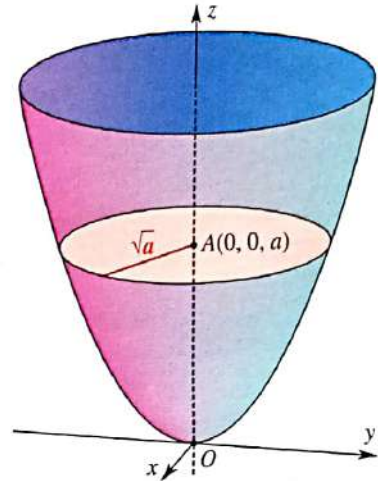


Fig. 13

Remarque : le plan (xOy) rencontre (S) en un seul point : l'origine O et, pour $a < 0$, le plan d'équation $z = a$ ne rencontre pas (S) .

Proposition 5

« Plans parallèles au plan (yOz) »Soit a un réel positif et Π_a le plan d'équation $x = a$.La section de la surface (S) d'équation $z = x^2 + y^2$ par le plan Π_a est la parabole contenue dans Π_a d'équation $z = y^2 + a^2$.

... Démonstration

Nous avons :

$$M(x, y, z) \in \Pi_a \cap (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ z = y^2 + a^2 \end{cases},$$

ce qui prouve, sans beaucoup d'effort, le résultat annoncé.

Remarques :

- De même, la section du paraboloïde (S) par le plan d'équation $y = a$ est la parabole de ce plan d'équation $z = x^2 + a^2$.
- La figure 14 présente le paraboloïde de révolution évidé de la partie contenue dans le demi-espace d'équation $x \geq a$ (apparaît alors la section par le plan $x = a$).

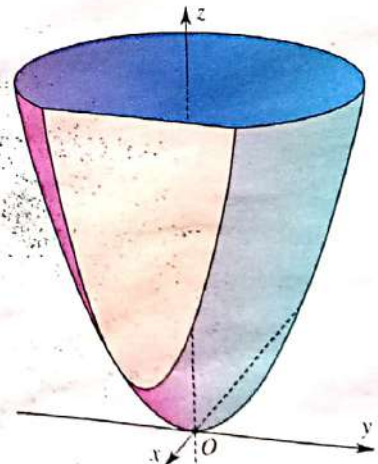


Fig. 14

5. La surface d'équation $z = xy$

5.1 VISUALISATION DE LA SURFACE

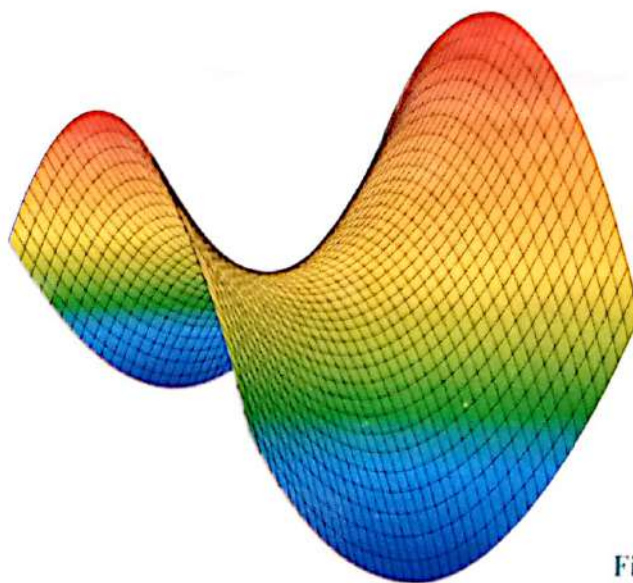


Fig. 15

5.2 SECTION PAR UN PLAN PARALLÈLE À (xOy)

Proposition 6

Soit a un réel quelconque et $\mathcal{P}_a$ le plan d'équation $z = a$.

- Lorsque $a \neq 0$, la section de la surface d'équation $z = xy$ par le plan $\mathcal{P}_a$ est l'hyperbole équilatère contenue dans ce plan, d'équation $xy = a$.
- Lorsque $a = 0$, $\mathcal{P}_a$ est le plan (xOy) qui coupe cette même surface selon les axes de coordonnées (Ox) et (Oy) .

... Démonstration

Voilà une démonstration évidente, s'il en est. Aussi nous contenterons-nous de souligner que les asymptotes des hyperboles obtenues sont orthogonales, d'où, par définition, le nom d'hyperbole équilatère.

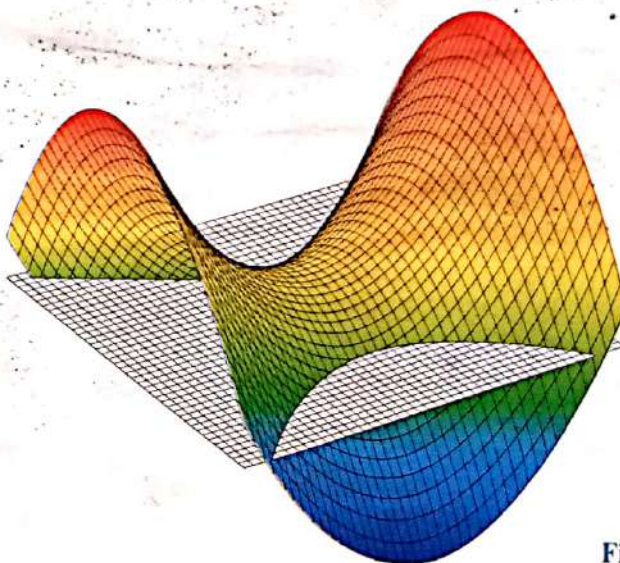


Fig. 16

5.3 SECTION PAR UN PLAN PARALLÈLE À (yOz) OU (xOz)

THÉORÈME 2

Soit (S) la surface d'équation $z = xy$.

- Pour tout réel λ , le plan parallèle à (yOz) d'équation $x = \lambda$ coupe la surface (S) selon la droite D_λ d'équation :

$$\begin{cases} x - \lambda = 0 \\ z - \lambda y = 0 \end{cases}$$

- Pour tout réel μ , le plan parallèle à (xOz) d'équation $y = \mu$ coupe la surface (S) selon la droite Δ_μ d'équation :

$$\begin{cases} y - \mu = 0 \\ z - \mu x = 0 \end{cases}$$

- Pour tout point M de (S) , il existe un unique couple de réels (λ, μ) tel que M appartienne à $D_\lambda \cap \Delta_\mu$.

... Démonstration

L'équivalence $\begin{cases} x = \lambda \\ z = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \lambda = 0 \\ z - \lambda y = 0 \end{cases}$ établit la première assertion et un raisonnement

analogue, la deuxième.

La troisième n'est pas moins banale : le point $M(x_0, y_0, x_0 y_0)$ de (S) appartient à $D_\lambda \cap \Delta_\mu$ où (on n'a pas le choix) :

$$\lambda = x_0 \quad \text{et} \quad \mu = y_0.$$

5.4 LE PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE

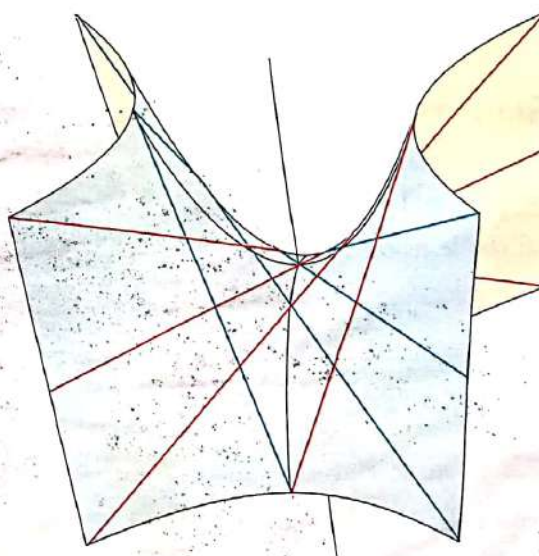


Fig. 17

La figure 17 permet de visualiser les droites de la surface à l'étude.

Cette surface est appelée **paraboloïde hyperbolique** (le mot « paraboloïde » va trouver sa légitimation dans les deux pages suivantes).

On notera que cette surface s'obtient comme famille de droites (famille des droites D_λ ou famille des droites Δ_μ) ; de telles surfaces sont appelées **surfaces réglées**.

1. Exemples d'étude d'une surface

OBJECTIF

Nous proposons d'explorer de manière tout à fait modeste quelques procédés permettant d'enrichir les connaissances que nous pouvons avoir d'une surface d'équation donnée :

- recherche de nouvelles sections planes ;
- recherche de l'équation de cette surface dans un autre repère ;
- recherche d'une définition géométrique, etc.

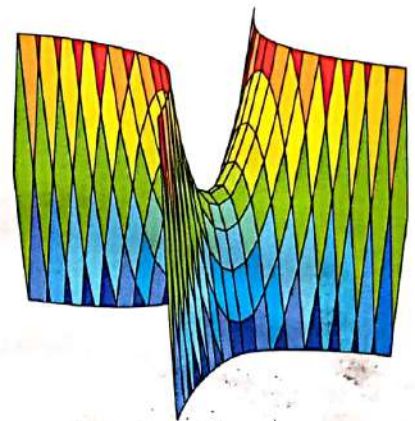
PROBLÈME

Soit $(\mathcal{PH})$ la surface d'équation $z = xy$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) On pose $\vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$, $\vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j})$ et $\vec{e}_3 = \vec{k}$.

Montrer que $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est un repère orthonormal de $\mathcal{E}$.

2) Donner l'équation de la surface $(\mathcal{PH})$ dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et étudier ses sections par les plans parallèles aux plans $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$ ou $(O, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.



Mosaïque sur $(\mathcal{PH})$.

1 Solution

1) $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ repère orthonormal de $\mathcal{E}$

Il est immédiat de vérifier chacune des égalités :

$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$ et $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0$, nous assurant ainsi que le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est un repère orthonormal de $\mathcal{E}$.

Remarque : il nous sera commode d'appeler « ancien repère » le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et (bien sûr) « nouveau repère » le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

2) Équation de $(\mathcal{PH})$ dans le nouveau repère

Nous procédons en deux étapes :

- Expression des anciennes coordonnées d'un point en fonction des nouvelles

Soit M un point de $\mathcal{E}$, (x, y, z) ses anciennes coordonnées (coordonnées du point M dans l'ancien repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$) et (X, Y, Z) ses nouvelles coordonnées (coordonnées de M dans le nouveau repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$).

Partons de l'égalité $\overrightarrow{OM} = X\overrightarrow{e_1} + Y\overrightarrow{e_2} + Z\overrightarrow{e_3}$.

Compte tenu de la définition de $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$, nous obtenons :

$$\overrightarrow{OM} = X\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})\right) + Y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j})\right) + Z\vec{k}, \text{ soit :}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\vec{j} + Z\vec{k}.$$

Et, parce que (x, y, z) est l'unique triplet de réels tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

nous en déduisons :

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y), y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) \text{ et } z = Z.$$

• Équation de $(\mathcal{PH})$ dans le nouveau repère

Un point M appartient à $(\mathcal{PH})$ si, et seulement si, ses anciennes coordonnées vérifient $z = xy$.

D'après ce qui précède, cela équivaut à dire que ses nouvelles coordonnées vérifient :

$$Z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\right), \text{ soit :}$$

$$Z = \frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} \quad (\text{E}).$$

Nous tenons là l'équation de $(\mathcal{PH})$ dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

• Sections planes

Les sections de $(\mathcal{PH})$ par des plans parallèles aux plans $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3})$ ou $(O, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ sont des paraboles (voir exercice 1 ci-dessous).

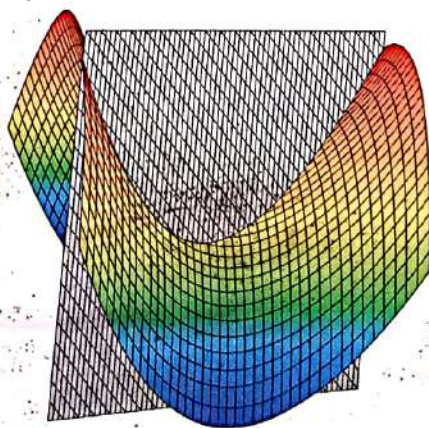


Fig. 18

Dans la foulée

① Section de $(\mathcal{PH})$ par le plan $X = a$ (a réel)

1) Montrer que la section de $(\mathcal{PH})$ par le plan d'équation $X = a$ est une parabole et calculer les coordonnées de son sommet P_a .

2) Quel est le lieu géométrique des sommets P_a lorsque a décrit $\mathbb{R}$?

② Section de $(\mathcal{PH})$ par le plan $Y = a$ (a réel)

Reprendre en les adaptant les questions de l'exercice 1.

POINT INFO

Les quadriques

La sphère, les cônes, cylindres et paraboloides de révolution, le paraboloides hyperbolique et les hyperboloïdes (voir partie 3, page 442 et problème 44, page 451) sont des exemples de quadriques (il y en a d'autres : ellipsoïde, paraboloides elliptique, etc.).

Les quadriques sont les surfaces les plus « simples » de l'espace (leur équation est de la forme :

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + bxy + b'yz + b''xz + cx + c'y + c''z + d = 0)$$

que l'on rencontre un peu partout : Physique, Mécanique, Architecture, etc.

2. Fonctions de x et y et surfaces

OBJECTIF

Mettre en évidence, dans des cas simples, quelques propriétés d'une fonction de deux variables x et y :

- en **représentant graphiquement** cette fonction par une surface ;
- en étudiant les **coupes** de cette surface par des plans.

PROBLÈME

Le problème des rouleaux ⁽¹⁾

Quel est le volume maximum d'un rouleau cylindrique (Fig. 19) dont le diamètre de base x et la hauteur y sont tels que :

$$2x + y \leq a,$$

où a est un réel strictement positif donné ?

Remarque : il nous paraît opportun, ici, de marquer au fur et à mesure les différentes étapes qui vont guider l'étude de ce problème.

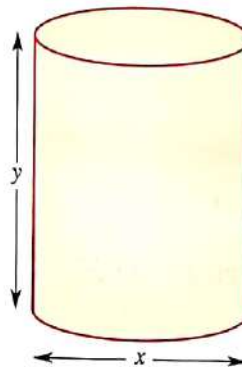


Fig. 19

① Modélisation

Le volume d'un cylindre de diamètre de base x et

de hauteur y est calculé par $\frac{\pi}{4} x^2 y$.

Il s'agit donc de calculer le maximum de la fonction V de deux variables x et y définie par :

$$V(x, y) = \frac{\pi}{4} x^2 y,$$

pour x et y réels vérifiant $0 \leq x$, $0 \leq y$ et $2x + y \leq a$.

Le facteur $\frac{\pi}{4}$ n'ayant qu'un rôle secondaire dans cette affaire, nous

pouvons formuler le problème ainsi :

Soit D l'ensemble des couples de réels (x, y) tels que :

$$0 \leq x, 0 \leq y \text{ et } 2x + y \leq a.$$

Trouver la valeur maximum que prend la fonction :

$f: (x, y) \rightarrow x^2 y$ sur D .

Les fonctions V et f étant liées par $V = \frac{\pi}{4} \times f$, elles ont leur maximum au même point.

(1) Il n'y a pas si longtemps que cela, un article du règlement des P.T.T. stipulait que : « Les rouleaux cylindriques acceptés par les P.T.T. sont tels que $17 \leq 2d + D \leq 104$ où d désigne le diamètre et D la longueur (unité : le centimètre). » Si l'on cherche le volume maximum d'un rouleau acceptable par les P.T.T., il est évident que la condition $17 \leq 2d + D$ est à mettre au rang des utilités. D'où notre problème...

2 Représentation graphique de f

Une représentation graphique de f (Fig. 20) est fournie par celle de la surface (S) d'équation $z = f(x, y)$, c'est-à-dire $z = x^2y$ en restreignant x et y aux conditions $0 \leq x$, $0 \leq y$ et $2x + y \leq a$.

Ces conditions définissent dans le plan (Oxy) l'intérieur du triangle OAB où A et B ont pour coordonnées :

$$A\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right) \text{ et } B(0, a, 0).$$

Nous conjecturons un maximum de f correspondant au point « culminant » de S , c'est-à-dire de cote z maximale.

3 Point « culminant » de (S)

Coupons la surface (S) par le plan d'équation $x = t$, pour $0 \leq t \leq \frac{a}{2}$

$\left(\frac{a}{2} \text{ est l'abscisse de } A\right)$.

La section obtenue est l'ensemble des points de coordonnées (t, y, t^2y) pour $0 \leq y \leq a - 2t$; il s'agit du segment $[PM]$ où :

$$P(t, 0, 0) \text{ et } M(t, a - 2t, t^2(a - 2t)).$$

Dans ce plan (Fig. 21), il est clair que le point de (S) d'« altitude » maximum est le point M ; autrement dit :

pour $x = t$ fixé, le maximum de f est $t^2(a - 2t)$.

Il n'y a plus qu'à étudier les variations de la fonction définie sur $\left[0, \frac{a}{2}\right]$ par :

$$t \mapsto t^2(a - 2t).$$

Le maximum est obtenu pour $t = \frac{a}{3}$, ce qui conduit à énoncer les résultats suivants (voir exercice 3 ci-après) :

- le volume maximum est $\frac{\pi}{4} \times \left(\frac{a}{3}\right)^3$;

- il est obtenu lorsque la hauteur du cylindre est égale au diamètre de base.

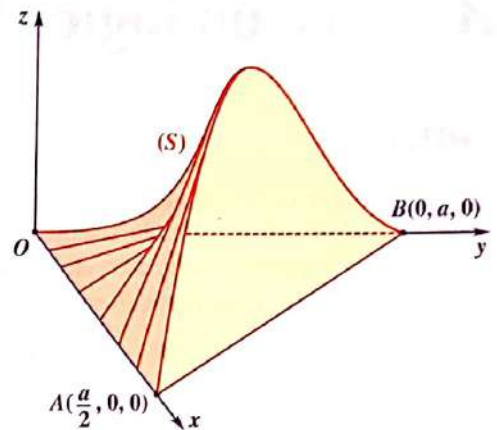


Fig. 20

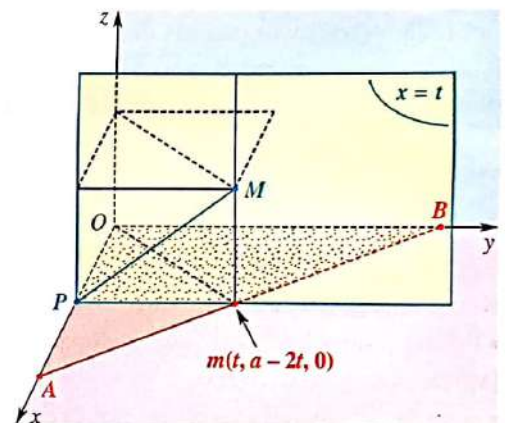


Fig. 21

Dans la foulée

Les exercices 3 et 4 poursuivent l'étude du problème des « rouleaux ».

3 Justifier les derniers résultats qui viennent d'être énoncés.

4 Autre approche

Soit t un réel tel que $0 \leq t \leq a$ et P le plan d'équation $y = t$.

1) Représenter la section de la surface (S) par le plan P .

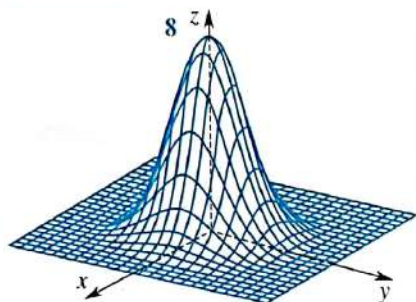
2) Quel est le maximum de f pour $y = t$ fixé ?

3) Retrouver les résultats précédemment obtenus à l'aide d'une étude de fonction.

Applications

Généralités sur les surfaces

- 1 Identifier et représenter graphiquement la surface (S) définie par $z = 1 - x - y$ où $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ et $x + y \leq 1$.
- 2 Quelle est la surface (S) définie par :
 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $z \geq 0$?
 Montrer que (S) a pour équation $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
- 3 Soit Γ la parabole du plan (yOz) d'équation $z = y^2$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{k})$. On définit la surface (S) comme l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que la droite passant par M et dirigée par $\vec{i}$ soit sécante avec Γ . Donner l'équation de Γ .
- 4 Que choisir ?



Déterminer l'équation de la surface ci-dessus sachant qu'elle est parmi les suivantes :

- a) $x^2 + y^2 = 8$;
- b) $z^2 = 8(x^2 + y^2)$;
- c) $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$;
- d) $z = 8e^{-(x^2 + y^2)}$;
- e) $z = 8 - (x^2 + y^2)$.

5 Surface de révolution

1) Soit y_0 et z_0 deux réels donnés.

Montrer que le cercle de centre $A(0, 0, z_0)$ passant par le point $m(0, y_0, z_0)$ et contenu dans le plan d'équation $z = z_0$ a pour équation :

$$\begin{cases} z = z_0 \\ x^2 + y^2 = y_0^2 \end{cases}$$

2) Soit Γ la courbe du plan (Oyz) d'équation $z = y^2$ avec $y \geq 0$, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{k})$.

Déduire de la question 1) l'équation de la surface de révolution d'axe (Oz) engendrée par la courbe Γ .

3) Reprendre la question précédente pour chacune des courbes Γ ci-après :

- a) $z = \sqrt{1 + y^2}$ avec $y \geq 0$;
- b) $z = \frac{1}{1 + y^2}$ avec $y \geq 0$.

Sections planes

6 Montrer que le plan d'équation $z = 4$ coupe chacune des surfaces (S_1) , (S_2) , (S_3) et (S_4) selon un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

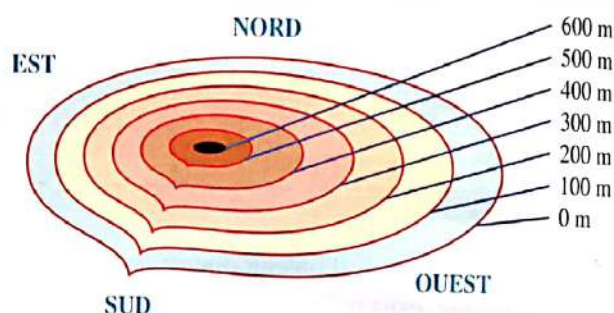
Les équations de ces surfaces sont les suivantes :

$$(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 = 25 ; (S_2) : x^2 + y^2 = 6 ;$$

$$(S_3) : z^2 = 4(x^2 + y^2) ; (S_4) : x^2 + (y - 1)^2 - 3z = 4.$$

7 Carte topographique

La figure ci-dessous représente les courbes de niveau d'un morne⁽¹⁾ de 610 mètres de haut.



1) Par quelle face l'ascension du morne est-elle la plus facile ? (Répondre à l'aide des points cardinaux : est, sud, sud-est, etc.)

2) Quel est le versant le plus raide ?

3) Quelle particularité présente le versant sud ?

8 Donner l'équation du cylindre de révolution d'axe (Oz) sachant que le point $A(1, 2, -1)$ appartient à la section de ce cylindre par le plan d'équation $x = 1$.

9 Soit E l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que :

$$x^2 + y^2 = 2, \quad y \geq 1 \quad \text{et} \quad 2 \leq z \leq 4.$$

Représenter graphiquement le projeté orthogonal de E sur le plan (Oxz) .

10 L'équation du cylindre C est $x^2 + y^2 = 4$, celle du plan $P : x = a$ et celle du plan $Q : y = b$ (a et b réels).

On pose $\Delta = P \cap Q \cap C$.

1) À quelle condition (nécessaire et suffisante) portant sur a et b a-t-on Δ non vide ?

2) Préciser géométriquement Δ lorsque Δ est non vide.

11 Représenter la surface d'équation $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

(1) Dans les îles (Antilles, Réunion), petite montagne isolée au milieu d'une plaine d'érosion.

Cônes de révolution

Dans les exercices 12 à 14, donner l'équation du cône C de sommet O et d'axe (Oz) qui vérifie la propriété indiquée.

- 12 Un cercle de base du cône a pour équation :

$$\begin{cases} z = -1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

- 13 La section du cône par le plan d'équation $z = -2$ est un cercle de rayon 1.

- 14 Une génératrice du cône passe par le point $A(-3, 4, 2)$.

- 15 Montrer que le plan (Oyz) coupe le cône d'équation :
 $r^2 z^2 = x^2 + y^2$ ($r > 0$)

selon deux droites symétriques par rapport à (Oz) .

Quelles relations existe-t-il entre r et les pentes de ces droites ?

- 16 Dans le plan (Oyz) , on considère la droite Δ d'équation $z = ay$ où a est un réel positif donné.

Montrer que la surface de révolution d'axe (Oz) engendrée par Δ est le cône d'équation $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

Piste S'inspirer de l'exercice 5, page 444.

- 17 Soit C le cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$.
 Prouver que la section de C par un plan parallèle à (yOz) et distinct de (yOz) est une hyperbole équilatère.

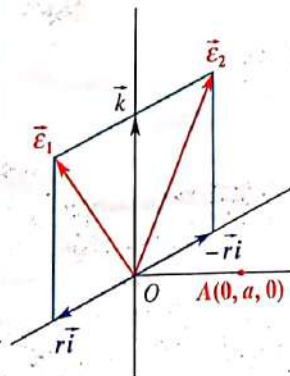
Note : par définition, une hyperbole équilatère est une hyperbole dont les asymptotes sont orthogonales.

- 18 Section d'un cône par un plan parallèle à (Oxz)

Soit C le cône d'équation $r^2 z^2 = x^2 + y^2$, P le plan d'équation $y = a$ ($a \neq 0$) et A le point $A(0, a, 0)$.

On pose $\vec{e}_1 = r\vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{e}_2 = -r\vec{i} + \vec{k}$.

- 1) Montrer que $(A, \vec{i}, \vec{k})$ et $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sont des repères de P .



- 2) Soit M un point de P .

Exprimer les coordonnées (x, z) de M dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{k})$ en fonction de ses coordonnées (X, Z) dans le repère $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

- 3) Montrer que la section du cône C par le plan P est la courbe

(H) d'équation $XZ = \frac{a^2}{4r^2}$ dans le repère $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et que

les asymptotes de (H) sont parallèles à deux génératrices fixes du cône (qui ne dépendent pas du réel a) que l'on précisera.

Le paraboloïde de révolution d'équation $z = x^2 + y^2$

La surface d'équation $z = x^2 + y^2$ sera désignée par (S) .

- 19 Préciser, parmi les points suivants, lesquels appartiennent à (S) :

$$A(2, 2, 4) ; B(-1, 1, 2) ; C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) ; D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

- 20 Justifier que (S) est contenue dans le demi-espace d'équation $z \geq 0$.

- 21 Trois plans parallèles au plan (xOy) coupent la surface (S) selon des cercles de rayon r , $2r$ et $3r$ (r réel strictement positif). Quelle est l'équation de chacun de ces plans ?

- 22 Le plan d'équation $z = 4$ coupe (S) et un cône de révolution d'axe (Oz) , de sommet O selon le même cercle. Quelle est l'équation du cône ?

- 23 Une génération du paraboloïde de révolution

Soit F le point de coordonnées $F(0, 0, \frac{1}{4})$ et P le plan d'équation

$$z = -\frac{1}{4}.$$

- 1) Soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathcal{E}$ et H son projeté orthogonal sur P .

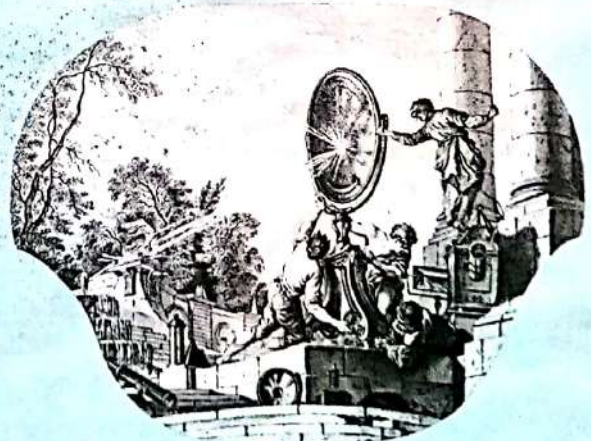
Calculer MF^2 et MH^2 en fonction de x, y et z .

- 2) En déduire que la surface (S) est l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ à égale distance de F et du plan P .

Les miroirs ardents

Des rayons parallèles à l'axe (Oz) après réflexion sur un miroir ayant la forme d'un paraboloïde de révolution convergent vers un même point, le foyer du paraboloïde (point F dans l'exercice 23).

Ce résultat d'optique (largement exploité : centrales solaires, phares...) était connu des Grecs.



Le paraboloïde hyperbolique d'équation $z = xy$

Nous désignons par $(\mathcal{PH})$ la surface d'équation $z = xy$.
Dans les exercices 24 à 26, on considère les familles de droites :

- $\mathcal{D}_\lambda$ (λ réel) où $\mathcal{D}_\lambda$ est la droite d'intersection de $(\mathcal{PH})$ et du plan d'équation $x = \lambda$;
- Δ_μ (μ réel) où Δ_μ est la droite d'intersection de $(\mathcal{PH})$ et du plan d'équation $y = \mu$.

24 Montrer que, pour $\lambda_1 \neq \lambda_2$, les droites $\mathcal{D}_{\lambda_1}$ et $\mathcal{D}_{\lambda_2}$ ne sont pas coplanaires et que, pour $\mu_1 \neq \mu_2$, les droites Δ_{μ_1} et Δ_{μ_2} ne sont pas coplanaires.

25 Montrer que, pour tout réel λ , la droite $\mathcal{D}_\lambda$ est sécante avec les droites Δ et Δ' où :

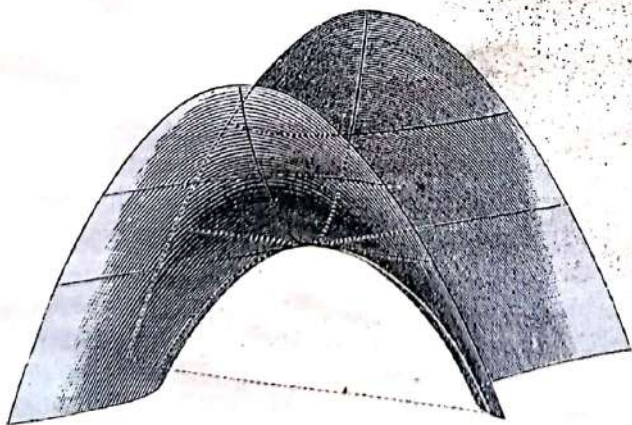
- Δ est la droite passant par $J(0, 1, 0)$ et dirigée par $\vec{u}(1, 0, 1)$;
- Δ' est la droite passant par $J'(0, -1, 0)$ et dirigée par $\vec{u}'(1, 0, -1)$.

26 Montrer que, pour tout réel μ , la droite Δ_μ est sécante avec les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ où :

- $\mathcal{D}$ est la droite passant par $I(1, 0, 0)$ et dirigée par $\vec{v}(0, 1, 1)$;
- $\mathcal{D}'$ est la droite passant par $I'(-1, 0, 0)$ et dirigée par $\vec{v}'(0, 1, -1)$.

Note : le paraboloïde hyperbolique est donc constitué de deux familles de droites :

- « les » droites $\mathcal{D}_\lambda$ qui s'appuient sur deux droites Δ et Δ' ;
- « les » droites Δ_μ qui s'appuient sur deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$;
- deux droites de la même famille ne sont jamais coplanaires ;
- deux droites de familles différentes sont toujours sécantes (une droite s'appuie sur deux autres lorsqu'elle est sécante avec ces deux droites : les géomètres ont banalisé cette tournure).



La représentation du paraboloïde hyperbolique en 1873
(Rouché et de Comberousse, *op. cit.*).

Brèves de cours

27 1) Résoudre le système d'inconnues réelles (x, y) :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

2) En déduire la section du cylindre de révolution d'équation : $x^2 + y^2 = 1$ par le plan d'équation $x + y - 1 = 0$.

28 Soit (S) la surface d'équation $z = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$.

1) Montrer que (S) est contenue dans l'intersection des deux demi-espaces d'équations $z > 0$ et $z \leq 1$.

2) Préciser la section de (S) par le plan d'équation $z = k$ (k réel donné).

3) Prouver que tout cercle de centre O du plan (Oxy) est une courbe de niveau de (S) .

29 1) Soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathcal{E}$ n'appartenant pas au plan d'équation $z = 1$.

Montrer que les points :

$$K(0, 0, 1), M(x, y, z) \text{ et } m\left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right)$$

sont alignés.

2) En déduire que la surface (S) d'équation $(z-1)^2 = x^2 + y^2$ est le cône de révolution d'axe (Oz) , de sommet K , et de base le cercle du plan (Oxy) de centre O et de rayon 1.

30 Montrer que tout cône d'axe (Oz) et de sommet O a un cercle en commun avec le paraboloïde de révolution d'équation $z = x^2 + y^2$.

31 Pour tout réel m , on désigne par Ω_m le sommet de la parabole obtenue comme section de la surface (S) d'équation $z = x^2 + y^2$ par le plan d'équation $x = m$.

1) Quelles sont les coordonnées de Ω_m ?

2) Montrer que, lorsque m décrit $\mathbb{R}$, le lieu des points Ω_m est une parabole et que cette parabole est la section de (S) par le plan d'équation $y = 0$.

32 Soit Δ la droite d'intersection du plan $(C'y)$ et du plan d'équation $x - y = 0$.

1) Montrer que, pour tout point m de Δ , la parallèle à (Oz) issue de m rencontre la surface $(\mathcal{PH})$ d'équation $z = xy$ en un point de cote $\frac{1}{2}Om^2$.

2) Représenter en vraie grandeur la section de $(\mathcal{PH})$ par le plan d'équation $x - y = 0$.

Exercices

Exemples d'études d'une surface

33 Le cône de Hachette

Soit (S) la surface d'équation $x^2 + y^2 = 2yz$, P le plan d'équation $z = 1$ et Γ le cercle du plan P , de centre $\Omega(0, 1, 1)$ et de rayon 1.

1) Montrer qu'un point $m(x, y, z)$ appartient à Γ si, et seulement si, $x^2 + y^2 - 2y = 0$ et $z = 1$.

En déduire que Γ est la section de (S) par le plan P .

2) Soit $m(x_0, y_0, 1)$ un point de Γ .

Montrer que la droite (Om) est contenue dans (S) .

3) Prouver que, si $M(x, y, z)$ est un point de (S) distinct de O , alors $z \neq 0$ et le point $m\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)$ appartient à Γ et à (OM) .

4) Déduire de ce qui précède que la surface (S) est constituée de toutes les droites (Om) , m décrivant le cercle Γ .

Pub !

Jean Nicolas Pierre Hachette (1769-1834) n'a rien à voir avec l'heureux éditeur du présent ouvrage. Collaborateur de Gaspard Monge, ils rédigèrent ensemble le célèbre mémoire *Applications de l'Algèbre à la Géométrie* destiné aux étudiants de l'École polytechnique. Son nom est notamment attaché aux cônes à base circulaire dont le sommet se projette orthogonalement sur le plan du cercle en un point de ce cercle

34 Parabole, comme section plane d'un cône

1) On considère le point $A\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et le vecteur $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$.

a) Montrer que $(A, \vec{i}, \vec{v})$ est un repère orthogonal d'un plan désigné par P .

b) Soit M un point du plan P , (X, Y) ses coordonnées dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{v})$ et (x, y, z) ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Exprimer x, y et z en fonction de X et Y .

2) Montrer que le plan P sectionne le cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ (dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$) selon la parabole

Γ d'équation $Y = \frac{1}{2}X^2$ dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{v})$.

35 L'escalade



« C'est possible, mais comme dit l'autre : c'est raide. »
Jules Lemaitre (1853-1914), de l'Académie française. À suivre...

1) Montrer que la surface (S) d'équation $z = 9 - x^2 - y^2$ contenue dans le demi-espace d'équation $z \geq 0$ est la surface de révolution d'axe (Oz) engendrée par l'arc de parabole Γ du plan (Oyz) d'équation :

$$z = 9 - y^2, 0 \leq y \leq 3.$$

2) Représenter graphiquement la surface (S) .

((S) est un parabolôïde de révolution tronqué.)

3) On désigne par C_k la courbe obtenue comme section de (S) par le plan $z = k$, et ce pour $k = 0, 1, 2, \dots, 9$.

a) Justifier que C_k est un cercle et calculer son rayon r_k .

b) Représenter les projetés orthogonaux C'_k des cercles C_k sur le plan (xOy) et observer que les cercles C'_1 et C'_2 , par exemple, sont plus proches l'un de l'autre que les cercles C'_7 et C'_8 .

c) En quoi l'observation précédente permet-elle d'affirmer que : « Si nous avions à escalader une colline ayant la forme de la surface (S) , nous trouverions la pente plus raide à basse altitude qu'à proximité du sommet » ?

4) La figure ci-dessous schématise un « zoom » sur la courbe Γ .

a) Avec la sécante

Quelle relation existe-t-il entre $\tan \alpha$ et :

$$r_k - r_{k-1} ?$$

Rappel : r_k est le rayon de C_k et bien sûr de C'_k .

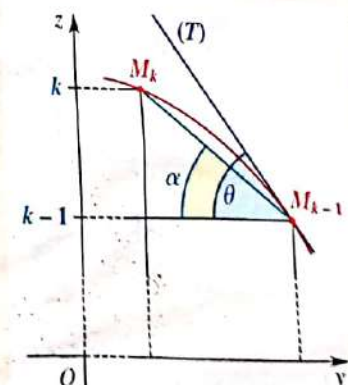
b) Avec la tangente

La droite (T) est la tangente à Γ en M_{k-1} .

Montrer que :

$$\tan \theta = 2r_{k-1}.$$

c) Réexaminer l'affirmation énoncée en 3) c) à la lueur des deux résultats précédents.



Les exercices 36 et 37 proposent deux définitions géométriques du paraboloïde hyperbolique.

36 Ensemble des points équidistants de deux droites

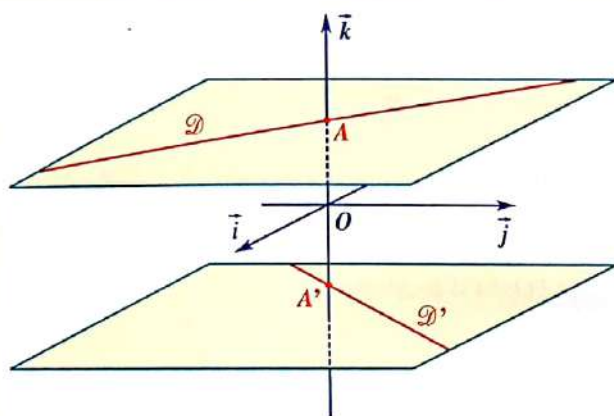
L'espace étant muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on désigne par :

• A et A' les points de coordonnées $A(0, 0, \frac{1}{2})$ et

$A'(0, 0, -\frac{1}{2})$;

• $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ les vecteurs définis par $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{u}' = \vec{i} + \vec{j}$;

• $\mathcal{D}$ la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathcal{D}'$ la droite passant par A' de vecteur directeur $\vec{u}'$.



Soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathcal{E}$.

1) a) Exprimer en fonction de x, y et z les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur la droite $\mathcal{D}$.

Piste Établir les deux propriétés suivantes et les exploiter :

- il existe $t \in \mathbb{R}$ avec $\vec{AH} = t\vec{u}$;
- $\vec{HM} \cdot \vec{u} = 0$.

b) En déduire l'expression de MH^2 en fonction de x, y et z .

2) Soit H' le projeté orthogonal de M sur la droite $\mathcal{D}'$.

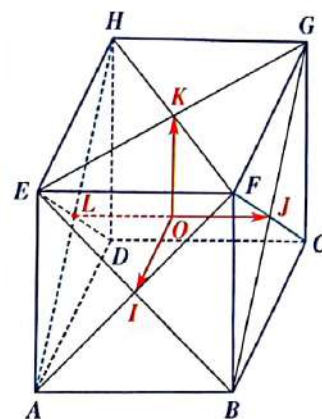
En s'inspirant de ce qui a été fait dans la question 1), exprimer MH'^2 en fonction de x, y et z .

3) Montrer que l'ensemble des points $M(x, y, z)$ à égale distance des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est le paraboloïde hyperbolique d'équation $z = xy$.

Piste Rappel : la distance d'un point à une droite est la distance entre ce point et son projeté orthogonal sur la droite.

37 Les fils tendus

Le cube $ABCDEFGH$ est d'arête 2, les points I, J, K et L sont les centres des faces indiquées dans la figure ci-contre, et O est le centre du cube.



1) Montrer que (O, I, J, K) est un repère orthonormal de $\mathcal{E}$ et calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{JF}$ et $\vec{LA}$ dans ce repère.

2) Soit t un nombre réel

fixé et N et P les points définis par :

$$\vec{JN} = t\vec{JF} \quad \text{et} \quad \vec{LP} = t\vec{LA}.$$

a) Exprimer les coordonnées de N et P en fonction de t .

b) Montrer que, quel que soit le réel λ , le barycentre M du système de points pondérés $\{(N, \lambda), (P, 1 - \lambda)\}$ appartient au paraboloïde hyperbolique $(\mathcal{PH})$ d'équation $z = xy$.

Piste Exprimer les coordonnées de M en fonction de t et λ .

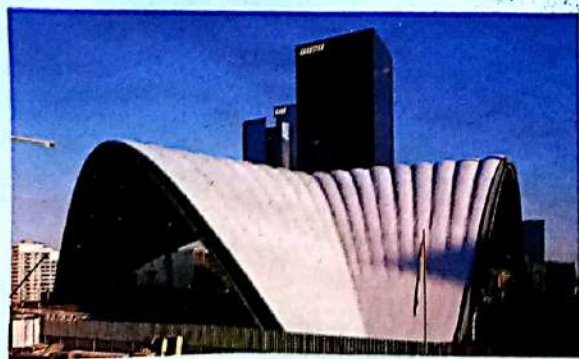
c) En déduire que la droite (NP) est contenue dans $(\mathcal{PH})$.

3) Soit $M(x, y, z)$ un point de $(\mathcal{PH})$.

Prouver que M appartient à la droite (NP) où N et P sont définis par :

$$\vec{JN} = x\vec{JF} \quad \text{et} \quad \vec{LP} = x\vec{LA}.$$

En architecture et ailleurs...



Le résultat de l'exercice 37 a une importance pratique considérable : « Les architectes peuvent réaliser des voûtes en béton précontraint, à condition qu'elles soient engendrées par des droites (correspondant aux câbles de contrainte). Et, bien sûr, le plus simple est de tendre ces câbles entre des points d'appui disposés à intervalles constants sur des appuis rectilignes » (Marcel Berger, *Géométrie*, Nathan, Paris, 1990).

Note : les appuis rectilignes seraient les droites (AH) et (FC) de l'exercice 37, et les câbles de contrainte les segments $[NP]$ (question 2) pour des réels t formant une subdivision régulière.

Fonctions de deux variables et surfaces

38 « Point culminant ⁽¹⁾ »

1) On désigne par T l'intérieur du triangle OIJ (bords compris) où l'on a $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$.

Montrer qu'un point $m(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$ appartient à T si, et seulement si :

$$z = 0 ; 0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq 1 ; x + y \leq 1.$$

2) Pour tout point $m(x, y, 0)$ de T , on pose $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ et l'on désigne par (S) la surface d'équation $z = f(x, y)$.

a) Montrer que (S) est contenue dans le demi-espace d'équation $z \geq 0$.

b) Soit t un réel fixé tel que $0 \leq t < 1$ et P le point de coordonnées $P(t, 0, 0)$.

Représenter graphiquement la section de (S) par le plan d'équation $x = t$, dans le repère $(P, \vec{j}, \vec{k})$.

En déduire que le point $M\left(t, \frac{1-t}{2}, \frac{t(1-t)^2}{4}\right)$ est le point culminant de (S) situé dans le plan d'équation $x = t$.

c) Étudier la fonction définie sur $[0, 1[$ par :

$$t \mapsto \frac{t(1-t)^2}{4}.$$

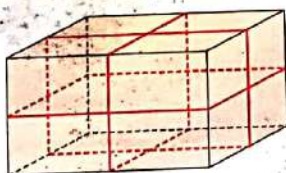
d) En déduire que le point culminant de (S) est le point :

$$M_0\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{27}\right).$$

3) Applications

a) « Le paquet-cadeau »

Montrer qu'avec une ficelle de longueur donnée, le pavé droit de volume maximum que l'on peut ficeler comme indiqué dans la figure ci-contre est un cube.



b) « Probas : le retour »

Une urne contient des boules rouges (en proportion p), des boules noires (en proportion q) et des boules vertes (en proportion r) avec $p + q + r = 1$.

On tire successivement trois boules de l'urne avec remise après chaque tirage.

Montrer que la probabilité d'obtenir trois boules de couleurs toutes différentes est inférieure ou égale à $\frac{2}{9}$, avec égalité si, et

seulement si, $p = q = r = \frac{1}{3}$.

(1) Le terme mathématiquement correct « point d'une surface de cote maximale » n'a pas le même pouvoir évocateur...

Dans les exercices 39 à 41, on considère une surface (S) contenue dans l'intersection des deux demi-espaces d'équations respectives $z \geq 0$ et $z \leq 1$.

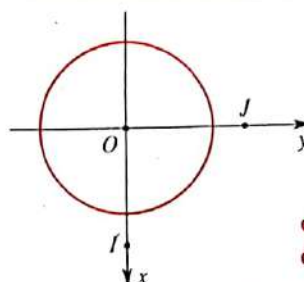
Dans chacun d'eux figure la représentation graphique du projeté orthogonal sur le plan (Oxy) de la section de (S) par le plan d'équation $z = k$ où $0 \leq k \leq 1$ (les points I et J sont les points tels que $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$).

La consigne est la suivante :

• trouver une fonction f de x et de y telle que l'équation de (S) soit $z = f(x, y)$;

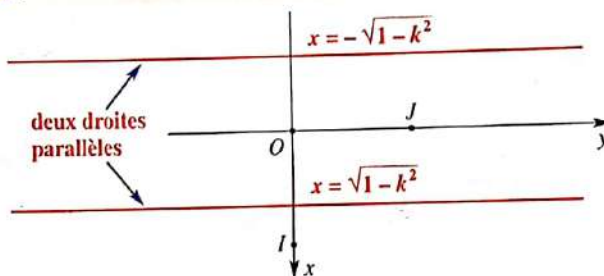
• représenter graphiquement la surface (S) .

39



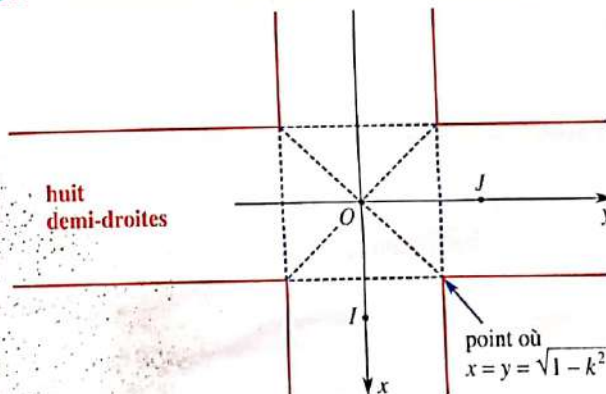
cercle de centre O
de rayon $\sqrt{1-k^2}$

40



deux droites
parallèles

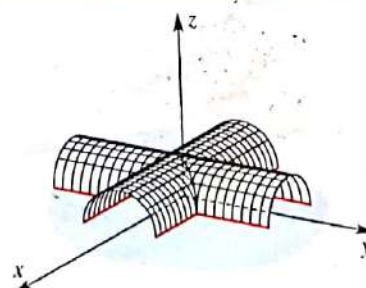
41



huit
demi-droites

point où
 $x = y = \sqrt{1-k^2}$

Piste (En miniature.)



Problèmes

42 La sphère par ses sections

La section d'une sphère par un plan étant soit vide, soit réduite à un point, soit un cercle, nous abordons ici l'étude de la propriété réciproque, à savoir : « Soit $\mathbb{E}$ une partie de l'espace contenant plus d'un point. On suppose que son intersection avec un plan quelconque de l'espace est soit vide, soit un point, soit un cercle. Est-ce que $\mathbb{E}$ est une sphère ? »

1) Questions préliminaires

- Montrer que, si un plan a au moins deux points en commun avec $\mathbb{E}$, ce plan coupe $\mathbb{E}$ selon un cercle.
- En déduire qu'une droite rencontre $\mathbb{E}$ en au plus deux points.
- Montrer que $\mathbb{E}$ contient un cercle dont l'axe sera noté Δ .
- Soit P un plan contenant Δ .

- Montrer que $P \cap \mathbb{E}$ est un cercle dont le centre appartient à Δ .
- En déduire que l'intersection de Δ et de $\mathbb{E}$ est formée de deux points A et B et que $P \cap \mathbb{E}$ est un cercle de diamètre $[AB]$.

4) On désigne par S la sphère de diamètre $[AB]$ et, pour un point M de l'espace n'appartenant pas à (AB) , on note P_M le plan (M, A, B) .

- Montrer que $P_M \cap \mathbb{E}$ est un cercle de diamètre $[AB]$.
- En déduire que, si M appartient à $\mathbb{E}$, alors M appartient à S .

Piste Si $M \in \mathbb{E}$, alors $M \in P_M \cap \mathbb{E}$, d'où...

c) Combien y a-t-il de cercles de diamètre $[AB]$ contenant un point M de S ?

En déduire que, si M appartient à S , alors M appartient à $\mathbb{E}$.

5) Conclure de cette étude que $\mathbb{E}$ est la sphère S .

43 Le bouchon universel

On considère l'ensemble (S) des points $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$ tels que :

$$\begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 2 \\ x^2 = \left(1 - \frac{z}{2}\right)^2 (1 - y^2) \end{cases}$$

1) a) Montrer que, pour tout point $M(x, y, z)$ de (S) , on a $x^2 + y^2 \leq 1$ et préciser le cas de l'égalité.

Piste Montrer d'abord que $0 \leq \left(1 - \frac{z}{2}\right)^2 \leq 1$.

b) En déduire que le projeté orthogonal de (S) sur le plan (xOy) est contenu dans le disque de ce plan de centre O et de rayon 1 (bords compris).

2) Montrer que la section de (S) par le plan $x = 0$ est un carré de côté 2 et que le projeté orthogonal de (S) sur le plan (yOz) est contenu dans ce carré (bords compris).

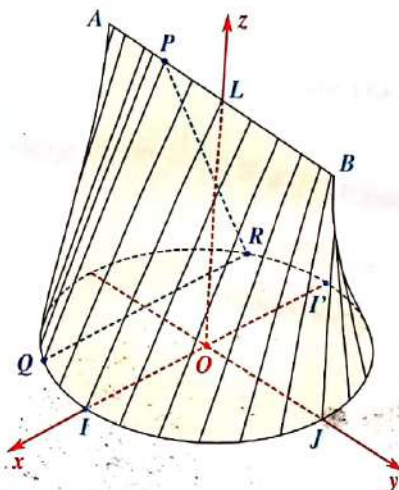
3) Soit k un réel tel que $-1 \leq k \leq 1$ et P_k le plan d'équation $y = k$.

On désigne par A et B les points $A(0, -1, 2)$ et $B(0, 1, 2)$, et par C le cercle de centre O et de rayon 1 du plan (xOy) .

a) Montrer que la section de (S) par P_k est formée de deux segments $[PQ]$ et $[PR]$ où P est un point du segment $[AB]$ et Q et R des points du cercle C .

b) En déduire que le projeté orthogonal de (S) sur le plan (Oxz) est inclus dans le triangle LII' (bords compris) où l'on a : $L(0, 0, 2)$, $I(1, 0, 0)$ et $I'(-1, 0, 0)$.

4) En s'aidant de la figure ci-dessous, expliciter une construction géométrique de (S) .



5) Montrer que le « bouchon » (S) s'insère exactement dans un trou carré de côté 2, dans un trou circulaire de rayon 1 et dans un trou triangulaire isocèle de base et hauteur correspondante égales à 2 !

6) Soit (Σ) le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et $0 \leq z \leq 2$. On convient que les solides limités par les surfaces (S) et (Σ) sont encore notés (S) et (Σ) .

a) Quel est le volume du solide (Σ) ?

b) Soit y un réel fixé de $[-1, 1]$. Le plan perpendiculaire à (Oy) passant par le point $(0, y, 0)$ coupe (Σ) selon un domaine d'aire $\sigma(y)$ et (S) selon un domaine d'aire $s(y)$. Sans rien calculer, à l'aide d'un dessin, montrer que $\sigma(y) = 2s(y)$.

c) En déduire que le volume V du bouchon (S) est calculé par $V = \pi$.

Piste $\int_{-1}^1 \sigma(y) dy = 2 \int_{-1}^1 s(y) dy$ (c'est clair) ; il reste à interpréter.

44 L'hyperboloïde à une nappe

A) Étude d'une branche d'hyperbole

Soit (H) la courbe contenue dans le plan (yOz) d'équation :
 $y^2 - z^2 = 1$ où $y \geq 0$.

On pose $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j} - \vec{k})$ et $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j} + \vec{k})$.

1) Montrer que $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal du plan (yOz) .

2) Soit M un point du plan (yOz) , (y, z) ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{j}, \vec{k})$ et (Y, Z) ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Exprimer y et z en fonction de Y et Z .

Piste $\vec{OM} = Y\vec{u} + Z\vec{v} = \dots$

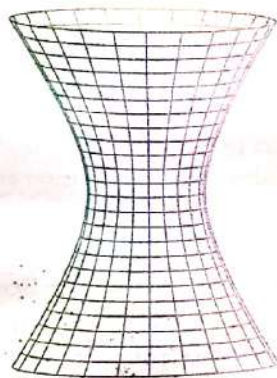
3) En déduire que (H) est une branche de l'hyperbole d'équation $YZ = \frac{1}{2}$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

B) Surface de révolution

Soit H_1 la surface de révolution obtenue par rotation autour de l'axe (Oz) de la demi-hyperbole (H) .

Montrer que H_1 a pour équation :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$



La surface H_1 :
l'hyperboloïde à une nappe.

C) Une génération de H_1

On suppose que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal direct du plan (xOy) et l'on note Γ_0 le cercle du plan (xOy) , de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

Étant donné un réel θ , on désigne alors par :

• P et Q , les points de Γ_0 définis par :

$$(\vec{i}, \vec{OP}) = \theta[2\pi] \quad \text{et} \quad (\vec{i}, \vec{OQ}) = \theta + \frac{\pi}{2}[2\pi];$$

• P' , l'image de P par la translation de vecteur $-\vec{k}$;

• Q' , l'image de Q par la translation de vecteur $\vec{k}$.

1) Faire une figure soignée en perspective cavalière représentant les points P, Q, P' et Q' lorsque $\theta = \frac{\pi}{4}$.

2) a) Préciser les sections Γ et Γ' de la surface H_1 par les plans d'équations respectives $z = -1$ et $z = 1$.

b) Montrer que, lorsque θ varie dans $\mathbb{R}$, Γ et Γ' sont les lieux géométriques respectifs des points P' et Q' .

3) Prouver que les coordonnées des points P' et Q' sont calculées par :

$$P'(\sqrt{2} \cos \theta, \sqrt{2} \sin \theta, -1);$$

$$Q'(-\sqrt{2} \sin \theta, \sqrt{2} \cos \theta, 1).$$

4) Soit λ un réel et M le barycentre du système :

$$\{(P', \lambda), (Q', 1 - \lambda)\}.$$

a) Exprimer les coordonnées (x, y, z) de M en fonction de λ et θ .

b) Calculer alors $x^2 + y^2 - z^2$ et en déduire que M appartient à H_1 .

5) Établir, à partir des résultats de la question précédente, que, quel que soit le réel θ , la droite $(P'Q')$ est « toute entière » contenue dans la surface H_1 .

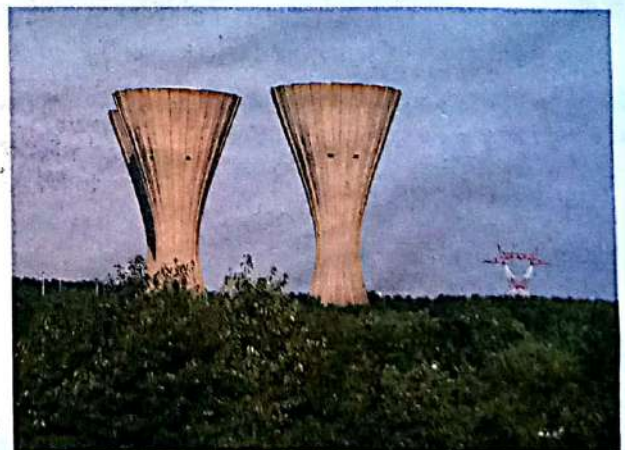
Note : on peut établir que, réciproquement, tout point de H_1 appartient à une droite $(P'Q')$. Ainsi H_1 est une surface réglée (voir page 437).

Les châteaux d'eau

La forme des châteaux d'eau est fréquemment celle d'un hyperboloïde à une nappe qui assure un béton sans fissures, première condition d'étanchéité absolue.

Un simple paquet de spaghettis permet, à peu de frais, de visualiser les droites de l'hyperboloïde à une nappe définies dans le problème 44 :

- 1) Sortir les spaghettis de leur emballage.
- 2) Maintenir l'ensemble vertical, en forme de cylindre, par une ferme tenue de la main au milieu de l'édifice.
- 3) Desserrer doucement l'étreinte : si tout va bien, un hyperboloïde à une nappe apparaît, chaque spaghetti étant une droite de cet hyperboloïde. Sinon, il faut savoir renoncer.



Premiers secours

Chapitre 1

19 1) Le tuyau peut être défini par la condition « $y \in I$ » où I est un intervalle ouvert contenant 3. La définition 3 permet de conclure.

20* 1) Les deux « tuyaux » (ou intervalles) $I =]I_1 - \alpha, I_1 + \alpha[$ et $J =]I_2 - \alpha, I_2 + \alpha[$ sont disjoints... Vérifier et conclure.

21 La suite de terme général $(-1)^n$ a une infinité de termes à l'extérieur de chacun des intervalles $]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$...

22* Soit $I = \lim u_n$. Considérer l'intervalle $I =]I - 1, I + 1[$; la suite ne possède qu'un nombre fini de valeurs à l'extérieur de I ...

38 Vérifier que :

$$u_n = 0,67 \times [1 + 0,01 + 0,01^2 + \dots + 0,01^{n-1}].$$

39 b) et c) Séparer le quotient en deux. $\frac{2^{n+1}}{3^{2n-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \dots$

58 b) Vérifier que $u_n = 2 + 0,61[1 + 0,01 + \dots + 0,01^{n-1}]$.

59 1) a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \dots$

Appliquer alors la définition 3 avec l'intervalle $]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$.

60 1) b) La définition 3 avec l'intervalle :

$$\left] \frac{1}{a} - \alpha, \frac{1}{a} + \alpha \right[\text{ où } \alpha = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{a} \right). \text{ (Remarquer que } \alpha > 0.)$$

c) Prouver que $b < 1$.

63 2) Écrire l'égalité $\frac{1}{k(k+1)}$ pour $k = 1, k = 2, \dots, k = n$, puis ajouter membre à membre toutes les égalités obtenues.

65 1) $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$.

Dans cette somme, combien y a-t-il de termes ? Quel est le plus petit ?

67 1) $u_1 = \sqrt{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

3) Montrer par récurrence la chaîne d'inégalités : $u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

4) b) On peut raisonner par récurrence.

68 1) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n}$.

4) a) Utiliser le fait que $\alpha = f(\alpha)$:

$$|u_{n+1} - \alpha| = \left| \frac{1}{2 + u_n} - \frac{1}{2 + \alpha} \right| = \dots \quad \text{b) Par récurrence.}$$

70 1) Vérifier que la suite de terme général OA_n est géométrique.

2) Si $u_n = A_{n+1}A_n$, vérifier que (u_n) est géométrique et que L_n est la somme des termes...

3) a) Utiliser : $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ et $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

76 1) Poser $w_n = an + b$ et déterminer a et b , sachant que (w_n) vérifie (1).

77 1) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \dots = \frac{u_n - 1}{5u_n + 15}$.

(Vérifier et poursuivre.)

2) Exprimer u_n en fonction de v_n .

79 2) $V_{n+1} = u_{2n+2} = u_{2n+1} + (2n+2) \times (-1)^{2n+1}$

Que vaut $(-1)^{2n+1}$? Cela permet de poursuivre le calcul, et d'exprimer u_{2n+1} en fonction de u_{2n} .

Enfin, prouver que $V_{n+1} - V_n = \text{Cte}$. On agira de même avec W_n .

81 Le k -ième cylindre intérieur a pour rayon k , le k -ième cylindre extérieur a pour rayon $k+1$, et ce, pour $1 \leq k \leq n$.

82 2) a) Le k -ième cylindre intérieur a pour rayon $\sqrt{R^2 - \left(\frac{kR}{n}\right)^2}$. Vérifier et adopter.

b) Les $(n-1)$ cylindres intérieurs correspondent aux $(n-1)$ derniers cylindres extérieurs ; le premier cylindre extérieur a pour rayon R .

85* 1) a) $(1-a)\overrightarrow{OG_{n+2}} = \dots \overrightarrow{OM_{n+2}} + \dots \overrightarrow{OM_{n+1}}$.

Vérifier l'égalité $\overrightarrow{OG_{n+2}} = a\overrightarrow{OG_{n+1}}$.

86 3) On peut montrer au préalable le résultat suivant : « Si $0 < a < b$,

alors $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$ ». Pour cela, former les trois différences :

$$\sqrt{ab} - a = \sqrt{a}(\dots), \quad \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}, \quad \text{et } b - \frac{a+b}{2}.$$

4) a) Pour la deuxième inégalité, remarquer que :

$$b_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}.$$

87 4) a) $|u_n - \sqrt{2}| = u_n - \sqrt{2} = \frac{1}{2} \left(u_{n-1} + \frac{2}{u_{n-1}} \right) - \sqrt{2}$

$$= \frac{1}{2u_{n-1}} (u_{n-1}^2 - 2\sqrt{2}u_{n-1} + 2)$$

c) L'inégalité $2^{n+1} - 1 \geq n+1$ par récurrence, ou avec l'inégalité de Bernoulli.

88 B) 2) $|a_{n+1} - \varphi| = \left| 1 + \frac{1}{a_n} - \left(1 + \frac{1}{\varphi} \right) \right| = \frac{1}{a_n \varphi}$

Minorer a_n et φ par $\frac{3}{2}$ et conclure.

* : Il s'agit d'exercices dont l'aide à la résolution se poursuit dans la rubrique *Toujours en panne ?*

C) 3) $|b_{n+1} - \varphi| = |\sqrt{b_n + 1} - \sqrt{\varphi + 1}|$.
Multiplier alors par l'expression conjuguée.

4) Par récurrence.

$$D) 3) c_{n+1} - \varphi = \frac{c_n^2 + 1}{2c_{n-1}} - \varphi = \frac{c_n^2 - 2c_n\varphi + \varphi + 1}{\dots}$$

Utiliser le fait que $\varphi + 1 = \varphi^2$, puis minorer le dénominateur...

80* 3) a) Remarquer que $2\alpha = \frac{\pi}{3 \times 2^n}$.

b) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ et $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$.

c) Remarquer que :

$$p_n = 3 \times 2^n \sin(2\alpha) = 3 \times 2^{n+1} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$q_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} \tan \alpha, \text{ donc } p_n q_{n+1} = \dots$$

Enfin vérifier que $\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n} = \frac{1}{3 \times 2^n} \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$, et poursuivre à

l'aide des relations précédentes.

4) c) Avec 4) a), l'inégalité $p_n < q_n$ implique :

$$p_n < \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n} \right) \right]^{-1} < q_n, \text{ puis l'inégalité } p_n < q_{n+1}$$

implique : $p_n < \sqrt{p_n + q_{n+1}} < q_{n+1} < q_n$.

Chapitre 2

1. • Pour la première famille de fonctions, on se donne un réel $A > 0$.
Pour chacune des fonctions f considérées, déterminer une condition sur x qui implique que $f(x) \geq A$.

Exemple : pour $f(x) = \sqrt{x}$, si $x \geq A^2$, alors $\sqrt{x} \geq A$.

• Pour la deuxième famille, on se donne un intervalle $]-\alpha, \alpha[$ contenant 0 (avec $\alpha > 0$). Déterminer une condition sur x (x assez grand) qui implique que $f(x) \in]-\alpha, \alpha[$.

2. $\cos x$ prend toutes les valeurs comprises entre -1 et 1 sur $[n\pi, (n+1)\pi]$. Un intervalle d'amplitude 0,5 (par exemple) ne peut donc pas contenir toutes les valeurs de $\cos x$, même si x est assez grand...

À rédiger...

8* 1) Factoriser : $P(x) = a_n x^n \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n} \right]$.

2) Poser $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$ avec $a_n \neq 0$ et

$b_m \neq 0$. Factoriser comme en 1).

14. Pour l'écriture :

a) $f(x) = \frac{\ln(3x)}{(3x)} \times 3$; b) $f(x) = \frac{\sin(2x)}{(2x)} \times \frac{(5x)}{\sin(5x)} \times \frac{2}{5}$.

24 Utiliser dans chaque cas $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

a) $v_n = n \times \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)}$.

26 1) Poser $v_n = u_{n+1}$ et $w_n = f(u_n)$. Déterminer $\lim v_n$ et $\lim w_n$.

33* Étudier la limite en $+\infty$ de $f(x) - (x+1)$ en utilisant toutes les ressources disponibles : expression conjuguée, factorisation du terme prépondérant,...

35 Étudier les limites à gauche et à droite de f au point 2. f est continue si ces deux limites sont égales.

37 Si $0 \leq x \leq 3$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2$;

si $3 \leq x \leq 7$, $f(x) = \frac{9}{2} + 5(x-3)$. Vérifier et adopter.

41 Le taux d'accroissement a est :

$$\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \dots$$

47 Poser $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 5$. Utiliser alors l'approximation affine de $f(x)$ au voisinage de a , avec $h = 0,02$.

58 1) et 2) Dériver le quotient $x \mapsto \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

59 Penser au fait que $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$ (pour $x \geq 0$). Donc

$$\frac{x^{n+1}}{\sqrt{x}} = x^n \sqrt{x}.$$

70* Avec une fonction sinus... correctement aménagée.

78* • Calculer $g'(x)$ à l'aide du schéma de composition :

$$x \mapsto -x \\ y \mapsto f(y).$$

• Pour 1), 2) et 3), calculer la dérivée de chacune des fonctions :

$$x \mapsto f(x) + f(-x) \text{ et } x \mapsto f(x) - f(-x).$$

79 Un exemple : $(g \circ f)'(1) = f'(1) \times g'(f(1))$

Or, par lecture graphique : $f(1) = 0$ et $g'(0) = 1$; $f'(1) = -1$.

$$\text{Ainsi } (g \circ f)'(1) = -1 \times 1 = -1.$$

102. 2) En utilisant l'égalité du 1) et l'expression conjuguée, étudier

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(x - \frac{3}{2} \right) \right].$$

3) Utiliser l'axe de symétrie et répondre par lecture graphique.

103 Comme à l'exercice précédent, commencer par mettre $x^2 + 4x + 2$ sous la forme canonique.

107 Si tout le grillage est utilisé, exprimer le fait que l'aire totale de grillage est égale à 800 ; cela permet d'obtenir une relation entre x et y .

109 Temps de parcours (en heure) :

en mer : $\frac{\sqrt{x^2 + 81}}{4}$; sur terre : $\frac{15-x}{5}$.

110 2) $f(x) = h - x + 2\sqrt{x^2 + d^2}$.

3) $g(\alpha) = h - d \tan \alpha + \frac{2d}{\cos \alpha}$. Justifier et adopter.

111 2) a) Vérifier que $V(h) = \pi(R^2 - h^2)h$.

112 Noter x la longueur du côté n appartenant pas à l'axe de révolution.
 x est le rayon du cylindre, sa hauteur est $\frac{p}{2} - x$.

116 1) Pour chaque inégalité, la fonction différence.

2) Penser aux « cordes » et aux tangentes.

128 3) Les formules de calcul des dérivées ne s'appliquent pas en 0.

$$\text{Étudier } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

129* 2) Pour la limite en $-\infty$, utiliser (1).

3) Vérifier que $f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}$. Le signe de $f(x)$ sur $]1, +\infty[$ est

immédiat ; sur $]-\infty, -1[$, utiliser (1).

4) Étudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x]$.

131 2) À l'aide d'un dessin, expliquer le fait que, si $M(x, y) \in \mathcal{C}_{\text{sec}}$,

alors $t_u(M) \in \mathcal{C}_{\text{cosec}}$, où t_u est la translation de vecteur $\vec{u}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

133 2) b) Pour qu'une droite $\mathcal{D}$ passant par $A \in \mathcal{C}$ soit tangente à $\mathcal{C}$ en A , il suffit que la tangente à $\mathcal{C}$ en A ait le même coefficient directeur que $\mathcal{D}$.

137 2) b) Avec l'imprécision de la calculatrice, un calcul approché de $f(x_0)$ très voisin de 0 ne permet pas de savoir avec certitude si $f(x_0) > 0$, $f(x_0) = 0$ ou $f(x_0) < 0$.

3) a) Poser $f(x) = (x^2 - 2)(ax + b)$ et calculer a et b .

140* 3) Étudier la limite à droite, à l'aide d'encadrements convenables, puis penser à la parité des fonctions.

5) Dérivabilité : étudier la limite en 0 de $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

141* 1) a) La dérivée de $x \mapsto f(-x)$ est $x \mapsto -f'(-x)$. (Pourquoi ?)

2) a) De même, dériver $x \mapsto f\left(\frac{1}{2}\right)$ à l'aide d'un schéma de composition approprié.

142 5) d) $f'_k(b_k) = \text{Cte}$; cela suffit.

6) b) Montrer que $f'_k(x) = 2 \Leftrightarrow x = \frac{k^2}{4}$; or $a_{-k} = \frac{(-k)^2}{4} = \frac{k^2}{4}$.

c) Attention, ici : $\sqrt{\frac{k^2}{4}} = -\frac{k}{2}$. (Pourquoi ?)

143 3) Bonus : la réponse est $\tan \theta = \frac{45x}{x^2 + 3849,75}$.

Chapitre 3

4 Exprimer $f(-x)$, et multiplier numérateur et dénominateur par e^x .

5 1) Dans l'expression $6 - f(x)$, mettre sous le même dénominateur, et multiplier « haut et bas » par e^x ...

15 Deviner quel est le terme prépondérant, et le factoriser.

16 Dans chaque cas, un taux d'accroissement en 0.

42 $X^3 + 12X^2 - 61X + 48 = (X - 1)(X^2 + \dots)$.

56* Dans chaque cas, un taux d'accroissement en 0 ; pour la deuxième limite, considérer la fonction $x \mapsto e^{x^2}$.

87 Lorsqu'on coupe la tension, l'équation différentielle peut s'écrire : $r i(t) + L i'(t) = 0$.

$$103 \quad 2) \quad b) \quad y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \Leftrightarrow y(e^x + 1) = e^x - 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + y = e^x(1 - y)$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{1 - y}{1 + y} \dots (\text{Isoler } x.)$$

104 4) a) Il suffit d'établir que : $\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = f_\alpha(0)$.

$$b) \text{ Étudier } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x - 0}.$$

c) Interpréter en terme de branche parabolique (voir chapitre 2, Au cœur des problèmes, partie 2).

105 a) Limite en $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - e^{-x}) = \dots$

(Factoriser x et appliquer les résultats de croissance comparée.)

c) Interpréter en termes de branche parabolique.

108* 2) a) $f\left(\frac{1}{k} \ln 2\right) = \frac{3}{4}$ et $f'\left(\frac{1}{k} \ln 2\right) = -\frac{k}{2}$: voilà un « cadeau » à vérifier.

b) $\varphi'\left(\frac{1}{k} \ln 2\right)$: aucun calcul ; réfléchir à l'expression de $\varphi(x)$.

110 2) Un tableau par cas : a) $B > 0$ et $k > 0$; b) $B > 0$ et $k < 0$; c) $B < 0$ et $k > 0$; d) $B < 0$ et $k < 0$.

3) a) Bonus : $g(x) = -ABe^{\frac{A}{k}x} + Ae^{\frac{A}{k} \ln(-k)} + Ae^{-1}$.

b) Pour $\varphi'\left(\frac{\ln(-k)}{B}\right)$, aucun calcul. (Pourquoi ?)... La réponse est : 0.

115 1) Le coefficient multiplicateur journalier t vérifie l'égalité :

$$t^{365} = 1,06, \text{ d'où } t = 1,06^{\frac{1}{365}} \dots$$

118* 1) Vérifier et utiliser les égalités suivantes :

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \text{ et } \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

2) a) Le signe de la fonction différence.

b) Poser $x = \frac{1}{n}$ dans les égalités du a).

3) b) Soit n_0 un entier supérieur à ae .

Vérifier qu'à partir du rang n_0 , on a $\frac{n!}{a^n} \geq B^n$ avec $B > 1$...

120 1) 2) b) Viser une écriture du type : $\varphi'(x) = \frac{g(x^2)}{\dots}$.

II) 2) a) b) c) Utiliser les résultats sur les composés : limites, dérivées.

3) Utiliser le fait que le maximum de f sur $]0, +\infty[$ est $f(\ln \sqrt{\alpha})$.

121 B) 1) Calculer aussi $u(0)$ et $v(0)$.

2) a) Dédire de B) 1) l'encadrement :

$$e^{-k} - \frac{1}{2}e^{-2k} \leq f(k) \leq e^{-k}, \text{ pour } 1 \leq k \leq n,$$

puis « sommer » les inégalités précédentes écrites pour $k = 1, k = 2, \dots, k = n$. Une formule sommatoire permet de poursuivre...

b) Un passage à la limite dans l'encadrement du a).

122 A) 1) a) Utiliser le sens de variation de g et la valeur du maximum $g(0)$.

B) 2) a) Utiliser, après l'avoir justifiée, l'inégalité $g(x) \leq g(0)$.

c) $S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln \frac{n}{n-1}$: vérifier et adopter.

3) a) La suite (S_n) est décroissante : cela peut servir.

d) $\ln\left(\frac{n+2}{21}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{21}\right) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$.

Utiliser alors l'inégalité du 3) b) avec $k = n+1$.

e) Utiliser d), en écrivant : $\ln\left(\frac{n}{20}\right) = \ln\left(\frac{21}{20}\right) + \ln\left(\frac{n}{21}\right)$

et : $\ln\left(\frac{n+1}{21}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n}{21}\right)$.

4) a) Proviens de 3) a) et 3) e).

123 1) b) Utiliser le fait que J est centre de symétrie.

c) • Parité de φ : exprimer $f(x) + f(-x)$ à l'aide de φ .

• Parité de f' : dériver la fonction $x \mapsto f(x) + f(-x)$.

d) La parité de φ fournit la valeur de b .

Pour calculer a , utiliser le coefficient directeur de la tangente T en J .

2) e) Utiliser à bon escient l'égalité $f'(\alpha) = 0$.

124* 3) b) Vérifier que A_k a pour coordonnées $(\ln k; \ln k - 1)$.

Il existe alors une relation simple entre l'ordonnée et l'abscisse de A_k .

4) b) $\mathcal{D}$ a une équation du type $y = x + a$, avec $a \neq -2$ (a fixé).

Vérifier que $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse x si, et seulement si,

$e^{-x} = \frac{a+2}{k}$. Discuter suivant le fait que $a > -2$ ou $a < -2$.

c) Utiliser 4) a).

126 1) On pourra utiliser l'identité : $(1-x+x^2)(1+x) = 1+x^3$.

5) Étudier séparément la limite à droite et la limite à gauche, à l'aide du théorème des gendarmes.

127* 1) c) Pour obtenir (2), écrire l'inégalité $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1)$ au rang n .

2) a) $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$: à vérifier. Utiliser alors 1) b).

128* A) 2) Vérifier que : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n(n+1)(n+1)!}$.

B) 1) L) Remarquer que la dérivée de $x \mapsto \frac{x^k}{k!}$ est $x \mapsto \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$.

2) a) Montrer que sur $[0, 1]$, $x^n \in [0, 1]$ et $e^{-x} \in [0, 1]$.

b) Écrire que $g(0) \leq g(1)$.

129 2) c) L'égalité $g = m$ n'a lieu que lorsque l'on a l'égalité dans

chaque des inégalités : $\ln\left(\frac{a_i}{m}\right) \leq \frac{a_i}{m} - 1$ ($1 \leq i \leq n$).

Examiner alors le cas de l'égalité dans $\ln x \leq x - 1$.

Chapitre 4

13 Encadrer seulement $\frac{1}{t^2}$ sur $[10, 20]$ et conserver l'exponentielle.

16 f étant monotone, I_n est compris entre les réels $f(n)$ et $f(n+1)$, d'après le théorème de la moyenne.

23 Dériver $F - G$.

32 a) Le schéma de composition : $\begin{cases} x \mapsto x^2 \\ y \mapsto \int_0^y t^2 \cos t dt \end{cases}$

b) $F(x) = \int_0^{3x} -\int_0^{2x} \dots$ suivi de schémas de composition.

44 1) Vérifier que $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

57* • 1^{re} étape : poser $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \sin x$.

• 2^e étape : pour le calcul de $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx$, poser $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos x$.

59* • 1^{re} étape : poser $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = 1$.

• 2^e étape : pour le calcul de $\int_2^3 \ln x dx$, poser $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = 1$.

62 1) b) Poser $u(x) = \cos x$ et $v'(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$.

2) a) Ajouter membre à membre les égalités du 1) b) et du 1) c).

63 1) Simplifier au préalable $\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$.

2) Piste : poser $u(x) = \ln(1 + \cos x)$.

L'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$ se calcule à l'aide d'une primitive.

66 La section de Σ par le plan « d'abscisse x » est un disque de rayon $f(x) \dots$

67* On a, par définition : $I_e^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(100\pi t) dt$.

$\sin^2 a$ peut s'exprimer à l'aide de $\cos(2a)$.

81 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$ à l'aide de l'égalité :

$$\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\left(n + \frac{1}{2}\right)x} \times \frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

2) L'intégrale $\int_0^{\pi} 2 \cos(nx)$ peut être utile.

83 1) Voir l'exercice 44.

2) Calcul de $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-1}}$: poser $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

84 1) Calcul de I_1 : par parties.

2) Poser $u(x) = (\ln x)^{n+1}$ et $v'(x) = x$.

85 Une primitive est $x \mapsto \int_1^x t^n \ln t dt$.

Intégrer par parties en posant $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = t^n$.

88 Les deux courbes se coupent aux points d'abscisses x solutions de :

$$\frac{x^2}{10} + 1 = \frac{x^4}{50}, \text{ soit } x^4 - 5x^2 - 50 = 0.$$

Résoudre cette équation « bicarrée ».

89 Soit a le réel tel que $\frac{\ln a}{a} = -1$.

$$\text{L'aire s'exprime en u.a. par : } A = 2\left(\frac{3}{2}a + \int_a^e \left(0,5 - \frac{\ln x}{x}\right) dx\right).$$

Exprimer cette aire en fonction de a , puis en donner une valeur approchée.

94 4) a) Poser $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$.

b) Intégrer par parties en posant $u(x) = (\ln x)^{p+1}$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$.

d) On pourra utiliser le résultat de l'exercice 66.

96* 3) Une primitive de $t \mapsto \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}$ est $t \mapsto -\frac{1}{2} \ln(1+e^{-2t})$.

7) a) $S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \dots$, d'après la relation de Chasles.

99* 1) Sur $[0, 1]$, comparer t^n et t^{n+1} , puis $\frac{t^n}{1+t^2}$ et $\frac{t^{n+1}}{1+t^2}$.

3) b) Exprimer $u_n + u_{n+2}$ avec une seule intégrale, et factoriser t^n .

100* 2) a) Chaque différence peut s'étudier algébriquement.

3) a) Poser $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}$.

4) a) Mettre $v_n + nu_n$ sous une seule intégrale, et factoriser.

101 2) Écrire l'encadrement du 1) pour $p = 1, p = 2, \dots, p = n$. Ajouter alors membre à membre.

– les $n-1$ dernières égalités de gauche ;

– les $n-1$ premières égalités de droite.

3) Pour une primitive de $x \mapsto \ln x$: une intégration par parties.

Remarquer ensuite que $\ln(n!) = \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n$.

104 f est continue car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = f(0) = 1$.

Rappel : l'erreur $|I - S_n|$ est majorée par $\frac{f(0) - f(1)}{n}$.

$$106 \quad 2) \quad \frac{1^p + \dots + n^p}{p+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = s_n.$$

Vérifier et utiliser.

107 La fonction $t \mapsto \sqrt{1+t^4}$ est croissante sur $[0, 1]$.

S'inspirer de l'exercice 106 en prouvant que l'erreur $|I - s_n|$ est majorée

$$\text{par } \frac{f(1) - f(0)}{n}.$$

$$108* \quad 2) \quad |I - R_n| = \left| \sum_{k=1}^n \left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx \right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right|$$

$$\text{Or } \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx, \text{ donc :}$$

$$|I - R_n| = \left| \sum_{k=1}^n \left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) dx \right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \dots \right|$$

Puis montrer que $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ lorsque $a \leq b$, et poursuivre.

$$110 \quad R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

$$111 \quad R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

112* 2) Poser $u(x) = x^{2n}$ et $v'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Ensuite, remarquer que :

$$x^{2n-1} \sqrt{1+x^2} = \frac{x^{2n-1}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\dots}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\dots}{\sqrt{1+x^2}}.$$

113 1) Mettre au même dénominateur :

$$\frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x} = \frac{(\dots) \cos x}{\cos^2 x}.$$

4) Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ est ...

115 1) d) Un intermédiaire intéressant est d'établir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\frac{2}{n}} = 1.$$

116 1) a) Il suffit d'évoquer l'encadrement $0 \leq \ln x \leq 1$ sur $[1, e]$.

2) b) Poser $u(x) = (\ln x)^{n+1}$ et $v'(x) = 1$.

3) b) D'après 2) b), cela revient à établir que $I_{n+1} \geq 0$.

d) Utiliser 2) b), puis 3) c).

117* 1) b) Encadrer $1 - x^n$ sur $[0, 1]$.

c) Poser $u(x) = \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $v'(x) = e^{-x}$; alors

$$u'(x) = -\frac{(1-x)^n}{n!} \dots$$

2) a) Rappel : $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$.

118* 2) La dérivée de $x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ est $x \mapsto \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$. Vérifier et utiliser.

3) Par récurrence.

120* B) 1) Voir l'exercice 6.

C) 1) Il suffit de vérifier que $t \mapsto \sqrt{a^2 - t^2}$ est continue sur $[0, a \sin x]$.

3) Utiliser le schéma de composition :

$$\begin{cases} x \mapsto a \sin x \\ y \mapsto \int_0^y \sqrt{a^2 - t^2} dt \end{cases}$$

121 2) a) À l'aide d'un schéma de composition, on trouve que $u'(x) = 1$.

$$3) \quad \frac{\pi}{4} = u\left(\frac{\pi}{4}\right) = F\left(\tan \frac{\pi}{4}\right) = \dots$$

122 2) Poser $u(x) = \sin^{n-1}x$ et $v'(x) = \sin x$.

Ensuite : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

5) b) (I_n) est décroissante donc $I_{n-1} \geq I_n \geq I_{n+1} = \dots$ (Utiliser (1)).

124* A) 2) Dériver toujours le polynôme.

$$\begin{aligned} \text{B) 1) b) } D_{n+1}(t) &= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} + \cos(n+1)t \\ &= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t + 2 \cos(n+1)t \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} = \dots \end{aligned}$$

d) Reste à vérifier que, si $t = 0$, $\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)D_n(t) = g(t)\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t$.

2) d) De 2) c), on peut déduire que $x \geq \sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et l'appliquer à $x = \frac{t}{2}$.

3) b) La relation de Chasles :

$$I_n = \int_0^\alpha \dots + \int_\alpha^\pi \dots$$

Chapitre 5

7 Donner l'expression générale de $f(x)$ à l'aide du théorème 2, en fonction de a , b et d'une constante c .

Trois conditions permettent le calcul des constantes : les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$ et la limite en $-\infty$.

10 Poser $y(x) = (2x+1)e^{-x}$. Vérifier que $y'(x)$ s'exprime à l'aide de $y(x)$ et d'une autre fonction dont on connaît une primitive...

22* 2) Vérifier que $z(x) = -kAz(x) + k$, donc, d'après le théorème

$$2: z(x) = \frac{1}{A} + Ce^{-kAx} \quad (C \in \mathbb{R}). \text{ La suite est simple.}$$

Signe de $B: y(x)$ est du signe de $1 + Be^{-kAx}$.

Si B était négatif, montrer que ce nombre changerait de signe.

24 1) c) Une primitive de z'' est z' ; une primitive de $-2z'$ est $-2z$; donc il existe une constante C telle que $z' = -2z + C$. Calculer C à l'aide d'une condition initiale.

2) $y'(x)$ est nécessairement égal à $e^{-x}z(x)$, ce qui montre l'unicité de y .

28 2) Si h est suffisamment petit ($h > 0$), on peut considérer qu'entre les instants t et $t+h$, $20h$ litres se sont échappés du réservoir, et ces $20h$ litres contenaient $20h y(t)$ kg de sel.

3) Former le taux d'accroissement $\frac{y(t+h) - y(t)}{h}$.

$$\text{D'après 2), } y(t+h) = \frac{1}{100}(100y(t) - 20h y(t)) \dots$$

29* 1) Le volume de la pièce (en m^3) est 60. Exprimons les temps en minutes. Le volume de CO présent dans la pièce est (en m^3):

$$\text{-- à l'instant } t : \frac{60}{100} \times f(t);$$

$$\text{-- à l'instant } t+h \text{ (si } h > 0 \text{ est suffisamment petit):}$$

$$\frac{60}{100} f(t) + \underbrace{0,002h}_{\text{CO ajouté}} - \underbrace{0,002h \times \frac{f(t)}{100}}_{\text{CO échappé}}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} f(t+h) &= \frac{100}{60} \left[\frac{60}{100} f(t) + 0,002h - 0,002h \times \frac{f(t)}{100} \right] \\ &= f(t) + \frac{0,2}{60}h - \frac{0,002}{60}hf(t). \end{aligned}$$

Former alors le taux d'accroissement $\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ et le reste n'est qu'une affaire de calcul.

34 1) c) D'après 1) b) les solutions strictement positives de l'équation $y' = -ky(H - \ln y)$ sont les fonctions : $t \mapsto y(t) = \exp[H + Ce^{kt}]$. Poser $M = \exp H$.

Si N est la fonction solution qui caractérise une population en extinction, on doit avoir $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 0$. Compte tenu de ce que $k > 0$, calculer

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp[Ce^{kt}] \text{ lorsque } C \geq 0 \text{ et conclure que } C < 0.$$

3) a) Si N est une fonction de Gompertz du type précédent,

$$\ln \left[\ln \left(\frac{M}{N(t)} \right) \right] = \ln(ce^{kt}) = kt + \ln c. \text{ Vérifier et adopter.}$$

Étudier ensuite la réciproque.

35 2) a) D'après 1), $f(t) = L + Ce^{-kt}$, où C est une constante. Calculer les constantes compte tenu des conditions : $f(0) = 0$, $L = 180$, et $f(15) = 90$.

38* 3) La demi-vie du produit est le temps au bout duquel la moitié du produit a été éliminé. D'après le problème 1 de la partie 2 de *Au cœur des problèmes*, ce temps est égal à $t_{0,5} = \frac{\ln 2}{k}$.

39 3) Le système $\begin{cases} a_n + b_n = u_n \\ 2a_n - b_n = v_n \end{cases}$ peut « s'inverser » en :

$$\begin{cases} a_n = \frac{u_n + v_n}{3} \\ b_n = \frac{2u_n - v_n}{3} \end{cases}$$

40 2) D'après 1) $0 \leq M_{n+1} \leq M'_n$.

On peut en tirer facilement $0 \leq M_n \leq r^n M_0$. Les résultats sur les suites géométriques font le reste.

41 A) 1) a) Poser $L_n = 0$ dans la deuxième égalité et exprimer r_{n+1} en fonction de r_n .

1) c) Poser $L_{n+1} = L_n = L$ et $r_{n+1} = r_n = r$ dans le système. On calcule facilement L et r .

42 2) a) La dérivée de $w^2y^2 + y'^2$ est $2wy'y' + 2y''y'$.

Factoriser $2y'$ et utiliser le fait que $y \in \mathcal{C}^1$.

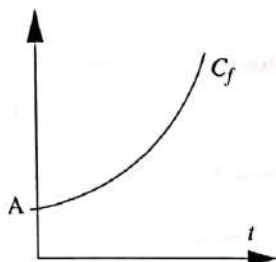
b) On a dans ce cas, d'après a) $w^2y^2 + y'^2 = 0$ (Pourquoi ?) Montrer que cette égalité n'a lieu que si $y = 0$ et $y' = 0$.

3) a) Utiliser 1).

- 44 2) c) Déterminer $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\beta^u - 1}{u}$ en considérant le taux d'accroissement de la fonction $u \mapsto \beta^u$ en 0. Poser ensuite $\beta = \frac{A}{y}$ et utiliser le

$$\text{schéma de composition} \begin{cases} \alpha \mapsto 1 - \alpha \\ u \mapsto \frac{\beta^u - 1}{u} \end{cases}$$

- 45 2) b) D'après les définitions de ces fonctions, il est clair que $a(0) = S(0)$, puisque $S(0)$ est le nombre total de nouveau-nés et $a(0)$ est le nombre de nouveau-nés n'ayant pas encore contracté la variole. Cela fournit la condition initiale $f(0) = 1$.
c) Puisque $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 0$, on peut donner l'allure de C_f :



puis en déduire, sans étude, celle de C_p .

- 3) c) Déterminer séparément une primitive de $t \mapsto \frac{g'(t)}{g(t)}$ et de

$$t \mapsto \frac{-\alpha\beta e^{-\beta t}}{(1-\alpha) + \alpha e^{-\beta t}}$$

- d) On pourra interpréter $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 1 - \alpha$.

Chapitre 6

- 104 b) Développer $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ sous la forme $az^3 + bz^2 + cz + d$ (a, b, c, d complexes) et exprimer a, b, c, d à l'aide des données sur z_1, z_2 et z_3 en utilisant la question 2) a) pour le coefficient c .

- 109 2) Écrire $5 - i = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r > 0$.
Que vaut $\tan \theta$?

Prouver que $\alpha = -\theta$ appartient à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ donc que...

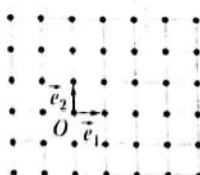
- 3) Sans la calculatrice ? Comparer 0, β , α et $\frac{\pi}{6}$ à l'aide de leurs tangentes.

- 110 1) Tenir compte des égalités $z \cdot \bar{z} = 1$ et $z' \cdot \bar{z}' = 1$.

- 2) Travailler avec les affixes des vecteurs $\overrightarrow{IM''}$ et $\overrightarrow{MM'}$ et utiliser la caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs à l'aide des affixes : c'est immédiat.

- 113 1) Rappel : $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.

- 2) Voilà ce que signifie « naturel » :



- 115 2) Une réflexion change les angles orientés en leurs opposés et par ailleurs, se convaincre que pour A et M donnés sur $\mathcal{C}$, il existe M' unique de $\mathcal{C}$ tel que $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) [2\pi]$.

- 116 2) Prouver que $S_{(OP)} : M_1 \mapsto M_2, S_{(OQ)} : M_2 \mapsto M_3, S_{(OR)} : M_3 \mapsto M_4$, etc.

- 119* N'utiliser que les affixes des vecteurs :

$$z_{\overrightarrow{AE}} = z_{\overrightarrow{AB}} + z_{\overrightarrow{BE}} \text{ et } z_{\overrightarrow{AF}} = z_{\overrightarrow{AD}} + z_{\overrightarrow{DF}}.$$

- 121* 3) a) Obtenir : $(1 - i)(m + p) = 2(\ell - ik)$

$$\text{et } (1 - i)(n + q) = 2(k - i\ell).$$

Ensuite, caractériser un parallélogramme par : « les diagonales ont même milieu ».

- 131* 2) Montrer qu'à l'instant t :

- l'affixe de M est $e^{2i\pi t}$
- l'affixe de M' est $6 + \sqrt{3}e^{2i\pi t + i\frac{\pi}{2}}$ et donc que l'affixe de m_t est d'après 1) : ...

- 133 1) 2) z' réel signifie $z' = 0$ ou $z' \neq 0$ et $\arg z' = 0$ modulo π (il est bien écrit modulo π et non modulo 2π).

De même z' imaginaire pur signifie $z' = 0$ ou $z' = \frac{\pi}{2}$ modulo π .

- 134* 1) Un peu de rigueur :

- Montrer que le cercle C de centre A et de rayon 0,5 est contenu dans la couronne de centre O et de rayons $r_1 = 0,5, r_2 = 1,5$.
- Réciproquement (et oui !) : soit P un point de la couronne, considérer l'intersection de Γ avec le cercle de centre P et de rayon 0,5.

- 3) Écrire : $1 + \ell e^{i\theta} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ et identifier les parties réelles.

- 4) Attention à ce que livre la calculatrice dans la résolution d'une équation de la forme $\cos x = a$ (a fixé) : elle ne donne pas toutes les solutions.

- 135* 1) Presque un réflexe : factoriser par $e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

- 3) Lorsque $x = \frac{\pi}{n}$, que vaut $1 + \cos nx$?

Utiliser ensuite que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.

- 4) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \sum_{k=1}^n e^{i(n-k)\frac{\pi}{n}} \text{ (le plus simple étant de poser } p = n - k \text{ dans la seconde somme).}$$

- 136* 1) c) $z^2 - \bar{z}^2 = (Z + \omega)^2 - (\bar{Z} + \bar{\omega})^2$: il n'y a plus qu'à développer.

- 2) Vérifier que (1) impose $Z \neq 0$ et donc qu'en multipliant (2) par Z^2 on obtient une équation équivalente (?).

- 3) Que signifie $Z + 2\omega = 0$?

Soit Z_0 solution de $Z_0^3 = 8\omega\bar{\omega}^2$. Montrer que M appartient à $\mathcal{C} \cap \mathcal{H}$ si, et seulement si, son affixe est $\omega + Z_0, \omega + jZ_0, \omega + j^2Z_0, -\omega$. Interpréter géométriquement.

Chapitre 7

- 43* L'une des trois versions du théorème de la médiane est bienvenue.

- 44 Commencer par faire une figure pour conjecturer les deux angles. La suite dans la relation d'Al-Kashi.

45 La formule des sinus.

51 2) $\vec{IC} = \vec{JH}$, donc...

• Projeter orthogonalement :

$$\vec{FQ} \cdot \vec{CH} = \vec{GQ} \cdot \vec{CH} = \dots$$

53* 2) b) $\vec{OB} \cdot \vec{HN} = \vec{OB} \cdot \vec{HA} + \vec{OB} \cdot \vec{AN}$.

3) Soit π le plan orthogonal à $\vec{OB}$ passant par H , Γ le cercle de ce plan de diamètre $[AH]$ et N un point de Γ distinct de A et de H .

Établir que : $(AN) \perp (ON)$; (ON) coupe le plan $\mathcal{P}$ en un point désigné par M ; $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$; et conclure.

55 1) Pour évaluer $\vec{HK} \cdot \vec{EL}$, utiliser (après justification) que :

$$\vec{HK} = \vec{HG} + \frac{1}{2}\vec{GB} \text{ et } \vec{EL} = \vec{EA} + \frac{1}{2}\vec{AC}.$$

2) Expliquer pourquoi $\vec{IH}' = \vec{JH}$.

$$\begin{aligned} 57 \quad 2) \text{ b) } \left\| \sum_{i=1}^4 \vec{OA}_i \right\|^2 &= \sum_{i=1}^4 \|\vec{OA}_i\|^2 \\ &+ 2\vec{OA}_1 \cdot \vec{OA}_2 + 2\vec{OA}_1 \cdot \vec{OA}_3 + 2\vec{OA}_1 \cdot \vec{OA}_4 \\ &+ 2\vec{OA}_2 \cdot \vec{OA}_3 + 2\vec{OA}_2 \cdot \vec{OA}_4 + 2\vec{OA}_3 \cdot \vec{OA}_4 \end{aligned}$$

Songer ensuite au raisonnement suivant :

Si l'on a des nombres réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ tels que :

$$\begin{cases} a_1 \leq b_1 \\ a_2 \leq b_2, \text{ alors : } a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n \\ a_n \leq b_n \end{cases}$$

avec égalité si, et seulement si, $a_i = b_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.

61* 2) Partir du point $N' \left(1 - m\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, m\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

Calculer $\vec{CN'}$ et montrer qu'il existe λ , $0 \leq \lambda < 1$ tel que $\vec{CN'} = \lambda \vec{CA}$. En déduire alors que $N' = N$.

62 3) On doit obtenir une seule valeur : $m = \frac{ac}{c + \sqrt{a^2 + b^2}}$.

5) Exprimer OC et AB en fonction de a, b et c .

65 • Montrer que le tétraèdre est équifacial si, et seulement si, les quadrilatères $IMJN$, $JLIK$ et $KNLM$ sont des losanges.

• Pour établir l'équivalence entre (2) et (3) observer que les côtés des quadrilatères précédents sont parallèles à des arêtes du tétraèdre.

• Ne pas oublier que le centre de la sphère circonscrite appartient aux plans médiateurs des arêtes.

66 2) Pour montrer, par exemple, que D est le milieu de $[A_1A_2]$, montrer que $DA_1 = DA_2$ (très facile) et que D est aligné avec A_1 et A_2 en calculant $\vec{A_2DA_1} = \vec{A_2DB} + \vec{BDC} + \vec{CDA_1} = \dots$

68* B) Dans le cas du tétraèdre régulier, montrer, par exemple, que le dièdre des faces (AEC) et (ABD) est l'angle $\widehat{CID}$, où I est le milieu de $[AB]$.

C) 2) • Que vaut $\vec{OA_2} \cdot \vec{A_1A_3}$? En déduire $\vec{A_1A_3} \cdot \vec{SA_2} = 0$.

• Utiliser que : $\vec{SH} \perp \vec{A_1H}$ et $\vec{SH} \perp \vec{A_1A_3}$ (à justifier évidemment).

3) a) Faire une figure : triangle SA_2A_3 avec le point H .

b) Al-Kashi

4) a) Oui, il faut trouver une pyramide régulière dans le cube.

69* 1) Trouver une deuxième médiane.

3) a) « Position » du centre de gravité sur une médiane.

b) Observer que le triangle BEG est équilatéral : cela facilitera l'évaluation de $\vec{GB} \cdot \vec{EG}$.

4) Obtenir (PQ) parallèle à (HB) . Après, c'est immédiat.

76* A) 1) De la première relation, déduire que :

$$\vec{M_0A} + \vec{M_0B} = \vec{M_0O} - \vec{M_0C} + \vec{M_0O} - \vec{M_0D}$$

(c'est une aide pour évaluer $2\vec{M_0O} \cdot \vec{CD}$)

B) 2) b) Pour montrer par exemple que $\vec{M_0A} \perp \vec{CD}$, utiliser $(\vec{M_0A} + \vec{M_0B}) \cdot \vec{CD} = (\vec{M_0A} + \vec{M_0A} + \vec{AB}) \cdot \vec{CD}$.

4) Soit A_1 le projeté orthogonal de A sur la face (BCD) . Que dire de $\vec{BA} \cdot \vec{CD}$ et $\vec{BA_1} \cdot \vec{CD}$? $\vec{CA} \cdot \vec{BD}$ et $\vec{CA_1} \cdot \vec{BD}$? $\vec{DA} \cdot \vec{BC}$ et $\vec{DA_1} \cdot \vec{BC}$? C'est la clef de toute l'affaire.

6) Examiner la nature des quadrilatères $IMJN$, $JLIK$ et $KNLM$ de l'exercice 63.

77* 2) On se doit d'obtenir : $MB^2 = 3x^2 - 4x + 2$.

Faut-il rappeler que la distance BM est minimale lorsque M est le projeté orthogonal de B sur la droite (DF) ?

3) d) Utiliser le tableau de variations de f pour montrer que $\theta \leq \frac{2\pi}{3}$

avec égalité si, et seulement si, $x = \frac{2}{3}$ et interpréter.

78* A) 3) Le plan orthogonal en L à (AL) passe par B si, et seulement si, $\vec{LA} \cdot \vec{LB} = 0$, d'où la valeur de α .

B) 3) Pour trouver un point $M(x, y, z)$ qui vérifie la relation (1) quel que soit θ , il suffit d'écrire que dans (1), le coefficient de $\cos \theta$, celui de $\sin \theta$ et le terme constant (par rapport à θ) sont tous nuls. Essayer.

Chapitre 8

56 3) Avec $\frac{I}{2} = \text{bar} \left(\frac{Q|R}{1|1} \right)$ et

$$\frac{Q}{1} = \text{bar} \left(\frac{O|B}{\alpha|1-\alpha} \right), \frac{R}{1} = \text{bar} \left(\frac{O|C}{\alpha|1-\alpha} \right)$$

il n'est pas bien difficile d'écrire I comme barycentre de O, B et C .

4) En regroupant : $\frac{S}{3-\alpha} = \text{bar} \left(\frac{I|A}{2|1-\alpha} \right)$, etc.

5) Prouver, par exemple, que : $\vec{AI} = \vec{AO} + \vec{BO} + \vec{CO}$.

58* Utiliser systématiquement qu'un vecteur directeur de Δ est un vecteur orthogonal à $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

65 2) a) Montrer que $\vec{n}, \vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont tous orthogonaux à un vecteur directeur de D . En déduire que ces vecteurs sont coplanaires.

70* 1) Déterminer les coordonnées des projetés orthogonaux de $M(x, y, z)$ sur Δ et Δ' .

79 S'aider d'un tableau tel :

	aujourd'hui	k années plus tard
père	$x = 6z$	$6z + k$
mère	y	$y + k$
fil	z	$z + k$

Calculer k avec les données de l'énoncé.

81* Introduire le débit de chaque robinet-vanne d_A, d_B, d_C et V le volume de la piscine et observer que l'énoncé fournit les valeurs de $\frac{V}{d_A + d_B}, \frac{V}{d_B + d_C}$ et $\frac{V}{d_C + d_A}$, et que la demande concerne

$$\frac{V}{d_A + d_B + d_C} \text{ et } \frac{V}{d_A}, \frac{V}{d_B}, \frac{V}{d_C}.$$

83* 1) Partir de : $a^2 = \|\vec{BC}\|^2 = \vec{BC} \cdot (\vec{BA} + \vec{AC})$, développer et mettre en œuvre la relation :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

2) Voici une étape intermédiaire du calcul :

$$p + q + r = 2c(\cos C + \cos A \cos B).$$

84* 1) Évaluer $\vec{AH} \cdot \vec{BC}, \vec{BH} \cdot \vec{AC}$ après avoir utilisé la définition de H comme barycentre A, B et C .

2) La loi des sinus.

86 Montrer, par exemple, que $\vec{AI}$ est colinéaire au vecteur

$$\frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} + \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|}.$$

87* 2) Utiliser que D étant dirigée par un vecteur orthogonal à $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$, D et P sont sécants si, et seulement si, ce vecteur n'est pas orthogonal à $\vec{n}_3$.

3) Discuter – par exemple – en considérant les cas :

$$(a_2, b_2) = (0, 0) \text{ et } (a_2, b_2) \neq (0, 0).$$

92* 1) En suivant la Piste, sous l'hypothèse $\vec{u}_1 = \vec{0}$.

• Étape 1 Si $\vec{n}_3 \cdot \vec{n}_1 \neq 0$, alors que dire de $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$? puis de $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$? Montrer de même que $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \neq 0$ mène à une contradiction.

• Étape 2 Voir alors que $\vec{n}_1$ dirige $(\vec{OA}_1)$.

2) Montrer que $\vec{OA}_1 \cdot \vec{u}_1 = 0$ puis que $\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0$.

3) b) Les plans Q_1 et Q_2 se coupent selon une droite Δ passant par O et dirigée par un vecteur $\vec{u}$ orthogonal à la fois à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$.

Reste à montrer que $\mathcal{L}(0, \vec{u}) \subset Q_3$.

93* Application

Il est clair que les résultats obtenus sont encore vrais pour une sphère de rayon quelconque. Cela dit, choisir un repère tel qu'avec les notations du problème :

$$\theta_1 = 40,43^\circ ; \theta_2 = 50,23^\circ \text{ et } \varphi = 74,01^\circ - 4,10^\circ.$$

94* I) 2) Pour l'expression du déterminant, l'emploi de $\vec{u} \cdot \vec{u}' = \|\vec{u}\| \|\vec{u}'\| \cos(\vec{u}, \vec{u}')$ est bienvenu.

II) 3) Utiliser le théorème de Pythagore.

III) 3) Voici une représentation paramétrique de A :

$$x = \frac{1}{61}(3t + 119) ; y = \frac{1}{61}(6t - 29) ; z = \frac{1}{61}(-4t - 61).$$

95* I) Vérifier que deux quelconques des droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et Δ sont non parallèles et non sécantes.

4) a) • $\mathcal{P}_1$ est le plan de repère $(P, \vec{PK}, \vec{j})$; il faut donc chercher $\vec{n}_1$ tel que $\vec{n}_1 \cdot \vec{PK} = \vec{n}_1 \cdot \vec{j} = 0$.

• $\mathcal{P}_2$ est le plan de repère $(P, \vec{PL}, \vec{i})$.

Chapitre 9

4 Utiliser, après l'avoir vérifiée, l'égalité $\overline{C \cup D} = \overline{C \cap D}$.

$$\begin{aligned} 12 \quad 1) E(X) &= \sum_{i=1}^n x_i p_i = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{e \in (X = x_i)} P(e) \right) \end{aligned}$$

Le reste est affaire de regroupement.

13 Poser $\mu = E(X)$; alors :

$$\text{Var}(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2).$$

Appliquer alors la linéarité de l'espérance.

De même pour chacune des formules.

18* 1) Pour $0 \leq i \leq 9$, poser $P(i) = k(i+1)$.

Calculer k en écrivant que : $P(0) + P(1) + \dots + P(9) = 1$.

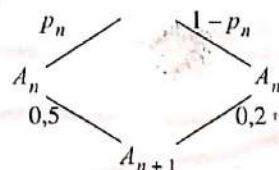
2) Même indication qu'en 1).

27 La sécurité d'un moteur est la probabilité qu'il fonctionne.

Soit T l'événement : « l'avion tombe » ; C l'événement : « le moteur central fonctionne » ; A_d resp. A_g les événements : « le moteur de l'aile droite (resp. gauche) fonctionne ».

Alors $\bar{T} = C \cup (A_g \cap A_d)$. Calculer $P(\bar{T})$.

37 1) Considérer l'événement A_n : « le n -ième but est arrêté » et utiliser l'arbre suivant après l'avoir expliqué :



40 3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$ (à vérifier). Si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience, il est presque sûr que le vers de Mallarmé sera écrit au moins une fois. Voilà pour le paradoxe.

4) La réponse est $p_n > 10^{-10}$ lorsque n dépasse :

$$-10840 \times \ln(1 - 10^{-10}) \approx 2 \times 10^{11}.$$

Le « grand nombre de fois » est vraiment trop grand pour être réalisé !

50 Choisissons un petit pain fixé. Considérer la probabilité qu'il ne contienne ni le raisin n° 1, ni le raisin n° 2, ... ni le raisin numéro n . Cette probabilité vaut ... (utiliser l'indépendance).

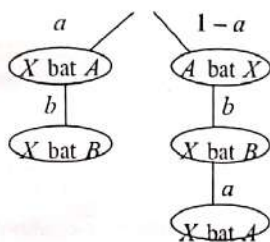
53* 1) b) Utiliser la méthode décrite dans l'exemple 3 du cours : on pose, pour $1 \leq i \leq n$, $Y_i = 1$ si le i -ième objet est dans B_1 , et $Y_i = 0$ sinon. Considérer la variable $Y = Y_1 + \dots + Y_n$. Que représente-t-elle ?

54 2) Si p est la probabilité que A gagne, A doit retirer du jeu une somme égale à $p \times 64$ pistoles.

57* Le nombre cherché est l'espérance mathématique de la variable X qui décompte le rang de la première jaune tirée. Déterminer la loi de X à l'aide d'un arbre.

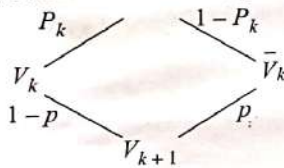
58 1) Dans chaque cas, représenter seulement les chemins qui aboutissent au gain du joueur X . Ainsi, dans a) par exemple, X est vainqueur dans deux cas : soit il bat A , puis B , soit il perd contre A , puis bat successivement B puis A .

D'où l'arbre :

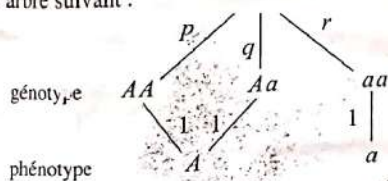


2) Pour lever le paradoxe apparent, songer que, pour être vainqueur, X doit obligatoirement gagner la deuxième partie...

60 1) Utiliser l'arbre suivant, après l'avoir justifié :

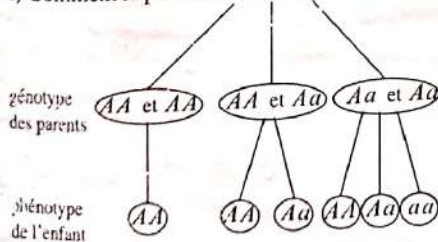


61* a) Déterminer d'abord la probabilité du phénotype A en utilisant l'arbre suivant :



Calculer ensuite $P(AA/\text{Phén. } A)$, $\dots$, $P(Aa/\text{Phén. } A)$.

c) Commencer par l'arbre suivant :



Dans cet arbre, on peut se contenter de remplir les branches du chemin situé le plus à droite. Pourquoi ?

e) On peut procéder comme dans le problème résolu de *Au cœur des problèmes*, partie 3.

62 1) Les quatre génotypes sont $AABB$, $AaBB$, $AaBb$ et $AABb$. Cela correspond au phénotype AB (car a et b sont récessifs).

63* Dans le désordre, les six génotypes possibles ont pour probabilités $u^2, v^2, w^2, 2uv, 2uw, 2vw$. Vérifier cela.

3) Nul besoin de déterminer la loi du génotype d'un enfant de la génération 1 ; utiliser les résultats de la question 1).

66 2) b) $P(T_2/T_1) = \frac{1}{9}$ et $P(T_2/T_1) = \frac{2}{9}$: à vérifier.

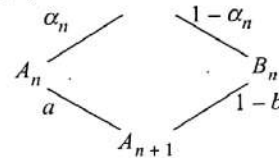
c) Il s'agit de calculer $P(T_2)$. Utiliser la formule des probabilités totales.

68 1) Gérer les hypothèses pour obtenir deux relations entre p_1 et r .

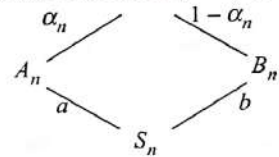
69 3) a) X prend les valeurs : 0, 1, 2, 4, 5, 8.

4) et 5) Reconnaître le schéma : « au moins un... ».

70 1) a) Utiliser l'arbre suivant :



3) a) Utiliser l'arbre suivant, à expliquer :



4) b) Tout se ramène à montrer que, lorsque $a \in [0, 1]$, $a(1-a) \leq \frac{1}{4}$.

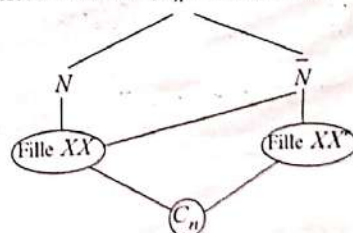
71* 1) a) et b) Puisque pour tout i , $E(X_i) = \frac{1}{4}$, $E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_{100}) = \dots$

2) b) Utiliser, après l'avoir justifié, le fait que les événements $\bar{F}_i$ sont indépendants dans leur ensemble.

73 1) c) Puisque l'enfant est vivant, il n'y a que trois possibilités équiprobables pour son bagage génétique : XY , XX^* ou XX .

4) Soit C_n l'événement « n petits fils normaux ».

Calculer d'abord $P(C_n)$ à l'aide de l'arbre :



Chapitre 10

54 3) Montrer que $P(X = k) = \frac{k-1}{\binom{n}{2}}$

55 1) En jouant 10 numéros, on obtient un échantillon à k numéros gagnants ($k = 10, 9, 8, 7, 6, 5, 0$) :

- en choisissant k numéros parmi 20 gagnants et $10 - k$ numéros parmi 50 perdants.

57* 3) Comparer P et Q suivant les valeurs de p en résolvant l'inéquation $P - Q \leq 0$.

58 • « Au moins un sujet » doit faire songer à la probabilité de l'événement contraire.

- Pour rester rigoureux :
- soit étudier la monotonie de $(u_n)_n$ pour $0 \leq n \leq 100$;
- soit justifier l'inégalité $u_n \leq (99 - n)^3$ et raisonner par conditions suffisantes.

60* 1) Poser $t = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ et résoudre :

$$(1-t)t \leq \frac{1}{16}, \text{ avec } 0 \leq t \leq 1 \text{ (justifier).}$$

66* 2) Désigner les heures d'arrivée des personnes A et B par $20 + x$ et $20 + y$ (unité de temps : l'heure) avec $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ et éviter de « discuter » en considérant les cas $x < y$, etc. : les personnes se rencontrent si, et seulement si, l'écart entre leurs heures d'arrivée est plus petit qu'un quart d'heure.

69* 1) Montrer que, de manière générale, si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont également :

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = \dots, \text{ et songer que } \bar{\bar{A}} = A, \bar{\bar{B}} = B.$$

3) Dire que le temps d'attente entre deux réalisations de E est supérieur à t ($t > 0$ donné) ne voudrait-il pas dire que l'événement E ne se réalise pas durant l'intervalle de temps t ?

72 3) Si la régularité du dé est admise en 1) (au seuil de 5 %), elle est rejetée au même seuil en 2), ce qui fournit une apparente contradiction. On notera cependant que le choix des regroupements par paires est (volontairement) biaisé : une paire avec les deux effectifs les plus faibles, une paire avec les deux effectifs les plus forts, ... ; or il y a 15 regroupements par paires possibles.

75 2) Moins de 10 % des cas donnent d'aussi bons résultats. On peut donc qualifier de « chanceux » l'échantillon expérimental de Mendel sans pour autant pouvoir porter une accusation de malhonnêteté (nous n'avons qu'une seule expérience). En revanche, il n'en est plus de même (voir l'encadré après l'exercice) lorsque l'on examine l'ensemble des résultats obtenus par Mendel.

79* • $(X > k)$ est l'événement : « au cours des k premiers tirages, les numéros sortis sont tous différents. »

- Utiliser, après l'avoir vérifiée, la relation :

$$(X > k - 1) = (X = k) \cup (X > k).$$

84* A) 1) Pour calculer $|e^{ix} - e^{iy}|$, factoriser $e^{ix} - e^{iy}$ par $e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$:

$$e^{ix} - e^{iy} = e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} \left(e^{i\left(\frac{x-y}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{x-y}{2}\right)} \right).$$

3) Poser $t = \frac{x-y}{2}$. Vérifier que les conditions $\begin{cases} 0 \leq x < 2\pi \\ 0 \leq y < 2\pi \end{cases}$

conduisent à $-\pi < t < \pi$ et appliquer le résultat obtenu à la question 2).

B) La probabilité est calculée par le rapport des aires :

- du domaine $\mathcal{D}$,

- du carré défini comme l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$0 \leq x \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq y \leq 2\pi.$$

85* 2) Le principe du produit.

3) Si A est différent de E , montrer que l'on peut construire toutes les parties B de E telles que $A \cup B = E$ ainsi :

- choisir une partie quelconque X de A ;

- poser $B = \bar{A} \cup X$ ($\bar{A}$: complémentaire de A dans E).

4) Le principe de la somme, selon le nombre d'éléments de A .

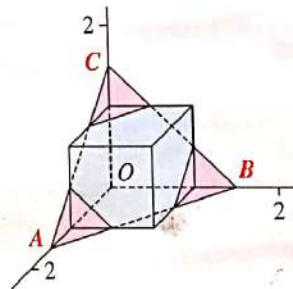
6) Deux modifications seulement :

- nombre de tirages ;

- la question 3) (uniquement lorsque $A = E$).

86* A) Le problème 2 (page 311) du chapitre 8 est une aide précieuse.

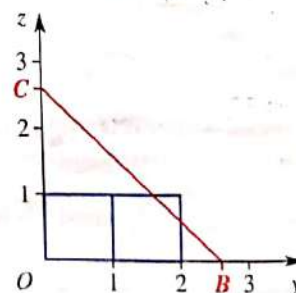
B) b)



- Lorsque $1 \leq t \leq 2$, V_t n'est autre que le volume du tétraèdre trirectangle $OABC$ $A(t, 0, 0)$, $B(0, t, 0)$ et $C(0, 0, t)$ diminué du volume des trois « petits » tétraèdres trirectangles en violet dans la figure ci-dessus.

- Lorsque $2 \leq t \leq 3$, on considère l'intersection du plan ABC avec les plans d'équations $z = 1$, $y = 1$ et $x = 1$: c'est la figure accompagnant l'énoncé.

V_t est alors le volume du cube diminué du volume du « petit » tétraèdre trirectangle.



La figure ci-dessus (dans le plan (yOz)) permet de calculer son arête.

87* B) 2) E_k est l'intersection des n événements : $(A_1 \in \Gamma_k), (A_2 \in \Gamma_k) \dots (A_k \in \Gamma_k) \dots (A_n \in \Gamma_k)$.

Ces événements sont indépendants et $(A_k \in \Gamma_k)$ est (par définition) l'événement certain.

C) 2) E_0 est l'intersection des n événements indépendants :

$t_1 \in [1-t, 1], t_2 \in [1-t, 1], \dots, t_n \in [1-t, 1]$, chacun de probabilité...

E_i est l'intersection des événements : $t_i \in [0, 1-t[; t_1 \in [t_i, t_i+t] ; t_2 \in [t_i, t_i+t] ; \dots ; t_i \in [t_i, t_i+t]$ (événement certain) ; $\dots ; t_n \in [t_i, t_i+t]$.

4) Considérer que $t_1, t_2, \dots, t_n$ sont les instants d'arrivée aléatoires entre $[0, 1]$ de n personnes, indépendamment les uns des autres, et t le temps d'attente (au sens du problème 66).

Chapitre 11

7 L'identité $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \dots + a + 1)$ peut servir de « passe-partout ».

8 2) Dresser la liste des diviseurs de 2004. Remarquer ensuite que $3 = 2^4 - 1$ et on procède de même pour 7 et 63.

Pour 65, c'est un peu plus rusé : chercher un multiple de 65 de la forme $2^d - 1$, où d divise 2004.

13 Voir l'exercice 3 de la séquence 2, dans Avant première.

14 Par exemple, le nombre de jours écoulés entre le 1^{er} janvier 1900 et le 31 décembre 1999 est : $100 \times 365 + 24$ (Il y a 24 années bissextiles seulement – car l'année 1900 ne l'est pas – donc 24 « 29 février » à rajouter. On procède de même pour déterminer le nombre de jours entre le 14 juillet 1789 et la date de l'exercice, puis on effectue la division euclidienne du nombre trouvé par 7, avec un peu d'attention pour le reste.

17 2) $2^{70} = (2^{12})^5 \times 2^{10}$ et $3^{70} = (3^6)^{11} \times 3^4$.

Utiliser ensuite les propriétés des congruences.

18 3) Si r est le reste cherché, vérifier que $10^{2005} \equiv 10^r \pmod{7}$.

25* 2) b) Il s'agit d'utiliser le « principe des tiroirs » qui dit que lorsqu'on range $p+1$ objets dans p tiroirs, un tiroir au moins contient plus d'un objet... Ici, les tiroirs sont les restes, et les « objets » sont les nombres $u_0, u_1, \dots, u_p$.

c) L'égalité $u_m = u_{m+\tau} \pmod{p}$ conduit à : $a\tau \equiv 0 \pmod{p}$. Prouver cela et l'utiliser.

33 Poser $x = 12x'$ et $324 = 12 \times 27$; alors x' est premier avec 27. Trouver tous les x' possibles...

37* 2) a) La division euclidienne de n par m s'écrit $n = mq + r$ ($0 \leq r < m$). Alors :

$$2^n - 1 = 2^{mq+r} - 1 = (2^{mq} - 1) \times 2^r + (2^r - 1).$$

Montrer que l'égalité précédente est en fait la division euclidienne de $2^n - 1$ par $2^m - 1$ (Utiliser l'exercice 8 et prouver que $0 \leq 2^r - 1 < 2^m - 1$).

43 Supposons que a est premier avec b_1 et avec b_2 ; alors il existe des entiers u_1, v_1, u_2 et v_2 tels que $au_1 + b_1v_1 = 1$ et $au_2 + b_2v_2 = 1$. Multiplier membre à membre ces égalités.

45 2) b) M est un multiple de $a = Da'$ donc $\frac{M}{D}$ est un entier multiple de a' (et de même $\frac{M}{D}$ est multiple de b' ...)

c) D'après a), $Da'b' \geq M$ et d'après b), $M \geq Da'b'$...

46 1) On sait déjà que tout diviseur de D divise a et b .

Inversement, montrer que si d divise a et b , alors d divise D , à l'aide de l'égalité de Bezout.

2) a) Poser $m = ka = kDa'$ (avec k entier).

Alors $mb' = kDa'b' = kM$...

b) Il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $a'u + b'v = 1$. Vérifier et utiliser.

49 Poser $D = \text{PGCD}(b, c)$.

Montrer successivement que : tout diviseur commun de a, b et c divise a et D , donc leur PGCD ; tout diviseur commun de a et D divise a, b et c ... ; conclure alors.

50 2) $2^n \equiv (2^8)^k \times 2^r \pmod{17}$.

53 1) b) Montrer d'abord que $a\tau \equiv 0 \pmod{p}$, puis que $a'\tau \equiv 0 \pmod{p'}$.

Montrer ensuite à l'aide d'un théorème du cours que p' divise τ puis que $p' \leq \tau$.

76 1) Remarquer que : $\binom{n-1}{p-1} = \frac{(n-1) \times \dots \times 2 \times 1}{(p-1) \times \dots \times 2 \times 1}$.

77* 2) La condition du 1) s'écrit assez facilement : « $2(a_{2k} - a_{2k-1})$ est un multiple de 10 ». En déduire alors la propriété demandée.

3) Parmi les 100 couples possibles (a_{2k-1}, a_{2k}) , combien sont tels que $a_{2k-1} = a_{2k} \pmod{5}$, avec $a_{2k-1} \neq a_{2k}$? (Dans le cas où $a_{2k-1} = a_{2k}$, la permutation est sans conséquence.)

78* 3) Si un seul des chiffres a_k est erroné, il est remplacé par $b_k \neq a_k$ (en écrivant le nombre à 23 chiffres : $a_{23} \dots a_2 a_1$).

La clé $a_2 a_1$ étant calculée à partir des premiers chiffres, une erreur sur la clé est forcément détectée, donc on peut supposer que $k \geq 3$.

Montrer que, pour que l'erreur ne soit pas détectée, il faut que $10^{k-2}(b_k - a_k) \equiv 0 \pmod{97}$. Poursuivre le raisonnement.

• De même, si les deux chiffres a_k et a_{k+1} sont permutés, montrer que, pour que l'erreur ne soit pas décelée, il faut que $9 \times 10^{k-2}(a_{k+1} - a_k) \equiv 0 \pmod{97}$.

- 79 2) Il est évident qu'une erreur sur a_{2k} est détectée. (Pourquoi ?)
 • Si a_{2k+1} est remplacée par b_{2k+1} , montrer que, pour que l'erreur ne soit pas détectée, il faut que $m(a_{2k+1}) \equiv m(b_{2k+1}) \pmod{10}$.
 Utiliser alors le fait que m réalise une bijection...
- 80 3) Si le chiffre a_k est remplacé par un chiffre distinct b_k , montrer que, si l'erreur n'est pas détectée, alors $k(b_k - a_k) \equiv 0 \pmod{11}$.
 4) Si les deux chiffres a_k et a_{k+1} sont permutés, montrer que l'erreur n'est pas détectée lorsque :
 $(11 - k)a_k + (10 - k)a_{k+1} \equiv (11 - k)a_{k+1} + (10 - k)a_k \pmod{11}$.
 Poursuivre ce raisonnement.
- 81* 2) Si une erreur survient dans la transmission de a_{11} ou a_{12} (le « ou » est exclusif), elle peut être facilement repérée (puisque l'une seule des deux clés est fautive) et corrigée (puisque l'on peut recalculer les deux clés).
 Si une erreur survient dans la transmission de a_k ($1 \leq k \leq 10$), alors montrer que les deux clés sont fautes. Si a_k est remplacé par $b_k \neq a_k$, les clés erronées a_{11} et a_{12} transmises permettent de calculer les bonnes clés A_{11} et A_{12} . Expliquer comment, puis calculer k et enfin a_k .
- 82 Si α est rationnel, $\alpha = \frac{p}{q}$ (p et q entiers, premiers entre eux), alors $\sqrt{2} = \dots$
- 84 1) Poser $x = \frac{p}{q}$ (p et q entiers, premiers entre eux).
 Montrer en utilisant le théorème de Gauss, que q divise p .
- 85 2) Calculer $(\beta^2 - 96)^2$, puis $(\alpha^2 - 365)^2$.
- 86 D'après 1) $4\alpha^3 - 3\alpha = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, donc α est racine du polynôme $p(x) = 8x^3 - 6x - 1 \dots$
- 98 c) Si (x_0, y_0) est une solution de l'équation du b), multiplier les deux congruences du système du a) par x_0 , et simplifier « modulo 26 ».
- 101 1) Soit n le nombre de jours séparant J_0 et J_1 . Montrer qu'il existe u et v dans $\mathbb{Z}$, tels que $n = 105u = 81v + 6$.
 Dans ce cas, u et v sont les nombres de périodes effectuées par A et B entre J_0 et J_1 .
- 106 A) 1) c) Raisonner par récurrence.
 B) 2) En base deux, les symboles ou « chiffres » sont 0 et 1.
 Ils se déterminent facilement si l'on écrit le nombre x = deux mille quatre comme somme de puissances de deux.
 Ainsi $x = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 4$
 $= 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^2$
 Donc $x = 11\ 111\ 010\ 100^2$.
- 107 4) b) Si x, y, z sont impairs, montrer que $x^2 + y^2 - z^2 \equiv 1 \pmod{2}$.
 c) Prouver qu'il est impossible que x, y et z soient tous pairs ; que deux des trois nombres soient pairs et l'autre impair.
 d) Montrer que, si x et y étaient impairs et z pair, on aurait $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4}$ et $z^2 \equiv 0 \pmod{4}$.

- 108* A) 1) b) Développer $(5k + 2)^2$ pour k quelconque.
 c) Développer $(13k + 4)^2$ pour k quelconque.
 B) 1) Pour le PGCD de plusieurs entiers, voir l'exercice 49.

109* A) 2) b) D'après 2) a) :

$$10^n a = 10^n b \left(x_0 + \frac{x_1}{10} + \dots + \frac{x_n}{10^n} \right) + r_n$$

Montrer que $10^n \left(x_0 + \frac{x_1}{10} + \dots + \frac{x_n}{10^n} \right) = q$ est un entier, et que $r_n < b$.

c) D'après l'écriture, $r_n = 0$, donc $10^n a$ est un multiple de b ...

B) 2) a) Montrer par récurrence que, pour tout $k \geq 0$, $r_{q+k} = r_{q+p+k}$.

4) Exemple, avec $\frac{5}{12}$.

On examine les puissances de 10 modulo $b = 12$.

$$10^0 \equiv 1(12) ; 10^1 \equiv 10(12) ; 10^2 \equiv 4(12) ; 10^3 \equiv 4(12).$$

On en déduit $q = 2$ et $p = 1$ (puisque $q + p = 3$). Donc la suite des décimales de $\frac{5}{12}$ est périodique de période 1 à partir de la 3^e décimale.

(Effectivement, $\frac{5}{12} = 0,416666 \dots$).

Chapitre 12

- 47 2) b) Effectuer la division euclidienne de u par p : soit r le reste. Établir que $r \neq 0$, $r \neq 1$, $r \neq p - 1$, $r \neq x$ et que r est unique.

54* Deux questions :

- Que dire du nombre de changements d'état effectués sur les lampes allumées à la fin de l'histoire ?
- Que signifie que la rampe n° n change d'état à la manipulation k ?

56 1) Prouver que $\binom{p-1}{k} \equiv -\binom{p-1}{k-1} \pmod{p}$, avant d'amorcer le raisonnement par récurrence.

2) Que devient la relation $s \times \binom{p}{s} = p \times \binom{p-1}{s-1}$ (voir l'exercice 55) lorsque $p = s \times q$?

58 2) b) $n + 1$ objets : $q_1, q_2, \dots, q_{n+1}$ n tiroirs : les nombres impairs inférieurs à $2n$ (à contrôler).

59* 1) Soit $N, N + 1, \dots, N + n - 1$, n entiers consécutifs. Considérer les restes modulo n .

Si 0 n'est pas un tel reste, obtenir une contradiction en considérant :

- les n objets $N, N + 1, \dots, N + n - 1$;
- les $n - 1$ restes restants $1, 2, \dots, n - 1$.

63* Décomposer 2 450 en produit de facteurs premiers et dresser la liste de tous les cas possibles.

Exploiter alors la réponse du fils « Il me manque une donnée » : la situation pour lui est nécessairement ambiguë.

Chapitre 13

67 1) Utiliser le théorème de Fermat pour obtenir $a^{n-1} \equiv 1(p)$, $a^{n-1} \equiv 1(q)$ et $a^{n-1} \equiv 1(r)$.
 Dès lors, si trois nombres premiers distincts p, q et r divisent $a^{n-1} - 1$, alors...

69* 3) Justifier que p et x sont premiers entre eux et appliquer le théorème de Fermat : $x^{p-1} \equiv 1(p)$ lorsque p est de la forme de $6n + 5$.
 • Si $x \equiv 1(p)$, que dire de $x^2 + x + 1$ modulo p ?

70 2) L'un des deux entiers de la décomposition peut être égal à km .
 3) Montre que si p est un facteur premier de n , alors p divise chaque terme de la somme (si on suppose que $n = a + b$ et que n ne divise ab , alors p divise a et b).

71* 2) Montrer que si n est dans le tableau :
 $4n + 1 = 4(2k + 1)N + (2k + 2)^2$, d'où...

Réciproquement, montrer que si $4n + 1$ est composé, on peut écrire :

$$4n + 1 = (2p + 1)(2q + 1) \text{ avec } p \leq q.$$

Poser alors $q = p + s$, avec $s \geq 0$ et montrer que s est pair.

72* 1) a) Poser $p = 2q + 1$ et utiliser que $(2a)^2 \equiv -1(p)$, d'où $(2a)^{2q} \equiv \dots(p)$.
 b) Montrer que p est premier avec $2a$ et appliquer Fermat.

75 1) Théorème de Fermat

2) a) Si $k = qs + r$ avec $0 \leq r < s$, alors $a^k = (a^s)^q \times a^r$, d'où...

b) Si $1 \leq r$, obtenir une contradiction.

76 2) a) Vérifier que $2^{2n+1} \equiv 1(p)$.

b) Justifier l'égalité : $(2^{2r})^{2n-r} = 2^{2n}$.

En déduire que l'hypothèse $2^{2r} \equiv 1(p)$ pour $0 \leq r < n$, conduirait à une contradiction.

4) Montrer que les nombres premiers divisant F_5 sont de la forme $64k + 1$, $k \geq 1$. Vérifier que, pour :

- $k = 1, 2, 5, 6, 8$, ce nombre est non premier ;
- $k = 3, 4, 7, 9$, $64k + 1$ est premier mais ne divise pas F_5 ;
- $k = 10 \dots$ (conclusion).

77* 1) b) $a^p = (x + 1)^p x^{p(q-2)}$. Utiliser alors la congruence $(x + 1)^p \equiv x^p(q)$, puis le résultat 1) a).

Rappel utile : l'ordre de a modulo p divise tout entier $n \geq 1$ tel que $a^n \equiv 1(p)$.

78* 2) a) Raisonner ainsi : soit m un diviseur de $p^k \times q$.

- cas 1 : m et q sont premiers entre eux, donc...
- cas 2 : p divise m . Écrire alors $m = p^\alpha m_1$ avec $\alpha \geq 1$ et p et m_1 premiers entre eux.

79* 2) a) Que vaut $\sigma(N)$? (Utiliser l'exercice 78.)

b) • Si $s \neq 1$, on connaît deux diviseurs stricts (au moins) de q : 1 et s .

80* B) 3) Prouver que :

$$\frac{\sigma(N)}{N} = \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q^\beta}\right).$$

68* 2) L'image de B par s est le point B' du cercle $\mathcal{C}'$ circonscrit au carré $AEFG$ tel que : $(\overline{AB}, \overline{AB'}) = \theta [2\pi]$, où θ est l'angle de la similitude s (voir question 1)).

Procéder de même pour les images de C et D .

3) Configuration des deux cercles sécants.

71 2) La similitude s_1 de centre A qui transforme B en D a pour écriture complexe : $z' - a = u(z - a)$ où $u \in \mathbb{C}^*$.

Comme $s_1(B) = D$, on a $u = \dots$ Idem pour la seconde.

79* 3) a) $\mathcal{C}$ est de centre O et passe par A donc $\Gamma = s(\mathcal{C})$ est de centre $s(O)$ et passe par $s(A)$, d'où $\Gamma \dots$

b) Utiliser la configuration des deux cercles sécants après avoir déterminé l'angle de s .

85 Examiner la figure a) : que dire de $(\overline{OM}, \overline{ON})$?

Examiner la figure b) : que dire de $(\overline{MN}, \overline{MO})$?

88* 1) Exprimer BR en fonction de $a = BC$ et $\cos B$ et PB en fonction de $c = AB$ et de $\cos B$.

89* Soit s la similitude de centre A qui transforme B en C . Quelle est l'image de D par s ?

Comparer le rapport et l'angle de la similitude de centre D qui transforme B en F avec le rapport et l'angle de s .

90* Utiliser la configuration des cercles sécants.

94 $s_{\mathcal{Q}} : z \mapsto z_1 = \bar{z}$

$$z_1 \xrightarrow{t_{\vec{v}}} z_1 + \alpha + i\beta = z'$$

d'où $\sigma : z \mapsto z'$ (le reste est calculatoire).

2) L'écriture proposée est celle d'un antidéplacement ; si $z = x + i\frac{\beta}{2}$ (x réel), que vaut z' ? Interpréter.

103* 2) S a pour écriture complexe $z' = \omega z$ avec $\omega \in \mathbb{C}^*$ comme $S(A) = B$ et $S(C) = D$, $\omega = \dots$, d'où...

3) Revoir la définition de S' et le théorème 5 du cours (« il existe une unique, etc. »).

104* A) 2) Examiner l'action de $r' \circ r$ sur E et A .

B) 2) Pour montrer que $s_2 \circ s_1$ est de centre I , montrer simplement que I est fixe par $s_2 \circ s_1$.

3) • $r\left(I, \frac{\pi}{2}\right)B = ?$

• $s_1(Q) = ?$ et $s_2(s_1(Q)) = ?$

Dans un quart de tour que dire d'une droite et de son image ?

105* B) Évaluer $(\overline{AO}, \overline{AC})$ (facile) et songer que AO est égal aux deux tiers de la hauteur du triangle équilatéral ABC .

C) 2) Déterminer :

- le rapport et l'angle de $t_{\overline{CB}} \circ s_1$
- puis le rapport et l'angle de $s_2 \circ (t_{\overline{CB}} \circ s_1)$.

106* B) 1) Le rapport de s est $\frac{O_1 I}{O_3 I} = \frac{R_1}{R_3}$ et l'angle de s : $(\vec{IO_3}, \vec{IO_1})$.

Procéder de même pour s' et σ .

Chapitre 14

35 3) a) Centre de C_k : $\Omega_k(0, 0, k)$; rayon de C_k : $r_k = \sqrt{9-k}$.

b) Les cercles C'_k ont même rayon que C_k .

c) Pour une élévation constante (par exemple 100 m), le déplacement par rapport au sol est moins important lorsque les courbes de niveau sont resserrées que lorsqu'elles sont espacées. Poursuivre...

4) c) Étudier les variations de α et θ en fonction de k .

36* 1) a) Le résultat à obtenir : $H\left(\frac{x-y}{2}, -\frac{(x-y)}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

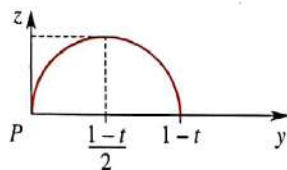
3) Il s'agit de déterminer l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $MH^2 = MH'^2$ (voir Piste).

37 2) b) Si M est barycentre du système : $\{(N, \lambda), (P, 1-\lambda)\}$, alors $\vec{OM} = \lambda \vec{ON} + (1-\lambda) \vec{OP}$.

connaissant les coordonnées de N et de P ,...

c) Utiliser ce résultat du chapitre 7 : « La droite (NP) est l'ensemble des barycentres des points N et P . »

38* 2) b) La section est une parabole :



3) Dédire de ce qui précède qu'étant donné trois réels positifs a, b et c tels que $a+b+c=1$, alors : $abc \leq \frac{1}{27}$ avec égalité si, et seulement si : $a=b=c=\frac{1}{3}$.

41* Montrer que f est définie sur l'ensemble D :

$D = \{(x, y), |x| \leq 1 \text{ ou } (|y| \leq 1)\}$ (assez facile).

Que se passe-t-il, par exemple, pour :

• $0 \leq x \leq 1$ et $y \leq x$?

• $y \geq 1$ et $0 \leq x \leq 1$?

42* 3) Noter Γ le cercle contenu dans $\mathbb{E}$ et d'axe Δ .

a) Montrer que P rencontre Γ en deux points diamétralement opposés sur Γ, U et V .

b) Exploiter que Δ est la médiatrice de $[U, V]$.

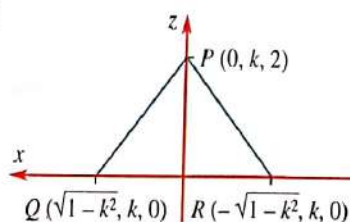
4) a) Appliquer 3) a) au plan P_M .

c) Prouver que $P_M \cap \mathbb{E} = P_M \cap s$.

43* 1) a) Observer que $1-y^2 \geq 0$ pour multiplier membre à membre

l'inégalité : $0 \leq \left(1 - \frac{z}{2}\right)^2 \leq 1$.

3) a)



6) c) Le volume du bouchon est calculé par

$V = \int_{-1}^1 s(y) dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma(y) dy$; or cette dernière intégrale est le volume du cylindre égal à...

44* A) 3) (H) est la branche d'hyperbole d'équation :

$$\begin{cases} YZ = \frac{1}{2} \\ Y > 0 \end{cases} \text{ dans le repère } (O, \vec{u}, \vec{v}).$$

C) 4) a) Le résultat à obtenir $M(x, y, z)$ avec :

$$\begin{cases} x = \lambda \sqrt{2} \cos \theta - (1-\lambda) \sqrt{2} \sin \theta \\ y = \lambda \sqrt{2} \sin \theta + (1-\lambda) \sqrt{2} \cos \theta \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

5) Encore la définition d'une droite comme ensemble des barycentres de deux points distincts de cette droite.

Toujours en panne ?

Chapitre 1

20 Comme $\alpha = \frac{\ell_2 - \ell_1}{2}$, $\ell_1 + \alpha = \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} = \ell_2 - \alpha$, donc les intervalles $I =]\ell_1 - \alpha, \ell_1 + \alpha[$ et $J =]\ell_2 - \alpha, \ell_2 + \alpha[$ sont bien disjoints.

Or, puisque ℓ_1 et ℓ_2 sont supposés être deux limites de la suite (u_n) , l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_1 et J contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_2 . Que se passe-t-il à partir du rang $n_0 = \max(n_1, n_2)$?

22 À partir d'un certain rang n_0 , tous les termes de la suite sont situés dans $I =]\ell - 1, \ell + 1[$.

Considérer le plus grand des nombres $u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, \ell + 1 \dots$

$$63 \quad 2) u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Bien observer que tous les termes se simplifient, sauf le premier et le dernier.

65 1) Dans l'expression $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$, il y a n termes et le plus petit est $\frac{1}{2n}$. Donc $S_{2n} - S_n \geq n \times \frac{1}{2n}$.

2) Si l'on suppose que, k étant fixé, il existe n tel que $S_n \geq k$, considérer la somme S_{4n} et montrer que $S_{4n} \geq k + 1$. Conclure.

77 2) Il s'agit de « d'inverser » la relation $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

On en tire $v_n(u_n + 3) = u_n - 1$, d'où $u_n(v_n - 1) = -3v_n - 1$.

C'est presque terminé.

85 3) d) On pourra établir, par récurrence, que $2^n \geq n^2$ à partir d'un certain rang.

$$88 \quad C) 3) |b_{n+1} - \varphi| = \left| \sqrt{b_n + 1} - \sqrt{\varphi + 1} \right| = \frac{|b_n - \varphi|}{\sqrt{b_n + 1} + \sqrt{\varphi + 1}}$$

après avoir multiplié par l'expression conjuguée.

$$\text{Ainsi, } |b_{n+1} - \varphi| = \frac{|b_n - \varphi|}{b_{n+1} + \varphi}.$$

Or, $b_{n+1} \geq \varphi \geq \frac{3}{2}$, donc $b_{n+1} + \varphi \geq 3 \dots$

$$D) 3) c_{n+1} - \varphi = \frac{c_n^2 + 1}{2c_n - 1} - \varphi = \frac{c_n^2 - 2c_n\varphi + \varphi + 1}{2c_n - 1}$$

Or $\varphi + 1 = \varphi^2$ et $2c_n - 1 \geq 2\varphi - 1 \geq 2$ (justifier).

$$\text{Donc } c_{n+1} - \varphi = \frac{c_n^2 - 2c_n\varphi + \varphi^2}{2c_n - 1} \leq \dots$$

89 4) c) Un peu plus de détails :

• puisque $0 \leq p_n \leq q_n$, appliquer (ii) avec $a = p_n$ et $b = q_n$; on

$$\text{obtient } p_n < \frac{2p_nq_n}{p_n + q_n} < q_n.$$

Remarquer alors que $\frac{2p_nq_n}{p_n + q_n} = q_{n+1}$;

• puisque l'on sait à présent que $0 \leq p_n < q_{n+1}$, appliquer (i) avec $a = p_n$ et $b = q_{n+1} \dots$ Qu'obtient-on ?

Chapitre 2

8 1) Avec la factorisation indiquée, l'expression entre crochets a pour limite 1 (le vérifier). Le résultat s'en déduit.

2) Une factorisation analogue donne $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \times \frac{[\dots]}{[\dots]}$.

Prouver que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\dots]}{[\dots]} = 1$.

$$33 \quad f(x) - (x+1) = \frac{(x^2 + 2x + 3) - (x+1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x+1)} \\ = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x+1)}$$

La limite en $+\infty$ du dénominateur est relativement « trouvable ».

70 « Essayer » la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$ ou encore $g : x \mapsto \cos(\pi x)$.

78 2) Soit $\varphi : x \mapsto f(x) + f(-x)$ et $\Psi : x \mapsto f(x) - f(-x)$.

Alors $\varphi'(x) = f'(x) - f'(-x)$ et $\Psi'(x) = f'(x) + f'(-x)$.

a) Si f est paire, que vaut $\Psi(x)$? $\Psi'(x)$?

b) Si f est impaire, que vaut $\varphi(x)$? $\varphi'(x)$?

3) a) Si f' est impaire, que vaut $\Psi'(x)$? Que peut-on en déduire pour $\Psi(x)$?

b) Si f' est paire, que vaut $\varphi'(x)$? Que peut-on en déduire pour $\varphi(x)$?

$$129 \quad 4) [f(x) - 2x] = \sqrt{x^2 - 1} = -x = f(-x) = -\frac{1}{f(x)}$$

d'après (1).

Conclure à l'aide de la question 2).

$$140 \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2}.$$

Utiliser alors 3) a).

$$141 \quad 2) a) h'(x) = f'(x) - \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}.$$

Prouver que $h'(x) = 0$ et conclure.

Chapitre 3

$$56 \quad \frac{e^{x^2} - 1}{x} \text{ est le taux d'accroissement en } 0 \text{ de la fonction}$$

$$\varphi : x \mapsto e^{x^2}.$$

Or $\varphi'(x) = 2xe^{x^2}$, donc $\varphi'(0) = \dots$

$$108 \quad 2) b) \varphi'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$= -2ke^{-kx}(1 - e^{-kx}) - f'\left(\frac{1}{k} \ln 2\right) \text{ (Pourquoi ?)}$$

En fait, la seule écriture : $\varphi'(x) = f'(x) - f'\left(\frac{1}{k} \ln 2\right)$ permet le calcul de

$$\varphi'\left(\frac{1}{k} \ln 2\right).$$

2) c) $\varphi''(x) = f''(x)$. Or $f'(x)$ s'écrit :

$$f'(x) = -2ke^{-kx} + 2ke^{-2kx}.$$

Montrer que $f''(x)$ change de signe au « point » $\frac{1}{k} \ln 2 \dots$

$$110 \quad 3) b) \varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - f'\left(\frac{\ln(-k)}{B}\right)$$

(Justifier cela).

$$\varphi''(x) = f''(x) = AkB^2(1 + ke^{-Bx})e^{-Bx} + ke^{-Bx}$$

(à vérifier).

Vérifier alors que φ'' change de signe pour $x = \frac{\ln(-k)}{B}$.

$$118 \quad 3) b) \text{ Soit } n_0 \text{ un entier supérieur à } ae. \text{ Posons } B = \frac{n_0}{ae} > 1.$$

$$\text{Alors } \frac{n!}{a^n} \geq \frac{1}{a^n} \left(\frac{n}{e}\right)^n = \left(\frac{n}{ae}\right)^n.$$

Si $n \geq n_0$, établir alors que $\frac{n!}{a^n} \geq B^n$.

$$124 \quad 4) b) \mathcal{D} \text{ coupe } \mathcal{C}_k \text{ au point d'abscisse } x \text{ à condition que}$$

$$e^{-x} = \frac{a+2}{k} \text{ (si } \mathcal{D} \text{ a pour équation } y = x+a, \text{ avec } a \neq -2).$$

• Si $a > -2$, $a+2 > 0$, donc pour tout $k > 0$, $x = -\ln\left(\frac{a+2}{k}\right)$;

$\mathcal{D}$ rencontre toutes les courbes $\mathcal{C}_k$ telles que $k > 0$ une fois et une seule ;

• si $a < -2$, raisonner de même.

$$127 \quad 2) a) c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \text{ Or d'après l'inégalité (1) du}$$

$$1) b), \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}.$$

On en déduit $c_{n+1} - c_n \geq 0$.

2) c) Toujours d'après (1), $\ln(n-1) - \ln n \leq -\frac{1}{n}$ (on l'établit en posant $k = n-1$).

On déduit alors du 2) b) : $c_n \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 1$.

$$128 \quad 2) a) g'(x) = f'(x) + \frac{1}{n!} \text{ (bien remarquer que } n! \text{ est une constante).}$$

$$\text{Ainsi, } g'(x) = \frac{1}{n!} - \frac{x^n}{n!} e^{-x} = \frac{1}{n!} [1 - x^n e^{-x}].$$

Les inégalités $0 \leq x^n \leq 1$ et $0 \leq e^{-x} \leq 1$, valables sur $[0, 1]$, permettent de conclure.

Chapitre 4

57 La valeur exacte de l'intégrale est :

$$\pi \frac{\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{\pi^2}{18} - 1\right).$$

59 La valeur exacte de l'intégrale est :

$$3(\ln 3)^2 - 6 \ln 3 - 2(\ln 2)^2 + 4 \ln 2 + 2.$$

$$67 \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}.$$

Compte tenu de ce que $T = \frac{1}{50}$, la réponse finale est : $I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$.

$$96 \quad 7) a) S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$= \int_0^1 \dots + \int_1^2 \dots + \dots + \int_n^{n+1} \dots = \int_0^{n+1} \ln(1 + e^{-2t}) dt$$

Donc $S_n = F(n+1)$.

b) Conclure à l'aide de la question 4).

$$99 \quad 3) b) u_n + u_{n+2} = \int_0^1 \frac{t^n + t^{n+2}}{1 + t^2} dt \text{ (à vérifier).}$$

$$\text{Ainsi, } u_n + u_{n+2} = \int_0^1 \frac{t^n(1 + t^2)}{(1 + t^2)} dt = \dots$$

$$100 \quad 4) a) v_n + nu_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1 + x^n} dx + n \int_0^1 \frac{1}{1 + x^n} dx = \dots$$

108 • Pour montrer que $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ dans le cas où $a \leq b$; partir de l'inégalité $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ que l'on intégrera sur $[a, b]$.

Chapitre 5

On obtient $-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Conclure alors.

On obtient finalement :

$$|I - R_n| \leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dx.$$

Utiliser alors la question 1) et intégrer les inégalités.

112 2) Après intégration par parties, on obtient :

$$I_n = \sqrt{2} - 2n \int_0^1 x^{2n-1} \sqrt{1+x^2} dx.$$

L'intégrale obtenue s'écrit $\int_0^1 \frac{x^{2n-1}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} dx$,

soit encore $\int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

117 2) a) Si l'on suppose que :

$$a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n, \text{ alors :}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} I_{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} \left[-I_n + \frac{1}{(n+1)!} \right]. \end{aligned}$$

Vérifier et adopter.

118 3) Si l'on suppose, au rang n , que $I_n(a) = 1 - \left(\sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \right) e^{-a}$,

alors, d'après 2) : $I_{n+1}(a) = I_n(a) - \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^{-a} = \dots$

120 C) 3) On obtient, d'après le schéma de composition :

$$F'(x) = a \cos x \times \sqrt{a^2 - (a \sin x)^2}.$$

Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, utiliser alors le fait que $\sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$.

124 B) 2) d) Puisque, sur $]0, \frac{\pi}{2}[$,

$\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$, on en déduit $0 < \frac{2t}{\pi} \leq 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \leq t$, donc :

$$\frac{1}{t} \leq \frac{1}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \leq \frac{\pi}{2t}.$$

Comme de plus, $\frac{t^2}{2\pi} - t \leq 0$ sur $]0, \pi[$ (à vérifier), alors :

$$\frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{t} \geq \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \geq \frac{\pi}{2} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right).$$

On en tire $-\frac{\pi}{2} + \frac{t}{4} \leq g(t) \leq \frac{t}{2\pi} - 1$.

L'encadrement voulu n'est plus très loin...

22 3) Pour l'allure des courbes représentatives, commencer par celle de $x \mapsto B e^{-kAx}$, puis en déduire celle de $x \mapsto 1 + B e^{-kAx}$ et enfin celle de $y(x)$.

29 1) On obtient :

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{0,2}{60} + \frac{0,002}{60} f(t) = \frac{10^{-4}}{3} (100 - f(t)). \text{ (À vérifier.)}$$

3) Résoudre l'inéquation $f(t) \geq 0,02$.

38 4) Si t est en minute, l'expression de $Q(t)$ est

$$Q(t) = \frac{180A}{\ln 2} \left(1 - 2^{-\frac{t}{180}} \right).$$

(Vérifier cette expression.)

La valeur de $Q(t)$ à long terme est la limite de $Q(t)$ en $+\infty$.

42 2) b) D'après a), il existe une constante C telle que, pour tout t ,

$$\omega^2 [y(t)]^2 + [y'(t)]^2 = C.$$

La condition $y(0) = y'(0) = 0$ donne : $C = 0$.

Alors, pour tout t , $\omega^2 [y(t)]^2 + [y'(t)]^2 = 0$.

À quelle condition la somme de deux carrés est-elle nulle ?

44 On a $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\beta^u - 1}{u} =$ nombre dérivé de la fonction

$$\begin{aligned} u \mapsto \beta^u &= e^{u \ln \beta} \text{ en } 0 \\ &= (\ln \beta). \end{aligned}$$

Avec $\beta = \frac{A}{y}$, il en résulte que $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\left(\frac{A}{y}\right)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \ln\left(\frac{A}{y}\right)$.

Chapitre 6

119 Poser (pour simplifier) $u = z_{AB}$ et $v = z_{AD}$. Exprimer alors z_{AE} et z_{AF} en fonction de α , u et v et vérifier que $z_{AF} = e^{i\alpha} z_{AE}$, il n'a plus qu'à interpréter.

121 Attention : dans l'écriture $\ell - ik$, ℓ et k ne sont pas réels *a priori*.

131 Si un point M tourne dans le sens trigonométrique sur le cercle de centre $\Omega(\omega)$, de rayon R à la vitesse de rotation constante de 1 tour par seconde et si, à l'instant $t = 0$, il occupe la position M_0 , alors vérifier :

• qu'à l'instant t ,

$$\text{l'angle } (\overrightarrow{\Omega M_0}, \overrightarrow{\Omega M}) = 2\pi t [2\pi];$$

• que l'affixe de M_0 peut s'écrire :

$$z_0 = \omega + R e^{i\theta_0}, \text{ et qu'alors l'affixe de } M \text{ à l'instant } t \text{ est } \omega + R e^{i(t + \theta_0)}.$$

134 4) Avec $\ell = 0,5$ et $r_0 = 1,2$ on obtient :

$$\cos \theta' = 0,19 \text{ et } \cos \varphi = 0,9125.$$

La calculatrice va donner : $\theta'_1 = 79,0472^\circ$ et $\varphi = 24,1468^\circ$ ce qui va livrer une première solution θ_1 et θ'_1 .

Examiner celle correspondant à $\varphi = -24,1468^\circ$ et $\theta'_2 = -\theta'_1$.

Montrer qu'elle permet d'obtenir une seconde solution (θ_2, θ'_2) et examiner en quoi l'égalité $\theta_1 + \theta_2 = 2\alpha$ assure une certaine symétrie dans la figure.

135 2) b) On doit obtenir :

$$C_n + iS_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times e^{i\left(\frac{nx}{2}\right)}$$

d'où...

3) $\sin\left(\frac{n+1}{2} \cdot \frac{\pi}{n}\right) = \cos \frac{\pi}{2n}$; vérifier.

4) Soit $f(t) = \sin \pi t$ et la subdivision de l'intervalle $[0, 1]$, $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n},$

..., $\frac{n-1}{n}$.

Que représente graphiquement la somme : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$?

Se reporter alors au chapitre 4 (partie 5. de la rubrique *Au cœur des problèmes*)

136 1) a) Centre du cercle $\mathcal{C}$? Le rayon de $\mathcal{C}$ est $AA' = |2\omega|$.

b) On a $\omega^2 - \bar{\omega}^2 = 4i$ puisque $A \in \mathcal{H}$.

Il est donc équivalent de dire : $z^2 - \bar{z}^2 = 4i$ ou $z^2 - \bar{z}^2 = \omega^2 - \bar{\omega}^2$.

Chapitre 7

43 Comparer $MA^2 + MC^2$ et $MB^2 + MD^2$, lorsque $ABCD$ est un rectangle.

53 1) Que dire de $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA}$? de $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{OA}$?

3) $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{HN} \cdot \overrightarrow{AN}$.

Si (ON) était parallèle à $\mathcal{P}$, montrer que l'on aurait $\overrightarrow{ON} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN}) = 0$.

Pour montrer que $M \in \mathcal{C}$, établir que :

$\overrightarrow{NA}$ est orthogonal au plan $(ONH) = \text{plan}(OBM)$.

$\overrightarrow{BM}$ est orthogonal au plan $(OAN) = \text{plan}(OAM)$.

61 3) b) Utiliser le théorème de Thalès pour prouver que (HN) est parallèle à (SP) .

68 B) Pour le cube : $\frac{\pi}{2}$; pour le tétraèdre régulier : θ tel que $\cos \theta = \frac{1}{3}$.

C) 3) a) Prouver que :

$$A_1 A_3 = 2R \sin \frac{2\pi}{n} \quad \text{et} \quad a = A_2 A_3 = 2R \sin \frac{\pi}{n}.$$

Utiliser alors la formule de duplication du sinus.

4) Considérer dans un cube $ABCDEFGH$ la pyramide de sommet A et de base le triangle BDE .

69 3) b) $3\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{EG} = -EG \times GB \times \cos \widehat{BGE} - GF^2 + GE^2$.

76 5) Montrer qu'un tétraèdre est orthocentrique si, et seulement si, l'hexaèdre des milieux (exercice 63) est tel que $IMJN$, $JLIK$ et $KNLM$ sont des rectangles.

6) Utiliser la caractérisation précédente et celle du tétraèdre équilatéral de l'exercice 65.

77 2) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DB} - x\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DF} = DB^2$, d'où $MB^2 = \dots$

Montrer que lorsque $x = \frac{2}{3}$, M est le projeté orthogonal de B sur (DF) .

Utiliser alors la question 1) pour montrer que M est aussi le projeté orthogonal de E et G sur (DF) .

4) Pour $x = \frac{1}{2}$, M est le centre du cube et l'on a $\cos \theta_0 = -\frac{1}{3}$.

78 A) 2) a) $\overrightarrow{LP} \cdot \overrightarrow{LQ} = LO^2 - \frac{PQ^2}{4}$ (théorème de la médiane).

b) $\overrightarrow{LA} \cdot \overrightarrow{LB} = (\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{PA}) \cdot (\overrightarrow{LQ} + \overrightarrow{QB}) = \dots$

B) 2) $\overrightarrow{LA}(a - R \cos \theta, b - R \sin \theta, c)$.

$\overrightarrow{LM}(x - R \cos \theta, y - R \sin \theta, z)$ d'où $\overrightarrow{LA} \cdot \overrightarrow{LM} = 0$ s'écrit...

Chapitre 8

58 Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur de Δ : on a $\vec{v} \perp \vec{n}_1$ et $\vec{v} \perp \vec{n}_2$.

• $\Delta \parallel \mathcal{P}$ signifie $\vec{v} \perp \vec{n}$ soit $\vec{n}, \vec{n}_1, \vec{n}_2$ coplanaires.

• $\Delta \perp \mathcal{D}(A, \vec{u})$ signifie $\vec{v} \perp \vec{u}$ soit $\vec{u}, \vec{n}_1, \vec{n}_2$ coplanaires.

À chaque fois, on mobilise le résultat suivant (faire une figure) : les vecteurs orthogonaux à un même vecteur non nul sont coplanaires.

70 3) Le point cherché est le point P .

81 Obtenir :

$$\frac{V}{\frac{24}{5}} = d_A + d_B ; \frac{V}{8} = d_B + d_C \quad \text{et} \quad \frac{V}{3} = d_C + d_A$$

en supposant V exprimé en litre (par exemple), les temps en heures et les débits en litres par heure (là, on n'a plus le choix).

Éliminer d_B et d_C pour obtenir $\frac{V}{d_A}$.

83 2) a) En utilisant 1) vient facilement

$$p + q + r = 2(\alpha + \beta + \gamma), \text{ puis}$$

$$p + q + r = 2(c \cos C + c \cos A \cos B).$$

Exprimer alors $\cos C$ en remarquant que $C = \pi - (A + B)$.

84 2) Si $H = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ et si ABC est non rectangle alors :

• $\cos A \cos B \cos C \neq 0$;

• remplacer α, β, γ par leurs quotients par $\cos A \cos B \cos C$.

Après, vient la loi des sinus.

87 4) Remarquer que $\Delta = \vec{w} \cdot \vec{n}_3$ et utiliser que :

$$\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{w} \neq \vec{0} \\ \vec{n}_3 \neq \vec{0} \\ \vec{w} \text{ non orthogonal à } \vec{n}_3 \end{cases}.$$

92 3 a) On peut raisonner par l'absurde :

$$\begin{aligned} (OA_1) &\subset Q_1 \\ (OA_2) &\subset Q_2 ; \end{aligned}$$

si $Q_1 = Q_2$, alors $Q_1 = Q_2 = P_3$.

Montrer qu'on aurait alors $P_1 \cap P_2$ orthogonal à P_3 et obtenir une contradiction.

93 3) En notant y_B l'ordonnée de B (qu'il est inutile de calculer) obtenir que : $\vec{OA}(\cos \theta_1, 0, \sin \theta_1)$, $\vec{OB}(\cos \theta_2 \cos \varphi, y_B, \sin \theta_2)$ et évaluer de deux manières différentes le produit scalaire $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$.

94 1) 1) Passer par : $\vec{MM'} = y \vec{u'} - x \vec{u} + \vec{AA'}$ (à justifier).

III) 1) Pour montrer que D et D' ne sont pas sécantes, utiliser des représentations paramétriques (attention à la désignation des paramètres).

III) 2) Sans faute de calcul, la Piste mène à :

$$s = \frac{29}{61} \quad \text{et} \quad t = -\frac{42}{61}.$$

95 4) a) $\vec{n}_1(1, 0, a)$ et $\vec{n}_2(0, 2, a)$.

c) « Le » vecteur directeur de Δ est orthogonal à $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

Tirer du 4) b), qu'il est colinéaire à $-a \vec{u} + \vec{v}$ et conclure.

Chapitre 9

18 2) $P(i) = k \times \frac{1}{1+i}$ pour $0 \leq i \leq 9$.

La condition $P(0) + P(1) + \dots + P(9) = 1$

$$\text{s'écrit } k \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{10} \right) = 1.$$

$$\text{On en tire } k = \frac{2\,520}{7\,381}.$$

Alors, si X est le gain, on exprime le gain moyen par :

$$E(X) = \sum_{i=0}^9 x_i p_i = \sum_{i=0}^9 \frac{k}{i+1} \times 135(i+1) = 1\,350k \dots$$

53 1) b) $Y = Y_1 + \dots + Y_n$ représente le nombre total d'objets dans B_1 .

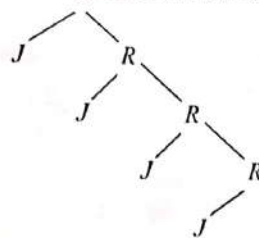
Le nombre d'objets moyens dans B_1 est $E(Y)$. Utiliser la linéarité.

2) b) Loi de B_i : l'événement $(B_i = i)$ est l'intersection, pour $1 \leq j \leq n$ des événements indépendants $A_j =$ « l'objet j n'est pas dans B_i ».

Ainsi $P(B_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. Justifier cela.

c) Pour la limite de $\frac{u_n}{n}$, voir le chapitre 3, Au cœur des problèmes, partie 3. (problème résolu).

57 Un arbre possible a l'allure suivante :



61 2) e) En posant $\alpha = p - r$, nous avons obtenu dans le problème résolu partie 3. la loi du génotype d'un enfant de la 1^{re} génération : les probabilités des trois génotypes s'expriment uniquement à l'aide de α . On en déduit facilement la loi du phénotype.

63 3) Expliquer pourquoi, d'après 1), la proportion de l'allèle A à la génération 1, est $u^2 + \frac{1}{2}(2uv) + \frac{1}{2}(2uw)$.

Procéder de même pour les autres allèles et conclure.

71 2) b) $P(A_n) = P(\overline{F_1}) \times P(\overline{F_2}) \times \dots \times P(\overline{F_{100}})$

$$\text{Or pour tout } i(1 \leq i \leq n), P(F_i) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \dots$$

4) a) On pourra reprendre la démarche de la question 1) b) en remplaçant $\frac{3}{4}$ par a , puis par b .

Chapitre 10

57 L'inéquation $P - Q \leq 0$ est équivalente à :

$$p^2(p-1) \left(p - \frac{1}{3} \right) \leq 0.$$

60 1) Observer que $(\sqrt{3}-1)^2 = 2(2-\sqrt{3})$ et que $(\sqrt{3}+1)^2 = 2(2+\sqrt{3})$.

66 4) Représenter graphiquement le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ (c'est-à-dire $\{(x, y), 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$) et dans ce carré le domaine $|x-y| \leq t$ soit :

$$x-t \leq y \leq x+t \text{ (à démontrer)}.$$

69 4) Se convaincre de la propriété suivante :

« Si E se réalise en moyenne λ fois par unité de temps, le temps moyen d'attente entre deux réalisations de E est $\frac{1}{\lambda}$ ».

79 Prouver que :

$$P(X = n+1) = \frac{n!}{n^n}$$

$$P(X > k) = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{n^k}$$

pour $2 \leq k \leq n$.

84 3) Vérifier que $\frac{x-y}{2} \in S$ (défini à la question 3) signifie :

$$x + \frac{2\pi}{3} \leq y \leq x + \frac{4\pi}{3} \text{ ou } x - \frac{4\pi}{3} \leq y \leq x - \frac{2\pi}{3}.$$

Interpréter sur le graphique proposé.

85 4) Voir que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k + 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n$$

selon la formule du binôme.

6) Nombre de tirages possibles : 2^{2n} .

Nombre de cas favorables lorsque $A = E : 2^n$.

86 B) 2) La variable aléatoire S : « somme des trois nombres » est à valeurs dans $[0, 3]$ et sa fonction de répartition F est :

$$F(t) = P(S \leq t) = P(M(x, y, z) \in E_t).$$

Le préliminaire assure alors que $F(t) = V_t$.

Il reste à dériver.

87 B) 2) Pour $i \neq j$, l'événement $E_i \cap E_j$ est l'événement :

Les n points sont sur le demi-cercle Γ_i et les n points sont sur le demi-cercle Γ_j .

En particulier $A_i \in \Gamma_j$ et $A_j \in \Gamma_i$: il est facile de voir que cela ne peut se produire que dans deux cas :

- $A_i = A_j$
- A_i et A_j sont diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$.

(Éliminer ce dernier cas grâce à la condition $n \geq 3$.)

Enfin, pour estimer $P(A_i = A_j)$, voir par exemple l'exercice 64.

C) 3) La réalisation de l'événement $E_i \cap E_j$ implique en particulier que :

$$t_j \in [t_i, t_i + t] \text{ donc que } t_i \leq t_j;$$

$$t_i \in [t_j, t_j + t] \text{ donc que } t_j \leq t_i.$$

D'où...

On vérifie aisément que $0 \leq 2^r - 1 < 2^m - 1$, donc cette égalité est la division euclidienne de $2^n - 1$ par $2^m - 1$, et $2^r - 1$ est le reste.

b) Si $r_0, r_1, \dots, r_i$ sont les restes successifs dans l'algorithme d'Euclide écrit avec n et m , il n'est pas bien difficile d'établir que $2^{r_0} - 1, 2^{r_1} - 1, \dots, 2^{r_i} - 1$ sont ceux de l'algorithme d'Euclide écrit avec $2^n - 1$ et $2^m - 1$.

77 3) Les couples (a_{2k-1}, a_{2k}) tels que $a_{2k-1} \equiv a_{2k} \pmod{5}$ et $a_{2k-1} \neq a_{2k}$ sont :

$(0, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 0),$

$(6, 1), \dots$ Il y en a 10.

78 Si a_k et a_{k+1} sont permutés, on remplace, dans l'écriture du nombre, $10^{k-1}a_{k+1} + 10^{k-2}a_k$ par $10^{k-1}a_k + 10^{k-2}a_{k+1}$. L'erreur n'est pas détectée lorsque la différence est nulle modulo 97.

81 2) Montrer que les bonnes clés A_{12} et A_{11} et les clés transmises

$$a_{12} \text{ et } a_{11} \text{ vérifient le « système » : } \begin{cases} A_{11} - a_{11} \equiv b_k - a_k \pmod{11} \\ A_{12} - a_{12} \equiv k(b_k - a_k) \pmod{11} \end{cases}$$

Montrer alors qu'il existe entier u tel que :

$$(A_{11} - a_{11})u = 1 \pmod{11}.$$

En déduire que $k = (A_{12} - a_{12})u$, ce qui donne k ,

4 puis $a_k = b_k - (A_{11} - a_{11})$, ce qui permet de rétablir a_k .

108 B) 2) Les exposants sont les cinq PGCD trouvés.

109 B) 3) a) Les deux plus petits entiers p et q vérifiant $p \geq 1, q > 0$ et $r_q = r_{q+p}$ sont aussi, d'après A) 2) b) les deux plus petits entiers vérifiant $p \geq 1, q > 0$ et $10^q a \equiv 10^{q+p} a \pmod{b}$.

(« Avoir même reste » est synonyme de « être congru » modulo b .)

Or la condition $10^q + p a \equiv 10^q a \pmod{b}$ équivaut à $(10^q + p - 10^q)a$ est un multiple de b .

D'après le théorème de Gauss (a étant premier avec b), cette condition est encore équivalente à : $10^q + p - 10^q$ est un multiple de b , soit à : $10^q + p \equiv 10^q \pmod{b}$.

Chapitre 12

54 Un nombre impair de diviseurs : nous n'en dirons pas plus.

59 2) a) Décomposer 3 003 en facteurs premiers et considérer le produit de 12 entiers consécutifs.

(Il est par ailleurs facile de trouver 12 entiers consécutifs dont le produit n'est pas divisible par 3 003).

63 Montrer que les deux premières affirmations permettent de dire que le fils hésite entre :

– soit l'âge des filles est 5 et 10 et l'âge de M. Dupont 49 ;

– soit l'âge des filles est 7 et 7 et l'âge de M. Dupont 50.

Utiliser alors que l'information donnée par le capitaine (je suis plus âgé que M. Dupont) permet au fils d'obtenir la réponse.

Chapitre 11

25 2) b) D'après le « principe des tiroirs », deux au moins des nombres $u_0, u_1, \dots, u_p$ ont le même reste. On note u_m et $u_{m+\tau}$ les deux plus petits entiers vérifiant cette propriété. Puisque $0 \leq m + \tau \leq p$, alors $\tau \leq p$.

c) Puisque $u_{m+\tau} \equiv u_m \pmod{p}$, on a $a(m + \tau) + b \equiv am + b \pmod{p}$, donc $a\tau \equiv 0 \pmod{p}$. On en déduit aisément que $u_{\tau+k} \equiv u_\tau \pmod{p}$ pour $k \in \mathbb{N}$, puis que $u_0 \equiv u_\tau \pmod{p}$.

37 2) a) L'égalité s'écrit :

$$2^n - 1 = (2^n - 1)$$

$$= [(2^{m(q-1)} + 2^{m(q-2)} + \dots + 2^m + 1) \times 2^r] + (2^r - 1)$$

60 5) Utiliser que p étant premier avec $N!$, p n'est pas un nombre infé-

rieur ou égal à N ; donc $p > N$.

6) On vient de montrer que, pour tout entier $N \geq 3$, il existe un nombre premier p plus grand que N , de la forme $6n + 1$. Conclusion ?

71 2) Poser ensuite $k = p$, $s = 2N$ (car s est pair) et vérifier que $s = (2k + 1)N + k(k + 1)$ (la question 1) fait conclure immédiatement.

72 1) c) Écrire $4m + 3 = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ avec $p_1 \dots p_k$ premier.

Puisque $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont tous congrus à 1 modulo 4. Que dire de $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$?

2) Utiliser que $4a^2 + 1$ est impair pour montrer que si $4a^2 + 1$ est composé, trois cas sont à examiner :

$$\bullet 4a^2 + 1 = (4m + 3)(4n + 3)$$

$$\bullet 4a^2 + 1 = (4m + 3)(4n + 1)$$

$$\bullet 4a^2 + 1 = (4m + 1)(4n + 1).$$

Il n'y a plus qu'à éliminer.

77 1) a) Utiliser Fermat :

q est premier et q est premier avec x .

2) Application 1.

La démarche est analogue à celle utilisée dans l'exercice 69 (question 5) et

6).

78 2) b) Lister les diviseurs de $q : d_1, d_2, \dots, d_N$

Les diviseurs de $p^k q$ sont alors :

$$d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_N$$

$$pd_1 \quad pd_2 \quad \dots \quad pd_N$$

$$p^2 d_1 \quad p^2 d_2 \quad \dots \quad p^2 d_N$$

$$\dots$$

$$p^k d_1 \quad p^k d_2 \quad \dots \quad p^k d_N$$

Quelle est la somme de chaque colonne ?

Sommer alors tous les résultats obtenus.

79 2) b) Une fois obtenue $s = 1$, alors $q = 2^n - 1$, mais surtout combien y-a-t-il de diviseurs stricts de q ?

80 A) Une manière astucieuse d'utiliser la calculatrice est de lui demander la factorisation (en facteurs premiers), de $(1 + 3 + 3^2)$
 $(1 + 7 + 7^2) (1 + 11 + 11^2) (1 + 13 + 13^2) (1 + 22 + 22^2)$.

8) 3) Montrer que la suite $n \mapsto \frac{n}{n-1}$ est décroissante et prouver alors que :

$$\frac{p}{p-1} \times \frac{q}{q-1} \leq \frac{15}{8}.$$

Chapitre 13

68 2) Montrer que $S(B) = E$, $S(C) = F$ et $S(D) = G$.

3) Le point I est le second point d'intersection (autre que A) des deux cercles de la figure : tout est réuni pour appliquer le théorème 6.

79 b) Prouver que s est d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$ (ce serait $\frac{\pi}{2}$ dans la figure accompagnant l'énoncé de l'exercice.)

c) Le second point d'intersection autre que A des cercles $\mathcal{C}$ et Γ est le point B .

D'après le théorème 6, B , M , $s(M)$ sont alignés (avec bien sûr $s(M) \in \Gamma$), d'où...

88 1) Pour montrer que les triangles PBR et ABC sont semblables montrer que :

$$\frac{PB}{BR} = \frac{AB}{BC} \text{ et utiliser que } \widehat{ABC} = \widehat{PBR}.$$

89 Montrer à l'aide des similitudes que si :

$$\frac{AC}{AB} = k \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \theta \text{ alors,}$$

$$\frac{CE}{BD} = k, (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CE}) = \theta, \text{ puis que } \frac{DF}{DB} = k \text{ et } (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DF}) = \theta$$

Que dire alors des vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{FD}$?

90 Utiliser la similitude de centre A qui transforme Q_1 en B et R_1 en C .

Quel est son centre ? (Voir corollaire du théorème 6.)

103 3) Lorsque $ad = bc$, $z' = \frac{c}{a}z$ et $z' = \frac{d}{b}z$ sont des écritures complexes d'une même similitude directe de centre O .

4) Où est le centre de la similitude directe qui transforme A en B et C en D (toujours le corollaire du théorème 6) ?

104 B) 1) S_1 est de centre C , d'angle $\frac{\pi}{4}$, de rapport $\sqrt{2}$

S_2 est de centre B , d'angle $\frac{\pi}{4}$, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) $S_2 \circ S_1$ est la similitude directe d'angle $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, de rapport

$$\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1, \text{ d'où...}$$

105 B) Montrer que S_1 est d'angle $\frac{\pi}{6}$, de rapport $\sqrt{3}$ et S_2 d'angle $\frac{\pi}{6}$

et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C) 3) On a, par exemple :

$$S_1(I) = C, I \overline{CB}(C) = B \text{ et } S_2(B) = I, \text{ d'où...}$$

106 2) Utiliser la configuration des cercles sécants pour montrer que :

$$s(R) = P \text{ et } s'(P) = Q.$$

3) Quel est le second point d'intersection (autre que I) des cercles C_3 et C_2 ?

Que dire de ce point, d'un point de C_3 et de son image par σ ?

36 1) b) $HM^2 = \frac{(x+y)^2}{2} + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2$.

2) $H'M^2 = \frac{(x-y)^2}{2} + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2$.

38 3) a) Soit a, b et c les dimensions du parallélépipède et ℓ la longueur fixée de la ficelle.

Poser $x = \frac{a}{4\ell}$, $y = \frac{b}{4\ell}$ et $z = \frac{c}{4\ell}$. Que vaut $x + y + z$?

b) Montrer que la probabilité d'obtenir trois boules de couleurs toutes différentes est $6pqr$.

41 $f(x, y)$ est toujours égale à $\sqrt{1-y^2}$ ou $\sqrt{1-x^2}$ lorsque (x, y) appartient à D . Pourquoi ?

42 4) a) P_M contient A et B donc Δ .

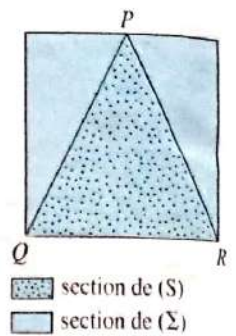
D'après 3) a), $P_M \cap \mathbb{E}$ est un cercle dont le centre appartient à Δ (la fin est facile).

4) c) Il existe un seul cercle de diamètre $[AB]$ contenant un point M de S : comment est-il défini ?

Soit $M \in S$, considérer alors le cercle $P_M \cap S$.

43 5) Examiner les projetés orthogonaux de S sur les plans de coordonnées.

6) b) Montrer que les sections de (Σ) et (S) par le plan perpendiculaire à (Oy) passant par le point $(0, y, 0)$ sont représentées ci-contre.



44 A) 2) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y+Z)$ et $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(Z-Y)$.

C) 2) b) Utiliser les translations de vecteurs $\vec{k}$ et $-\vec{k}$.

3) Montrer que :

$P(\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta, 0)$, $Q(\sqrt{2}\cos(\theta + \frac{\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4}), 0)$ et

en déduire à l'aide de la question précédente les coordonnées de P' et Q' .

Index

A	
Adéquation à une loi équirépartie	314
Affixe	176
Aire et intégrale	115
Angle dans l'Espace	210
Angle d'une similitude directe	402
Antidépassement	400
Approximation affine	52
Approximation d'une solution d'équation	51
Arbres (probabilité)	275, 278
Argument d'un nombre complexe	179
Associativité du barycentre	237
Asymptote	49

B	
Barycentre	236, 237
Bernoulli (loi de)	302
Bezout (théorème de)	340
Bijection (théorème de la)	51
Binôme de Newton	301
Branche parabolique	57

C	
Calcul de grandeurs	24, 123, 128, 129
Coefficients binomiaux	301
Combinaison	300
Comparaison	
- de fonctions	59
- d'intégrales	118
Comparaison et limites	15, 47
Complexe (nombre)	176
Comportement asymptotique	13, 17, 44
Composée	
- similitudes	397
- transformations	394
Composition (principe de)	395
Condition initiale	
- équation différentielle	155
- primitive	120
Cône	431
Congruence	336
Conjugué d'un complexe	178
Continuité	50
Convergence monotone	17
Croissance comparée	89
Cryptographie	348, 378
Cylindre de révolution	431

D	
Décomposition en facteurs premiers	371
Demi-espace	245
Densité de probabilité	304
Déplacement	400
Dérivée	53, 54
Dérivée en un point	52
Dérivées des fonctions usuelles	55
Désintégration radioactive	157, 312
Divisibilité	334
Division euclidienne	335

E	
Écart type	268
Écriture complexe	
- antidépassement	400
- composée	395
- déplacement	400
- homothétie	185
- réflexion	401
- rotation	185
- similitude	399
- transformation	395
- translation	178
Encadrement d'intégrales	132

Équation	
- d'un plan	214
- d'une surface	430
Équation différentielle	154
Équation du second degré	184
Équation diophantienne	346
Équiprobabilité	268
Ératosthène (crible d')	369
Espérance mathématique	268
Étude d'une fonction (plan d')	60
Euclide (algorithme d')	339
Euler (formule d')	183
Événements indépendants	275
Expérience aléatoire	268
Exponentielle	84
Extremum local	53

F - G	
Factorielle	299
Fermat (théorème de)	373
Fonction dérivable	53
Fonction de deux variables	440
Fonctions et suites	48
Forme réduite d'une similitude directe	402
Forme trigonométrique (complexe)	180
Formes indéterminées	56
Gauss (théorème de)	341, 370
Gendarmes (théorème des)	47

I - K	
Image d'une suite par une fonction	48
Imaginaire pur	476
Indépendance (probabilité)	274, 311
Inégalité de la moyenne	118
Intégrale	
- calcul approché	134
- inégalités	118
- primitives	120
Intégration par parties	122
Intersection	
- d'une droite et d'un plan	242
- de deux ou trois plans	239, 243
Isométrie	236, 398
Isobarycentre	236
Khi-deux (loi du)	310

L	
Limite à droite, à gauche	49
Limites	
- fonctions	44, 45
- comparaisons	47
- exponentielles	86
- logarithmes	87
- opérations	46
- suites	13, 14
Liste	298
Logarithme	
- népérien	87
- décimal	94
Loi	
- binomiale	302
- continue	304
- de durée de vie sans vieillissement	307
- de probabilité	304
- de Bernoulli	302
- d'Hardy Weinberg	280
- équirépartie	268
- exponentielle	306
- uniforme	304

M	
Médiane (théorème de la)	208
Méthode	
- d'Euler	64, 153

- de Gauss	250
- des rectangles	134
Module d'un nombre complexe	179
Modulo	336, 376
Moivre (formules de)	183

N - O	
Nombre dérivé	52
Nombre premier	368
Notation différentielle	52
Notation exponentielle $e^{i\theta}$	183
Opération	
- sur les dérivées	55
- limites (fonctions)	46
- limites (suites)	14
Optimisation	58

P	
Paraboloïde de révolution	434
Paraboloïde hyperbolique	436
Partie imaginaire, réelle	176
Pascal (relation, triangle)	301
Permutation	299
PGCD (plus grand commun diviseur)	338
Plans	
- parallèles	238
- perpendiculaires	239
PPCM (plus petit commun multiple)	338
Premiers entre eux	338
Primitive	119, 120
Primitives des fonctions usuelles	121
Principes de dénombrement	296
Probabilités conditionnelles	272
Probabilités totales	272
Produit scalaire	208, 210
Projection orthogonale (espace)	212
Puissance d'un réel positif	90
Puissance (fonction)	90

R	
Racine n -ième d'un réel positif	82
Racines carrées d'un réel	184
Rapport d'une similitude	396
Réciproque (transformation)	394
Récurrente	11
Relation d'Al-Kashi	208
Relations métriques dans le triangle	208
Représentation paramétrique	
d'une droite	240
Reste (division euclidienne)	335

S	
Similitude	396, 399
Similitude directe, indirecte	400, 402
Suite	
- arithmétique, géométrique	10
- majorée, minorée	12
- monotone	12
Suite définie par récurrence	20
Suite définie par une intégrale	146
Système linéaire	244

T - V	
Tangente à une courbe	52
Taux d'accroissement	52
Théorème	
- fondamental de l'Arithmétique	371
- des valeurs intermédiaires	50
Valeur moyenne d'une fonction	116
Variation d'une fonction	53
Variable aléatoire	270
Variance	268
Vecteur normal à un plan	212

Planche 1

Propriétés usuelles

① Loi de probabilité $(p_1, \dots, p_r)$
sur $E = (x_1, \dots, x_r)$:

- $p_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^r p_i = 1$.

- Cas de l'équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } E}$$

② Propriétés

- $P(\emptyset) = 0$; $P(E) = 1$.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

- Si $A \cap B = \emptyset$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

- Cas général :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

③ Variables aléatoires

- Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$.

- Variance :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i [x_i - E(X)]^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - [E(X)]^2.$$

- Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

④ Probabilités conditionnelles

- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

($P_A(B)$ se note aussi $P(B|A)$).

- A et B sont indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

- Formule des probabilités totales :

Si $A_1, \dots, A_k$ forment une partition de A :

$$P(A) = P(A_1) + \dots + P(A_k).$$

Planche 2

Dénombrement

Soit E un ensemble de n éléments ($n \geq 1$).

- Nombre de listes de p éléments de E deux à deux distincts : $n(n-1) \times \dots \times (n-p+1)$.

- Nombre de permutations de E : $n! = n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1$.

- Nombre de combinaisons de p éléments de E : $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \times \dots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Planche 3

Lois usuelles

① Loi de Bernoulli de paramètre p

X prend les valeurs 1 ou 0 avec les probabilités p et $1-p$.

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p).$$

② Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Pour $0 \leq k \leq n$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

③ Loi uniforme sur $[a, b]$

Pour un intervalle $J \subset [a, b]$,

$$P(J) = \frac{\text{longueur de } J}{b-a}.$$

④ Loi exponentielle de paramètre λ

- Si $0 \leq a < b$, $P(a \leq T \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt$

- $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.