MATHS

TC

Mathématiques
Terminale C

Chapitre 1 : LES ENSEMBLES $\mathbb{N}$ ET $\mathbb{Z}$

I. Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

$\mathrm{I}_{.1}$ – L'ensemble $\mathbb{N}$:

L'ensemble $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels. $\mathbb{N}^*$désigne l'ensemble des entiers naturels. On note :

- $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots; \mathrm{n}; \mathrm{n}+1; \ldots\}$
- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1; 2; 3; \ldots; n; n+1; \ldots\}$

NB :

- $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément qui est 0 ;
- $\mathbb{N}$ n'admet pas de plus grand élément car c'est un ensemble infini ;
- Tout élément n de $\mathbb{N}$ admet un immédiat (ce nombre est $n+1$)
- Tout élément n de $\mathbb{N}^*$ admet un prédécesseur dans $\mathbb{N}$, (ce nombre est $n-1$).

Remarque : 0 n'a pas de prédécesseur dans $\mathbb{N}$.

a – Addition et multiplication dans $\mathbb{N}$

Addition dans $\mathbb{N}$	Multiplication dans $\mathbb{N}$
$a+0=0+a=a$ 0 est l'élément neutre pour $+$	$a\times 1=1\times a=a$ 1 est l'élément neutre pour $\times$
$a+(b+c)=(a+b)+c$ $+$ est associative	$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$ $\times$ est associative
$a+b=b+a$ $+$ est commutative	$a\times b=b\times a$ $\times$ est commutative
$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ $\times$ est distributive par rapport à $+$	
$a+c=b+c \Rightarrow a=b, (c\in\mathbb{N})$	$a\times c=b\times c \Rightarrow a=b, \left(c\in\mathbb{N}^*\right)$
$a+b=0 \Rightarrow a=b=0$	$a\times b=1 \Rightarrow a=b=1$

Remarque :

Pour tous entiers naturels a et b, $a+b$ et $a\times b$ sont cdes entiers naturels, dpnc l'addition " $+$ " et la multiplication " $\times$ " dans $\mathbb{N}$ sont des lois de compositions internes.

b – Ordre dans $\mathbb{N}$

Propriétés :

Pour tous entiers naturels $a, b\ et\ c$, on a :

- $a \leq a$ (la relation est réflexive) ;
- Si $a \leq b$ et $b \leq a \Rightarrow a=b$ (la relation est antisymétrique) ;
- Si $a \leq b$ et $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (la relation est transitive).

NB : Dans $\mathbb{N}$, deux éléments $a\ et\ b$ sont toujours comparables : $a \leq b$ ou $b \leq a$.

On dit que " $\leq$ " est une relation d'ordre total.

c – Principe de la démonstration par récurrence

Pour démontrer qu'une proposition $P(n)$ qui concerne un entier naturel n est vraie pour tout n supérieur à n_0, on procède en deux étapes :

- On démontre que $P(n_0)$ est vraie ;
- On démontre que pour tout entier k supérieur ou égale à n_0, si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est vraie.

Exemple :

Démontrons que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a : $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Procédons par récurrence sur n.

Soit P l'assertion : $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

1ere Etape : Montrons que l'assertion est vrai pour $n = 2$

$P(0) : 1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2}$

$3 = 3$, donc P est vraie.

2e Etape : Supposons que pour $n \geq 2$, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ et montrons que $P(n+1)$ est vraie. $P(n+1) : 1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$

On a: $1 + 2 + \cdots + (n+1) = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1)$, Or $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$

Donc d'après la démonstration par récurrence, $\forall\, n \geq 2$, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Exemple :

Démontrons que pour tout entier naturel non nul, $n! \geq 2^{n-1}$.

- Pour $n = 1$, $1! \geq 2^2 \Rightarrow 1 = 1$, l'assertion est donc vraie au rang 1.
- Supposons que $k! \geq 2^{k-1}$ et montrons que l'assertion est vraie pour $k + 1$.

On a : $k! \geq 2^{k-1}$, or : $(k+1)! = (k+1)k!$

Nous savons que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $k + 1 \geq 2 \Rightarrow (k+1)k! \geq 2k!$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (k+1)k! \geq 2.2^{k-1} \text{ car : } k! \geq 2^{k-1} \\
&\Rightarrow (k+1)k! \geq 2^{k} \\
&\Rightarrow (k+1)k! \geq 2^{(k+1)-1}
\end{aligned}$$

D'où $(k+1)! \geq 2^{(k+1)-1}$ et l'on conclut que pour tout entier naturel non nul, $n! \geq 2^{n-1}$.

Remarque :

Lorsqu'une proposition est à la fois vraie pour un entier naturel quelconque et vraie pour son successeur, alors cette proposition est dite Héréditaire.

I_2 – L'ensemble $\mathbb{Z}$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{Z}^*$, l'ensemble des entiers relatifs non nuls. One le note :

- $\mathbb{Z} = \{\dots; -n-1; -n; \dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots; n; n+1; \dots\}$
- $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{\dots; -n-1; -n; \dots; -2; -1; 1; 2; \dots; n; n+1; \dots\}$

$a -$ Addition dans $\mathbb{Z}$

Propriétés 1:

Pour tous entiers relatifs $a, b\ et\ c$, on a :

(1) $a + b \in \mathbb{Z}$ (+ est une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}$) ;

(2) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (+ est associative) ;

(3) $a + 0 = 0 + a = a$ (0 est élément neutre pour $+$) ;

(4) S'il existe $a' \in \mathbb{Z}$ tel que : $a + a' = a' + a = 0$ (tout élément dans $\mathbb{Z}$ admet un opposé dans $\mathbb{Z}$)

(5) $a + b = b + a$ (+ est commutative).

Remarque :

Pour les quatre premières propriétés, on dit que $\mathbb{Z}$ est un groupe ;

Pour la 5e propriété, on dit que $(\mathbb{Z}; +)$est un groupe commutatif.

Propriété 2 :

Pour tous entiers relatifs $a, b\ et\ c$, on a :

$a + c = b + c \Rightarrow a = b$

$b -$ Multiplication dans $\mathbb{Z}$

Propriété 1 :

Pour tous entiers relatifs $a, b\ et\ c$, on a :

(a) $a \times b \in \mathbb{Z}$ ($\times$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}$) ;

(b) $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ ($\times$ est associative) ;

(c) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ ($\times$ est distributive par rapport à $+$) ;

(d) $a \times b = b \times a$ ($\times$ est commutative) ;

(e) $a \times 1 = 1 \times a = a$ (1 est élément neutre pour $\times$) ;

Remarque :

On dit donc que $(\mathbb{Z}; +; \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

Propriété 2 :

Pour tous entiers relatifs , $b\ et\ c$ $(c \neq 0)$, on a :

- $a \times 0 = 0$,
- $ca = cb \Rightarrow a = b$

$c -$ Ordre dans $\mathbb{Z}$

Propriété 1 :

Soit $a\ et\ b$ deux entiers relatifs.

- Pour tout $c \in \mathbb{Z}$, on a : $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$
- Pour tout $c \in \mathbb{Z}_+$, on a : $a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc$
- Pour tout $c \in \mathbb{Z}_-$, on a : $a \leq b \Leftrightarrow ac \geq bc$

Propriété 2 :

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément ;

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.

Propriété 3 :

Soit $a\ et\ b$ deux entiers relatifs tel que $\neq 0$. Il existe un entier relatif n tel que $nb > a$.

Démonstration :

1er cas : $b \geq 1$

- Si $a > 0$, alors pour $n = a$, $b > 1$
- $a < 0$, alors pour $n = 0$, $b > 1$, $0 \geq a$

2e cas : $b \leq -1$

- Si $b \leq -1 \Rightarrow -b \geq 1$ cdonc il existe un entier relatif m tel que $m(-b) \geq a$.

D'où $n = -m$

$d -$ Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Propriété :

Soit $a\ et\ b$ deux entiers relatifs tel que $b \neq 0$. Il existe un unique couple $(q; r)$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que : $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$ où $q\ et\ r$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

Exemple :

Dans chacun des cas suivants, procédons à la division euclidienne de a par b.

1) $a = 53$ et $b = 12$
   On a : $53 = 12 \times 4 + 5$ et $0 \leq 5 < 12$, donc $q = 4$ et $r = 5$
2) $a = -53$ et $b = 12$
   On a : $-53 = 12 \times (-4) - 5$
   $-53 = 12 \times (-5) + 7$ et $0 \leq 7 < 12$, donc $q = -5$ et $r = 7$
3) $a = 59$ et $b = 18$
   On a : $59 = 18 \times 3 + 5$ et $0 \leq 5 < 18$, donc $q = 3$ et $r = 5$
4) $a = -59$ et $b = 18$
   On a : $-59 = 18 \times (-3) - 5$
   $-59 = 18 \times (-4) + 13$ et $0 \leq 13 < 18$, donc $q = -4$ et $r = 13$
5) $a = 59$ et $b = -18$
   On a : $59 = (-18) \times (-3) + 5$ et $0 \leq 5 < |-18|$, donc $q = -3$ et $r = 5$
6) $a = -59$ et $b = -18$
   On a : $-59 = (-18) \times 3 - 5$
   $-59 = (-18) \times 4 + 13$ et $0 \leq 13 < |-18|$, donc $q = 4$ et $r = 13$

I_2 −Numerotation :

Propriété :

Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Tout entier naturel non nul peut s'écrire de la manière unique $\sum_{k=0}^{p} a_k b^k$ où les a_k sont des entiers naturels tels que : $0 \leq a_k \leq b$.

On note que : $x = \overline{a_p a_{p-1} \dots \dots \dots \dots a_2 a_1 a_0}^{\,b}$ qui est appelé écriture de x en base b.

Par convention, les écritures sans barre sont en base 10.

NB : Le système décimal l'écriture en base 10.

Exemple :

1) Ecrire dans le système décimal le nombre $\overline{423}^{5}$
2) Soit $N = \overline{5243101201}^{7}$ en base 7. Ecrire N dans le système décimal.

Solution :

1) Dans le système décimal le nombre $\overline{423}^{5}$ s'écrit :

$$\overline{423}^{5} = 4 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 3 \times 5^0$$
$$= 4 \times 25 + 10 + 3$$
$$\mathbf{\overline{423}^{5} = 113}$$

2) $N = \overline{5243101201}^{7}$; N est écrit avec 10 chiffres.

Dans le système décimal, $N = \overline{5243101201}^{7}$ s'écrit :

$$N = 5 \times 7^9 + 2 \times 7^8 + 4 \times 7^7 + 3 \times 7^6 + 1 \times 7^5 + 1 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 1 \times 7^0$$
$$= 201768035 + 11529602 + 3294172 + 352947 + 16807 + 343 + 98 + 1$$
$$\boldsymbol{N = 216962005}$$

Méthode :

Pour écrire un nombre en base x, on effectue les divisions successifs de ce nombre par x jusqu'à ce que le coefficient soit inferieur à x.

Exemple :

1) Ecrivons le nombre 127 en base 7.

On a :

127	7		
1	18	7	
	4	2	7
		2	0

$$127 = \overline{241}^{7}$$

2) Ecrivons le nombre 473 en base 4.

473	4				
1	118	4			
	2	29	4		
		1	7	4	
			3	1	4
				1	0

$$473 = \overline{13121}^{4}$$

a –Système binaire :

Pour écrire un nombre dans le système binaire (base 2), l'ensemble des chiffres utilisés est : $\{0; 1\}$.

Exemple :

1) Ecrivons chacun des nombres suivants en base 10.

a) $\overline{1011}^{2} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
$$= 8 + 2 + 1$$
$$\overline{1011}^{2} = 11$$

b) $\overline{1101101}^{2} = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0$
$$= 64 + 32 + 8 + 4 + 1$$
$$\overline{1101101}^{2} = 109$$

2) Ecrivons le nombre 87 en base 2.

87	2						
1	43	2					
	1	21	2				
		1	10	2			
			0	5	2		
				1	2	2	
					0	1	2
						1	0

Donc $87 = \overline{1010111}^{2}$

b −<u>Système hexadécimal</u> :

Pour écrire un nombre dans le système hexadécimal, l'ensemble des chiffres utilisés est : $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; A; B; C; D; E; F\}$ où $A, B, C, D, E\ et\ F$ représentent respectivement les nombres 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 et 15.

<u>Exemple</u> :

1) Ecrire dans le système décimal le nombre $\overline{F0A5}^{16}$;
2) Ecrire 64206 en base 16.

<u>Solution</u> :

1) Ecrivons dans le système décimal le nombre $\overline{F0A5}^{16}$;

$$\begin{aligned} \overline{F0A5}^{16} &= F \times 16^3 + 0 \times 16^2 + A \times 16^1 + 5 \times 16^0 \\ &= 15 \times 16^3 + 0 + 10 \times 16^1 + 5 \times 1 \\ &= 61440 + 160 + 5 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\overline{F0A5}^{16} = 61605}$$

2) Ecrivons 64206 en base 16.

64206	16			
14	4012	16		
	12	250	16	
		10	15	16
			15	0

On a : $64206 = \overline{FACE}^{16}$

II. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

II_1 −<u>Multiple et diviseur d'un nombre entier relatif</u>

1.1 − <u>Definition</u> :

Soit $a\ et\ b$ deux entiers relatifs.

On dit que a est un ***multiple*** de b s'il existe un entier relatif k tel que : $a = kb$.

Si de plus $b \neq 0$, alors on dit que b est un ***diviseur*** de a ou que b divise a.

Exemple :

$143 = 11 \times 13$ donc 143 est un multiple de 11 et de 13.

$12 = (-4)(-3)$, donc 12 est un multiple de $-4\ et - 3$. On dit que $-4\ et - 3$ divise 12.

Remarque :

- Tout entier relatif est multiple de 1 et de -1. Donc 1 et -1 divisent tout entier relatif ;
- est un multiple de tout entier relatif ;
- Tout entier relatif non nul divise 0, mais 0 ne divise aucun entier relatif ;
- Lorsque $b \neq 0$, a est un multiple de b et b divise a si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Propriété 1 :

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. Si b divise a, alors $|b| \leq |a|$

Démonstration :

Si b divise a, alors $a = bq$.

Or : $1 \leq |q| \Longrightarrow |b| \leq |b|.|q|$

$\Longrightarrow |b| \leq |a|$

Propriété 2 :

Soit a, b et c trois entiers relatifs tels que a et b soient non nuls.

1) a divise a
2) Si a divise b et b divise a, alors $a = b$ ou $a = -b$.
3) Si a divise b et b divise c, alors a divise c

Démonstration :

Si a divise b, alors $|a| \leq |b|$, or on a la simultanéité donc $|a| = |b|$.

Propriété 3:

Soit a, b et c trois entiers relatifs tels que $a \neq 0$.

Si a divise b et c, alors pour tout entier relatif p et q, a divise $pb + qc$.

On dit donc que a divise toute combinaison linéaire de b et c dans $\mathbb{Z}$.

$a -$ Ensemble des multiples d'un entier relatif :

Soit b un entier relatif.

Les multiples de b sont les nombres : $\dots, b \times (-2),\ b \times (-1), 0, b \times (1), b \times (2), \dots$

Les multiples de b sont les nombres de la forme $(k \in \mathbb{Z})$.

L'ensemble des multiples de b est noté $b\mathbb{Z}$.

Exemple :

$3\mathbb{Z} = \{\dots;\ -9;\ -6;\ -3; 0; 3; 6; 9; \dots\}$

$-2\mathbb{Z} = \{\dots;\ -6;\ -4;\ -2;\ 0; 2; 4; 6; \dots\}$

$1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

$\mathbf{0}\mathbb{Z} = \{\mathbf{0}\}$

$b -$ Ensemble des diviseurs d'un entier relatif :

Soit a et b deux entiers relatifs. L'ensemble des diviseurs de a est noté $\mathfrak{D}(\boldsymbol{b})$ et l'ensemble des diviseurs communs à $a\ et\ b$ est noté $\mathfrak{D}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$.

Exemple :

$\mathfrak{D}(4) = \{-4;\ -2;\ -1; 1; 2; 4\}$
$\mathfrak{D}(-6) = \{-6;\ -3;\ -2;\ -1; 1; 2; 3;\ 6\}$
$\mathfrak{D}(6) = \{-6;\ -3;\ -2;\ -1; 1; 2; 3;\ 6\}$
$\mathfrak{D}(1) = \{\ -1; 1\}$
$\mathfrak{D}(0) = \mathbb{Z}^*$
$\mathfrak{D}(4; 6) = \{-2;\ -1; 1; 2\}$

<u>Remarque</u> :

- Pour tout entier relatif a, $\mathfrak{D}(\boldsymbol{b})$ est un ensemble fini non vide.
- $\mathfrak{D}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = \mathfrak{D}(\boldsymbol{a}) \cap \mathfrak{D}(\boldsymbol{b})$

II_2 $-$<u>Congruence modulo n ($n \in \mathbb{Z}$)</u>

2.1 $-$<u>Definition</u> :

Soit n, un entier naturel non nul, $a\ et\ b$ deux entiers relatifs.
On dit que a est congru à b modulo n si $a - b$ est un multiple de n.
On écrit : $a \equiv b[n]$

<u>Exemple</u> :

$54 \equiv 4[10]$ signifie que $54 - 4 = 50$ est un multiple de 10, car $50 = 5 \times 10$;
$4 \equiv 1[3]$ signifie que $4 - 1 = 3$ est un multiple de 3, car $3 = 3 \times 1$;
$-2 \equiv -24[11]$ signifie que $-2 + 24 = 22$ est un multiple de 11, car $22 = 11 \times 2$

<u>Remarque</u> :

$a \equiv 0[n]$, alors a est un multiple de n ;
Si r designe le reste de la division euclidienne de a par n, alors $a \equiv r[n]$.

<u>Propriété</u> :

Soit n, un entier naturel non nul, $a, b\ et\ c$ trois entiers relatifs.
La relation de congruence modulo n est :

- Réflexive : $a \equiv a[n]$;
- Symétrique : $a \equiv b[n] \Leftrightarrow b \equiv a[n]$;
- Transitive : $\begin{cases} a \equiv b[n], \\ b \equiv c[n], \end{cases} \Rightarrow a \equiv c[n]$.

<u>Autres propriétés</u> :

<u>Propriété</u> 1 :

Soit n, un entier naturel non nul, $a\ et\ a'$ deux entiers relatifs, $r\ et\ r'$, les restes respectifs des divisions euclidiennes de $a\ et\ a'$ par n.
On a : $a \equiv a'[n] \Leftrightarrow r = r'$.

<u>Propriété</u> 2 :

Soit n, un entier naturel non nul, $a, a', b\ et\ b'$ quatre entiers relatifs.

- Si $a \equiv a'[n]$ et $b \equiv b'[n]$, alors $a - b \equiv a' + b'[n]$
- Si $a \equiv a'[n]$ et $b \equiv b'[n]$, alors $ab \equiv a'b'[n]$

<u>Remarque</u> :

Si k est un entier naturel non nul, on a : $a \equiv a'[n] \Rightarrow a^k \equiv {a'}^k[n]$

<u>Exemple</u> :

On considère les nombres $a\ et\ b$ tels que : $a = 137$ et $b = 73$.
Déterminer les restes des divisions euclidiennes de $a + b$, ab, $3a - 2b$ et $a^3 + 3b^3$ par 25.
Solution :
On a : $a = 137$ et $b = 73$.
Déterminons les restes des divisions euclidiennes de $a + b$, ab, $3a - 2b$ et $a^3 + 3b^3$ par 25.

On a: $\begin{cases} a = 137 \text{ et } 137 \equiv 12[25] \Rightarrow a \equiv 12[25] \\ \text{b} = 73 \text{ et } 73 \equiv -2[25] \Rightarrow b \equiv -2[25] \end{cases}$

- $a + b \equiv 12 + (-2)[25]$

$\Rightarrow a + b \equiv 10[25]$ et $0 \leq 10 < 25$.
Donc le reste de la division euclidienne de $a + b$ par 25 est $r = 10$.

- $ab \equiv 12(-2)[25]$
$\equiv -24[25]$, or $-24 \equiv 1[25]$

$\Rightarrow ab \equiv 1[25]$ et $0 \leq 1 < 25$.
Donc le reste de la division euclidienne de ab par 25 est $r = 1$.

- $3a - 2b \equiv \big(3 \times 12 - 2(-2)\big)[25]$
$\equiv (36 + 4)[25]$
$\equiv 40[25]$

$\Rightarrow 3a - 2b \equiv 15[25]$ et $0 \leq 15 < 25$.
Donc le reste de la division euclidienne de $3a - 2b$ par 25 est $r = 15$.

- $a^3 + 3b^3 \equiv (12^3 + 3(-2)^3)[25]$
$\equiv (1728 - 24)[25]$
$\equiv 1704[25]$, or $1704 = 68 \times 25 + 4$

$\Rightarrow a^3 + 3b^3 \equiv 4[25]$ et $0 \leq 4 < 25$.
Donc le reste de la division euclidienne de $a^3 + 3b^3$ par 25 est $r = 4$.

II_3 −Utilisation des congruences

a −Détermination des restes

Exemple :
Déterminons le reste de la division euclidienne de 7^{2002} par 9.

On a : $7^0 \equiv 1[9]$
$7^1 \equiv 7[9]$
$7^2 \equiv 4[9]$
$7^3 \equiv 1[9]$

Or $2002 = 3 \times 667 + 1$
Donc $7^{2002} \equiv 7^{3\times 667+1}$
$\equiv (7^3)^{\times 667+1}$
$\equiv (7^3)^{\times 667} \times 7$
$\equiv 1^{667} \times 7[9]$
$7^{2002} \equiv 7[9]$ et $0 \leq 7 < 9$.
Donc le reste de la division euclidienne de 7^{2002} par 9 est $r = 7$.

Exemple 2 :

Déterminons le reste de la division euclidienne de 5^n par 3.

On a : $5^0 \equiv 1[3]$

$5^1 \equiv 2[3]$

$5^2 \equiv 1[3]$

On distingue deux cas :

1^er cas : Si $n = 2k, (k \in \mathbb{N})$, on a :

$$(5^2)^k = 1^k[3] \Rightarrow 5^n \equiv 1[3]$$

2^e cas : Si $n = 2k + 1, (k \in \mathbb{N})$, on a :

$$(5^2)^{k+1} = (5^2)^k \times 5^1$$
$$\equiv 1^k \times 2[3]$$
$$\Rightarrow 5^{2k+1} \equiv 2[3]$$
$$\Rightarrow 5^n \equiv 2[3] \text{ et } 0 \leq 2 < 3.$$

Donc le reste de la division euclidienne de 5^n par 3 est $r = 2$.

On conclut que : $\begin{cases} r = 1, \ si\ n\ est\ pair \\ r = 2, si\ n\ est\ impair \end{cases}$

b –<u>Démonstration de propriété</u>

Soit n, un entier naturel.

Démontrons que $n(n^4 - 1)$ est un multiple de 5.

On a : $n(n^4 - 1) \equiv k[5]$, avec $k = \{0; 1; 2; 3;\ 4\}$

- Pour $n = 0$: $\begin{cases} 0 \equiv 0[5] \\ -1 \equiv 4[5] \end{cases} \Rightarrow n(n^4 - 1) \equiv 0[5]$
- Pour $n = 1$: $\begin{cases} 1 \equiv 1[5] \\ 0 \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow n(n^4 - 1) \equiv 0[5]$

Nous nous retrouverons avec le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4
$n^4 - 1$	4	0	0	0	0
$n(n^4 - 1)$	0	0	0	0	0

D'où $n(n^4 - 1)$ est un multiple de n.

II_4 –<u>Critère de divisibilité par $2, 3, 5, 9$ *et* 11</u>

<u>Propriété :</u>

- Un entier naturel n est divisible par 3 ou par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres dans le système décimal est divisible par 3 ou par 9.
- Un entier naturel n est divisible par 2 ou par 5 si et seulement si son chiffre des unités est divisible par 2 ou divisible par 5.
- Un entier naturel n est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme de ses chiffres de rang pair et la somme de ses chiffres de rang impair est divisible par 11.

III. PPCM et PGCD de deux entiers relatifs :

III_1 – <u>PPCM de deux entiers relatifs</u>

1.1 –<u>Définition</u> :

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
Le plus petit commun multiple, noté $PPCM(a;b)$ est le plus petit élément strictement positif commun à a et b, $(a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z})$. $PPCM(a;b)$ est aussi noté $a \vee b$.

Exemple :
Calculons :
a) $PPCM(1;-5)$
On a :
$$1\mathbb{Z} = \{\dots;\ -5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$$
$$-5\mathbb{Z} = \{\dots;\ -10;\ -5; 0;\ 5; 10;\ \dots\}$$
$$-5\mathbb{Z} \cap 1\mathbb{Z} = \{\dots;\ -10;\ -5; 0;\ 5; 10;\ \dots\}$$
Donc $PPCM(1;-5) = 5$
b) $PPCM(12;16)$
On a :
$$12\mathbb{Z} = \{\dots;\ -36;\ -24;\ -12; 0; 12; 24; 36; 48; \dots\}$$
$$16\mathbb{Z} = \{\dots;\ -32;\ -16; 0;\ 16; 32; 48;\ \dots\}$$
$$12\mathbb{Z} \cap 16\mathbb{Z} = \{\dots;\ 0; 48; \dots\}$$
Donc $PPCM(12;\ 16) = 48$
c) $PPCM(5;7)$
On a :
$$5\mathbb{Z}\mathbb{Z}\{\dots;\ -15;\ -10;\ -5; 0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; \dots\}$$
$$7\mathbb{Z}\mathbb{Z}\{\dots;\ -21;\ -14;\ -7; 0;\ 7; 14; 21; 28; 35; 42;\ \dots\}$$
$$5\mathbb{Z} \cap\cap\ \mathbb{Z}\mathbb{Z}\{\dots;\ 0; 35; \dots\}$$
Donc $PPCM(5;\ 7) = 35$

Remarque :
1) Pour tout entiers relatifs non nuls a et b, on a :
   - $PPCM(a;b) = PPCM(|a|;|b|)$
2) Pour tout entiers naturels non nuls a et b, on a :
   - $Max(a;b) \leq PPCM(a;b) \leq ab$
   - $PPCM(a;b) = a \Leftrightarrow a \in b\mathbb{Z}$.

Propriété :
Soit a et b deux entiers naturels non nuls et μ leur $PPCM$, on a : $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mu\mathbb{Z}$
Exemple :
On a : $PPCM(1;-5) = 5 \Longrightarrow -5\mathbb{Z} \cap 1\mathbb{Z} = 5\mathbb{Z}$

a – Relation entre $PPCM(ka;kb)$ et $PPCM(a;b)$:

Propriété :
Pour tout entiers naturels non nuls a, b et k, on a : $PPCM(ka;kb) = kPPCM(a;b)$
Exemple :
a) $PPCM(30;70) = PPCM(10 \times 3; 10 \times 7)$
$= 10 \times PPCM(3;7)$, or $PPCM(3;7) = 21$
$\Longrightarrow PPCM(30;70) = 10 \times 21 = 210$
$\Longrightarrow PPCM(30;70) = 210$

b) $PPCM(120; 168) = PPCM(24 \times 5; 24 \times 7)$
$= 24 \times PPCM(5; 7)$, or $PPCM(5; 7) = 35$
$\Longrightarrow PPCM(120; 168) = 24 \times 35 = 840$
$\Longrightarrow PPCM(120; 168) = 840$

$\mathbf{III_2}$ − <u>PGCD de deux entiers relatifs</u>

2.1 −<u>Définition</u> :

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
Le plus grand diviseur commun, noté $PGCD(a; b)$ est le plus grand élément de $\mathfrak{D}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$.
$PGCD(a; b)$ est aussi noté $a \wedge b$.

<u>Exemple</u> :

Calculons :

a) $PGCD(24; 30)$

$\mathfrak{D}(24) = \{-24;\ -12;\ -8;\ -6;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1; 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12;\ 24\}$
$\mathfrak{D}(30) = \{-30;\ -15;\ -10;\ -6; -5;\ -3;\ -2; -1; 1; 2; 3; 5; 6;\ 10; 15; 30\}$
$\mathfrak{D}(24; 30) = \mathrm{D}(24) \cap \mathrm{D}(30)$
$= \{-6;\ -3;\ -2;\ -1; 1; 2; 3; 6\}$

Donc $PGCD(24; 30) = 6$

b) $PGCD(5; 12)$

$\mathfrak{D}(5) = \{-5;\ -1; 1; 5\}$
$\mathfrak{D}(12) = \{-12; -6; -4;\ -3;\ -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$
$\mathfrak{D}(5; 12) = \mathrm{D}(5) \cap \mathrm{D}(12)$
$= \{-1; 1\}$

Donc $PGCD(5; 12) = 1$

<u>Remarque</u> :

1) Pour tout entiers relatifs non nuls a et b, on a :
   - $PGCD(a; b) = PGCD(|a|; |b|)$
2) Pour tout entiers naturels non nuls a et b, on a :
   - $1 \leq PGCD(a; b) \leq Min(a; b)$
   - $PGCD(a; b) = b \Leftrightarrow b \in \mathfrak{D}(a)$

<u>Propriété</u> :

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et γ leur $PGCD$.
On a : $\mathfrak{D}(a; b) = \mathfrak{D}(\gamma)$

<u>Exemple</u> :

$PGCD(24; 30) = 6$, donc, $\mathrm{D}(24; 30) = \mathrm{D}(6)$

a −<u>Relation entre $PGCD(ka; kb)$ et $PGCD(a; b)$</u>

<u>Propriété</u> :

Pour tout entiers naturels non nuls a, b et k, on a :
$PGCD(ka; kb) = k.PGCD(a; b)$

<u>Exemple</u> :

1) $PGCD(24; 30) = PGCD(6 \times 4; 6 \times 5)$
$= 6 \times PGCD(4; 5)$

$$= 6 \times 1$$

$PGCD(24; 30) = 6$

2) $PGCD(205; 492) = PGCD(41 \times 5; 41 \times 12)$

$$= 41 \times PGCD(5; 12)$$

$$= 41 \times 1$$

$PGCD(205; 492) = 41$

2.1 −<u>Ecriture du</u> $PGCD(a; b)$ comme combinaison linéaire de a et b

<u>Propriété</u> :

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et γ leurs $PGCD$.

Tout multiple de γ peut s'écrire comme combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs. On a : $\gamma\mathbb{Z} = au + bv$, avec $(u; v) \in \mathbb{Z}^2$

<u>Exemple</u> :

$PGCD(205; 492) = 41$ et $82 \in 41\mathbb{Z}$.

Donc il existe deux entiers relatifs u et v tels que :

$82 = 205u + 492v$

$\Longrightarrow 82 = 205(-2) + 492 \times 1$ ou $82 = 205 \times 10 + 492(-4)$

Donc $u = -2$ et $v = 1$ ou $u = 10$ et $v = -4$

2.1 −<u>Définition</u> :

<u>Propriété</u> :

Soit a et b deux entiers naturels tels que : $a > b > 0$ et r le reste de la division euclidienne de a par b.

1) Si $r = 0$, alors $\mathfrak{D}(a; b) = \mathfrak{D}(b)$ et $PGCD(a; b) = b$
2) Si $r \neq 0$, alors $\mathfrak{D}(a; b) = \mathfrak{D}(b; r)$ et $PGCD(a; b) = PGCD(b; r)$

Des propriété précédentes, on construit une suite permettant la recherche du $PGCD$. Cette méthode de recherche est appelée Algorithme d'Euclide.

<u>Méthode</u> :

Pour démontrer le $PGCD$ de deux entiers naturels tels que $a > b > 0$. On peut effectuer les divisions euclidiennes successives suivantes :

- Division de a par b : $a = bq_1 + r_0$, $(0 \leq r_0 < b)$
- Division de b par r_0 : $b = r_0q_1 + r_1$, $(0 \leq r_1 \leq r_0 < b)$
- Division de r_0 par r_1 : $b = r_0q_1 + r_1$, $(0 \leq r_2 \leq r_1 \leq r_0 < b)$

On obtient ainsi une suite (r_n) positive et strictement décroissante qui s'annule après un nombre fini de divisions euclidiennes et le dernier reste non nul obtenu est égal au $PGCD(a; b)$.

<u>Exemple</u> :

Déterminer le $PGCD$ de 304939 et 151097.

Soit $\theta = PGCD(304939; 151097)$, on a :

$$304939 = 151097 \times 2 + 2745 \Longrightarrow \theta = PGCD(151097; 2745)$$

$$151097 = 2745 \times 55 + 122 \Longrightarrow \theta = PGCD(2745; 122)$$

$$2745 = 122 \times 22 + 61 \Longrightarrow \theta = PGCD(2745; 122)$$

$$122 = 61 \times 2 + 0 \Longrightarrow \theta = PGCD(122; 61) = 61$$

$\mathbf{III_3}$ − **Nombres premiers entre eux**

a −Définition :

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

On dit que a et b sont des nombres premiers entre eux si leur $PGCD$ est égal à 1.

Exemple :

1) $PGCD(3;5) = 1$, donc 3 et 5 sont premiers entre eux.
2) Soit n un entier naturel non nul. Montrons que $PGCD(n;n+1) = 1$

On procédant par la division euclidienne, on a :

$n + 1 = (1 \times n) + 1 \Rightarrow PGCD(n;n+1) = 1$

Remarque :

Deux entiers consécutifs sont premiers entre eux et la fraction $\frac{n+1}{n}$ est irréductible.

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et d un diviseur commun à a et b.

On a : $a = da'$, $b = db'$ et $PGCD(a;b) = d \times PGCD(a';b')$.

d est le $PGCD$ de a et b si et seulement si a' et b' sont premiers entre eux.

Théorème de Bézout :

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = 1$.

Exercice d'application :

Soit $a = 300$ et $b = 26$.

Recherchons leur $PGCD$, u et v tels que : $au + bv = 1$.

Détermination du $PGCD$ par divisions successives	Présentation des restes des divisions successives	Détermination de u et v
$300 = 26 \times 11 + 14$	$14 = 300 - 26 \times 11$	$14 = a - 11b$
$26 = 14 \times 1 + 12$	$12 = 26 - 14 \times 1$	$12 = b - (a - 11b) = 12b - a$
$14 = 12 \times 1 + 2$	$2 = 14 - 12 \times 1$	$2 = a - 11b - 12b + a = 2a - 23b$
$12 = 2 \times 6 + 0$	$0 = 12 - 2 \times 6$	$u = 2$ et $v = -23$
$PGCD(300;26) = 2$		

Exemple :

$49 \times 54 + 115(-23) = 1$, d'où $PGCD(49;115) = 1$.

Théorème de Gauss :

Soit a, b et c trois entiers relatifs.

Si a divise bc et a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

Démonstration :

- a divise bc donc il existe un entier relatif k tel que $bc = ka$
- a et b sont premiers entre eux, alors il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

$au + bv = 1 \Rightarrow auc + bcv = c$, or $bc = ka$

$\Rightarrow auc + kav = c$

$\Rightarrow a(uc + kv) = c$

$\Rightarrow c = a(uc + kv)$, avec $uc + kv \in \mathbb{Z}$

D'où a divise c.
Exemple :
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $2x - 5y = 0$
On a : $2x - 5y = 0 \Leftrightarrow 2x = 5y$
D'après Gauss : 2 divise $5y$ et 2 est premier avec 5 car $PGCD(2;5) = 1$, d'où 2 divise y.
Alors il existe un entier relatif k tel que $y = 2k$.
$2x = 5y \Leftrightarrow 2x = 5 \times 2k$
$\Leftrightarrow x = 5k, k \in \mathbb{Z}$
L'ensemble de solution est : $\boldsymbol{S = \{5k; 2k\}, k} \in \mathbb{Z}$
Conséquence du théorème de Gauss :
Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

- Si a et b sont premiers entre eux et a et c sont premiers entre eux, alors a et bc sont premiers entre eux.
- Si a et b divise c et si a et b sont premiers entre eux, alors ab divise c.
- Si a et b sont premiers entre eux, alors $PPCM(a;b) = ab$

Propriété :
Soit n, un entier naturel non nul et a, b et c trois entiers relatifs tel que a soit non nul.
Si a est premier avec n et si $ab \equiv ac[n]$, alors $b \equiv c[n]$.
$b -$ Relation entre $PPCM$ et $PGCD$ de deux entiers naturels
Propriété :
Soit a et b deux entiers naturels non nuls. On a : $PPCM(a;b) \times PGCD(a;b) = a \times b$.
Exemple:
Sachant que $PGCD(304939; 151097) = 61$, déterminons le $PPCM(304939; 151097)$.
On sait que : $PPCM(304939; 151097) \times PGCD(304939; 151097) = 304939 \times 151097$
$\Longrightarrow PPCM(304939; 151097) \times 61 = 304939 \times 151097$
$\Longrightarrow PPCM(304939; 151097) = \frac{304939 \times 151097}{61}$
$\Longrightarrow \boldsymbol{PPCM(304939; 151097) = 755333903}$

$\mathbf{III_4}$ − Exemple d'utilisation

$\boldsymbol{a}$ − Détermination des coefficients d'une égalité de Bézout

Application :
1) Démontrer en utilisant l'algorithme d'Euclide que 564 et 271 sont premiers entre eux.
2) En déduire deux entiers relatifs u et v tels que : $564u + 271v = 1$

Solution :
1) Démontrons en utilisant l'algorithme d'Euclide que 564 et 271 sont premiers entre eux.

Divisions successives	Restes	Détermination de u et v
$564 = 271 \times 2 + 22$	$22 = 564 - 271 \times 2$	$22 = a - 22b$
$71 = 22 \times 12 + 7$	$7 = 271 - 22 \times 12$	$7 = b - 12(a - 22b) = -263b - 12a$
$22 = 7 \times 3 + 1$	$1 = 22 - 3 \times 7$	$1 = a - 22b + 3(263b + 12a)$
$7 = 7 \times 1 + 0$	$0 = 7 - 7 \times 1$	$1 = 13a + 767b$
$PGCD(564; 271) = 1$		

$PGCD(564; 271) = 1$, donc 564 et 271 sont premiers entre eux.

2) Déduisons –en deux entiers relatifs u et v tels que : $564u + 271v = 1$

Utilisons les divisions euclidiennes :

$$\begin{aligned} \text{On a : } \quad 1 &= 22 - 3 \times 7 \\ &= 22 + 7(-3) \\ &= 22 + (271 - 22 \times 12)(-3) \\ &= 22 + 271(-3) + 22 \times 12 \times 3 \\ &= 271(-3) + 22 + 22 \times 36 \\ &= 271(-3) + 22(1 + 36) \\ &= 271(-3) + 22 \times 37, \text{ or } 22 = 564 - 271 \times 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow 1 &= 271(-3) + (564 - 271 \times 2) \times 37 \\ &= 271(-3) + 564 \times 37 + 271(-2 \times 37) \\ &= 564 \times 37 + 271(-3 - 74) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow 1 = 564 \times 37 + 271(-77)$$

Donc $\boldsymbol{u = 37}$ **et** $\boldsymbol{v = -77}$**.**

$\boldsymbol{b} -$ **Equation du type : $\boldsymbol{ax + by = c}$**

Application :

On se propose de résoudre l'équation (E): $34x - 15y = 2$

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $34x - 15y = 2$
2) Déterminer une solution $(x_0; y_0)$ de (E)
3) Résoudre (E).

Solution :

1) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $34x - 15y = 2$

On a : 15 divise $34x$ et est premier avec 34 car $PGCD(15; 34) = 1$

D'où 15 divise x, d'après Gauss.

$\exists k \in \mathbb{Z}\ tel\ que\ x = 15k \Longrightarrow y = 34k$

$S = \{15k; 34k\}$; $k \in \mathbb{Z}$

2) Déterminons une solution $(x_0; y_0)$ de (E)

Divisions successives	Restes	Détermination de u et v
$34 = 15 \times 2 + 4$	$4 = 34 - 15 \times 2$	$4 = a - 2b$
$15 = 4 \times 3 + 3$	$3 = 15 - 4 \times 3$	$3 = b - 3(a - 2b) = 7b - 3a$
$4 = 3 \times 1 + 1$	$1 = 4 - 3 \times 1$	$1 = a - 2b - 7b + 3a$
$1 = 1 \times 1 + 0$	$0 = 7 - 7 \times 1$	$1 = 4a - 9b$
$PGCD(34; 15) = 1$		

D'après le tableau, on a :

$$1 = 4 \times 34 - 9 \times 15$$

$$\Longrightarrow 2 = 8 \times 34 - 18 \times 15$$

Donc on peut prendre le couple $(x_0; y_0) = (8; 18)$

3) Résolvons (E).

Soit $(x; y)$ une solution de (E).

On a : $34x - 15y = 2 \Leftrightarrow 34(x + x_0) - 15(y + y_0) = 2.$

Les solutions de (E) sont les couples $(x + x_0; y + y_0)$, donc :
$S = \{15k + 8; 34k + 18\};\ k \in \mathbb{Z}$

$C -$ **Système** :

Application :

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, le système (S_1): $\begin{cases} x \equiv -1[34] \\ x \equiv 1[15] \end{cases}$
2) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système (S_2): $\begin{cases} PGCD(x; y) = 12 \\ x + y = 60 \end{cases}$

Solution :

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, le système (S_1): $\begin{cases} x \equiv -1[34] \\ x \equiv 1[15] \end{cases}$

On désigne par x, une solution de (S_1).
Ils existent deux entiers relatifs p et q tels que : $x + 1 = 34p$ et $x - 1 = 15q$
$\Longrightarrow x = 34p - 1$ et $x = 15q + 1$
Or $x = x \Leftrightarrow 34p - 1 = 15q + 1$
$\Leftrightarrow 34p - 15q = 2$
Or d'après l'étude précédente, $(p; q) = (15k + 8; 34k + 18)$
Soit : $x + 1 = 34(15k + 8)$ et $x - 1 = 15(34k + 18)$
$\Longrightarrow x = 510k + 271$ et $x = 510k + 271$; $k \in \mathbb{Z}$
Donc $S = \{510k + 271;\ k \in \mathbb{Z}\}$

2) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système (S_2): $\begin{cases} PGCD(x; y) = 12 \\ x + y = 60 \end{cases}$

On a : $PGCD(x; y) = 12$ si et seulement si, il existe $(x'; y') \in \mathbb{N}^2$ tels que :
$x = 12x'$ et $y = 12y'$, avec $PGCD(x'; y') = 1$

Le système devient : $\begin{cases} x = 12x' \text{ et } y = 12y' \\ PGCD(x'; y') = 1 \\ 12x' + 12y' = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12x' \text{ et } y = 12y' \\ PGCD(x'; y') = 1 \\ x' + y' = 5 \end{cases}$

On a : $\begin{cases} x' = 1 \Longrightarrow y' = 4 \Longrightarrow (12; 48) \\ x' = 2 \Longrightarrow y' = 3 \Longrightarrow (24; 36) \\ x' = 3 \Longrightarrow y' = 2 \Longrightarrow (36; 24) \\ x' = 4 \Longrightarrow y' = 1 \Longrightarrow (48; 12) \end{cases}$

L'ensemble de solution est : $S = \{(12; 48); (24; 36); (36; 24); (48; 12)\}$

IV. Nombres premiers

1- Définition :

On dit qu'un nombre entier naturel p est premier s'il possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et p.

Exemple :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ;13 ; … sont les nombres premiers.

Remarque :

- 0 et 1 ne sont pas de nombres premiers ;

- 2 est le seul nombre premier pair ;
- Deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux ;
- Deux nombres entiers sont premiers entre eux, si 1 est leur diviseur commun.
- Deux nombres premiers entre eux ne sont pas forcément premiers.

<u>Propriété</u> :

- Tout entier naturel n différent de 0 et de 1 admet au moins un diviseur premier.
- Il existe une infinité de nombres premiers.

2- <u>Décomposition en produit de facteurs premiers</u>

<u>Théorème</u> :

Soit n, un entier naturel, $(n \geq 2)$.

Il existe des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_k$ et des entiers naturels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tels que :

$n = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \dots \times {p_k}^{\alpha_k}$, avec $p_1 < \ p_2 < \cdots < \ p_k$.

Cette décomposition est unique.

<u>Exemple</u> :

Décomposons en produit de facteurs premiers le nombre 4872.

On a :

$$\begin{array}{l|l}
4872 & 2 \\
2436 & 2 \\
1218 & 2 \\
609 & 3 \\
203 & 7 \\
29 & 29 \\
1 & 1
\end{array}$$

Donc $4872 = 2^3 \times 3 \times 7 \times 29$

3- <u>Utilisation de la décomposition</u>

Exemple :

Déterminons le PPCM et le PGCD de 700 et 18375

On a :

$$\begin{array}{l|l}
700 & 2 \\
350 & 2 \\
175 & 5 \\
35 & 5 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
18375 & 3 \\
6125 & 5 \\
1125 & 5 \\
245 & 5 \\
49 & 7 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}$$

$700 = 2^2 \times 5^2 \times 7$ et $18375 = 3 \times 5^3 \times 7^2$

Donc : $PPCM(700; 18375) = 2^2 \times 3 \times 5^3 \times 7^2 = 73500$

$PPCM(700; 18375) = 5^2 \times 7 = 175$

Chapitre 2 : CALCULS VECTORIELS

I. Barycentre de n points pondérés

$I_{.1}$ – Théorème et définition:

1.1 – Théorème : soit $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ des points et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_n$ des réels.

Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ (somme des coefficients), alors il existe un unique point G tel que : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA}i = \vec{0}$

1.2 – Définition :

- On appelle ***n points pondérés***, tout couple$(A_i,\ \alpha_i), 1 \leq i \leq n$ où $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ sont des points et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_n$ des nombres réels et sont appelés coefficients des points $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$.
- Soit $(A_i,\ \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ des points pondérés tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.
  On appelle ***barycentre*** des points pondérés$(A_i,\ \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$, l'unique point G tel que : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA}i = \vec{0}$, on note :

  $$\boldsymbol{G = bar\,\{(A_1,\ \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \ldots; (A_n, \alpha_n)\}}$$

Démonstration :

En effet, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA}i = \vec{0}$

En introduisant le point O à l'aide de la relation de Chasles, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha i \overrightarrow{GA}i = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_i}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GO} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA}i = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GO} = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA}i$$
$$\Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OG} = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA}i$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha i} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA}i}$$

1.3 – Propriétés:

1.3.1 – Homogénéité :

$G = bar\,\{(A_1,\ \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \ldots; (A_n, \alpha_n)\} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA}i = \vec{0}$

$\forall k \in \mathbb{R}^*$, on a : $\sum_{i=1}^{n} k\alpha_i \overrightarrow{GA}i = \vec{0} \Leftrightarrow\ G = bar\,\{(A_1,\ k\alpha_1); (A_2, k\alpha_2); \ldots; (A_n, k\alpha_n)\}$

On a propriété suivante :

1.3.2 – Propriété :

Le barycentre de plusieurs points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul.

Remarque : Le barycentre de points pondérés affectés des coefficients égaux est appelé ***isobarycentre*** de ce point.

$I_{.2}$ – Réduction de la somme : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA}i$

2.1 – Propriété :

Soit $(A_i,\ \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ des points pondérés. Pour tout point M, on a :

- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq \mathbf{0}$, alors $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_i \overrightarrow{MAi}} = (\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_i})\overrightarrow{\boldsymbol{MG}}$ où G est le barycentre des points pondérés $(A_i,\ \alpha_i)_{\ 1 \le i \le n}$.
- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \mathbf{0}$, alors le vecteur $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_i \overrightarrow{MAi}}$ est indépendant du point M.

Démonstration :

1- Pour $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, on a : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MAi} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MG} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GAi}$, or $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GAi} = \vec{0}$, alors : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\boldsymbol{MAi}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\boldsymbol{MG}}$

2- Pour $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, alors $\alpha_1 = -\sum_{i=2}^{n} \alpha_i$

Donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MAi} = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MAi}$

$$= -(\sum_{i=2}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{MA_1} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MAi}$$
$$= \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_1M} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MAi}$$
$$= \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{A_1M} + \overrightarrow{MAi} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_i \overrightarrow{MAi}} = \sum_{i=2}^{n} \boldsymbol{\alpha_i \overrightarrow{A_1Ai}}$$

D'où le vecteur $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_i \overrightarrow{MAi}}$ est indépendant du point M.

Exemple :

Soit ABC un triangle et M un point du plan.

Réduire et construire les sommes suivantes :

a) $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

b) $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

Solution

ABC est un triangle, M un point du plan, réduisons les sommes suivantes :

a) $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_i} = (\mathbf{3} + \mathbf{1} + \mathbf{1}) = \mathbf{5} \neq \mathbf{0}$,

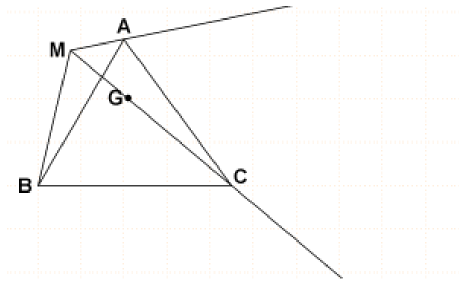
Posons $G = \{(A, 3); (B, 1); (C, 1)\}$ tel que $3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

On a: $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{u}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} = \vec{u}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{u}$

$\Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{MG}$, car $3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$



Donc $\mathbf{3}\overrightarrow{\boldsymbol{MA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{MB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{MC}} = \mathbf{5}\overrightarrow{\boldsymbol{MG}}$

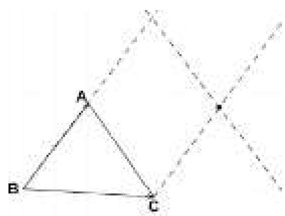
$G = \{(A, 3); (B, 1); (C, 1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_i} = (\mathbf{1} - \mathbf{2} + \mathbf{1}) = \mathbf{0}$

$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Le vecteur $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est ainsi indépendant du point M.



$I_{.3}$ – Coordonnées du barycentre

L'espace $\mathcal{E}$ est minus du repère $(O; \vec{\imath}: \vec{\jmath}; \vec{k})$.

Soit $A_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, A_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \dots, A_n\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ les points considérés et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les nombres réels.

$$G = bar\{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \dots; (A_{n_1}, \alpha_n)\} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_i}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GO} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GO} = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} = \frac{\alpha_1 OA_1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} + \frac{\alpha_2 A_2}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} + \cdots, \frac{\alpha_n A_n}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_n}, \text{ or } A_i = (x_i;\ y_i;\ z_i)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} = \dfrac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \ldots + \alpha_n x_n}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \\ y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} = \dfrac{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots \ldots + \alpha_n y_n}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \\ z_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} = \dfrac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots \ldots + \alpha_n z_n}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \end{cases}$$

Donc si $(x_i;\ y_i;\ z_i)$ sont les coordonnées des points $A_i (1 \leq i \leq n)$, alors G a pour coordonnées: $G\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}; \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}; \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\right)$

On a la propriété suivante :

3.1 − Propriété :

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni du repère $\left(O; \vec{\imath}: \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$, $(A_i,\ \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ des points pondéré. Si on a $A_i(x_i, y_i, z_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $G(x;\ y; z)$ et si $G = bar\left\{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \ldots; \left(A_{n_1}, \alpha_n\right)\right\}$, alors G est de coordonnées : $G\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}, \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}, \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\right)$

Application :

L'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère $\left(O; \vec{\imath}: \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$. On considère les points $A(3, -4, 2)$, $B(1, 5, -2)$, et $C(-4, -1, 2)$

a) Calculer les coordonnées de $I = bar\{(B, 2); (C, 3)\}$
b) Calculer les coordonnées de $J = bar\{(A, 5); (B, 2); (C, 3)\}$
c) Vérifier que J est milieu de $[AI]$

Solution

On a : $A(3, -4, 2), B\ (1, 5, -2)$ et $C(-4, -1, 2)$

a) Calculons les coordonnées de $I = bar\{(B, 2); (C, 3)\}$

On a : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (2 + 3) = 5$, alors

$I\left(\frac{2\times1+3\times(-4)}{5}; \frac{2\times5+3\times(-1)}{5}; \frac{2\times(-2)+3\times2}{5}\right)$, donc $\boldsymbol{I}\left(\mathbf{-2}; \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}}; \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right)$

b) Calculons les coordonnées de $J = bar\{(A, 5); (B, 2); (C, 3)\}$

On a : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (5 + 2 + 3) = 10$, alors

$J\left(\frac{5\times3+2\times1+3\times(-4)}{10}; \frac{5\times(-4)+2\times5+3\times(-1)}{10}; \frac{5\times2+2\times(-2)+3\times2}{10}\right)$, donc $J\left(\frac{1}{2}; -\frac{13}{10}; \frac{6}{5}\right)$.

c) Vérifions que J est milieu de $[AI]$

J est milieu de $[AI]$, alors : $\begin{cases} x_J = \frac{x_A+x_I}{2} \\ y_J = \frac{y_A+y_I}{2} \\ z_J = \frac{z_A+z_I}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{3-2}{2} \\ -\frac{13}{10} = \frac{-4+\frac{7}{5}}{2} \\ \frac{6}{5} = \frac{2+\frac{2}{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J = \frac{1}{2} \\ y_J = -\frac{13}{10} \\ z_J = \frac{6}{5} \end{cases}$

$I_{.4}$ – Barycentre partiel et ensemble des barycentres

4.1 – Barycentre partiel :

4.1.1 –Propriéte :

Le barycentre d'un système de n points pondérés $(n \geq 3)$ reste inchangé lorsqu'on remplace une partie P d'entre eux $(1 < P < n)$ dont la somme des coefficients en non nulle, par leur barycentre partiel affecté de cette somme.

Démonstration :

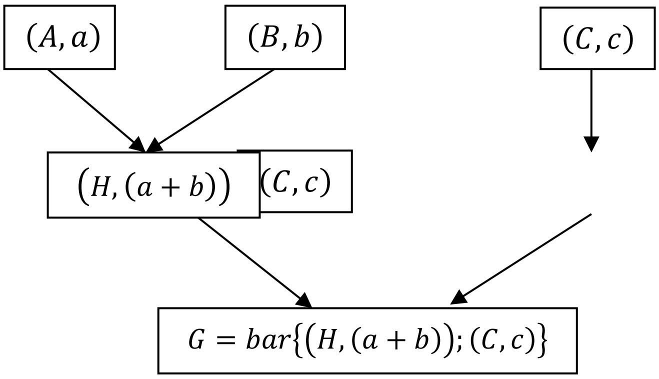
Soit $(A, a);\ (B, b)\ et\ (C, c)$ trois points pondérés.

$G = bar\{(A, a); (B, b); (C, c)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Si $a + b + c \neq 0\ et\ si\ a + b \neq 0$, alors on pose :

$H = bar\{(A, a); (B, b)\} \Longrightarrow G = bar\{(H, (a + b)); (C, c)\}$

D'où on aura : $(a + b)\overrightarrow{GH} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$



Exemple :

Construire le centre de gravité du tétraèdre SABC des points pondérés : $(S, 1); (A, 1); (B, 1); (C, 1)$ en utilisant le théorème (propriété) des barycentres partiels

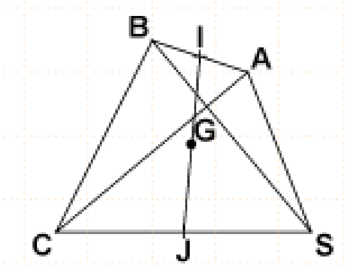
Résolution

$G = bar\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (S, 1)\}$

Posons : $I = bar\{(A, 1); (B, 1)\}$, donc I est milieu de $[AB]$.

$J = bar\{(C, 1); (S, 1)\}$, donc J est milieu de $[SC]$.

D'où $G = bar\{(I, 2); (J, 2)\}$, alors G est milieu de $[IJ]$.



4.2 — Ensemble des barycentres de points pondérés.

4.2.1 —Propriété :

Soit A, B et C trois points pondérés affectés des coefficients $\alpha, \beta\ et\ \gamma$;

- Si G est barycentre de $(A, \alpha)\ et\ (B, \beta)$, alors $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$. Donc l'ensemble des barycentres de deux points distincts A et B est la droite (AB) ;
- Si G est barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta)$ et (C, γ), alors $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$. Donc l'ensemble des barycentres de trois points non alignés A, B et C est le plan (ABC).

$I_{.5}$ – Utilisation du barycentre

5.1 —Alignement de points :

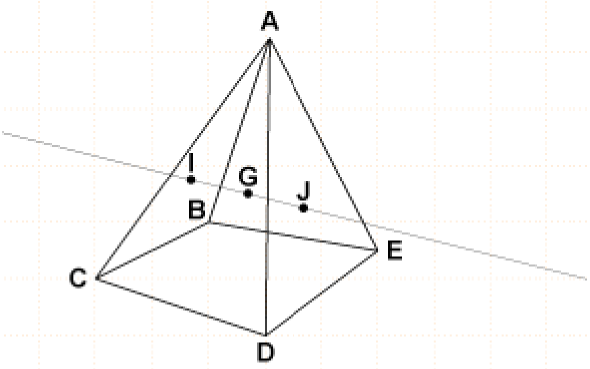
Soit ABCD un pyramide de sommet A. On désigne par I et J les centres de gravités respectifs des triangles ABC et ADE. G, le barycentre des points $(A, 3), (B, 2), (C, 2); (D, 1)\ et\ (E, 1)$.

Démontrer que les points I, G et J sont alignés.

On a: $G = bar\{(A, 3), (B, 2), (C, 2); (D, 1); (E, 1)\}$, or $\begin{cases} I = bar\{(A, 2), (B, 2), (C, 2)\}; \\ J = bar\{(A, 1); (D, 1); (E, 1)\}, \end{cases}$

Donc $G = bar\{(I, 6), (J, 3)\}$. G est barycentre des points I et J.

D'où les point I, G et J sont alignés.



Théorème : Pour démontre que trois points sont alignes, il suffit de démontrer que l'un est le barycentre des deux autres.

5.2 — Parallélisme et concours de droites

Soit ABC un triangle, $\alpha, \beta\ et\ \gamma$ trois nombres réels tels que $\alpha + \beta \neq 0;\ \alpha + \gamma \neq 0\ et\ \beta + \gamma \neq 0$

On note :

- A' : le barycentre de $(B, \beta)\ et(C, \gamma)$
- B' : le barycentre de $(A, \alpha)\ et\ (C, \gamma)$
- C' : le barycentre de$(A, \alpha)\ et\ (B, \beta)$

1) Démontrer que si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point que l'on précisera.
2) Démontrer que si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles

Solution :

1) Démontrer que si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point que l'on précisera.

En effet , si $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, alors on pose : $G = bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$
On a :

- $G = bar\{(A,\alpha);(A',\ \beta+\gamma)\}$, donc $G \in (AA')$
- $G = bar\{(B,\beta);(B',\ \alpha+\gamma)\}$, donc $G \in (BB')$
- $G = bar\{(C,\gamma);(C',\ \alpha+\beta)\}$, donc $G \in (CC')$

Le point G appartient aux droites (AA'), (BB') et (CC') d'où elles sont concourantes au point G.

2) Démontrer que si $\alpha+\beta+\gamma = 0$, alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles

Pour tout M du plan, $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M.

Posons : $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$ et en remplaçant M par A',

On a : $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{A'A}+\beta\overrightarrow{A'B}+\gamma\overrightarrow{A'C}$. Or $\beta\overrightarrow{A'B}+\gamma\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$ car $A' = bar\{(B,\beta);(C,\gamma)\}$.

Donc $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{A'A}$ et on démontre de la même manière que : $\beta\overrightarrow{B'B} = \gamma\overrightarrow{C'C} = \vec{u}$

D'où les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.

<u>Théorème</u> : Pour démontrer deux droites (AA') et (BB') sont sécantes en un point G, on peut démontrer que G est à la fois barycentre des points A et B et G barycentre des points A' et B'.

<u>Exercice d'application</u> :
Soit ABCD un parallélogramme.
Q est le symétrique du milieu de $[AD]$ par rapport à A et $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
Démontrons que les points P, Q et C sont alignés.

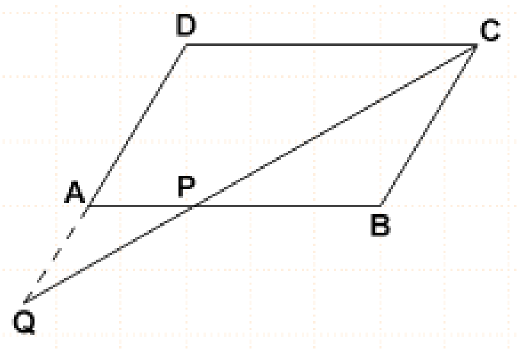
$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Longrightarrow P = bar\{(A,2);(B,1)\}$

$\overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$= -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$, or $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AP}$

$\Longrightarrow \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AP}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



II. Lignes de niveau

$II_{.1}$ – <u>Lignes de niveau</u> de $f : \longmapsto f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, MA^2 i$.

1.1 – <u>Définition</u> :
Soit $(A_i,\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ des points pondérés du plan et k un nombre réel.
On appelle ligne de niveau ou surface de niveau k de l'application f définie par :
$f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M^2 A_i$; l'ensemble (E_k) des points M du plan tels que$f(M) = k$.

<u>1^er cas</u> : La somme des coefficients est non nulle ($\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$)
Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors on pose $G = bar\left\{(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}\right\}$ tel que : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_\imath} = \vec{0}$
On a: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i M^2 A_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_\imath}\right)^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(MG^2 + GA^2 i + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA_\imath}\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, G^2 A_i + 2\overrightarrow{MG} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_\imath}$$; or $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_\imath} = \vec{0}$

$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M^2 A_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, G^2 A_i$; or $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i M^2 A_i = k$

On en déduit que $\forall\, k \in \mathbb{R}$, $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, G^2 A_i = k$

$\Longleftrightarrow MG^2 = \frac{k - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i G A^2 i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$

En posant $= \frac{k - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i G^2 A_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$, on a : $\boldsymbol{MG^2 = \lambda}$

<u>Retenons bien</u>

- Si < 0 , alors M n'existe pas et la ligne de niveau $(E_k) = \emptyset$;
- Si $\lambda = 0$, alors M se réduit au point G et (E_k), c'est à dire $(E_k) = \{G\}$;
- Si > 0 , alors (E_k) est un cercle ou sphère de centre G et de rayon $\sqrt{\lambda}$.

<u>Remarque</u> :
Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors la surface de niveau k de l'application $M \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, MA^2 i$ est soit

- Un ensemble vide : $\emptyset$
- Un point G : $\{G\}$ ou
- Un cercle ou une sphère de centre G où est le barycentre de $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$.

<u>Exemple</u> :
Soit ABCD un rectangle. $AB = 2$ et $BC = 1$
Déterminons et construisons l'ensemble des points M tels que :

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 10$

On a : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 4$, alors on pose : $G = bar\{(A,1),(B,1),(C,1);(D,1)\}$

Donc $f(M) = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$

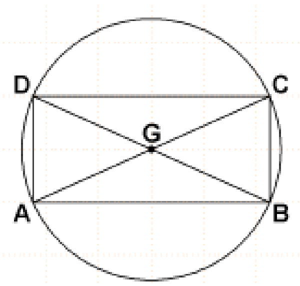
Or G est isobarycentre donc $GA^2 = GB^2 = GC^2 = GD^2$,

Alors $f(M) = 4MG^2 + 4GA^2$, or $2GA = AC \Longrightarrow 4GA^2 = AC^2$ et $AC^2 = \left(\sqrt{AB^2 + BC^2}\right)^2 = 5$

On a : $f(M) = 10 \Longleftrightarrow 4MG^2 + AC^2 = 10$

$$\Longleftrightarrow MG^2 = \frac{1}{4}(10 - 5) = \frac{5}{4}$$

$$\Longleftrightarrow MG = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$



En posant $A = M$, on a : $f(A) = 0 + 4 + 5 + 1 = 10$.

D'où E_{10} est un cercle de centre G et de rayon 10.

<u>2^e cas</u> : La somme des coefficients est nulle ($\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$)

Soit O un point quelconque du plan.

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i M^2 A_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}\right)^2$

$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OM}\right)^2$

$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i O\, A_i^2 - 2\overrightarrow{OM} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} + OM^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

On en déduit que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i M^2 A_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i O\, A_i^2 - 2\overrightarrow{OM} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$ car $OM^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$

Posons $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$

$f(M) = k \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i O^2 A_i - 2\vec{u}.\overrightarrow{OM} = k$

$\Leftrightarrow 2\vec{u}.\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i O^2 A_i - k$

$\Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i O^2 A_i - k\right)$

Désignons par H, le projeté orthogonal du point M dur la droite $(0;\vec{u}\,)$, $\overline{OP} = \vec{u}$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$.

$\overline{OH} \times \overline{u} = r$, avec $r = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i O^2 A_i - k\right)$, alors $\overline{OH} = \frac{r}{\overline{OP}}$.

D'où $x_H = \frac{r}{\overline{OP}}$ dans le repère $(0;\vec{u}\,)$. Donc l'ensemble des points cherchés est la droite perpendiculaire en $(0;\vec{u}\,)$ en H.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$, et $r = 0$, alors des points cherchés est l'espace ;
- Si $\vec{u} = \vec{0}$, et $r \neq 0$, alors des points cherchés est un ensemble vide ;

1.1 – Propriété :

Soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \le i \le n}$ des points pondérés tels que : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ et O un point du plan.

- Pour tout point M du plan, on a : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i M^2 A_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i O^2 A_i - 2\vec{u}.\overrightarrow{OM}$ où $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$ le vecteur indépendant du point M.
- La ligne de niveau k de l'application $M \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M^2 A_i$ est :
    - Soit $\emptyset$; c'est-à-dire $E_k = \emptyset$
    - soit l'espace Ɛ, si $\vec{u} = \vec{0}$; c'est-à-dire $E_k = \mathcal{E}$
    - Soit une droite de vecteur normal $\vec{u}$, si $\vec{u} \neq \vec{0}$

Exemple 1:

Soit ABC un triangle isocèle tel que $AB = 4\ et\ CB = CA = 6$

Déterminons et construisons l'ensemble des points M tels que : $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 0$

On a : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 + 1 - 2 = 0$, la somme des coefficients étant nulle, le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M.

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC}$, avec I milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{IC}$

On a: $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2$

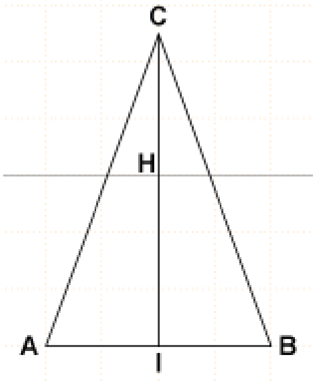
$= MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + IB^2 - 2MI^2 - 4\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC} - 2IC^2$

$= 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC}\right) + IA^2 + IB^2 - 2IC^2$

$= 2\overrightarrow{MI}\left(-2\overrightarrow{IC}\right) + IA^2 + IB^2 - 2IC^2$

$= 2\overrightarrow{MI}\left(-2\overrightarrow{IC}\right) + 2^2 + 2^2 - 2\left(AC^2 - \frac{1}{4}AB^2\right)$, car $IC^2 = AC^2 - \frac{1}{4}AB^2$

$= 2\overrightarrow{MI}\left(-2\overrightarrow{IC}\right) + 8 - 2\left(36 - \frac{1}{4} \times 16\right)$



$= 2\overrightarrow{MI}\left(-2\overrightarrow{IC}\right) + 8 - 2 \times 32$

$= 2\overrightarrow{MI}\left(-2\overrightarrow{IC}\right) - 56$

$\Longrightarrow MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = -4\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC} - 56$,

or $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 0$

$\Longrightarrow -4\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC} - 56 = 0$

$\Longrightarrow 4\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IC} = 56$

$\Longrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IC} = 14$.

Soit H le projeté orthogonal de M sur (IC).

On a : $\overline{IH}.\overline{IC} = 14 \Longrightarrow \overline{IH} = \frac{14}{\sqrt{32}} = \frac{14\sqrt{32}}{32} = \frac{7}{16}\overline{IC}$

$\overline{IH} = \frac{7}{16}\overline{IC}$. Donc l'ensemble des points M tels que : $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 0$ est la perpendiculaire à (IC) passant par H.

Exemple 2 :

Soit ABCD, un tétraèdre régulier d'arrête a.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $3MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 - 6MD^2 = 6a^2$

La somme des coefficients étant nulle, alors le vecteur $\vec{u} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 6\overrightarrow{MD}$ est independant du point M.

En fixant pour $M = D$, on a : $\vec{u} = \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC}$

$\vec{u} \neq \vec{0}$ et $DA^2 + 2DB^2 + 3DC^2 = a^2 + 2a^2 + 3a^2 = 6a^2$

$6a^2 = 6a^2$, l'ensemble des points cherchés est la droite de vecteur normal $\vec{u}$ passant par D.

II_2 −**Lignes de niveau** $\boldsymbol{M \longmapsto \frac{MA}{MB}}$

$f(M) = k \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = k$

Déterminons l'ensemble (E_k) des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = k$, avec $k > 0$.

- Si $k = 1$, alors $\frac{MA}{MB} = 1 \Leftrightarrow MA = MB, alors\ (E_k)$ est la médiatrice de $[AB]$;
- Si $k \neq 1$, alors $\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow MA^2 - k^2MB^2 = 0$

La somme des coefficients $1 - k^2 \neq 0$, alors posons $G = bar\{(A,1); (B; -k^2)\}$

$MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - k^2)MG^2 + GA^2 - k^2GB^2 = 0$

$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{k^2GB^2 - GA^2}{1 - k^2}$

Or $G = bar\{(A,1);(B;-k^2)\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AG} = \frac{-k^2}{1-k^2}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BG} = \frac{1}{1-k^2}\overrightarrow{BA} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AG = \frac{k^2}{1-k^2}AB \\ BG = \frac{1}{1-k^2}AB \end{cases}$

$$\Rightarrow MG^2 = \frac{1}{1-k^2}\left(\frac{k^2AB^2}{(1-k^2)^2} - \frac{k^4AB^2}{(1-k^2)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1-k^2}\left(\frac{(1-k^2)k^2AB^2}{(1-k^2)^2}\right)$$

$$MG^2 = \frac{k^2AB^2}{(1-k^2)^2} \Rightarrow MG = \frac{kAB}{|1-k^2|}$$

Donc E_k est le cercle de centre G et de rayon $= \frac{kAB}{|1-k^2|}$.

Autre Méthode :

$MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0$

Posons $\begin{cases} I = bar\{(A,1);(B;-k)\} \\ J = bar\{(A,1);(B;k)\} \end{cases}$

Alors $(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{MI}.(1+k)\overrightarrow{MJ} = 0$

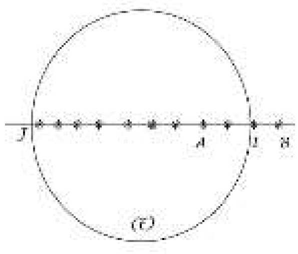
Or $1 - k \neq 0$ et $1 + k \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$

Donc l'ensemble des point est le cercle de diamètre $[IJ]$.

Exemple :

On donne $AB = 4cm.$

Déterminons et construisons l'ensemble de (E) des points M du plan tel que $3MA = 5M.$



On a : $9MA^2 - 25MB^2 = 0 \Leftrightarrow (3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB})(3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB}) = 0$

Posons $\begin{cases} I = bar\{(A,3);(B;-5)\} \\ J = bar\{(A,3);(B;5)\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AI} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB} \end{cases}$

$$(3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB})(3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow -2\overrightarrow{MI}.8\overrightarrow{MI} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MI} = 0.$$

D'où l'ensemble des points cherchés est le cercle de diamètre $[IJ]$.

II_3 –Lignes de niveau $M \rightarrow Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right)$

Soit A et B deux points distincts du plan et M un point du plan distinct de A et B.

L'ensemble des points M du plan tel que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = 0[\pi]$ est la droite (AB) privée du des points A et B.

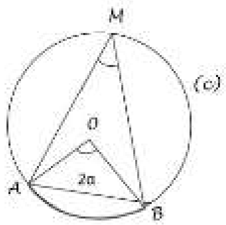
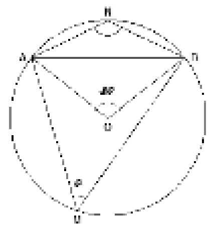
- Si $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = 0$, alors $M \in (AB) \setminus [AB]$;
- Si $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \pi$, alors $M \in (AB) \setminus \{A;B\}$;

$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = 0[\pi]$

1[er] Cas : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = 0$

2^e Cas : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \pi$

Etudions le cas où $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \alpha$; avec $\alpha \in]-\pi; 0[\cup]0; \pi[$

Si $\alpha > 0$  $M \in \overset{\smile}{AB} \Leftrightarrow Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \alpha$ $M \in \widehat{AB} \Leftrightarrow Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \alpha - \pi$	Si $\alpha > 0$  $M \in \overset{\smile}{AB} \Leftrightarrow Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \alpha$ $M \in \widehat{AB} \Leftrightarrow Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \alpha + \pi$

Donc $\forall\alpha \in]-\pi; 0[\cup]0; \pi[$, $2Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = 2\alpha$

Nous admettons que : $\forall M \in (\mathcal{C}) \setminus \{A; B\}$, on a :

$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \alpha$ si M appartient à l'un des deux arcs.

$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \begin{cases} \alpha + \pi;\ \alpha < 0 \\ \alpha - \pi; si\ \alpha > 0 \end{cases}$

Conclusion :

Soit A et B deux points distincts du plan et α un nombre de $]-\pi; 0[\cup]0; \pi[$. On note O, le point de la médiatrice $[AB]$ tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) = 2\alpha$ et $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O passant par A et B.

L'ensemble des points M du plan tels que mes $((\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \alpha$ est l'un des deux arcs, privés des points A et B, définis sur (C) par la corde $[AB]$.

Application :

Soit A et B deux points distincts du plan.

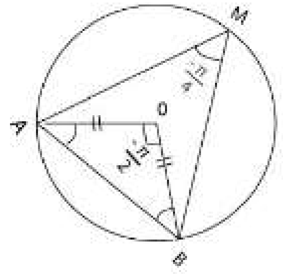
1) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tel que :
   a) $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = -\frac{\pi}{4}$
   b) $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \frac{2\pi}{3}$

Résolution :

A et B sont deux points du plan

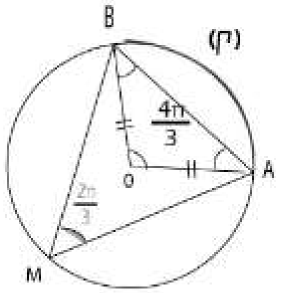
1) Déterminons et construisons l'ensemble des points M tel que :
   a) $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = -\frac{\pi}{4}$

Soit O un point de la médiatrice de [AB].



On a donc $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) = 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$.
L'ensemble des points M $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = -\frac{\pi}{4}$ est le grand arc $\breve{AB}$ de la corde de [AB] privé des points A et B.

b) $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \frac{2\pi}{3}$
Soit O un point de la médiatrice de [AB] tel que :
On a: $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) = \frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$
Soit (Γ) Le cercle de centre O et de rayon OA.
L'ensemble des points cherché est le petit arc $\widehat{AB}$ de [AB] privé des points A et B.



III. Produits Vectoriels

Rappels

- Représentation paramétrique

Soit $A(3;4;-1)$ et $B(2;-3;5)$.
Donnons une représentation paramétrique de la droite (AB).
Un vecteur directeur de la droite (AB) a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}(-1;-7;6)$.
$\forall M(x;y;z) \in (AB)$, la représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 - 7t \\ z = -1 + 6t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

S'il faut que $M \in [AB]$, il faut que $t \in [0;1]$,
S'il faut que $M \in (AB)$, il faut que $t \in \mathbb{R}_+$

- Produit scalaire :

Dans un repère orthonormé, si on a deux vecteurs $\vec{u}(x;\ y;\ z)\ et\ \vec{v}(x';\ y';\ z')$, alors :
$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$. Cette égalité n'est vraie que dans le repère orthonormé.
Si $\vec{u}$ dirige (D) et $\vec{v}$ dirige (D'), alors : $\boldsymbol{(D) \perp (D')}$ **si** $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = 0}$.
Soit un plan $\mathcal{P}(E;\ \vec{a};\ \vec{b})$ et (D) une droite dirigée par $\vec{u}$. $\boldsymbol{(D) \perp (\mathcal{P})}$ **si** $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{a} = 0}$ **et** $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{b} = 0}$

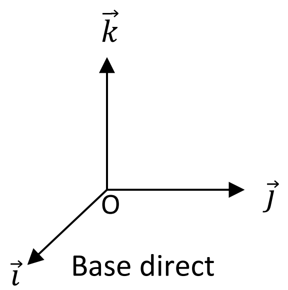
- Parallélisme et orthogonalité du plan

Deux plans sont parallèles si leurs vecteurs normaux sont parallèles ;
Deux plans sont orthogonaux si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
$\mathcal{P}_1$ passe par E et de vecteur normal $\vec{n}$. $M \in \mathcal{P}_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{EM}.\vec{n} = 0$
<u>Exemple</u> :
Soit $E(2; 1; 1)$, $\vec{n}(-3; 1; 4)$ et $M(x; y; z)$ un point quelconque du plan.
$M(x; y; z) \in \mathcal{P}_1 \Leftrightarrow -3(x-2) + 1(y-1) + 4(z-1) = 0$
$\Leftrightarrow -3x + y + 4z + 1 = 0$
Un équation du plan est de la forme $\mathcal{P}_1 : ax + by + cz + d = 0$, avec $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur normal du plan.

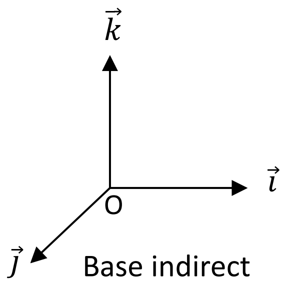
- <u>Distance d'un point à un plan</u>

$\mathcal{P}: ax + by + cz + d = 0$, $(\Delta): ax + by + c = 0$ et $M(x; y; z)$. $\vec{n}(a; b; c)$ est un vecteur normal du plan.
$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{|\vec{n}|}$ et $d\big(M_0, (\Delta)\big) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

a –<u>Orientation de l'espace</u>
L'espace peut être orienté de deux manières différentes.
La figure 1 indique le repère $(0;\ \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ dans le sens direct ;
La figure 2 indique le repère $(0;\ \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ dans le sens indirect.



Base direct



Base indirect

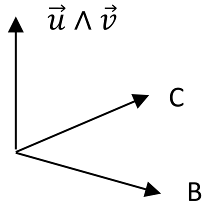
<u>Remarque</u> :
Une permutation circulaire des vecteurs conserve l'orientation.

- L'échange de deux vecteurs change l'orientation. Les bases $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ et $(\vec{\imath}; \vec{k};\ \vec{\jmath})$ sont de sens contraire.
- Le remplacement d'un vecteur par son opposé change l'orientation.

b – <u>Le produit Vectoriel</u>

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. A, B et C trois points tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{Ac} = \vec{v}$
On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaire, alors le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est caractérisé par :
  - Direction : $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$;
  - Norme : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| sin\left(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}\right)$;
  - Sens : $(\vec{u};\ \vec{v};\ \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe.



Attention : $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur et $\vec{u}.\vec{v} \in \mathbb{R}$.

c – Propriété du produit Vectoriel

1- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ d'une base ω ;
   On a : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires.
2- Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ d'une base ω , on a :
   - $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{v}\,)$
   - $(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (k\vec{v}\,) = k(\vec{u} \wedge \vec{v}\,)$
   - $\vec{u} \wedge (\vec{u} + \ \vec{w}\,) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \ \vec{w}$
   - $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \ \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \ \vec{w}$

c – Coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans la base directe $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$

Si $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$, le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k})$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\vec{\imath} + (zx' - xz')\vec{\jmath} + (xy' - yx')\vec{k}$$

Alors : $\vec{u} \wedge \vec{v}(yz' - zy';\ zx' - xz';\ xy' - yx')$

Disposition pratique :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{\imath} + \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k} \Longrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v}\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\right)$$

Exemple :

Soit les vecteurs $\vec{u}(2;\ -1; 1)$ *et* $\vec{v}(-2; 1;\ -3)$

Déterminons les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\vec{\imath} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (3 - 1)\vec{\imath} + (-2 + 6)\vec{\jmath} + (2 - 2)\vec{k}$$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 0\vec{k}$, alors : $\vec{u} \wedge \vec{v}(2; 4; 0)$

Travaux pratiques

1- L'équation d'un plan déterminé par trois points.

Soit $A(1;\ -1; 1), B(2; 1; 4)$ *et* $C(4; 1; 2)$

1) Démontrer que A, B et C ne sont pas alignés,
2) Déterminer une équation du plan (ABC)

Solution :

Soit $A(1;\ -1; 1), B(2; 1; 4)$ *et* $C(4; 1; 2)$

1) Démontrons que A, B et C ne sont pas alignés

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\vec{\imath} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$

$$= (2-6)\vec{i} + (9-1)\vec{j} + (2-6)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, donc les points A, B et C ne sont pas alignés, par conséquent, ils définissent un plan.

2) Déterminons une équation du plan (ABC).

Soit $M(x; y; z)$ un point du plan (ABC).

On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -4(x-1) + 8(y+1) - 4(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + 8y - 4z + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2y + z - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{(ABC) : x - 2y + z - 4 = 0}$$

Le vecteur normal de (ABC) est $\vec{n}(1;\ -2; 1)$

2- <u>Position relative de deux plans</u>

<u>Exemple</u> 1

Soit (P) le plan d'équation $x + 4y + 2z - 1 =\ 0$ et (P') le plan passant par $A(-1; 0; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}'(2; 1; -3)$

a) Démontrer que les plans $(P)\ et\ (P')$ sont perpendiculaires ;
b) Déterminer un vecteur directeur de la droite d'intersection de $(P) et\ (P')$;
c) Donner une représentation paramétrique de cette droite passant par le point A.

<u>Solution</u>

$(P) : x + 4y + 2z\ - 1 = 0$, alors (P) a pour vecteur normale $\vec{n}(1; 4; 2)$.

a) Démontrons que les plans $(P)\ et\ (P')$ sont perpendiculaires ;

   En effet, $(P)\ et\ (P')$ sont perpendiculaire si et seulement si leurs vecteurs normaux sont perpendiculaire i.e. $\vec{n}.\vec{n}'$=0

   On a : $\vec{n}.\vec{n}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 + 4 - 6 = 0$

   $\vec{n}.\vec{n}' = 0$, d'où $(P)\ et\ (P')$ sont perpendiculaires.

b) Déterminons un vecteur directeur de la droite d'intersection de $(P) et\ (P')$;

   Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de cette droite que nous nommons (D).

   On a :

$$\vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-12-2)\vec{i} + (4+3)\vec{j} + (1-8)\vec{k}$$

$$= -14\vec{i} + 7\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

Donc $\vec{u}(-2; 1;\ -1)$ est le vecteur qui dirige $\{(D)\} = P \cap P'$

c) Donnons une représentation paramétrique de cette droite passant par le point A.

Soit $M(\ x;\ y;\ z)$ un point de la droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}(-2; 1;\ -1)$ passant par $A(-1; 0; 1)$ tel que : $\overrightarrow{AM} =\ t\vec{u},\ \lambda \in\ \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases} ;\ t \in\ \mathbb{R}$$

Donc une représentation paramétrique de (D) est : $\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} ;\ t \in\ \mathbb{R}$

<u>Exemple2</u> :

Soit $A(1; 1; 0)$, $B(1; 2; 1)$ et $A(3; -1; 2)$ trois points du plan.

$\mathcal{P}: x + 2y - z - 4 = 0$

$\mathcal{P}': 2x + 3y - 2z - 5 = 0$

Déterminer l'intersection de trois plans (ABC), $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

<u>Solution</u> :

$A(1; 1; 0)$, $B(1; 2; 1)$ et $A(3; -1; 2)$

$\mathcal{P}: x + 2y - z - 4 = 0$

$\mathcal{P}': 2x + 3y - 2z - 5 = 0$

Déterminons l'intersection de trois plans (ABC), $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

On a : $\overrightarrow{AB}(0; 1; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(2; -2; 2)$ et

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (2 + 2)\vec{i} + (2 + 0)\vec{j} + (-2)\vec{k}$$

$$= \left(4\vec{i}; 2\vec{j};\ -2\vec{k}\right)$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(4; 2;\ -2)$

Soit $M(x; y; z)$ un point du plan.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x - 1) + 2(y - 1) - 2z = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 2y - 2z - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - z - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{(ABC) : 2x + y - z - 3 = 0}$$

Soit les trois plans : $\begin{cases} \mathcal{P}: x + 2y - z - 4 = 0 \\ \mathcal{P}': 2x + 3y - 2z - 5 = 0 \\ (ABC): 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$

Soit $H(x; y; z)$, le point d'intersection de ces plans.

Utilisons la méthode de Cramer pour le système : $\begin{cases} x+2y-z-4=0 \\ 2x+3y-2z-5=0 \\ 2x+y-z-3=0 \end{cases}$

Soit Δ le déterminant du système est : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

$$= (-3+2) - 2(-2+1) + 2(-4+3)$$

$$\Delta = -1 \neq 0$$

Le déterminant par rapport à x : $\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

$$= 4(-3+2) - 5(-2+1) + 3(-4+3)$$

$$\Delta_x = -2$$

Le déterminant par rapport à y : $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

$$= (-5+6) - 2(-4+3) + 2(-8+5)$$

$$\Delta_y = -3$$

Le déterminant par rapport à z : $\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$

$$= (9-5) - 2(6-4) + 2(10-12)$$

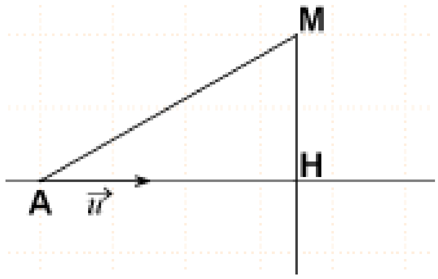
$$\Delta_z = -4$$

Alors $H \begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2 \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3 \\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-4}{-1} = 4 \end{cases}$

Donc le point H, intersection des trois est $H(2; 3; 4)$

3- Distance d'un point à une droite, à un plan.

- Distance d'un point à une droite



Démontrons que $MH = \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

En effet, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) \wedge \vec{u}$

$= \overrightarrow{MH} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{HA} \wedge \vec{u}$, or $\overrightarrow{HA} \wedge \vec{u} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{MH} \wedge \vec{u}$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{MH} \wedge \vec{u}\|$

$= \|\overrightarrow{MH}\|.\|\vec{u}\|.sin\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{MH}\|.\|\vec{u}\|$

D'où $MH = \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

Exemple :

On donne : A$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $M_0\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$

Calculons la distance de M_0 à la droite $D(A,\vec{u})$.

Soit H le projeté orthogonal de M_0 sur la droite (D).

$d\big(M_0,(D)\big) = MH = \frac{\|\overrightarrow{M_0A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

On a : $\overrightarrow{M_0A}\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

$$\overrightarrow{M_0A}\wedge\vec{u} = \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}\vec{\imath} + \begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (-2-3)\vec{\imath} + (3+1)\vec{\jmath} + (-1+2)\vec{k}$$

$$= -5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + \vec{k} \Longrightarrow \overrightarrow{M_0A}\wedge\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\4\\1\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow d\big(M_0,(D)\big) = \frac{\sqrt{25+16+1}}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{3}} = \sqrt{14}$$

Donc $\boldsymbol{d\big(M_0,(D)\big) = \sqrt{14}}$

- <u>Distance d'un point à un plan :</u>

Démontrons que $MH = \frac{|\overrightarrow{MA}.(\vec{u}\wedge\vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$, on pourrait poser : $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{w}$

En effet, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{MA}.(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \big(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}\big).(\vec{u}\wedge\vec{v})$$

$$= \overrightarrow{MH}.(\vec{u}\wedge\vec{v}) + \overrightarrow{HA}.(\vec{u}\wedge\vec{v}),$$

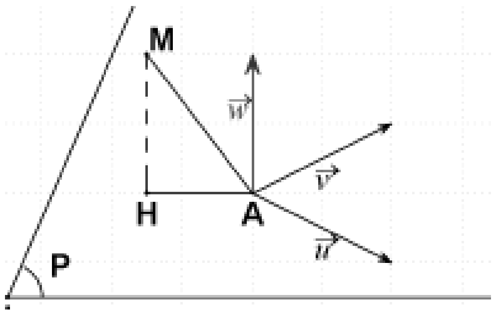
$$= \overrightarrow{MH}.(\vec{w}) + \overrightarrow{HA}.(\vec{w}), \text{ or } \overrightarrow{HA}.\vec{w} = 0$$

$\Longrightarrow \overrightarrow{MA}.(\vec{u}\wedge\vec{v}) = MH.\|\vec{w}\|\times(\pm 1)$ car $\overrightarrow{MH}$ est colinéaire à $\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{v}$

$$\Longrightarrow \big|\overrightarrow{MA}.(\vec{u}\wedge\vec{v})\big| = MH.\|\vec{w}\|$$

$$\Longrightarrow \big|\overrightarrow{MA}.(\vec{u}\wedge\vec{v})\big| = MH.\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$$

D'où $\boldsymbol{MH = \frac{|\overrightarrow{MA}.(\vec{u}\wedge\vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}}$



<u>Exemple</u> :

Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par $A(2;3;1)$ de vecteur normal $\vec{n}(-1;2;1)$.

Calculons la distance du point $B(4;2;1)$ au plan $\mathcal{P}$.

On a : $\vec{n} = \vec{u}\wedge\vec{v}$ et $B = M$

$d(B,\mathcal{P}) = BH = \frac{|\overrightarrow{BA}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ et $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$

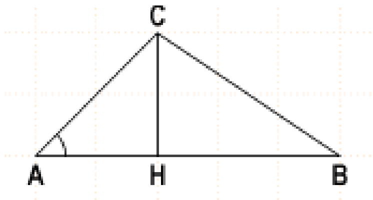
$$BH = \frac{\left|\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1+4+1}}$$

$= \frac{\sqrt{2+4+1}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{6}$

Donc : $\boldsymbol{BH = \frac{7\sqrt{6}}{6}}$

4- <u>Calcul de l'Aire et de Volume</u>

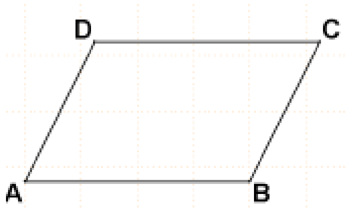
- <u>Aire d'un triangle</u>



On appelle l'aire du triangle ABC, c'est l'expression notée $\mathcal{A}$ tel que :

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$$

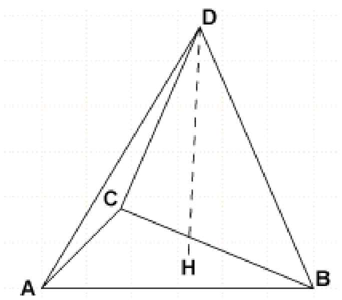
- <u>Aire d'un parallélogramme</u>



On appelle Aire d'un parallélogramme ABCD l'expression notée $\mathcal{A}$ telle que :

$$\mathcal{A}(ABCD) = \frac{1}{6}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = 2\mathcal{A}(ABC)$$

- <u>Volume d'un tétraèdre</u>



On appelle volume de tétraèdre ABCD l'expression notée $\mathcal{V}$ telle que :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\right|$$

<u>Exemple</u> : Soit A$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$; B$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$; C$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et D$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

a) Calculons l'aire du triangle ABC

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}; \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{16+4+36}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{56}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}(ABC) = \sqrt{14}}$$

b) Calculons le volume du tétraèdre ABCD

On a : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}1 & 3\\1 & -1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & -1\\2 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & 0\\1 & 3\end{vmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-4; 2; 6)$

$$\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AD}\right|$$
$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}-4\\2\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|$$
$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right|$$
$$= \frac{1}{6}\left|\sqrt{0+4+0}\right| = \frac{2}{6}$$

Donc $\boldsymbol{\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3}}$

Fin

Chapitre 3 : ISOMETRIES DU PLAN, APPLICATIONS AFFINES

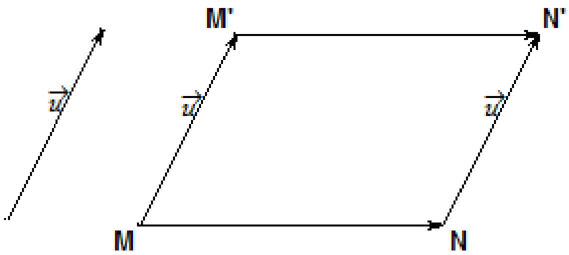
I. Isométries du plan

I_1 −Rappels sur les isométries

1.1 − Translation

Soit f une application du plan dans lui-même.

f est une translation si et seulement si pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$.



On note la translation de vecteur $\vec{u}$ par $t_{\vec{u}}$.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $t_{\vec{u}}$ est l'application identique (ou identité). Tous les points sont invariants.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors aucun point n'est invariant.

a − Composée de deux translations

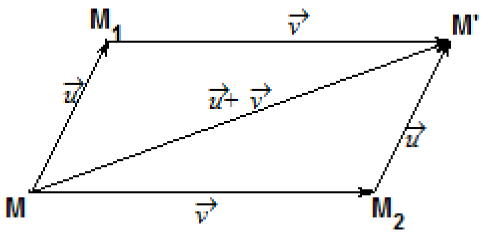
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

La composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{u}}$ des translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$.

On a : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$

<u>Demonstration</u> :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}$$
$$= \vec{u} + \vec{v}$$
$$\Longrightarrow t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$$
$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{M_2M'}$$
$$= \vec{u} + \vec{v}$$
$$\Longrightarrow t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$$



Nous avons pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

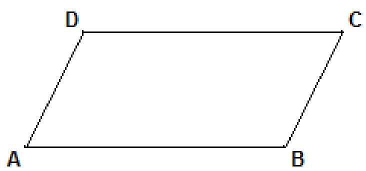
D'où : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$, on dit que la composée de la translation est commutative.

Si $\vec{u} = -\vec{v}$, alors $t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}} = t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = Id$.

Cette relation caracterise les bijections reciproques.

<u>Exemple</u> :

$$t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AD}} = t_{\overrightarrow{AC}}$$
$$t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{DC}} \circ t_{\overrightarrow{AD}}$$
$$\left(t_{\overrightarrow{AD}}\right)^{-1} = t_{\overrightarrow{CB}}$$

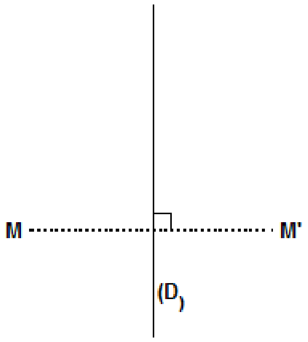


1.2 − Symétrie orthogonale :

Toute symetrie définie par une droite est appelée symetrie orthogonale. La droite est dite axe de symetrie. S_D est la symetrie d'axe (D).

- Si $M \in (D)$, alors $M' = M$
- Si $M \notin (D)$, alors M' est le point tel que la droite (D) est la médiatrice de $[MM']$.

L'ensemble des points invariants de S_D est la droite (D).



a — Composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles:

Propriété :

Soit (Δ) et (Δ') deux droites parallèles. $O \in (\Delta)$, et O' est le projeté orthogonal de O sur (Δ'). La composée $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ des symétries orthogonales d'axes (Δ) et (Δ') est la translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$.

Demonstration :

Soient $S_\Delta(M) = M_1$

$S_{\Delta'}(M_1) = M'$

$H \in (\Delta)$ et H' est le projeté orthogonal de H sur Δ' ; les points H et H' sont les milieux respectifs de $[MM_1]$ et $[M_1M']$

On a : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}$

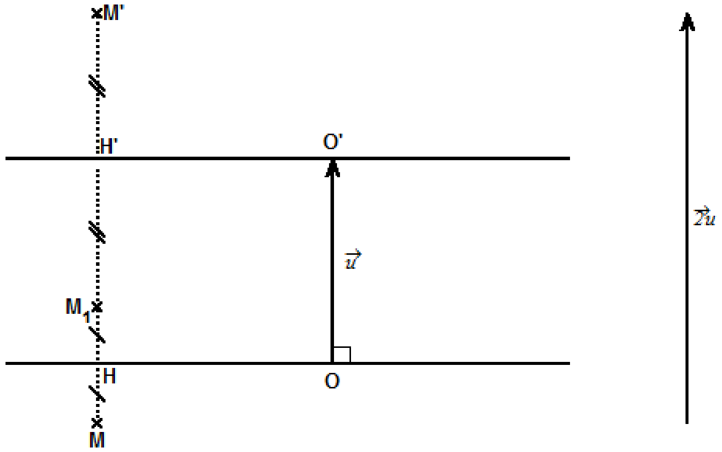
$= 2\overrightarrow{HM_1} + 2\overrightarrow{M_1H'}$ car $\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{HM_1}$ et $\overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{M_1H'}$

$= 2\left(\overrightarrow{HM_1} + \overrightarrow{M_1H'}\right)$

$= 2\overrightarrow{HH'}$; or $\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{OO'} = \vec{u}$

$\Longrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{OO'}$

D'où $S_{\Delta'} \circ S_\Delta = t_{2\overrightarrow{OO'}}$



Remarque :

- Si $(\Delta) = (\Delta')$, alors $S_{\Delta'} \circ S_\Delta = \mathrm{Id}$

- La reciproque de la transformation S_Δ est S_Δ.
- La reciproque de $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ est $S_\Delta \circ S_{\Delta'} = \mathrm{t}_{2\overrightarrow{O'O}}$

b − Décomposition d'une translation :

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur non nul $\vec{u}$. Pour toute droite (Δ) de vecteur normal $\vec{u}$, il existe une droite (Δ') et une seule telle que $S_{\Delta'} \circ S_\Delta = \mathrm{t}_{\vec{u}}$.

1.3 − Rotations :

Une rotation de centre O et d'angle θ est l'application dans lui-même noté $r(O;\ \theta)$ qui, à tout point M associe un plan M'.

- Si $M = 0$, alors $M' = 0$
- Si $M \neq 0$, alors $OM = OM'$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{OM'}}\right) = \hat{\theta}$
- Si $\theta = \hat{0}$, alors r est l'application identique du plan ;
- Si $\theta \neq \hat{0}$, alors le seul point invariant est le centre O ;
- Si $\theta = \hat{\pi}$, alors r est symétrie de centre O ;

Toute rotation est une transformation du plan. La transformation réciproque de $r(O;\ \theta)$ est $r(O;\ -\theta)$.

1.4 − Composée de symétrie orthogonale d'axe sécants

Soit (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en un point O, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$. La composée $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ des symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ') et (Δ) est la rotation de centre O et d'angle $2\left(\widehat{\vec{u};\ \overrightarrow{u'}}\right)$.

$$S_{\Delta'} \circ S_\Delta = r\left(O;\ 2\left(\widehat{\vec{u};\ \overrightarrow{u'}}\right)\right)$$

Chapitre 4 : Les nombres complexes

I. Etudes algébriques

I_1 –**Notion de nombre complexe**

1. 1 – Définition :

On appelle nombre complexe, tout nombre qui s'écrit de la forme $a + ib$ où a et b sont des nombres réels et i est appelé nombre complexe imaginaire tel que $i^2 = -1$ avec $i = (0; 1)$. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$, par ailleurs $\mathbb{C}^*$ est l'ensemble des nombres complexes non nuls.

1. 2 –Notation et vocabulaire :

On considère un nombre complexe Z tel que : $z = a + ib$.

- L'écriture $a + ib$ est appelé forme algébrique.
- Le nombre réel a est appelé partie réelle de z, notée $a = R_e(z)$
- Le nombre réel b est appelé partie imaginaire de z, notée, $b = I_m(z)$

L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Remarque :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

- Si $b = 0$, alors $z = a$ est appelé nombre réel pur $z \in \mathbb{R}$. Tout nombre réel est un nombre complexe car $(\mathbb{R} \subset \mathbb{C})$.
- Si $a = 0$, alors $z = ib$ est appelé nombre réel pur $z \in i\mathbb{R}$

Propriété :

Soient $z = a + ib$ et $z' = a + ib$ deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes :

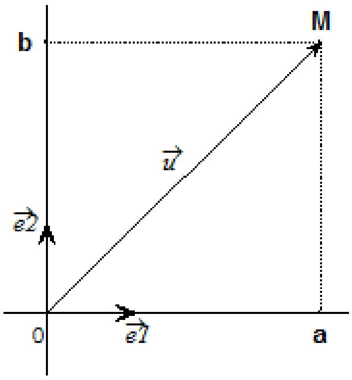
- $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} R_e(z) = R_e(z') \\ I_m(z) = I_m(z') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$
- $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R_e(z) = 0 \\ I_m(z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

1. 3 – Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(0; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$

L'application M : $\mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{C}$

$a + ib \longrightarrow M(a; b)$ est une bijection de $\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{P}$



- $M\binom{a}{b}$ est appelé point image de $z = a + ib$
- $a + ib$ est appelé affixe du point $M\binom{a}{b}$

Par ailleurs l'application $\vec{u}$: $\vartheta \longrightarrow \mathbb{C}$ qui, à tout $a + ib$, associe $\vec{u}\ (a, b)$ est aussi une bijection de $\mathbb{C} \longrightarrow \vartheta$. ($\vartheta$ est l'ensemble des vecteurs du plan).

- $\vec{u}\binom{a}{b}$ est appelé vecteur image de $Z = a + ib$
- $a + ib$ est appelé affixe du vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$.
- Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(0; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est appelé plan complexe ;
- Un point M d'affixe z de ce plan est souvent noté $M(z)$
- La droite de repère $(0; \vec{e}_1)$ appelée axe des réels et celle de repère $(0; \vec{e}_2)$ est appelée axe des imaginaires.

Exemple :

Représentons dans le plan complexe, les nombres complexes suivantes : $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = -\frac{3}{2} + 2i$; $z_3 = 4 + 5$

1.4 −Opération dans ℂ

a −Addition et multiplication dans ℂ

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

- $z + z' = a + a' + i(b + b')$, la somme de z et z'
- $z.z' = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$, le produit de z et z'

Exemple :

Effectuons les opérations suivantes :

- $(2 - i) + (4 - 3i) = 6 - 4i$
- $(4 - 5i)(3 + 2i) = 22 - 7i$
- $2i(4 - 5i) = 10 + 8i$
- $(2 + 5i)^2 = -21 + 20i$
- $(3i - 1)^3 = 26 - 18i$

Remarque :

D'après ce qui précède, on remarque que :

i) (ℂ, +) est un groupe commutatif ;

ii) (ℂ*, ×) est un groupe commutatif ;

iii) La multiplication est distributive par rapport à l'addition ;

On dit que (ℂ, +, ×) est un corps commutatif.

iv) L'opposé de nombre complexe $a + ib$ est le nombre complexe $-a - ib$

v) L'inverse de tout nombre complexe $a + ib$ est : $\frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{b^2+b^2}$

Preuve :

$(a - ib)$ est appelé conjugué de z et $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$

On a : $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

Exemple :

$$\frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{4+9} = \frac{2}{13} + \frac{3i}{13}$$

Remarque :

Dans ℂ, tout comme dans ℝ, 0 n'a pas d'inverse.

Propriété :

Soient z et z' deux nombres complexes.

$zz = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$

b − Les produits remarquables

Propriété :

Pour tous nombres complexes z et z' et pour tout entier naturel n, on a :

- $(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$;
- $(z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$;
- $(z + z')(z - z') = z^2 - z'^2$.
- $(z + z')^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, z^{n-k}.z'^k$

La forme : $(z + z')^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, z^{n-k}.z'^k$ est appelée **formule du binôme de Newton.**

Les C_n^k sont appelés coefficients binomiaux. Ils sont obtenus à partir du triangle de Pascal ou à partir de calcul de combinaison suivante $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ qui sera vue en probabilité.

Exemple :

Calculons $(2+i)^5$

Triangle de Pascal correspondant à $n-1$.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$$
\begin{aligned}
(2+i)^5 &= \textstyle\sum_{k=0}^{5} C_5^k\,(2)^{5-k} \times (i)^k \\
&= C_5^0(2)^5 + C_5^1(2)^4(i)^1 + C_5^2(2)^3(i)^2 + C_5^3(2)^2(i)^3 + C_5^4(2)^1(i)^4 + C_5^5(i)^5 \\
&= 2^5 + 5\times 2^4 \times i + 10\times 2^3(-1) + 10\times 2^2(-i) + 5\times 2(1) + i^5 \\
&= 32 + 80i - 80 - 40i + 10 + i
\end{aligned}
$$

$(2+i)^5 = -38 + 41i$

c − Affixe du barycentre de n points pondérés.

Propriété : soit $A_1,\ A_2, \dots, A_n$ des points d'affixes respectives $z_{A_1},\ z_{A_2}, \dots, z_{A_n}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des nombres réels dont $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.

L'affixe du barycentre G des points pondérés $(A_i; \alpha_i)$ est :

$$z_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, z_{A_k}}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} = \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \dots + \alpha_n z_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$$

Exemple :

Soit deux points A et b d'affixes z_A et z_B.

- L'affixe de AB est: $z_B - z_A$;
- L'affixe d'un point I milieu du segment $[AB]$ est : $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$
- L'affixe du point G , centre de gravité d'un triangle ABC est : $z_G = \frac{z_A+z_B+z_C}{3}$
- L'affixe du point G, centre de gravité d'un rectangle $ABCD$ est : $z_G = \frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}$

d − Puissances entière d'un nombre complexe

Propriétés :

1) Soit z un nombre complexe non nul et n un entier naturel non nul. On a :
   - $z^0 = 1$
   - $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$
   - $z^{n+1} = z^n \times z.$
2) Puissance entière de i

$i^0 = 1$	$i^2 = -1$	$i^4 = 1$
$i^1 = i$	$i^3 = -i$	$i^5 = i$

1.5 −Conjugué d'un nombre complexe.

Définition :

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$.

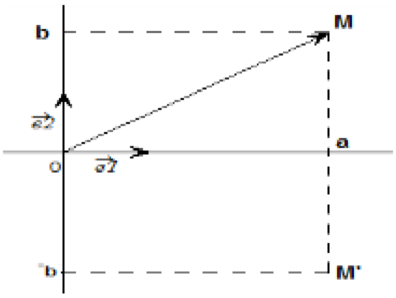
On appelle conjugué de z, le ombre complexe noté $\overline{z}$ tel que $\overline{z} = a - ib$

Exemple :

- $\overline{1+\imath} = 1 - i$;
- $\overline{3-2\imath} = 3 + 2i$
- $\overline{-2-\imath} = 2i$

Remarque :

Les points M et M' d'affixes respectives z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.



Propriétés 1:

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, on a :

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z + \bar{z} = 2R_e(z)$: la somme de z et son conjugué est un réel ;
- $z.\bar{z} = a^2 + b^2$: le produit de z et son conjugué est un réel positif ou nul ;
- $z - \bar{z} = 2I_m(z)$: la différence de z et son conjugué est un imaginaire pur ;
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \ z = \bar{z}$: Si z est un réel, alors $z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$ et $z \neq 0$: Si z est un imaginaire pur, alors $z = -\bar{z}$.

Exemple

Soit $z = -1 + 2i$. Déterminons $\bar{\bar{z}}$; $z + \bar{z}$; $z.\bar{z}$ et $z - \bar{z}$. On a :

$$\bullet \bar{\bar{z}} = \left(\overline{\overline{-1+2i}}\right) \Longrightarrow z.\bar{z} = -1 + 2i$$

$$\bullet z + \bar{z} = -1 + 2i + \left(\overline{-1+2i}\right)$$
$$= -1 + 2i - 1 - 2i$$
$$\Longrightarrow z + \bar{z} = -2$$

$$\bullet z.\bar{z} = (-1+2i)\left(\overline{-1+2i}\right)$$
$$= (-1+2i)(-1-2i)$$
$$= 1 + 4$$
$$\Longrightarrow z.\bar{z} = 5$$

$$\bullet z - \bar{z} = -1 + 2i - \left(\overline{-1+2i}\right)$$
$$= -1 + 2i + 1 + 2i$$
$$\Longrightarrow z - \bar{z} = 4i$$

Propriété 2 :

Pour tous nombres complexes z et z', $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, on a :

1) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
2) $\overline{-z} = -\overline{z}$
3) $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$
4) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$; $(z \neq 0)$
5) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $(z' \neq 0)$
6) $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$; $(z \neq 0)$

Exemple :

Soit les nombres complexes z et z' tels que : $z = 2 + i$ et $z' = 1 - i$

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $\left(\overline{2z + z'}\right)$

b) $\left(\overline{z + \frac{2}{z'}}\right)$

c) $\left(\overline{z^2 + z'^2}\right)$

d) $\overline{(z + z')^2}$

Solution :

$z = 2 + i$ et $z' = 1 - i$

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $\left(\overline{2z + z'}\right) = 2\overline{z} + \overline{z'}$

$$= 2\left(\overline{2 + i}\right) + \left(\overline{1 - i}\right)$$
$$= 2(2 - i) + 1 + i$$
$$= 4 - 2i + 1 + i$$
$$\Rightarrow \left(\overline{2z + z'}\right) = 5 - i$$

b) $\left(\overline{z + \frac{2}{z'}}\right) = \overline{z} + \frac{2}{\overline{z'}}$

$$= \left(\overline{2 + i}\right) + \frac{2}{\left(\overline{1-i}\right)}$$
$$= 2 - i + \frac{2}{1+i}$$
$$= 2 - i + \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$= 2 - i + \frac{2(1-i)}{1+1}$$
$$= 2 - 1 + \frac{2(1-i)}{2}$$
$$= 2 - i + 1 - i$$
$$\Rightarrow \left(\overline{z + \frac{2}{z'}}\right) = 3 - 2i$$

c) $\left(\overline{z^2 + z'^2}\right) = \overline{z^2} + \overline{z'^2}$

$$= \left(\overline{2 + i}\right)^2 + \left(\overline{1 - i}\right)^2$$
$$= (2 - i)^2 + (1 + i)^2$$
$$= 4 - 4i - 1 + 2i$$
$$\Rightarrow \left(\overline{z^2 + z'^2}\right) = 3 - 2i$$

d) $\overline{(z + z')^2} = \left(\overline{z} + \overline{z'}\right)^2$

$$= \left(\left(\overline{2 + i}\right) + \left(\overline{1 - i}\right)\right)^2$$
$$= (2 - i + 1 + i)^2$$
$$= 3^2$$
$$\Rightarrow \overline{(z + z')^2} = 9$$

1.6 −Module d'un nombre complexe.

Définition :

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$.

On appelle module de z, le nombre réel positif noté $|z|$ tel que : $|\boldsymbol{z}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$

Exemple :

Calculons le moudule du nombre complexe z dans les cas suivants :

a) $z = 3 - 4\mathrm{i}$

$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\Longrightarrow |z| = 5$

b) $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$\Longrightarrow |z| = 1$

c) $z = 2 - i$

$|z| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

$\Longrightarrow |z| = \sqrt{5}$

Remarque :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

- Si $b = 0$, alors $|z| = a$
- Si $a = 0$, alors $|z| = b$
- $\forall\ \mathrm{z} \in \mathbb{C};\ |z| = |-\overline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propriétes :

Pour tous nombres complexes z et z' et pour tout nombre entier relatif, on a :

1) $|\mathrm{z}.\mathrm{z}'| = |\mathrm{z}| \times |\mathrm{z}'|$
2) $\left|\frac{1}{\mathrm{z}}\right| = \frac{1}{|\mathrm{z}|};\ (\mathrm{z} \neq 0)$
3) $|\mathrm{z}^n| = |\mathrm{z}|^n;\ (\mathrm{z} \neq 0)$
4) $\left|\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{z}'}\right| = \frac{|\mathrm{z}|}{|\mathrm{z}'|};\ (\mathrm{z}' \neq 0)$
5) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$; (inégalité triangulaire)
6) $|R_e(z)| \leq |z|$ et $|I_m(z)| \leq |z|$
7) $|z| - |z'| \leq |z + z'|$

Exemples :

Déterminons le module de nombre complexe :

$$\left|\left(-\sqrt{3} + i\right)(1 + i)^2\right| = \left|-\sqrt{3} + i\right| \times |1 + i|^2$$

$$= \sqrt{3 + 1} \times \left(\sqrt{1 + 1}\right)^2$$

$$= \sqrt{4} \times \left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$= 2 \times 2$$

$$\Longrightarrow \left|\left(-\sqrt{3} + i\right)(1 + i)^2\right| = 4$$

$$\left|\frac{\left(-\sqrt{3}+i\right)^3}{(1+i)^2}\right| = \frac{\left|-\sqrt{3}+i\right|^3}{|1+i|^2} = \frac{2^3}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 2^2$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{\left(-\sqrt{3}+i\right)^3}{(1+i)^2}\right| = 4$$

Remarque :

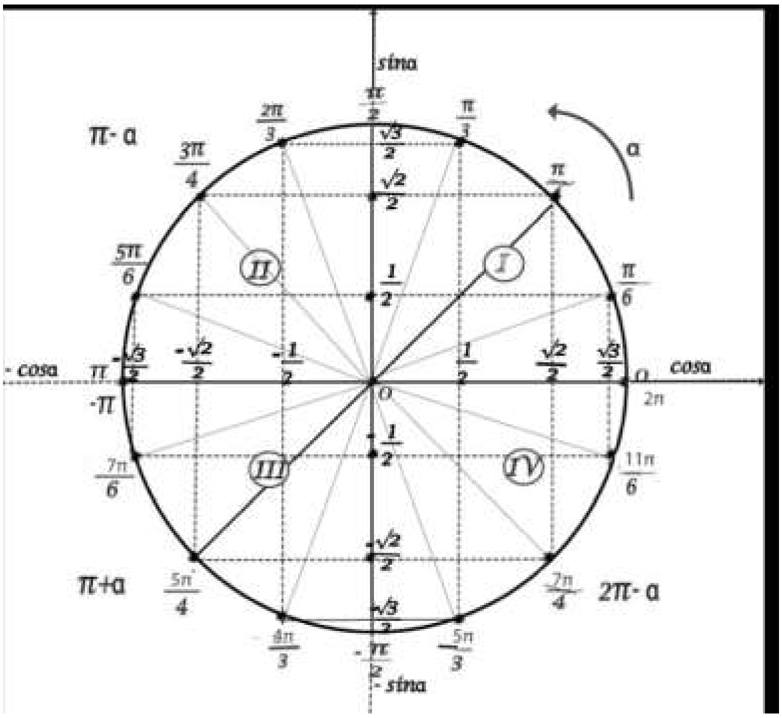
- Si z est l'affixe d'un point M, alors $|z| = OM$;
- Si z est l'affixe d'un vecteur $\vec{u}$, alors $|z| = \|\vec{u}\|$;
- si z_A et z_B sont les affixes respectives de deux points A et B, alors $|\overrightarrow{AB}| = |\boldsymbol{z}_B - \boldsymbol{z}_A| = AB$ [redacted]

II. Etude trigonométrique

$\mathrm{II_1}$ − Forme trigonométrique d'un nombre complexe

$\boldsymbol{a}$ −Argument d'un nombre complexe

Rappel trigonométrique



$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{6} \simeq \dfrac{11\pi}{6} \\ -\dfrac{\pi}{4} \simeq \dfrac{7\pi}{4} \\ -\dfrac{\pi}{3} \simeq \dfrac{5\pi}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{2\pi}{3} \simeq \dfrac{4\pi}{3} \\ -\dfrac{3\pi}{4} \simeq \dfrac{5\pi}{4} \\ -\dfrac{-5\pi}{6} \simeq \dfrac{7\pi}{6} \end{cases}$$

Définition :

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe.

On appelle argument de z, toute mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{OM}})$.noté $\arg(z)$. Souvent le note θ ou α.

[redacted]

Tout argument de z est de la forme : $\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

On note: $\arg(z) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

Interprétation géométrique

Si z est l'affixe d'un vecteur $\vec{u}$, $\arg(z)$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}};\ \vec{u}})$.
si $\boldsymbol{z}_A$ et $\boldsymbol{z}_B$ sont les affixes respectives de deux points A et B, alors $\arg(z - \boldsymbol{z}_A)$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}};\ \overrightarrow{AB}}\right)$.

Détermination de l'argument

Pour tout nombre complexe non $z = a + ib$ et pour argument $\theta(z)$, on a :

$$\begin{cases} cos\theta = \frac{R_e(z)}{|z|} \\ sin\theta = \frac{I_m(z)}{|z|} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ sin\theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

Remarque :

i) Soit z un nombre complexe z ;
   - si $z = 0$, alors $|z| = 0$ et z n'a pas d'argument.
   - Si z est un réel, i.e. $(z \in \mathbb{R})$, alors $\arg(z) \equiv 0[\pi]$
   - Si z est un imaginaire pur, i.e. $(z \in i\mathbb{R})$, alors $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

ii) Pour tout nombre complexe z non nul, on a :
   - $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi] = -\arg(z) + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$
   - $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi] = \pi + \arg(z) + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$
   - $\arg(-\bar{z}) \equiv \pi - \arg(\mathrm{z})\ [2\pi] = \pi - \arg(\mathrm{z}) + 2\mathrm{k}\pi;\ \mathrm{k} \in \mathbb{Z}$

Exemple :

Déterminons un argument des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = 1 + i$

On a : $|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Longrightarrow |z_1| = \sqrt{2}$

Soit θ son argument. On a :

$$\begin{cases} cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow \arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi].$$

b) $\mathrm{z}_2 = 1 + i\sqrt{3}$

$$|\mathrm{z}_2| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \Longrightarrow |\mathrm{z}_2| = 2$$

Soit θ son argument de z_2, on a : $\begin{cases} cos\theta = \frac{1}{2} \\ sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3};$

$$\Rightarrow \arg(z_2) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

c) $z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

On a : $|z_3| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \Rightarrow |z_3| = 1$

Soit θ un argument de z_3, on a : $\begin{cases} cos\theta = -\frac{1}{2} \\ sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3};$

$$\Rightarrow \arg(z_3) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

***b* − Argument d'un produit et d'un quotient**

Propriété :

Pour tous nombres complexes non nuls z et z' et pour entier relatif n, on a :

i) $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

ii) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

iii) $\arg(z)^n = n \times arg(z) + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

iv) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Remarque :

Soit $A, B\ et\ C$ trois points deux à deux distincts, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

On a : $\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \arg(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}) \equiv Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}\right) [2\pi]$

Exemple:

Déterminons les arguments des nombres complexes suivants :

$Z_1 = \left(-\sqrt{3} + i\right)(1 + i)^2$ et $Z_2 = (\frac{(-\sqrt{3}+i)^3}{(1+i)^2})$

- $Z_1 = \left(-\sqrt{3} + i\right)(1 + i)^2$

Posons $z'_1 = -\sqrt{3} + i$ et $z''_1 = 1 + i$ tels que : $Z_1 = z'_1(z''_1)^2$

$|z'_1| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$ et $|z''_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

On a : $|z'_1| = 2$ et $|z''_1| = \sqrt{2}$

Soit θ'_1, θ''_1 les arguments de z_1 et z_2, on a :

$\begin{cases} cos\theta'_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta'_1 = \frac{1}{2} \end{cases}; \Rightarrow \theta'_1 = \frac{5\pi}{6}$ et $\begin{cases} cos\theta''_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta''_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}; \Rightarrow \theta''_1 = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \arg(z'_1) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi] \text{ et } \arg(z''_1) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$Z_1 = z'_1(z''_1)^2$, alors, on a :

$$|Z_1| = |z'_1| \times |z''_1|^2$$
$$= 2 \times \left(\sqrt{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow |Z_1| = 4$$

Soit α , un argument de Z_1, on a :

$$\begin{aligned} arg(Z_1) &= \arg[z'_1 \times (z''_1)^2] \\ &= arg(z'_1) + 2 \times arg(z''_1) \\ &\equiv \frac{5\pi}{6} + \left(2 \times \frac{\pi}{4}\right)[2\pi] \\ &\equiv \frac{5\pi+3\pi}{6}[2\pi] \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow arg(Z_1) \equiv \frac{4\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } arg(Z_1) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

- $Z_2 = \left(\frac{(-\sqrt{3}+i)^3}{(1+i)^2}\right)$, d'après de ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned} \arg(Z_2) = \arg\left(\frac{z'^3_1}{z''^2_1}\right) &\equiv 3\arg(z'_1) - 2\arg(z''_1) \\ &\equiv 3 \times \frac{5\pi}{6} - 2 \times \frac{\pi}{4}[2\pi] \\ &\equiv \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ &\equiv 2\pi[2\pi] \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \arg(Z_2) \equiv 0[2\pi] \text{ ou } \arg(Z_2) = 0 + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

***c* – Forme trigonométrique d'un nombre complexes non nul.**

Définition et présentation :

Soit z un nombre complexe de la forme $z = a + ib$,

On a : $\begin{cases} cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ sin\theta = \frac{b}{|z|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = |z|cos\theta \\ b = |z|sin\theta \end{cases}$

$$\begin{aligned} z = a + ib, \Longrightarrow z &= |z|cos\theta + i|z|sin\theta \\ &= |z|(cos\theta + isin\theta \end{aligned}$$

En posant: $r = |z|$,

on a:

$\boldsymbol{z = r(cos\theta + isin\theta)}$ **appelée forme trigonométrique de z.**

Remarque:

Soit $z = r(cos\theta + isin\theta)$, $r \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

- Si $r > 0 \Longrightarrow z = r(cos\theta + isin\theta)$ et $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$
- Si $r < 0 \Longrightarrow z = -r\big(\cos(\theta+\pi) + isin(\theta+\pi)\big)$ et $\arg(z) \equiv (\theta+\pi)[2\pi]$

Exemple :

Mettons ces nombres complexes sous la forme trigonométrique :

- $z_1 = 1 + i$

$|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Longrightarrow |z_1| = \sqrt{2}$

Soit θ son argument de z_1, on a : $\begin{cases} cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}; \Longrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc $\boldsymbol{z_1 = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)}$ **:** est la forme trigonométrique de z_1

- $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$|z_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$\Longrightarrow |z| = 1$

Soit θ son argument de z_2 , on a : $\begin{cases} cos\theta = -\frac{1}{2} \\ sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \Longrightarrow \theta \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Donc $\boldsymbol{z_2 = cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}}$ **:** est la forme trigonométrique de z_2

- $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$

$|z_3| = \sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2 \Longrightarrow |z_3| = 2$

Soit θ son argument de z_3 , on a : $\begin{cases} cos\theta = \frac{1}{2} \\ sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \Longrightarrow \theta \equiv \frac{5\pi}{3}[2\pi]$

Donc $\boldsymbol{z_3 = 2\left(cos\frac{5\pi}{3} + isin\frac{5\pi}{3}\right)}$: est la forme trigonométrique de z_3

Propriété :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

On a : $z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z')[2\pi]$.

Deux nombres complexes conjugués ont même module et des arguements opposés

Exemple :

Dans chacun des cas suivants, déterminer le module et un argument de z.

1) $z = 1 + itan\theta$
2) $z = 1 - itan\theta$
3) $z = cos\theta - isin\theta$
4) $z = -sin\theta + icos\theta$
5) $z = 1 + cos\theta + isin\theta$ et $\theta \in [0;\ \pi]$
6) $z = \frac{cos\theta + isin\theta}{cos\theta - isin\theta}$

Solution :

Dans chacun des cas suivants, déterminons le module et un argument de z.

1) $z = 1 + itan\theta = 1 + i\frac{sin\theta}{cos\theta}$

$$z = \frac{1}{cos\theta}(cos\theta + isin\theta) \Longrightarrow |\boldsymbol{z}| = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{cos\theta}} \text{ et } \boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z}) \equiv \boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{2\pi}]$$

2) $z = 1 - itan\theta = 1 - i\frac{sin\theta}{cos\theta}$

$$= \frac{1}{cos\theta}(cos\theta - isin\theta)$$

$$z = \frac{1}{cos\theta}\big(cos(-\theta) + isin(-\theta)\big) \Longrightarrow |\boldsymbol{z}| = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{cos\theta}} \text{ et } \boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z}) \equiv -\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{2\pi}]$$

3) $z = cos\theta - isin\theta$

$$z = cos(-\theta) + isin(-\theta) \Longrightarrow |\boldsymbol{z}| = \boldsymbol{1} \text{ et } \boldsymbol{arg(z)} \equiv -\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{2\pi}]$$

4) $z = -sin\theta + icos\theta$

$$z = \left(cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + isin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right) \Longrightarrow |\boldsymbol{z}| = \boldsymbol{1} \text{ et } \boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z}) \equiv \left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{\theta}\right)[\boldsymbol{2\pi}]$$

5) $z = 1 + cos\theta + isin\theta$ et $\theta \in [0;\ \pi]$

On a : $z = 1 + cos\theta + isin\theta = 1 + e^{i\theta}$

$$= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= 2e^{i\frac{\theta}{2}}\left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}+ie^{-i\frac{\theta}{2}}}{2}\right)$$

$$= 2\left(cos\frac{\theta}{2} + isin\frac{\theta}{2}\right)cos\frac{\theta}{2}$$

$$z = 2cos\frac{\theta}{2}\left(cos\frac{\theta}{2} + isin\frac{\theta}{2}\right)$$

On distingue deux cas:

1^er^ cas: $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

Pour $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$; $2cos\frac{\theta}{2} > 0, \Longrightarrow |z| = 2cos\frac{\theta}{2}$ **et** $\boldsymbol{arg(z) \equiv \frac{\theta}{2}[2\pi]}$

2^e^ cas: $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[$

$\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[\Longrightarrow 2cos\frac{\theta}{2} < 0$

$\Longrightarrow -2cos\frac{\theta}{2} > 0$

On a : $z = 2cos\frac{\theta}{2}\left(cos\frac{\theta}{2} + isin\frac{\theta}{2}\right)$

$\Longrightarrow z = -2cos\frac{\theta}{2}\left(-cos\frac{\theta}{2} - isin\frac{\theta}{2}\right)$

$\Longrightarrow z = -2cos\frac{\theta}{2}\left(cos\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right) + isin\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right)\right)$

$\Longrightarrow \boldsymbol{|z| = -2cos\frac{\theta}{2}}$ **et** $\boldsymbol{arg(z) \equiv \left(\pi + \frac{\theta}{2}\right)[2\pi]}$

6) $z = \frac{cos\theta+isin\theta}{cos\theta-isin\theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}$

$$z = e^{2i\theta} \Longrightarrow \boldsymbol{|z| = 1} \textbf{ et } \boldsymbol{arg(z) \equiv 2\theta[2\pi]}$$

d − Forme exponentille d'un nombre complexes

Définition :

Soit z un nombre complexe non nul.

On appelle forme exponentielle du nombre complexe z, de module r et d'un argument θ, c'est l'écriture : $\boldsymbol{z = re^{i\theta}}$; avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

cette écriture : $re^{i\theta}$ est aussi appelée forme polaire de z.

Exemple :

Mettons à la forme exponenntielle les nombres complexes de l'exemple précèdant :

- $z_1 = 1 + i \Longrightarrow z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
- $z_2 = z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$
- $z_3 = 1 + i\sqrt{3} \Longrightarrow z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Propriétés :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que : $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, $n \in \mathbb{Z}$, on a :

1) $z.z' = r.r'^{e^{i(\theta+\theta')}}$
2) $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
3) $z^n = r^n e^{in\theta}$
4) $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

e −Formule de Moivre

Soit z le nombre complexe de module 1 et d'un argument θ tel que soit $z = cos\theta + sin\theta$.
$\forall\, n \in \mathbb{Z}$, z^n a pour module 1 et argument $n\theta$.
On en déduit la formule très importante suivante appelée formule de Moivre :

$$(\boldsymbol{cos\theta} + \boldsymbol{isin\theta})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{n\theta}) + \boldsymbol{isin}(\boldsymbol{n\theta})$$

Exemple :

1) $\theta \in \mathbb{R}$, exprimons $cos4\theta$ et $sin4\theta$ en fonction de $cos\theta$ et $sin\theta$. On a :

$(cos\theta + isin\theta)^4 = \sum_{k=0}^{4} C_4^k (cos\theta)^{4-k}(isin\theta)^k$

$= cos^4\theta + C_4^1 cos^3\theta(isin\theta) + C_4^2 cos^2\theta(isin\theta)^2 + C_4^3 cos\theta(isin\theta)^3 + C_4^4 cos^0(isin\theta)^4$

$= cos^4\theta + 4icos^3\theta sin\theta \times 6cos^2\theta sin^2\theta - 4icos\theta isin^3\theta + sin^4\theta$

$(cos\theta + isin\theta)^4 = cos^4\theta + sin^4\theta - 6cos^2\theta sin^2\theta + i(4cos^3\theta sin\theta - 4cos\theta isin^3\theta)$ (1)

Or $(cos\theta + isin\theta)^4 = cos4\theta + isin4\theta$ (2)

En égalant les deux relations, on a :

$$(1) = (2) \Leftrightarrow \begin{cases} cos4\theta = cos^4\theta - 6cos^2\theta sin^2\theta + sin^4\theta \\ sin4\theta = 4cos^3 sin\theta - 4sin^3\theta cos\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} cos4\theta = cos^4\theta - 6cos^2\theta(1 - cos^2\theta) + (1 - cos^2\theta)^2 \\ sin4\theta = 4cos^3 sin\theta - 4sin^3\theta cos\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} cos4\theta = 8cos^4\theta - 8cos^2\theta + 1 \\ sin4\theta = 4cos^3 sin\theta - 4sin^3\theta cos\theta \end{cases}$$

2) Soit $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$. Calculons z^{199}

$|z| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$ et $arg(z) = \frac{\pi}{4}$

Donc : $z^{199} = \left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)^{199}$

$= cos\frac{199\pi}{4} + isin\frac{199\pi}{4}$

Or : $\frac{199\pi}{4} = \frac{120\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 30\pi - \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \frac{199\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2 \times 15\pi$

$\Longrightarrow \frac{199\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

On en déduit que : $z^{199} = cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$. $\Longrightarrow \boldsymbol{z^{199} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

f −Formule d'Euler :

Pour tout nombre réel θ, on a le système suivant :

$$\begin{cases} e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta \quad (1) \\ e^{-i\theta} = cos\theta - isin\theta \ (2) \end{cases}$$

- $(1) + (2) \Longrightarrow e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2cos\theta \Longrightarrow cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $(1) - (2) \Longrightarrow e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2isin\theta \Longrightarrow sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Donc pour tout nombre réel θ, on a: $\begin{cases} \boldsymbol{cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \\ \boldsymbol{sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}} \end{cases}$

Exemple :

$\theta \in \mathbb{R}$, linéarisons $cos^6\theta$ et $sin^5\theta$.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

- $cos^6\theta$

On sait que : $cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

$\Longrightarrow cos^6\theta = (\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2})^6$

$= \frac{1}{2^6}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^6$

$= \frac{1}{2^6}\left[\sum_{k=0}^{6} C_6^k \left(e^{i\theta}\right)^{6-k} . \left(e^{-i\theta}\right)^k\right]$

$= \frac{1}{2^6}\left[e^{6i\theta} + 6\left(e^{5i\theta}.e^{-i\theta}\right) + 15\left(e^{4i\theta}.e^{-2i\theta}\right) + 20e^0 + 15\left(e^{2i\theta}.e^{-4i\theta}\right) + 6\left(e^{i\theta}.e^{-5\theta}\right) + e^{-6i\theta}\right]$

$= \frac{1}{2^6}\left[\left(e^{6i\theta} + e^{-6i\theta}\right) + 6\left(e^{4i\theta} + e^{-4\theta}\right) + 15\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}\right) + 20\right]$

$= \frac{1}{2^5}\left[\left(\frac{e^{6i\theta}+e^{-6i\theta}}{2}\right) + 6\left(\frac{e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}}{2}\right) + 15\left(\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}\right) + \frac{20}{2}\right]$

$= \frac{1}{32}[cos6\theta + 6cos4\theta + 15cos2\theta + 10]$

$\Longrightarrow \boldsymbol{cos^6\theta = \frac{1}{32}[cos(6\theta) + 6cos(4\theta) + 15cos(2\theta) + 10]}$

- $\sin^5\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^5$
- $= \frac{1}{(2i)^5}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^5$

$= \frac{1}{(2i)^5}\left[e^{5i\theta} + 5e^{4i\theta}\left(-e^{-i\theta}\right) + 10e^{3i\theta}\left(-e^{-i\theta}\right)^2 + 10e^{2i\theta}\left(-e^{-i\theta}\right)^3 + 5e^{i\theta}\left(-e^{-i\theta}\right)^4 + \left(-e^{-i\theta}\right)^5\right]$

$= \frac{1}{(2i)^5}\left[e^{5i\theta} - 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} - 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} - e^{-5i\theta}\right]$

$= \frac{1}{(2i)^5}\left[\left(e^{5i\theta} + e^{-5i\theta}\right) - 5\left(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}\right) + 10\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\right]$

$= \frac{1}{(2i)^4}\left[\left(\frac{e^{5i\theta}-e^{-5\theta}}{2}\right) - 5\left(\frac{e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}}{2i}\right) + 10\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)\right]$

$\sin^5\theta = \frac{1}{16}[sin5\theta - 5sin3\theta + 10sin\theta]$

$\Longrightarrow \boldsymbol{\sin^5\theta = \frac{1}{16}sin5\theta - \frac{5}{16}sin3\theta + \frac{5}{8}sin\theta}$

$\mathbf{II_2}$ − Racine n^ième d'un nombre complexe

2. 1 − Définition

Soit z un nombre complexe non nul et un entier naturel $(n \geq 2)$.
On appelle racine $n^{\text{ième}}$ de z, tout nombre complexe z tel que :$z^n = z$.
On considère les nombres complexes $\mathbb{Z} = re^{i\theta}$ et $z = \rho e^{i\alpha}$. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$, on a :

$$\begin{aligned} z^n = \mathbb{Z} &\Leftrightarrow \left(\rho e^{i\alpha}\right)^n = re^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow \rho^n e^{ni\alpha} = re^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \theta + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n};\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Propriété :
Soit $\mathbb{Z} = re^{i\theta}$ un nombre complexe non nul et n un entier naturel $(n \geq 2)$.
$\mathbb{Z}$ admet des racines n-ièmes telles que :

$$\boldsymbol{z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right];\ k \in \{0;\ 1;\ 2;\ \dots\ ;\ n-1\}}$$

Les racines $z_0,\ z_1,\ z_2, \dots,\ z_{n-1}$ sont obtenues en donnant les valeur $0, 1, 2, \dots, n-1$ à k.
Les images $M_0,\ M_1, \dots, M_{n-1}$ de ces racines sont les sommets d'un polygône regulier à n côtés inscrits dans le cercle de centre O et de rayon $OM_0 = OM_1 = \cdots\ OM_{n-1} = \sqrt[n]{r}$.

Remarque :
La somme de n racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexes non nul est nulle.

Exemple :

1) Déterminons les racines carrées de $\mathbb{Z} = 1 + i\sqrt{3}$.
   $|\mathbb{Z}| = \sqrt{1+3} = 2$

Soit θ un argument de z. On a : $\begin{cases} cos = \frac{1}{2} \\ sin = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

Donc $\mathbb{Z} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$
Posons $z = re^{i\theta}$ tel que : $z^2 = \mathbb{Z}$; où $r > 0$.

$$\begin{aligned} z^2 = \mathbb{Z} &\Leftrightarrow r^2 e^{2i\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 2 \\ 2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{6} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Les racines de $\mathbb{Z}$ sont de la forme : $z_k = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{6}+k\pi)};\ avec\ k = \{0;\ 1\}$.
On a : $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}$ et

2) Ecrivons sous forme algébrique les racines carrées de $\mathbb{Z}$.

On a :

$$\begin{aligned} z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} &= \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$z_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right) + isin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exemple :

1) Déterminons les racines cubiques de $\mathrm{Z} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

On a : $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$, alors $\mathrm{Z} = \frac{2}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Soit $z = re^{i\theta}$ tel que : $z^3 = \mathrm{Z}$

$$z^3 = \mathrm{Z} \Leftrightarrow r^3e^{3i\theta} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les racines de Z sont de la forme : $z_k = \sqrt{2}e^{i(\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3})};\ avec\ k = \{0;\ 1; 2\}$.

On a : $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{9}}$; $z_1 = e^{i\frac{8\pi}{9}}$ et $z_2 = e^{i\frac{14\pi}{9}}$

2) Déterminons les racines cubiques de l'unité.

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow r^3e^{3i\theta} = e^{i(0+2k\pi)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les racines cubiques de l'unité sont de la forme : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}};\ avec\ k = \{0;\ 1; 2\}$.

On a : $z_0 = 1$; $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Les images sont les sommets d'un triangle équilatéral et $z_0 + z_1 + z_2 = 0$.

<u>Preuve</u> :

$$z_0 + z_1 + z_2 = 1 + \left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right) + \left(\cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 1 - 1 = 0$$

D'où $z_0 + z_1 + z_2 = 0$

$I._3$– Nombres complexes et utilisation

3.1- Equation du premier degré et système d'équation linéaire

1) Une équation du 1er degré est une équation de la forme : $az + b = 0$ où $a\ et\ b$ sont des nombres complexes. Cette équation admet :
   - Une solution unique si $a \neq 0$ et cette solution est $-\frac{b}{a}$;

- Une infinité de solutions si $a = b = 0$;
- Aucune solution si $a = 0$ et $b \neq 0$.

2) Tout système de la forme : $\begin{cases} az + bz' = c \\ a'z + b'z' = c' \end{cases}$; où $a, b, c, a', b', et\ c'$ sont des nombres complexes $(a \neq 0; b \neq 0)$ est un système d'équations linéaires à deux inconnues dans $(\mathbb{C})^2$.

Exemple :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
   a) $(2 + 5i)z = 4 - 2i$
   b) $iz - 2 = 2z + 1 + i$
2) Résoudre dans $(\mathbb{C})^2$ le système : $\begin{cases} (2 + 3i)z - 3iz' = 1 - i \\ (-1 + 2i)z + (3 - i)z' = i \end{cases}$

Solution :

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
   a) $(2 + 5i)z = 4 - 2i$

On a : $(2 + 5i)z = 4 - 2i \Longrightarrow z = \frac{4-2i}{2+5i}$

$$= \frac{(4-2i)(2-5i)}{4+25}$$
$$= \frac{8-20i-4i-10}{29}$$
$$= \frac{-2-24i}{29}$$
$$z = -\frac{2}{29} - \frac{24}{29}i$$

L'ensemble de solution est : $S = \left\{-\frac{2}{29} - \frac{24}{29}i\right\}$

   b) $iz - 2 = 2z + 1 + i$

On a : $iz - 2 = 2z + 1 + i \Longrightarrow iz - 2z = 1 + i + 2$

$$\Longrightarrow (-2 + i)z = 3 + i$$
$$\Longrightarrow z = \frac{3+i}{-2+i}$$
$$= \frac{(3+i)(-2-i)}{4+1}$$
$$= \frac{-6-3i-2i+1}{5}$$
$$= \frac{-5-5i}{5}$$
$$z = -1 - i$$

L'ensemble de solution est : $S = \{-1 - i\}$

2) Résoudre dans $(\mathbb{C})^2$ le système : $\begin{cases} (2 + 3i)z - 3iz' = 1 - i \\ (-1 + 2i)z + (3 - i)z' = i \end{cases}$

$\boldsymbol{a}$ **–Racines carrées d'un nombre complexes.**

Propriété :

Soit $\mathbb{Z}$ et z les nombres complexes tels que $z^n = \mathbb{Z}$; $(n \in \mathbb{N}) et\ n \geq 2$. On désignera par w_1 et w_2 les racines carrées de $\mathbb{Z}$.

On a : $\forall\ x, y\ \in \mathbb{R}$, on pose $z = x + iy \Longrightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$\forall\ a, b\ \in \mathbb{R}$, on a : $\mathbb{Z}\ = a + ib \Longrightarrow |\mathbb{Z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Pour $n = 2$, on a: $z^2 = \mathbb{Z}$

$z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $|z|^2 = x^2 + y^2$.

$$z^2 = \mathbb{Z} \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a + ib$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = |\mathbb{Z}| \\ R_e(z^2) = R_e(\mathbb{Z}) \\ I_m(z^2) = I_m(\mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |\mathbb{Z}| & (1) \\ x^2 - y^2 = a & (2) \\ 2xy = b & (3) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow 2x^2 = a + |\mathbb{Z}|$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{a+|\mathbb{Z}|}{2}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{a+|\mathbb{Z}|}{2}} \quad \text{ou } x = -\sqrt{\frac{a+|\mathbb{Z}|}{2}}$$

$(1) - (2) \Rightarrow 2y^2 = |\mathbb{Z}| - a$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{|\mathbb{Z}|-a}{2}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{\frac{|\mathbb{Z}|-a}{2}} \quad \text{ou } y = -\sqrt{\frac{|\mathbb{Z}|-a}{2}}$$

Pour choisir les couples $(x;\ y)$, on tient compte du signe de b :

- Si $b > 0$, alors $xy > 0$ et donc x et y sont de même signe et on a :

$$\begin{cases} w_1 = \sqrt{\frac{a+|\mathbb{Z}|}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{|\mathbb{Z}|-a}{2}} \Rightarrow w_1 = x + iy \\ w_2 = -\sqrt{\frac{a+|\mathbb{Z}|}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{|\mathbb{Z}|-a}{2}} \Rightarrow w_2 = -x - iy \end{cases}$$

- Si $b < 0$, alors $xy < 0$ et donc x et y sont de signe contraire et on a :

$$\begin{cases} w_1 = \sqrt{\frac{a+|\mathbb{Z}|}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{|\mathbb{Z}|-a}{2}} \Rightarrow w_1 = x - iy \\ w_2 = -\sqrt{\frac{a+|\mathbb{Z}|}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{|\mathbb{Z}|-a}{2}} \Rightarrow w_2 = -x + iy \end{cases}$$

L'ensemble des racines carrées de $\mathbb{Z}$ est : $S = \{\omega_1, \omega_2\}$

Exemple :

Soit $\mathbb{Z} = 3 - 4i$ un nombre complexe.

Calculons la racine de $\mathbb{Z}$.

Posons $z = x + iy$ tel que : $z^2 = \mathbb{Z}$

On a : $|z^2| = x^2 + y^2$ et $|\mathbb{Z}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$$z^2 = \mathbb{Z} \Leftrightarrow z^2 = 3 - 4i \text{ ; or } z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$z^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 3 - 4i$$

$$x^2 - y^2 + 2ixy = 3 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & (1) \\ x^2 - y^2 = 3 & (2) \\ 2xy = -4 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow 2x^2 = 8$

$$\Rightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = 2 \quad \text{ou } x = -2$$

$(1) - (2) \Rightarrow 2y^2 = 2$

$$\Rightarrow y^2 = 1$$

$$\Rightarrow y = 1 \quad \text{ou } y = -1$$

Le produit $xy = -2$ est négatif donc x et y sont de signes contraires, alors on pose :

$$\omega_1 = 2 - i \text{ et } \omega_2 = -2 + i$$

L'ensemble des racines carrées de $Z = 3 - 4i$ est : $S = \{2 - i;\ -2 + i\}$

b − Résolution de l'équation du 2nd degrés dans $\mathbb{C}$.

Etude de cas général :

On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du 2nd degré $az^2 + bz + c = 0,\ \ a, b, et\ c \in \mathbb{R};\ \ (a \neq 0)$. Comment alors procéder ?

Méthode :

Pour résoudre une équation dans $\mathbb{C}$, on procède de la manière suivante :

- On calcule le discriminant Δ du polynôme complexe ;
- On détermine les racines carrés de Δ suivant que Δ soit ou non complexe.

Pour cela, on rappelle que la forme canonique du polynôme $P(z) = z^2 + bz + c$ est :

$P(z) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$; avec $\Delta = b^2 - 4ac$

Propriété :

Une équation du 2nd degré à coefficients réels à toujours deux racines :

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, elles sont réelles et distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, elles sont confondues : $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, elles sont complexes conjuguées : $x_1 = \frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemple :

Résoudre dans ₵ l'équation suivante

1- **Cas où les coefficients sont des nombres réels**.

(E) : $z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \times 1 = -3$

$\Longrightarrow \Delta = 3i^2$

$\Longrightarrow z_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

$\Longrightarrow S = \left\{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2};\ \ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$

2- Cas où les coefficients sont des nombres complexes

(E_1): $z^2 + (2 + 3i)z - 2(1 - 2i) = 0$

$\Delta = (2 + 3i)^2 - 4 \times 1(-2 + 4i)$

$= 4 + 12i - 9 + 8 - 16i$

$\Delta = 3 - 4i$; $\Delta \in \mathbb{C}$

A cet effet, cherchons les racines carrées de Δ.

Soit $z = x + iy$ tel que : $z^2 = \Delta$.

$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$; $|\Delta| = \sqrt{9 + 16} = 5$ et $|z^2| = x^2 + y^2$

$z^2 = \Delta \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 3 - 4i$

$$z^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & (1) \\ x^2 - y^2 = 3 & (2) \\ 2xy = -4 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Longrightarrow 2x^2 = 8$

$\Longrightarrow x^2 = 4$

$\Longrightarrow x = 2 \quad$ ou $x = -2$

$(1) - (2) \Longrightarrow\ 2y^2 = 2$

$\Longrightarrow y^2 = 1$

$\Longrightarrow y = 1 \quad$ ou $y = -1$

Le produit $xy = -2$ est négatif donc x et y sont de signes contraires, alors on pose :

$\omega_1 = 2 - i$ et $\omega_2 = -2 + i$ les racines carrées de Δ.

$\Longrightarrow z_1 = \frac{-b+\omega_1}{2} = \frac{-2-3i+2-i}{2} = -2i \Longrightarrow z_1 = -2i$

$z_2 = \frac{-b+\omega_2}{2} = \frac{-2-3i-2+i}{2} = -2 - i \Longrightarrow z_2 = -2 - i$

$\Longrightarrow S = \{-2i;\ -2 - i\}$

(E_2): $z^2 + (4 + 5i)z - 7i - 1 = 0$

$\Delta = (4 + 5i)^2 - 4 \times 1(7i - 1)$

$= 16 + 40i - 25 - 28i + 4$

$\Delta = -5 + 12i$; $\Delta \in \mathbb{C}$

Posons $z = x + iy$ / $z^2 = \Delta$

$$z^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{25 + 144} = 13 & (1) \\ x^2 - y^2 = -5 & (2) \\ xy = 6 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Longrightarrow 2x^2 = 8$

$\Longrightarrow x^2 = 4$

$\Longrightarrow x = 2 \quad$ ou $x = -2$

$(1) - (2) \Longrightarrow\ 2y^2 = 18$

$\Longrightarrow y^2 = 9$

$\Longrightarrow y = 3 \quad$ ou $y = -3$

Le produit $xy = 6$ est positif donc x et y sont de mêmes signes, alors on pose :

$\omega_1 = 2 + 3i$ et $\omega_2 = -2 - 3i$ les racines carrées de Δ.

$\Longrightarrow z_1 = \frac{-b+\omega_1}{2} = \frac{4+5i+2+3i}{2} = 3 + 4i \Longrightarrow z_1 = 3 + 4i$

$z_2 = \frac{-b+\omega_2}{2} = \frac{4+5i-2-3i}{2} 1 + i \Longrightarrow z_2 = 1 + i$

$\Longrightarrow S = \{3 + 4i;\ 1 + i\}$

***c* — Equation se ramenant au 2nd degré** :

Exemple 1 :

Soit l'équation (E): $z^3 + (4 - 5i)z^2 + (8 - 20i)z - 40i = 0$

a) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure.

b) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$

Résolution

Soit (E): $z^3 + (4 - 5i)z^2 + (8 - 20i)z - 40i = 0$

a) Démontrons que (E) admet une solution imaginaire pure.

Posons $P(z) = z^3 + (4 - 5i)z^2 + (8 - 20i)z - 40i$

Soit $z_1 = ib$ cette solution imaginaire. $(b \neq 0)$

$P(z_1) = P(ib) = -ib^3 - (4 - 5i)b^2 + (8 - 20i)ib - 40i$

$$= -ib^3 - 4b^2 + 5ib^2 + 8ib + 20b - 40i$$
$$P(ib) = -4b^2 + 20b + i(-b^3 + 5b^2 + 8b - 40)$$
$$P(ib) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4b^2 + 20b = 0 & (1) \\ -b^3 + 5b^2 + 8b - 40 = 0 & (2) \end{cases}$$
z_1 est un imaginaire, donc on considère seulement l'équation (1).
$$(1) \quad : -4b^2 + 20b = 0 \Longrightarrow -4b(b-5) = 0$$
$$\Longrightarrow b = 0 \text{ ou } b = 5 \neq 0$$
Donc $z_1 = 5i$ est la solution imaginaire pure (E) cherchée.

b) Résolvons (E) dans $\mathbb{C}$

$5i$ est la racine de P, alors $P(z) = (z - 5i)Q(z)$; où $Q(z) = z^2 + az + b$; $(a, b \in \mathbb{C})$ tel que :
$$P(z) = (z - 5i)(z^2 + az + b)$$
$$P(z) = z^3 + az^2 + bz - 5iz^2 - 5aiz - 5ib$$
Par identification, on a : $\begin{cases} a - 5i = 4 - 5i \\ b - 5ai = 8 - 20i \\ -5ib = -40 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases}$

Donc : $Q(z) = z^2 + 4z + 8$

$P(z) = (z - 5i)Q(z) \ \Longrightarrow P(z) = (z - 5i)(z^2 + 4z + 8)$
$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 5i)(z^2 + 4z + 8)$$
$$\Leftrightarrow z = 5i \text{ ou } z^2 + 4z + 8 = 0$$
$$z^2 + 4z + 8 = 0 \Leftrightarrow \Delta' = 4 - 8$$
$$= -4$$
$$\Delta' = (2i)^2$$
$$\Longrightarrow z_2 = -2 - 2i \text{ et } z_3 = -2 + 2i$$
$$\Longrightarrow S = \{5i;\ -2 - 2i;\ -2 + 2i\}$$

d − Transformation de produit en somme et de somme en produit

Propriétés 1 :

Pour tous nombres réels a et b, on a :

- $cosacosb = \frac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$;
- $sinasinb = -\frac{1}{2}[\cos(a + b) - \cos(a - b)]$;
- $sinasinb = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$.

Propriété 2 :

Pour tous nombre réels p et q, on a :

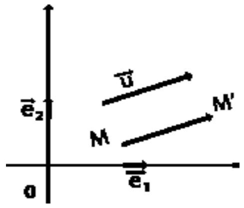
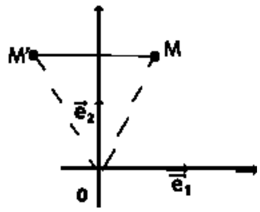
- $cosp + cosq = 2cos\frac{p+q}{2}cos\frac{p-q}{2}$
- $sinp + sinq = 2sin\frac{p+q}{2}cos\frac{p-q}{2}$
- $cosp - cosq = -2sin\frac{p+q}{2}sin\frac{p-q}{2}$
- $sinp + sinq = 2cos\frac{p+q}{2}sin\frac{p-q}{2}$

3.2- Géométrie et nombre complexes

a −Transformations et nombres complexes

Tableau récapitulatif d'écriture complexe de certaines transformations du plan

Dans ce tableau, $M(\mathbb{Z})$ et $M'(\mathbb{Z})$ désigne un point et son image, ainsi que leurs affixes, par chacune de ces transformation.

Translation de vecteur $\vec{u}(a)$		$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + a$
Symétrie de centre $\Omega(\omega)$	[redacted]	$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = -(z - \omega)$
Symétrie par rapport à l'axe réel	[redacted]	$\begin{cases} OM' = OM \\ \left(\widehat{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{OM'}}\right) = -\left(\widehat{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{OM}}\right) \end{cases}$	$z' = \bar{z}$
Symétrie par rapport à imaginaire		$\begin{cases} OM' = OM \\ \left(\widehat{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{OM'}}\right) = \pi - \left(\widehat{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{OM}}\right) \end{cases}$	$z' = -\bar{z}$
Homothétie de centre $\Omega(\omega)$ etd'angle α	[redacted]	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = k(z - \omega)$
Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α	[redacted]	$\begin{cases} OM' = OM \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$	$z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$

Exemple :

Soit les points $\Omega(-2; 1)$ et $A(1; -1)$

Dans chacun des cas suivants :

- Donner l'écriture complexe de la transformation ;
- Déterminer l'image de A par la transformation.

1) Symétrie de centre Ω ;

On a : $z' - \omega = -(z - \omega)$

$$\Leftrightarrow z' - (-2 + i) = -\big(z - (-2 + i)\big)$$

$\Leftrightarrow z' = -z - 2 + i - 2 + i$

$\Leftrightarrow z' = -z - 4 + 2i$ est l'écriture complexe de la symétrie de centre Ω.

L'image de A par cette symétrie :

On a : $z' = -z - 4 + 2i \Leftrightarrow z_{A'} = -z_A - 4 + 2i$

$= -(1 - i) - 4 + 2i$

$\Leftrightarrow z_{A'} = -5 + 3i$

***b* −Confuguration du plan et nombres complexes**

Pour tous nombres complexes : z_A; z_B; z_C et z_D d'affixes respectives des points A, B, C et D, on a les configurations géométriques suivantes :

1) Le triangle ABC et isocéle en A si et seulement si :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \boldsymbol{e^{i\alpha}} \textbf{ ou } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \boldsymbol{e^{-i\alpha}} \text{ ; avec } AB = AC \text{ et } mes\hat{A} = \alpha \quad 0 < \alpha < \pi$$

2) Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si : $AB = BC = AC$; $mes\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ et

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \boldsymbol{e^{\frac{i\pi}{3}}} \textbf{ ou } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \boldsymbol{e^{-\frac{i\pi}{3}}}$$

3) Le triangle ABC est rectangle isocèle en A si et seulement si :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i \text{ ou } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i \text{ ; } AB = AC \text{ et } mes\hat{A} = \frac{\pi}{2}$$

4) Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = bi$; avec $b \neq 0$ et $mes\hat{A} = \frac{\pi}{2}$

5) Les points B, B et C sont alignés si et seulement si :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^* \text{ et } mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv 0[\pi]$$

6) Les points A, B, C et D sont concycliques si et seulement si :

$$\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \div \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}^* \text{ ou } \frac{\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A}}{\frac{z_D - z_B}{z_D - z_A}} \in \mathbb{R}^*$$

***b* −Lieux géométriques et nombres complexes**

Propriétés :

Soit A le point d'affixes z_A et Mun point d'affixe z

Si R est un complexe réel directement positif, le lieu des points M dont l'affixe Ƶ verifie $||z - z_A| = R$ est le cercle de centre A et de rayon R.

Si α est un nombre réel, le lieu des points M dont l'affixe z vérifie $\arg(z - z_A) \equiv \alpha[\pi]$ est la droite de repère $(A, \vec{u})$, privé de A avec $Mes(\widehat{\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}}; \vec{u}}) \equiv \boldsymbol{\alpha[\pi]}$.

Remarque :

Le lieu des points M dont l'affixe z vérifie : $\arg(z - z_A) \equiv \alpha[\pi]$ est la demi-droite de repère$(A, \vec{u})$, privé de A, avec $Mes(\widehat{\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}}; \vec{u}}) \equiv \boldsymbol{\alpha[\pi]}$.

Exemple 1:

Soit A le point d'affixe z_A tel que : $z_A = 1 + i$

Déterminer le lieu des points M dont l'affixe z vérifie :

a) $z - z_A = 2$
b) $\arg(z - z_A) \equiv \frac{\pi}{6}[\pi]$
c) $\arg(z - z_A) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Résolution :

Soit $z_A = 1 + i$

Déterminons le lieu des points M dont l'affixe z vérifie :

a) $z - z_A = 2$

Méthode 1 :

$|z - z_A| = 2 \Leftrightarrow AM = 2$

Donc le lieu M cherché est un cercle (C)de centre A et de rayon 2.

Méthode2 :

On a : $z_A = 1 + i$ et $z = x + iy$

$|z - z_A| = 2 \Leftrightarrow |x + iy - (1 + i)| = 2$

$\Leftrightarrow |x - 1 + i(y - 1)| = 2$

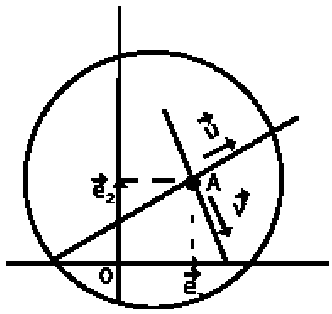
$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2$ est une équation du cercle de centre A et de rayon $r = 2$

Donc le lieu M est un cercle (C) de centre $A(1;1)$ et de rayon $r = 2$.

b) $\arg(z - z_A) \equiv \frac{\pi}{6}[\pi] \Leftrightarrow mes\left(\widehat{\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{AM}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[\boldsymbol{\pi}]$ donc le lieu de M est la droite du repère $(A, \vec{u})$, privé de point $A(1;\ i)$.

c) $\arg(z - z_A) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow mes(\widehat{\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{AM}}) \equiv -\frac{\pi}{3}[\boldsymbol{2\pi}]$ donc le lieu de M est la demi-droite de repère $(A, \vec{v})$ privé de A avec $(\overrightarrow{e_1};\ \vec{v}) \equiv -\frac{\pi}{3}[\boldsymbol{2\pi}]$.



Exemple 2 :

A tout nombre complexe $z \neq 2 - i$, on a : Ƶ $= \frac{z+3-2i}{z-2+i}$

Déterminer l'ensemble réel des points M d'affixe Ƶ tels que :

a) Ƶ soit un nombre réel ;

b) Ƶ soit un imaginaire pur

<u>Résolution</u> :

On a : Ƶ $= \frac{z+3-2i}{z-2+i}$, $z \neq 2 - i$

Déterminons l'ensemble des points M d'affixe Ƶ tels que :

a) Ƶ soit un nombre réel

En effet, Ƶ $= \frac{z+3-2i}{z-2+i}$, $et\ z = x + iy$

$$Ƶ = \frac{z+3-2i}{z-2+i} = \frac{x+iy+3-2i}{x+iy-2+i}$$
$$= \frac{x+3+i(y-2)}{x-2+i(y+1)}$$

$$= \frac{\big((x+3)+i(y-2)\big)((x-2)-i(y-2)(x-2)+(y-2)(y+1)}{(x-2)^2+(y+1)^2}$$
$$= \frac{x^2+x-6-ixy-ix-3iy-3i+ixy-2yi-2xi+4i+y^2-y-2}{(x-2)^2+(y+1)^2}$$
$$Ƶ = \frac{x^2+x+y^2-y-8}{(x-2)^2+(y+1)^2} - i\,\frac{3x+5y-1}{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

$Ƶ \in \mathbb{R} \iff I_m(Ƶ) = 0 \iff 3x + 5y - 1 = 0$

Donc l'ensemble des points M cherché est une droite d'équation : $3x + 5y - 1 = 0$, privé de point $B(2;\ -1)$

b) Ƶ soit un imaginaire pur

$Ƶ = \frac{x^2+x+y^2-y-8}{(x-2)^2+(y+1)^2} - i\,\frac{3x+5y-1}{(x-2)^2+(y+1)^2}$

$Ƶ \in i\mathbb{R} \iff R_e = 0$

$\iff x^2 + x + y^2 - y - 8 = 0$

$\iff (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 8 = 0$

$\iff (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - 8$

$\iff (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{2}$: c'est une équation d'un cercle (C) de centre $I(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2})$ et de rayon $\sqrt{\frac{17}{2}}$. Donc l'ensemble des points M est un cercle (C) de centre I et de rayon $r = \sqrt{\frac{17}{2}}$

Fin

<u>Chapitre 5</u> : Similitudes

I. Similitudes directes du plan :

I_1 −Définition et propriété

1.1- Définition :

Soit k un nombre réel strictement positif.

On appelle similitude S de rapport k, toute application f du plan qui, à tous points A et B d'image respectives A' et B', on ait : $A'B' = kAB$.

Une similitude est directe si elle conserve le sens des angles orientés.

Propriété :

Toute similitude directe du plan a une écriture complexe de la forme : $Z' = az + b$; avec $(a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C})$.

- Si $a = 0$ et $b = 0$, alors $S = Id$ (S est une identité) ;
- Si $a = 1$ et $b \neq 0$, alors $z' = z + b$ donc S est une translation de vecteur $\vec{u}(b)$
- Si $a \neq 1$, alors S est la compose de l'homothétie h de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ et de rapport $k > 0$ et de la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\alpha = \arg(a)$.

On dit alors que Sest une similitude directe du plan de centre $\Omega(\omega)$, de rapport k et d'angle α. Le centre $\Omega(\omega)$, le rapport k et l'angle α sont appelés éléments caractéristiques de S.

La composée commutative : $S = h \circ r = r \circ h$ d'écriture : $z' = ke^{i\alpha}(z - \omega) + \omega$ est appelée forme réduite de S .

La formule : $z' = ke^{i\alpha}(z - \omega) + \omega$ permet de déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe du plan.

Remarque :

Soit S une similitude directe du plan de centre $\Omega(\omega)$, de rapport k et d'angle α ;

- Si $k = 1$, alors S est une rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α d'angle α ; $S = r(\Omega; \alpha)$
- Si $\alpha = 0[2\pi]$, alors S est une homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k; $S = h(\Omega; k)$
- Si $\alpha = \pi[2\pi]$, alors S est une homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $-k$; $S = h(\Omega; -k)$

Exemple :

Soit S une similitude directe de centre $\omega(1, 1)$, de rapport $k = 2$ et d'angle $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

Donnons l'écriture complexe de S.

$k \neq 1$, donc S: $z' = ke^{i\alpha}(z - \omega) + \omega$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ z' &= 2e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - (1 + i) + 1 + i \\
&= 2e^{-i\frac{\pi}{3}}z - 2e^{-i\frac{\pi}{3}}(1 + i) + 1 + i \\
&= 2(\cos\tfrac{\pi}{3} - i\sin\tfrac{\pi}{3})z - 2(\cos\tfrac{\pi}{3} - \sin\tfrac{\pi}{3})(1 + i) + 1 + i \\
&= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i) + 1 + i \\
&= (1 - i\sqrt{3})z - (1 - i\sqrt{3})(1 + i) + 1 + i \\
&= (1 - i\sqrt{3})z - 1 - i + i\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 + i
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3}(1 - i)$$

Exemple 2 :

Soit S une similitude directe du plan d'écriture complexe $z' = (1 + i)z - 2i$

Déterminons les éléments caractéristiques de S

- Son centre : $\omega = \frac{b}{1-a}$

  $\omega = \frac{-2i}{1-(1+i)} = \frac{-2i}{1-1-i} = 2 \implies \omega = (2;\ \ 0)$
- Son rapport $k = |a|$

  $a = 1 + i \iff |a| = |1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

  $\implies k = \sqrt{2}$
- Son angle $\alpha = \arg(a)$

On a : $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \implies \alpha \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Donc l'ensemble des éléments caracteristiques de s est noté : $\varphi = \{\omega(2;0);\ k = \sqrt{2};\ \alpha = \frac{\pi}{4}\}$

Autre propriété :

Si $a = -1$, alors S est une symétrie de centre $\Omega\left(\frac{\mathrm{b}}{2}\right)$ ou une rotation centre $\Omega\left(\frac{\mathrm{b}}{2}\right)$ et d'angle $\alpha = \pi$ ou encore une homothétie de centre $\Omega\left(\frac{\mathrm{b}}{2}\right)$ de rapport $k = -1$.

I_2 − Composée de similitudes directes du plan

Propriétés :

Soit S une similitude directe de rapport k et d'angle α et S' une similitude directe de rapport k' et d'agnle α'.

La composée $S' \circ S$ est une similitude directe de rapport $k'k$ et d'angle $\alpha' + \alpha$.

La reciproque de S noté S^{-1} est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\alpha$.

On en déduit que pour toutes similitudes directes d'écritures complexes $S : z' = ke^{i\alpha}z + b$ et $S' : z' = k'e^{i\alpha'}z + b'$,

On a : $S' \circ S = S'[S] = k'e^{i\alpha'}(ke^{i\alpha}z + b) + b'$

$= k'ke^{i(\alpha+\alpha)}\mathrm{z} + k'^{e^{i\alpha'}}b + b'$

Donc : $S' \circ S = k'ke^{i(\alpha+\alpha)}z + k'^{e^{i\alpha'}}b + b'$

La reciproque S^{-1} a pour écriture complexes $\mathrm{S}^{-1} :\ \mathrm{z}'^{-1} = \frac{1}{k}e^{i\alpha}\mathrm{z} + b$

Exemplexe :

Soit S et S' d'écriture complexes : $S\colon \mathrm{z}' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\mathrm{z} + 2i$ et $S'\colon \mathrm{z} = 3e^{i\frac{\pi}{6}}\mathrm{z} - 5$

Déterminons la composée $S' \circ S$, on a :

$S' \circ S = 3e^{i\frac{\pi}{6}}\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\mathrm{z} + 2i\right) - 5$

$= 6e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})}\mathrm{z} + 6\mathrm{i}e^{i\frac{\pi}{6}} - 5$

$= 6e^{i\frac{\pi}{2}}\mathrm{z} + 6ie^{i\frac{\pi}{6}} - 5$

$= 6i\mathrm{z} + 6i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - 5$

$= 6i\mathrm{z} + 3i\sqrt{3} - 3 - 5$

$\implies S' \circ S = 6iz - 8 + 3i\sqrt{3}$

La composée $S' \circ S$ est une similitude directe de rapport 6 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

I_3 **− Exemples d'étude de similitudes directes**

3.1- Similitude direcete déterminée par son expression analytique.

Méthodes :

Pour déterminer l'écriture complexe d'une application du plan dans lui-meme d'expression analytique donnée, on peut proceder de deux manières suivantes :

- Soit : $\begin{cases} x' = ax + by + c & (1) \\ y' = ax + by + c & (2) \end{cases}$

Ecrire $z' = x' + iy'$ et remplace x' et y' en fonction de x et y.

Remplacer x par : $\frac{z+\bar{z}}{2}$ et y par : $\frac{z+\bar{z}}{2i}$ et développer l'expression obtenue en fonction de z et $\bar{z}$.

- Soit : $\begin{cases} x' = ax + by + c & (1) \\ y' = ax + by + c & (2) \end{cases}$

On multiplie l'équation (2) par i

On additionne les deux équations $(1) + (2)$ et en suite on regroupe la partie entier et imaginaire afin d'obtenir l'écriture complexe.

Exemplexe : Ssoit f l'application du plan lui-même d'expression analytique :

$\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' =' x + y - 1 \end{cases}$

1) Déterminer l'écriture complexe de f
2) En déduire la nature et les éléments caratéristiques de f
3) Déterminer la nature, les éléments caractéristiques et l'écriture complexe de f^{-1}.

Résolution :

On a : $\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$

1) Déterminons l'écriture complexe de f

Méthode 1:

$z' = x' + iy$ et $z = x + iy$

On a: $\begin{cases} x' = x + y + 2 & (1) \\ iy' = -ix + iy - i & (2) \end{cases}$

$x' + iy' = x - ix + y + iy + 2 - i$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow z' = x(1 - i) + y(1 + i) + 2 - i \\ &\Leftrightarrow z' = \frac{z+\bar{z}}{2}(1 - i) + \frac{z+\bar{z}}{2i}(1 + i) + 2 - i \\ &= \frac{1}{2}(z - iz + \bar{z} - i\bar{z}) + \frac{1}{2i}(z + iz - \bar{z} - i\bar{z}) + 2 - i \\ &= \frac{z}{2} - \frac{i\bar{z}}{2} + \frac{\bar{z}}{2} + \frac{i\bar{z}}{2} + \frac{z}{2i} + \frac{z}{2} - \frac{\bar{z}}{2i} - \frac{\bar{z}}{2} + 2 - i \\ &= \frac{z}{2} + \frac{z}{2} - i\left(\frac{z}{2} + \frac{z}{2}\right) + 2 - i \\ &= z - iz - 2 - i \end{aligned}$$

$\Longrightarrow z' = (1 - i)z + 2 - i$ est criture complexe f cherchée.

Méthode 2 : $\begin{cases} x' = x + y + 2 & (1) \\ y' = -x + y - 1 & (2) \end{cases}$

On a : $(1) + (2) \times i \Longrightarrow x' + iy' = x + y + 2 - ix + iy - i$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow x' + iy = x + iy - i(x + iy) + 2 - i \\ &\Longrightarrow z' = z - iz + 2 - i \\ &\Longrightarrow z' = (1 - i)z + 2 - i \end{aligned}$$

2) Déduisons-en la nature et les éléments caractéristiques de f.

- Nature :

$f\ :\ z' = az + b;\ (a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C})$ donc f est une similitude directe du plan.

- Elements caractéristiques :

- Centre : $\omega \frac{2-i}{1-1+i} = \frac{-(2-i)i}{(-i)i} = -2i - 1 \Rightarrow\ \omega = -1 - 2i$

Donc $\omega = (-1;\ -2)$.

- Rapport $k = |1 - i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Rightarrow k = \sqrt{2}$
- Angle :

Soit θ cet angle, on a : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases};\ \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Donc $f : S = \left\{\omega\binom{-1}{-2};\ k = \sqrt{2};\ \theta = \frac{7\pi}{4}\right\}$

3) La nature, les éléments caractéristiques et l'écriture complexe de f^{-1}.

$f^{-1} : \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} z + 2 - i$ donc f^{-1} est une similitude directe de centre $\Omega(-1;\ -2)$, de rapport $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Ecritue complexe : $f^{-1}:\ z' = \frac{1}{k} e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$

$$\Rightarrow f^{-1}: z' = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}(z - (-1 - 2i) + (-1 - 2i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} z + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}(1 + 2i) - 1 - 2i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) z + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)(1 + 2i) - 1 - 2i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1 + 2i) - 1 - 2i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z + \frac{1}{2}(1 + i)(1 + 2i) - 1 - 2i$$

$$= \frac{1}{2}(1 + i)z + \frac{1}{2}(1 + 3i - 2) - 1 - 2i$$

$$= \frac{1}{2}(1 + i)z - \frac{1}{2} + \frac{3i}{2} - 1 - 2i$$

$$= \frac{1}{2}(1 + i)z - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\Rightarrow f^{-1}: z' = \frac{1}{2}(1 + i)z - \frac{1}{2}(3 + i)$$

3.2- Similitude directe déterminée par son écriture complexe

Application :

Soit S l'application du lan dans lui-même d'écriture complexe $z' = 3iz - 1 - 7i$

1) Justifier que S est une similitude directe et préciser ses éléments caractéristiques ;
2) Déterminer l'expression analytique de S.

Résolution :

Soit $z' = 3iz - 1 - 7i$

1) Justifions que S est une similitude directe et précisons ses éléments caractéristiques.

En effet ; S est de la forme $z' = az + b;\ (a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C})$, donc S est une similitude directe.

Ses éléments caractéristqiues :

- Centre $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-1-7i}{1-3i}$

$$= \frac{(-1-7i)(1+3i)}{1+9}$$
$$= \frac{-1-10i+21}{10}$$
$$\omega = 2 - i \implies \Omega(2;\ -1)$$

- Rapport k :$a = 3i \implies k = 3$
- Angle : $a = 3i$ est un imaginaire pur donc $\theta = \frac{\pi}{2}$

S est une similitude de centre $\Omega(2;\ -1)$; de rapport $k = 3$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$

L'ensemble de éléments caracteristiques de S est : $\varphi = \left\{\Omega(2;\ -1);\quad k = 3;\ \ \theta = \frac{\pi}{2}\right\}$

2) Déterminons l'expression analytique de S.

Soit $z' = 3iz - 1 - 7i$

En posant $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$, on a :

$$z' = 3iz - 1 - 7i \Leftrightarrow x' + iy' = 3i(x + iy) - 1 - 7i$$
$$\Leftrightarrow x' + iy' = 3ix - 3y - 1 - 7i$$
$$\Leftrightarrow x' + iy' = -3y - 1 + i(3x - 7)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -3y - 1 \\ y' = 3x - 7 \end{cases}$$

L'expression analytique de S est : $\begin{cases} x' = -3y - 1 \\ y' = 3x - 7 \end{cases}$

3.3- Exemple d'une similitude directe qui transforme un point en unautre

Application 1 :

Les points A, B, C et D ont pour affixes respectives $2;\ -2i;\ -2$ et $2i$.

Déterminer la forme réduite de la similitude S telle que : $S(B) = C$ et $S(C) = D$

Résolution

On a : $z_A = 2; z_B = 2i\ ; z_C = -2$ et $z_D = 2i$

Déterminons la forme réduite de S telle que : $S(B) = C$ et $S(C) = D$

$$\begin{cases} S(B) = C \\ S(C) = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} az_B + b = z_C \\ az_C + b = z_D \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(-2i) + b = -2 \\ a(-2) + b = 2i \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2ai + b = -2\ \ (1) \\ -2a + b = 2i\ \ \ (2) \end{cases}$$

De l'équation (1), $b = -2 + 2ai$ et en remplacant dans (2), on a :

$$-2a - 2 + 2ai = 2i \implies -2a(1 - i) = 2(1 + i)$$
$$\implies a = \frac{1+i}{-1+i} = \frac{(1+i)(-1-i)}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$
$$\implies a = -i$$
$$b = -2 + 2ai \implies b = -2 + 2(-i)(i) = -2 + 2 = 0$$
$$\implies b = 0$$

Donc la forme réduite de S est : $z' = -iz$

Application 2 :

Soit A, B et C les points d'affixes respectives : $i; 1 + i$ et $2 + 2i$

1) Déterminer l'affixe du barycentre G des points pondérés $(A,2)$, $(B,-2)$ et $(C,1)$.
2) Démontrer que la similitude directe S qui transforme A en B et B en C, à pour centre le point G.
3) Déterminer l'angle et le rapport de S

Résolution :

On a : $z_A = i$; $z_B = 1 + i$; $z_C = 2 + 2i$

1) Déterminons l'affixe du barycentre G des points pondérés $(A,2)$, $(B,-2)$ et $(C,1)$.

$G = bar\{(A,2);(B,-2);(C,1)\} \Leftrightarrow\ 2\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2z_{\overrightarrow{GA}} - 2z_{\overrightarrow{GB}} + z_{\overrightarrow{GC}} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2(z_A - 2z_G) - 2(z_B - z_G) + z_C - z_G = 0$

$\Leftrightarrow 2z_A - 2z_G - 2z_B + 2z_G + z_C - z_G = 0$

$\Leftrightarrow 2z_A - 2z_B + z_C - z_G = 0$

$\Leftrightarrow z_G = 2z_A - 2z_B + z_C$

$\Leftrightarrow z_G = 2i - 2 - 2i + 2 + 2i$

$\Leftrightarrow z_G = 2i$

$z_G = 2i$ donc G est d'affixe $2i$.

2) Démontrons que la similitude S qui transforme A en B et B en C a pour centre le point G.

On a : $\begin{cases} S(A) = B \\ S(B) = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{a}z_A + b = z_B \\ \mathrm{a}z_B + b = z_C \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{ai + b = 1 + i} & (1) \\ \mathrm{a(1 + i) + b = 2 + 2i} & (2) \end{cases}$

$(2) - (1) \Leftrightarrow \begin{cases} -a\mathrm{i} - b = -1 - \mathrm{i} \\ a(1 + \mathrm{i}) + b = 2 + 2\mathrm{i} \end{cases}$

$\Leftrightarrow a = 1 +\ i$

En remplaçant a dans (1),

On a : $(1 + i)i + b = 1 + i \Leftrightarrow b = 1 + i - i + 1$

$\Leftrightarrow b = 2$

L'écriture complexe de S est : $z' =\ (1 + \mathrm{i})\ z + 2$.

G est le centre S si et seulement si : $G = \frac{b}{1-a} = 2i$

On a : $G = \frac{b}{1-a} = \frac{2}{1-1-\mathrm{i}} = \frac{2}{-i} = 2i$, alors $G = 2i$, donc S est une similitude directe de centre G d'affixe $2i$.

3) Déterminons l'angle et le rapport de S

L'angle de S c'est donc un argument de $1 + i$; le rapport k est $k = |1 + \mathrm{i}\,| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Soit θ cet angle ; on a :$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases};\ \Longrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Donc S a pour angle $\frac{\pi}{4}$ et le rapport $k = \sqrt{2}$

Application :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(0;\ \vec{u};\vec{v})$, on désigne par A ; B ; C les point d'affixe respectives : $i,\ 2 + 3i\ \ et\ 2 - 3i$.

Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a) Déterminer l'affixe du point A' image du point A par la rotation r.

b) Démontrer que les point A' ; B et C Sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A'.

Résolution :

On a : $z_A = i$, $z_B = 2+3i$ et $z_C = 2-3i$ et $\mathrm{r}\left(B; \frac{\pi}{4}\right) : z' - z_B = e^{\frac{i\pi}{4}}(z - z_B)$

a) Déterminons l'affixe du point A' image du point A par la rotation r.

$$\mathrm{r}\left(B; \frac{\pi}{4}\right) : z' - z_B = e^{\frac{i\pi}{4}}(z - z_B)$$

$$\Leftrightarrow z' = e^{\frac{i\pi}{4}}(z - z_B) + z_B$$

$$\Leftrightarrow z_{A'} = e^{\frac{i\pi}{4}}(z_A - z_B) + z_B$$

$$\Leftrightarrow z_{A'} = e^{\frac{i\pi}{4}} z_A - e^{\frac{i\pi}{4}} z_B + z_B$$

$$z_{A'} = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \times i - \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)(2+3i) + 2 + 3i$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times i - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2+3i) + 2 + 3i$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\sqrt{2} + \frac{3i\sqrt{2}}{2} + \frac{2i\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + 2 + 3i$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} - \frac{5i\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + 2 + 3i$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{5i\sqrt{2}}{2} + 2 + 3i$$

$$z_{A'} = 2 + 3i - 2i\sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow z_{A'} = 2 + i(3 - 2\sqrt{2}$$

b) Démontrons que les points A', B et C sont alignés.

Vérifions que : $\frac{z_C - z_{A'}}{z_B - z_{A'}} \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{z_C - z_{A'}}{z_B - z_{A'}} = \frac{2-3i-\left(2+i(3-2\sqrt{2}\,\right)}{2+3i-\left(2+i(3-2\sqrt{2}\,\right)}$$

$$= \frac{2-3i-2-3i+2i\sqrt{2}}{2+3i-2-3i+2i\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-6i+2i\sqrt{2}}{2i\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(-6i+2i\sqrt{2})(-2i\sqrt{2})}{8}$$

$$= \frac{-12\sqrt{2}+8}{8} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + 1 \in \mathbb{R}^*$$

$\frac{z_C - z_{A'}}{z_B - z_{A'}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + 1 \in \mathbb{R}^*$, alors les points A' ; B et C sont alignés.

- Ecriture de l'homothétie de centre B qui transforme C en A'.

$$h: z' - z_B = k(Z - z_B) \Leftrightarrow \begin{cases} h_{(B)} = B \\ h_{(C)} = A' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} az_B + b = z_B \\ az_C + b = z_{A'} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(2+3i) + b = 2 + 3i & (1) \\ a(2-3i) + b = 2 + i\left(3 - 2\sqrt{2}\right) & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\begin{cases} a(2+3i)+b=2+3i \\ -a(2-3i)-b=-2-i(3-2\sqrt{2}) \end{cases}}{6ai=2i\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow k = |a| = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \mathrm{k} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Donc $h: z' - (2+3\mathrm{i}) = \frac{\sqrt{2}}{3}\big(z' - (2+3\mathrm{i})\big)$

$$\Leftrightarrow Z' = \frac{\sqrt{2}}{3}z - \frac{\sqrt{2}}{3}(2+3i) + 2 + 3i$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{\sqrt{2}}{3}z - \frac{2\sqrt{2}}{3} - i\sqrt{2} + 2 + 3i$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{\sqrt{2}}{3}z - \frac{2\sqrt{2}}{3} + 2 + 3i - i\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{\sqrt{2}}{3}z + \frac{6-2\sqrt{2}}{3} + i\big(3-\sqrt{2}\big)$$

L'écriture complexe de cette homothétie est : $z' = \frac{\sqrt{2}}{3}z + \frac{6-2\sqrt{2}}{3} + i\big(3-\sqrt{2}\big)$

II. Similitudes indirectes

$\mathbf{II_1}$ −Définition et propriété

1.1- Définition :

On appelle similitude indirecte, toute similitude qui transforme tout angle en son opposé. Elle est donc la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement (symétrie orthogonale ou symétrie glissée).

Remarque :

Un antidéplacement est appelé :

- **Réflexion** = symétrie d'axe (D) : si $a\overline{b} + b = 0$; (isométrie indirecte) ;
- **Symétrie orthogonale** ;
- **Symétrie glissée** : si l'expression $a\overline{b} + b \neq 0$, ou si $k = 1$ il s'agit d'un symétrie glissée.

1.2- Théorème :

Soit S la transformation du plan dans lui-même .Si S est une similitude indirecte de rapport k, alors S admet une écriture de la forme : $\boldsymbol{z' = a\overline{z} + b}$; $(\boldsymbol{a \in \mathbb{C}^*};\ \boldsymbol{b \in \mathbb{C}})$.

Comme pour une similitude directe, l'écriture complexe d'une similitude indirecte permet de déterminer ses éléments caractéristiques.

1.3- Nature et élément caractéristiques

La nature et les éléments caractéristiques d'une similitude indirecte sont déterminés suivant le module de a ; c'est-à-dire $k = |a|$.

- Si $k = 1$, il s'agit d'une symétrie orthogonale ou soit d'une symétrie glissée ;
- On calcule $a\overline{b} + b$ et on distingue deux cas :

1[er] cas : si $a\overline{b} + b = 0$, alors S est une symétrie d'axe (D). (D) étant la droite passant par un point $A\left(\frac{b}{2}\right)$ et dirigé par le vecteur $\vec{u}(1+a)$.

2[e] cas : si $a\overline{b} + b \neq 0$, alors S est une symétrie glissée: $f: s_{\Delta\circ} t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S\Delta$; de vecteur $\vec{v}\left(\frac{a\overline{b}+b}{2}\right)$ et d'axe passant un point $B\left(\frac{b-a\overline{b}}{4}\right)$ et de direction $\vec{u}(1+a)$ ou $\vec{u}(i)$ si $\vec{v} = \vec{0}$.

- Si $k \neq 1$,S est la composée d'une homothétie de centre $I\left(\frac{a\overline{b}+b}{1-|a|^2}\right)$ et d'une symétrie orthogonale (réflexion) d'axe (D) passant par I et de direction $\vec{u}\left(1+\frac{a}{|a|}\right)$.

On écrit : $S = h \circ s_\Delta = s_\Delta \circ h$.

Propriétés :

- La composée de deux similitudes indirectes est une similitude indirecte ;
- La composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte ;
- La réciproque d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.

1.4- Point invariant ou point fixe

Définition :

On appelle point invariant ou point fixe par une transformation, tout point qui a pour image lui-même. C'est-à-dire pour tout point M du plan ; $f(M) = M$.

Remarque :

Pour démontrer qu'une application est un **point invariant**, il suffit tout simplement de résoudre l'équation : $z' = z$.

FIN

Chapitre 6 : LIMITES ET CONTINUITE

I. Limite d'une fonction

I_1 **— Limites de références**

Soit a, b et c des nombres réels et n un entier naturel non nul. On a :

$\lim\limits_{x\to a} c = \lim\limits_{x\to+\infty} c = \lim\limits_{x\to-\infty} c = c$	$\lim\limits_{x\to a}(x-a)^n = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} -\infty; & si\ n\ est\ pair \\ +\infty; & si\ n\ est\ impair \end{cases}$
$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0$	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty\,; si\ n\ est\ pair$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^n} = +\infty\,; si\ n\ est\ pair$
$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{2n-1}} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2n} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2n-1}} = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2n-1} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sinx}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n} = 0$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{coss-1}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^n} = 0$
$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^n} = +\infty\,;\ si\ n\ est\ pair$	$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^n} = -\infty\,; si\ n\ est\ pair$

NB : Les fonctions cosinus et sinus n'ont pas de limite en l'infini.

1.2—**Les limites et opérations sur les fonctions**

Dans le tableau suivant, $x_0, l\ et\ l'$ désignent des nombres réels.

Les résultats essentiels ci-dessous concernent les limites de la somme, du produit et du quotient de deux fonctions.

$(+\infty)+l=+\infty$	$Si : l>0$	$l\times(+\infty)=+\infty$	$\dfrac{l}{+\infty}=0$	$\dfrac{+\infty}{l}=+\infty$
$(-\infty)+l=-\infty$		$l\times(-\infty)=-\infty$	$\dfrac{l}{-\infty}=0$	$\dfrac{-\infty}{l}=-\infty$
$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$	$Si : l<0$	$l\times(+\infty)=-\infty$	$\dfrac{l}{+\infty}=0$	$\dfrac{+\infty}{l}=-\infty$
$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$		$l\times(-\infty)=+\infty$	$\dfrac{l}{+\infty}=0$	$\dfrac{-\infty}{l}=+\infty$

1.3—**Les Les formes indéterminées**

Les symboles $(+\infty)$ désigne un élément non réel et supérieur à tout réel et $(-\infty)$ désigne un élément non réel et inferieur à tout réel. Il existe donc quatre (4) types de formes indéterminées énumérées ci-dessous.

(1) $+\infty-\infty$	**Forme indéterminée** : On ne peut conclure directement	(3) $\mathbf{\dfrac{0}{0}}$	**Forme indéterminée** : On ne peut conclure directement
(2) $\dfrac{\infty}{\infty}$	**Forme indéterminée** : On ne peut conclure directement	(4) $\mathbf{0}\times(+\infty)$	**Forme indéterminée** : On ne peut conclure directement

Attention: L'obtention d'une forme indéterminée ne permet pas de conclure directement. Il faut donc lever cette indétermination:

- Soit en factorisant la fonction ou en séparant une fraction en plusieurs parties;
- Soit en faisant l'expression conjuguée de la fonction.

1.3—Limite en l'infini des fonctions polynôme et rationnelle

Propriétés

Soient $a\ et\ b\ (b\neq 0)$ des nombres réels et $n,\ m$ des entiers naturels non nuls, on a:

- $\boxed{\lim_{x\to\infty} a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_0=\lim_{x\to\infty} a_nx^n}$

On dit que la limite d'une fonction polynôme en l'infini est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.

- $\boxed{\underset{x\to\infty}{lim}\ \dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\cdots+b_0}=\underset{x\to\infty}{lim}\ \dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}}$

On dit que la limite d'une fonction rationnelle en l'infini est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple :

Calculons les limites suivantes:

- $\lim_{x\to+\infty}(5x^3-x+1)=\lim_{x\to+\infty}5x^3=+\infty$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}(5x^3-x+1)=+\infty$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} (5x^3 - x + 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} 5x^3 = -\infty$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} 5x^3 - x + 1 = -\infty$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{7x^5 - 2x^3 + 1}{3x^2 - x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{7x^5}{3x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{7}{3} x = +\infty$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{7x^5 - 2x^3 + 1}{3x^2 - x + 1} = +\infty$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = 2$$

1.4—**Propriétés de comparaison**

1) Soit f et g deux fonctions et $I = \left]A;\ +\infty\right[$, un intervalle donné:
   - Si $f \geq g$ sur I et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
   - Si $f \leq g$ sur I et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$
   - Si $f \leq g$ sur I et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l'$, alors $l \leq l'$

2) Soit f, g et g trois fonctions. J $= \left]A;\ +\infty\right[$, un intervalle donné:
   - Si $g \leq f \leq h$ sur J et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$
   - S'il existe un nombre réel l tel que: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et pour tout x de $I =]A; +\infty[$, $|f(x) - l| \leq g(x)$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

Exemple

On considère la fonction f définie par: $f(x) = 2x + 1 - 3sinx$

Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Solution:

$f(x) = 2x + 1 - 3sinx$, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq sinx \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -sinx \leq 1$

$$\Leftrightarrow -3 \leq -3sinx \leq 3$$
$$\Leftrightarrow 2x + 1 - 3 \leq 2x + 1 - 3sinx \leq 2x + 1 + 3$$
$$\Leftrightarrow 2x - 2 \leq f(x) \leq 2x + 4$$

On a:

1) $f(x) \geq 2x - 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 2 = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
2) $f(x) \leq 2x + 4$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x + 4 = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} + f(x) = +\infty$
3) $2x - 2 \leq f(x) \leq 2x + 4$:
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 2 = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x + 4 = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 2 = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x + 4 = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Application :

Montrons que : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\frac{x-1}{x} \leq \frac{x+sinx}{x} \leq \frac{x+1}{x}$

On a: $\forall\ \ x \in\ \mathbb{R}$,$-1 \leq sinx \leq 1$

$\Longrightarrow x - 1 \leq x + sinx \leq x + 1$

$\Longrightarrow \frac{x-1}{x} \leq \frac{x=sinx}{x} \leq \frac{x+1}{x}$

D'où $\frac{x-1}{x} \leq \frac{x+sinx}{x} \leq \frac{x+1}{x}$

- Calculons $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)$

On a: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}\right) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}\right) = 1$

Déduisons-en $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+sinx}{x}$

On a : $\frac{x-1}{x} \leq \frac{x+sinx}{x} \leq \frac{x+1}{x}$ et comme $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$

Alors d'après le théorème de gendarme (théorème de comparaison) :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+sinx}{x} = 1$$

1.5 –Limites de la composée de deux fonctions :

Propriété :

Soit $g \circ f$, la composée de deux fonctions et a un élément ou une borne de d'un intervalle sur lequel $g \circ f$ est définie.

$$\text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{y\to b} g(y) = l, \text{ alors } \lim_{x\to a} g \circ f(x) = l$$

NB : cette propriété reste valable pour les limites en l'infini.

Exemple :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 1}\left(sin\frac{\pi x^2}{x+1}\right)$
2) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}\right)$
3) $\lim_{x\to+\infty} xsin\frac{1}{x}$

Solution :

Calculons les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 1}\left(sin\frac{\pi x^2}{x+1}\right)$

On pose : $u(x) = \frac{\pi x^2}{x+1}$ telle que $sin\frac{\pi x^2}{x+1} = sin(u)$.

On a : $\lim_{x\to 1} u(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\pi x^2}{x+1}\right) = \frac{\pi}{2}$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1}\left(sin\frac{\pi x^2}{x+1}\right) = \lim_{u\to\frac{\pi}{2}} sin(u)$$

$$= sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\lim_{x\to 1}\left(sin\frac{\pi x^2}{x+1}\right) = 1}$$

2) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}\right)$

Soit $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = 2$

$$\Longrightarrow \lim_{y\to 2}\sqrt{y} = \sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}\right)=\sqrt{2}$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}$.

On a : $x\sin\frac{1}{x}=\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

On pose $X=\frac{1}{x}$, lorsque $x\to+\infty$; $X\to 0$.

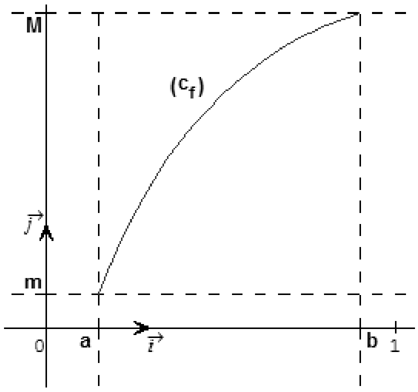
Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}=1}$$

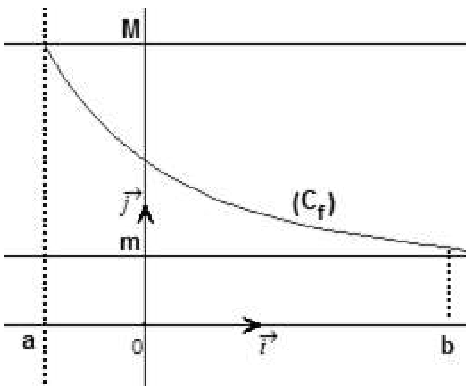
1.6 −**Limites d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert :**

Propriété 1 :

1) Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a;b[$; $(a<b)$.
   - Si f est majorée sur $]a;b[$, alors f admet une limite finie à gauche en b et on note : $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=l$; (l est une limite finie en b à gauche).
   - Si f est minorée sur $]a;b[$, alors f admet une limite finie à droite en a et on note : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$; (l est une limite finie en a à droite).



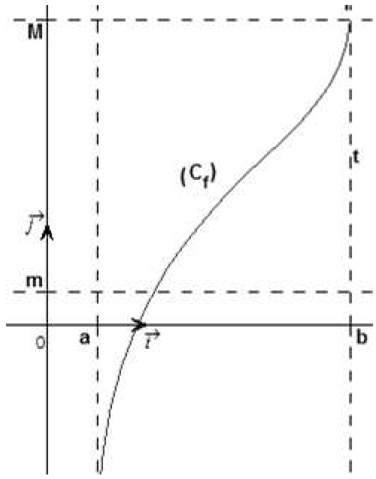
2) D'une manière analogue ; pour une fonction f décroissante sur un intervalle ouvert $]a;b[$; $(a<b)$. On a :
   - Si f est majorée sur $]a;b[$, alors f admet une limite finie à droite en a et on note : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$;
   - Si f est minorée sur $]a;b[$, alors f admet une limite finie à gauche en b et on note : $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=l$.



Propriété 2 :

Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a;b[$;

- Si f est non majorée sur $]a;b[$, alors f a pour limite $+\infty$ à gauche en b ; c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$.
- Si f est non minorée sur $]a;b[$, alors f a pour limite $-\infty$ à droite en a ; c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.



1.7 – **Calculs de limites des formes indéterminées :**

Pour procéder au calcul d'une limite dans le cas où les opérations nous conduisent à une forme indéterminée, on peut effectuer :

***a* – Une factorisation :**

Exemple :

Calculons les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x}\right)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x}\right) = +\infty - \infty$? ? ?; (on ne peut conclure directement) ;

En effet, $x-\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)$$
$$= +\infty(+\infty) = +\infty$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x}\right) = +\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^3+x^2+8}}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^3+x^2+8}} = \frac{+\infty}{+\infty}$??? ; (on ne peut conclure directement) ;

En effet, $\frac{3x-1}{\sqrt{x^3+x^2+8}} = \frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(x+1+\frac{8}{x^2}\right)}} = \frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{x+1+\frac{8}{x^2}}}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^3+x^2+8}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{x+1+\frac{8}{x^2}}}$$; car $|x| = x$ lorsque $x \to +\infty$;

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{x+1+\frac{8}{x^2}}}$$

$$= \frac{3}{+\infty} = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^3+x^2+8}} = 0$$

***b* − Expression conjuguée :**

Exemple :

Calculons les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = +\infty - \infty\ ???$; (on ne peut conclure directement) ;

En effet, $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

$$= \frac{x+1-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{2}{+\infty}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 0$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{9x^2+7} + 3x$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{9x^2+7} + 3x = +\infty - \infty$??? ; (on ne peut conclure directement) ;

En effet, $\sqrt{9x^2+7} + 3x = \frac{(\sqrt{9x^2+7}+3x)(\sqrt{9x^2+7}-3x)}{\sqrt{9x^2+7}-3x}$

$$= \frac{9x^2+7-9x^2}{\sqrt{9x^2+7}-3x}$$

$$\sqrt{9x^2+7} + 3x = \frac{7}{\sqrt{9x^2+7}-3x}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \sqrt{9x^2+7} + 3x = \lim_{x\to-\infty} \frac{7}{\sqrt{9x^2+7}-3x}$$

$$= \frac{7}{+\infty} \quad \text{car } \lim_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2+7} - 3x = +\infty$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2+7} + 3x = 0$$

***c* − Combinaison de l'expression conjuguée et d'une factorisation :**

Exemple :

Calculons : $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x-2} + x$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x-2} + x = +\infty - \infty$??? ; (on ne peut conclure directement) ;

En effet, $\sqrt{x^2+3x-2} + x = \frac{(\sqrt{x^2+3x-2}+x)(\sqrt{x^2+3x-2}-x)}{\sqrt{x^2+3x-2}-x}$

$$= \frac{x^2+3x-2-x^2}{\sqrt{x^2+3x-2}-x}$$

$$= \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+3x-2}-x}$$

$$= \frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}-x}$$

$$\sqrt{x^2+3x-2}+x = \frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}-x}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3\mathrm{x}-2}+x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}+1\right)}$$; car $|x| = -x$ lorsque $x \to -\infty$;

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}+1} = \frac{-3+0}{1+1} = -\frac{3}{2}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3\mathrm{x}-2}+x = -\frac{3}{2}$$

d − Utilisation du taux de variation

Exemple :

Calculons : $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{cos^2x-\frac{1}{4}}{x-\frac{\pi}{3}}$

On a : $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{cos^2x-\frac{1}{4}}{x-\frac{\pi}{3}} = \frac{0}{0}$??? ; (on ne peut conclure directement) ;

En effet, $\frac{cos^2x-\frac{1}{4}}{x-\frac{\pi}{3}} = \frac{\left(cosx-\frac{1}{2}\right)\left(cosx+\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$

$$= \frac{cosx-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}\left(cosx+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left[\frac{cosx-cos\frac{\pi}{3}}{x-\frac{\pi}{3}}\right]\left(cosx+\frac{1}{2}\right)$$

$$= [cosx]'\left(cosx+\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{cos^2x-\frac{1}{4}}{x-\frac{\pi}{3}} = -sinx\left(cosx+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{cos^2x-\frac{1}{4}}{x-\frac{\pi}{3}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[-sinx\left(cosx+\frac{1}{2}\right)\right] ;$$

$$= -\sin\frac{\pi}{3}\left(cos\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{cos^2x-\frac{1}{4}}{x-\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e − Un changement d'écriture :

Exemple :

Calculons :

a) $\lim_{x\to0}\frac{sinx}{\sqrt{x}}$

On a : $\lim_{x\to0}\frac{sinx}{\sqrt{x}} = \frac{0}{0}$??? ; (on ne peut conclure directement) ;

En effet, $\frac{sinx}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\times sinx}{x}$

$$\frac{sinx}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\left(\frac{sinx}{x}\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to0}\frac{sinx}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to0}\sqrt{x}\left(\frac{sinx}{x}\right) = 0\times1 = 0$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{\sqrt{x}} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x^3}$

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x^3} = \frac{0}{0}$??? ; (on ne peut conclure directement) ;

En effet, $\frac{sinx}{x^3} = \frac{1}{x^2}\times\frac{sinx}{x}$

$\frac{sinx}{x^3} = \frac{1}{x^2}\times\left(\frac{sinx}{x}\right)$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\times\left(\frac{sinx}{x}\right) = \frac{1}{0}\times 1$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x^3} = \begin{cases} -\infty; & x < 0 \\ +\infty; & si\ x > 0 \end{cases}$$

II. Etude d'une branche infinie

De façon générale, on parle d'une branche infinie d'une fonction de domaine de définition D_f et de courbe représentative (C_f) dans les cas suivants :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$;
- $\lim\limits_{x\to {x_0}^+} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x\to {x_0}^-} f(x) = \infty$

NB : $\infty = \pm\infty$ et $(l \in \mathbb{R})$

$\mathbf{II_1}$ −Les asymptotes :

a − Asymptote parallèle à l'un des axes

Définition :

Soit f une fonction et (C_f) sa courbe représentative.

- Lorsque f admet une limite finie l en $+\infty$ ou en $-\infty$, c'est-à-dire : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l}$ **ou** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l}$, alors la droite d'équation $\boldsymbol{y = l}$ est dite **asymptote horizontale** à (C_f) ;
- Lorsque f admet une limite infinie à droite ou à gauche en x_0, c'est-à-dire : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to {x_0}^+} f(x) = \infty}$ **ou** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to {x_0}^-} f(x) = \infty}$, alors la droite d'équation $\boldsymbol{x = x_0}$ est dite **asymptote verticale** à (C_f).

<u>Exemple</u> :

a) Soit $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x + 1 > 0$$
$$\Leftrightarrow x > -1$$
$$\Leftrightarrow x \in]-1;\ +\infty[$$

Donc $D_f =]-1;\ +\infty[$

$x \in D_f$; on a :

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+}\frac{2x}{\sqrt{x+1}} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$

Alors, on n'en déduit que la droite d'équation $\boldsymbol{x = -1}$ est asymptote verticale à (C_f).

b) Soit $f(x) = \frac{x^2-2x+5}{2x^2+1}$

f est définie sur $\mathbb{R}$. Calculons les limites de f aux bornes de son D_f.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+5}{2x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

  $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+5}{2x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

  $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$, alors la droite d'équation $\boldsymbol{y} = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$.

b − Asymptote oblique

Définition :

Soit f une fonction et (C_f) sa courbe représentative.

On dit que la droite d'équation $\boldsymbol{y = ax + b}$ **est une asymptote oblique à** (C_f) **l**orsque :

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0}$ **ou** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0}$

Méthode :

Pour étudier les branches infinies de la courbe représentative d'une fonction rationnelle $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ où $(d°f \geq d°g)$ en $-\infty$ et en $+\infty$, on peut effectuer la division euclidienne de f par g.

<u>Exemple</u> :

Soit $f(x) = x - 2 + \frac{2}{x^2+1}$.

Démontrons que la droite d'équation : $y = x - 2$ est asymptote oblique à (C_f) en en $-\infty$ et en $+\infty$.

En effet, $f(x) - y = x - 2 + \frac{2}{x^2+1} - (x - 2)$

$f(x) - y = \frac{2}{x^2+1}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{2}{x^2+1}\right) = \frac{2}{+\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x^2+1}\right) = \frac{2}{+\infty} = 0$

D'où la droite d'équation : $y = x - 2$ est asymptote oblique à (C_f) en en $-\infty$ et en $+\infty$.

Propriété :

Soit f une fonction et (C_f) sa courbe représentative.

la droite d'équation $\boldsymbol{y = ax + b}$ **est une asymptote à** (C_f) si et seulement si : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a}$ **et** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b}$**.**

Remarque :

Les courbes représentatives de deux fonctions f et g sont asymptotes lorsque :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$.

$\mathbf{II_1}$ − Directions asymptotiques

Soit f une fonction de courbe représentative (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0;\ \vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Supposons que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$; ce qui confirmerait l'existence des branches infinies.

Lorsqu'on étudie la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$, on distingue trois cas :

1er Cas :

Si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ ou $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors on dit que (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe (OJ).

2e Cas :

Si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ou $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, alors on a :

- Si $a = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ou $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe (OI) ;
- Si $\neq 0$, dans ce cas, on calcule $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$ ou $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax]$ et on distingue trois possibilités :
  - Si $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b$ ou $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax] = b$, alors la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est appelée asymptote oblique à (C_f) ;
  - Si $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$ ou $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$, alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$;
  - Si $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$ n'existe pas ou $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax]$ n'existe pas, alors (C_f) n'a ni asymptote, ni branche parabolique mais elle admet une direction asymptotique celle de la droite d'équation $y = ax$.

3e Cas :

Si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ n'existe pas ou $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ n'existe pas, alors (C_f) n'a ni asymptote, ni branche parabolique, ni direction asymptotique, on ne peut conclure.

III. Continuité d'une fonction

III_1 − Continuité sur un intervalle

1.1 − Définition :

Soit K un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction f est continue sur K si elle est continue sur en tout élément de K.

Exemple :

- Toute fonction monôme est continue sur $\mathbb{R}$;
- Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Propriété :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle K.

- Les fonctions $f + g$, $f \times g$, kf ; $(k \in \mathbb{R})$ et $|f|$ sont continues sur K ;
- Si g ne s'annule pas sur K, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur K ;
- Si f est positive sur K, alors $\sqrt{f}$ est continue sur K ;
- La composée de deux fonction continues sur leur ensemble de définition est continue sur son ensemble de définition ;

III_2 − Image d'un intervalle par une fonction continue

Propriété :

Soit f une fonction continue.

- L'image par f d'un intervalle est un intervalle ou un singleton ;
- L'image par f d'un intervalle fermé est un intervalle fermé ou un singleton

Remarque :

- $\forall x \in [a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors f est bornée sur $[a; b]$,
- m *et* M ont un antécédent dans $[a; b]$ par f, on dit que f atteint ses bornes ;
- Les valeurs de m et M ne sont pas forcement celle de $f(a)$ et $f(b)$. m et M sont le minimum et le maximum de f sur $[a; b]$

2.1 – Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle K et a et b deux éléments de K.
Tout nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent compris entre a et b.

Remarque :

Pour qu'un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ ait un antécédent par f dans $[a; b]$, il faut nécessairement que f soit continue sur $[a; b]$.

Conséquence :

Soit f une fonction continue sur un intervalle K.
S'ils existent deux éléments a et b $(a < b)$ de K tels que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signe contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[a; b]$.

NB : Si f ne s'annule pas sur K, alors f garde un signe constant sur K.

Exemple :

Démontrer que l'équation $cos\frac{\pi x}{2} = x$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.
La fonction $x \longmapsto cos\frac{\pi x}{2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, or $[0; 1] \subset \mathbb{R}$, d'où $cos\frac{\pi x}{2}$ est continue sur $[0; 1]$.
Alors la fonction $f(x) = cos\frac{\pi x}{2} - x$ est continue sur $[0; 1]$.
On a : $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$, alors $f(0) \times f(1) < 0$ et l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans $[0; 1]$ et on en déduit que l'équation $cos\frac{\pi x}{2} = x$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.

$\mathbf{III_3}$ –Fonction continue et monotone

3.1 – Bijection réciproque d'une fonction continue et monotone

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle K détermine une bijection sur un intervalle $f(K)$.

La bijection réciproque f^{-1} est continue sur l'intervalle $f(K)$. Elle est strictement monotone et a le même sens de variation que f.

Exemple :

Soit $\begin{matrix} f: [1; +\infty[\longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = x^2 - 2x \end{matrix}$

1) Montrer que f est continue et strictement monotone de $[1;\ +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
2) Démontrer que f réalise une bijection de $[1;\ +\infty[$ vers un intervalle que l'on déterminera.

Solution :

Soit $f(x) = x^2 - 2x$
$D_f = \mathbb{R}$, or $[1;\ +\infty[\subset \mathbb{R}$, d'où f est définie et continue sur $[1;\ +\infty[$.

On a : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x) = 2x - 2$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-1 $\nearrow$	$+\infty$

1) f est continue et strictement croissante de $[1;\ +\infty[\ \longmapsto \mathbb{R}$.
2) f réalise une bijection réciproque de $[1;\ +\infty[$ vers $[-1;\ +\infty[$.

3. 2 − Image d'un intervalle par une fonction continue et monotone

Lorsque f est strictement monotone et continue un intervalle K, alors $f(K)$ est un intervalle de même nature.

Intervalles K	$f(K)$	
	f est strictement croissante	f est strictement décroissante
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$\left[f(a);\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left[\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\ f(a)\right[$
$]a; b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]a;\ +\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\ \lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$

Exemple :

Soit $\begin{array}{c} g: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(x) = \frac{x+1}{x-1} \end{array}$

1) Montrer que g admet une bijection de $]1;\ +\infty[$vers un intervalle que l'on précisera.
2) En déduire que g admet une application bijective réciproque .
3) Donner la forme explicite de g^{-1}.

Solution :

Soit $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$

$D_g =]-\infty; 1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$, or $[1;\ +\infty[\ \subset \mathbb{R}$, d'où f est définie et continue sur $]1;\ +\infty[$

On a : $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 1$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$, alors $g'(x) < 0$.

1) g est continue et strictement décroissante sur $]1;\ +\infty[$, donc g réalise une bijection de $]1;\ +\infty[$ vers $g(]1;\ +\infty[) =]1;\ +\infty[$.
2) g réalise une bijection de $]1;\ +\infty[$ vers $]1;\ +\infty[$, alors elle admet une bijection réciproque ;
3) La forme explicite de g^{-1}.

On a : $g(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y$

$$\Leftrightarrow x + 1 = y(x - 1)$$

$\Leftrightarrow x + 1 = xy - y$
$\Leftrightarrow x - xy = -1 - y$
$\Leftrightarrow xy - x = 1 + y$
$\Leftrightarrow x(y - 1) = 1 + y$
$\Leftrightarrow x = \frac{1+y}{y-1}$

Donc $g^{-1}(x) = \frac{1+x}{x-1}$

3. 2 − Fonction racine n-ième

Définition :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On appelle fonction racine n-ième, la bijection réciproque de la fonction x^n et on a : $\begin{matrix} f: \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto y = x^n \end{matrix}$

Notation :

y est un nombre réel, l'antécédent de y par f est noté $\sqrt[n]{y}$ et se lit « racine n-ième de y ou encore $y^{\frac{1}{n}}$.

Propriété de la racine n-ième :

Soit x et y deux réels strictement positifs et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- $x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$ ou $x = y^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{y} \geq 0$
- $\left(\sqrt[n]{y}\right)^n = \sqrt[n]{y^n} = \left(y^{\frac{1}{n}}\right)^n = y$

Exemple :

Démontrons que : $\sqrt[3]{8} = 2$.

On a : $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2$

Calcul avec les racine n-ièmes :

$\forall a; b \in \mathbb{R}_+$ et $m\ et\ n$ deux entiers naturels avec $n \geq 2$.

- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} = (ab)^{\frac{1}{n}}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = (a)^{\frac{1}{mn}}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$
- $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{mn}} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} = a^{\frac{n+m}{mn}}$

FIN

Chapitre 7 : DERIVATIONS ET ETUDE DE FONCTIONS

I. DERIVATIONS

$\mathbf{I_1}$ − Dérivabilité en un point x_0.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I.

On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si : $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$. Le nombre réel $f'(x_0)$ est appelé nombre dérivé de f en x_0.

Lorsque f est dérivable en x_0, alors la courbe (C_f) admet une tangente au point M_0 de coordonnées $(x_0; f(x_0))$.

L'équation de cette tangente est de la forme : $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

$f'(x_0)$ est le coefficient directeur de cette tangente.

Exemple :

Soit $f(x) = (x-3)\sqrt{x+1}$

f est-elle dérivable en 3 ? Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 3.

Solution :

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\sqrt{x+1}}{x-3}$$
$$= \lim_{x\to 3}\sqrt{x+1} = 2.$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = 2$$

Don f est dérivable en 3.

L'équation de la tangente est $(T): y = f'(3)(x-3) + f(3)$

$$y = f'(3)(x-3) + f(3)$$
$$\Longrightarrow y = 2(x-3) + 0$$
$$\Longrightarrow (T): y = 2x - 6$$

$\mathbf{I_2}$ − Dérivabilité sur un intervalle

Une fonction f définie sur $[a;b]$ est dérivable sur $[a;b]$ si est dérivable sur $]a;b[$, dérivable à droite en a et à gauche en b.

On écrit :

- $\lim_{x\to a^>}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$; ($f'(a)$ est le nombre dérivé à droite)
- $\lim_{x\to b^<}\frac{f(x)-f(b)}{x-b} = f'(b)$; ($f'(b)$ est le nombre dérivé à gauche)

Exemple :

Soit $f(x) = (x-1)\sqrt{x-1}$ et $h(x) = \sqrt{3-x} + 1$

Etudier la dérivabilité de f sur $[1; +\infty[$; puis celle de h sur $]-\infty; 3]$.

Solution :

- f est dérivable sur $[1; +\infty[$ et on a :

$$\lim_{x \to 1^>} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^>} \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1^>} \sqrt{x-1} = 0.$$
$$\Longrightarrow \lim_{x \to 1^>} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$$

Donc f est dérivable sur $[1; +\infty[$.

- h est dérivable sur $]-\infty; 3]$ et on a :

$$\lim_{x \to 3^<} \frac{h(x)-h(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^<} \frac{\sqrt{3-x}+1-1}{x-3}$$
$$= \lim_{x \to 3^<} \frac{\sqrt{3-x}}{x-3}$$
$$= \lim_{x \to 3^<} \frac{3-x}{(x-3)\sqrt{3-x}}$$
$$= \lim_{x \to 3^<} \frac{-(x-3)}{(x-3)\sqrt{3-x}}$$
$$= \lim_{x \to 3^<} \frac{-1}{\sqrt{3-x}}$$
$$= \frac{-1}{0^-} = +\infty$$
$$\Longrightarrow \lim_{x \to 3^<} \frac{h(x)-h(3)}{x-3} = +\infty$$

Donc h n'est pas dérivable sur $]-\infty; 3]$.

Remarque :

Une fonction est dérivable sur un ensemble E lorsqu'elle est dérivable en tout élément de E.

Une fonction dérivable sur un ensemble E est continue sur cet ensemble.

$\mathbf{I_3}$ − Dérivées usuelles

3.1 − Dérivées des fonctions usuelles

Tableau récapitulatif des dérivées des fonctions élémentaires

Fonction	Fonction dérivée	Ensemble de dérivabilité
$f(x) = k; (k \in \mathbb{R})$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n; (n \in \mathbb{Z}^*)$	$f'(x) = n.x^{n-1}$	$\mathbb{R}^*$, si $n < 0$ $\mathbb{R}$, si $n > 0$
$f(x) = cosx$	$f'^{(x)} = -sinx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = sinx$	$f(x) = cosx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = tanx$	$f'(x) = 1 + tan^2x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

3.2 −Derivée et opérations sur les fonctions

Tableau récapitulatif

Dans ce tableau u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle ouvert K.

Operations sur les fonctions	Fonctions	Dérivées des fonctions
Dérivée de la somme de deux fonctions	$u+v$	$u'+v'$
Dérivée du produit de deux fonctions	$u.v$	$u'v+v'u$
Dérivée de la puissance d'une fonction	$u^n;\ (n\in\mathbb{N}), n\geq 2$	$n.u'.u^{n-1}$
Dérivée de l'inverse d'une fonction	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
Dérivée du quotient de deux fonctions	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$
Dérivée de la racine carrée d'une fonction	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
Dérivée de la fonction : $x\to u(ax+b)$	$u(ax+b)$	$au'(ax+b)$
Dérivée de $cos\circ(u)$	$cos(ax+b)$	$-a.sin(ax+b)$
Dérivée de $sin\circ(u)$	$sin(ax+b)$	$a.cos(ax+b)$
Dérivée du produit d'une fonction par un scalaire	$kv;\ (k\in\mathbb{R})$	kv'

Exercice d'application :

Dans chacun des cas suivants, étudions la dérivabilité de f sur son ensemble de définition, puis calculons sa fonction dérivée.

a) $f(x)=x^2|x|$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f(x)=\begin{cases} x^3, si\ x>0 \\ -x^3, si\ x<0\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 3x^2, si\ x>0 \\ -3x^2, si\ x<0\end{cases}$$

b) $f(x)=(x-2)\sqrt{2-x}$

f est définie sur $]-\infty;2]$ et dérivable sur $]-\infty;2[$ et on a :

$$\lim_{x\to 2^<}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^<}\frac{(x-2)\sqrt{2-x}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2^<}\sqrt{2-x}=0.$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^<}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=0$$

Donc f est dérivable sur son domaine de définition $D_f=]-\infty;2]$.

$$\forall x\in]-\infty;2],\ f'(x)=\sqrt{2-x}-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}\times(x-2)$$
$$=\frac{2(2-x)-x+2}{2\sqrt{2-x}}$$
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{6-3x}{2\sqrt{2-x}}$$

c) $f(x)=\sqrt{2x+5}$

f est définie sur $\left[-\frac{5}{2};\ +\infty\right[$ et dérivable sur $\left]-\frac{5}{2};\ +\infty\right[$ et on a :

$$\lim_{x\to -\frac{5}{2}^>}\frac{f(x)-f\left(-\frac{5}{2}\right)}{x+\frac{5}{2}}=\lim_{x\to -\frac{5}{2}^>}\frac{\sqrt{2x+5}}{x+\frac{5}{2}}$$

$$= \lim_{x \to -\frac{5}{2}^{>}} \frac{2\sqrt{2x+5}}{2x+5}$$

$$= \lim_{x \to -\frac{5}{2}^{>}} \frac{2}{\sqrt{2x+5}} = \frac{2}{0^{+}} = +\infty$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to -\frac{5}{2}^{>}} \frac{f(x)-f\left(-\frac{5}{2}\right)}{x+\frac{5}{2}} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable sur son domaine de définition $D_f = \left[-\frac{5}{2};\ +\infty\right[$

$$\forall x \in \left[-\frac{5}{2};\ +\infty\right[,\ f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

d) $f(x) = (x+1)\sqrt{x^2 - 3x - 4}$

$$f(x)\ \exists \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-4) \geq 0$$

x	$-\infty$	-1		4		$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+$		$-$		$+$	

$D_f =]-\infty, -1] \cup [4;\ +\infty[$

f est dérivable sur $]-\infty, -1[$ et on a :

$$\lim_{x \to -1^{<}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^{<}} \frac{(x+1)\sqrt{x^2-3x-4}}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1^{<}} \sqrt{x^2 - 3x - 4} = 0.$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to -1^{<}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = 0$$

Donc f est dérivable à gauche en -1, alors elle est dérivable sur $]-\infty; -1]$.

f est dérivable sur $[4;\ +\infty[$ et on a :

$$\lim_{x \to 4^{>}} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x \to 4^{>}} \frac{(x+1)\sqrt{x^2-3x-4}}{x-4}$$

$$= \lim_{x \to 4^{>}} \frac{(x+1)\sqrt{(x+1)(x-4)}}{x-4}$$

$$= \lim_{x \to 4^{>}} \frac{(x+1)(x+1)(x-4)}{(x-4)\sqrt{(x+1)(x-4)}}$$

$$= \lim_{x \to 4^{>}} \frac{(x+1)(x+1)}{\sqrt{(x+1)(x-4)}}$$

$$= \frac{25}{+\infty} = -\infty$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to 4^{>}} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 4, alors elle n'est pas dérivable sur $[4;\ +\infty[$.

On en déduit que f n'est pas dérivable sur son $D_f =]-\infty, -1] \cup [4;\ +\infty[$.

$\forall x \in]-\infty, -1] \cup [4;\ +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4} + \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x-4}} \times (x+1)$$

$$= \frac{2(x^2-3x-4)+(2x-3)(x+1)}{2\sqrt{x^2-3x-4}}$$
$$= \frac{2(x+1)(x-4)+(2x-3)(x+1)}{2\sqrt{x^2-3x-4}}$$
$$= \frac{(x+1)[2(x-4)+(2x-3)]}{2\sqrt{x^2-3x-4}}$$
$$f'(x) = \frac{(x+1)(4x-11)}{2\sqrt{x^2-3x-4}}$$

Exemple :

Déterminons la dérivée de f dans les cas suivants :

a) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}$

On a : $f'(x) = -\frac{\left[(x^2+1)^3\right]'}{(x^2+1)^3}$

$$= -\frac{3(2x)(x^2+1)^2}{(x^2+1)^6}$$
$$\Longrightarrow f'(x) = -\frac{6x}{(x^2+1)^3}$$

b) $f(x) = \sqrt{(x^2+1)^3}$

On a : $f'(x) = \frac{\left[(x^2+1)^3\right]'}{2\sqrt{(x^2+1)^3}}$

$$= \frac{3(2x)(x^2+1)^2}{2\sqrt{(x^2+1)^3}}$$
$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{3x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1} = (x^2+1)^{\frac{1}{3}}$

On a : $f'(x) = \frac{1}{3} \times 2x(x^2+1)^{\frac{1}{3}-1}$

$$= \frac{2}{3}x(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}$$
$$= \frac{\frac{2}{3}x}{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}$$
$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{2x}{3\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2}$$

3.3 −Derivée de la fonction composée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K et g une fonction définie sur $f(K)$.

La fonction $g \circ f$ est dérivable sur K et on a :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x).g'(f(x))$$

Exemple :

Déterminons la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = cos(x^2+1)$.

En effet, f est la composée des fonctions $g(x) = cosx$ et $h(x) = x^2+1$

$$f(x) = g \circ h(x) \Longrightarrow f'(x) = h'(x).g'(h(x))$$
$$= 2x[-sin(x^2+1)]$$
$$\Longrightarrow f'(x) = -2xsin(x^2+1)$$

3.4 −Derivée de la réciproque d'une fonction

Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle K telle que pour tout élément x de K, $f'(x) \neq 0$.

La fonction f réalise une bijection de réciproque de K vers $f(K)$.

La bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(K)$ et sa dérivée est :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Exemple :

Soit $\begin{array}{l} f : [0;\ +\infty[\longrightarrow [0;\ +\infty[\\ \qquad x \longmapsto f(x) = x^n \end{array}$; avec $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que f est une bijection et déterminer l'ensemble de dérivabilité J de f^{-1}.

b) Définir f^{-1} et sa fonction dérivée.

Solution :

$f(x) = x^n$

a) Montrons que f est une bijection et déterminons l'ensemble de dérivabilité J de f^{-1}.

$D_f = [0;\ +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$x \in [0;\ +\infty[$; f est dérivable et $f(x) = n.x^{n-1}$.

Donc f est continue et strictement croissante sur $[0;\ +\infty[$, alors elle réalise une bijection de réciproque de $J = [0;\ +\infty[$.

b) Définissons f^{-1} et sa fonction dérivée.

La bijection réciproque f^{-1} est : $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

La dérivée de f^{-1} est :

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)} = \frac{1}{n.(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{n.x^{\frac{n-1}{n}}}$$

3.5 – Inégalité des accroissements finis

Soit K un intervalle et a et b deux éléments de K tels que : $a < b$.

- S'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in [a; b]$; $m \leq f'(x) \leq M$, alors on l'inégalité : $\boldsymbol{m(b-a) \leq f'(x) \leq M(b-a)}$.
- S'il existe un nombre réel M positif tel que pour tout $x \in [a; b]$; $|f'(x)| \leq M$, alors on a : $\boldsymbol{|f(b) = f(a)| \leq M|b-a|}$.

Cette dernière inégalité est dite inégalité des accroissements finis.

$\mathbf{I_4}$ – Application de la dérivée

4.1 – Sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est strictement négative sur I, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

4.2 – Extremum

On dit que f admet un extremum en x_0 si f' s'annule en x_0 et change de signe.

Tableaux de variations

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$M\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$	$\searrow$	

f admet un maximum M relatif en x_0

x	a	x_0	b
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$m\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$	$\nearrow$

f admet un minimum m relatif en x_0

4.3 – Dérivées successives et applications

Soit f une fonction définie et dérivable sur I.

Si f' est dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivables sur I.

On appelle f''ou $f^{(2)}$ la dérivée seconde ou dérivée d'ordre 2.

Par itération, si $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$, alors la fonction dérivée n-ième ou dérivée d'ordre n est : $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Exemple :

Soient $f(x) = x^5 + 2x^3 + 3x + 7$ et $g(x) = cosx$

Déterminons les dérivées successives de f et g.

1) $f(x) = x^5 + 2x^3 + 3x + 7$, alors on a :
   - $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 3$
   - $f''(x) = 20x^3 + 12x$
   - $f^{(3)}(x) = 60x^2 + 12$
   - $f^{(4)}(x) = 120x$
   - $f^{(5)}(x) = 120$
   - $f^{(6)}(x) = 0$
2) $g(x) = cosx$, alors on a :
   - $g'(x) = -sinx = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
   - $g''(x) = -cosx = cos\left(x + 2 \times \frac{\pi}{2}\right)$
   - $g^{(3)}(x) = sinx = cos\left(x + 3 \times \frac{\pi}{2}\right)$
   - $g^{(4)}(x) = cosx = cos\left(x + 4 \times \frac{\pi}{2}\right)$
   - $g^{(5)}(x) = -sinx = cos\left(x + 5 \times \frac{\pi}{2}\right)$

D'une manière générale ; on a : $g^{(n)}(x) = cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

4.3 – Dérivées successives et applications

Méthode :

Pour déterminer la position relative d'une courbe par rapport à ses tangentes, il suffit d'étudier le signe de la dérivée d'ordre 2.

Si $f''(x) > 0$, alors (C) est au-dessus de la tangente. On dit que la fonction est convexe.
Si $f''(x) < 0$, alors (C) est en dessous de la tangente. On dit que la fonction est concave.
Si $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en x_0 alors (C) traverse sa tangente en un point M_0 appelé point d'inflexion.

II. Etude de fonctions

$\mathbf{II_1}$ – Fonctions polynômes, fonctions rationnelles

Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction dans le cas général, on adopte le plan suivant :

1) Déterminer l'ensemble de définition ;
2) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition ;
3) Déterminer la dérivée et le sens de variations ;
4) Points et droites remarquables : asymptotes et tangentes;
5) Construire la courbe.

Exemple d'étude de fonctions

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 - 3x + 2$, (C_f) sa représentation graphique

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f
   b) Calculer les limites de f aux bornes de son D_f
2) a) Déterminer la fonction dérivée f' de f en déduire le sens de variation de f
   b) dresser le tableau de variation de f
3) a) Déterminer une équation de la tangente (T) au point A d'abscisse $x_0 = 0$
   b) Etudier la position de (C_f) par rapport à (T) ;

4) Construire(C_f).

5) Démontrer que le point A $\binom{0}{y}$ est un centre de symétrie de (C_f).

Exemple 2 :

I- Soit la fonction f définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ où a, b et c sont des nombres réels.

1) Calculer $f'(x)$;
2) Déterminer les réels a, b et c sachant que f admet 1 pour extremum en $x = 0$ et -3 pour extremum en $x = 2$.
3) Etudier la fonction f. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[-1; 0]$, une solution unique β dans $[0; 1]$ et une solution unique γ dans $[2; 3]$.
4) Tracer la courbe (C_f) de f.

II- Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 5$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [4; 5]$.

Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près

Exemple 3 :

A) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x-2}$ où a, b et c sont des réels et (C_f) sa courbe représentative. Déterminer les réels a, b et c pour que (C_f) passe par les points

$A(-2;0)$, $B(3;10)$ et admette au point E d'abscisse $x=-2$ une tangente parallèle à l'axe $(0;\ \vec{\imath})$.

B) Dans la suite du problème, on prendra $a=1, b=1\ et\ c=-2$

1) Déterminer trois réels $\alpha, \beta\ et\ \gamma$ tels que $f(x)=\alpha x+\beta+\frac{\gamma}{x-2}$ .En déduire que (C_f) admet une asymptote oblique (Δ) dont on déterminera une équation.
2) Etudier les variations de f.
3) Montrer que le point d'intersection des asymptotes est centre de symétrie de (C_f).
4) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x_0=3$.
5) Tracer (C_f)
6) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[4\ ;\ +\infty[$
   a) Montrer que $h$réalise une bijection de $[4\ ;\ +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
   b) Calculer $h(5), (h^{-1})'(10)$ pour $x\in[4\ ;\ +\infty[$
   c) Tracer $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère que (C_f).
7) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre et le signe des solutions de l'équation : $x^2+(1-m)x+2m-2=0$

Exemple 4 :

1) Soit g la fonction definie par : $g(x)=x\sqrt{1+x^2}-1$
   a) Étudier les variations de la fonction g.
   b) Montrer qu'il existe un réel unique α à 10^{-1} près tel que $g(\alpha)=0$
   c) En déduire le signe de g sur son ensemble de définition.
2) Soit $f(x)=\frac{x^3}{3}-\sqrt{1+x^2}$ et (C_f) sa courbe représentative.
   a) Étudier les limites de f sur son domaine de définition.
   b) Montrer que $\forall\in D_f$, $f'(x)=\frac{xg(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.
   c) En déduire le tableau de variation de f.
3) Représenter (C_f).

FIN

Chapitre 8 : PRIMITIVES ET FONCTIONS LOGARITHME NEPERIEN

I. Primitive d'une fonction :

$\mathbf{I_1}$ − Définition :

Soit f une fonction continue sur un l'intervalle K,

On appelle primitive de f sur K, toute fonction F dérivable sur K telle que : $F\,'(x) = f(x)$, $\forall\ x \epsilon K$.

Exemple :

La fonction $F(x) = x^2$ est une primitive la fonction $f(x) = 2x$;

La fonction $G(x) = 3x + \sqrt{x}$ est une primitive la fonction $g(x) = 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

La fonction $H(x) = 1 - cosx$ est une primitive la fonction $h(x) = sinx$.

Propriété :

Si est une f une fonction continue sur un l'intervalle K, alors f admet une primitive sur K. La continuité est suffisante mais n'est pas nécessaire. C'est-à-dire qu'une fonction peut admettre une primitive sur K sans être continue sur K.

1.1 − Ensemble des primitives d'une fonction:

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle K. La fonction f a au moins une primitive F sur K. L'ensemble des primitives de la fonction f sur K est l'ensemble des fonctions définies sur K par : u → $F(x) + C$, où $c \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, toute primitive de f sur K est sous la $F(x) + C$ où c ne dépend pas de x.

Exemple :

Soit $f(x) = 2x$ et $g(x) = 1 + x^2$

Déterminer les primitives de f et g.

Solution :

$f(x) = 2x$ et $g(x) = 1 + x^2$

Déterminons les primitives de f et g.

f et g Sont définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On a : $F(x) = x^2 + c$ et $G(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + c$; $(c \in \mathbb{R})$.

NB : La constante c peut être déterminée si des conditions supplémentaires figurent sur l'existence de F.

1.2 − Propriété :

Soit f une fonction admettant une primitive sur un intervalle K, y_0 est un nombre réel et x_0 un élément de K. Il existe une primitive de f sur et une seule qui prend la valeur y_0 en x_0. La constante c a pour valeur $c = -F'(x_0) + y_0$

Exemple :

Déterminons la primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f défini par : $f(x) = cosx$ qui prend la valeur -1 en $\frac{\pi}{2}$.

Une primitive F de f est $F(x) = sinx + c;\ (c \in \mathbb{R})$.

De plus, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow sin\frac{\pi}{2} + C = -1$

$$\Leftrightarrow 1 + C = -1 \Leftrightarrow C = -2$$

Donc $F(x) = sinx - 2$ est la primitive recherchée.

$\mathbf{I_2}$ − Calculs de primitives

2. 1 − Primitives de fonctions élémentaires :

Fonction f	Primitives de f	Sur l'intervalle
$x \longmapsto a\,; a \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n\,; n \in \mathbb{N}$	$x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}\,; (n \in \mathbb{N} - \{1\}$	$x \longmapsto -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$\mathbb{R}^*$
$x \longmapsto x^r; r \in \mathbb{Q} - \{1\}$	$x \longmapsto \dfrac{x^{r+1}}{r+1}$	$\mathbb{R}_+, si\ r \geq 0;$ $\mathbb{R}_+^*\ si\ r < 0$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto sinx$	$x \longmapsto -conx + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto conx$	$x \longmapsto sinx + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto 1 + tan^2x = \dfrac{1}{cos^2x}$	$x \longmapsto tanx + c$	$\left](2k-1)\frac{\pi}{2};\ (2k+1)\frac{\pi}{2}\right[\,; k \in \mathbb{Z}$

Exemple :

Dans chacun des cas suivants, déterminons une primitive de f.

a) $f(x) = x^6$, alors $F(x) = \frac{1}{7}x^7 + c$

b) $f(x) = 5$, alors $F(x) = 5x + c$

c) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, alors $F(x) = -\frac{1}{2x^2} + c$

2. 2 − Recherche pratique de la primitives d'une fonction

***a* − Somme et produit par un réel de deux fonctions :**

Soit f et g deux fonctions admettant pour primitives respectives F et G sur un intervalle K.

- La fonction $f + g$ admet pour primitive sur K la fonction $F + G$;
- Pour tout nombre réel k, la fonction $k.f$ admet pour primitive la fonction $k.F$.

Exemple :

Dans chacun des cas suivants, déterminons une primitive de f.

a) $f(x) = 1 + x$, alors $F(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + c$

b) $f(x) = 3x + 1$, alors $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + x + c$
c) $f(x) = 1 + sinx$, alors $F(x) = x - cosx + c$
d) $f(x) = 2cosx + sinx$, alors $F(x) = 2sinx - cosx + c$

$b -$ Primitive de $\boldsymbol{u'(v' \circ u)}$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K et v une fonction dérivable sur un intervalle
contenant $u(K)$. La fonction $\boldsymbol{v \circ u}$ est une primitive sur K de la fonction $\boldsymbol{u'(v' \circ u)}$.

Exemple :

Déterminons une primitive de des fonctions suivantes :

a) $g(x) = 3sin(3x - 2)$, alors $G(x) = -cos(3x - 2) + c$,
b) $h(x) = xcos\left(3x^2 - \frac{\pi}{4}\right)$, alors $H(x) = \frac{1}{6}sin\left(3x^2 - \frac{\pi}{4}\right) + c$,

$b -$ Primitives et opérations sur les fonctions

Fonction f	Une primitive de f	commentaire
$u'u^n$; $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	Sur tout intervalle où u est dérivable
$\frac{u'}{u^n}$; $(n \in \mathbb{N} - \{1\}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	Sur tout intervalle où u est dérivable et ne s'annule
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	Sur tout intervalle où u est dérivable et strictement positive
$u'u^r$; $(r \in \mathbb{Q} - \{1\})$	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$	Sur tout intervalle où u est dérivable et positive (strictement positive si $r < 0$)
$u'cosu$	$sinu$	Sur tout intervalle où u dérivable
$u'sinu$	$-cosu$	Pour tout intervalle où u est dérivable

Exemple :

1) Dans chacun des cas suivants, déterminons une primitive de f.
   a) $f(x) = conxsin^3x$, alors $F(x) = \frac{sin^4x}{4} + c$,
   b) $g(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x)^4}$

La fonction g a pour primitive sur chacun des intervalles $]-\infty\,;\, -2[$, $]-2\,;0\,[$ et sur $]0\,;\, +\infty[$, la fonction $g(x) = -\frac{1}{6(x^2+2x)^3} + c$

En effet, g est sous la forme : $\frac{1}{2}\frac{U\prime}{U^4}$; avec $u :\rightarrow\ x^2 + 2x$

2) Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur I
   a) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, $I =]-\infty\,;0\,[$
   b) $f(x) = 5x(5x^2 - 7)^4\,; I = \mathbb{R}$
   c) $f(x) = \frac{2x-3}{(2x^2-6x+11)^3}; I = \mathbb{R}$

2.3 – Primitives et continuité

Application :

Soit F et G deux fonctions définies par :

II. Fonction logarithme népérien

II_1 –Définition et propriété

1 .1- Définition :

On appelle fonction logarithme népérien, notée ln, c'est la primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$ qui s'annule en 1.

Le logarithme népérien de x est noté : lnx

$\forall x \in]0;\,+\infty[\,, (lnx)' = \frac{1}{x}$ et $ln1 = 0$.

lnx est définie sur $]0\,;+\infty[$

1.2 – Propriétés fondamentales

$\forall\, a\,, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

- $\ln(ab) = lna + lnb$

$\forall\, a\,, b \in \mathbb{R}_+^*\ et\ \forall\, r \in \mathbb{Q}$, on a:

- $ln\frac{1}{a} = -lna$
- $ln\frac{a}{b} = lna - lnb$
- $lna^r = rlna$
- $ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}lna$

1.3- Domaine de définition de fonctions composes ln

Exemple :

$f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Déterminer l'ensemble de définition de f dans chacun cas suivant :

a) $f(x) = \ln(-2x-1)$
b) $f(x) = \ln(3x^2+5x-2)$
c) $f(x) = \ln(\frac{-x+1}{7x-3})$
d) $f(x) = ln\left|\frac{-x+1}{7x-3}\right|$

Résolution

a) $f(x) = \ln(-2x-1)$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$x \in Df \iff -2x+1 > 0\,,$$
$$\iff x < \frac{1}{2}$$

Donc : $Df = \left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$,

b) $f(x) = \ln(3x^2+5x-2)$

$$x \in Df \iff 3x^2+5x-2 > 0$$
$$\iff 3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right) > 0$$

x	$-\infty$ -2	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

Donc : $Df =]-\infty\ ;\ -2[\ \cup \left]\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$

c) $f(x) = \ln\left(\frac{-x+1}{7x-3}\right)$

$x \in Df \Leftrightarrow \frac{-x+1}{7x-3} > 0$

x	$-\infty$ 1 $\frac{3}{7}$ $+\infty$		
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

Donc : $Df = \left]\frac{3}{7}\ ;\ 1\right[$

a. $f(x) = ln\left|\frac{-x+1}{7x-3}\right|$

$x \in Df \Leftrightarrow \frac{-x+1}{7x-3} \neq 0 \Leftrightarrow -x+1 \neq 0\ et\ 7x-3 \neq 0$

Donc : $Df = \left]-\infty\ ;\ \frac{3}{7}\right[\cup \left]\frac{3}{7}\ ;\ 1\right[\cup]1\ ;\ +\infty[$

Remarque :

La fonction lnx est définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sa derivee est :$(lnx)' = \frac{1}{x}$

1 .4- Propriété

$\forall\ a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a

- $lna = lnb \Leftrightarrow a = b$
- $lna < lnb \Leftrightarrow a < b$

Cas particulier : on a

- $lnx = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $lnx < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
- $lnx > 0 \Leftrightarrow x > 1$

1.4.1- Limite de référence

Nous devons mémoriser les limites fondamentales suivantes :

1) $\lim_{x\to 1} \frac{lnx}{x-1} = 1$
2) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
3) $\lim\limits_{x\to +\infty} lnx = +\infty$
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} xlnx = 0$
5) $\lim\limits_{n\to 0^+}\mathrm{x} = -\infty$
6) $\lim\limits_{n\to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

1.4.2- Preuve :

Nous allons démontrer ces limites selon l'ordre suivante : ❶ ;❷ ;❸ ;❺ ;❻et❹

(1): $\lim_{x\to 1} \frac{lnx}{x-1} = 1$

En effet, $\frac{lnx}{n-1} = \frac{lnx - ln1}{x-1} = (\mathrm{lnx})' = \frac{1}{x}$

Donc : $\lim_{x\to 1}\frac{lnx}{x-1} = \ \lim_{n\to 1}\frac{1}{x} = 1$,

D'où : $\lim_{n\to 1}\frac{lnu}{x-1} = 1$

(2) : $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

En effet, $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}$

$= (\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$

$\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{1+x} = 1$,

D'où : $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

(3): $\lim\limits_{x\to +\infty} lnx = +\infty$

En effet, la fonction ln est une fonction croissante sur$]0\ ;\ +\infty[$.

D'après la propriété de la limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouverte K, si lnx est majorée, alors $\lim\limits_{x\to +\infty} lnx = l$

Cependant, si on pose $u = 2x$, on aura :

$\lim\limits_{x\to +\infty} lnu = l\ (1)$

Or $\lim\limits_{x\to +\infty} lnu = \lim\limits_{x\to +\infty} ln2x = \lim\limits_{x\to +\infty}(ln2 + lnx) = ln2 + l\ (2)$

$(1) = (2) \Leftrightarrow l = ln2 + l \ \Longrightarrow ln2 = 0$, contradiction car ln2 > 0, donc on en déduit que la fonction lnx est croissante et non majorée sur $]0\ ;\ +\infty[$, par conséquent ; $\lim\limits_{x\to +\infty} lnx = +\infty$

(5): $\lim\limits_{n\to 0^+} \mathrm{x} = -\infty$

On a : $lnx = -\left(ln\frac{1}{x}\right)$, en posant $u = \frac{1}{x}$; $\left(qd\ \substack{x\to 0,\\ u\to +\infty}\right)$

On obtient : $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = \lim\limits_{u\to +\infty}\ln x = \ -(lnu) = -(+\infty\ ) = -\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0^+} lnx = -\infty$

(6): $\lim\limits_{n\to +\infty}\frac{lnx}{x} = 0$

Nous remarquons que : $\lim\limits_{n\to -\infty}\frac{lnx}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$? ?, donc nous allons lever l'indétermination en encadrant $\frac{lnx}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$;

On a : $0 < lnx < x$

$\Longrightarrow 0 < ln\sqrt{x} < \sqrt{x}$

$\Longrightarrow 0 < \frac{1}{2}\ lnx < \sqrt{x}$

$\Longrightarrow O < \frac{1}{2}\left[\frac{2}{x} lnx\right] < \frac{2\sqrt{x}}{x}$

$\Longrightarrow 0 < \frac{lnx}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$, en passant à la limite, on a :

$\lim\limits_{n\to +\infty} 0 = \lim\limits_{n\to +\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = 0$,

D'où $\lim\limits_{n\to +\infty}\frac{lnx}{x} = 0$

(4) : $\lim\limits_{x\to 0^+} xlnx = 0$

En effet, $\lim\limits_{x\to 0} xlnu = (0 \times \infty)$??, alors on a :

$xlnx = \frac{-lnu}{\frac{1}{x}} = \frac{-ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ et en posant $u = \frac{1}{x}$; $\left(qd \begin{smallmatrix} x\to 0^+ \\ x\to\infty \end{smallmatrix}\right)$

$xlnx = \frac{-lnu}{u} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{x}\, lnx = \lim\limits_{u\to+\infty} \frac{-linu}{u} = 0.$

D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} xlnx = 0$

1.5- Le nombre « e » :

- La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0\,;\ +\infty[$, de plus $\lim\limits_{x\to 0^+} lnx = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln \mathrm{x} = +\infty$. Donc la fonction ln est une bijection de $]0\,;\ +\infty[, vers\ \mathbb{R}$
- On note e l'unique nombre réel tel que $lne = 1$. e est appelé base du logarithme népérien et $e = 2{,}718\ 281\ \ldots$
- Pour tout nombre réel , on a :$lne^r = rlne = r$;

1.6- Courbe de représentation de la fonction ln

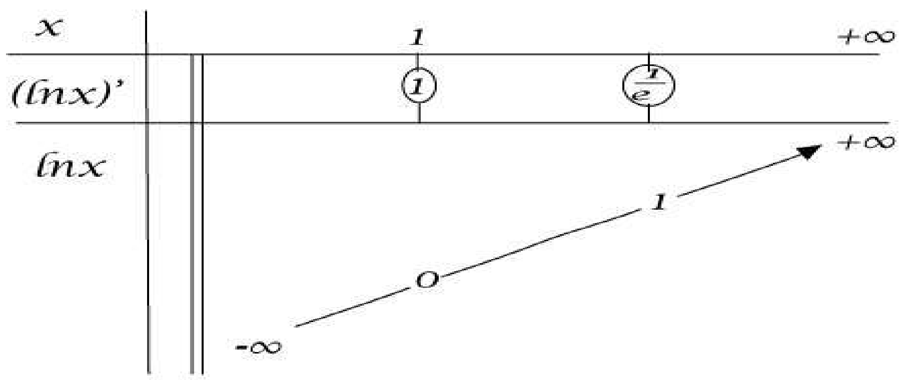
Soit $f(x) = lnx$ définie sur $]0\,;\ +\infty[$,

D'après le paragraphe ci-dessous, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \ln \mathrm{x} = -\infty\ \ et\ \ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln \mathrm{x} = +\infty$

La fonction dérivée de f est $f'(x) = (lnx)' = \frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{1}{x}$, donc $f'(x) > 0\ sur\ ]0\,;\ +\infty[$,

Tableau de variation



Au point A et B d'abscisse 1et e, on obtient les tangentes suivantes :

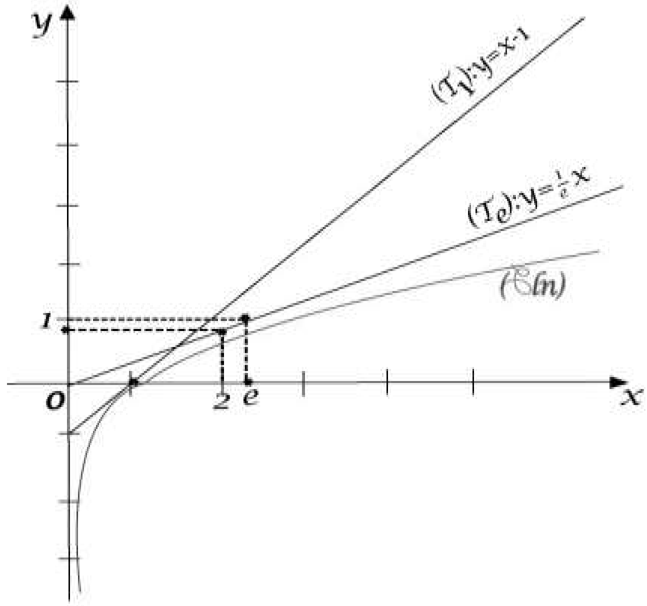
$(T_1) : y = x - 1$ et $(T_e) : y = \frac{1}{e}x$

(T_e) passe donc par l'origine du repère

Construction de C_{ln} .

$f(x) = 0 \Leftrightarrow lnx = ln1 \Leftrightarrow x = 1$

Donc (C_{ln}) coupe (O I) $en\ x = 1$



1.7- Equations et inéquations

1.7.1- Résolution d'équation du type : $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$

Application :

Résoudre dans ,$\mathbb{R}$ les équations suivantes

a) $\ln(-2x+1) = \ln(x+4)$
b) $\ln(2x-3) + 2\ln(x+1) = \ln(6x-3)$
c) $\ln(x+2) = 1 + \ln(x-3)$
d) $(lnx)^2 - 6lnx + 5 = 0$
e) $(lnu)^3 - 7lnu - 6 = 0$
f) $ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$

Résolution:

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a) $\ln(-2x+1) = \ln(x+4)$

Contraintes sur l'inconnue :

On a : $\begin{cases} -2x+1>0 \\ et \\ x+4>0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x<\frac{1}{2} \\ et \\ x>-4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]-4\,;\,\frac{1}{2}\right[$,

Donc $\forall x \in \left]-4\,;\,\frac{1}{2}\right[$, on a : $\ln(-2x+1) = \ln(x+4)$

$$\Leftrightarrow -2x+1 = x+4$$
$$\Leftrightarrow -3x = 3$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \in \left]-4\,;\,\frac{1}{2}\right[,$$

Donc $S = \{1\}$

b) $\ln(2x-3) + 2\ln(x+1) = \ln(6x-3)$

Contraintes sur l'inconnue :

On a : $2x-3>0\,;\, x+1>0\,;\, et\ 6x-3>0$

$\Leftrightarrow x > \frac{3}{2}\,; x > -1$ et $x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$,

$\forall x \in \left]\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$, on a: $\ln(2x-3) + 2\ln(x+1) = \ln(6x-3)$

$$\Leftrightarrow \ln(2x-3) + \ln(x-1)^2 = \ln(6x-3))$$
$$\Leftrightarrow \ln[(2x-3)(x+1)^2] = \ln(6x-3))$$
$$\Leftrightarrow (2x-3)(x+1)^2 = 6x-3$$
$$\Leftrightarrow (2x-3)(x^2+2x+1) = 6x-3$$
$$\Leftrightarrow 2x^3+x^2-4x-3-6x+3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^3+x^2-10x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(2x^2+x-10) = 0 \quad \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ ou } 2x^2+x-10 = 0$$

$2x^2+x-10 = 0$:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 81 > 0$

$x_{2=} \frac{-1-9}{4} = -\frac{5}{2}\ \ et\ x_3 = \frac{-1+9}{4} = 2$

On a : $x_1 = 0\,;\ x_{2=} -\frac{5}{2}\ \ et\ x_3 = 2$ mais seule $x_3 = 2 \in \left]\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$

Donc $S = \{2\}$

c) $\ln(x+2) = 1 + \ln(x-3)$

$\ln(x+2) = 1 + \ln(x-3)\ existe \ \Leftrightarrow x+2>0\ et\ x-3>0$

$$\Leftrightarrow x > -2\ et\ x > 3$$
$$\Leftrightarrow x \in \left]3\,;\,+\infty\right[$$

Donc: $\forall x \in \left]3\,;\,+\infty\right[$, on a : $\ln(x+2) = 1 + \ln(x-3)$

$$\Leftrightarrow \ln(x+2) - \ln(x-3) = 1$$
$$\Leftrightarrow ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right) = lne$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x-3} = e$$
$$\Leftrightarrow x+2 = xe - 3e$$
$$\Leftrightarrow x(1-e) = -(2+3e)$$
$$\Leftrightarrow x(e-1) = 2+3e)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2+3e}{e-1} \in \left]3\,;\ +\infty\right[$$

Donc $S = \left\{\frac{2+3e}{e-1}\right\}$

d) $(lnx)^2 - 6lnx + 5 = 0$

Contraintes sur l'inconnue : $x \in \left]0\,;\ +\infty\right[$

$\forall x \in \left]0\,;\ +\infty\right[$, on a : $(lnx)^2 - 6lnx + 5 = 0$

Posons : $X = lnx \Leftrightarrow X^2 - 6X + 5$

$$\Delta' = 9 - 1 \times 5 = 4 > 0$$

$X_1 = 3 - 2 = 1\ et\ X_2 = 3 + 2 = 5$

Or $X = lnx \Leftrightarrow \begin{cases} lnx = 1 \\ et \\ lnx = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e \\ ou \\ x = e^5 \end{cases}$

Donc : $S = \{e\,;\ e^5\}$

e) $(lnx)^3 - 7lnx - 6 = 0$

$(lnx)^3 - 7lnx - 6\ \exists \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in]0\,;\ +\infty[$,

$\forall x \in \left]0\,;\ +\infty\right[$, on pose : $X = lnx \ \Leftrightarrow X^3 - 7X - 6 = O$

Cette équation a pur racines : $-1\,; -2\ et\ 3$

$$\Rightarrow X^3 - 7X - 6 = (X+1)(X+2)(X-3)$$
$$\Rightarrow (lnx+1)(lnx+2)(lnx-3) = 0$$
$$\Rightarrow lnx = -1\ \ ou\ lnx = -2\ ou \ln x\ = 3$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{e}\ ou\ \ x = \frac{1}{e^2}\ ou\ x = e^3$$

Donc : $S = \left\{\frac{1}{e^2}; \frac{1}{e}; e^3\right\}$

f) $ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$

$ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1\ \exists \Leftrightarrow\ \frac{x+1}{x-1} > 0$;

On a : $\forall x \in \left]-\infty\,; -1\right[\cup \left]1\,;\ +\infty\right[$

$\forall x \in \left]-\infty\,; -1\right[\cup \left]1\,;\ +\infty\right[$, on a:

$$ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1 \Leftrightarrow\ ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = lne$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = e$$
$$\Leftrightarrow x + 1 - xe = -e$$
$$\Leftrightarrow x(1-e) = -e - 1$$
$$\Leftrightarrow x(e-1) = e + 1$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{e+1}{e-1} \in \left]-\infty\,; -1\right[\cup \left]1\,;\ +\infty\right[$$

D'où $S = \left\{\frac{e+1}{e-1}\right\}$

1.7 .2- Inéquation du type : $\ln(u(x)) < \ln(v(n))$

Application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquation suivantes :

a) $\ln(x+2) + \ln(x+4) < \ln(x+8)$

b) $(lnx)^2 + 2ln - 15 \leq 0$

Résolution:

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln(x+2)+\ln(x+4)<\ln(x+8)$

Contraintes sur l'inconnue :

$$\begin{aligned}\ln(x+2)+\ln(x+4)<\ln(x+8)\ \exists &\Leftrightarrow x+2>0, x+4>0\ et\ x+8>0\\ &\Leftrightarrow x>-2\,; x>-4\,, et\ x>-8\\ &\Leftrightarrow x\in\ ]-2\,;\ +\infty\,[\\ &\Rightarrow\ S_1=\,]-2\,;\ +\infty\,[\end{aligned}$$

Donc : $\forall x\in\left]-2\,;\ +\infty\right[$, on a : $\ln(x+2)+\ln(x+4)<\ln(n+8)$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow ln[(x+2)(x+4)]<\ln(x+8)\\ &\Leftrightarrow (x+2)(x+4)<x+8\\ &\Leftrightarrow x^2+6x+8-x-8<0\\ &\Leftrightarrow x^2+5x<0\\ &\Leftrightarrow x(x+5)<0\\ &\Leftrightarrow x<0\ ou\ x<-5\\ &\Leftrightarrow -5<x<0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_2=\left]-5\,;\ 0\right[$$

$$\Rightarrow S=S_1\cap S_2=]-2;0\,[$$

b) $(lnx)^2+2ln-15\leq 0$

Contraintes sur l'inconnue : $x\in\left]0\,;\ +\infty\right[$

$\forall x\in\left]0\,;\ +\infty\right[$, on a : $(lnx)^2+2lnx-15\leq 0$

On pose : $X=lnx\Leftrightarrow X^2+2X-15\leq 0.$

Le polynôme : $X^2+2X-15$ a pour racines -5 et 3, donc on a :

$$\begin{aligned}&X^2+2X-15=(X+5)(X-3)\leq 0\\ &\Leftrightarrow (lnx+5)(lnx-3)\leq 0\\ &\Leftrightarrow lnx\leq -5\ ou\ lnx\leq 3\\ &\Leftrightarrow x\leq e^{-5}\ ou\ x\leq e^3\\ &\Leftrightarrow e^{-5}\leq\ x\leq e^3\end{aligned}$$

Donc : $S=[e^{-5};e^3]$

1.8- Autres limites

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x(lnx)^2=0$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{x}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=1$
3) $\lim\limits_{x\to+2} \frac{x}{x-2}\ln(x-1)=2$
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{x}\ln\frac{lnx}{x-1}=0$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{x}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=2$
6) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\,lnx=0$

Preuve :

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x(lnx)^2=0$

$x\in\mathbb{R}_+$;$x(lnx)^2=(\sqrt{x}\,lnx)^2$

$= (2\sqrt{x}\ ln\sqrt{x})^2$

$= 4(\sqrt{x}\ ln\sqrt{x})^2$,

En posant : $u = \sqrt{u}$, on a :

$\lim\limits_{x \to 0^+} x(lnx)^2 = \lim\limits_{u \to 0^+} 4(u \ln u)^2 = 4 \times 0 = 0.$

D'où $\lim\limits_{x \to 0^+} x(lnx)^2 = 0$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{x} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$

Soit $\in \left]0\ ;\ +\infty\right[$,

On a: $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{x} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$,

On pose : $v = \frac{1}{x}$; $\left(qd\ \substack{x \to +\infty \\ v \to 0^+}\right)$

On a: $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{x} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{v \to 0^+} \frac{\ln(1+v)}{v} = 1.$

D'ou: $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{x} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$

3) $\lim\limits_{x \to +2} \frac{x}{x-2} \ln(x-1) = 2$

En effet, $\frac{x}{x-2} \ln(x-1) = \frac{x}{x-1+1} \ln(x-1).$

On pose :$u = x - 1$; $\left(qd\ \substack{x \to 2 \\ u \to 1}\right)$

Alors $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x}{x-2} \ln(x-1) = \lim\limits_{u \to 1} \frac{u+1}{u-1} \ln u$

$= \lim\limits_{u \to 1} (u+1) \times \frac{\ln u}{u-1}$

$= 2 \times 1 = 2$

D'où : $\lim\limits_{x \to +2} \frac{x}{x-2} \ln(x-1) = 2$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{x} \ln \frac{lnx}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{x} \frac{lnu}{x} \times \frac{u}{1} = 0 \times 1 = 0$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{x} \ln \frac{lnx}{x-1} = 0$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{x} \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = (\infty \times 0)$? ?

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, xln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = 2 \times \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}$,

On pose : $u = \frac{2}{x}$; quand $x \to +\infty$, $alors$: $u \to 0$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{x} \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = 2 \times \lim\limits_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 2 \times 1 = 2$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{x} \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = 2$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}\ lnx = 0 \times (-\infty)$? ?

En effet ,$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{x}\ lnx = 2\sqrt{x}\ ln\sqrt{x}$,

On pose : $X = \sqrt{x}$

On a: $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} lnx = \lim\limits_{X \to 0} XlnX = 0$

D'où : $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}\, lnx = 0$

III. Fonction comportant ln

III_1 −Fonction ln

1) La fonction $ln\colon x \longrightarrow lnx$ est définie, dérivable et strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty\,[$.

$\forall x \in \,]0\,;\,+\infty\,[\,,\,(lnx)' = \frac{1}{2}$.

2) La fonction $ln \circ u\,:\; x \to ln \circ u(x)$ est définie pour tout x de $\mathbb{R}$ tel que $u(x) > 0$.
   - Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors $ln \circ u$ est dérivable sur $I\ et\ (ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$.
   - Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I sur lequel elle ne s'annule pas, alors $ln \circ |u|$ est dérivable sur I et $(ln \circ |u|)' = \frac{u'}{u}$.
   - Si u est une fonction dérivable et qui ne s'annule pas sur un intervalle I et si $\frac{u'}{u}$ est continue sur I, alors la fonction $\frac{u'}{u}$ admet pour primitive sur I, la fonction $ln \circ |u|$.

III_2 −Exemple d'étude de fonctions

Application 1 :

On considère la fonction f definie par par $f(x) = -\frac{x}{2} + ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\ et\ (\mathrm{C}f)$ sa representation graphique

1) a) Déterminer les limites de f aux borne de son ensemble de définition ;
   b) Justifier que (Cf) admet une asymptote verticale à préciser ;
2) Etudier les variations de f ;
3) a) Montrer que la droite (D) d'équation$y = -\frac{1}{2}x$ est asymptote, oblique a la courbe (Cf) ;
   b) Etudier la position de (Cf) par rapport a (D) ;
4) Tracer(Cf) et ses asymptotes dans un même repère ;
5) Démontrer que F est la primitive de la fonction f definie sur $]1\,;+\infty[$ par :
   $F(x) = -\frac{x^2}{4} + (x-1)\ln(x-1) - xln + 1$ prenant la valeur $-ln2\ en\ 2$.

Résolution

$$f(x) = -\frac{x}{2} + ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

1) Domaine de définition

$$f(x)\exists \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	$+$
x	$-$		$+$	$+$
$\frac{x-1}{x}$	$+$		$-$	$+$

a) Limites de f aux bornes de son Df

$$\lim_{x\to-\infty} f\text{ (x)} = \left(-\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)$$
$$= +\infty + \lim_{x\to-\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$
$$= +\infty + \ln(1-0) = +\infty$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f\text{ (x)}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)$$
$$= 0 + \lim_{x\to 0^-} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$
$$= \ln(1+\infty)$$
$$= +\infty$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0^-} f(x)} = +\infty$$

Donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (Cf)

$$\lim_{x\to 1^+} f\text{ (x)} = \lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)$$
$$= -\frac{1}{2} + \ln(0^+)$$
$$= -\frac{1}{2} - \infty = -\infty$$

Donc : $\boldsymbol{\lim_{x\to 1^+} f\,(x)} = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f\text{ (x)} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)$$
$$= -\infty + 0 = -\infty$$

Donc : $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f\text{ (x)}} = -\infty$

b) Justifions que (Cf) admet une asymptote verticale àpréciser.

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à (Cf)

2) Etudions les variations de f

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$\forall x \in Df,\ f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)'}{\frac{x-1}{x}}$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{\frac{x-(x-1)}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} \times \frac{x}{x-1}$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{x(x-1)}$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{x(x-1)}$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{-x(x-1)+2}{2x(x-1)}$$

$$f'(x) = 0 \iff \frac{-x(x-1)+2}{2x(x-1)} = 0$$

$$\iff -x^2 + x + 2 = 0$$

$\Delta = 1 - 4(-1) \times 2$

$\Delta = 9 > 0$

$$x_1 = \frac{-1-3}{-2} = 2 \; et \; x_2 = \frac{-1+3}{-2} = -1$$

Tableau de signe de f'

x	$-\infty$	-1		0		1		2	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$
$(x+1)(x-2)$	$+$		$-$	‖	$-$	‖	$-$		$+$
$f'(x)$	$-$		$+$	‖	$+$	‖	$+$		$-$

$\forall x \in]-\infty\,; -1[\cup]\,2\,; +\infty\,[$; $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur cet intervalle.

$\forall x \in]-1\,;\ 0\,[\cup]\,0\,;1[\,\cup]\,1\,;2\,[$; $f'(x) > 0$; donc f est strictement croissante sur cet intervalle.

<u>Tableau de variation</u>

Tableau de signe de f'

x	$-\infty$	-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$1{,}19$	↗ $+\infty$	‖		‖ $-\infty$	↗	$-1{,}69$	↘	$-\infty$

3) a) Montrons que la droite (D): d'équation $y = -\frac{1}{2}x$ est asymptote, oblique à (Cf)

En effet ; $f(x)-y=-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+\frac{x}{2}$

$f(x)-y=\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

Alors: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$

$=\ln(1-0)=0$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-y]=0$ *donc* (D): d'equation $=-\frac{1}{2}x$ est asymptote oblique à (Cf).

b) Position de (Cf) par rapport à (D) : $f(x)-y=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$

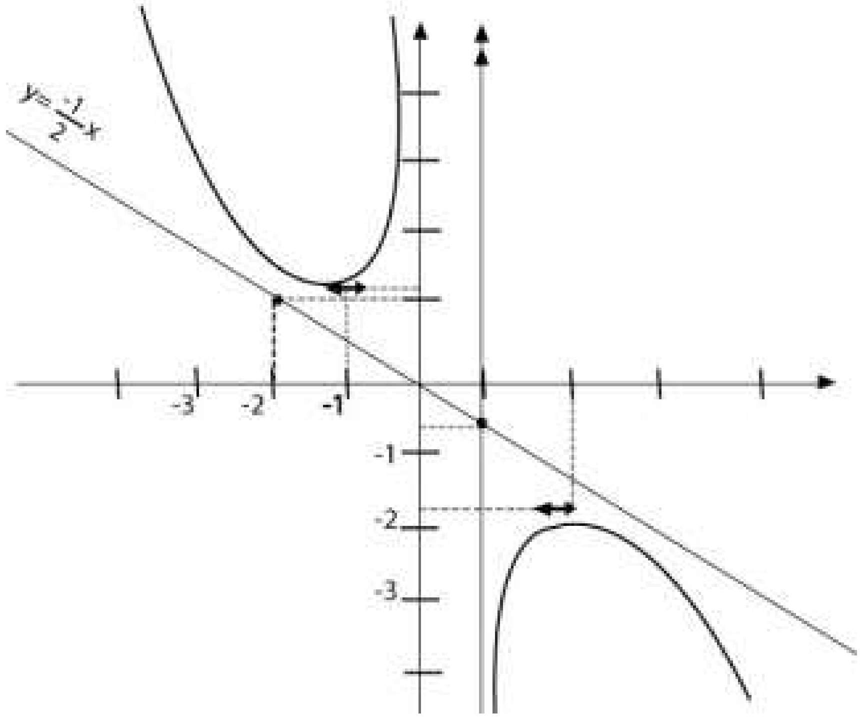
$f(x)-y\ \exists\Leftrightarrow\ \frac{x-1}{x}>0$

$\Longrightarrow\ \forall x\in\ ]-\infty\,;\,0[\cup]\,1\,;\,+\infty\,[\ ,f(x)-y>0;$ donc (Cf) est au dessus de (D).

$\forall x\in\,]0\,;1[, f(x)-y<0$; donc (Cf) est en dessous de (D).

4) Traçons (Cf) et ses asymptotes dans un mêmerepère

Voir ci-dessous (Cf).



5) Démontrons que $F(x)=-\frac{x^2}{4}+(x-1)\ln(x-1)-xln+1$ est une primitive de f *et* $F(2)=-2ln2$

$F(x)=-\frac{x^2}{4}+(x-1)\ln(x-1)-xlnx+1$

$\Longrightarrow F'(x)=-\frac{2x}{4}+\ln(x-1)+(x-1)\times\frac{1}{x-1}-lnx-x\times\frac{1}{x}$

$=-\frac{x}{2}+\ln(x-1)+1-lnx-1$

$$= -\frac{x}{2} + ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = f(x)$$

$F'(x) = f(x), d'ou\ F\ est\ une\ primitive\ de\ f\ et$

$$F(2) = \frac{-2}{2} + (2-1)\ln(2-1) - 2ln2 + 1$$

$$= -1 + ln1 - 2ln2 + 1$$

Donc : $F(2) = -2ln2$

Application 2 :

I –Soite g la fonction defrinie sur] 0 ; +∞ [par :

$$g(x) = \frac{2x^2 + 3 - 6lnx}{x^3}$$

1) Déterminer les limites de g en $0\ et\ en + \infty$

2) Etudier les variation de g et dresser son tableau de variation et en déduire pour tout $x > 0\ , g(x) > 0$.

II – Soit f la fonction de la variable reelle definie sur] 0 ; +∞ [par

$f(x) = \frac{2x^3+3lnx}{x^2}$ et (Γ) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(0;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1) a)calculer la dérivée de f et preciser son sens de variation (on remarque que $f'(x) = g(x)$

b) Calculer les limites de f en $0\ et\ en + \infty$

c) En déduire le tableau de variation de f

2) a) Démontrer que la droite (D) d'équation$y = 2x$ est asymptote a la courbe de f et préciser sa position par rapport a cette courbe

b) préciser les coordonnées des points d'abscisses $\frac{1}{2}$; 1 ; 2 ; et 3

c)Démontrer que l'équation$f(x) = 0$ admet une unique racine $\alpha = \left[\frac{1}{2}\ ; 1\right]$.

3) traçons (Γ) et les droite d'équation$x = 1\ et\ x = e$

Résolution

I) $g(x) = \frac{2x^3+3-6lnx}{x^3}$

Df =] 0 ; +∞ [

1) Déterminons les limites de $g\ en\ 0\ et\ en + \infty$

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{2x^2+3-6lnx}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to0^+}\left(2 + \frac{3}{x^3} - \frac{6lnx}{x^3}\right) = 2 + \infty + \infty$$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2 + \frac{3}{x^3} - \frac{6lnx}{x^3}\right) = 2 + 0 - 0 = 2$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2$

2) Etudions les variations de g est dérivable comme somme des fonctions dérivables et

$$g'(x) = 3\left(\frac{-3x^2}{x^6}\right) - 6\left[\frac{\frac{1}{x}\times x^3 - 3x^2lnx}{x^6}\right]$$

$$= \frac{-9}{x^4} - 6\left(\frac{1-3lnx}{x^4}\right)$$

$$\boldsymbol{g'(x) = \frac{18lnx - 15}{x^4}}$$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 18lnx - 15 = 0$

$\Leftrightarrow lnx = \frac{15}{18}$

$\Leftrightarrow\ lnx = \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = e^{5/6} = 1{,}8$

$\forall x \in \left]-\infty\,;\ e^{5/6}\right[g'(x) < 0, alors\ g\ est\ strictement\ decroissante$

$\forall x \in \left]e^{5/6};\ +\infty\right[, g'(x) > 0\ , alors\ g\ est\ strictement\ croissante\ .$

x	0		$e^{5/6}$		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	||	$+\infty$ ↘	$f(e^{5/6})$	↗ 2	

D'après le tableau de variation ,on en déduit :

$\forall. x \in\ Df, g(x) \geq 1{,}8 > 0\ , alors\ g(x)\ est\ du\ signe\ \ positif\ alors\ g(x) > 0$

II) $f(x) = 2x + 3\frac{lnx}{x^2}$

1) a) Calculons la dérivée de f et précisons son sens de variations

$f'(x) = 2 + 3\left(\frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2xlnx}{x^4}\right)$

$= 2 + 3\left(\frac{1-2lnx}{x^3}\right)$

$f'(x) = \frac{2x^2+3-6lnx}{x^3} = g(x)$

$\Rightarrow f'(x) = g(x)$

D'après $I)$,$g(x) > 0;\ \forall\ x > 0$

$f'(x) = g(x) > 0$,alors$f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante sur son ensemble de definition.

b) Calculons les limites de f en 0 et en $+\infty$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(2x + \frac{3\ln x}{x^2}\right) = 0 + \infty(-\infty) = -\infty$

Alors : $\boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(2x + \frac{3\ln x}{x^2}\right)$

$= +\infty + \lim_{x\to +\infty}\frac{3}{x}\left(\frac{\ln x}{x}\right)$

$= +\infty + 0$

Alors : $\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x)} = +\infty$

C) Déduisons-en le tableau de variation de f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2)a)Démontrons que la droite (D): $y = 2x$ est asymptote à la courbe de f.

$y = 2x$ est asymptote si et seulement si $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = 0$

On a: $\lim_{x\to\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x + \frac{3\ln x}{x^2} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = 0, alors (D): y = 2x$ est asymptote oblique à (cf).

Position de (cf) par rapport à (D)

$$f(x) - y = \frac{3\ln x}{x^2}$$

$$f(x) - y = 0 \Leftrightarrow \frac{3\ln x}{x^2} = 0 \ \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$-y	||	$-$	|	$+$	

$\forall x \ \in]0;1[, f(x) - y < 0, alors\ (cf)$est en dessous de $(D$

$\forall\ x \in]1;+\infty[\ , f(x) - y > 0; alors\ (Cf)\ est\ au\ dessous\ de\ (D)$.

b) précisons les ordonnées des d'abscisses $\frac{1}{2}; 1: 2\ et\ 3$

x	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	-7,25	2	4,5	6,36

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times \frac{1}{8} + 3\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 1 - 12\ln 2 = -7{,}28$$

$$f(1) = \frac{2 + 3\ln 1}{1} = 2$$

$$f(2) = \frac{16+3\ln 2}{4} = 4 + \frac{3}{4}\ln 2 = 4{,}5$$

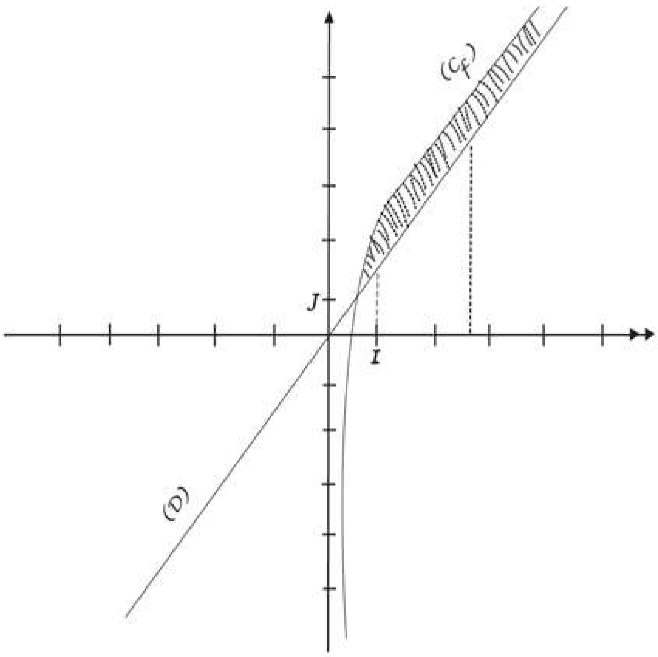
$$f(3) = \frac{2 \times 27 + 3\ln 3}{9} = 6 + \frac{\ln 3}{3} = 6{,}36$$

C) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique racine $\alpha \in [\frac{1}{2}; 1]$

f est continue et strictement croissante sur son Df,donc elle realise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$.

De plus $f(\frac{1}{2})f(1) < 0$, alors $\alpha \in [\frac{1}{2}; 1@]$

3) Tançons (C)



Application 3 :

Le repère $(0;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est orthonormé.

Soit f la fonction définie par f(x)= $\frac{1}{2}(x+1+3ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|$).On désigne par (C) la courbe représentative de f.

1) Etudier les variations de la fonction f.

2) a) Démontrer que (C) admet un point d'inflexion Ω et que Ω est un centre de symétrie de (C).

b) Déterminer l'asymptote oblique (D) de (C) et vérifier que Ω appartient à (D).

c) Tracer (C).

Résolution

$f(x)=\frac{1}{2}(x+1+3ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|)$, une fonction et (C) sa courbe.

1) Etudions les variations de f.

- Domaine de définition

$f(x)\ \exists \Leftrightarrow x+1 \neq 0\ et\ x-3 \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq -1\ et\ x \neq 3$
Donc $\boxed{Df = \mathbb{R}'\{-1;1\} =]-\infty;-1[\cup]-1;3[\cup]3;+\infty[}$

- Limites aux bornes du Df.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\left(x+1+3ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|\right)\right)$
$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(-\infty+\mathbf{3}\boldsymbol{ln}(\mathbf{1})\right) = -\infty$

Donc : $\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x)} = -\infty$

$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\left(x+1+3ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|\right)\right)$
$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(+\infty+\mathbf{3}\boldsymbol{ln}(\mathbf{1})\right) = +\infty$

Donc : $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x)} = +\infty$

$\boldsymbol{\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-}}\left(\frac{1}{2}\left(x+1+3ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|\right)\right)$
$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(-1+1+3\ln\left|\frac{0}{-4}\right|) = \frac{1}{2}(3ln|0|) = -\infty$

Alors : $\boldsymbol{\lim_{x\to-1^-} f(x)} = -\infty$

De même : $\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$

Donc la droite (D_1) d'équation $x = 1$ est une asymptote à (C).

$\lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^-}\left(\frac{1}{2}\left(x+1+3ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|\right)\right)$
$= \frac{1}{2}(3+1+3ln\left|\frac{4}{0}\right| \ = 2+(+\infty) = +\infty$

$\lim_{x\to3^-} f(x) = +\infty$,

De même $\boldsymbol{\lim_{x\to3^+} f(x)} = +\infty$

Donc la droite (D_2) d'équation $x = \ 3$ est asymptote à (C).

- Sens de variation

La fonction f est dérivable sur son Df et sa dérivée est la fonction $f'(x)$ tel que :

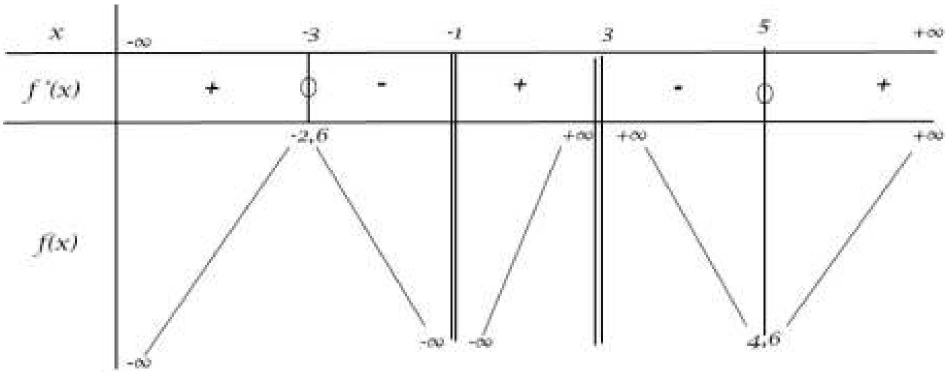
$f'(x) = \frac{1}{2}\left[1+3\frac{\left(\frac{x+1}{x-3}\right)'}{\left(\frac{x+1}{x-3}\right)}\right]$
$= \frac{1}{2}\left[1+3(\frac{x-3-(x+1)}{(x_3)^2} \times \frac{x-3}{x+1})\right]$
$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(\frac{-4}{(x-3)(x+1)})$
$= \frac{1}{2} - \frac{6}{(x-3)(x+1)} = \frac{x^2-2x-3-12}{2(x-3)(x+1)}$

Donc: $f'(x) = \frac{x^2-2x-15}{2(x-3)(x+1)}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-2x-15 = 0$
$\Delta' = 1-1(-15) = 16 > 0$
$x_1 = 1-4 = -3\ et\ x_2 = 1+4 = 5$
$f'(x) = \frac{(x+3)(x-5)}{2(x-3)(x+1)}$

$\forall x \in]-\infty;-3[\cup]-1;3[\cup]5;+\infty[, f(x) > 0, > donc\ f\ est\ strictement$ croissante;
$\forall x \in]-3;-1[\cup]3;5[\ f(x) < O\ ,\ \ donc\ f\ est\ strictement\ decroissante$

Tableau de variation



2a) Démontrons que (C) admet un point d'inflexionΩ et que Ωest un centre de symétrie de (C).

REMARQUE :

f admet un point d'inflexion en x_0 si f est deux fois **dérivable** sur un intervalle I et si $f''(x_O) = 0$ et change de signe, alors la courbe (C) traverse sa tangente en un point $M_0(x_{0,}f(x_O))$ est appelé extremum, un tel point s'appelle le point d'inflexion.

On a: $f'(x) = \frac{x^2-2x-15}{2(x-3)(x+1)}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-2)[2(x-3)(x+1)]-[2(x+1+x-3)](x^2-2x-15)}{4(x-3)^2(\mathrm{x}+1)^2}$$

$$= \frac{4(x-1)(x^2-2x-3)-2(2x-2)(x^2-2x-15)}{4(x-3)^2(x+1)^2}$$

$$= \frac{4(x-1)(x^2-2x-3)-4(x-1)(x^2-2x-15}{4(x-3)^2(x+1)^2}$$

$$= \frac{4(x-1)[x^2-2x-3-x^2+2x+15]}{4(x-3^2(x+1)^2}$$

$$= \frac{12(x-1)}{(x-3)^2(x+1)^2}$$

$f''(x) = \frac{12(x-1)}{(x-3)^2(x+1)^2}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \; et \; f(1) = \frac{1}{2}(1+1+3ln_1) = 1$

$\Rightarrow f''(1) = 1$

Donc $f''(x)$ change de signe en 1, alors (C) traverse sa tangente (T) au point $\Omega\binom{1}{1}$ et Ω est un point d'inflexion de (C) .

$\Omega\binom{1}{1}$ est un centre de symétrie, si $\forall x \in \mathbb{R} \;\; tel \; que \; 1-x \in Df, 1+x \in Df$ et on vérifie que : $\frac{f(1-x)+f(1+x)}{2} = 1$

On a: $\begin{cases} f(1-x) = \frac{1}{2}(1-x+1+3ln\left|\frac{1-x-1}{1-x-3}\right|) = 1 \;\; -\frac{1}{2}\left[x-3ln\left|\frac{2-x}{-2-x}\right|\right) \\ f = (1+x) = \frac{1}{2}(1+x+1+3ln\left|\frac{1+x+1}{1+x-3}\right|) = 1 \;\; +\frac{1}{2}\left[x-3ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{f(1-x)+f(1+x)}{2} = \frac{1-\frac{1}{2}\left[x-3ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]+1+\frac{1}{2}\left[x+3ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\right]}{2}$

$= \frac{2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|}{2} = 1$

$\frac{f(1-x)+f(1+x)}{2} = 1$

Donc $\Omega\binom{1}{1}$ est un centre de symétrie de (C)

b) Déterminons l'asymptote oblique (D) de (C) et vérifions que $\Omega \in (D)$.

On a : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\pm\infty} \frac{\frac{1}{2}(x-1+3ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|)}{x}$

$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{2x} + \frac{1}{2x} + \frac{3}{2x} ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|$

$= \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$

Alors : $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left[1+3ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|\right] - \frac{1}{2}x\right] = \frac{1}{2}$

Donc la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}(x+1)$ est asymptote oblique de (C).

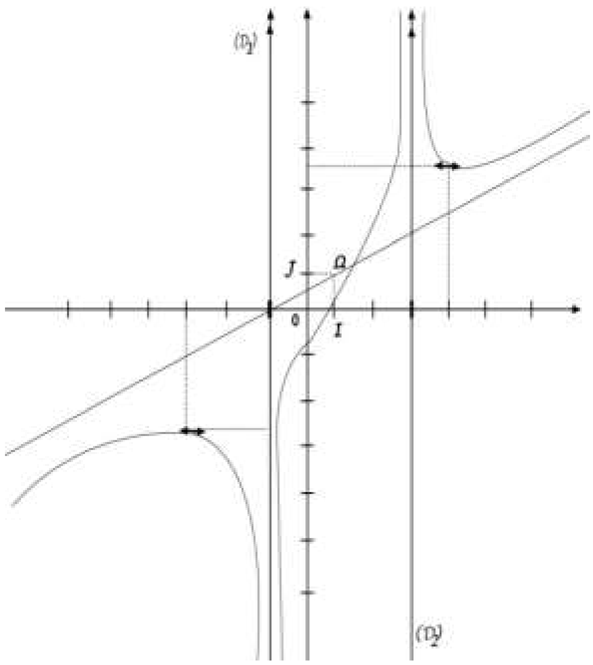
$\Omega\binom{1}{1}$ donc pour $x = 1, y = 1$, alors $\Omega \in (D)$

c) Traçons la courbe (C)

On a : (D_1) : x$= -1, (D_2) : x = 3$

(D) : $y = \frac{1}{2}(x+1)$

x	1	-1
y	1	0



Application 4 :

Le repère (O,I,J) est orthonormé soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x - 1 + \frac{1}{x}, si\ x \leq 1 \\ 1 - (\mathrm{lnx})^2, \mathrm{si\ x} > 1 \end{cases}$

1a) Démontrer que f est continue et dérivable en 1

b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les branches infinie de la courbe représentative de la courbe représentative (C) de f .

c) Etudier les variations de f démontrer que le point d'abscisse e est un point d'inflexion de (C) de f.

d) Tracer (C)

2) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$

a) Démontrer que h réalise une bijection de $]1; +\infty[$ ver un intervalle que l'on précisera.

b) En déduire que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera le sens de variation

C) Tracer la courbe représentative de h^{-1} .

Résolution

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 + \frac{1}{x}\ , si\ x \leq 1 \\ 1 - (lnx)^2, si\ x > 1 \end{cases}$$

1)a) Continuité et dérivabilité en 1

$\lim_{x\to 1^-} = \lim_{x\to 1^-} \left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) = 1 = f(1)$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (1 - (lnx)^2) = 1 = f(1)$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)\ donc\ f\ est\ contunie\ en\ 1$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1+\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2x+1}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x} = 0$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x} = 0 = f'_d(1)$

Le nombre dérivé de f est $f'(1) = 0$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 0$

Donc f est dérivable en 1

c) calculons des limites et branches infinies

- *Domaine de definition*

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 + \frac{1}{x}\ , si\ x \leq 1 \\ 1 - (lnx)^2, si\ x > 1 \end{cases}$$

$f(x)\ \exists \Leftrightarrow x \neq 0$ ou $x > 0$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*\ ou\ \ x \in]0; +\infty[= \mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow \mathcal{D}f\ = \mathbb{R}^*\ \cup\ \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}^*,$

Donc : $\boxed{Df\ =]-\infty; O[\ \cup\ ]0; +\infty[}$

- *Limites aux bornes de Df*

• $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x - 1 + \frac{1}{x} = -\infty,$

Donc: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

• $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x - 1 + \frac{1}{x}) = -\infty,$

Donc : $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

•$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty,$

Donc: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

•$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}(1 - (lnx)^2) = -\infty,$

Donc: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

- Branches infinies

•$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty,\ \ donc\ la\ droite\ (D)d'équation\ x = 0$ est asymptote vertical à (C)

•$\lim_{x\to -\infty}\big(f(x) - (x-1)\big) = \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x} = 0\ ,\ \ donc\ (C)\ admet\ en - \infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$

•$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1-(lnx)^2}{x}\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} - \frac{(lnx)^2}{x}$

$= \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} - \left(\frac{2ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

$= \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} - 4\left(\frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

$= \frac{1}{+\infty} - 4 + 0 = 0$

$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = 0\ donc\ en + \infty\ \ une\ branche\ parabolique\ de\ direction\ (OI).$

C) variations et point d'inflexion

- *Variation*

f est dérivable sur son ensemble de définition et pour tout $x \in Df$, on a :

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x}, si\ x \leq 1 \\ \frac{-2lnx}{x}\ , si\ x > 1 \end{cases}$$

Donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x} = 0\ ou - 2lnx = 0$

$\Leftrightarrow x \pm 1\ ou\ x = 1$

Tableau de signe de f'

x	$-\infty \qquad -1$		0	$1 \qquad +\infty$
$x-1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$-2lnx$	$+$	$+$	$+$	$-$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$-$

$\forall x \in]-\infty;\ -1[\ f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante ;

$\forall x \in]-1;\ 0[\cup]0; 1[\cup]1;\ +\infty[\ f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante ;

Tableau de variation

x	$-\infty \qquad -1$		0	$1 \qquad +\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$-$
$f'(x)$	$-\infty$	-3 $\quad -\infty$	$+\infty$ $\quad 1$	$-\infty$

- $Point\ d'inflexion$

Le point d'abscisse e est un point de l'intervalle $]1\ ; +\infty[$.

On a : $\forall x > 1, f'(x) = \frac{-2lnx}{x} \Leftrightarrow f''(x) = \frac{-2+2lnx}{x^2} = \frac{-2(1-lnx)}{x^2}$

$f''(x) = -2\frac{(1-lnx)}{x^2}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - lnx = 0$

$\Leftrightarrow lnx = 1$

$\Leftrightarrow x = e$

$Et\ f(e) = 1 - (ln_e)^2 = 1 - 1 = 0$

$f(e) = 0$, donc le point $A(e, o)$ est un point d'inflexion.

2) h est la restriction de f à $]1\ ; +\infty[$,

a) h est continue et strictement décroissante sur $]1\ ; +\infty[$.Donc h réalise une bijection de $]1; +\infty[\ \ vers\ h\ (]1; +\infty[) =]-\infty; 1[$ car $(h(]1; +\infty[) =]\lim_{x\to+\infty} h(x); h(1)[=]-\infty; 1[$

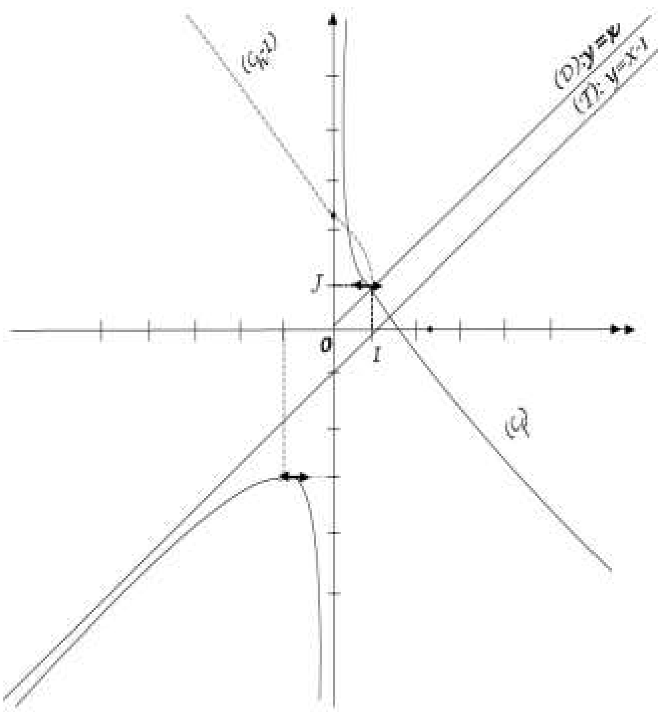
b) h étant bijective, h admet une fonction réciproque $h^{-1}\ definie$ de $]-\infty; 1[\ \rightarrow$ $]1; +\infty[$, de même sens de variation que h. C'est-à-dire h^{-1} est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$. La courbe (C) de h^{-1} se déduit de (C) par système orthogonale par rapport à la première bissectrice d'équation $(D) : y = x$.

Traçons la courbe de (C_f) et $(C_{h^{-1}})$.

On a : $(D) : x = 0$

$(T) : y = x - 1$

$(D) : y = x$



$$\left(C_f\right) \cap (ox) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 + \frac{1}{X} = 0 \\ 1 - (lnx)^2 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 > 0 \\ lnx = 1 \Leftrightarrow x = e \end{cases}$$

IV. Logarithme décimal

IV1- Définition et propriétés

1.1- Définition :

On appelle fonction logarithme décimal, la fonction notée log définie sur $]0; +\infty[$ par $par: \log(x) = \frac{lnx}{ln10}$.

- L'ensemble de définition de la fonction log est $]0; +\infty[$;
- On a : $\forall x \in]0; +\infty[$, $\left(log_{(x)}\right)' = \frac{1}{xln10}$;
- $log1 = 0$ et $log10 = 1$ et $log(e) = 1$

2.2- Propriétés :

Pour tous nombres réels a, et b strictement positif et pour tout r$\epsilon\mathbb{R}$, $on\ a$:

1) $\log(ab) = loga + logb$;
2) $log\frac{1}{a} = -loga$;
3) $log\frac{a}{b} = loga - logb$;
4) $loga^r = rloga$

V. Fonction logarithme de base a

$\boldsymbol{V_1\_Definition\ et\ proprietes}$:

1.1-Definition :

Soit a un nombre réel strictement positif et $a \neq 1$.

La fonction logarithme de base a notée log_a est définie sur $]0\ ; +\infty\ [$ par $log_a(x) = \frac{1}{lna}lnx$.

1.2 Propriétés :

Pour tous $x, y \in]0; +\infty[$, $on\ a$:

1) $log_a(x.y) = log_a(x) + log_a(y)$
2) $log_a\frac{x}{y} = log_a(x) - log_a(y)$
3) $log_a\sqrt{x} = \frac{1}{2}log_a x$
4) $log_a x^n = nlog_a$

pour tout $a, b \in]0; +\infty[$, $on\ a$:

5) $log_a x = log_a b \times \ log_b x$

VI. Points et tangentes remarquables

1- Point d'inflexion :

Soit f une fonction.

Si f est deux fois dérivables sur un intervalle I, et si pour tout x_0 de I, $f''(x_0) = O$ et change de signe, alors la courbe (C) de f traverse sa tangente en un point $\Omega(x_0, f(x_0))$ appelé extremum ,un tel point Ω s'appelle **point d'inflexion .**

2- Point d'arrêt

Les points dont l'abscisse x_0 est une borne d'un intervalle de continuité I, si $x_0 \in I$, on est en présence d'un point d'arrêt.

3- Points anguleux et point de remboursement

Les points où la fonction est continue, mais non dérivable :

- Si le taux de variation en x_0 admet une limite infinie, la tangente à la courbe est parallèle à (oy), la courbe traverse sa tangente.
- Si $f'_d(x_0) \neq \ f'_g(x_0) = l \neq (\infty)$, on a un point anguleux ;
- Si $f'_d(x_0) = \pm\infty \ et \ f'_g(x_0) = \pm\infty$, on est en présence d'un point de remboursement, la tangente à ce point parallèle à (Oy).

4- Fonction convexe, fonction concave

- Une fonction f est dite convexe où f est définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}, si \ \forall \ x_1, x_2 \ \in I, (x_1, < x_2), tout$ point M de la courbe Γ d'équation $y = f(x)$ d'abscisse x tel que $x \in \,]x_1, x_2[$ est au-dessus de la droite (M_1, M_2) où $M_1 \ et \ M_2$ désignent respectivement les points de Γ d'abscisse $x_1 \ et \ x_2$.
- Elle est dit concave sur I si $-f$ est convexe sur I.

FIN

Chapitre 9 : FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

I. Fonction, exponentielle

I_1 −Définitions et propriétés.

1.1 −Définition :

La fonction exponentielle népérienne notée exponentielle, est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérienne. La fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$; donc exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. D'où exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, exp(x) > 0

Notation :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $exp(x)$ est noté e^x.

1.2 −Ppropriétés fondamentales :

- Pour tout x de $\mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $lny = x \Leftrightarrow y = e^x$;
- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $lne^x = x$, pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, $e^{lnx} = x$.
- Pour tous a, b de $\mathbb{R}$, $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b, e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.

1.3- Propriétés algébriques :

Pour tous nombres réels a et b et pour tout nombre rationnel r, on a :

1) $e^{a+b} = e^a.e^b$
2) $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
3) $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$;
4) $e^{ra} = (e^a)^r$

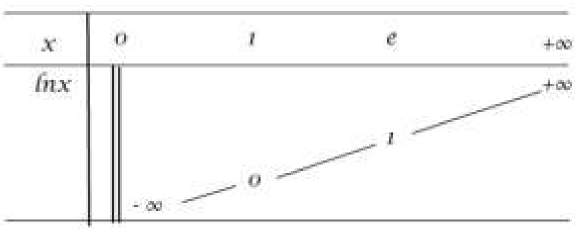
I_2 −Etude de la fonction exponentielle.

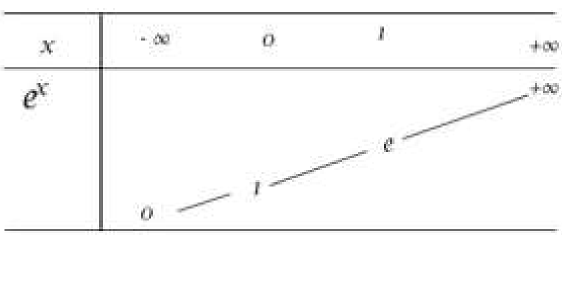
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$

$x \to e^x$

1) Sens de variation

Les fonctions ln et exp étant des bijections réciproques, leurs tableaux de variation se déduisent l'une de l'autre.





2) Les droites remarquables de e^x

On en déduit que e^x admet :

- Une tangente au point J (0 ; 1) de coefficient directeur 1 , I(1,0) ;
- Une tangente au point F(1,e) passant par le point 0, E(e,1) ;
- Une asymptote horizontale, la droite d'équation (o I). (A.V→ (oJ) ln ;

3- Branches infinies en $+\infty$ de e^x.

On a vu que la courbe de ln admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (0I).

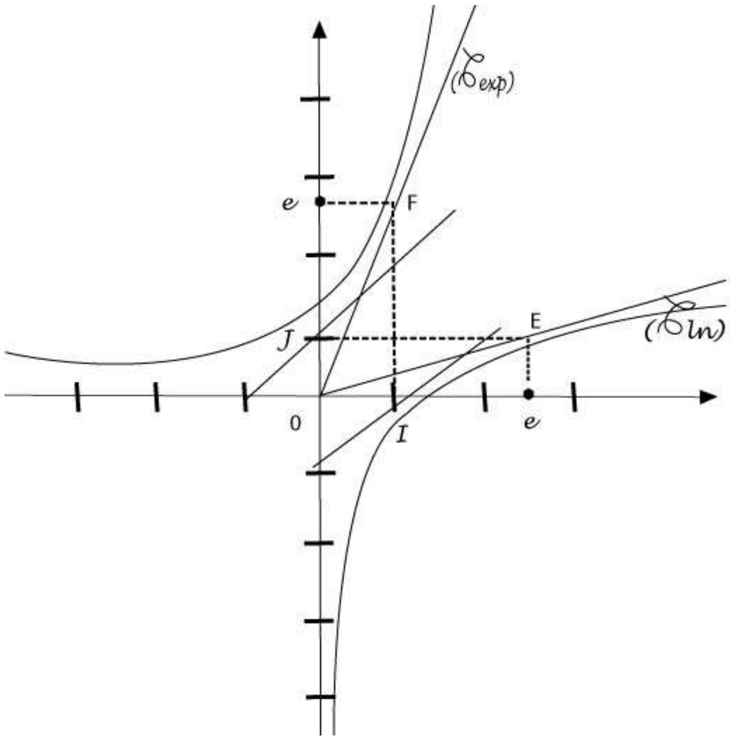
On en déduit que la courbe de e^x admet une branche parabolique de direction (O J) en $+\infty$.

3) Construction de la courbe de e^x et ses droites remarquables.

On désigne par (c) la courbe de e^x et par (C') celle de lnx, par (D) la droite d'équation $y = x$.

(C) se déduit de (C') par la symétrie orthogonale d'axe (D) .

(C') est située en tout point au-dessous de la tangente et (C) au-dessus de celle-ci en J donc $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^x > x + 1$.



2.1 −Derivée et conséquences :

Propriétés :

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $(e^x)' = e^x$.

La fonction e^xest dérivable en 0 et son nombre dérivée est 1.

On a: $\lim_{x \to o} \frac{e^{x-1}}{x} = 1$

2.2 −Limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Propriétés :

1) $\lim_{x \to O} e^x = +\infty$
2) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
4) $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$

I_3 −Résolution d'équations et d'inéquations

Applications

1) Résolvons dans l'équations: $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

Posons $e^x = X \Leftrightarrow X^2 + X - 2 = O$

$\Delta = 9 \Leftrightarrow x_1 et x_2 = 1$

$\Leftrightarrow X^2 + X - 2 = (e^x + 2)(e^x - 1) = 0$

$e^x + 2$ n'a pas de solution, donc $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = O$

Alors : $S = \{0\}$.

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $3e^x - 7e^{-x} + 20 \leq O$

$$3e^x - 7e^{-x} + 20 = 3e^x - \frac{7}{e^x} + 20$$
$$= 3e^{2x} + 20e^x - 7 \leq O$$

Posons $X = e^x \Leftrightarrow 3X^2 + 20X - 7 \leq 0$

$\Delta' = 121$

$$x_1 = \frac{-10 - 11}{3} = \frac{-21}{3} = -7 \; et \; x_2 = \frac{-10 + 11}{3} = \frac{1}{3}$$

$\Leftrightarrow 3(e^x + 7)\left(e^x - \frac{1}{3}\right) \leq 0$,

$e^x + 7 \leq 0$ n'a pas de solution, alors : $e^x \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \leq -ln3$

Donc : $S =]-\infty; -ln3]$

Calculs de limites :

Calculons les limites suivantes :

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3e^x - 2}{5e^x + 3}$

On pose : $e^x = X$, quand $x \to +\infty, X \to +\infty$

Donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{3e^x - 2}{5x + 3} = \lim_{x \to +\mu\infty} \frac{3X - 2}{5X + 3} = \frac{3}{5}$

Alors : $\lim_{x \to +\infty} \frac{3e^x - 2}{5e^x + 3} = \frac{3}{5}$

b) $\lim_{x\partial \to -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x}$,

On pose : $e^x = X$, quand $x \to -\infty, x \to 0$

Donc : $\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

Alors : $\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x} = 1$

c) $\lim_{x \to +\infty}(x - e^x)$

On a : $x - e^x = x\left(1 - \frac{e^x}{x}\right)$,

Or: $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, alors$\lim_{x \to +\infty}(x - e^x) = \lim_{x \to +\infty} x(1 - \frac{e^x}{x}) = -\infty$

Donc $\lim_{x \to +\infty}(x - e^x) = -\infty$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{sin2x}{1-e^x}$.

On a: $\frac{sin2x}{1-e^x} = \frac{sin2x}{2x} \times \frac{2x}{1-e^x}$

$= \frac{sin2x}{2x}\left(\frac{-2x}{e^x-1}\right)$

$= -2\ \frac{sin2x}{2x} \times \frac{1}{\frac{e^{x-1}}{x}}$

Or: $\lim_{x\to 0} \frac{sin2x}{2x} = 1\ et\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

On en déduit que : $\lim_{x\to 0} \frac{sin2x}{1-e^x} = -2$

II. Fonction comportant exponentielle

II_2 **−Dérivée et primitives**

1. 1 − Propriétés :

Soit u une fonction dérivable sur intervalle K.

1) La fonction $exp \circ u$ est dérivable sur K et on a : $(exp \circ u\,)' = u'(exp \circ u\,)$.
   $exp \circ u$ est aussi notée e^u et sa dérivée est $u'e^u$.
2) La fonction $u'e^u$ admet pour primitive sur K la fonction e^u

Exemples :

- La fonction $x \to e^{-x^2+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est : $(-2x+1)e^{-x^2+x}$ **;**

- La fonction$x \to e^{sinx}$ est derivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivé est : $cosxe^{sinx}$.

- La fonction $x \to xe^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivé est : $\frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \to xe^{-x^2}$ est la fonction $x \to -\frac{1}{2}e^{-x^2}$.

- La primitive sur $]-1[$ de la fonction $x \to \frac{e^{tanx}}{cos^2x}$ est la fonction $x \to e^{tanx}$

II_2 **−Exemples d'études de fonctions :**

Application1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{X}} & si\ x \neq O \\ f(x) = O \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f. vérifier si f est continue et dérivable en O.
   Déterminer les limites aux bornes du D_f.
2) Déterminer le sens de variation de f. En déduire le tableau de variation de f.
3) Déterminer les branches infinies si elles existent .
4) Tracer la courbe de$f$ et ses a asymptotes

Solution :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}} & , \quad si\ x \neq O \\ f(o) = O \end{cases}$$

1) Ensemble de définition.

   $D_f = \mathbb{R}$

   - Continuité en O .
     - $\lim_{x\to O^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \times 0e^{\frac{1}{0^-}} = \frac{1}{2} \times O \times = O$

$\lim_{x\to O^-} f(x) = O$

Donc $\lim_{x\to O^-}(x) = f(O) = O, f$ est continue en gauche en 0.

- $\lim_{x\to O^+} f(x) = \lim_{x\to O^+} \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \times 0 \times e^{\frac{1}{O^+}} = 0 \times +\infty$???

On pose $X = \frac{1}{x}$, alors quand :$x \to O^+, X \to +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to O^+} \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{e^X}{X}\right) = \frac{1}{2}(+\infty) = +\infty$

$\lim_{x\to O^+} f(x) = +\infty$, f n'est pas continue à droite en O, donc f n'est pas continue en O.

- Dérivabilité en O.

Comme f n'est pas continue en O, donc elle n'est pas dérivable en O.

A cet effet , on a : $\lim_{x\to O^-} \frac{f(x)-f(O)}{x-O} = \lim_{x\to O^-} \frac{\frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}}-O}{x} = \lim_{x\to O^-} \frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}} = O$

Donc $f'_g(O) = O$, donc (C) admet une demi –tangente en O de support (OI)

- Limites :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) Déterminons le sens de variation de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée f' est :

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}xe^{\frac{1}{x}})$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\right)$$
$$= \frac{xe^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}}}{2x}$$
$$= \frac{x-1}{2x}e^{\frac{1}{x}}$$

Donc $f'(x) = \frac{x-1}{2x}e^{\frac{1}{x}}$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)e^{\frac{1}{x}} = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ et $e^{\frac{1}{x}} > O$

$f'(x) \exists \Leftrightarrow 2x \neq O \Leftrightarrow x \neq O$

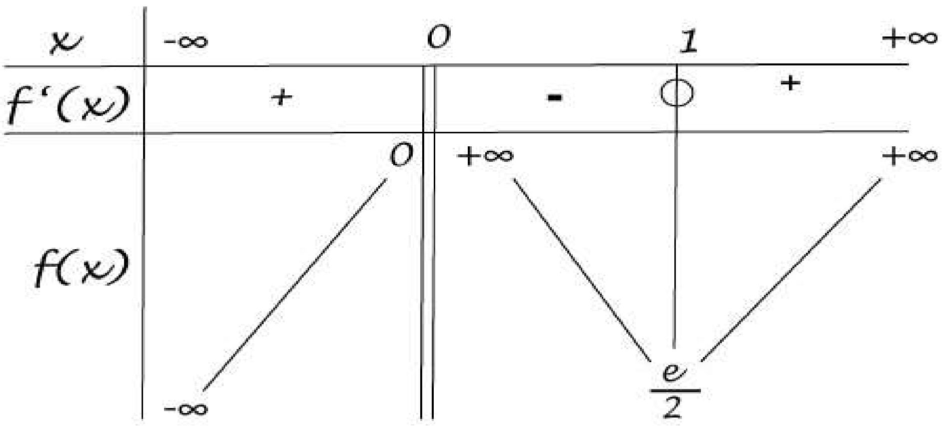
Tableau de signe de f'

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$2x$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

$\forall x \in]-\infty;\ 0[\cup]1;\ +\infty[$; $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante ;

$\forall x \in]0; 1[$; $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante ;

Déduisons en le tableau de variation de f.



3) Déterminons les branches infinies si elles existent.

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, alors la courbe admet des branches infinies en $\pm\infty$;

- Branches infinies en $+\infty$:

On a : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to} \frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$

$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{2}x$

$= \frac{1}{2}x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right]$

Posons : $X = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\left(\frac{e^X-1}{X}\right)$

Quand $x \to +\infty, X \to O$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) = -\frac{1}{2}x\right) = \lim_{X\to O} \frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{X}\right) = \frac{1}{2} \times 1.$

$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}$, donc la droite (Δ) d'équation$y = \frac{1}{2}(x+1)$ est a asymptotes oblique à (C) en $+\infty$.

- Branches infinie en $-\infty$

On a : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{2}xe^{\frac{1}{2}}}{x}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$

Donc : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$

$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\left(\frac{e^X-1}{X}\right)$

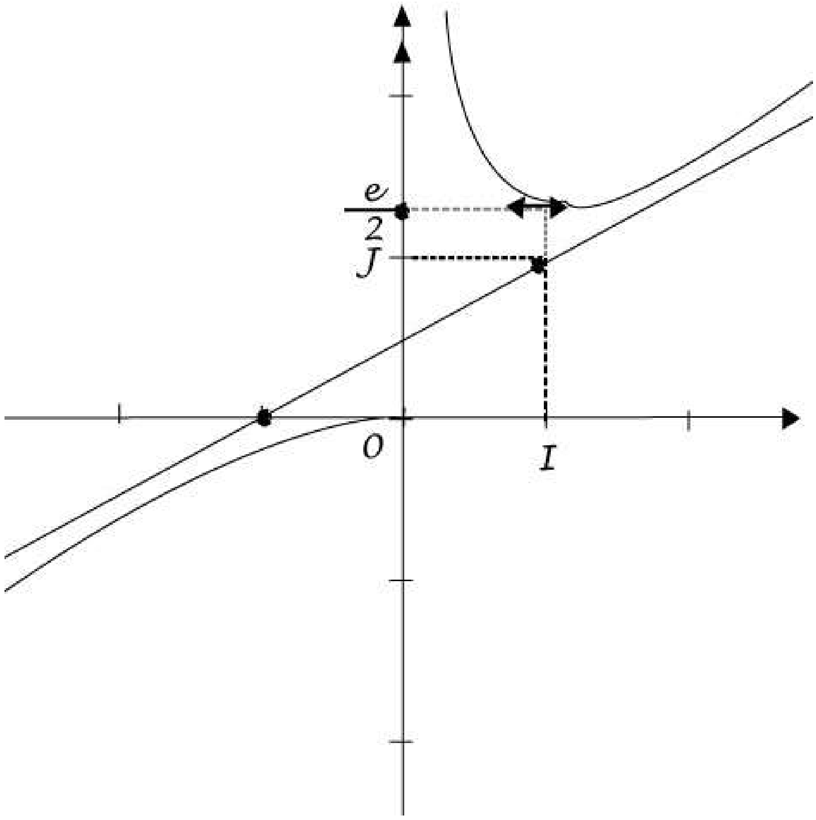
On pose : $X = \frac{1}{x}$ et quand $x \to +\infty, X \to O$

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{X\to O} \frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{X}\right) = \frac{1}{2} \times 1.$

Alors : $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}$ donc la même droite (D) :$y = \frac{1}{2}(x+1)$ est aussi asymptote oblique a (C) en -∞.

De ce qui précède, on a vu que $\lim_{x\to O^+} f(x) = +\infty$, donc la droite (OJ) est aussi a asymptotes horizontale à (c)

4) Traçons la courbe (c)de f ses asymptotes on a :(Δ) :$y = \frac{1}{2}(x+1)$; (D) : y=O



Application 2 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x^2}{x^2-1}} & , si\ x \in \mathbb{R} \backslash \{-1; 1\} \\ f(-1) = f(1) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f.

1) Démontrer que f est dérivable à droite en -1 et a gauche en 1.
2) Etudier et tracer (C)

Solution :

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x^2}{x^2-1}} \\ f(-1) = f(1) = 0 \end{cases}$$

1) Démontrons que f est dérivable à droite en -1 et à gauche en 1.

$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{-1; 1\}$,

On a : $\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{e^{\frac{x^2}{x^2-1}}}{x+1}$

$$= \frac{1}{x+1} e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$$

$$= \frac{x^2-1}{x^2(x+1)} \left(\frac{x^2}{x^2-1} e^{\frac{x^2}{x^2-1}} \right)$$

$$= \frac{x-1}{x^2} \left(\frac{x^2}{x^2-1} e^{\frac{x^2}{x^2-1}} \right)$$

$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{x-1}{x^2}\left(\frac{x^2}{x^2-1}e^{\frac{x^2}{x^2-1}}\right)$

Donc $\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+}\frac{x-1}{x^2}\left(\frac{x^2}{x^2-1}e^{\frac{x^2}{x^2-1}}\right)$

On a :$\lim_{x\to -1^+}\frac{x-1}{x^2} = -2\ eten\ posant\ X = \frac{x^2}{x^2-1}\ tel\ que\ quand\ \begin{cases} x \to -\ 1^+ \\ x \to -\infty \end{cases}$

$\lim_{x\to -1^2}\frac{x^2}{x^2-1}e^{\frac{x^2}{x^2-1}} = \lim_{X\to +\infty} Xe^X = 0,$

Donc : $\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = 0$

De même, $\forall\ x \neq 1\ et\ x \neq -1, on\ a$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{e^{\frac{x^2}{x^2-1}}}{x-1}$$
$$= \frac{x^2}{x^{2(x-1)}}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\frac{x^2}{ex^2-1}\right)$$
$$= \frac{x+1}{x^2}\left(\frac{x^2}{x^2-1}e^{\frac{x^2}{x^2}} - 1\right)$$
$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x+1}{x^2}\left(\frac{x^2}{x^2-1}e^{\frac{x^2}{x^2-1}}\right)$$

Alors : $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x^2}\left(\frac{x^2}{x^2-1}e^{\frac{x^2}{x^2-1}}\right)$.

On a : $\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x^2} = 2\ et\ en\ posant\ X = \frac{x^2}{x^2-1} tel\ que\ \ quand\ \left[\begin{matrix} x \to 1 \\ X \to -\infty \end{matrix}\right.$,

$\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x^2}e^{\frac{x^2}{x^2-1}} = \lim_{X\to -\infty} Xe^X = O$

Donc : $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = O$

On en déduit que f est dérivable à droite en -1 et à gauche en 1 $et\ f'd(-1)\ = f'd(1)\ =\ O.$

2) Etudions et traçons(Cf.) .

Df =ℝ

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x^2}{x^2-1}} = e$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e$

- $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} e^{\frac{x^2}{x^2-1}} = e^{-\infty} = 0 \Rightarrow\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$

- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = e^{\frac{x^2}{x^2-1}} = e^{-\infty} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = o\ et\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

Donc la droite d'équation $y = e$ est asymptote horizontale à (Cf) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = -1$ sont asymptotes verticales à (Cf).

Pour tout $x \in R\ \{-1; 1\}$;

On a : $f^{'}(x) = \left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)' e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$
$$= \frac{2x(x^2-1)-2x(x^2)}{(x^2-1)^2}e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$$

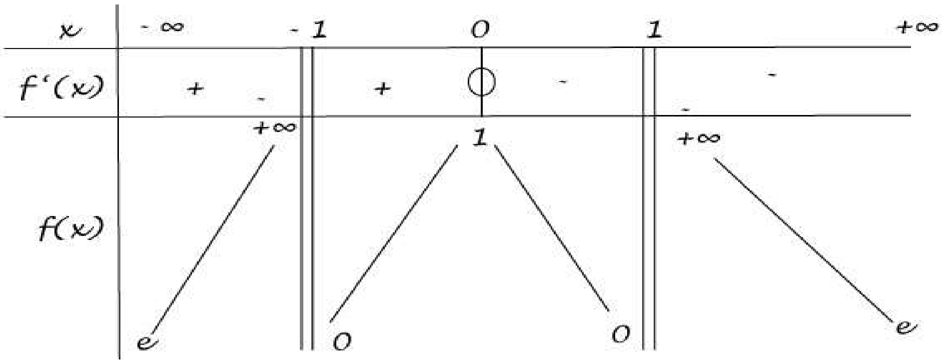
Donc : $f^{'}(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2xe^{\frac{x^2}{x^2-1}} = 0$$

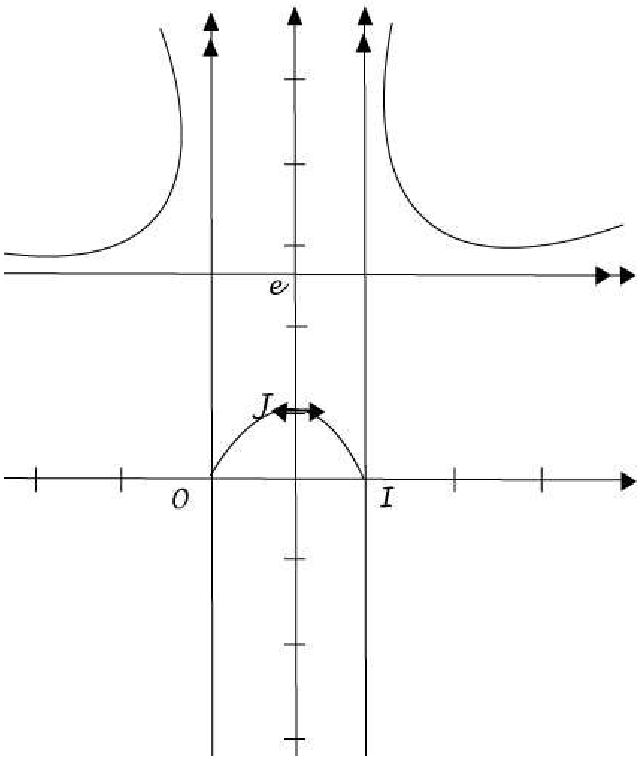
$$\Leftrightarrow -2x = 0 \; et \; e^{\frac{x^2}{x^2-1}} > 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \; et \; e^{\frac{x^2}{x^2-1}} > 0$$

$Tableau\ de\ variation$



Représentation graphique



II$_3$- Fonctions exponentielles de base à $(a > 0)$

3.1- Définition et propriétés

1.1- Définition.

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1.

① Pour tout nombre réel $x, on\ a$: $a^x = e^{xlnx}$

② On appelle la fonction exponentielle de base a, l'application

$$exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$
$$x \to a^x$$

Donc : $\forall\, x \in \mathbb{R}, exp_a(x) = a^x = e^{xlna}\ (a > 0; a \neq 1)$

Ainsi e^x est appelé exponentielle de base e.

1.2-propriètè :

1) Pour tous nombre réel $a > 0\ et\ pour\ tout\ réel\ x, on\ a$:

$$lna^x = xlna;$$

2) $Pour\ tous\ a > 0\ et\ b > 0\ et\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}, on\ a$:

① $a^{x+y} = a^x . a^y$

② $a^{-y} = \frac{1}{a^y}$

③ $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

④ $(ab)^x = a^x b^x$

⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

⑥ $(a^x)^y = a^{xy}$

Application 1 :

Considère la fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x3^{-x}$ et (c) sa courbe représentative $dans\ le\ plan\ muni\ du\ repére\ (0, I, J)$.

1) a) Déterminons la limite de f en $-\infty$

b) Déterminons la limite en $+\infty$ de la fonction g definie par $g(x) = f(x) \times ln3$. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f

2) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$

3) construire la courbe $(cf) de\ f$

Application 2 :

On considère dans la fonction numérique définie par : $f(x) = (ax^2 + b)e^{1+cx}$ (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal, unité **2** cm.

1) Déterminer les réels a, b et c pour que la courbe (C) :
   - Admet un minimum relatif au point 0 ;
   - Passe par le point $A\binom{1}{1}$ et qu'en ce point, elle admet une tangente de coefficient directeur égal à 1.
2) Les réels a, b et c étant déterminés, justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est $f'(x) = -(x^2 - 2x)e^{1-x}$.
3) Etudier les variations de f et tracer la courbe (C) de f.
4) Soit n un entier naturel non nul, on considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.
   a) Etablir une relation entre I_{n+1} et I_n.
   b) Calculer I_2 et donner une interprétation graphique du nombre I_2.
5) a) Démontrer que pour tout x réel de $[0; 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   On a l'inégalité suivante : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.
   b) En déduire un encadrement de I_n, puis la limite de I_n quand x tend vers $+\infty$.

Application 3 :

Partie A : Soit la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthogonal $(0;\ I; J)$ unité graphique 1cm sur (Ox) et 10 cm sur (Oy).

1) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra noter que $f(x) = 2\left[\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right]$

   c) Expliciter la dérivée f' de f et étudier, c'est à dire signe de $f'(x)$.

   d) Etudier les variations de f.

   e) Construire la courbe(C) de f dans le plan.

2) On considère la fonction F définie sur [0 ; +∞[par F (x) = $\int_0^x f(t)dt$

   a) Utiliser une intégration par partie pour calculer : $I(x) = \int_0^x te^{-t}dt$

   b) Montrer en utilisant a) et une nouvelle intégration par partie que $F(x) = 1 - e^{-t}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$.

   c) Montrer que F est une fonction strictement croissante telle $0 \leq F(x) \leq 1$ pour tout x.

   d) Montrer en utilisant 1-b), que F admet en $+\infty$ une limite que l'on déterminera. En déduire que l'équation F(x) = c, avec $0 \leq c \leq 1$ admet une solution et une seule dans $[0;\ +\infty[$.

Partie B : Dans cette partie, on se propose de résoudre l'équation $F(x) = 0{,}95$. pour cela, on introduit la fonction auxiliaire : $g(x) = ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + ln20$

1) Montrer que l'unique réel α tel que $F(\alpha) = 0{,}95$ est aussi l'unique solution de $g(x) = x$.
2) Montrer que g est une fonction strictement croissante sur ℝ. en déduire que l'image $g([5; 10]$ est incluse dans $[5; 10]$
3) a) Justifier que $|g'(x)| \leq \frac{1}{3}$ pour tout $x \in [5; 10]$

   b) En déduire $|g(v) - g(u)\left| \leq \frac{1}{3}\right| v - u|$ pour tout $x \in [5; 10]$

   c) Montrer que $\alpha \in [0; 10]$.

4) On considère la suite (U_n) de nombres de l'intervalle $[0; 10]$ définie par $U_0 = 5$ et $U_{n+1} = g(U_n)$.

   a) Utiliser la question 3. c) par récurrence sur n que : $|U_n - \alpha| \leq \frac{5}{3^n}$;

   b) Déterminer n_0 tel que $|U_{n0} - \alpha| < 10^{-2}$.

   c) Donner une valeur décimale approchée 10^{-2} près de α.

Remarque :

$f_a : x \to a^x = e^{x \ln a}$

① $Df = \mathbb{R}$

② $f'_a(x) = \left(e^{x \ln a}\right)' = \ln a\, e^{x \ln a}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}, f_a$ est dérivable sur ℝ

f'_a est du signe de $\ln a$:

On a deux cas :

1er cas : 0<a<1

1) $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$
2) $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$
3) $\lim_{x\to-\infty} \frac{a^x}{x} = -\infty$

2e cas : a>1

1) $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$
2) $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x}=+\infty$

3 .2-Résolution d'équation

Exemples :

Résolutions dans $\mathbb{R}$

(E) :$2^{2x+3}-3\times 2^{x+1}=0$

On a :$2^{2x+3}-3\times 2^{x+1}+1=2^{2x}\times 2^3-3\times 2^x\times 2+1$

$8\times 2^{2x}-6\times 2^x+1$

En posant $X=2^x$,on réecrit et de la forme :

$8X^2-6\times\ +1=0\Leftrightarrow\Delta^{'}=9-8\times 1=1>0$

$\Leftrightarrow X_1=\frac{3-1}{8}=\frac{1}{4}\ et\ X_2=\frac{3+1}{8}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 8\left(X-\frac{1}{4}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow 8\left(2^X-\frac{1}{4}\right)\left(2^x-\frac{1}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow 2^x=\frac{1}{4}$ou $2^x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\boldsymbol{X\ln 2}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ ou $\mathrm{e}^{\boldsymbol{X\ln 2}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

$\Leftrightarrow x\ln 2=-\ln 4$ OU $x\ln 2=-\ln 2$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\ln 4}{\ln 2}oux=-\frac{\ln 2}{\ln 2}=-1$

$\Leftrightarrow x=-\frac{2\ln 2}{\ln 2}oux=-1\Leftrightarrow x=-2$ ou $x=-1$

$S=\{-2;-1\}$

III. Fonctions puissances :

III.$_1$- Etudes des fonctions puissances.

1.1- Définition :

soit α un nombre réel.

On appelle fonction puissance d'exposant α, la fonction $x\to x^2$.

$\forall\ x>0$,on a : $x^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha\ln x}$

La fonction $x\to x^\alpha$est définie sur $]0;+\infty[$ et b sa fonction dérivée est la fonction $x\to \frac{\alpha}{x}\mathrm{e}^{\alpha\ln x}$

1.2-Fonction $\boldsymbol{u^\alpha}(\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R})$

Propriétè1 :

Soit α un nombre réel et U une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K. la fonction $x\to u(x)^\alpha$ est la composée des fonctions $x\to u(x)$ et x^α.Elle est dérivable sur k et on a $(u^\alpha)^{'}=\alpha u' u^\alpha$d

De plus , on a :$u(x)^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha\ln u(x)}$

Propriete2 :

Soit $\propto$ un nombre réel diffèrent de -1, u une fonction dérivable strictement positive sur un intervalle K. la fonction u'u² admet pour primitive sur K la fonction $\frac{u^{\propto+1}}{\propto+1}$.

Exemple :

La fonction $f(x)\ =2x(1-x^2)^{\sqrt{2}}$ admet pour primitive sur $]-1;1[$ la fonction

$f(x)=-\frac{(1-x^2)^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}$.

III$_2$- Croissance comparée de lnx ,$\boldsymbol{e^x}$ $\boldsymbol{et\ x^\propto}$

2.1- Limites de référence :

Propriétés :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. on a :

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^2} = 0$ 3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^\alpha} = +\infty$ 5)$\lim_{x\to-\infty} |x|^2\, e^x$=O

2) $\lim_{x\to 0^+} x^2 lnx = 0$ 4)$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = 0$ 6)$\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{e^x} = 0$

Remarque :

Lorsqu'on ne peut conclure directement, on peut conjoncture la limite d'une fonction comportant des fonction logarithme ou expo en remarquant que :

- La fonction expo soit plus vite que la fonction puissance ;
- La fonction soit plus que la fonction logarithme népérien

Application 1 :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \left|\frac{x-1}{x}\right|^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad , \; si\; x \neq 1 \\ \qquad f(1) = 0 \end{cases}$

On désigne par (c) la courbe représentative de f.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1

2) Etudier et tracer (c).

Résolution :

$$\begin{cases} f(x) = \left|\dfrac{x-1}{x}\right|^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad , \; si\; x \neq 1 \\ \qquad f(1) = 0 \end{cases}$$

1) Continuité et dérivabilité en 1 de f

- Continuité en 1,

$$f(x) = \left|\frac{x-1}{x}\right|^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}ln\left|\frac{x-1}{x}\right|}.$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)} = e^{-\infty} = 0$$

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0.$

Donc f est continue en 1.

- Dérivabilité en 1

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\frac{x-1}{x})}}{x-1}$$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)}}{e^{\ln(x-1)}}$

$= \lim_{x\to 1^+} e^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)\ln(x-1)-\frac{1}{\sqrt{2}}lnx} = +\infty$

Alors : $\lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

$\lim_{x-1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)}}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^-} \left(-\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)}}{1-x}\right)$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\frac{1-x}{x})}}{e^{\ln(1-x)}} = -\infty$$

$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$, donc f n'est pas dérivable en 1.

2) $Df =]-\infty; 0[\cup] \, 0; +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty}(fx) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$

$\lim_{x \to 0^<}(fx) = \lim_{x \to 0^>} f(x) = +\infty.$

Sens de variation

la fonction f est dérivable sur Df et sa derivée est :

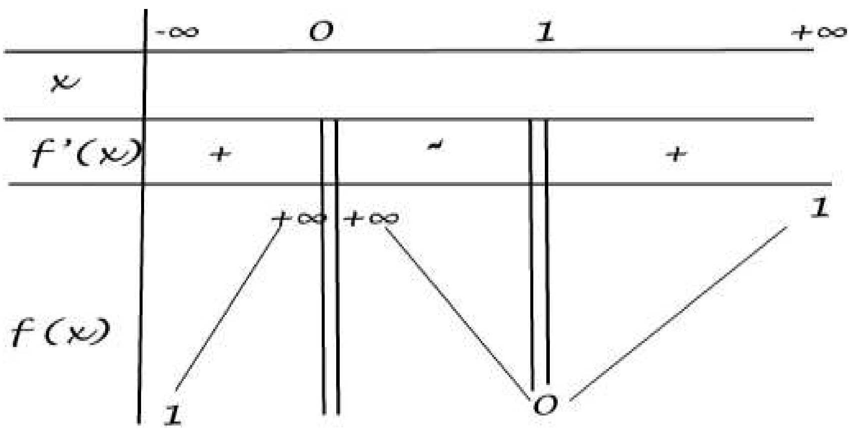
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}|x-1|}\left|\frac{x-1}{x}\right|^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

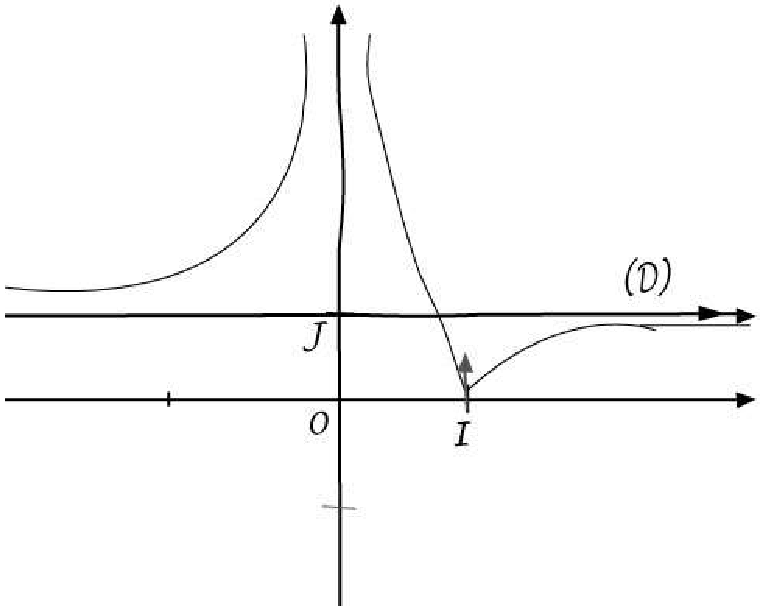
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^<} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^>} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$ 0	0 1	1 $+\infty$
$x-1$	+	+	
x	-	-	+
$f'(x)$	+	−	+

Tableau de variation





Fin

Chapitre 10 : DENOMBREMENT ET PROBABILITES

I. Analyse combinatoire

I_1 –**Notation factorielle**

$\mathbf{I}_{1.1}$ $-$ **Definition:**

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle factorielle de n, le produit des entiers positifs de 1 à n noté par :

$n! = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$

On lit « factorielle n ».

Exemple :

$3! = 3 \times 2 \times 1$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Par convention : $0! = 1$

$\mathbf{I}_2$ –**Permutation :**

$\mathbf{2.1}$ $-$ **Definition:**

Soit E un ensemble non vide de cardinal n ; (un est un entier naturel).

On appelle permutation de n éléments de E, toute suite ordonner formée à partir de de n éléments distincts de E.

On la note :$P_n = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$

Exemple :

Soit $E = \{a; b; c\}$

Le nombre de permutation des éléments de E est :

$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times = 6$

Les permutations des éléments de E sont : abc; acb; bac; bca; $cab\ et\ cba$.

$\mathbf{I}_3$ – **Arrangement avec répétition :**

$\mathbf{3.1}$ $-$ **Definition:**

Soit E un ensemble non vide.

On appelle arrangement avec répétition de k éléments parmi les n éléments de E, toute suite ordonnée de k éléments de E distincts ou non (non nécessairement distinct).

Le nombre est noté : $\boldsymbol{A_n^k = n^p}$**.**

$\mathbf{I}_4$ – **Arrangement sans répétition :**

$\mathbf{4.1}$ $-$ **Definition:**

Soit E un ensemble non vide.

On appelle arrangement sans répétition de k éléments de E, toute suite ordonnée de k éléments de E distincts deux à deux $(p < n)$.

On le note $\boldsymbol{A_n^k = \frac{n!}{(n-p)!}}$

Exemple :

On peut placer de 7^4 façons différentes 4 lettres distinctes dans 7 boites aux lettres.

Exercice d'application:

1) De combien de façons différentes, peut-on placer 4 lettres distinctes dans 20 boites aux lettres ?

2) A Partir de 3 lettres a, b et c, combien de mots de 2 lettres non nécessairement distincte peut-on former ?

3) De combien de façon différentes peut- on ranger 7 livres :

   a) Dans n'importe quel ordre ?

   b) Si 3 livres particuliers doivent rester ensemble ?

   c) Si 2 livres particuliers doivent prendre les positions extrêmes ?

4) Une classe comporte 9 garçons et 3 filles. De combien de façons peut-on faire un choix de 4 élèves.

   a) Quelconques ?

   b) Comprenant au moins une fille ?

   c) Comprenant exactement une fille ?

I_5 – Combinaison :

5.1 – Definition:

Soit E un ensemble non vide.

On appelle combinaison de k éléments de E, toute partie de E à k éléments.

On le note $\boldsymbol{C_n^k} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{p}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p})!}$

Exemple :

De combien de façons peut-on former un comité de trois personnes dans une assemblée de 10 hommes et 6 femmes ?

C'est une combinaison de 3 personnes sur un total de 16.

On a : $\boldsymbol{C_{16}^3 = \frac{16!}{3!(16-3)!} = 560}$

Il y a donc 560 façons différentes de former un comité de 3 personnes dans cette assemblée.

Quelques valeurs particulières :

$\boldsymbol{A_n^0 = 1}$

$\boldsymbol{A_n^n = n!}$

$\boldsymbol{A_n^1 = n}$

$\boldsymbol{C_n^0 = C_n^n = 1}$

$\boldsymbol{C_n^1 = C_n^{n-1} = n}$

Propriété :

Pour tous entiers naturels n et p tel que p soit inférieur ou égal à n, on a :

$\boldsymbol{C_n^{n-p} = C_n^p}$

Si de plus $\boldsymbol{0 < p < n}$, alors : $\boldsymbol{C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p}$

Résumé :

Types de tirages	**Ordre**	**Répétitions d'éléments**	**Dénombrement**
Successifs Avec remise	On tient compte de l'ordre	Un élément peut être tiré plusieurs fois	n^p (p-uplets)
Successifs Avec remise		Un élément n'est tiré qu'une seule fois	$\boldsymbol{A_n^k} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p})!}$ *(*arrangement)
Simultanés	L'ordre n'intervient pas		$\boldsymbol{C_n^k} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{p}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p})!}$ **(**Combinatoires)

II. Calcul de probabilité :

II_1 – Eventualité, Univers, Evènement

$1.1 -$ Definition 1:

On appelle Eventualité, une épreuve donnant un nombre fini de résultats. L'ensemble de toutes les éventualités est appelé l'Univers.

Exemple :

Le lancer d'une pièce de monnaie, le lancer d'un dé … sont des expériences aléatoires, car avant de les effectuer, on ne peut pas prévoir avec certitude quel en sera le résultat, résultat qui dépend en effet du hasard.

A cette expérience aléatoire, on associe l'ensemble des résultats possibles appelé univers. Ses éléments sont appelés éventualités.

$2.1 -$ Definition 2:

On appelle évènement, toute partie de l'univers des cas possibles Ω.

Les sous-ensembles de l'univers Ω sont appelés événements.

♦ Les événements formés d'un seul élément sont appelés événements élémentaires.

♦ Etant donné un univers Ω, l'événement Ω est l'événement certain.

♦ L'ensemble vide est l'événement impossible.

♦ L'événement formé des éventualités qui sont dans A et dans B est noté : $A \cap B$.

$A \cap B$ se lit « A inter B »

♦ L'événement formé des éventualités qui sont dans A ou dans B est noté : $A \cup B$.

$A \cup B$ se lit « A union B »

♦ Etant donné un univers Ω et un événement A, l'ensemble des éventualités qui ne sont pas dans A constitue un événement appelé événement contraire de A, noté $\overline{A}$ appelé complémentaire de A.

♦A et B sont incompatibles si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Pour décrire mathématiquement une expérience aléatoire, on choisit un modèle de cette expérience ; pour cela on détermine l'univers et on associe à chaque événement élémentaire un nombre appelé probabilité.

II_2 – Calcul de probabilités d'un évènement

$2.1 -$ Definition:

Ω est l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.

Une probabilité sur l'univers Ω est une application $\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0; 1]$ qui, à toute partie A de Ω associe le nombre réel $P(A)$ appelé probabilité de l'évènement A et qui vérifie les conditions suivantes :

- $0 \leq P(A) \leq 1$;
- $P(\Omega) = 1$, (probabilité de m'évènement certain) ;
- $P(\emptyset) = 0$,

$2.1 -$ Propriété :

Soit P une probabilité définie sur l'univers Ω et A et b deux évènements, on a :

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $A \cap B = \emptyset$, alors $P(A \cap B) = 0$, donc : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Longrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Si tous les évènements élémentaires de Ω ont la même probabilité, alors : $P(\Omega) = \frac{cardA}{card\Omega}$

$\mathbf{II_3}$ – Indépendance des évènements

$\mathbf{3.1}$ – Definition:

Soit P, une probabilité définie sur un univers Ω.

Deux évènements A et B sont dits indépendants pour la probabilité P, lorsque :

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

- Deux évènements sont dits indépendants lorsque la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre ;
- Si n épreuves sont indépendants, alors pour évènements $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ de chacun des univers associé à ces épreuves, on a :
  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times \ldots \times P(A_n)$.

Résumé :

Parties de E	Vocabulaire des événements	Propriété
A	A quelconque	$0 \leq P(A) \leq 1$
$\emptyset$	Evénement impossible	$P(\emptyset) = 0$
Ω	Evénement certain	$P(\Omega) = 1$
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont incompatibles	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
A	A est l'événement contraire de A	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
A, B	A et B quelconques	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemple :

On considère l'ensemble E des entiers de 20 à 40. On choisit l'un de ces nombres au hasard.

A est l'événement : « le nombre est multiple de 3 »

B est l'événement : « le nombre est multiple de 2 »

C est l'événement : « le nombre est multiple de 6 ».

Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap C)$ et $P(A \cup C)$.

$\mathbf{II_4}$ – Equiprobabilité

$\mathbf{4.1}$ – Definition:

On dit qu'il y a équiprobabilité quand tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Dans une situation d'équiprobabilité, si Ω a n éléments et si E est un événement composé de m événements élémentaires : $P(E) = \frac{\text{card E}}{\text{card }\Omega}$ où cardE et card Ω désignent respectivement le nombre d'éléments de E et de Ω.

On le mémorise souvent en disant que c'est le nombre de cas favorables divisé par le nombre de cas possibles.

Remarque :

Les expressions suivantes « dé parfait », « pièce parfaite », « cartes bien battues », « boule tirée de l'urne au hasard », «boule indiscernable au toucher»,

« boules indiscernables » … indiquent que, pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité.

Exemple 1 :

On lance deux fois de suite un dé équilibré.

1) Représenter dans un tableau les 36 issues équiprobables.
2) Calculer la probabilité des événements :
   A : « on obtient un double » ; B : « on obtient 2 numéros consécutifs »
   C : « on obtient au moins un 6 » ; D : « la somme des numéros dépasse 7 ».

Exemple 2:

On lance 4 fois de suite une pièce équilibrée.

1) Dresser la liste des issues équiprobables.
2) Quel est l'événement le plus probable : A ou B ?
   A : « 2 piles et 2 faces »
   B : « 3 piles et 1 face ou 3 faces et 1 pile »

$\mathbf{II_5}$ – Probabilité conditionnelle

$\mathbf{5.1}$ – Definition

Soit P une probabilité sur un univers des cas possibles Ω et soit a un évènement de probabilité non nulle.

Pour tout évènement B, on appelle de A sachant B, le nombre réel noté :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad ou \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple :

En fin de 1^{ere} S, chaque élève choisit une et une seule spécialité en terminale suivant les répartitions ci –dessous :

Par spécialité :

Mathématiques	Sciences physiques	SVT
40%	25%	35%

Sexe de l'élève selon la spécialité :

Spécialité / Sexe	Mathématiques	Sciences physiques	SVT
Fille	45%	24%	60%
Garçon	55%	76%	40%

On choisit un élève au hasard.

1) Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
2) a) Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants ?
   F : « l'élève est une fille », M : « l'élève est en spécialité maths ».
   b) Quelle est la probabilité que ce soit une fille ayant choisi spécialité mathématiques ?
   c) Sachant que cet élève a choisi spécialité mathématiques, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

On appelle probabilité de F sachant M cette probabilité (conditionnelle) et on la note $P_M(F)$ou $P_F(M)$.

Quelle égalité faisant intervenir $P(F \cap M)$, $P(F)$ et $P_M(F)$ peut-on écrire ?

Comparer $P(F)$ et $P_M(F)$ et en donner une interprétation.

d) Sachant que cet élève a choisi spécialité SVT, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

e) Comparer $P_S(F)$et $P(F)$, et en donner une interprétation.

5.2 – Arbres pondérés

Règles de construction

La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est 1.
La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet.

Exemple

On jette une pièce.

- Si on obtient pile, on tire une boule dans l'urne P contenant 1 boule blanche et 2 boules noires.
- Si on obtient face, on tire une boule dans l'urne F contenant 3 boules blanches et 2 boules noires.

Représenter cette expérience par un arbre pondéré.

Remarque :

Si A et B sont tous deux de probabilité non nulle, alors les probabilités conditionnelles p(A/B) et p(B/A) sont toutes les deux définies et on a : p(A ∩B) = p(A/B)p(B) = p(B/A)p(A).

II_6 – Schéma de Bernoulli

6.1 – Definition :

1- Une épreuve de Bernoulli est une épreuve ayant deux éventualités ;
2- Un schéma de Bernoulli est une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois de façons indépendante une épreuve de Bernoulli.
3- Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves où pour chaque épreuve, la probabilité de succès est notée P et celle de l'échec est notée $1-P$.
La probabilité d'obtenir exactement k succès $(0 \leq k \leq n)$ au cours de ces n épreuves est : $P_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

Exemple :

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :
Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs.
Chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.
On choisit un individu au hasard.

1) Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
2) Quelle est la probabilité
   a) qu'il soit malade et qu'il ait un test positif ?
   b) qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif ?
   c) qu'il ait un test positif ?
   d) qu'il ait un test négatif ?
3) Calculer la probabilité
   a) qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif ?
   b) qu'il soit malade, sachant que le test est négatif ?
4) Interpréter les résultats obtenus aux questions 3a et 3b.

III. Variables aléatoires :

III_1 – Notion de variable aléatoire

1.1–Définition :

On appelle variable aléatoire X sur un univers Ω, toute application de Ω vers $\mathbb{R}$.
Vocabulaire et notation :
L'ensemble des valeurs prises par X noté $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est appelé univers image de Ω par X.

III_2 – Lois de probabilité

2. 1–Définition :

Soit P, une probabilité définie sur l'univers Ω.
La Loi de probabilité d'une variable aléatoire X sur Ω est l'application qui, à toutes valeurs x_i prises par X, associe $P(X = x_i)$.
Généralement, on la représente sur un tableau.

x_i	x_1	x_2	....	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$		$P(X = x_n)$

2. 2–Propriété :

Pour toute variable aléatoire X prenant les valeurs x_1, x_2, …, x_n, on a :
$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_n) = 1$
On écrit : $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$

III_3 – Fonction de répartition

3. 1–Définition :

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω muni d'une probabilité P.
La fonction de répartition de X est l'application de $\mathbb{R}$ vers $[0; 1]$ définie par :

$$F(X) = P(X \leq x_i)$$

III_4 – Espérance mathématique, variance et écart-type

4. 1–Définition :

On appelle respectivement espérance mathématique de X, variance de X et écart-type de X , les nombres suivants :
- L'espérance mathématique est le nombre E(X) défini par : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$.
- La variance est le nombre V défini par : $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$.
- L'écart - type est le nombre défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exercice d'application :

Une boite contient 4 boules rouges ,3 boules vertes et n boules jaunes ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$). On tire simultanément 2 boules de la boite et on suppose que les tirages sont équiprobables.

1) Exprimer en fonction de n, les probabilités des évènements :
   A : « Les deux boules sont jaunes »
   B : « Le tirage est unicolore »
   C : « Le tirage est bicolore »
2) On suppose que $P(A) = \frac{3}{13}$; déduire n, puis P(B) et P(C).
3) On suppose que $n = 7$. On répète 10 fois l'expérience en remettant dans la boite après chaque tirage, les deux boules tirées. X est la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de réalisation de l'évènement B.
   a) Calculer la probabilité des évènements $(X = 2)$ et $(X \geq 9)$.
   b) Calculer l'Esperance mathématique de X et donner une interprétation du résultat.

$\mathbf{III_5}$ – Loi de Binomiale

Propriété :

On considère un schéma de Bernoulli à n épreuves. On note P la probabilité de succès, X est variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de succès obtenu au cours de ces n épreuves.

La loi de probabilité de x est : $\boldsymbol{P_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, 0 \leq k \leq n.}$

Elle est appelée loi Binomiale de paramètre $(n; p)$

Exemple :

Une urne contient quatre boules rouges, trois boules vertes et n boules jaunes ; n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On tire simultanément deux boules de l'urne et on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

c) Calculer en fonction de n, la probabilité des événements suivants :
   A « Obtenir deux boules de même couleur »
   B « Obtenir deux boules de couleurs différentes »

d) On suppose que la probabilité d'obtenir deux boules jaunes est de $\frac{3}{13}$. Déterminer n ; puis $P(A)$ et $P(B)$.

e) On suppose que $n = 7$. On repère cinq fois l'expérience en remettant dans l'urne après chaque tirage, les deux boules tirées. Soit X le nombre de fois où l'événement A est réalisé au cours de ces cinq répétitions. Déterminer la loi de probabilité de X.

Théorème :

Pour une loi Binomiale de paramètres $(n; p)$:

$E(X) = np$ et $\sigma(X) = npq$

<u>Chapitre 11</u> : SUITES NUMERIQUES

I. Etude globale d'une suite numérique

I_1 **–Definition d'une suite numérique**

$\mathbf{I_{1.1}}$ **– Definition:**

On appelle suite numérique, toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ généralement notée$(u_n)_n$, $n \in \mathbb{N}$ ou tout simplement(u_n).

- Une suite peut être définie par une ***formule explicite*** qui permet de calculer u_n en fonction de n telle que : $\begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longrightarrow u_n = n + (-1)^n \end{array}$
- Une Suite peut-être définie par son ***premier terme*** et une ***formule de récurrence*** telle que : $\begin{cases} u_n = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

$\mathbf{I_2}$ **–Suites minorées, majorées et bornées.**

$\mathbf{I_{2.1}}$ **– Définition :** Soit$(u_n)_n$, Une suite numérique.

- $(u_n)_n$, est dite minorée, s'il existe un nombre réel m tel que : pour tout entier naturel n, on a : $m \leq u_n$;
- $(u_n)_n$, est dite majorée, s'il existe un nombre réel M tel que : pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq M$;
- $(u_n)_n$, est dite bornée, si elle est à la fois minorée et bornée i.e : $m \leq u_n \leq M$.

Les nombres réels m et M sont respectivement appelés minorant et majorant de$(U_n)_n$.

Exemple :

Soit $(u_n)_n; n \in \mathbb{N}$, la suite définie par : $u_n = \frac{n(-1)^n + \cos n}{n+1}$

Démontrons que u_n est bornée.

En effet, $|u_n| = \left|\frac{n(-1)^n + \cos n}{n+1}\right|$

$$= \frac{1}{n=1}|(-1)^n \times n + \cos n|$$

$$\leq \frac{1}{n+1}(|(-1)^n|.|n| + |cosn|) \text{ car } |x+b| \leq |x+b| \text{ (inégalité triangulaire)}$$

$$\leq \frac{1}{n+1}(|n| + |\cos n|) or\ |cosn| \leq 1\ et\ |n| = n$$

$$\Longrightarrow |U_n| \leq \frac{1}{n+1}(n+1) \Longrightarrow |u_n| \leq 1$$

Donc U_n est minorée par -1 et majorée par 1, d'où (u_n) $est\ bornée$.

$\mathbf{I_{2.2}}$ **– Théorème :**

En général, pour démontrer qu'une suite (U_n) est bornée, l'un des procédés ci-dessous est utile.

- Encadrer le terme général de la suite (U_n) par deux nombres réels.
- Etudier la fonction f lorsque (U_n) est du type $U_n = f(n)$.
- Faire un raisonnement par récurrence.

$\mathbf{I_3}$ **–Sens de variations**

$\mathbf{I_{3.1}}$ **–Théorème :**

Pour étudier le sens de variation d'une suite Numérique, l'une de méthodes suivantes est admise.

- Comparer u_n et u_{n+1}, ceci revient à étudier le signe de : $u_{n+1} - u_n$
- Comparer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et 1 pour une suite à terme positif.
- Raisonner par récurrence lorsque u_n est définie par une formule de récurrence $(ie\ u_{n+1} = f(u_n)$

Exemple 1 :

Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_n = \frac{3n+2}{2n-1}$

Procédons par deux méthodes différentes :

<u>Méthode 1</u> : comparons $u_{n+1} - u_n$

On a: $u_{n+1} - u_n = \frac{3(n+1)+2}{2(n+1)-1} - \frac{3n+2}{2n-1}$

$= \frac{3n+5}{2n+1} - \frac{3n+2}{2n-1}$

$= \frac{(3n+5)(2n-1)-(2n+2)(3n+2)}{(2n+1)(2n-1)}$

$= \frac{6n^2-3n+10n-5-6n^2-4n-3n-2}{4n^2-1}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{-7}{4n^2-1} < 0 \Longrightarrow u_{n+1} - u_n < 0,$

Donc $\forall\ n \in \mathbb{N}$, donc U_n est strictement decroissante.

<u>Méthode 2</u> : posons $u_n = f(n)$

On a: $\begin{matrix} f:\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \to f(x) = \frac{3x+2}{2x-1} \end{matrix}$

$f(x) = \frac{3x+2}{2x-1} \Longrightarrow f'(x) = \frac{3(2x-1)-2(3x+2)}{(2x-1)^2} = \frac{-7}{(2x-1)^2} < 0,$

$f'(x) < 0$,f est strictement decroissante, donc u_n est decroissante.

Exemple 2:

Etudions le sens de variation de la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{3^n}$

Comparons : $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ $et\ 1$

On a: $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3^{n+1}} \times 3^n = \frac{3^n}{3^n \times 3} = \frac{1}{3} < 1$

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1}{3} < 1$, donc u_n est strictement decroissante.

$\mathbf{I_4}$ –Suites monotones :

$\mathbf{I_{4.1}}$ –<u>Ppropriétés</u> :

Soit$(u_n)_n, n \in \mathbb{N}$, une suite numérique. si $\forall n \in N$:

- $u_n \leq u_{n+1}$, alors la suite $(u_n\ )$ est croissante ;
- $u_n \geq u_{n+1}$, alors la suite $(u_n\ )$ est décroissante ;
- $u_n = u_{n+1}$, alors la suite $(u_n\ )$ est constante.

Remarque :

- Une suite (u_n) est dite monotone si elle est soit croissante, soit décroissante ;
- Une suite (u_n) est dite stationnaire, si elle est constante à un certain rang.

$\mathbf{I_5}$ –<u>Suites arithmétiques, suites géométrique</u>

$\mathbf{I}_{5.1}$ –**<u>Suites arithmétiques</u>**

$\mathbf{I}_{5.1.1}$ –**Definition :**

Une suite (U_n) est dite ***arithmétique*** lorsqu'il existe un nombre réel $\boldsymbol{r}$ appelé ***raison*** tel que pour tous entiers naturels n, p; on a :

$$u_{n+1} = u_n + r \text{ : Formule de récurrence}$$

Si $n = 0$, alors $u_n = u_0 + nr$

Si $n = 1$, alors $u_n = u_1 + (n-1)r$

Si $n = 2$, alors $u_n = u_2 + (n-2)r$

D'une façon générale, pour tout entier naturel $n \; et \; p$, on a :

$$U_n = U_p + (n-p)r \text{ : Formule explicite}$$

Retenons bien :

Pour démontrer qu'une suite est ***arithmétique***, il suffit de prouver que la différence entre deux termes consécutifs est constante, i.e. : $U_{n+1} - U_n = r, n \in \mathbb{N}$.

$\mathbf{I}_{5.1.2}$ –**Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique:**

$(u_n)_n$, est une suite arithmétique,$\forall \; n \in \mathbb{N}$, on a :

$\boldsymbol{U_1 + U_2 + \; ... + U_n = n \times \frac{U_1+U_n}{2}}$ et $\boldsymbol{U_0 + U_1 + U_2 \; ... + U_{n-1} = n \times \frac{U_0+U_{n-1}}{2}}$

En particulier : $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

$\mathbf{I}_{5.2}$ –**Suites géométriques**

$\mathbf{I}_{5.2.1}$ – **Définition :**

Une suite (u_n) est dite géométrique lorsqu'il existe un nombre réel $\boldsymbol{q}$ appelé raison tel que pour tout nombre entier naturel n, p; On a :

$$u_{n+1} = qu_n \text{ : Formule de récurrence)}$$

Si $n = 0$, alors : $u_n = u_0 q^n$

Si $n = 1$, alors : $u_n = u_1 q^{n-1}$

Si $n = 2$, alors : $u_n = u_2 q^{n-2}$

D'une façon générale, pour tout entier naturel $n \; et \; p$, on a :

$$u_n = u_p q^{n-p}\text{: Formule explicite}$$

<u>Retenons bien</u> :

Pour démontrer qu'une suite est ***géométrique***, il suffit de prouver que le quotient de deux termes consécutifs est constant, i.e. : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q, (q \in \mathbb{N})$

$\mathbf{I}_{5.2.2}$ –**Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique:**

$(U_n)_n$, est une suite géométrique de raison $q, (q \neq 1)$,$\forall \; n \in \mathbb{N}$, on a :

$U_1 + U_2 + \; ... + U_n = U_n \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et $U_0 + U_1 + U_2 \; ... + U_{n-1} = U_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

$\mathbf{I}_{5.3}$ –**Convergence et divergence d'une suite :**

- Une suite (U_n) est dite ***convergente*** lorsqu'elle admet une limite finie (l) lorsque $n \to +\infty$
- Une suite (U_n) est dite ***divergente*** lorsqu'elle admet une limite infinie(∞) lorsque $n \to +\infty$

II. Limite d'une suite numérique :

II_1 –Calcul de limites

$\mathrm{II}_{1.1}$ –Propriété:

Soit (u_n), une suite definie par : $u_n = f(n)$ où $f$est une fonction numérique. Si f a une limite en $+\infty$, alors (u_n) a une limite et on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x)\,, (la\ réciproque\ est\ fausse)$

Exemple :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = 0$, donc la suite $(v_n)_{n,}$ de terme général $v_n = ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$ converge vers 0.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (x\cos\frac{1}{x}) = +\infty$, donc la suite $(w_n)_n$ de terme général $w_n = n\ cos\frac{1}{n}$ est divergente.

II_2 –Convergence d'une Suite arithmétique et géométrique.

$\mathrm{II}_{2.1}$ –Théorème :

1) Soit $(u_n)_{n,}n \in \mathbb{N}$, une suite arithmétique de raison r,$\forall\ n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$
   - Si $r > 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (nr) = +\infty$; $(u_n)_{n,}$est divergente ;
   - Si $r = o$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$ la suite (u_n) converge donc vers u_0 ;
   - Si $r < 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (nr) = -\infty$, $(u_n)_{n,}$est divergente ;
2) Soit$(u_n)_{n,}n \in \mathbb{N}$, une suite géométrique de raison q et de 1er terme $u_0 \neq 0, u_n = u_0q^n$
   - Si $|q| > 1$, alors la suite (u_n) est divergente.
   - Si $|q| < 1$, alors la suite (u_n) est convergente.
   - Si $|q| = 1$, alors la suite (u_n) est stationnaire $(u_n = u_0)$

$\mathrm{II}_{2.2}$ –Propriétés et comparaison:

On considère les suites (u_n) ,(v_n) et(w_n) et l un nombre réel.

- Si (u_n) et (u_n) sont convergentes et si à partir d'un certain indice $(rang), u_n \leq v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$;
- Si à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n\ et \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$
- Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$;
- Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$;
- Si la suite (v_n) est telle qu'à partir d'un certain rang partir, on ait :

$$|u_n - l| < v_n\ et\ \lim_{n\to+\infty} v_n = 0, alors\ \lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

II_3 –Convergence d'une suite monotone :

- Toute suite croissante et majorée est convergent ;
- Toute suite décroissante et minorée est convergente ;
- Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$
- Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$

$\mathbf{II_3}$ –Image d'une suite par une fonction:

$\mathbf{II_{3.1}}$ –Propriété :

Soit f une fonction, Df son domaine de définition et (U_n)une suite d'éléments de Df.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$et $\lim\limits_{n\to a} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l.(finie\ ou\ infinie)$

$\mathbf{II_{3.2}}$ –Autre propriété :

Soit g une fonction continue sur un intervalle k, (U_n)une suite à valeur dans k définie parla relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$

Si (u_n) est convergente, alors sa limite est une solution de l'équation $g(x) = x$.

La solution $\propto$ de cette équation est un point fixe de g.

Retenons bien :

Si $g(x) = x$ n'admet pas de solution, alors (u_n) est divergente.

Si(u_n) converge vers l et si f est continue en l, alors : $f(l) = l$.

$\mathbf{II_4}$ –Croissances comparées des suites $\boldsymbol{a^n}$, $\boldsymbol{n^\alpha\ et\ ln(n)}$:

$\mathbf{II_{4.1}}$ –Propriété :

Pour tout n, et $\forall\ a \in \mathbb{R}$ on a :

- Si $\propto > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln x}{n^\propto} = 0$
- Si $\propto > 1$ et $\propto > o$, alors ; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$
- Si $0 < a\ < 1$ et $\propto < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = +\infty$

$\mathbf{II_5}$ – Suites adjacentes :

$\mathbf{II_{5.1}}$ –Définition :

Soit (u_n) une suite croissante et (v_n) une Suite décroissante. On dit que (u_n)et (v_n) sont adjacentes si : $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Exercices d'application

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}, \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer u, u_2, u_3 et u_4 et prouver que $\forall\ n \in \mathbb{N}, u_n + 1 > 0$.
2) Démontrer que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$ est une suite arithmétique.
3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n et étudier la convergente de la suite (u_n).

Exercice 2

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 2} \end{cases}$

1) Démontrer que la suite $v_n = \frac{1}{u_n}$ est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
2) Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
3) Calculer $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n.

4) Etudier la convergence de la suite u.

Exercice 3

1) Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}, \forall \in \mathbb{N} \end{cases}$
   a) Calculer u_1, u_2 et u_3
   b) Comparer les 4 premiers termes de la suite u aux 4 premiers termes de la suite W définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \frac{n}{n+1}$
2) Soit v la suite définie par : $v_n = ln\left(\frac{n}{n+1}\right), \forall \in \mathbb{N}$
   a) Montrer que $v_0 + v_1 + v_3 = -ln4$
   b) On pose : $s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. Exprimer $s_n$en fonction de n.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+2}, \forall \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Démontrer que pout entier $n$de $\mathbb{N}$, $u_n \neq 2$
2) On pose : $V_n = \frac{u_n+1}{u_n+2}$; $\forall \in \mathbb{N}$
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.
   b) Exprimer V_n en fonction de n
   c) En déduire u_n en fonction de n
   d) Calculer la limite de (V_n) lorsque n tend vers $+\infty$
   e) Calculer en fonction de n, la somme $s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

<u>Chapitre 12</u> : LES INTEGRALES

I. Intégrale d'une fonction continue

I_1 –Definition de l'intégrale d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

On appelle intégrale de a à b de, le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I.

On note : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a))$

On calcule une intégrale, il y a au moins une étape de calcul où l'on détermine une primitive F puis une étape de calcul où l'on calcule F(b) - F(a).

Exemple :

Calculer :

a) $\int_0^1 xdx$
b) $\int_1^2 x^2dx$
c) $\int_0^\pi cosxdx$

I_2 –Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$
2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3) $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx$

I_3 –Linéarité de l'intégrale

Propriété

f et f sont deux fonctions continue sur un intervalle I.

1) $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$
2) $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$
3) $\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Exemple :

Calculer : $I = \int_1^2 cos^2xdx$

I_3 –Signe de l'intégrale

Propriété

f et g sont deux fonctions continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I.

- Si $f \geq 0$ sur $[a\,; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

I_4 –Inégalité de la moyenne

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I a et b deux éléments de I.

1) **Si pour tous réels m et M et pour tout élément x de $[a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors :** $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

2) **Si M est un réel tel que pour tout élément x de $[a;b]$, $|f(x)| \leq M$, alors :** $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|)$.

II. Technique de calcul d'intégrale :

$\mathbf{II_1}$ – Technique de base

1. 1–Primitives usuelles

Tableau des primitives

Fonction	$\frac{u'}{u}$	$u'e^u$	$u'u^\alpha$	$u' \times v' \circ u$
Primitive	$ln\|u\|$	e^u	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$v \circ u$

Exemple : Calculer

a) $\int_1^2 \left(\frac{2x+4}{x^2+4x+1}\right)dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosxe^{sinx}dx$

c) $\int_{-1}^2 2(2x+3)^4dx$

1. 2–Integration par parties

Propriété :

u et v sont deux fonctions dérivable sur un intervalle I telles que leurs dérivées soient continues sur I a et b deux éléments de I.

On a : $\int_a^b u'(x).v(x)dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u(x).v'(x)dx$

Exemple : Calculer

a) $\int_0^1 xe^x dx$

b) $\int_1^2 lnxdx$

c) $\int_{-1}^2 \frac{lns}{x}dx$

1. 3–Changement de variables

Propriété :

Pour intégrer l'intégrale : $\int_a^b f(\alpha x+\beta)dx$, avec $a \neq 0$, on peut utiliser le procéder suivant :

- Faire le changement de variables en posant : $u = \alpha x+\beta$, alors on obtient : $du = \alpha dx$;
- Utiliser l'intégrale : $\int_a^b f(\alpha x+\beta)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} \frac{1}{\alpha}f(u)du = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(u)du$

Exemple : Calculer

a) $\int_{-3}^{-2} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$

b) $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$

c) $\int_0^1 x\sqrt{x+1}dx$

1. 2–Integration des fonctions paires, impaires et périodique

Propriété :

1) Soit f une fonction continue sur un intervalle I symétrique par rapport à l'origine.

- Si f est paire, alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$;
- Si f est paire, alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

2) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ périodique de période P.

Pour tous nombres réels a et b, on a :

- $\int_{a+p}^{b+p} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$
- $\int_{a}^{a+p} f(x)dx = \int_{0}^{p} f(x)dx$

$\mathbf{II_2}$ – Intégration de fonctions particulières

2. 1–Intégration de fonctions trigonométriques

Exemple :

Calculer $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(cos^3xxsins + 3sin^3x)dx$

2. 1–Intégration de fonctions rationnelles

Exemple : Calculer

a) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2-x-6}dx$

b) $\int_{1}^{2} \frac{1}{x(x^2+1)}dx$

c) $\int_{0}^{2} \frac{8x+5}{2x^2+3x+1}dx$

Exercice d'application :

1) On donne $\mathrm{I} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^2dx$; $J = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^2dx$

a) Calculer $\mathrm{I}+J$ et $\mathrm{I}-J$

b) En déduire I et J

2) On considère les intégrales I et J suivantes : $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(x+1)cos^2xdx$ et

$J = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(x+1)sin^2xdx$

a) Calculer $\mathrm{I}+J$ et $\mathrm{I}-J$

b) En déduire I et J

3) On considère les intégrales I et J suivantes : $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} sin^2xcos^4xdx$ et

$J = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} cos^2xsin^4xdx$

a) Calculer $\mathrm{I}+J$ et $\mathrm{I}-J$

b) En déduire I et J

Fin

Bibliographie

- Bampena Youg E, Terminale SM, Analyse et probabilité, volume 1, Collection Maths faciles, Edition Sopecam 2012, paru en 2013.

- C. Gauthier, Ph. Roger, C. Thiercé, Analyse Terminale (Cet E) nouvelle édition, Hachette, septembre 1986, parue en Août 1988

- C.Talamoni, V. Brun, JP. Beltramone, J. Labrosse, A.Truchan, O.Sidokpohou, C. Merdy, Déclic Maths Terminale S spécifique, Edition 2012 Paru le 16 mai 2012 Scolaire / Universitaire

- CIAM, Mathématiques Terminale SM, Edition Edicef 1999, paru en novembre 2004 ; CIAM, Mathématiques Terminale SC, Edition Edicef 1999, paru 2013

- Nana Léopold, Mathématique Terminale S, Collection Le Zénith, Edtion N.A.G

- V.Tégninko, D.Sielinou, A.Bouda, R.Pokam, R.Boudy, C.Fouodji, L'Excellence en mathématiques Terminale(D), Edition NMI Education, 1ère Edition, parue en 2014

Partenariat
Lycée Saint François Xavier
Label 109

Livret à ne pas vendre

Contact
info@label109.org